A. Gawroński Andrzej

Ex libris Adalbertus Mabowski

Anno domini 1820.

ALGIEBRA

DLÁ

SZKÓŁ NARODOWYCH.

Pierwszy raz wydana.

Nieoprawná . . . . Zł. 6.
Oprawná w papiér . . . . Zł. 6 gr. 10.

Roku 1782.

w Marywilu u *Michała Grölla* B. J. K. Mci Nro 24 pod znakiém Poëtów, i po wszystkich Szkołach w Kraiu.

Dziéło *Algiebra*, ułożoné przez Jmci Pana Lhuilier Obywatela Geneweńskiégo, a w Towarzystwie nauk w témże Mieście ustanowioné policzonégo, które za ogłoszeném w Polszcze i w obcych kraiach uczonych wezwaniém, z pomiędzy innych potwiérdzénié i nagrodę odebrało, od Towarzystwa do Xiąg Eleméntarnych roztrząśnione, a przez Jmci X. Gawronskiego Kanonika Krakowskiégo Lektora J. K. Mci, i w témże Towarzystwie zasiadaiącégo na Polski ięzyk z Francuzkiégo przełożoné, Szkołóm Narodowym do użycia podług przepisów naszych podaiémy. w Warszawie na Sessyi naszéy dnia 2 Października Roku 1778.

IGNACY Xżę MASSALSKI, *Biskup Wileński Prezyd.*

MICHAŁ Xżę PONIATOWSKI, *Biskup Płocki.*

AUGUST Xżę SUŁKOWSKI, *Woiewoda Kaliski.*

JOACHIM CHREPTOWICZ, *Podkanclerzy W. X. Litt.*

MICHAŁ MNISZECH, *Sekretárz W. Litt.*

HYACYNT MAŁACHOWSKI, *Referendarz Koronny.*

IGNACY POTOCKI, *Pisárz W. W. X. Litt.*

ADAM Xżę CZARTORYSKI, *Generał Ziem Podolskich.*

JĘDRZÉY MOKRONOWSKI, *Gen. Insp. Woysk Kor.*

STANISŁAW Xżę PONIATOWSKI, *Generał Lieut. Woysk Koronnych.*

FRANCISZEK BIELINSKI, *Starosta Czérski.*

ANDRZEY ZAMOYSKI, *Kawaler Orderu Orła Białégo.*

PRZESTROGA DLÁ NAUCZYCIELÓW.

Lubo podług uſtáw Prześwietnéy Kommiſſyi Edukacyynéy, Nauka Algiebry przez ciąg lát trzech miała bydź dáwaná, a zaczynaiąc ſię w Klaſſie IV. wráz z drugą Jeometryi częścią zabiérać miała ieſzcze po dwie godziny na tydzień i w Klaſſie V. dwuletniéy; że iednak nieprzerwany związek wiadomości Matematycznych, a w ſzczególności Algiebry, i ciągłé w nich poſtępowanié od rzeczy iednych do drugich, byłoby iſtotną przeſzkodą dlá Uczniów piérwſzoletnich Klaſſy V, do zrozumiénia tych Twiérdzéń i Zagadnién, których zrozumiénié Uczniom drugoletnim téyże Klaſſy iużby łatwieyſzé było, iako maiącym do tego wiadomości poprzedzaiącé z Nauki podanéy ſobie w roku piérwſzym téy Klaſſy; więc za zezwoléniem Prześwietnéy Kommiſſyi Edukacyynéy takowy czyni ſię porządek i odmiana względém czaſu uczénia Algiebry w Szkołach Wydzáłowych, do których ſtóſować ſię maią i inné ſzkoły na trzy tylko Klaſſy podzieloné.

Gdy w czwártéy Klaſſie, w piérwſzych mieſiącach roku ſzkolnégo zakończoná będzie piérwſzá Część Jeometryi; odłożywſzy drugą Część do Klaſſy Piątéy, zacznie Nauczyciel dáwać zaráz Algiebrę, wyznáczaiąc iey té ſamé godziny, które w Uſtawach ſą na drugą Część Jeometryi, w raz z Algiebrą poświęconé. Sześć piérwszych Rozdziáłów téy Nauki wyłożyć Uczniôm w tym roku staraniém Jego będzie: pamiętaiąc zawsze na to, aby nie postępowáł daléy z Uczniami, póki piérwéy ne będzie przeświadczony, że iuż dobrze to, co poprzedziło, poięli. W Piątéy Klassie piérwszégo roku, tymże Ucznióm dáwać będzie drugą Część Jeometryi, przypomniáwszy im Część piérwszą sposobém w Ustawach wyrażonym. Czas na tę Naukę tén sám má bydź łożony, który się wyznaczył na Algiebrę podług Ustáw. Gdy na drugi rok ci sami Uczniowie zostaną, i przybędą do nich z Klassy IV. Uczniowie piérwszoletni; tak dlá tych, iak i dlá owych kończyć będzie Nauczyciel Algiebrę, któréy iuż sześciu piérwszych Rozdziáłów nauczyć się powinni byli w Klassie IV, a dlá lepszégo o tém zapewniénia się powtórzy té Rozdziały, zadaiąc różne z nich Ucznióm zagadniénia. Czas téy Nauki w roku drugim będzie ténże sám, który Przeświétná Kommissyá Edukacyyná iuż w Ustawach swoich przepisała. Tym sposobém i ciąg nieprzerwany Algiebry zachowá się, i co Nauczyciel Matematyki wykłádac będzie Ucznióm drugolétnim Klassy V, to równie i od Uczniów piérwszoletnich będzie mogło bydź zrozumiané: bo tak ci, iak i tamci iednakowé do tego przysposobiénié mieć będą w Klassie IV.

RE-

REIESTR ROZDZIAŁÓW.

ROZDZIA'Ł I.

Zagadniénia, w któré iedna tylko niewiadomá ilość wchodzi, i samé ilości całkowité - - - - . karta . . 1.

ROZDZIA'Ł II.

Zagadniénia, w któré wchodzą ilości ułomkowé - - - 74.

ROZDZIA'Ł III.

Zagadniénia, w któré więcéy wchodzi niż iedén wyráz niewiadomy - 110

ROZDZIA'Ł IV.

Algiebra ogólná - - - - - 139.

ROZDZIA'Ł V.

O Proporcyach Arytmetycznych i Jeometrycznych ogólnie uwáżanych . 173.

ROZDZIA'Ł VI.

Zagadniénia drugiégo stopnia - - - - - 188.

ROZDZIA'Ł VII.

O Ciągach Arytmetycznych - - - - - 270.

ROZDZIA'Ł VIII.

O Ciągach Jeometrycznych i o Logarytmach - - - - 293.

ROZDZIA'Ł IX.

Zagadniénia niewyznaczoné, i wstęp do Zagadnień Diiofantycznych - 334

ZBIÓR SŁÓW POLSKICH

albo nowych, albo mniéy znanych, użytych w téy Xiędzie, z przydanémi obok ſłowami łacińſkiémi, toż ſamo w używaniu Matematyków znaczącémi.

Beziſtotny	Imaginarius.
Ciąg	Progreſſio.
Czynnik	Factor.
Iſtotny	Realis.
Mianowanié	Denominatio.
Mnogość	Potentia *albo* Dignita
Nadmiar	Exceſſus.
Niedomiar	Defectus.
Nawias	Parentheſis.
Odiemnik	Subtrahendus.
Odiemny	Minuendus.
Oddzielnie	Abſtractè.
Oddzielny	Abſtractus.
Półdwóyny	Subduplus.
Przerabianié	Reductio.
Przydaynie	Poſitivè.
Przydayny	Poſitivus.
Równanié	Æquatio.
Równoraźnia	Parabola.
Rozbiór	Analyſis.
Rozbiorowy	Analyticus.
Rozwiązanie	Solutio.
Spółczynnik	Coefficiens.
Spráwdzénié	Verificatio.
Strona równania	Membrum æquationis.
Szereg	Series.
Toſamość	Identitas.
Uiémny	Negativus.
Układ	Syſtema.
Warunek	Conditio.
Węgielnica	Norma.
Wielokrotny	Multiplus.
Wykładnik	Exponens.
Wymiar	Dimenſio.
Wyráz	Terminus.
Wyznaczony	Determinatus.
Wzaiemny	Reciprocus.

ALGIE-

ALGIEBRA

ROZDZIÁŁ I.

Zagadniénia, w które iedna tylko niewiadomá ilość wchodzi, i ſamé ilości cáłkowité.

1. Działania Arytmetyki, ſą około znaków wyrážaiących ilości ſamé wiadomé, końcém dochodzénia z nich ilości niewiadomych.

Pod dziáłania Algiebry podpádaią bez braku tak wiadomé, iako niewiadomé ilości, z których piérwſzé od drugich rozmaitémi ſię ſpoſobami póty oddziélaią; póki wážność drugich nie będzie oznaczoná przez piérwſzé w wyrazach iak náyprościeyſzych. Na tę iednę różnicę Algiebry od Arytmetyki, wzgląd mieć w początkach będziémy.

Uwági w Arytmetyce uczynioné, względém znaków z ſamégo ludzi upodobania wybranych na wyrażénie naſzych wyobrażéń, a wſzczególności na wyrażénié wielkości, té, mówię, uwági, ieżeli nie zniéść zupełnie, tedy przynáymniéy zmnieyſzyć powinny té trudności, które na piérwſzé weyźrzénié mogłyby ſię komu ſtáwiać przed oczy, z przyczyny różnicy dopiéro wzmiánkowanéy.

2. Krótkość znaków używanych w Arytmetyce, na wyrażénié wielości rzeczy iakich, a zatém i łatwość wyſtawiénia ſobie w myśli tychże rzeczy patrząc na té znaki, pokazuie nám użytek iedén z náyznakomitſzych w przybraniu tych ſkróconych znaków, na mieyſcé ilości, któré ſię przez nié wyrážaią. Z tegoż powodu wprowadzoné ſą i znaki ukazuiącé ilości niewiadomé. Gdyby poięcié naſzé nie było tak, iak ieſt, niedoſkonałé; nie trzebaby nám téy pomocy. Stworzénia nie tak, iak my, ograniczoné, patrzyłyby podobno razém na związek wiadomości danych w zadaniu, z odpowiedzią żądaną, bez ſzukania tych śrzodków, przez któré, dlá ſłabości naſzégo poięcia, przechodzić muſimy.

3. Aby ſię tém widoczniéy przeświádczyć, iż znaki na wyrażénié ilości niewiadomych bardziéy daleko dlá wygody, niż z potrzeby ſą wprowadzoné; użyiémy w wielu przykładach dwoiakiégo ſpoſobu: z których w iednym zdáwać ſię będzie, że nad ſamémi tylko wiadomémi ilościami, tak właśnie iak w Arytmetyce, rozumuiémy, w drugi zaś wnidą znaki ilości niewiado-

wiado-

wiadomych, i przez ogólné reguły (które na ſwoiém mieyſcu podámy) dochodzić będziémy z pewnością niezawodną célu zamierzonégo. Piérwſzy nazwiémy *ſpoſobém poſtępowania Arytmetycznym*, albo *przez rozumowanié*, drugi *Algiebraicznym*.

4. Tén dwoiaki poſtępowania ſpoſób tym z większym będzie użytkiém, że uczących ſię Algiebry wprawi oráz w Loikę praktyczną. Większá część Uczniów, którzy w dalſzém pożyciu ćwiczyć ſię w Matematyce nie będą, tén prawie iedyny zyſk, ale zyſk wielki, z nauki téy odnioſą.

5. Nie trzeba iednak obiecywać ſobie, aby zawſze porównanié tych dwóch ſpoſobów uczynić można. Wielé bardzo ieſt zadáń tak zawikłanych, żebyśmy ich przez ſamo rozumowanié rozwiązać nie potrafili, nie wezwáwſzy na pomoc narzędzi, i tych ſpoſobów które nám Algiebra podaie. Należy więc w zadaniach prościeyſzych nauczyć ſię używania tych narzędzi, i tych ſpoſobów: aby wprawa w obchodzéniu ſię z niémi zmnieyſzyła nám trudność, gdy ich używać przyydzie w zadaniach zawilſzych. A wſzczególności w częściach niektórych Fizyko-Matematycznych, wielé bardzo zdarzá ſię przypádków, gdzie użycié tych narzędzi i tych ſpoſobów koniecznie ieſt potrzebné. I gdyby nawet, oſobliwſzé iakié maiąc przeniknienié, mogliśmy dóyśdź przez ſamo rozumowanié do rozwiązania podobnych trudności, bardzo iednak częſto ſtałoby ſię to ſpoſobém daleko dłużſzym, i mniéy ogólnym. W naukach zaś do praktyki przyſtóſowanych wielé na tém zawiſło, aby nie tylko dóyśdź, ale dóyśdź iak náyproſtſzą drogą célu zamierzonégo.

Zadanié I. Z dwóch oſób, które oznaczámy przez A, i B, piérwſzá má dwa razy tylé ilé drugá: má zaś piérwſzá 12 złotych więcéy od drugiéy: iléż má każdá z tych oſób w ſzczególności?

W tém zadaniu dwie ſą ilości niewiadomé: toieſt maiątek iednéy, i drugiéy oſoby, dwie także ilości ſą dané, toieſt różnica maiątku piérwſzéy oſoby od drugiéy, i liczba oznaczaiącá, ilé razy maiątek piérwſzéy oſoby, większy ieſt od maiątku drugiéy. Każdá z tych wiadomości ſzczególnie wziętá, nie prowadzi do pewnégo rozwiązaniá zadania: bo możná znaléźć tylé ilości, ilé tylko zechcémy, które iednéy z tych wiadomości uczynią zadoſyć: ale dwie tylko ſą takié ilości, które tak iednę, iak i drugą wiadomość zawartą w zadaniu wypełniaią. Wiadomości dané i prowadzącé do znaleziénia ilości, których ſzukámy, nazywaią ſię *Warunkami* zadania (Conditiones). Przez ſamo zaś zadanié zapytani bywámy, iakié ſą ilości, czyniącé zadoſyć tym Warunkom.

Spoſób I.

Sposób 1. rozwiązania przez rozumowanié. Ponieważ A, dwa razy má tylé, ilé B, więc Nadmiár (excessus), piérwszégo maiątku nad drugi, iest w saméy rzeczy tym drugim maiątkiém, a że tén nadmiár iest 12. złotych, więc drugi maiątek, toiest, Osoby B, iest 12 złotych: a zatém maiątek piérwszéy Osoby A, którá má mieć dwa razy tylé, ile drugá, będzie 24. zł: Jakoż té dwie liczby 24, i 12. wypełniaią dwa warunki dané, toiest 24 zawiérá w sobie dwa razy 12, a nadmiár 24 nad 12, iest 12.

Sposób 2. Algiebraiczny. Możná oznaczyć maiątek osoby mniéy maiącéy przez znak iakikolwiek. Powszechnie iednak oznaczaią Matematycy, ilości niewiadomé przez ostatnié abecadła litery, *np:* x, y, z.

Niech więc x znaczy maiątek osoby B, toiest 12 złotych: będzie zatém maiątek osoby A, dwa razy większy, oznaczony przez x dwa razy wzięté, toiest przez $2x$.

A że maiątek osoby A, przewyższá maiątek osoby B, 12. złotémi, więc téż maiątek osoby A, może bydź oznaczony przez x, powiększoné 12 Zł: toiest przez $x+12$ (znak $+$ wymáwiá się tém słowém *więcéy*).

Będzie tedy, mògł bydź oznaczony maiątek osoby A, dwóma wyrażéniami, toiest przez $2x$, albo przez $x+12$.

Ponieważ té dwa wyrażénia iednę ilość znaczą, więc $2x$, będzie ròwne, $x+12$: ta zaś równość tak się oznáczá, $2x=x+12$. Znak $=$ czytá się tak, iak gdyby było napisané, *równá się*, albo *równé iest.*

Gdy dwie ilości są równé, a tak od iednéy, iak i od drugiéy odeymiémy ilość iednakową, reszty będą równé. Ponieważ tedy $2x=x+12$; więc odiąwszy x z iednéy i z drugiéy strony; reszty x i 12, będą ròwné, a zatém $x=12$.

Aże x oznáczało maiątek osoby B, więc maiątek osoby B, iest 12, maiątek zaś osoby A, dwa razy większy, i przewyższaiący liczbą 12. maiątek osoby A, będzie 24, któré 24 i iest 2 razy większé od 12, i przewyższá ié liczbą 12.

7. *Przykłád 2. A, má trzy razy tylé, ilé B, má zaś więcéy 18 złotémi od B: iléż má A, ilé B?*

Przez rozumowanié. Ponieważ A, trzy razy má tylé, ilé B, więc nadmiár maiątku A, nad maiątek B, będzie dwa razy ieszcze większy od maiątku B.

Ze zaś tén nadmiár iest 18 Zł: więc maiątek B, będzie połową 18, toiest 9 złotych. Maiątek A, tak z téy miary, że trzy razy iest większy od maiątku B, iako i z téy, że przewyższá maiątek B, 18 złotémi, będzie 27 złotych.

Przez Algiebrę. Maiątek B. . . . . x.
Maiątek A. . . . . $3x$ albo $x+18$.

Więc $3x=x+18$; odiąwszy x po obu stronach . . . . . . $2x=18$.
Gdy ilości są rówńé, ich téż połowy będą równé: więc podzieliwszy przez 2 z jednéy i z drugiéy strony, będzie . . . .

. . . . $x=9$.

Maiątek tedy B . . . . 9.
Maiątek A . . . 27.

Té dwie liczby czynią zadosyć dwóm warunkóm położonym w zadaniu.

Inszé przykłady. A, má razy 4, 5, 6, 7 i t. d. tylé, ilé B, różnica maiątków iest 60.

8. *Uwági.* Gdy się zastanowimy nad sposobém postępowania w szukaniu rozwiązania Zadáń poprzedzaiących; postrzeżémy tam pięć różnych części.

W piérwszéy, dané są nazwiska ilościóm niewiadomym. Té nazwiska były poczęści wzięté z upodobania, po części nie. I tak maiątek osoby B, nazwaliśmy x, a mogliśmy go równie nazwać, y, z, lub inaczéy: ale wyrażénié drugiéy ilości niewiadoméy iuż wypádało z wyrażénia piérwszégo, i z warunków zadania.

Oznaczyliśmy naprzód maiątek mnieyszy: bo z niego łatwo zaráz było oznaczyć maiątek większy przez dodanié lub rozmnożénié. Gdybyśmy zaś naprzôd nazwali maiątek większy; tedy maiątek mnieyszy trzebaby było oznaczyć przez odeymowanié lub dzielénié: łatwiéy zaś iest dodadź i rozmnożyć, niż odiąć i podzielić.

Ta przezorność w dáwaniu naprzód nazwisk ilościóm mnieyszym, z których potém przez dodáwanié lub mnożénié, wypádaią wyrażénia ilości większych, nie tylko łatwieyszé czyni i prostszé oznaczénia ilości niewiadomych, ale nad to skrácá dalszé działánia. *Trzeba często powtárzać tę uwágę zwłászcza w Zadaniach zawilszych.*

Tę część dochodzénia ilości niewiadomych nazwiémy *Mianowaniém* (Denominatio). Zawisła ona na tém, aby dadź nazwiska ilościom niewiadomym.

W drugiéy części pokázała się *Tosamość* (Identitas) dwóch wyrażéń iednéy ilości. Tosamość ta nazywá się *Równaniém* (Aequatio).

Dwa wyrażénia oddzielone znakiém równości = nazywać się mogą *stronami równości*, (taká iedna strona nazywá się po łacinie *Membrum aequationis*);

tionis); a gdy té ſtrony złożoné ſą z wielu znaków, każdy z nich nazywá ſię *wyrazém* (Terminus). Tę drugą część nazwiémy Warunkiém: bo ona wypádá z iednégo, lub więcéy warunków, czyli wiadomości, które wchodzą w Zadanié.

W trzeciéy części ułatwiliśmy w tén ſpoſób Równanié, że znak ilości niewiadoméy zoſtáł ſám, i wolny od innych ilości, któré mu zawadzały. Reguła ogólná oſwobodzénia ilości niewiadoméy od połączonych z nią ilości wiadomych, ieſt: użyć działania przeciwnégo tému, przez które wmięſzały ſię ilości wiadomé do ilości niewiadoméy. I tak w Równaniu: $3x = x + 18$: ponieważ na obu ſtronach Równości, znaydowało ſię x, odięliśmy go od iednéy i od drugiéy ſtrony, aby ilość niewiadomá po iednéy tylko ſtronie zoſtała: wypadło ſtąd równanié $2x = 18$, w którém, że x, znak ilości niewiadoméy, rozmnożony ieſt przez 2, uwolniliśmy go dzieląc piérwſzą i drugą ſtronę Równania przez 2, ſkąd naoſtatek wypadło Równanié: $x = 9$.

Tę trzecią część nazywać będziémy *Przerábianiém* (Reductio), któré na tém zawiſło, aby przez rozmaité działania przywiéśdź do tego Równanié, żeby po iednéy tylko ſtronie zoſtała ilość niewiadomá równaiącá ſię ſamym ilościóm wiadomym.

To zdziáławſzy, przyśliśmy do *czwártéy części*, którą nazwiémy *Rozwiązaniém*, (Solutio). Rozwiązanié zamyká w ſobie odpowiédź na Zadanié, toieſt zamyká wyrażénia ilości przedtém niewiadomych, w ilościach wiadomych.

Nakoniec *w piątéy części* doświádczámy, czyli wyrażénia ilości ſzukanych znalezioné w ilościach danych i wiadomych, zgádzaią ſię z Warunkami Zadania, toieſt, czyli Zagadniénié dobrze ieſt rozwiązané. To działanié nazywá ſię *Sprawdzéniém* (Verificatio) (*).

9. *Przyſtóſowanié tego porządku do Zadania iednégo z powyżſzych.*

A, má cztéry razy tylé, ilé B: má zaś A, 60 złotych więcéy niż B.

Mianowanié. Maiątek B . . . . . x.
Maiątek A . . . . . $4x$ albo $x + 60$.

 Waru-

(*) Winniśmy tén porządek Jmć Panu LE SAGE Gieneweńczykowi policzonému w wielu Towarzyſtwach uczonych. Zatrudniony on będąc rozmaitémi, a wielkiéy wági prácami około wyżſzych części Filozofii, nié miáł ſpoſobności podania do druku Piſm ſwoich Eleméntarnych.

Warunek $4x = x + 60.$
Przerábianié. Odiąwſzy $1x$ po obu ſtronach; będzie. . . .
. . . . $3x = 60.$ Podzieliwſzy przez 3. będzie . . . .
. . . . $1x = 20.$

Rozwiązanié. $1x = 20.$ Maiątek B.
$4x = 80.$ Maiątek A.
$x + 60 = 80.$ Drugié wyrażénié maiątku A.

Sprawdzénié. $80 = 80.$ Tu oczywiście widzieć ſię daie, że dwa wyrażénia maiątku A, ſą równé, a zatém zadanié ieſt rozwiązané.

10. *Zadanié 2. Dwie oſoby A, i B, maią razém 24 złoté: má zaś A, 2 razy tylé ilé B: iléż má A, ile B?*

Rozwiązanié Arytmetyczné. Ponieważ A, dwa razy tylé má ilé B; więc ſumma obudwòch ich maiątkòw zamykać będzie maiątek B, razy trzy: że zaś ta ſumma ieſt 24 Zł: więc 24 ieſtto liczba zamykaiącá w ſobie trzy razy maiątek B; a zatém maiątek B, będzie trzecią częścią złotych 24, toieſt będzie Zł: 8. Przeto maiątek A, dwa razy większy, będzie 16 złotych. Summa 8, i 16 złotych, czyni 24 złote, które miały obiedwie razém oſoby A, i B.

Algiebraiczné. Mianowanié. Maiątek B . . . . $x.$
Maiątek A . . . . $2x.$
Summa maiątkòw $3x.$

A że ta ſumma czyni 24 złote, więc będzie,
Warunek. $3x = 24.$
Przerábianié. Podzielmy iednę i drugą ſtronę Rownania przez 3, będzie $1x = 8.$

Rozwiązanié. $x = 8.$ Maiątek B.
$2x = 16.$ Maiątek A.
$3x = 24.$ Summa maiątkòw.

Sprawdzénié. Summa maiątkòw ieſt taká, iaká bydź powinna, toieſt 24: maiątek téż A, dwa razy ieſt większy od maiątku B.
Inſzé przykłady. A, má 3, 4, 5, 6, i t. d. razy tylé ilé B: ſumma ich maiątków, ieſt 36, 40, 48, 49, i t. d.

11. *Zadanié 3.*

11. *Zadanie 3. W Zgromadzéniu ze 100 osób złożonêm A, i B, starają się o iedén urząd. A, dziesiącią kréskami przewyższá B: iléż każdá z tych dwóch osób A, i B, miała krések?*

Arytmetycznie. Gdyby tylé krések dano na A, ilé na B; tedyby tak osoba A, iak i B, miała po 50. krések, (gdyż wszystkich krések iest 100). Dlá téyże przyczyny ieżeli A, má 1, 2, 3, i t. d. kréskami więcéy, niż 50; B, będzie miało 1, 2, 3, i t. d. kréskami mniéy niż 50: a zatém osoba A, w tych razach będzie miała, 2, 4, 6, i t. d. więcéy krések, niż B.

Więc liczba krések, ktòrą má A, więcéy niż 50, B zaś mniéy niż 50, iest połową téy liczby, ktòrą kréski na A, przewyższaią kréski na B: a że A, má więcéy 10 kréskami niż B, więc A, má 5 kréskami więcéy niż 50, a B má 5 kréskami mniéy niż 50. Więc na A, dano krések 55, na B, 45.

Jakoż dodawszy 55, do 45. Summa będzie 100: a odiąwszy 45, od 55, Ròżnica będzie 10.

Algiebraicznie. Mianowanié. Kréski na B . . . . . x.
Kréski na A . . . . . $x+10$.
Summa krések . . . . $2x+10$.

Warunek. $2x+10=100$.

Przerábianié. Odiąwszy 10 po iednéy i po drugiéy stronie, będzie $2x=90$. Podzieliwszy przez 2 . . . .
$1x=45$.

Rozwiązanié. $x=45$. Kréski na B.
$x+10=55$. Kréski na A.

Spráwdzénié. Warunki są zachowané: bo i summa krések iest 100, i A, má więcéy 10 kréskami, niż B.

Insze przykłady. A, i B, maią razém ... 144, 148, 157, 163, i t. d. Zł. A, má więcéy niż B, 36, 52, 63, 57, i t. d. Zł.

12. *Zadanié 4. Osoba A, trzy razy tylé miała, ilé B, zyskáwszy nad to 12 złotych, má cztéry razy tylé, ilé B: iléż má A, ilé B?*

Arytmetycznie. Ponieważ osoba A, zyskáwszy 12 złotych, má 4 razy tylé, ilé B, a przed zyskiém miała tylko trzy razy tylé, ilé B; więc zysk osoby A, ròwny iest maiątkowi osoby B: a zatém maiątek B, iest 12

złotych.

złotych. Więc maiątek A, przed zyſkiém był 36, a po zyſku 48 złotych, toieſt 4 razy tak wielki, iak maiątek B.

Algiebraicznie. Mianowanié. Maiątek B . . . . x.
Maiątek A . . . . $3x$.
Maiątek A, z zyſkiém . . . . $3x+12$. albo $4x$.
Warunek. $4x=3x+12$.

Przerábianié. (Odiąwſzy $3x$ po obudwu ſtronach) $1x=12$.

Rozwiązanié. $x=12$. Maiątek B.
$3x=36$. Maiątek A.
$4x=48$. Maiątek A, z zyſkiém.
$3x+12=48$. Maiątek A, z zyſkiém.

Spráwdzénié. Dwa wyrażénia Maiątku A, wráz z zyſkiém ſą ròwné.

Inſzé przykłady. A, má 3 razy tylé, ilé B. A, zyſkuie 12 Zł: i má potém 5 razy tylé, ilé B.

A, má 3 razy tylé, ilé B: B zyſkuie 12 Zł: i potém A, mieć będzie tylko 2 razy tylé, ilé B.

15. *Zadanié 5. A, má trzy razy tylé, ilé B: A, i B, zyſkuią po 12 Zł: po czém A, má tylko dwa razy tylé, ilé B.*

Arytmetycznie. Aby maiątek A, był po zarobku trzy razy większy od maiątku B, z zarobkiém; trzebaby zyſkać oſobie A, trzy razy tylé, ilé zyſkała oſoba B, toieſt trzebaby iéy zyſkać 36 Zł: A że zyſkuie tylko 12 złotych; więc po tym zyſku nie doſtaie iéy ieſzcze 24 Zł. aby 3 razy tylé miała, ilé B, także z zyſkiém. Ze zaś oſoba A, po zarobku z obu ſtròn má tylko 2 razy tylé, ilé B; więcby nad to trzeba iéy mieć ieſzcze tylé, ilé má B, aby maiątek iéy był 3 razy tak wielki, iak ieſt maiątek B: a zatém maiątek B po zarobku ieſt 24 Zł: a przed zarobkiém był 12 złotych.

Piérwſzy Maiątek B . . . . 12. Drugi maiątek B . . . . 24.
Piérwſzy Maiątek A . . . . 36. Drugi maiątek A . . . . 48.

Algiebraicznie. Mianow: Maiątek 1wſzy B . . . . x.
Maiątek 1wſzy A . . . . $3x$.
Maiątek 2gi B . . . $x+12$.
Maiątek 2gi A . . . $3x+12$, albo . . . . . . $2x+24$.

Warunek

Warunek. $3x+12=2x+24$.

Przerabianié. (Odiąwszy 12 z obu strȯn) $3x=2x+12$.
(Odiąwszy $2x$ z obu strȯn) $1x=12$.

Rozwiązanié. $x=12$. Maiątek 1wszy B.
$3x=36$. Maiątek 1wszy A.
$x+12=24$. Maiątek 2gi B.
$3x+12=48$. Maiątek 2gi A.
$2x+24=48$. Maiątek 2gi A.

Sprȧwdzénié. Dwa wyrażénia maiątku powtȯrnégo A, są rȯwné.

14. *Przykłȧd 2. A, mȧ 5 razy tylé, ilé B: zyskuią po 18 złotych: i potém A, mȧ tylko 3 razy tylé, ilé B.*

Przez rozumowanié. Aby maiątek A, był i po zysku 5 razy tak wielki, iak iest maiątek B, z zyskiém swoim, trzebaby téż, aby i zysk A, był 5 razy większy od zysku B, toiest, aby był 90 Zł. Ze zaś zysk A, iest tylko 18 złotych, więc po zysku będzie ieszcze brakowało osobie A, 72 złotych do wyrȯwnania maiątku B, 5 razy wziętégo. A że maiątek A, wrȧz z zyskiém, iest tylko 3 razy większy od maiątku B, także z zyskiém; więc aby wyrȯwnȧł maiątek B, wrȧz z zyskiém pięć razy wzięty, nie dostaie ieszcze maiątku B, i z zyskiém, 2 razy wziętégo: więc maiątek B i z zyskiém 2 razy wzięty iest 72 Zł: a zatém rȧz wzięty i z zyskiém, iest 36 Zł. Osoba tedy B, miała przed zyskiém 18 złotych.

Maiątek 1wszy B . . . . 18. Zł. Maiątek 2gi B . . . . 36. Zł.
Maiątek 1wszy A . . . . 90. Zł. Maiątek 2gi A . . . 108. Zł.

Przez Algiebrę. Mian:
Maiątek 1wszy B . . . . x.
Maiątek 1wszy A . . . . $5x$.
Maiątek 2gi B . . . . $x+18$.
Maiątek 2gi A . . . . $5x+18$.
albo . . . . $3x+54$.

Warunek. $5x+18=3x+54$.

Przerób: (Odiąwszy $3x$ z obu strón,) $2x+18=54$.
(Odiąwszy 18 z obu strón,) $2x=36$.
(Podzieliwszy przez 2 z obu strón) $x=18$.

Rozwiązanié. $x=18$. Maiątek 1wszy B.
$5x=90$. Maiątek 1wszy A.
$x+18=36$. Maiątek 2gi B.
$3x+54=108$. Maiątek 2gi A.
$5x+18=108$. Maiątek 2gi A.

Sprawdz: Dwa wyrażénia maiątku 2giego A, są rowné.

Inszé przykłady. Oyciec, który teráz trzy razy starszy iest od syna, za lát 15 będzie tylko dwa razy od niego starszym, iléż teráz má lát tén oyciec, ilé syn?

A, má 5 razy tylé, ilé B, A, zyskuie 12 Zł. B, zyskuie 20 złotych. Po tym zysku, A, mieć tylko będzie 3 razy tylé, ilé B: iakiż iest maiątek A, iaki B?

15. *Uwága.* Gdyby nám przyszło rozwięzywać następuiącé Zadanié: *A, má 3 razy tylé, ilé B: tracą po złotych 15, i potém A, mieć będzie 4 razy tylé, ilé B:* chcąc znaleźć maiątek A, i B, postąpilibyśmy sobie podobnie iak wyżéy, z tą tylko rożnicą, żeby zacząć trzeba działanié od maiątku tych dwoch osob po stracie, skąd łatwoby potém doszło się przez dodanié, ilé miały przed stratą.

16. *Zadanié 6. Mąż zapisuie testaméntém żonie swoiey złotych 14000, ieżeli powiie Córkę, téy zaś Córce Zł: 7000: przeciwnie, ieżeli powiie Syna, tedy Synowi zapisuie Zł: 14000, a Matce 7000. Zdárzá się, iż Matka powiid razém Syna i Córkę. Jakże przyydzie podzielić bez krzywdy między Matkę i Dzieci maiątek Męża?*

Arytmetycznie. Zdaie się bydź tén zamiár w testaméncie, aby Syn miáł tylé dwoie co Matka, a Matka tylé dwoie co Córka. Podług tego, iakákolwiek część maiątku dostałaby się Córce; Matka powinna będzie wziąć tylé dwoie co Córka, Syn tylé dwoie co Matka, a tylé czworo co Córka. Té tedy trzy Osoby będą miały między sobą 7 części maiątku, z których każdá równać się będzie udziałowi Córki. Podzieliwszy więc tén maiątek na 7 rownych części, Córka weźmie iednę taką część, Matka 2, a Syn 4. A że

14000

14000 i 7000, czyni 21000 Zł: i składá cały maiątek, a śiòdmá iego część iest 3000 Zł: więc dostanie się

Còrce . . . . . 3000 Złotych.
Matce . . . . . 6000.
Synowi . . . . 12000.

Summa 21000.

Algiebraicznie. Część dlá Còrki . . . . . x.
Część dlá Matki . . . . . $2x$.
Część dlá Syna . . . . . $4x$.

Summa . . . . . $7x$.

Warunek. $7x = 21000$.

Przerábianié. (Podzieliwszy przez 7 z obu stròn)
$1x = 3000$.

Rozwiąz: $1x = 3000$. Udział Còrki.
$2x = 6000$. . . . . . Matki.
$4x = 12000$. . . . . Syna.

$7x = 21000$ Cały maiątek.

Insze przykłady. *Trzy Osoby: A, B, C, złożyły się na 36000 Zł. Składka B, dwa razy większá od składki A, składka zaś C, trzy razy większá od składki B.*

Cztéry Osoby: A, B, C, D, złożyły się na 20000 Złotych. Składka B, dwa razy większá, od składki . . . . A.
C, trzy razy większá, od . . . . A.
D, cztéry razy większá, od . . . . A.

17. *Zadanié 7.* *A, má więcéy 18 Zł: niż B.*
B, má więcéy 30 Zł: niż C.

Maią zaś razém 150 Zł: iléż má każdá Osoba w szczególności?

Arytmetycznie. C, náymniéy má z tych trzech Osòb. Ponieważ A, má więcéy 18 Złotych niż B, B, zaś więcéy 30 Zł: niż C; więc A, mieć

mieć będzie 48 Złotych, więcéy niż C. Summa Maiątku B, i C, rowna ieſt maiątkowi C, dwá razy wziętému, i nadto 30 Złotych. Summa zaś maiątku A, B, i C, rowná ieſt maiątkowi C trzy razy wziętému, dodáwſzy 30 i 48 Zł: toieſt, dodáwſzy 78 Złotych. Więc maiątek C, trzy razy wzięty, dodáwſzy do niego 78 Złotych, uczyni 150 Zł: a zatém ſám maiątek C, trzy razy wzięty, mnieyſzy będzie 78 Złotémi, toieſt, wynieſie tylko na 72 Złote. Więc maiątek C, ſám przez ſię, ieſt trzecią częścią 72 Zł: toieſt 24 Zł:

Maiątek C . . . . . 24. Złote.
Maiątek B . . . . . 54.
Maiątek A . . . . . 72.

Summa . . . . 150.

Algiebraicznie. Mianowanié. Maiątek C . . . . x.
Maiątek B . . . . $x+30$.
Maiątek A . . . . $x+48$.

Summa Maiątkow . . $3x+78$.

Warunek. $3x+78=150$.

Przerab: (Odiąwſzy 78 Zł: z obu ſtron) $3x=72$.
(Podzieliwſzy przez 3) . . . $x=24$.

Rozwiązanié. $x=24$. Maiątek C.
$x+30=54$. Maiątek B.
$x+48=72$. Maiątek A.
$3x+78=150$. Summa Maiątkow.

Inſzy przykład. A, ma więcéy 14 Zł: niż B.
B, ma więcéy 20 Zł: niż C.
Summa maiątku tych trzech Oſob ieſt 172 Złote.

18. *Uwága.* W poprzedzaiących przykładach, oprocz dwoch pierwſzych warunkow, czyli wiadomości, dána ieſzcze ieſt i trzeciá, toieſt, ſumma maiątku trzech Oſob. Gdyby zamiáſt téy trzeciéy wiadomości, była nám daná rożnica maiątku A, i C, i ta w przykładzie pierwſzym inna była a nie 48 Zł: tedy zadanié byłoby niepodobné do rozwiązania. Gdyby zaś ta rożnica daná nie inná była iak 48 Złotych; tedy ta trzeciá wiadomość nie

byłaby

byłaby nową, boby się iuż zamykała we dwòch piérwszych wiadomościach razém złączonych. Warunki więc, czyli wiadomości w zadaniu wyrażoné powinny bydź dané takié, aby iedné od drugich nie zawisły.

19. *Zadanié* 8. *A, má więcéy 48 Zł: niż B,*
C, má tylé, ilé A, wráz z B.
Summa maiątku tych trzech Osób iest 400 Zł: iléż má każda z osobna?

Arytmetycznie. Ponieważ C, má tylé, ilé razém A, i B; więc maiątek C, iest połową maiątku A, B, C; toiest C, má w saméy rzeczy 200 złotych, a zatém A, i B, razém mieć téż będą 200 Zł: Ze zaś A, má więcéy 48 złotych niż B; więc A, mieć będzie 24 Zł: więcéy niż 100 Zł: B, zaś mieć będzie 24 Zł: mniéy niż 100 złotych.

Maiątek A	124 Zł.
Maiątek B	76.
Maiątek C	200.
Summa maiątków	400.

Algiebraicznie. Mian: Maiątek B . . . . x.
Maiątek A . . . . $x + 48$.
Maiątek C . . . . $2x + 48$.

Summa . . . . . $4x + 96$.

Warunek. $4x + 96 = 400$.

Przerábianié. (Odiąwszy 96 z obu stron) $4x = 304$.
(Podzieliwszy przez 4) $x = 76$.

Rozwiązanié. $x = 76$. Maiątek B.
$x + 48 = 124$. Maiątek A.
$2x + 48 = 200$. Maiątek C.
$4x + 96 = 400$. Summa Maiątkòw.

Inszé przykłady. A, má więcéy 54 Zł: niż B.
C, má dwa razy tylé, ilé A, i B, razém.
Summa maiątku tych trzech Osób iest 288 Zł: iléż má każdá z osobna?

Arytmetycznie. Ponieważ C, má tylé dwoie, ilé A, i B, razém; więc summa maiątkòw A, B, C, iest trzy razy większá od summy maiąt-

 kòw

kòw A, i B: a zatém ſumma maiątków A, i B, będzie trzecią częścią Zł: 288, toieſt będzie 96 Zł. Stąd podobnie, iak wyżéy, doyśdź można maiątku A, i B.

A, má więcéy 144 Zł: niż B.
C, má trzy razy tylé, ilé A, i B, razém.
Summa maiątku tych trzech Oſób, ieſt 600 Zł: iléż má każdá z oſobna?

20. *Zadanié 9. Dwie Oſoby A, i B, oddaloné na mil 96, iadą ku ſobie, i naoſtatek ſpotykaią ſię z ſobą. Piérwſzá uieżdżá na dzićń mil 7, a drugá mil 5, w iléż dni ſpotkaią ſię z ſobą, i ilé mil uiedzie przed ſpotkaniém ſię każdá z tych Oſób w ſzczególności?*

Arytmetycznie. A, i B, przybliżaią ſię do ſiebie co dzićń ſummą mil 7, i 5, toieſt milami 12: więc tylé dni do ſiebie iadą, ilé razy powtórzyć trzeba mil 12, aby tak powtórzoné uczyniły mil 96. Znaydziémy zatém liczbę dni ich iazdy, dzieląc 96 przez 12, a ta będzie 8. W ośmiu tedy dniach zjadą ſię z ſobą.

Piérwſzá Oſoba w tych dniach 8 uiedzie mil . . . . 56.
Drugá Oſoba w tych dniach 8 uiedzie mil . . . . 40.
Obiedwie razém w tych 8 dniach uiadą mil . . . . . 96.

Algiebraicznie. Mian: Dni iazdy A, i B . . . . . x.
Oſoba A, uiechała mil . . . . . $7x$.
. . . . B, uiechała mil . . . . . $5x$.
Milę od A, i B, uiechané . . . $12x$.

Warunek. $12x = 96$.

Przerábiánié. (Podzieliwſzy przez 12 z obu ſtrón) $1x = 8$.

Rozwiązanié. $1x = 8$. Dni iazdy.
$7x = 56$. Mile iazdy A.
$5x = 40$. Mile iazdy B.
$12x = 96$. Mile iazdy A, i B.

Inſzé przykłady. A, uieżdżá na dzićń mil 6, B, mil 8: oddaloné ſą przed zaczęciém drogi na mil 126.

A, uieżdżá

A, uieżdżá na dzién mil 7, B 8: oddalone ſą przed tą podróżą na mil 135.

Pewná Oſoba kupuie dwoiakiégo gatunku ſukna w równéy liczbie łokci: iednégo łokieć płaci po Zł: 12, a drugiégo po Zł: 15. Za wſzyſtko zaś wyliczyła Zł: 378: iléż łokci wzięła tego ſukna?

21. *Przeſtroga.* Droga przez iednę ze dwóch Oſób uiechaná, ieſt w piérwſzym przykładzie 7 mil, tylé razy wzięté, ilé dni iechała taż Oſoba: powinnaby więc ta droga bydź oznaczoná przez razy *x* wzięté 7 mil, czyli przez *x7*. Ale że liczba ze dwòch inſzych rozmnożoná, taż ſama wypádá, ktòrąkolwiek z nich weźmiémy za mnożnika, lub mnożnégo, przeto zgodzono ſię, aby piérwſzy zawſze kłaśdź znak liczebny, a drugi literalny liczbę także oznaczaiący, gdy takich dwóch znakòw mnożénié wyrazić chcemy. I tak, nie piſze ſię *x7*, ale *7x*. Tén piérwſzy znak 7, nazwać można *Spółczynnikiém* (Coefficiens) znaku literalnégo *x*. Spółczynnik wyráżá zawſze, ilé razy wziętá ieſt ilość literalná, iak tu *np: x.*

22. *Zadanié 10. Złodziéy uciekaiący ubiegá na dzién mil 5. Pogoń w 8 dni po ucieczce za nim wyſłaná, uieżdżá na dzién mil 7: za iléż dni dogoni złodzieia Pogoń, i iak wielé mil uydzie złodziéy, nim będzie dogoniony?*

Arytmetycznie. Ponieważ złodziéy 8 dniami wymknął ſię przed Pogonią, a 5 mil na dzién ubiegá; więc w 8 dniach ubiegł mil 40. Pogoń, ktòrá co dzién 2 mile więcéy uieżdżá od złodzieia, przybliżá ſię téż co dzień do niego dwòma milami. A że ta Pogoń má ſię ze wſzyſtkiém przybliżyć 40 milami do złodzieia, więc liczba dni iazdy pogoni tylá bydź powinna, ilé razy rozmnożoné 2 mile uczynią mil 40: ta zaś liczba ieſt 20: więc 20 dni trzeba pogoni, aby złodzieia doścignęła.

Dni iazdy pogoni . . . . 20.

Mile od Pogoni uiechané . . . . 20 razy 7, to ieſt 140.

Dni uciekania złodzieia . . 28.

Mile od złodzieia ubieżoné . . . 28 razy 5, toieſt 140.
Więc po tylu dniach złodziéy będzie dogoniony.

Algiebraicznie. Miam: Dni ścigania złodzieia . . . *x.*
Dni uciekania złodzieia. . . $x+8$.

Mile

Mile ścigaiącégo . . . . . $7x$.
Mile uciekaiącégo . . . . $5x + 40$.

Warunek. $7x = 5x + 40$.

Przerábianié. (Odiąwszy $5x$ z obu stròn) $2x = 40$.
(Podzieliwszy przez 2) $1x = 20$.

Rozwiązanié. $1x = 20$. Dni ścigania.
$x + 8 = 28$. Dni uciekania.
$7x = 140$. Mile ścigaiącégo.
$5x + 40 = 140$. Mile uciekaiącégo.

Správdzénié. Tylé mil ubiégł złodziéy, ilé i pogoń z mieysca ucieczki.

Insze przykłady. *Złodziéy ubiega 6 mil na dzień,*
Pogoń ubiegá 9 mil na dzień.
Złodziéy 12 dniami uszedł przed pogonią.

Kupuie kto pewną liczbę łokci sukna iednégo gatunku po Zł: 15. Kupuie drugiégo gatunku, więcéy 8 łokci niż piérwszégo, po Zł: 11: tylé ze wszystkiém płaci za piérwszé sukno, ilé za drugié: iakże wiele łokci wziął z każdégo gatunku?

23. Zadanié 11. *Pewná Osoba wybrała sobie dwie materye, z których iednę chce kupić. Łokieć iednéy z' tych materyy iest po Zł: 15, a drugiéy po Zł: 18. Jeżeli kupi piérwszéy tylé łokci, ilé iéy potrzeba, zostanie iéy Zł: 24: ieżeli zaś tyléż łokci kupi drugiéy, zostanie iéy tylko Zł: 3. Iléż łokci chciała kupić, i ilé miała pieniędzy?*

Arytmetycznie. Ponieważ téy osobie w piérwszym razie, zostałoby się 24 Zł: a w drugim tylko 3 Zł; więc w drugim razie wydałaby 21 Zł: więcéy, niż w piérwszym, a to dlá tego, że każdy łokiéć drugiéy materyi płaciłaby 3 złotémi drożéy, niż łokieć piérwszéy. Więc trzy złoté tylé razy wzięté, ilé ta osoba kupiłaby materyi łokci, czynią Zł: 21, a iedén złoty wzięty tylé razy, ilé má bydź kupionych łokci, uczyni trzecią część Zł: 21, toiest 7 Zł: chciała tedy ta osoba kupić łokci 7.

Liczba łokci . . . . 7.
Zapłata za łokci 7 piérwszéy materyi Zł: . . . . . 105.
Zapłata za łokci 7 drugiéy materyi . . . . 126.
Miała ta Osoba piéniędzy Zł: $105 + 24 = 129$, albo . . . . $126 + 3 = 129$.

Algiebraicznie. Mianowanie. Liczba łokci . x.
Zapłata całá za piérwszy gatunek . $15x$.
Zapłata całá za drugi gatunek . $18x$.
Maiątek téy Osoby . . . . $15x + 24$, albo $18x + 3$.

Warunek. $18x + 3 = 15x + 24$.

Przeráb: (Odiąwszy 3 z każdéy strony) $18x = 15x + 21$.
(Odiąwszy $15x$ z każdéy strony) $3x = 21$.
(Podzieliwszy przez 3) . . . . . $x = 7$.

Rozwiązanié. $x = 7$. Liczba łokci.
$15x = 105$. Zapłata za 7 łokci piérwszéy materyi.
$18x = 126$. Zapłata za 7 łokci drugiéy materyi.
$15x + 24 = 129$. Liczba Zł: Osoby kupuiącéy.
$18x + 3 = 129$. Taż sama liczba.

Spráwdz: Dwa wyrażénia maiątku téy Osoby są równé.

Insze przykłady. Kupuiąc pewną liczbę łokci iednéy materyi po Zł: 17, a drugiéy po Zł: 13, zostaie się Osobie kupuiącéy w piérwszym razie Zł: 15, a w drugim Zł: 47.

Dwie Osoby razém naprzeciwko siebie wyieżdżaią: iedna wieżdżá na dzień mil 8, a drugá mil 5. Gdy się z sobą spotykaią piérwszá uiechała mil 24 więcéy niż drugá.

Naięto pewną liczbę robotników, i obiécano każdému po gr. 15: inszym zaś robotnikóm, których tylé było, ilé piérwszych obiécano po gr. 12. Wzięli piérwsi razém 27 gr. więcéy niż drudzy.

Inszą znowu razą naięto także pewną liczbę robotników: gdyby im płacono po gr. 12, ieszczeby nie dostawało naymuiącému gr. 25: gdy zaś każdému tylko płacić będzie po gr. 9, zostanie mu gr. 35. Iléż naymuie robotników, i ilé má piéniędzy?

W tym oſtatnim przykładzie, ponieważ Oſobie naymuiącéy robotników w piérwſzym razie nie doſtáwałoby gr. 25, a w drugim zbywałoby gr. 35; więc w piérwſzym razie muſiałaby ta Oſoba płacić 25, i 35 gr. toieſt 60 gr. więcéy niż w drugim. Co oprócz wielu innych ſpoſobów, można i tak okázać.

Fig. 1. Niech liniiá AB, oznáczá maiątek téy Oſoby. Ponieważ w piérwſzym razie więcéyby iéy 25 gr. nad maiątek zapłacić przychodziło, niech więc liniia AC, większá od AB, liniią BC, wyráżá tę całą zapłatę, a różnica BC tych dwóch liniy niech wyráżá 25 gr.

W drugim zaś razie, gdzieby mniéy ta Oſoba zapłacić miała, niech to wyráżá liniiá AD, mnieyſzá od AB, liniią BD, a zatém niech liniiá BD, wyráżá 35 gr. A że liniiá AC, przewyżſza liniią AD, ſummą liniy BC, BD, toieſt liniią CD, więc téż i wydatek piérwſzy téy Oſoby przewyżſzáłby wydátek drugi ſummą 25, i 35 gr. toieſt 60 gr.

Poſtępuiąc ſobie Algiebraicznie, nazwalibyśmy liczbę robotników x, całą ich zapłatę w piérwſzym razie $12x$, a w drugim $9x$. Dlá oznaczénia zaś maiątku téy Oſoby w piérwſzym razie, odięlibyśmy 25 gr. od $12x$: w drugim dodalibyśmy 35 gr. do $9x$. Maiątek więc téy Oſoby takby ſię wyraził: $12x - 25$ (znak — kładzie ſię przed tą ilością, która ſię od innéy má odiąć, i wymáwiá ſię *mniéy*) albo tak: $9x + 35$. Lubo dalſzé poſtępowanie nic w ſobie trudnégo nie zamyká, nie zawadzi iednak tu ié wyłożyć.

Warunek. $12x - 25 = 9x + 35$.

Przerábianié. (Dodáwſzy 25 po obu ſtronach)
$$12x = 9x + 60.$$
(Odiąwſzy $9x$ po obu ſtronach)
$$3x = 60.$$
(Podzieliwſzy przez 3 obie ſtrony)
$$x = 20.$$

24. *Zadanié 12. Maiątki trzech Oſób A, B, C, ſą takié, że*

Summa Maiątków A, i B, czyni . . . . Zł: 24.
. . . . A, i C, czyni . . . . 28.
. . . . B, i C, czyni . . . . 36.

Iléż má każdá z tych Oſób w ſzczególności?

Arytmetycznie. *Sposób* 1. Gdy do maiątku A, dodámy osobno maiątki B, i C, będzie summa za drugą razą większá 4 Zł: niż za piérwszą, a zatém C, má więcéy 4 Zł: niż B: a że B, wráz z C, má Zł: 36; więc maiątek C, większy iest 2 Zł: od 18, a maiątek B, mnieyszy iest 2 Zł: od Zł: 18.

Má tedy C, Zł: 20, a B, Zł: 16: że zaś A, i B, maią razém Zł: 24; więc A, má Zł: 8.

Maiątek A . . . . 8 Zł.
. . . . . B . . . 16.
. . . . . C . . . 20.

Sposób 2. Maiątek A, wchodzi we dwie wiadomé summy: . . . . 24, i 28.

Maiątek B, wchodzi we dwie wiadomé summy: . . . . 24, i 36.

Maiątek C, wchodzi we dwie wiadomé summy: . . . . 28, i 36;

a zatém summa maiątku trzech Osób A, B, C, dwa razy wziętá, równá iest summie liczb, 24, 28, 36, poiedynczo wziętéy, to iest 88. Summa więc maiątków A, B, C, iest połową summy liczb 24, 28, 36, toiest połową 88, czyli 44.

Ze zaś B, i C, maią razém 36 Zł: więc A, má 8 Zł.
A, i C, maią razém 28 Zł: więc B, má 16.
A, i B, maią razém 24 Zł: więc C, má 20.

Algiebraicznie. Między inszémi sposobami, następuiący zdaie się bydź w rozwięzywaniu podobnych zadáń náyogólnieyszym, w ktòrym od mianowania summy maiątku trzech Osòb, zaczynámy.

Mianowanié. Summa trzech maiątków . . . x.
Maiątek A . . . . . . $x - 36$.
B . . . . . . $x - 28$.
C . . . . . . $x - 24$.

Warunek może bydź czworako wyrażony. Bo albo możná go ztąd wywieśdź, że summa trzech wyrażéń maiątków szukanych, powinnaby bydź równą summie oznaczonéy przez x; albo stąd, że summa dwóch wyrażéń tych

tych maiątków powinna bydź równą summie daney. Weźmy *np.* tén warunek, że summa maiątków A, i B, powinna bydź równą 24 Zł. Summa maiątków A, i B, iest . . . . $2x - 64$.

Warunek. $2x - 64 = 24$.

Przerábianié. (Dodáwszy 64 po obudwóch stronach) $2x = 88$.
(Podzieliwszy przez 2 obiedwie strony) $x = 44$.

Rozwiązanié. $x = 44$. Summa trzech maiątków.
$x - 36 = 8$. Maiątek A.
$x - 28 = 16$. Maiątek B.
$x - 24 = 20$. Maiątek C.

Sprawdzénié. Té trzy liczby 8, 16, 24, czynią zadosyć trzém warunkóm podanym.

Inszé przykłady. 1mo. *A, i B, maią razém . . . 32 Zł.*
A, i C, ... 37.
B, i C, ... 45.

2do. *A, i B, maią razém . . 49.*
A, i C, ... 57.
B, i C, ... 64.

25. *Zadanié 13. Maiątek między cztéréma osobami A, B, C, D, iest taki, że*

Summa Maiątków *A, B, C . . . 36.*
A, B, . . D . 42.
A . . . C, D . 47.
B, C, D . 52.

Jléż má káżdá z tych Osób w szczególności?

Arytmetycznie. Podobnie, iak wyżéy, rozumuiąc, dochodzimy, iż summa tych maiątków cztérech niewiadomych trzy razy wziętá, równá się summie poiedynczéy cztérech liczb danych, toiest liczbie 177. Więc summa poiedynczá cztérech maiątków niewiadomych, równá iest trzeciéy części liczby 177, toiest 59: a zatém maiątki szczególné Osób A, B, C, D, będą

równicą

różnicą między tą liczbą 59 i liczbami 52, 47, 42, 36, osobno wziętémi: témi zaś różnicami są liczby . . . . . 7, 12, 17, 23.

Algiebraicznie. Mian: Summa Maiątków . . . x.
Maiątek A . . . . . $x - 52$.
B . . . . . $x - 47$.
C . . . . . $x - 42$.
D . . . . , $x - 36$.
Summa 4 Maiątków . $4x - 177$.

Warunek. $4x - 177 = x$.

Przeráb: (Dodáwszy 177 po obu stronach)
$4x = x + 177$.
(Odiąwszy $1x$ po obu stronach)
$3x = 177$.
(Podzieliwszy przez 3 obiedwie strony)
$1x = 59$.

Rozwiązanie. $x = 59$.
$x - 52 = 7$. Maiątek A.
$x - 47 = 12$. Maiątek B.
$x - 42 = 17$. Maiątek C.
$x - 36 = 23$. Maiątek D.

Insze przykłady. Maiątek między 5 Osobami A, B, C, D, E, iest taki, że

Summa Maiątków: A, B, C, D . . . iest . . . 16.
A, B, C, . . E . . . . . . 18.
A, B, . . D, E . . . . . . 23.
A, . . C, D, E . . . . . . 25.
. . B, C, D, E . . . . . . 26.

Maiątek między 6 Osobami, A, B, C, D, E, F, iest taki, że

Summa maiątków A, B, C, D, E . . . iest . . . 24.
A, B, C, D, . . F . . . . . . 28.
A, B, C, . . E, F . . . . . . 31.
A, B, . . D, E, F . . . . . . 33.
A . . . C, D, E, F . . . . . . 34.
. . B, C, D, E, F . . . . . . 35.

26. *Zadanié 14. A, má 60 Zł. B, má 20 Zł. A, tylé zyſkuie co i B: zyſkáwſzy zaś iednakową ſummę; A, mieć tylko będzie tylé dwoie, co B: iléż zyſkuią?*

Arytmetycznie. Ponieważ A, przed zyſkiém tylé troie má co B, przed zyſkiém; więc iakáżkolwiek byłaby ta ſumma którą zyſkuie B, ieżeli A, chce mieć zawſze tylé troie co B, trzeba iéy téż zyſkać tylé troie, ilé zyſkuie B: a że podług zadania, A, zyſkuie tylé tylko, ilé B, niedoſtáwać iéy ieſzcze będzie tylé dwoie zyſku B, aby miała wráz z tym zyſkiém, trzy razy tylé, ilé má B, wráz także z zyſkiém. Więc zyſk B, dwa razy wzięty równá ſię maiątkowi B, wráz z zyſkiém ráz wziętym. A że maiątek B, z zyſkiém ſkłádá ſię z piérwiaſtkowégo maiątku 20 Zł. i z zyſku; więc zyſk B, dwa razy wzięty, równy ieſt ſummie z 20 Zł. i z zyſku ráz wziętégo: a zatém zyſk B, który má bydź taki, iak i zyſk A, ieſt 20 złotych.

I tak A, mieć będzie z zyſkiém . . . 80 Zł.
B, mieć będzie z zyſkiém . . . 40.
80, ieſt 2 razy tylé, ilé 40.

Algiebraicznie. Mianowanié. Zyſk każdéy oſoby . . x.
Maiątek B, wráz z zyſkiém . . $20 + x$.
Maiątek A, wráz z zyſkiém . . $60 + x$.
albo . . . . . . $40 + 2x$.

Warunek. $40 + 2x = 60 + x$.

Przerábianié. (Odiąwſzy 40 po obu ſtronach)
$2x = 20 + x$.

(Odiąwſzy x po obu ſtronach)
$1x = 20$.

Rozwiązanié. $x = 20$. Zyſk ſzukany.
$20 + x = 40$. Maiątek B, z zyſkiém.
$60 + x = 80$. Maiątek A, z zyſkiém.
$40 + 2x = 80$. Drugié wyrażénié maiątku A, z zyſkiém.

Spráwdzénié. Dwa wyrażénia maiątku A, z zyſkiém ſą równé.

Inſzé

Inſzé przykłady. Oyciec má lát 54, Syn 18: za iléż lát Oyciec dwa razy tylko ſtarſzy będzie od Syna?

A, má 50 Zł: B, má 18 Zł: iakąż ſummę maią iednakową zyſkać, aby zyſkawſzy ią, maiątek A, był tylko tylé dwoie, tak wielki, iak maiątek B?

Spoſób dochodzenia Algiebraiczny ténże ſám ieſt co wyżéy. Arytmetycznie zaś chcąc dochodzić rozwiązania, naſtępuiący ſpoſób wygodnieyſzy ieſt od poprzedzaiącégo w tych przypádkach, gdzie piérwſzy maiątek A, nie zawiérałby w ſobie maiątku piérwſzégo B, kilka zupełnych razy.

Maiątek piérwſzy A, zawiérá w ſobie maiątek B, razy 2, i ieſzcze 14 Zł: zoſtaie. A że po iednakowym zyſku, A, má mieć dwa razy tylé, ilé B; więc ſumma z 14 Zł: i tego zyſku powinna bydź 2 razy taká, iak 14, a zatém zyſk iednakowy obudwóch Oſób, będzie 14 Zł:

To rozumowanié może bydź obiaśnioné, wyráżaiąc maiątki i zyſki przez liniie. Niech liniiá AB, wyráżá maiątek A, toieſt Zł: 50, a liniiá CD, maiątek B, toieſt Zł: 18. Fig. 2.

Weźmiymy na linii AB, część AF, dwa razy tak wielką, iak ieſt CD. Niech znowu liniiá DZ równá linii BX, oznaczá zyſk iednakowy.

Cała liniiá AX, będzie dwa razy tak wielká, iak liniiá CZ: a że część AF, ieſt dwa razy tak wielká, iak liniiá CD; więc téż i liniiá FX, muſi bydź dwa razy tak wielká iak DZ, albo BX, a zatém liniie BF, BX, ſą równé.

27. *Zadanié 15. A, má trzy razy tylé, ilé B: B, bierze od A, Zł: 12, i má potém połowę tylé, ilé A.*

Arytmetycznie. Aby maiątek A, był iednoſtaynie większy razy trzy od maiątku B, tedy ieżeli B, zyſkuie Zł. 12, zyſk A, powiniénby téż bydź Zł: 36.

A że A, zamiáſt zyſkania złotych 36, traci złotych 12, więc nie doſtaie ieſzcze do tego złotych 48, aby maiątek A, był trzy razy tak wielki, iak ieſt maiątek B, po nabytych złotych 12. Má zaś A, udzieliwſzy złotych 12 dlá B, tylko dwa razy tylé, ilé B zyſkáwſzy złotych 12, więc nie doſtaie Oſobie A, maiątku Oſoby B, wráz z zyſkiém, aby miała trzy razy tylé, ilé B, i z tym zyſkiém, toieſt, nie doſtaie iéy Zł: 48: a zatém maiątek Oſoby B, wráz z zyſkiém ieſt złotych 48, a przed zyſkiém był Zł: 36.

Maiątek 1wſzy B . . . . 36. Zł.
Maiątek 1wſzy A . . . . 108.
Maiątek 2gi B . . . . 48.
Maiątek 2gi A . . . . 96.

Algie-

Algiebraicznie. Mia: Maiątek 1wſzy B . . . . x.
Maiątek 1wſzy A . . . . $3x$.
Maiątek 2gi B . . . . $x + 12$.
Maiątek 2gi A . . . . $3x - 12$.
albo . . . . $2x + 24$.

Warunek. $3x - 12 = 2x + 24$.

Przérábianié (Dodáwſzy 12 po obu ſtronach)

$$3x = 2x + 36.$$

(Odiąwſzy $2x$ po obu ſtronach)

$$1x = 36.$$

Rozwiązanié. $1x = 36$. Maiątek 1wſzy B.
$3x = 108$. Maiątek 1wſzy A.
$x + 12 = 48$. Maiątek 2gi B.
$3x - 12 = 96$. Maiątek 2gi A.
albo $2x + 24 = 96$. Maiątek 2gi A.

Sprawdzénié. Dwa wyrażénia drugiégo maiątku A, ſą równé.

Inſzé przykłady. A, má trzy razy tylé, ilé B: A, zyſkuie od B, Zł: 20, i ma potém 5 razy tylé, ilé B.

Chcąc z łatwością rozwiązać arytmetycznie to Zadanié, trzeba ié tak uważać, iak gdyby wyrażoné było w ſpoſób naſtępuiący: *A, má 5 razy tylé, ilé B: B, zyſkuie od A, Zł: 20, i potém A, má tylko trzy razy tylé, ilé B.*

A, má 5 razy tylé, ilé B: A, traci Zł: 20. B, zyſkuie Zł: 36: potém A, má tylko trzy razy tylé, ilé B.

28. *Zadanié 16. A, má Zł: 60. B, má Zł: 15, A, zyſkuie dwa razy tylé, ilé B, i potém má tylko trzy razy tylé, ilé B.*

Arytmetycznie. Spoſób 1. Aby maiątek A, był iednoſtaynie 4 razy tak wielki, iak ieſt maiątek B, trzeba aby zyſk A, był 4 razy tak wielki, iak ieſt zyſk B. Ze zaś A, zyſkuie tylko 2 razy tylé, ilé B; więc nie doſtaie ieſzcze 2 razy zyſku B, aby maiątek A, potym zyſku był 4 razy tak wielki, iak maiątek B, także po zyſku. Ze znowu A, po zyſku ſwoim, má tylko trzy razy tylé, ilé B; więc Maiątkowi A, po zyſku, nie doſtaie maiątku B, po zyſku do tego, aby ténże maiątek A, był po zyſku 4 razy tak wielki, iak maiątek B, także po zyſku: a zatém zyſk B, dwa razy wzięty, wyrównywá maiątkowi B, z zyſkiém ráz wziętym; więc maiątek B, równá ſię zyſkowi B, toieſt B, zyſkuie Zł. 15.

Zyſk B Zł. . . . 15.
Zyſk A . . . . . 30.
Maiątek B z zyſkiém Zł. . . . 30.
Maiątek A z zyſkiém . . . . . 90.

Spoſób 2. mogący ſię ogólniéy przyſtóſowáć. Niech liniiá AB, i CD, oznáczaią piérwſzé maiątki A, i B: niech DY wyráżá zyſk B, którégo ſzukámy: BX dwa razy tak wielká, iak DY będzie wyráżała zyſk A. Weźmy AE, trzy razy większą od CD. Ponieważ AX, powinna bydź trzy razy większá od CY, a część AE, ieſt trzy razy większá od części CD; więc EX, będzie téż trzy razy większą od DY. Wziąwſzy $BZ = XZ = DY$, będzie EX trzy razy większą od XZ, a EZ, dwa razy większą od XZ, albo od BZ: a zatém $EB = BZ$. Przeto zyſk B, równá ſię linii EB, albo CD, toieſt 15 Zł. Fig. 3.

Algiebraicznie. Mianowanié. Zyſk B . . . . x.
Zyſk A . . . . $2x$.
Maiątek B, po zyſku . . . . $15 + x$.
Maiątek A, po zyſku . . . . $60 + 2x$.
albo . . . . $45 + 3x$.

Warunek. $45 + 3x = 60 + 2x$.

Przerábianié. (Odiąwſzy $2x$ po obu ſtronach) $45 + 1x = 60$.
(Odiąwſzy 45 po obu ſtronach) . . . $1x = 15$.

Rozwiązanié. $x = 15$. Zyſk B.
$2x = 30$. Zyſk A.
$15 + x = 30$. Maiątek B, po zyſku.
$60 + 2x = 90$. Maiątek A, po zyſku.
albo $45 + 3x = 90$. Maiątek A, po zyſku.

Sprawdzénié. Dwa wyrażénia maiątku A, po zyſku ſą równé.

Inſzé przykłady. A, má Zł: 100, B, má Zł. 60. A, zyſkuie 3 razy tylé, ilé B, i potém má dwa razy tylé, ilé B.

A, má Zł: 220. B, má Zł. 80: B, zyſkuie 2 razy tylé ilé A, potém A, má tylko 2 razy tylé, ilé B.

29. *Zadanié 17. A, má Zł. 60, B, má Zł. 42: iléż A, má zyſkać od B, gdy chce miéć 2 razy tylé, ilé B.*

Fig. 4. Użycié linii ułatwiá i tu rozwiązanié, ſpoſobém rozumowania.

Niech liniiá AB, oznáczá piérwſzy maiątek A, 60: a liniiá CD, niech oznáczá piérwſzy maiątek B, 42. Zróbmy liniią AE, dwa razy tak wielką, iak CD, i niech liniie równé BX, DY, zyſk A, a ſtratę B, wyrážaią. Ponieważ AE, dwa razy tak ieſt wielká iak CD, a iéy część AX, powinna bydź dwa razy tak wielká, iak CY; więc i drugá część EX, powinna bydź dwa razy tak wielká iak DY, albo BX: a zatém liniiá EB, powinna bydź trzy razy tak wielká iak BX, toieſt liniiá BX, powinna bydź trzecią częścią linii EB: że zaś AE, oznáczá 84, AB, oznáczá 60, więc BE, oznáczać będzie 24: a zatém liniiá BX, oznáczá 8.

Maiątek B, po ſtracie . . . . $42 - 8 = 34$.
Maiątek A, po zyſku . . . . $60 + 8 = 68$.

Algiebraicznie. Mian: Zyſk A, lub ſtrata B . . . . . . x.
Maiątek B, po ſtracie . . . $42 - x$.
Maiątek A, po zyſku . . . $60 + x$.
albo . . . . $84 - 2x$.

Warunek. $60 + x = 84 - 2x$.

Przerábianié. (Dodáwſzy $2x$ po obu ſtronach) $60 + 3x = 84$.
(Odiąwſzy 60 po obu ſtronach) . . . $3x = 24$.
(Obie ſtrony podzieliwſzy przez 3) . $1x = 8$.

Rozw: $x = 8$. Zyſk A, lub ſtrata B.
$42 - x = 34$. Maiątek B, po ſtracie.
$60 + x = 68$. Maiątek A, po zyſku.
$84 - 2x = 68$. Drugié wyrażénié maiątku A, po zyſku.

Inſzé przykłady. A, má Zł. 100: B, má Zł. 170: iléż B, má zyſkać od A, gdy chce mieć 2 razy tylé ilé A?

A, má Zł. 120, B, má Zł. 55. A, zyſkuie tylé dwoie, ilé B traci, i mieć potém będzie 3 razy tylé, ilé B.

30. *Zadanié 18.* A, má Zł. 100, B, má Zł. 70. A, tylé traci, ilé B, má iednak potém A, tylé dwoie, ilé B.

Fig. 5. *Arytmetycznie.* Niech liniiá AB, oznáczá Zł. 100, toieſt maiątek A, i niech liniiá CD, oznáczá Zł. 70, toieſt maiątek B. Niech liniie równé BX,

BX, DY, wyrażaią ſtraty A, i B: i niech AE, dwa razy tak wielká będzie, iak CD.

Ponieważ AE, dwa razy ieſt tak wielká, iak CD, a zaś AX powinna bydź dwa razy tak wielká, iak CY; więc i EX, muſi bydź dwa razy tak wiélká iak DY, albo BX: a zatém linie EB, BX, powinny bydź równé. A że AE oznáczá 140, AB, oznáczá 100; więc EB, albo BX, oznáczać będzie 40.

Strata równá . . A, i B . . . . 40.
Maiątek A, po ſtracie . . . . . 60.
Maiątek B, po ſtracie . . . . . 30.

Algiebraicznie. Mianowanié. Strata A, albo B . . . . x.
Maiątek B, po téy ſtracie . $70 - x$.
Maiątek A, po téy ſtracie . $100 - x$.
albo . . . $140 - 2x$.

Warunek. $100 - x = 140 - 2x$.

Przerábianié. (Dodáwſzy $2x$ po obu ſtronach) $100 + x = 140$.
(Odiąwſzy 100 po obu ſtronach) . . $x = 40$.

Rozwiązanié. $x = 40$. Strata A, lub B.
$70 - x = 30$. Maiątek B, po ſtracie.
$100 - x = 60$. Maiątek A, po ſtracie.
$140 - 2x = 60$. Drugié wyrażénié maiątku A, po ſtracie.

Inſzé przykłady. A, má 120 Zł. B, má 90 Zł. B, traci tylé dwoie, ilé A, po któréy ſtracie zoſtaie ſię dlá A, tylé dwoie, ilé dlá B.

A, má 120 Zł. B, má 90 Zł. A, traci tylé dwoie, ilé B, po którey ſtracie zoſtaie ſię dlá B, tylé dwoie, ilé dlá A.

31. *Uwága.* We dwóch oſtatnich zadaniach, aby znaleźć drugié wyrażénié maiątku A, trzeba było wziąć dwa razy wyrażénié maiątku B, złożoné ze dwóch części, z których iedna miała przed ſobą znak — I tak w zadaniu 17. trzeba było wziąć dwa razy ilość $42 - x$, a w zadaniu 18, trzeba było wziąć dwa razy ilość $70 - x$. Ilości tak rozmnożoné były $84 - 2x$, i $140 - 2x$. Przy téy okoliczności przytoczymy tu, i rozbiérać będziémy różné przykłady rozmnożénia, w których ilość mnożyć ſię maiącá, kładzie ſię ze znakiém odéymowania.

Niech będzie ilość $42 - x$, którą dwa razy wziąć potrzeba, czyli rozmnożyć przez 2.

Ilé razy przyszłoby brać 42, tylé razy trzebaby téż odiąć x: a że 42 bierze się 2 razy; więc téż trzeba odiąć x, 2 razy: a zatém ilość tak rozmnożoná, będzie $84 - 2x$.

Toż samo rozumowanié przystósować można i do wszystkich inszych przypádków.

Mnożné.	$12 - x.$	$13 - x.$	$7 - x.$	$15 - x.$	$16 - x.$	$18 - x.$
Mnożniki.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
Wieloczyny.	$36 - 3x.$	$52 - 4x.$	$35 - 5x.$	$90 - 6x.$	$112 - 7x.$	$144 - 8x.$

W drugim i w trzécim przykładzie Zadania 18, ilość niewiadomá, którą mnożyć przypádá, kładzie się z Spółczynnikiém.

Z powodu tego zdarzénia, wyłożymy ieszcze na różnych przykładach i regułę mnożénia względém Spółczynników.

Jeżeli ilość $2x$ weźmie się dwa razy; ilością rozmnożoną będzie summa, z $2x$ i z $2x$, toiest $4x$. Jeżeli weźmiémy $2x$ razy trzy, ilością rozmnożoną będzie trzy razy dwa x, albo 6 razy x, toiest $6x$. tak, iak 2 złoté wzięté razy trzy, czynią 6 Zł. A w ogólności mówiąc, aby rozmnożyć ilość maiącą Spółczynnika, przez liczbę cáłkowitą, trzeba tylko aby sám Spółczynnik téy ilości był rozmnożony przez tęż liczbę cáłkowitą.

PRZYKŁADY.

Mnożne.	$2x.$	$3x.$	$4x.$	$5x.$	$6x.$	$7x.$	i t. d.
Mnożniki.	3.	5.	6.	7.	8.	9.	
Wieloczyny.	$6x.$	$15x.$	$24x.$	$35x.$	$48x.$	$63x.$	i t. d.
Mnożné.	$6+2x.$	$8+3x.$	$5+4x.$	$7+8x.$	$11+9x.$		i t. d.
Mnożniki.	2.	3.	4.	5.	6.		
Wieloczyny.	$12+4x.$	$24+9x.$	$20+16x.$	$35+40x.$	$66+54x.$		i t. d.
Mnożné.	$3x-5.$	$4x-6.$	$5x-7.$	$8x-9.$	$10x-12.$		i t d.
Mnożniki.	2.	3.	4.	5.	6.		
Wieloczyny.	$6x-10.$	$12x-18.$	$20x-28.$	$40x-45.$	$60x-72.$		i t. d.

Mnożné.

Mnożne.	$12-2x$.	$12-3x$.	$15-4x$.	$20-5x$.	$28-6x$.	i t. d.
Mnożniki.	3.	4.	5.	6.	7.	
Wieloczyny.	$36-6x$.	$48-12x$.	$75-20x$.	$120-30x$.	$196-42x$.	i t. d.

32. *Zadanié 19. Jeżeli tak A, iak i B, zyſká Zł. 12; A, mieć będzie dwa razy tylé, ilé B. Jeżeli zaś tak A, iak i B, ſtraci Zł. 12; A, mieć będzie trzy razy tylé, ilé B. Iléż tak A, iak i B, má przed tym zyſkiém, i po zyſku: i ilé tak A, iak i B, mieć będzie przed tą ſtratą, i po ſtracie?*

Arytmetycznie. A, zyſkáwſzy 12 Zł. má 24 Zł. więcéy, niż ſtraciwſzy 12 Zł. B, także zyſkáwſzy 12 Zł. má 24 Zł. więcéy, niż ſtraciwſzy 12 Zł. Ponieważ A, w powtórnym ſtanie maiątku, trzy razy má tylé, ilé B; więc aby i w piérwſzym ſtanie maiątek A, był trzy razy tak wielki, iak maiątek B; trzebaby mieć A, po zyſku 3 razy 24, czyli 72 Zł. więcéy, niżeli má po ſtracie. Że zaś po zyſku má tylko 24 złote więcéy niż po ſtracie; więc ieſzcze brakuie A, po zyſku Zł. 48 do tego, aby maiątek A, po tymże zyſku, był 3 razy tak wielki iak maiątek B. Má zaś w ſaméy rzeczy A, po zyſku, tylko dwa razy tylé, ilé B: więc ieſzcze nie doſtaie A, maiątku B, ráz wziętégo, aby po zyſku był trzy razy tak wielki maiątek A, iak maiątek B. Więc maiątek B, po zyſku, ieſt 48 Zł: a zatém przed zyſkiém, B, má 36 złotych.

Maiątek B, po zyſku	 48	złotych.
Piérwſzy maiątek B	. . . . . . 36.	
Maiątek B, po ſtracie	. . . . 24.	

Maiątek A, po zyſku	. . . . . 96.	złotych.
Piérwſzy maiątek A	. . . . 84.	
Maiątek A, po ſtracie	. . . . . . 72.	

To rozumowanié obiaśnić można podobnie iak wyżéy na liniiach.

Algiebraicznie. Mian: Maiątek B, po ſtracie . . . . x.
Maiątek B, przed ſtratą . . . $x+12$.
Maiątek B, po zyſku . . . . $x+24$.
Maiątek A, po ſtracie . . . . $3x$.
Maiątek A. przed ſtratą . . . $3x+12$.
Maiątek A, po zyſku . . . . $3x+24$.
albo . . . . . . $2x+48$.

Warunek $3x+24=2x+48$.

Przerób: (Odiąwszy 24 po obu stronach) $3x = 2x + 24$.
(Odiąwszy $2x$ po obu stronach) $1x = 24$.

Rozwiązanié. $x = 24$. Maiątek B, po stracie.
$x + 12 = 36$. Maiątek B, przed stratą.
$x + 24 = 48$. Maiątek B, po zysku.

$3x = 72$. Maiątek A, po stracie.
$3x + 12 = 84$. Maiątek A, przed stratą.
$3x + 24 = 96$. Maiątek A, po zysku.
albo $2x + 48 = 96$. Drugié wyrażénié maiątku A, po zysku.

Insze przykłady. Jeżeli tak A, iak B, zyszká Zł. 12; A, mieć będzie 3 razy tylé, ilé B: ale ieżeli tak A, iak B, straci Zł. 12; A, mieć będzie cztéry razy tylé, ilé B.

Jeżeli A, zyszká Zł. 12, a B, zyszká Zł. 8, A, mieć będzie trzy razy tylé, ilé B: ale ieżeli A, traci Zł. 8, a B, traci Zł. 12. A, mieć będzie 5 razy tylé, ilé B.

33. *Zadanié 20. Zakład między A, i B, iest o 12 Zł. ieżeli ié wygrá A, mieć będzie dwa razy tylé ilé B: ieżeli zaś wygrá B, tedy mieć tylé będzie, ilé A. Ileż má A, ilé B, przed wygraną, po wygranéy, lub po przegranéy*

Jeżeli wygrá A, tedy mieć będzie 24 złoté więcéy niż po przegranéy. Toż mówić i o B. Nie uważaiąc więc maiątków A, i B, iak tylko po wygranéy, i po przegranéy; Zadanié to odmiéniá się w insze podobné Zadaniu 15, i możná ié tak wyłożyć:

Dwie osoby A, i B, równy maiątek posiádaią: A, zyskuie Zł. 24, które traci B, potém A, má dwa razy tylé, ilé B.

Gdy B, traci Zł. 24, ieżeli i po téy stracie, A, má mieć tylé, ilé B; trzeba ażeby i A, straciła téż Zł. 24. Alé że A, zamiást stracénia Zł. 24, zyskuie ieszcze 24 złoté; więc A, po zysku má 48 Zł. więcéy niżby mieć powinna, gdyby tylko tylé miała, ilé B, po stracie.

Ze zaś w saméy rzeczy A, má po zysku dwa razy tylé, ilé B; więc tén maiątek A, przewyższá maiątek B, tymżé maiątkiém B, raz wziętym: a zatém B, po stracie 24 Zł. má tylko 48. a przed stratą miała 72 złoté.

Wrácaiąc się do piérwszych Zadania tego wyrazów; będzie

Maiątek

Maiątek B, gdy zakład wygrá . . . . 72. złoté.
Maiątek B, przed zakładém . . . . . 60.
Maiątek B, gdy zakład przegrá . . . 48.

Maiątek A, gdy zakład przegrá . . . 72.
Maiątek A, przed zakładém . . . . . 84.
Maiątek A, gdy zakład wygrá . . . . 96.

Algiebraicznie. Mian: Maiątek B, po wygranéy . . . x.
Maiątek B, przed zakładém . . $x - 12$.
Maiątek B, po przegranéy . . $x - 24$.

Maiątek A, po przegranéy . . . . x.
Maiątek A, przed zakładém . . . $x + 12$.
Maiątek A, po wygranéy . . . $x + 24$.
albo . . . . $2x - 48$.

Warunek. $2x - 48 = x + 24$.

Przerábianié. (Dodáwszy 48 po obu stronach) $2x = x + 72$.
(Odiąwszy x po obu stronach) $x = 72$.

Rozwiązanié. $x = 72$. Maiątek B, po wygranéy.
$x - 12 = 60$. Maiątek B, przed zakładém.
$x - 24 = 48$. Maiątek B, po przegranéy.

$x = 72$. Maiątek A, po przegranéy.
$x + 12 = 84$. Maiątek A, przed zakładém.
$x + 24 = 96$. Maiątek A, , po wygranéy.

Inszé przykłady. Zakład między A, i B, iest o Zł. 20: ieżeli go A wygrá, tedy mieć tylé troie będzie, ilé B: ieżeli zaś wygrá B, tedy A, mieć tylko będzie tylé dwoie, ilé B.

Jeżeli A, wygrá Zł. 24, a B, przegrá Zł. 16, tedy A, mieć będzie 5 razy tylé, ilé B: ieżeli zaś B, wygrá Zł. 20, a A, przegrá Zł. 12, tedy A, mieć tylko będzie tylé troie, ilé B.

34. *Zadanié 21. Maiątki cztérech Osób, A, B, C, D, są takié, że A, więcéy má niż B, Zł. 40. C, więcéy niż D, Zł. 60. A, trzy razy má tylé, ilé D, a C, dwa razy má tylé, ilé B. Jakiż iest każdéy z tych 4 Osób maiątek?*

Użycié

Fig. 6. Użycié liniy ułatwi rozwiązanié tego Zadania przez rozumowanié.

Niech linie AB, CD, wystawują nám liczby 40, i 60: niech liniié BX, DY wystawują maiątki B, i D, a tém samém liniie AX, CY, niech wystawują maiątki A, i C.

Liniiá CY, powinna bydź, podług zadania, dwa razy tylá, ilá iest BX. Wziąwszy liniią BE, równą połowie linii CD, toiest 30 złotych; liniiá EX, musi téż bydź połową linii DY. A że AX, ma bydź trzy razy tak wielká, iak DY; więc AX, będzie 6 razy tak wielká, iak EX: a zatém AE, będzie w sobie zamykała EX, 5 razy. Ze zaś AE, równá iest summie AB, i BE, toiest summa 30, i 40, czyli 70; więc EX, oznáczać będzie piątą część 70, toiest 14, a zatém BX, oznaczy summę 30, i 14, toiest 44. AX summę 40, i 44, toiest 84 CY dwarazy tak wielká, iak BX, będzie oznáczać 88, a DY oznaczy mniéy 60 Zł: toiest oznaczy 28.

Powtórzénié. Maiątek A . . . . . 84.
. . . . B . . . . . 44.
. . . . C . . . . . 88.
. . . . D . . . . . 28.

Algiebraicznie. Maiątek B . . . . . x.
Maiątek A . . . . . $x + 40$.
Maiątek C . . . . . $2x$.
Maiątek D . . . . . $2x - 60$.
Drugié wyrażénié maiątku A . . . $6x - 180$.

Warunek. $6x - 180 = x + 40$.

(Dodáwszy 180 po obu stronach) $6x = x + 220$.
(Odiąwszy $1x$ po obu stronach) $5x = 220$.
(Podzieliwszy przez 5 obie strony) $1x = 44$.

Inszé przykłady. *A, má więcéy 88 Zł. niż B.*
C, má więcéy 99 Zł. niż D.
A, má 4 razy tylé, ilé D.
C, má 3 razy tylé, ilé B.

A, má 70 Zł. więcéy niż B.
C, má 84 Zł. więcéy niż D.
A, má 5 razy tylé, ilé D.
C, má 3 razy tylé, ilé B.

35. *Za-*

35\. *Zadanié 22.* *A, i B, maią razém 84 Zł.*
C, má więcéy 14 Zł. niż D.
A, má 3 razy tylé, ilé D.
C, má 2 razy tylé, ilé B.

Iléż má każdá z tych Osób w szczególności?

Niech liniiá AB, wyráżá summę maiątku A, i B, toiest Zł. 84, a liniiá CD, niech wyráżá różnicę maiątku C, i D, toiest 14 Zł. Niech AX, i BX, wyráżáią maiątki A, i B: niech nakoniec CY, DY, wyráżaią maiątki C, i D. Maiątek A, powinién bydź podług zadania trzy razy tak wielki, iak iest maiątek D: więc téż, i AX, powinna bydź trzy tak wielká, iak DY: a zatém ieżeli weźmiémy AE, trzy razy tylą, ilá iest CD, będzie EX, trzy razy tylá, ilá iest CY. A że CY, má bydź dwa razy tak wielká, iak BX; więc EX, będzie 6 razy tak wielká, iak BX: a zatém EB, będzie 7 razy tak wielká, iak BX. Jest zaś EB, równá summie AB, i 3 razy CD, toiest 126; więc BX, wyráżać będzie siódmą część Zł. 126, toiest 18. Przeto AX, wyrázi 84, mniéy 18, toiest 66. CY, 2 razy tak wielká, iak BX, wyrazi 36, a DY, wyrazi mniéy 14, toiest wyrazi 22. Fig. 7.

Maiątek A . . . . 66.
Maiątek B . . . . 18.
Maiątek C . . . . 36.
Maiątek D . . . . 22.

Algiebraicznie. *Mian:* Maiątek D . . . . x.
Maiątek C . . . . $x + 14$.
Maiątek A . . . . $3x$.
Maiątek B . . . . $84 - 3x$.

Drugié wyrażénie maiątku C . . . . . $168 - 6x$.

Warunek. $x + 14 = 168 - 6x$.

Przerábianié. (Dodáwszy $6x$ po obu stronach) $7x + 14 = 168$.
(Odiąwszy 14 po obu stronach) . . . $7x = 154$.
(Podzieliwszy przez 7, obie strony) $1x = 22$.

 Roz-

Rozwiązanié. $x = 22$. Maiątek D.
$x + 14 = 36$. Maiątek C.
$3x = 66$. Maiątek A.
$84 - 3x = 18$. Maiątek B.

Sprâwdzénié. 36, toieſt maiątek C, dwa razy w ſobie zamyká 18, toieſt maiątek B.

Inſzé przykłady. *A, i B, maią razém 220 Zł.*
C, má więcéy 80 Zł. niż D.
A, má 4 razy tylé, ilé D.
C, má 2 razy tylé, ilé B.

A, i B, maią razém 144 Zł.
C, má 64 złotych więcéy, niż D.
A, má 5 razy tylé, ilé . . D.
C, má 3 razy tylé, ilé . . B.

36. *Zadanié 23.* *A, i B, maią razém 100 Zł.*
C, i D, maią także razem 100 Zł.
A, má, 3 razy tylé, ilé D.
C, má, 2 razy tylé, ilé B.

Iléż má każdá z tych Oſób w ſzczególnośći,

Przez rozumowanié. Niech liniie równé AB, CD, wyrâżaią dwie ſummy równé: piérwſzá ſummę maiątku A, i B, drugá ſummę maiątku C, i D.

Fig. 8. Niech AX, i BX, wyrâżaią maiątki ſzczególné A, i B, a CY, DY, niech wyrâżaią maiątki ſzczególné, C, i D. Maiątek A, má bydź 3 razy tak wielki, iak maiątek D, więc AX, powinna trzy razy zamykać w ſobie DY. Zróbmy AE, trzy razy tylą, ilá ieſt CD: będzie EX, trzy razy także tak wielká, iak CY: a że CY, má bydź dwa razy tylá, ilá ieſt BX; więc EX, ieſt 6 razy tak wielká, iak BX: a zatém EB, będzie 5 razy tylá, ilá ieſt BX. Jeſt więc liniiá BX, $\frac{1}{5}$ linii EB, toieſt $\frac{1}{5}$ Zł. 200: a zatém BX wyrâżá Zł. 40.

Maiątek B 40
Maiątek A . . . . 60.
Maiątek C . . . . 80.
Maiątek D . . . . 20.

Algiebraicznie. *Mianowanié.* Maiątek D . . . x.
Maiątek A . . . $3x$.
Maiątek B . . . $100 - 3x$.
Maiątek C . . . $100 - x$.
albo . . . $200 - 6x$.

Warunek $100 - x = 200 - 6x$.

Przerábianié. (Dodáwszy $6x$ po obu stronach) $100 + 5x = 200$.
(Odiąwszy 100 po obu stronach) . . . $5x = 100$.
(Podzieliwszy przez pięć) . . . . $1x = 20$.

Rozwiązanié. $x = 20$. Maiątek D.
$3x = 60$. Maiątek A.
$100 - 3x = 40$. Maiątek B.
$200 - 6x = 80$. Maiątek C.
$100 - x = 80$. Drugié wyrażénié maiątku C.

Spráwdzénié. Dwa wyrażénia maiątku C, są równé.

Inszé przykłady. *A, i B. maią razém Zł. 112.*
C, i D, maią razém Zł. 126.
A, má 5 razy tylé, ilé D.
C, má 3 razy tylé, ilé B.

A, i B, maią razém 117 Zł.
C, i D, maią razém 113 Zł.
A, má 5 razy tylé, ilé D.
C, má 3 razy tylé, ilé B.

37. *Zadanié 24. Dwie Osoby A, i B, maią razém 100 Zł. A, má trzy razy tylé nad 40, ilé B, má mniéy od 40.*

Niech liniiá AB, wyráżá summę maiątków niewiadomych, AX, BX, osób A, i B. Niech tak liniiá AD, iak liniiá BC, wyráżá 40. Liniiá DX, wyráżać będzie to, co má A, nad 40 Zł. a liniiá CX, wyrazi to, co mà B, mniéy od 40: musi zatém bydź DX, trzy razy tak wielká, iak CX, a CD, dwa razy tak wielká, iak CX. Że zaś CD, wyráżá 20; więc CX wyráżać, będzie 10, a zatém AX, wyrazi 70, a BX, 30. Fig. 9.

Maiątek A . . . . . 70.
Maiątek B . . . . . 30.

A, má więcéy 30, nad 40.
B, má mniéy 10, od 40.

Algiebraicznie. Mian: To, co má B, mniéy od 40 nazwiéymy . . x.
Będzie to, co má A, więcéy nad 40 . . . $3x$.

Maiątek przeto B . . . . . $40 - x$.
Maiątek . . . A . . . . . . $40 + 3x$.
Summa maiątków . . . . $80 + 2x$.

Warunek. $80 + 2x = 100$.

Przerábianié. (Odiąwszy 80 po obu stronach) $2x = 20$.
(Podzieliwszy przez 2) . . . . $1x = 10$.

Rozwiązanié. $x = 10$. Tylé má B, mniéy od 40.
$3x = 30$. Tylé má A, więcéy nad 40.

$40 - x = 30$. Maiątek B.
$40 + 3x = 70$. Maiątek A.

$80 + 2x = 100$. Summa maiątków.

Inszé przykłady. Oyciec wráz z Synem maią lát 60. Tenże oyciec má 4 razy tylé więcéy nad lát 18, ilé Syn má mniéy od lát 18.

A, i B, maią razém złotych 1200. A, má 5 razy tylé więcéy nad 90, ilé B, má ráz więcéy nad 90.

38. *Zadanié 25. Mám liczbę złożoną ze dwóch znaków: summa tych dwóch znaków osobno wziętych czyni 9. Gdy do téy liczby ze dwóch znaków złożonéy dodám 27, będę miáł inną liczbę złożoną z tychże dwóch co i piérwéy znaków, ale w porządku wspacznym. Jakież są té dwie liczby?*

Arytmetycznie. Ponieważ piérwszá liczba, któréy szukámy, powinna bydź taká, aby summa dwóch iéy znaków osobno wziętych czyniła 9; więc będzie iedną z ośmiu liczb następuiących:

18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81.

Z tych

Z tych ośmiu liczb cztéry ostatnié, 81, 72, 63, 54, składaią się z tych samych znaków, co i cztéry piérwszé, 18, 27, 36, 45, ale w porządku wspacznym. Będzie więc iedna z tych cztérech liczb, 18, 27, 36, 45, liczbą piérwszą szukaną. Różnice tych liczb od tamtych, toiest 18, od 81, 27 od 72, 36 od 63, 45 od 54, będą 63, 45, 27, 9. Z tych cztérech różnic trzeciá tylko, toiest 27, równá się różnicy danéy: a zatém liczby 36, i 63, téy różnicy odpowiadaiącé, są liczbami którycheśmy szukali.

Algiebr: Miam Znak dziesiątków piérwszéy liczby szukanéy . . x.
Znak iedności téyże liczby . . . . . $9 - x$.
Ważność znaku dziesiątków . . . . . . $10x$.
Ważność znaku iedności . . . . . . $9 - x$.

Liczba piérwszá szukaná . . . . . . $9x + 9$.

Znak dziesiątków drugiéy liczby szukanéy . . $9 - x$.
Znak iedności téyże liczby . . . . x.
Ważność znaku dziesiątków drugiéy liczby $90 - 10x$.
Ważność znaku iedności téyże liczby . . . . x.
Liczba drugá szukaná . . . . $90 - 9x$.

A że ta drugá liczba, má bydź większá 27, od piérwszéy; więc drugié iéy wyrażénié będzie . . . . . $9x + 36$.

Warunek. $9x + 36 = 90 - 9x$.

Przerábianié. (Dodáwszy $9x$ po obu stronach) $18x + 36 = 90$.
(Odiąwszy 36 po obu stronach) . . $18x = 54$.
(Podzieliwszy przez 18) . . . . . $1x = 3$.

Rozwiązanié. $x = 3$. Znak dziesiątków piérwszéy liczby.
$9 - x = 6$. Znak iedności piérwszéy liczby.

Ténże znak 6, iest znakiém dziesiątków drugiéy liczby, a 3 znakiém iedności drugiéy liczby, tak iak wyżéy: a zatém liczby szukané, są 36, i 63.

Inszé przykłady. Mám liczbę złożoną ze dwóch znaków, których summa czyni 10: Gdy do téy liczby dodám 36, będę miáł inną liczbę złożoną z tychże co i piérwszá, znaków, ale w porządku wspacznym.

Mám liczbę złożoną ze dwóch znaków, których summa czyni 12. Gdy do téy liczby dodám 18, będę miał inną liczbę złożoną z tychże co i piérwszá, znaków, ale w porządku wspacznym.

39. *Uwága.* W każdym z trzech przykładów poprzedzaiących summa dwóch liczb z jednakowémi znakami, w porządku wspacznym ułożonémi była iednostayná: toiest w przykładzie piérwszym była ta summa 99, w drugim 110, w trzecim 132. Gdyby za drugi warunek daná była ta summa taká, iaką té dwie liczby czynić powinny; tedy tén drugi warunek, byłby zbytnim: bo iuż był zawarty w piérwszym warunku: gdyby zaś daná była inná iaká summa od piérwszéy odmiénná, tedy zadanié byłoby niepodobné do rozwiązania. Ostrzédz to nás powinno, że warunki dané, maią bydź zawsze takié, aby iedné nie były zawisłé od drugich, i w nich się żádną miarą nie zawiérały.

40. *Zadanié 26. Mám liczbę złożną ze dwóch znaków, toiest z jedności i z dziesiątków: znak zaś iedności má w sobie więcéy iedną iednością, niż znak dziesiątków. Summa téy liczby, i drugiéy z tychże dwóch znaków złożonéy, ale w porządku wspacznym czyni 55.*

Arytmetycznie. Piérwszá liczba szukaná musi bydź iedną z tych cztéréch 12, 23, 34, 45.

Liczby złożoné z tychże dwóch znaków, ale w porządku wspacznym są: 21, 32, 43, 54. Summa tych liczb i piérwszych im odpowiadaiących iest: 33, 55, 77, 99. A że drugá z tych summ równá iest summie danéy; więc liczby, których szukaliśmy, będą 23, i 32. Jakož té dwie liczby czynią zadosyć danym warunkóm.

Algiebr: Mian: Znak dziesiątków 1wszéy liczby szukanéy x.

Znak iedności	$x+1$.
Wáżność dziesiątków . . .	$10x$.
Wáżność iedności	$x+1$.
Wáżność 1wszéy liczby . .	$11x+1$.

Znak dziesiątków drugiéy liczby . . .	$x+1$.
Wáżność dziésiątków drugiéy liczby .	$10x+10$.
Znak i wáżność iedności	x.
Wáżność drugiéy liczby	$11x+10$.
Summa piérwszéy i drugiéy liczby . .	$22x+11$.

Wáru-

Warunek. $22x + 11 = 55$.

Przerábianié. (Odiąwſzy 11 po obu ſtronach) $22x = 44$.
(Podzieliwſzy przez 22) . . . $1x = 2$.

Rozwiązanié. $x = 2$. Znak dzieſiątków piérwſzéy liczby.
$x + 1 = 3$. Znak iedności.

23. Liczba 1wſzá ſzukaná.
32. Liczba 2gá w porządku wſpacznym.

55. Summa dwóch liczb ſzukanych.

Inſzé przykłady. Mám liczbę złożoną ze dwóch znaków: Znak iedności má 2 więcéy, niż znak dzieſiątków. Summa téy liczby, i inſzéy złożonéy z tychże znaków, ale w porządku wſpacznym czyni 88.

Mám liczbę, którey znak iedności ieſt większy pięcią, od znaku dzieſiątków. Summa téy liczby i inſzéy złożonéy z tychże znaków, ale w porządku wſpacznym czyni 121.

41. *Uwága.* Gdyby za drugi warunek daná była różnica dwóch liczb, tedy tén drugi warunek, alboby ſię zgádzáł z piérwſzym, od którégo zawiſł, i byłby zbytnim; alboby ſię iému ſprzeciwiáł, i Zagádniénié byłoby niepodobné do rozwiązaniá.

42. *Zadanié 27. Pewny Kupiec na początku każdégo roku wyłączá z kapitału ſwégo co rok na wydátki Zł. 1200: reſztą zaś kapitału tak pomyślnie zarábiá, że na końcu każdégo roku dwoi kapitáł pozoſtały. Przy końcu 3 lát przychodzi do kapitału 5 razy tak wielkiégo, iak był tén, który zebráł przed 3 laty.*

Jakiż ieſt kapitáł iego?

Arytmetycznie. Gdyby tén Kupiec nic nie wydáwáł; tedy na końcu 1wſzégo roku podwoiłby ſwóy kapitáł. Na końcu drugiégo roku podwoiłby znowu kapitáł iuż podwoiony, który zatém byłby 4 razy tak wielki, iak był przy początku piérwſzégo roku. Na końcu trzeciégo roku byłby podwoiony tén kapitáł, który miáł na końcu drugiégo roku, toieſt, byłby 8 razy tak wielki, iak przy początku 1wſzégo roku. Gdyby więc tén kupiec nic nie wydáwáł; tedy na końcu 1wſzégo, 2go, 3ciégo roku, zebráłby kapitáł 2, 4, 8, razy tak wielki, iak był przy początku 1wſzégo roku. Té

Té zatém 1200 złotych, które przy początku piérwszégo roku na wydátki wyłączył, gdyby się przy kapitále zostáwały; tedy na końcu trzech lát 8 razyby się pomnożyły, toiest, zamiást tych 1200 Zł. miálby na końcu trzeciégo roku 9600. Té 1200 Zł. które przy początku drugiégo roku na wydátki wyłączył, byłyby się na końcu trzeciégo roku 4 razy pomnożyły, toiest, miálby zamiást nich na końcu 3ciégo roku 4800. Té naostatek 1200 Zł. które przy początku 3ciégo roku na wydátki wyłączył, byłyby się na końcu 3ciégo roku podwoiły, toiest miálby zamiást nich na końcu 3ciégo roku 2400 złotych.

Że więc ten kupiec przez trzy lata co rok z kapitálu swégo wyłączál na wydátki Zł: 1200, dlá tego na końcu trzeciégo roku kapitál iego powinién bydź mnieyszy tą summą, którą byłby większy, gdyby był nic z swégo kapitálu nie wydáwál: toiest, będzie na końcu trzeciégo roku kapitál tego kupca mnieyszy summą tych trzech liczb 9600, 4800, 2400, czyli 16800 złotych. Nie dostaie tedy kupcowi témú złotych 16800, aby miál na końcu trzeciégo roku 8 razy tylé, ilé miál na początku 1wszégo roku. A że na końcu trzeciégo roku má tylko 5 razy tylé, ilé miál na początku piérwszégo roku; więc nie dostaie mu trzy razy tylé, ilé miál na początku piérwszégo roku, aby na końcu trzeciégo roku, miál 8 razy tylé, ilé miál na początku piérwszégo roku: a zatém 1wszy kapitál iego trzy razy wzięty czyni 16800 złotych: trzeciá zaś część złotych 16800, toiest 5600 złotych iest piérwszym iego kapitálém.

1wszy kapitál kupca tego	5600 Zł.
Po 1wszym wydátku . .	1200.
Zostaie mu	4400.
Na końcu 1wszégo roku má . .	8800.
Po drugim wydátku	1200.
Zostaie mu	7600.
Na końcu 2giégo roku má	15200.
Po 3cim wydátku	1200.
Zostaie mu	14000.

Na

Na końcu 3ciégo roku . . . 28000, toieſt 5 razy 5600 Zł.

Algiebraicznie. Mian: Kapitáł 1wſzy tego kupca . . x.
Po piérwſzym wydátku 1200 Zł. $x - 1200$.
Na końcu 1wſzégo roku . . $2x - 2400$.
Po drugim wydátku 1200 Zł. $2x - 3600$.
Na końcu 2giégo roku . . . $4x - 7200$.
Po trzecim wydátku 1200 Zł. $4x - 8400$.
Na końcu trzeciégo roku . . $8x - 16800$.

A że tén kupiec na końcu 3ciégo roku má mieć 5 razy tylé, ilé miáł na początku 1wſzégo; więc

Warunek. $8x - 16800 = 5x$.

Przerábianié. (Dodáwſzy 16800 po obu ſtronach) $8x = 5x + 16800$.
(Odiąwſzy $5x$ po obu ſtronach) . . $3x = 16800$.
(Podzieliwſzy przez 3) . . . . . . $x = 5600$.

Rozwiązanié. $x = 5600$.

Dalſzé w rozwiązaniu poſtępowanié, iuż w ſpoſobie rozwiązania Arytmetycznym ieſt wyłożoné.

Inſzé przykłady. Wydátek roczny tego kupca ieſt 1500 Zł. Na końcu lát 4, má tylé 10 razy, ilé miáł na początku.

Wydátek roczny kupca ieſt 2200 Zł. Na końcu lát 5 má 10 razy tylé, ilé miáł na początku.

43. *Zadanié 28. A, daie dlá B, tylé Zł. ilé B, iuż má: B, wzaiémnie daie dlá A, tylé Zł. ilé ſię u A, pozoſtało. Po tym wzaiémnym dátku, A, i B, maią po 4 Zł. Ilêż piérwéy Zł. było u A, a ilé u B?*

Arytmetycznie. A, mieć będzie Zł: 4, doſtáwſzy od B, tylé Zł. ilé ich má pozoſtałych, toieſt A, má Zł. 4, po podwoionym przez B, maiątku ſwoim: więc u A, była piérwéy połowa Zł. 4, toieſt Zł. 2. B, dáwſzy dlá A, Zł. 2, má pozoſtałych Zł. 4: więc przed tym dátkiém muſiało bydź u B, Zł. 6.

B, mieć będzie 6 Zł. wziąwſzy od A, tyle, ile iuż má: więc przéd tym wziątkiém była u B, połowá Zł. 6, toieſt 3 Zł: więc wziątek B, od A, ieſt Zł. 3 Że zaś A, dáwſzy té 3 Zł. má reſzty 2 Zł. więc przed tym dátkiém było u A Zł. 5.

Maiątki A.		Maiątki B.	
1wſzy maiątek . . .	5 Zł.	1wſzy maiątek . . .	3 Zł.
2gi maiątek po wydanych Zł. 3 . . .	2.	2gi po wziętych Zł. 3 . . .	6.
3ci maiątek po wziętych Zł. 2 . .	4.	3ci po wydanych Zł. 2	4.

Algiebraicznie. A, i B, maią naoſtatku po Zł. 4; więc maią razém Zł. 8. A że tylko między niémi były wzaiémné dátki; więc i przed témi dátkami znaydowało ſię u nich Zł. 8.

Mian: 1wſzy maiątek B . . . . x. 1wſzy maiątek A . . . $8-x$.
2gi maiątek B, po wziątku $2x$. 2gi maiątek A, po datku $8-2x$.
Maiątek A, po wziątku $16-4x$.

Warunek. $16-4x=4$.

Przerábianié. (Dodáwſzy $4x$ po obu ſtronach) $16=4+4x$.
(Odiąwſzy 4 po obu ſtronach) $12=4x$.
(Podzieliwſzy przez 4) . . . . . . $3=1x$.

W dalſzém poſtępowaniu możná wziąć miarę z poſtępowania Arytmetycznégo.

2gi Przykłád. A, daie dlá B, dwa razy tylé, ilé má B: B, wrácá dlá A, dwa razy tylé, ilé ſię zoſtało u A. Naoſkatek tak A, iak i B, maią po Zł. 9.

Arytmetycznie. A, mieć będzie 9 Zł. gdy weźmie od B, tylé dwoie, ilé iuż má A: więc przez tén wziątek, maiątek A, ieſt potroiony, a zatém u A, było przedtém Zł. 3; więc od B, má Zł. 6. B, má Zł. 9, dáwſzy dlá A, Zł. 6; więc u B, przed daniém złotych 6, było 15 Zł. B, má Zł. 15 wziąwſzy od A, tylé dwoie, ilé má przed tym wziątkiém; więc má naprzód Zł. 5, a potém bierze Zł. 10. Że zaś ſię u A, zoſtało Zł: 3, dáwſzy Zł. 10; więc przed tym dátkiém było u A, Zł. 13.

Maią-

Maiątki A.		Maiątki B.	
1wſzy maiątki	13. Zł.	1wſzy maiątek	5. Zł.
A, daie	10.	B, bierze	10.
Zoſtaie ſię	3.	Więc má	15.
Bierze	6.	Daie	6.
Więc má	9.	Zoſtaie ſię	9.

Algiebraicznie. Naoſtatku tak A, iak i B, maią po Zł. 9; więc razém maią Zł. 18. A że maiątków ich ſumma była i przedtém iednakowá; więc i przedtém było u nich Zł. 18.

Mian: 1wſzy maiątek B . . x. 1wſzy maiątek A . . $18 - x$.
po wziątku $2x$ . . . $3x$. Dáwſzy $2x$ . . . . . $18 - 3x$.
Wziąwſzy $36 - 6x$, $54 - 9x$.

Warunek. $54 - 9x = 9$.

Przerábianié. (Dodáwſzy $9x$ po obu ſtronach) $54 = 9 + 9x$.
(Odiąwſzy 9 po obu ſtronach) $45 = 9x$.
(Podzieliwſzy przez 9) . . . . . $5 = 1x$.

Rozwiązanié. $x = 5$. 1wſzy maiątek B.
$3x = 15$. Maiątek B, po wziętych Zł. 10.

$18 - x = 13$. 1wſzy maiątek A.
$18 - 3x = 3$. Maiątek A, po danych Zł. 10.
$54 - 9x = 9$. Maiątek A, po wziętych Zł. 6.

Inſzé przykłady. A, daie dlá B, 3, 4, 5, i t. d. razy tylé, ilé má B. B, oddaie dlá A, 3, 4, 5, i t. d. razy tylé, ilé u A, zaſtało. Po czém tak A, iak i B, maią w piérwſzym razie po Zł. 16, w drugim po Zł. 25, w trzecim po Zł. 36, i t. d.

44. *Uwága.* W przykładach zadania poprzedzaiącégo, *np:* w piérwſzym, gdybyśmy byli ſzukali wyrażénia powtórnégo maiątku B; tedyby trzeba było odiąć ilość $8 - 2x$ od ilości $2x$: w czém ponieważ nieiaká trudność zachodzi; więc dziáłanié to tak obiaśniámy.

Gdyby od $2x$ przyſzło odiąć 8; zoſtałoby $2x - 8$. Ale, że zamiaſt 8 trzeba odeymować 8 mniéy $2x$; więc odeymuiąc 8, nadtoby ſię odięło, i reſzta byłaby mnieyſzá dwiéma x, niż bydź powinna: więc do téy reſzty $2x - 8$, trzeba znowu dodadź $2x$, aby reſzta była taká, iaká bydź powinna: a zatém $4x - 8$, będzie práwdziwą reſztą.

Sprâwdzénié tego na tém zawiſło, aby reſztę $4x - 8$ dodadź do ilości $8 - 2x$, która ſię odeymowała: i obáczyć, czyli ta ſumma uczyni $2x$: że zaś tak ieſt w ſaméy rzeczy; więc ſię dobrze odięło.

Podobnie, i w drugim przykładzie, chcąc znaléźć wyrażénié powtórnégo maiątku B; trzeba było od $3x$ odiąć $36 - 6x$. Gdyby 36 przyſzło odeymować od $3x$; byłoby reſzty $3x - 36$: ale że trzeba odeymować 36, zmnieyſzoné ſzéścią x; więc ta réſzta byłaby mnieyſzá ſzéścią x, niż bydź powinna. Trzeba więc do niéy dodadź té $6x$, a dopiéro reſzta $9x - 36$, będzie reſztą práwdziwą.

Takié rozumowanié uczyniwſzy, uſtanowimy Mianowania w przykładach naſtępuiących, w których ſpoſób poſtępowania Arytmetyczny nie różni ſię od Algiebraicznégo.

A, daie dlá B, tylé Zł. ilé ich má B.
B, daie dlá A, tylé Zł. ilé ſię u A zoſtało.
A, znowu daie dlá B, tylé Zł. ilé ſię u B, zoſtało.
B, znowu daie dlá A, tylé Zł. ilé ſię u A, zoſtało.

Po tych wzaiémnych dwoiakich dátkach, tak A, iak i B, mieć będą po Zł. 16.

Mianowanié.	1wſzy maiątek B	x.
	1wſzy maiątek A	$32 - x$.
	B, wziąwſzy x, od A, má	$2x$.
	A, dáwſzy x, dlá B, má	$32 - 2x$.
	B, dáwſzy $32 - 2x$, dlá A, má	$4x - 32$.
	A, wziąwſzy $32 - 2x$, od B, má	$64 - 4x$.
	B, wziąwſzy $4x - 32$, od A, má	$8x - 64$.
	A, dáwſzy $4x - 32$, dlá B, má	$96 - 8x$.
	B, dáwſzy $96 - 8x$, dlá A, má	$16x - 160$.
	A, wziąwſzy $96 - 8x$, od B, má	$192 - 16x$.

Warunek. $16x - 160 = 16$.

Prze-

Przerábianié. (Dodáwszy 160 po obu stronach) $16x = 176$.
(Podzieliwszy przez 16) . . . . $x = 11$.

Rozwiązanié. $x = 11$. Piérwszy maiątek B.
$32 - x = 21$. Piérwszy maiątek A.
$2x = 22$. Maiątek B, wziąwszy 11.
$32 - 2x = 10$. Maiątek A, dáwszy 11.
$4x - 32 = 12$. Maiątek B, dáwszy 10.
$64 - 4x = 20$. Maiątek A, wziąwszy 10.
$8x - 64 = 24$. Maiątek B, wziąwszy 12.
$96 - 8x = 8$. Maiątek A, dáwszy 12.
$16x - 160 = 16$. Maiątek B, dáwszy 8.
$192 - 16x = 16$. Maiątek A, wziąwszy 8.

Inszé przykłady. A, i B, czynią podobné iak wyżéy zamiany 3, 4, 5, i t. d. razy, i maią naostatek w piérwszym razie po Zł. 64, w drugim po 256, w trzecim po 1024 i t. d.

45. Wprawiwszy Uczniów przez wielé szczególnych odeymowania przykładów, wnieśmy z rozumowania czynionégo na każdym z tych przykładów, regułę ogólną odeymowania, na tém się zasadzaiącą, aby odmiéniać znaki przed wyrazami ilości odeymować się maiącéy: toiest + na — a zaś — na + i potém dodáwać. O téy iednak ostatniéy odmianie, wtedy tylko przyzwoicie będzie się mówiło; gdy w ilości odeymować się maiącéy znáydować się będą wyrazy, z poprzedzaiącym znakiém odeymowania —.

1mo. Od $8x$.
trzeba odiąć . $5x + 3$.

Zostanie . . . $3x - 3$.

2do. Od . . $10x + 15$.
trzeba odiąć . . . $5x + 7$.

Zostanie . . . . . $5x + 8$.

3tio. Od . . $12x + 5$.
trzeba odiąć . . . $5x - 3$.

Zamieńmy to działanié, na dodáwanié, odmieniwszy znaki, w jlości odeymować się maiącéy: toiest do $12x + 5$.

$$\begin{array}{rl} \text{dodáymy} & -\ 5x + 3. \\ \hline \text{Summa} \ldots & 7x + 8. \end{array}$$

Ta summa, iest w saméy rzeczy resztą, gdy od $12x + 5$, odeymiémy $5x - 3$.

Jakoż dodanié dwóch ilości maiących przed sobą znaki przeciwné + i —, iest to iedno, co odeymowanié ich iednéy od drugiéy bez względu na znaki: tak *np:* iedno iest, dodadź + 8 do — 3, co iest odiąć 3 od 8: bo tak ta summa, iak i ta reszta, będzie 5.

Trzeba ieszcze przytoczyć więcéy przykładów odeymowania, takich zwłászcza, gdzieby ilość odeymować się maiącá zawiérała wyrazy ze znakami odmiénnémi.

$$\begin{array}{ll} \text{Od} & 12x - 15. \\ \text{Odeymuię} \ldots & 5x - 12. \\ \hline \text{Zostanie} \ldots & 7x - 3. \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Od} & 18x - 32. \\ \text{Odeymuię} \ldots & 40 - 7x. \\ \hline \text{Zostanie} \ldots & 25x - 72. \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Od} & 7x - 8. \\ \text{Odeymuię} & 15 - 5x. \\ \hline \text{Zostanie} \ldots & 12x - 23. \end{array}$$

Aby to lepiéy obiaśnić, połóżmy liczby zwyczayné zamiást Algiebraicznych wyrażéń.

I tak niech w piérwszym z poprzedzaiących przykładzie będzie $x = 4$, a zatém

$$\begin{aligned} 12x - 15 &= 33. \\ 5x - 12 &= 8. \end{aligned}$$

Różnica 8 od 33, iest 25: przeto i różnica $5x - 12$ od $12x - 15$, toiest $7x - 3$ powinna bydź 25. Jakoż położywszy 4 zamiást x, w tém wyrażéniu $7x - 3$ będzie $7x - 3 = 25$.

46. Możná tu wzmiánkę uczynić, o różnicy między ilościami, *przydaynémi*, i *uiémnémi*, (quantitates positivæ, & negativæ) którá to różnica nie inaczéy się bierze, tylko względém na tén cél, w którym sobie wystawuiémy té ilości. Jeżeli ié sobie wystawuiémy *oddzielnie* (abstracte) toiest, nie przywięzuiąc do nich żádnégo znaczénia rzeczy; tedy w tym względzie, bierzémy za *przydayné* té ilości, które przed sobą maią znak dodáwania, i któré uwáżámy iako powiększaiącé tę ilość, do któréy ié dodaiémy: a za *uiémné* bierzémy té ilości, które maią przed sobą znak odeymowania, czyli które uwáżámy, iako zmnieyszaiącé tę ilość, do któréy ié dodaiémy.

Wystawuiąc sobie maiątek osoby iakiéy, iak ilość przydayną, uwáżámy długi teyże osoby, iak ilość uiémną, przez wzgląd, iż té długi zmnieyszaią téy osoby maiątek: i iedno iest w Matematyce powiedzieć, że kto winién złoty, albo że on má w tym względzie mniéy złotym. Ale gdyby piérwszym zamiarém naszym było obrachowáć długi iakiéy osoby, gdyby dopiéro, stán tych długów ułożywszy, doszliśmy potém, że ta osoba má ieszcze 1000 naprzykład Zł. tedy té tysiąc Zł. które má ta osoba, postawioné naprzeciw tému tysiącu Zł. które winna; zgładziłyby tén ostatni dług: i w tym względzie iednoby było powiedzieć, że ta osoba má tysiąc złotych, albo, że winna mniéy 1000 Zł.

Tak téż, ieżeli piérwszym zamiarém podróżnégo iest, aby się dostáł na pewné mieyscé, a ieżeli się oddálá od swoiéy drogi tak dalece, iż znowu powrácá się na mieyscé, z którégo wyszedł; tedy kroki iego przy zwrocie uczynioné, gubią té kroki, któréby był uczynił, dlá zbliżénia się ku mieyscu zamierzonému: i wystawuiąc sobie té ostatnié kroki, iak przydayné, piérwszé się uwáżaią iak uiémné. Gdyby kto chcąc do Wiédnia zaiechać, brał się z Warszawy drogą do Petersburga, i potém postrzegł swóy błąd; tedyby zwrotém przeciwnym powinién zgładzić tę ilość drogi, którą się był oddálił od Wiédnia, zamiást co się miál do niego przybliżyć. Ale, gdyby było piérwszym iego zamiarém, dostać się do Petersburga: tedy, ponieważ ta sama droga przez niego przeiechaná, ku Petersburgowi prowadzącá, czyniłaby zadosyć piérwszému iego zamiarowi; uwáżalibyśmy ią iako ilość przydayną.

Wystawuiąc sobie dół iakiéy kamienicy, nakształt punktu, od którégo rachować mámy wstępy na górę, lub zstępy *np.* do piwnic; możná nazwać té zstępy, wstępami uiémnémi. I lubo w rozmowie zwyczaynéy śmiésznieby się wydáwało, gdyby kto tak mówił, piętro *mniéy iedném*, piętro *mniéy dwoma*, i t. d. (zszedłszy z dołu kamienicy wgłąbsz do piwnic na piętro piérwszé, drugié, i t. d.) atoli iednak Matematyk używá tych wyrażéń w rachunkach

kach swoich: bo sposoby té tłumaczénia się oznáczaią náywyraźniéy przeciwność położénia mieysc, o które rzecz idzie.

Trzeba sobie wystawiać ilości przydayné, i uiémné, pod tym widokiém względu i przeciwności, abyśmy zrozumiéć mogli znaczénié wyrażéń tych, do których czasém przychodzi się w rozwiązaniach Zagadnień: bo inaczéy zdáwałoby się, iż rozwiązania té na Zadanié nie odpowiadaią.

Przykład 1. *A, i B, maią razém Zł.* 4.
A, i . . C, maią . . Zł. 6.
B, i C, maią . . Zł. 12.

Jakiż iest maiątek każdéy z tych osób w szczególności?

Arytmetycznie. Summa tych trzech maiątków dwa razy wzięta iest . . . . 22. Zł.
ráz wzięta . . . . . . 11.

A że B, i C, maią razém 12 Zł. więc przydanié maiątku A, do summy maiątków B, i C, zmnieysza tę summę iednym Zł: a zatém osoba A, zamiást coby miała mieć złoty iedén, winna iest tén Zł. 1, czyli má mniéy Zł. iednym.

Aby maiątek A, był przydayny, tak trzeba było to Zadanié wyłożyć: B, i C, maią razém Zł. 12, gdy zaś od maiątku B, i C, osobno wziętego odeymiémy maiątek A, reszty będą 4 Zł. i 6 Zł.

Algiebraicznie. Mianowanie. Maiątek A . . . . x.
Maiątek B . . $6+x$.
Maiątek C . . $8+x$.
Summa maiątków B, i C . $14+2x$.

Warunek. $14+2x=12$.

Przerábianié. (Odiąwszy 14 po obu stronach) $2x=-2$.
(Podzieliwszy przez 2) . . . . . $x=-1$.

Rozwiązanié. $x=-1$. Maiątek A.
$6+x=5$. Maiątek B.
$8+x=7$. Maiątek C.

Przykład

Przykład 2. A, i B, maią razém 23 Zł.
C, i D, maią razém 6. Zł.
A, má trzy razy tylé, ilé C.
D, má 2 razy tylé, ilé B.

Ileż má każdá z tych osób w szczególności?

Doydziémy natychmiást przez rozumowanié, że maiątki tych osób, nié mogą bydź wszystkié przydayné. Jakož, ponieważ summa maiątków A, i B, iest więcéy niż trzy razy tylá, ilá iest summa maiątków C, i D; więc ieżeli A, má trzy razy tylé, ilé C, więc i maiątek B, powiniénby bydź trzy razy tak wielki, iak maiątek D: a że przeciwnie D, má więcéy niż B, bo má 2 razy tylé, ilé B; więc maiątki tych cztérech osób, nie mogą bydź wszystkié przydayné.

Niech liniiá AB, wyrážá 23, toiest summę maiątków A, i B.

Niech drugá liniiá CD, wyrážá 6, toiest summę maiątków C, i D. Fig. 10.
Niech punkt X, zamiást bydź wziętym na linii AB, między A, i B, będzie wzięty z strony przeciwnéy, toiest na przedłużéniu linii AB: weźmy podobnie i punkt Y, na przedłużéniu linii CD. Niech na linii AB, będzie wziętá AE, trzy razy tak wielká, iak CD.

Jeżeli maiątki A, B, C, D, są wyrażoné przez liniie AX, BX, CY, DY; więc AX, powinna bydź 3 razy tak wielká, iak CY: a że AE, iest 3 razy tak wielką iak CD; więc i EX, powinna téż bydź trzy razy tak wielká iak DY. Że zaś DY, má bydź 2 razy tak wielká, iak BX, więc EX, musi bydź 6 razy tak wielká, iak BX: a zatém EB, będzie 5 razy tak wielká, iak BX. A że EB, wyrážá różnicę między 23, i 18, toiest 5, więc BX, wyrážać będzie piątą część pięciu, toiest 1: a DY wyrazi 2.

Dwa tedy piérwszé warunki zagadniénia, tak powinny były bydź wyłożoné:

A, má 23 Zł. więcéy niż B: C, má 6 Zł. więcéy niż D.

Algiebraicznie.	Maiątek B	x.
	Maiątek A	$23 - x$.
	Maiątek D	$2x$.
	Maiątek C	$6 - 2x$.
Drugié wyrażénié maiątku A	. . .	$18 - 6x$.

Warunek $23 - x = 18 - 6x$.

 Przé-

Przerábianié. (Dodáwszy $6x$ po obu stronach) $23 + 5x = 18$.
(Odiąwszy 18 po obu stronach) $5 + 5x = 0$.
(Odiąwszy 5 po obu stronach) $5x = -5$.
(Podzieliwszy przez 5) . . . . . $x = -1$.

Rozwiązanié. $x = -1$. Maiątek B.
$23 - x = 24$. Maiątek. A.
$2x = -2$. Maiątek D.
$6 - 2x = 8$. Maiątek C.

47. *Zadanié 29. Maiątki sześciu osób: A, B, C, D, E, F, są takié, że*

Summa maiątków	*A, i B, iest*	. . . .	*100. Zł.*
. . . .	*C, i D,*	. . . . .	*100.*
. . . .	*E, i F,*	. . . . . .	*100.*

A, má 2 razy tylé, ilé C.
E, má 3 razy tylé, ilé B.
D, má 4 razy tylé, ilé F.

Jakiż iest maiątek w szczególności, każdy z tych osób.

Fig. 11. *Przez rozumowanié.* Niech liniie równé AB, CD, EF, wyráżaią summy dané 100 Zł. Niech liniie AX, BX, wyráżaią maiątki A, i B. Liniie CY, DY, maiątki C i D. Liniie EZ, FZ, maiątki E, i F. Liniiá AX, powinna bydź 2 razy tak wielká, iak CY. Weźmy liniią AG 2 razy tak wielką, iak CD: będzie GX dwa razy tak wielká, iak DY. A że DY, má bydź 4 razy tak wielká, iak FZ; więc GX, będzie 8 razy tak wielká, iak FZ. Zrobmy GH, 8 razy tak wielką, iak EF: będzie téż HX, 8 razy tak wielká, iak EZ: A że EZ, má bydź 3 razy tak wielká, iak BX; więc HX, będzie 24 razy tak wielká, iak BX, a HB, będzie 25 razy tak wielká, iak BX. Że zaś HB, wyráżá 700, a dwudziestá piątá część siédmiuset iest 28; więc BX, czyli maiątek B, iest 28 Zł: a zatém AX, czyli maiątek A, będzie 72 Zł.

Maiątki	A	. . . . .	72. Zł.
	B	. . . . .	28.
	C	. . . . .	36.
	D	. . . . .	64.
	E	. . . . .	84.
	F	. . . . .	16.

Algie-

Algiebraicznie. Mianowanié. Maiątki B . . . . x.
A . . . . $100 - x$.
E . . . . $3x$.
F . . . . . $100 - 3x$.
D . . . . . $400 - 12x$.
C . . . . $12x - 300$ (toieſt reſzta odiąwſzy $400 - 12x$ od 100)

Drugié wyrażénié maiątku A . . . . $24x - 600$.

Warunek. $24x - 600 = 100 - x$.

Przerábianié. (Dodáwſzy 600 po obu ſtronach) $24x = 700 - x$.
(Dodáwſzy x po obu ſtronach) $25x = 700$.
(Podzieliwſzy przez 25) . . . . . . $1x = 28$.

Reſzta rozwiązania zawiérá ſię iuż w poſtępowaniu przez rozumowanié.

Inſzé przykłady. Maiątki 6 oſób A, B, C, D, E, F, ſą takié, że,
A, i B, maią razém 61. Zł.
C, i D, ... 61.
E, i F, ... 61.

A, má 3 razy tylé, ilé C.
E, . . . 4 . . . . . B.
D, . . . 5 . . . . . F.

Maiątki 8 Oſób A, B, C, D, E, F, G, H, ſą takié, że
A, i B, maią razém 119. Zł.
C, i D, ... 119.
E, i F, ... 119.
G, i H, ... 119.

A, má 2 razy tylé, ilé C.
E, . . . 3 . . . . . B.
D, . . . 4 . . . . . G.
H, . . . 5 . . . . . F.

48. *Zadanié 30. Pewná osoba kupuie 20 łokci materyi dwoiakiego gatunku, iednego gatunku łokieć po Zł. 14; drugiégo po Zł. 12. Płaci zaś za wszystko Zł. 258.*

Iléż łokci kupuie z piérwszégo, a ilé z drugiégo gatunku?

Arytmetycznie. Gdyby ta osoba samey piérwszéy materyi kupiła łokci 20; tedyby za nie zapłacić powinna Zł. 280: ale że zapłaciła tylko 258 Zł. toiest mniéy 22 Zł. więc różnica 22 Zł. pokazuie nám, że i tańszéy dwoma Zł. materyi kupiła ta osoba. Tylé zaś łokci téy tańszéy materyi kupić musiała; ilé razy 2 znayduie się we 22. 2 we 22 znayduie się razy 11: więc 11 łokci kupiła po 12 Zł: a zatém 9 łokci po 14 Zł.

Liczba łokci po 12 Zł.	11.
. . . . . . 14 Zł.	9.
Summa łokci . . .	20.

Zapłata za łokci 11, po 12 Zł.	132. Zł.
. . . . . 9 . . 14 Zł.	126.
Całá zapłata	258.

Algiebraicznie. Mianowanié. Liczba łokci po Zł. 14 . . . . x.
. . . . 12 . . . $20 - x$.
Płáca za wszystkié łokcie po Zł. . . . . . 14 . . . . . . $14x$.
. . . . 12 . . . $240 - 12x$.
Całá zapłata . . . . . $240 + 2x$.

Warunek. $240 + 2x = 258$.

Przerábianié. (Odiąwszy 240 po obu stronach) $2x = 18$.
(Podzieliwszy przez 2) . . . . . . $x = 9$.

Rozwiązanié $x = 9$. Liczba łokci po Zł. 14.
$20 - x = 11$. Liczba łokci po Zł. 12.
$14x = 126$. Zł. Płáca za łokci 9 po 14 Zł.
$240 - 12x = 132$. Zł. Płáca za łokci 11 po 12 Zł.

$240 + 2x = 258$. Całá zapłata za łokci 20.

Insze

Inszé przykłady. Pewná osoba, używá 36 robotników: iednym płaci na dzién po gr. 18, drugim po gr. 15. Wszystkim zaś razém płaci na dzién gr. 576. Iléż było robotników naiętych na gr. 18, a ilé na gr. 15?

Niech znowu będzie liczba robotników 54, z których iedni biorą po gr. 20, a drudzy po gr. 17: a wszyscy razém biorą na dzién gr. 984. (Zapytanié to samo, co wyżéy.)

49. *Zadanié 31. Naymuie kto robotnika na 48 dni: płaci mu za każdy dzién, w który robi gr. 24, a wytrącá mu za słót w każdy dzién, w który nie robi gr. 12. Na końcu dni 48, płaci mu wszystkiégo gr. 504. Iléż dni było roboty, a ilé próżnowania tego robotnika?*

Gdyby tén naięty człowiek był robił co dzién przez 48 dni; tedy na końcu byłby wziął gr. 1152: a że tylko odebrał gr. 504; więc nie robił codziénnie, i dlá tego mniéy bierze 648 groszami.

Za każdy dzién, w który nie robi mniéy bierze 36 groszami, niżby mu się należało, gdyby był robił: więc cała różnica 648 groszy pochodzi z wytrąconych 36 gr. tylé razy, ilé dni tén robotnik próżnowál. Jeżeli tedy 648 podzielimy przez 36, wieloráz pokaże liczbę dni przez które próżnowál. Tén wieloráz iest 18: więc 18 dni próżnowál, a zatém 30 dni prácowál.

Dni roboty	30.
Dni próżnowania	18.
Nagroda za 30 dni pracy	720 gr.
Wytrącénié za 18 dni próżnowania . . .	216.
Zapłata z wytrącéniém . .	504.

Algiebraicznie. Mianowanié. Dni próżnowania . . . . x.

Dni roboty	$48 - x$.
Nagroda za dni roboty	$1152 - 24x$.
Wytrącénié za dni próżnowania	$12x$.
Reszta do wypłacénia	$1152 - 36x$.

Warunek. $1152 - 36x = 504$.

Przerab: (Dodáwszy $36x$ po obu stronach) $1152 = 36x + 504$.
(Odiąwszy 504 po obu stronach) $648 = 36x$.
(Podzieliwszy przez 36) . . . . $1x = 18$.

Reszta rozwiązania zawiérá się w postępowaniu Arytmetycznėm.

Insze przykłady. Pewny rzémieślnik w każdy dzień w który robi prócz wydátku ochrániá sobie gr. 25: w każdy zaś dzień, w który nie robi wydaie gr. 15. W 64 dniach ochronił sobie gr. 640. Iléż dni przez tén czasu przeciąg, robił, a ilé nie robił?

600 Łokci materyi dwoiakiégo gatunku iest u dwóch kupców: u iednego łokieć po 24 Zł. u drugiégo po 16 Zł. Mieniaią się, i drugi dodaie piérwszému Zł. 440. Iléż łokci miáł 1wszy kupiec, ilé drugi?

50. *Zadanié 32. Naymuie kto pewną liczbę robotników, mężczyzn i kobiét. Jest mężczyzn 12 więcéy niż kobiét. Każdy mężczyzna bierze po gr. 18, a kobiéta po gr. 15. Wszystkim zaś razém daie się gr. 810. Iléż iest mężczyzn, ilé kobiét?*

Arytmetycznie. 12 Mężczyzn bierze razém 216 gr. i zostaie się od 810 gr. 594 groszy. Té 594 gr. maią bydź podzielone między tylé kobiét, co i mężczyzn: kobiéta iedna z iednym mężczyzną biorą razém 33 gr: więc tylé będzie pár kobiét, i mężczyzn, ilé wypadnie z podzielénia 594 przez 33: wypádá zaś 18, więc oprócz 12 mężczyzn, było ieszcze 18 pár mężczyzn z kobiétami: a zatém było kobiét 18.

Liczba kobiét	18.
Liczba mężczyzn . . .	30.
Płáca kobiét	270. gr.
Płáca mężczyzn . . .	540. gr.
Cała zapłata . .	810. gr.

Algiebraicznie. Mianowanié.

Liczba kobiét . . .	x.
Liczba mężczyzn . .	$x + 12$.
Płáca kobiét . . .	$15x$.
Płáca mężczyzn . .	$18x + 216$.
Cała zapłata . . .	$33x + 216$.

Warunek.

Warunek. $33x + 216 = 810$.

Przerábianié. (Odiąwſzy 216 po obu ſtronach) $33x = 594$.
(Podzieliwſzy przez 33) . . . . . $1x = 18$.

Rozwiązanié. $x = 18$. Liczba kobiét.
Reſzta iak wyżéy.

Inſzé przykłady. *Kupiono pewną liczbę łokci ſukna po Zł. 14, i inſzégo ſukna po Zł. 16 więcéy 15 łokci niż piérwſzégo. Dano za wſzyſtko Zł. 750.*

Má kto więcéy 30 ſztuk w czerwonych Zł. niż w rublach: rachuie ſobie czerwony Zł. po Zł. 18, a rubel po Zł. 7: co wſzyſtko czyni mu Zł. 865. Iléż má czerwonych złotych, ilé rubli?

51. *Zadanié 33. Kupuie kto pewną liczbę łokci ſukna po Zł. 17, a 8 łokci więcéy nad piérwſzé, drugiégo ſukna po Zł. 25. Płaci za tę drugą ſztukę Zł. 392 więcéy, niż za piérwſzą.*

Arytmetycznie. Gdyby tego drugiégo gatunku kupiono łokci 8, nie kupuiąc nic z gatunku piérwſzégo; tedyby 200 Zł. dano więcéy za gatunek drugi, niż za piérwſzy: toieſt, danoby w ſaméy rzeczy 200 Zł. za gatunek drugi, a nic za piérwſzy. A że oprócz tych 8 łokci gatunku drugiégo, kupuie ſię nad to równá liczba łokci z obudwóch gatunków, i w téy równéy liczbie łokci, więcéy ſię płaci (oprócz tamtych 200 Zł.) Zł. 192 za gatunek drugi niż piérwſzy, z przyczyny, że każdy łokieć gatunku drugiégo, płaci ſię 8 Zł. drożéy, niż łokieć gatunku piérwſzégo; więc podzieliwſzy 192 przez 8 wieloráz 24, pokaże liczbę łokci gatunku piérwſzégo, którégo łokieć płaci ſię tylko po Zł. 17.

Jeſt tedy po Zł. 17 . . . . łokci 24.
po Zł. 25 . . . . 32.
Płáca za 32 łokcie po Zł. 25 . . . . . 800 Zł.
. . . . . 24 . . . . . 17 . . . . . . 408.

Różnica płácy . . 392.

Algiebraicznie. Mian: Liczba łokci ſukna po Zł. 17 . . . x.
. . . . 25 . . . $x + 8$.
Płáca za drugi gatunek . . . . $25x + 200$.
. . . za piérwſzy . . . . $17x$.

Różnica . . . . $8x + 200$.

Waru-

Warunek. $8x + 200 = 392.$

Przeráb: (Odiąwszy 200 po obu stronach) $8x = 192.$
(Podzieliwszy przez 8) . . . . $1x = 24.$

Rozwiązanié. $x = 24.$ Liczba łokci po Zł. 17.
Reszta iak wyżéy.

Inszé przykłady. *Naymuie kto pewną liczbę robotników po gr. 15, má ich zaś 12 więcéy, których zgodził po gr. 24. Tym drugim płaci na dzień gr. 729. więcéy, niż piérwszym.*

Naymuie kto pewną liczbę robotników po gr. 20, a 16 więcéy, których zgodził po gr. 15: wydaie co dzién 80 gr. więcéy na piérwszych, niż na drugich.

Naymuie kto pewną liczbę robotników po gr. 24, a 20 więcéy, których zgodził po gr. 20. Wydaie co dzień na drugich więcéy 160 gr. niż na piérwszych.

52. *Zadanié 34. Kupuie kto 32 łokci materyi, dwoiakiégo gatunku, po 16, i po 12 Zł. Za piérwszy gatunek płaci 176 Zł. więcéy, niż za drugi: iléż łokci bierze z każdégo gatunku?*

Arytmetycznie. Gdyby się wzięło 32 łokci piérwszéy tylko materyi, tedyby za nię zapłacić przypádało Zł. 512, toiest więcéyby się za tę materyą płaciło 512 Zł. niż za drugą, któráby się wcale nie kupowała. A gdy się obadwa gatunki kupuią, różnica płácy iest tylko 176 Zł: która to różnicá, mnieyszá iest od piérwszéy, 336 złotémi.

Za każdym łokciém z drugiégo gatunku kupionym na mieyscé piérwszégo zapłata za piérwszy gatunek zmniéyszá się 16 Zł. a zapłata za drugi gatunek powiększá się 12 złotémi: a zatém różnica tych dwóch summ zmnieyszá się za każdym łokciém kupionym z drugiégo gatunku 28 Zł: więc różnica cała 336 Zł. pochodzi z liczby 28 powtórżonych tylé razy, ilé było łokci drugiégo gatunku. Znaydziémy tedy tę liczbę łokci drugiégo gatunku, podzieliwszy 336, przez 28. Wieloráz będzie 12.

Liczba łokci 2giégo gatunku . . . . 12.
. . . . . . piérwszégo . . . . 20.

Zapłata

Zapłata za piérwszy gatunek . . .	320 Zł.	
za drugi	144.	
Różnica . . .	176.	

Algiebraicznie. Mianowanié. Liczba łokci po Zł. 16 . . x.
po Zł. 12 . $32 - x$.

Zapłata za piérwszą liczbę łokci . . . . . $16x$.
Zapłata za drugą liczbę łokci . . . . $384 - 12x$.

Różnica płácy . . $28x - 384$.

Warunek. $28x - 384 = 176$.

Przerób: (Dodáwszy 384 po obu stronach) $28x = 560$.
(Podzieliwszy przez 28) . . . . $1x = 20$.

Rozwiązanié. $x = 20$.
Reszta iak wyżéy.

Insze przykłady. Kupuie kto 60 łokci, częścią po 28, a częścią po 24 Zł: płaci drugą ceną 608 złotych więcéy niż piérwszą.

Kupuie kto 48 łokci, częścią po 32 Zł. a częścią po 27 Zł. Płaci piérwszą ceną więcéy 297 Zł. niż drugą.

53. *Zadanié 35. Ogrodnik posadził pewną liczbę drzéwek w kwadrát pełny, i zostało mu drzéwek 8. Chciałby ieszcze posadzić iedno drzéwko w każdym rzędzie, i przydadź rząd iedén dlá zachowania kwadratu, ale mu nie dostaie do tego drzewek 11. Iléż było drzéwek w każdym rzędzie, ilé rzędów, i ilé wszystkich drzéwek?*

Arytmetycznie. Kładąc następnie iednę, potém 2, 3, 4, 5, 6, i t. d. kropek na każdy bok kwadratu, liczba kropek 1, 4, 9, 16, 25, 36, i t. d. kwadráty pełné czyniących ukazuie liczby takowéż drzéwek, któréby kwadraty napełnić mogły. Każdy kwadrát następny (iak figura, i iéy ułożénié pokazuie) má więcéy kropek od kwadratu poprzedzaiącégo, tylé dwoie, ilé ich má bok tegoż kwadratu poprzedzaiącégo, i nad to ieszcze iednę kropkę. Tak naprzykłád kwadrát, w którégo boku są 3 kropki, będzie miáł w sobie kropek 9, a kwadrát następny, w którégo boku iest 4 kropek, będzie miáł kropek 16, toiest 7 więcéy od kwadratu poprzedzaiącégo: Fig. 12.

go:

go: a 7 zawiérá w sobie 2 razy 3, i nad to ieszcze iedność. Ponieważ tedy po ułożonym piérwszym kwadracie zostaie ogrodnikowi drzéwek 8, a brakuie mu ieszcze drzéwek 11 do następnégo kwadratu, więc gdyby miał 19 drzéwek, mógłby tén drugi kwadrát ułożyć: a zatém 19 iest liczba drzéwek dwa razy tak wielká, iak liczba drzéwek w rzędzie iednym piérwszégo kwadratu, i nad to ieszcze zawiérá w sobie iedność. Liczba więc dwa razy zamykaiącá liczbę drzéwek, w każdym rzędzie piérwszégo kwadratu, iest 18: a przeto liczba drzéwek w iednym z tych rzędów była 9.

I. Ułożénié.

Liczba drzéwek w każdym rzędzie	9.
Liczba rzędów	9.
Liczba drzéwek posadzonych	81.
Liczba drzéwek pozostałych	8.
Liczba drzéwek wszystkich	89.

II. Ułożénié.

Liczba drzéwek w każdym rzędzie	10.
Liczba rzędów	10.
Liczba drzéwek potrzebnych do tego ułożénia	100.
Liczba drzéwek brakuiących	11.
Liczba drzéwek wszystkich	89.

Algiebraicznie. *I. Ułożénié.*

Mianowanié. Liczba drzéwek w każdym rzędzie . . x.
Liczba rzędów . . . . x.

Liczba drzéwek wszystkich posadzonych wyrażoná będzie, gdy liczbę drzéwek w każdym rzędzie rozmnożymy przez liczbę rzędów: toiest gdy x, rozmnożymy przez x, czyli gdy x, weźmiémy razy x: coby się tak powinno wyrazić, $x \times x$. Zgodzono się iednak, aby opuszczać znak rozmnożénia, i oznáczać to rozmnożénié, kładąc iednę literę przy drugiéy, tak iak niżéy:

Liczba drzéwek wypełniaiących 1wszé ułożénié . . xx.
Liczba drzéwek wszystkich . . . . $xx + 8$.

II. Uło-

II. Ułożénié.

Liczba drzéwek w każdym rzędzie . . $x+1$.
Liczba rzędów . . . . $x+1$.

Liczbę drzéwek któréby wypełniły 2gié ułożénié, wyrazimy rozmnożywszy $x+1$, przez $x+1$. Wykonámy zaś to rozmnożénié mnożąc naprzód $x+1$, przez x, skąd będzie $xx+1x$: mnożąc potém $x+1$ przez 1, skąd będzie $1x+1$: a dodáwszy $xx+1x$ do $1x+1$, będzie $xx+2x+1$.

Liczba więc drzéwek, któréby wypełniły drugié ułożénié iest . . . . $xx+2x+1$.
Liczba zatém drzéwek ogrodnika będzie odiąwszy 11 . . $xx+2x-10$.

Warun: $xx+2x-10=xx+8$.

(Odiąwszy xx po obu stronach) $2x-10=8$
(Dodáwszy 10 po obu stronach) . . $2x=18$.
(Podzieliwszy przez 2) . . . . $1x=9$.
Reszta rozwiązania iak wyżéy.

Wzór Mnożénia.

$x+1$.	Mnożnik.
$x+1$.	Mnożny.
$xx+x$.	Wieloczyn, przez x.
$x+1$.	Wieloczyn, przez 1.
$xx+2x+1$.	Wieloczyn cały.

54. *Uwága.* Té dwá wyrażénia xx, i $2x$, są różné od siebie: piérwszé wypádá z rozmnożénia x, przez x, drugié z rozmnożénia x, przez 2. Jeżeli x, znaczy 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10; tedy piérwszé wyrażénié znaczyć będzie
1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, i t. d. a drugié znaczyć będzie 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, i t. d. Ta różnica, tym się większą bydź pokazuie, im znaczénié, x iest większé. W tym tylko razie xx, i $2x$, iedno wyráżá, gdy x, znaczy 2. (Miiámy tu wáżność o, którąby czasém x, znaczyć mogło.)

Inszé przykłady. Znaléźć taki kwadrát, do którégo, każdégo boku przydáwszy 1. stopę, zrobi się kwadrát inszy większy w powiérzchni od piérwszégo, 25 stopami kwadratowémi.

Znaleźć kwadrát taki, do którégo boków przydáwszy po 2 stopy, zrobi się kwadrát większy od piérwszégo w powiérzchni 40 stopami kwadratowémi.

Przykład poſtępowania przez rozumowanie.

Fig. 13. Ponieważ w oſtatnim przykładzie, kwadrát drugi większy ieſt od kwadratu piérwſzégo, naprzód, dwoma proſtokątami maiącémi w iednym boku po dwie ſtopy, a w drugim tylé długości, ilé má kwadrát piérwſzy: powtóré kwadratém iednym, którégo bok każdy zawiérá 2 ſtopy, a zatém powiérzchniá 4 ſtopy kwadratowé; więc dwa tamté proſtokąty razém wzięté, zawiérać będą 36 ſtóp kwadr: a każdy z nich mieć będzie 18 ſtóp kwadratowych. Każdy z tych dwóch proſtokątów podzielić możná na dwa równé proſtokąty maiącé w ſzérokości ſtopę 1, a długość równą długości piérwſzégo kwadratu. Będzie tedy powiérzchniá każdégo z tych oſtatnich proſtokątów 9 ſtóp: a że má w ſzérokości ſtopę 1; więc długość iego, a zatém i kwadratu piérwſzégo będzie 9 ſtóp.

Bok 1go Kwadratu będzie . . . . 9 ſtóp.
Bok 2go Kwadratu . . . . 11 ſtóp.

Powiérzchniá 2go kwadratu . . . . 121 ſtóp kwadr.
Powiérzchniá 1go kwadratu . . . . 81 ſtóp kwadr.

Różnica tych powiérzchni . . . 40 ſtóp kwadr.

Algiebraicznie. Bok 1wſzégo kwadratu . . . . x.
Powiérzchniá 1wſzego kwadratu . . . . xx.

Bok 2go kwadratu . . . . $x+2$.
Powiérzchnia . . . . $xx+4x+4$.
Różnica dwóch powiérzchni . . . . . $4x+4$.

Warunek. $4x+4=40$.

(Odiąwſzy 4) . . . . . $4x=36$.
(Podzieliwſzy przez 4) $x=9$.

Rozwiąz: $x=9$. Bok 1wſzégo kwadratu.
Reſzta rozwiązania iak wyżéy.

Wzór mnożénia.

$x+2$. Mnożnik.
$x+2$. Mnożny.

$xx+2x$. Wieloczyn przez x.
$2x+4$. Wieloczyn przez 2.

$xx+4x+4$. Wieloczyn cały.

Inſzé

Inſzé przykłady. Przydáwſzy do boku kwadratu ſtóp 3, 4, 5, 6, i t. d. powiérzchniá większá będzie ſtóp kwadr. 57, 88, 145, 168. i t. d.

55. *Zadanié 36 Mám proſtokąt dwa razy tak długi, iak ſzéroki: dodaię do każdégo boku po 1 ſtopie, i będę miáł powiérzchnią większą 19 ſtop kwadr. od piérwſzéy.*

Arytmetycznie. Różnicę tych dwóch proſtokątów rozłożyć mogę na dwa proſtokąty, maiącé iednę ſtopę ſzérokości, a długość równą bokóm piérwſzégo proſtokąta, i na kwadrát którégo bok ieſt na ſtopę: a zatém powiérzchniá zawiérá iednę ſtopę kwadratową. Będzie tedy ſumma dwóch proſtokątów 18 ſtóp kwadr. Że zaś ich ſzérokość ieſt iednakowá, a długość iednégo 2 razy tylá, ilá długość drugiégo; więc większy z tych proſtokąt mogę podzielić na dwa równé mnieyſzému, a ſumma wſzyſtkich trzech, równać ſię będzie trzém proſtokątóm równym tému proſtokątowi mniéyſzému. Má zatém iedén z tych trzech proſtokątów 6 ſtóp kwadr: a że ſtopę iednę má ſzérokości; więc długości mieć będzie ſtóp 6: która to długość równá ieſt ſzérokości piérwſzégo proſtokąta ſzukanégo. Fig. 14.

Szérokość 1go proſtokąta . . .	6 ſtóp.
Długość	12 ſtóp.
Powiérzchniá	72 ſtóp kwadr.
Szérokość 2go proſtokąta . . .	7 ſtóp.
Długość	13 ſtóp.
Powiérzchniá	91 ſtóp kwadr.
Różnica dwóch powiérzchni . .	19 ſtóp kwadr.

Algiebraicznie.

Szérokość 1go proſtokąta . . .	x.
Długość	$2x$.
Powiérzchniá	$2xx$.
Szérokość 2go proſtokąta . . .	$x+1$.
Długość	$2x+1$.
Powiérzchniá	$2xx+3x+1$.
Różnica dwóch powiérzchni	$3x+1$.

Warunek. $3x + 1 = 19$.

Przerób: (Odiąwszy 1) . . . $3x = 18$.
(Podzieliwszy przez 3) $1x = 6$.

Rozwiązanié . . . . $x = 6$.

Reszta rozwiązania iak wyżéy.

Wzór mnożénia.

$2x + 1$. . .	Mnożny.
$x + 1$. . .	Mnożnik.
$2xx + x$. .	Wieloczyn przez x.
$2x+1$.	Wieloczyn przez 1.
$2xx+3x+1$	Wieloczyn cały.

Insze przykłady. Gdy bok iedén prostokąta iest 3, 4, 5, razy i t. d. tak wielki, iak drugi; tedy dodáwszy po iednéy stopie do obudwóch, powiérzchniá drugá większá będzie od piérwszéy, 29, 31, 37, i t. d. stopami kwadr.

Niech znowu bok iedén będzie 4 razy tak wielki, iak drugi: dodáwszy 3 stopy do długości, a 2, stopy do szérokości iego; powiérzchniá drugá, większá będzie od piérwszéy, 94 stóp. kwadr.

56. *Przestroga.* Przez takié przykłady wprowadzić trzeba uczniów do Algiebraicznégo mnożénia. W tym razie, gdy tak mnożnik, iak i mnożny więcéy niż iedén wyráz zawiéraią, a wszystkié té wyrazy są przydayné; wieloczyném całym iest summa wieloczynów z mnożnégo, przez każdy w szczególności wyráz mnożnika.

W mnożéniu Algebraiczném zaczyná się zawsze od piérwszégo po lewéy ręce wyrazu, tak w mnożniku, iak i w mnożnym. Tén sposób postępowania náywygodnieyszym był, gdy wyrazy ilości mnożnéy, lub mnożącéy miały przed sobą odmienné znaki: i to było powodém do dania ogólnéy reguły.

W ułożéniu Wieloczynów z mnożnégo, przez każdą z osobna część mnożnika, trzeba się starać, aby wyrazy iednakowégo gatunku, pisać iedné pod drugiémi.

Przykłady mnożénia złożonégo, i w które wchodzą samé tylko wyrazy przydayné.

I.

$2x + 1$. . . . . Mnożny.
$3x + 2$. . . . . Mnożnik.
$6xx + 3x$. . . Wieloczyn przez $3x$.

$4x + 2$.

$4x + 2$. . . . Wieloczyn przez 2.

$6xx + 7x + 2$. Wieloczyn cały.

II.

$5x + 3$. . . . . Mnożny.
$4x + 6$. . . . . Mnożnik.

$20xx + 12x$. . . . . Wieloczyn przez $4x$.

$30x + 18$. . . . Wieloczyn przez 6.

$20xx + 42x + 18$. Wieloczyn cały.

57. *Zadanié 37. Jakiż ieſt tén kwadrát, od którégo iednégo boku, odiąwſzy 1 ſtopę, a do drugiégo przydáwſzy 2 ſtopy, zrobi ſię proſtokąt z tych dwóch boków tak odmiénionych większy w powiérzchni 10 ſtóp kwadr. od kwadratu?*

Niech będzie kwadrát AXYZ, którégo ſzukámy, a którégo bok AZ, zmnieyſzony ieſt ilością PZ, równą iednéy ſtopie, a bok AX, powiękſzony ieſt ilością QX, równą dwóm ſtopóm. Niech będzie AQRP, proſtokąt, przewyżſzaiący kwadrát AXYZ, 10 ſtopami kwadr: niech liniie ZY, QR, przeciągnioné przecinaią ſię w punkcie S, a liniie PR, XY, w punkcie T. Od kwadratu AXYZ, odięty ieſt proſtokąt PTYZ, a dodany proſtokąt QRTX. Więc różnica między proſtokątém AQRP, a kwadratém AXYZ, równá ſię różnicy między proſtokątém QRTX, a proſtokątém PTYZ. A że piérwſzá różnica má bydź równá 10 ſtóp. kwadratowym; więc i drugá. Że zaś proſtokąt TRSY, má w ſobie 2 ſtopy kw. przeto różnica między proſtokątém XQSY, a proſtokątém PTYZ, będzie 12 ſtóp kw. A ponieważ te dwa oſtatnié proſtokąty maią iednakową długość, toieſt rowną długości boku kwadratu, a ſzérokość piérwſzégo dwa razy ieſt tak wielká, iak ſzérokość drugiégo; więc téż piérwſzy proſtokąt będzie dwa razy tak wielki, iak drugi: a zatém różnica między niemi równać ſię będzie drugiému proſtokątowi PTYZ. Tén więc proſtokąt PTYZ, má w ſobie 12 ſtóp kw: że zaś ſzérokości má tylko iednę ſtopę; więc długości mieć będzie 12 ſtóp. Ta długość ieſt bokiém kwadratu: więc i bok kwadratu 12 ſtóp zawiérá. Fig. 15.

Bok

Bok kwadratu	12 ſtóp.	Szérokość proſtokąta	11 ſtóp.
Powiérzchniá . . .	144 ſtóp kw.	Długość . . .	14 ſtóp.
		Powiérzchniá . .	154 ſtóp kw.

Różnica dwóch powiérzchni . . . . 10 ſtóp kw.

Algiebraicznie. Mianowanié.

Bok kwadratu ſzukanégo . .	x.
Powiérzchniá	xx.
Szérokość proſtokąta . .	$x - 1$.
Długość	$x + 2$.
Powiérzchniá proſtokąta .	$xx + 1x - 2$.
Różnica 2ch powiérzchni	$1x - 2$.

Warunek. $1x - 2 = 10$.

Przerób: (Dodáwſzy 2) $1x = 12$.
Reſzta rozwiązania iak wyżéy.

Wzór mnożénia.

$x - 1$ . .	Mnożny.
$x + 2$ . .	Mnożnik.
$xx - 1x$.	Wieloczyn przez x.
$2x - 2$	Wieloczyn przez 2.
$xx + 1x - 2$.	Wieloczyn cały.

58. *Uwága.* Gdyby od iednégo boku kwadratu odięliśmy, a do drugiégo dodali tę ſamę liczbę ſtóp *np.* . . . . 1, 2, 3, 4, 5, 6, i t. d. powiérzchniá zmnieyſzyłaby ſię . . . . 1, 4, 9, 16, 25, 36, i t. d. ſtopami kwadr. W takim razie, odmiana uczynioná w powiérzchni wyznaczoná ieſt przez odmiany uczynioné w bokach kwadratu, a przeto nie może ſłużyć za warunek.

Inſzé przykłady. Mám proſtokąt, którégo długość dwa razy ieſt tak wielká, iak ſzérokość. Gdy przydám do ſzérokości 3 ſtopy, a uymę od długości 2 ſtopy; powiérzchniá proſtokąta powiękſzy ſię 18 ſtopami kwadratowémi.

Mám proſtokąt, którégo długość trzy razy ieſt tak wielká, iak ſzérokość. Gdy przydám 2 ſtopy do ſzérokości, a uymę 3 ſtopy od długości; powiérzchniá proſtokąta powiękſzy ſię 27 ſtopami kwadratowémi.

Przeſtroga. Té, i tym podobné przykłady tym końcém dáwané będą, aby wprowadzić Uczniów do mnożénia, w którém iedén, lub więcéy wyrazów kładzie ſię ze znakiém odeymowania —

59. *Przy-*

59. *Przykłady mnożénia złożonégo, w których iedén z czynników zawiérá ilości uiémné.*

I.

$$
\begin{array}{ll}
2x - 2. \ldots\ldots & \text{Mnożny.} \\
x + 3. \ldots\ldots & \text{Mnożnik.} \\
\hline
2xx - 2x \ldots & \text{Wieloczyn przez } x. \\
6x - 6. \ldots & \text{Wieloczyn przez 3.} \\
\hline
2xx + 4x - 6. & \text{Wieloczyn cały.}
\end{array}
$$

II.

$$
\begin{array}{ll}
3x - 3. \ldots\ldots & \text{Mnożny.} \\
x + 2. \ldots\ldots & \text{Mnożnik.} \\
\hline
3xx - 3x. \ldots & \text{Wieloczyn przez } x. \\
6x - 6 & \text{Wieloczyn przez 2.} \\
\hline
3xx + 3x - 6. & \text{Wieloczyn cały.}
\end{array}
$$

III.

$$
\begin{array}{ll}
4x - 5. \ldots\ldots & \text{Mnożny.} \\
3x + 2. \ldots\ldots & \text{Mnożnik.} \\
\hline
12xx - 15x \ldots & \text{Wieloczyn przez } 3x. \\
+ 8x - 10. & \text{Wieloczyn przez 2.} \\
\hline
12xx - 7x - 10. & \text{Wieloczyn cały.}
\end{array}
$$

Ponieważ iedna zawſze wypádá ilość z rozmnożénia, którąkolwiek ze dwóch ilości do mnożénia podanych, weźmiémy za mnożnégo, lub mnożnika; przeto w przykładach poprzedzaiących braliśmy za mnożną ilość tę, która wyráz uiémny zawiérała. Trzeba iednak wprawiać Uczniów w takié mnożénié, gdzie w ilość mnożącą wchodzi wyráz uiémny: tym końcém przykłady poprzedzaiącé wſpacznym porządkiém, tu ſię znowu podaią.

I I.

I.

$$\begin{array}{ll} x+3 \ldots\ldots & \text{Mnożny.} \\ 2x-2 \ldots\ldots & \text{Mnożnik.} \\ \hline 2xx+6x \ldots\ldots & \text{Wieloczyn przez } 2x. \\ -2x-6. & \text{Wieloczyn przez } -2. \\ \hline 2xx+4x-6. & \text{Wieloczyn cały.} \end{array}$$

Uwága. Gdyby $x+3$ mnożyło ſię tylko przez $2x$, ilość ſtąd rozmnożoná byłaby $2xx+6$: ale że przypádało mnożyć przez $2x$ zmnieyſzoné przez 2; więc wzięło ſię nad to $x+3$ dwa razy: a zatém od piérwſzéy ilości rozmnożonéy $2xx+6$, trzeba odiąć $x+3$, dwa razy wzięté, toieſt trzeba odiąć $2x+6$, albo, (co na iedno wychodzi) dodadź $-2x-6$.

II.

$$\begin{array}{ll} x+2 \ldots\ldots & \text{Mnożny.} \\ 3x-3 \ldots\ldots & \text{Mnożnik.} \\ \hline 3xx+6x \ldots & \text{Wieloczyn przez } 3x. \\ -3x-6. & \text{Wieloczyn przez } -3. \\ \hline 3xx+3x-6. & \text{Wieloczyn cały.} \end{array}$$

III.

$$\begin{array}{ll} 3x+2 \ldots\ldots & \text{Mnożny.} \\ 4x-5 \ldots\ldots & \text{Mnożnik.} \\ \hline 12xx+8x \ldots & \text{Wieloczyn przez } 4x. \\ -15x-10. & \text{Wieloczyn przez } -5. \\ \hline 12xx-7x-10. & \text{Wieloczyn cały.} \end{array}$$

60. *Zadanié 38. Mám kwadrát taki, od którégo iednégo boku odiąwſzy 1 ſtopę, a od drugiégo odiąwſzy 2 ſtopy, powiérzchniá zmnieyſzy ſię 12 ſtopami kwadr.*

Fig. 16. Niech będzie AXYZ, kwadrát taki, aby od iednégo boku iego AZ, odiąwſzy PZ, długość iednéy ſtopy, a od drugiégo boku AX, odiąwſzy QX, długość

długość dwóch stóp, i zrobiwszy prostokąt AQRP, z liniy AQ, AP, ténże kwadrát większy był od prostokąta 22 stopami kwadr.

Niech PR, spotyká XY, w T, Nadmiarém kwadratu nąd prostokąt; będzie summa prostokątów PTYZ, QXTR. Aby zaś mieliśmy tylko do czynienia z prostokątami, których długość równałaby się bokowi kwadratu; przedłużmy TX QR, ilościami Xt, Qr, z których każdá równałaby się iednéy stopie, i dokończmy prostokąta $QXtr$, który zawiérać będzie 2 stopy kwadr. Summa prostokątów PTYZ, QXTR, czynić powinna 22 stóp kwadr. więc summa prostokątów PTYZ, $TRrt$, czynić będzie 24 stóp kwadr: a że ich długości są równé, a szérokość drugiégo $TRrt$, dwa razy iest tak wielká, iak szérokość piérwszégo PTYZ; więc ich summa trzy razy będzie tak wielká, iak ténże piérwszy prostokąt PTYZ: więc prostokąt PTYZ, trzy razy wzięty zawiérałby 24 stóp kwadratowych, a zatém ráz wzięty zawiérá 8 stóp kwadr. Że zaś má iednę stopę szérokości; więc długość iego, którá oráz iest bokiém kwadratu, má 8 stóp.

	Bok kwadratu szukanégo . . .	8 st:
	Powiérzchniá	64 st: kw:
	Szérokość prostokąta . . .	6 st:
	Długość	7 st:
	Powiérzchniá	42 stóp kwadr.
	Różnica dwóch powiérzchni	22 stóp kwadr.
Algieb: Mian:	Bok kwadratu szukanégo . . .	x.
	Powiérzchniá	xx.
	Szérokość prostokąta . .	$x - 2$.
	Długość	$x - 1$.
	Powiérzchniá	$xx - 3x + 2$.

Sposób postępowania w mnożéniu ilości $x - 2$ przez $x - 1$.

Gdyby przypádało mnożyć $x - 2$, *przez* x, ilość stąd rozmnożoná byłaby $xx - 2x$: a że przypádá mnożyć $x - 2$ przez liczbę mnieyszą iednością; więc się wzięło $x - 2$ iedén ráz nad to: a zatém od $xx - 2x$, trzeba ieszcze odiąć $x - 2$. Odiąwszy samo x, byłoby $xx - 3x$: ale że się odięło 2 nadto; więc ié trzeba dodadź, i będzie $xx - 3x + 2$. Na iedno téż wyniesie, gdy do $xx - 2x$ dodámy $- x + 2$: wypadnie albowiém to samo co i wyżéy, toiest $xx - 3x + 2$.

Różnica dwóch powiérzchni wyráźá się odiąwszy $xx - 3x + 2$ od xx, i będzie $3x - 2$.

Warunek. $3x - 2 = 22$.

Przerábianié. (Dodáwszy 2) . . . $3x = 24$.
(Podzieliwszy przez 3) $1x = 8$.
Reszta iak wyżéy.

61. *Uwága.* Możná tu było uniknąć mnożénia, w któréby wchodziły ilości uiémné.

I tak niech będzie szérokość prostokąta . . . . x.
a zatém bok kwadratu . . . . $x+2$.
Długość prostokąta mnieyszá iednością od boku kwadratu . . . . $x+1$.
Powiérzchniá kwadratu będzie . . . . $xx+4x+4$.
Powiérzchniá prostokąta . . . . $xx+1x$.
Różnica . . . . $3x+4$.

Warunek. $3x+4=22$.

Przeráb: (Odiąwszy 4) . . . . . . $3x = 18$.
(Podzieliwszy przez 3) . $1x = 6$ Szérokość prostokąta.
$x+2 = 8$. Bok kwadratu.

W szukaniu iednak rozwiązania podobnych zadáń, trzeba sobie za cél wystawiać, wprawianié Uczniów w takié mnożénié, w którégo ilość tak mnożącą, iako i mnożną wchodzą wyrazy uiémné.

Insze przykłady. Mám prostokąt, którégo długość, dwa razy iest tak wielká, iak szérokość: uymuię mu po iednéy stopie z każdégo boku, przez co powiérzchniá zmniéyszá się 20 stopami kwadr.

Mám prostokąt, którégo długość trzy razy iest tak wielká, iak szérokość: uymuię iednę stopę z szérokości, a 2 stopy z długości, przez co powiérzchniá zmniéyszá się 23 stopami kwadr.

62. *Przykłady mnożénia, w którém tak mnożny, iak i mnożnik zawiérá wyrazy uiémné.*

I.

$x - 1$ . . . Mnożny.
$2x - 1$ . . . Mnożnik.

$2xx - 2x$ . . . Wieloczyn przez $2x$.
$- x + 1$. Wieloczyn przez $- 1$.

$2xx - 3x + 1$. Wieloczyn cały.

II.

$x - 1$ . . . Mnożny.
$3x - 2$ . . . Mnożnik.

$3xx - 3x$ . . . Wieloczyn przez $3x$.
$- 2x + 2$. Wieloczyn przez $- 2$.

$3xx - 5x + 2$. Wieloczyn cały.

III.

$2x - 3$ . . . Mnożny.
$3x - 5$ . . . Mnożnik.

$6xx - 9x$ . . . Wieloczyn przez $3x$.
$- 10x + 15$. Wieloczyn przez $- 5$.

$6xx - 19x + 15$. Wieloczyn cały.

W tych i inſzych przykładach używſzy rozumowania podobnégo przytoczonému w przykładzie piérwſzym tego Zadania, możná potém przyſtąpić do téy ogólnéy reguły: *że gdy ſię mnożą iedén przez drugi dwa wyrazy z iednakowym znakiém, toieſt albo obadwa przydayné, albo obadwa uiémné; ilość z nich rozmnożoná będzie przydayná, czyli poprzedzoná znakiém dodáwania +: ieżeli zaś té dwa wyrazy będą miały odmiénné znaki, toieſt, ieżeli iedén będzie przydayny, a drugi uiémny; tedy ilość z nich rozmnożoná, będzie uiémná, czyli poprzedzoná znakiém odeymowania —.*

63. *Zadanié 39.* Znaleźć dwie liczby, którychby różnica była 4, a różnica ich kwadratów 72.

Fig. 17. *Przez rozumowanié.* Niech liniiá AB, wyráżá różnicę daną liczb dwóch szukanych AX, BX, których różnica kwadratów także iest daná. Wykréślmy na tych liniiach AX, BX, kwadráty AXSP, BXYZ: różnicą tych dwóch kwadratów, są dwa prostokąty, QYSP, i ABZQ, które obadwa iednakową maią szérokość, toiest równą linij AB, a z których piérwszy má za długość bok większégo kwadratu, a drugi má za długość, bok mnieyszégo kwadratu. Będzie przeto summa tych dwóch prostokątów, równá innému prostokątowi téyże samey szérokości, a długości równéy summie długości tych dwóch prostokątów, toiest równéy summie dwóch boków dwóch kwadratów. A że szérokość tego prostokąta miałaby 4 stopy, a powiérzchniá miałaby 72 stóp kwadratowych, więc długość powinna mieć stóp 18.

Zadanié tedy poprzedzaiącé, wychodzi na iedno, iak gdyby przypádało szukać dwóch liczb, których summa 18, a różnica 4. Té dwie liczby (podług zadania 3go) będą 11, i 7.

Kwadrát z 11	. . . . .	121.
Kwadrát z 7	. . . . .	49.
Różnica	. . . . . .	72.

Algiebraicznie. Mianowanié. Mnieyszá liczba . . . . x.

Większá . . . . $x + 4$.

Kwadrát większéy . . $xx + 8x + 16$.

Kwadrát mnieyszéy . xx.

Różnica kwadratów $8x + 16$.

Warunek. $8x + 16 = 72$.

Przerábianié. (Odiąwszy 16) . . . . $8x = 56$.

(Podzieliwszy przez 8) . $1x = 7$.

Rozwiązanié. $x = 7$. Mnieyszá liczba.

Reszta iak wyżéy.

Insze przykłady. Znaléźć dwie liczby, których różnica iest 6: a różnica kwadratów: 120.

Znaléźć dwie liczby, których różnica iest 8, a różnica kwadratów 144.

64. *Zadanié 40. Znaléźć dwie liczby, których summa iest 18, a różnica kwadratów 72.*

Przez

Przez rozumowanie. W figurze zadania poprzedzaiącégo summa prostokątów AQZB, PQYS, która iest różnicą kwadratów z AX, i z BX; równa się prostokątowi maiącému za szérokość różnicę szukaną dwóch liniy AX, BX, a za długość summę daną 18. A że powiérzchnia tego prostokąta iest 72; więc różnica, któréy szukámy, znaleziona będzie, podzieliwszy 72 przez 18, i ta będzie 4. Zadanié więc wypádá na iedno, iak gdyby nam szukać przypádało dwóch liczb, których różnica iest 4, a summa 18; podobnie iak w zadaniu poprzedzaiącém.

Algiebraicznie. Mian: Mnieyszá liczba . . . . . x.
Większá . . . . $18 - x$.
Kwadrát z większéy $324 - 36x + xx$.
Kwadrát z mnieyszéy . . . . . . xx.

Różnica kwadratów . . $324 - 36x$.

Warunek. $324 - 36x = 72$.

Przerábianié. (Dodáwszy $36x$) . . . . $324 = 72 + 36x$.
(Odiąwszy 72) . . . . $252 = 36x$.
(Podzieliwszy przez 36) $1x = 7$.

Rozwiązanié. $x = 7$.
$18 - x = 11$.

Sprawdzénié. $324 - 36x + xx = 121$. Kwadrát większéy liczby.
$xx = 49$. kwadrát mnieyszéy.

$324 - 36x = 72$. Różnicá kwadratów.

Inszé przykłady. Znaléźć dwie liczby, których summa iest 24, a różnica kwadratów 192.

Znaléźć dwie liczby, których summa iest 32, a różnica kwadratów 192.

65. *Różné Zadania zabawné.*

I.

Má kto kárt 32: trzy z nich wyciągá, i na każdą z tych trzech kárt tylé innych kładzie, ilé téy karcie ók brakuie do dopełniénia liczby 15. Zostaie mu kárt 8, iakáż iest summa ók w trzech kartach na spodzie położonych?

Ary-

Arytmetycznie. Summa ók każdéy z tych trzech kárt i liczby kárt innych na niéy położonych powinna bydź 15: trzy więc takié fummy uczynią 45. Ponieważ zaś wſzyſtkich kárt wzięło ſię 32, ſpodnich ieſt 3, a pozoſtałych 8, co uczyni 11: więc kárt wſzyſtkich położonych na trzech ſpodnich będzie 21: a zatém różnica 21, od 45, toieſt 24, będzie liczbą oznáczaiącą ſummę ók, w 3 kartach ſpodnich.

Algieb: *Mian:* Summa ók we trzech kartach ſpodnich . . x.
Summa kárt wiérzchnich . . . . . . $45 - x$.
Summa kárt w 3 kupkach . . . . . $48 - x$.

Ponieważ wſzyſtkich kárt było 32, a 8 ſię zoſtało, więc w trzech kupkach będzię kárt 24.

Warunek. $48 - x = 24$.

Przeráb: (Dodáwſzy x) $48 = 24 + x$.
(Odiąwſzy 24) $24 = x$.

Rozwiązanié. $x = 24$. Summa ók w trzech kartach ſpodnich.
$45 - x = 21$. Summa kárt wiérzchnich.
$48 - x = 24$. Summa kárt we 3 kupkach.

Inſzé przykłady. Ze 32 kárt wyciągámy 4, i na każdéy z tych 4, kładziémy tylé kárt, ilé iéy okóm nie doſtaie, do dopełniénia liczby 12. Zoſtaie kárt 5.

Z kárt 52 wyciągámy 5, i tylé innych na każdą kładziémy, ilé iéy okóm nie doſtaie do dopełniénia liczby 16. Zoſtaie kárt 10.

II.

Oſoba, A, mówi do B, aby ſobie pomyśliła liczbę iaką, aby ią popodwoiła, do podwoionéy przydała 8, i całéy ſummy, aby wzięła połowę. B, wykondwſzy to wſzyſtko, wyiawiá przed A, ſamę tylko oſtatnią liczbę i mówi że má 10. Jakże ſobie poſtąpi A, chcąc dóyśdź piérwſzéy liczby od B, pomyślanéy?

Gdyby oſoba A, nic nie kázała dodáwać do podwoionéy liczby, tedy dwa działania, iedno podwoiénia liczby, drugié podzieléniа iéy na połowę, zniſzczyłyby ſię iedno przez drugié, i połowa liczby podwoionéy, byłaby tą ſamą liczbą, którą oſoba B, pomyślała. Ale że B, podwoiwſzy liczbę pomyślaną

myślaną dodała do niéy 8, i téy dopiéro summy wzięła połowę; więc ta połowa będzie summą liczby pomyślanéy, i połowy ośmiu, toiest 4. Ponieważ zaś ta ostatniá summa iest 10; więc liczba pomyślaná iest cztéréma mnieyszá, a zatém iest 6.

Liczba pomyślaná	6.
Taż podwoioná	12.
Powiększoná ośmią	20.
Połowa téy summy	10.

Algiebr: Mian:	Liczba pomyślaná	x.
	Podwoioná	$2x$.
	Powiększoná ośmią	$2x+8$.
	Połowa	$x+4$.

Warunek. $x+4=10$.

Przerábianié. (Odiąwszy 4) $x=6$.
Reszta iak wyżéy.

Insze przykłady. Osoba B, troi tę liczbę, którą pomyślała, do potroionéy dodaie 15, a wziąwszy trzecią część téy summy, má 12.

B, mnoży liczbę pomyślaną przez 4, do rozmnożonéy przez 4, dodaie 12, i bierze czwártą część téy summy: wypádá 13 na wielorác.

III.

W sali kwadratowéy iest 8 komórek równych przy cztérech ścianach téy sali, po trzy przy każdéy ścianie. W każdéy komórce mieszká trzech Uczniów: z tych wychodzi 4, a pozostali tak się w komórkach rozstawiaią, że liczba ich w każdym rzędzie komórek iest ta sama co i przedtém, gdy wszyscy byli przytomni.

Arytmetycznie. Liczba Uczniów postawionych naprzód w iednym rzędzie komórek, iest 9: bo we dwóch komórkach narożnych iest ich 6, a w każdéy komórce śrzedniéy, iest ich 3.

Ponieważ wszystkich komórek iest 8, a w każdéy po 3 Uczniów; więc wszystkich Uczniów było naprzód 24. Cztérech z nich wyszło, więc zostało się 20. Ci pozostali Uczniowie maią się mieścić w 4 komórkach śrzednich, i w 4 narożnych: a zatém liczba ich w iednéy komórce śrzedniéy, i w iednéy narożnéy, będzie czwártą częścią 20, toiest 5. Że zaś liczba pomiemieſzczonych we dwóch kómórkach narożnych, i w iednéy śrzédniéy powinna bydź 9; więc w iednéy kómórce narożnéy tylé ſię ich mieścić powinno, ilá ieſt różnica 5 od 9, toieſt 4. W każdéy przeto śrzedniéy kómórce, będzie tylko po 1 Uczniu.

Algiebraicznie.	Liczba Uczniów w jednéy kómórce narożnéy	x.
. . . . . .	we dwóch narożnych	$2x$.
. . . . . .	w jednéy śrzedniéy	$9 - 2x$.
. . . . . .	we cztérech narożnych	$4x$.
. . . . . .	we cztérech śrzednich	$36 - 8x$.
. . . . . .	we wſzyſtkich 8 kómór.	$36 - 4x$.

Warunek. $36 - 4x = 20$.

Przerábianié. (Dodáwſzy $4x$) . . . . $36 = 20 + 4x$.
(Odiąwſzy 20) . . . . $16 = 4x$.
(Podzieliwſzy przez 4) $4 = 1x$.
Reſzta iak wyżéy.

Inſzé przykłady. Liczba tych oſób nie zmnieyſzá ſię ale powiękſzá liczbą 4 lub 8.

Niech znowu liczba oſób w każdéy kómórce będzie 5, i niech wſzyſtkich liczba zmnieyſzá ſię liczbą 4, lub 8: albo powiękſzá cztéréma, ośmią, dwunaſtą lub ſzeſnáſtą.

ROZDZIÁŁ II.

Zagádniénia, w które wchodzą ilości ułómkowé.

W Rozdziele poprzedzaiącym, takich ſię dobiérało przykładów, gdzie ſamé tylko wchodziły ilości cáłkowité. W tym co idzié Rozdziele, z ułómkami ſzczególniéy mieć do czyniénia będziémy.

66. *Zadanié 1. Pewná oſoba włożyła w jedén handel trzecią część ſwégo maiątku, a w drugi czwártą część tegoż maiątku. Zoſtało iéy ſię Zł.*

15000.

15000. Jakiż był iéy cały maiątek, i iak wielé z niego włożyła w każdy z tych dwóch handlów?

Arytmetycznie. Summa trzeciéy i czwártéy części maiątku téy osoby iest summa $\frac{4}{12}$ i $\frac{3}{12}$, toiest $\frac{7}{12}$ iéy maiątku. Włożywszy więc w obadwa handle $\frac{7}{12}$ maiątku swégo, zostanie iéy się $\frac{5}{12}$: a zatém té $\frac{5}{12}$ ważą 15000 Zł. Jedna taká dwunástá część wáży 300 Zł. a przeto cały maiątek toiest 12 ray $\frac{1}{12}$, wážyć będzie 12 razy 3000 Zł. toiest 36000 Zł.

Maiątek téy osoby . . .	36000 Zł.
Część w piérwszy handel włożoná . .	12000.
Część w drugi handel włożoná	9000.
Część pozostałá	15000.
Summa tych trzech części	36000 Zł.

Algiebr: Mian: Maiątek téy osoby . . . . . . x.
Część włożoná w piérwszy handel . $\frac{1}{3}x$.
Część włożoná w drugi handel . . . $\frac{1}{4}x$.

Warunek. $\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + 15000 = x$.

Przeráb: (Przywiódłszy ułómki do iednakowégo mianownika)
$\frac{4}{12}x + \frac{3}{12}x + 15000 = x$.
(Dodáwszy ułómki) . . $\frac{7}{12}x + 15000 = x$ albo $= \frac{12}{12}x$.
(Odiąwszy $\frac{7}{12}x$ po obu stronach) . . $15000 = \frac{5}{12}x$.
(Podzieliwszy przez 5 obie strony) $3000 = \frac{1}{12}x$.
(Rozmnożywszy przez 12 obie str:) $36000 = x$.

Rozwiązanié. $x = 36000$.

Reszta rozwiązania, tak, iak w postępowaniu Arytmetyczném.

Insze przykłady. Pewná osoba włożyła w jedén handel trzecią część swégo maiątku, a w drugi $\frac{2}{5}$ tegoż maiątku. Zostało iéy się Zł. 20000.

Pewná osoba włożyła w jedén handel $\frac{2}{5}$ swégo maiątku, a w drugi, $\frac{3}{7}$. Zostało iéy się 24000 Zł.

67. *Zadanié 2. Pewná osoba włożyła w handel $\frac{2}{3}$ swégo maiątku, a kupiła dóm za $\frac{2}{7}$ tegoż maiątku. Summa tych dwóch części czyni 40000 Zł. Jakiż iest iéy cały maiątek?*

Arytmetycznie. Summa złożona z $\frac{2}{3}$ i z $\frac{2}{7}$ maiątku téy osoby, iest summą z $\frac{14}{21}$, i z $\frac{6}{21}$, toiest $\frac{20}{21}$. Aże ta summa $\frac{20}{21}$, wynosi na 40000 Zł: więc $\frac{20}{21}$, maiątku téy osoby ważą 40000 Zł: a $\frac{1}{21}$ ważyć będzie 20 razy mniéy, toiest 2000 złotych. Cały więc maiątek téy osoby będzie 21 razy 2000 Zł. toiest 42000 Zł.

Cały maiątek téy osoby . . .	42000 Zł.
$\frac{2}{3}$ tego maiątku	28000.
$\frac{2}{7}$	12000.
Summa tych dwóch części . . .	40000.

Algiebraicznie. Cały téy osoby maiątek . . : x.
$\frac{2}{3}$ tego maiątku . . . . . $\frac{2}{3}x$.
$\frac{2}{7}$ . . . . $\frac{2}{7}x$.

Warunek. $\frac{2}{3}x + \frac{2}{7}x = 40000$.

Przerób: (Przywiódłszy dwa ułómki do iednakowégo mianownika)

$$\frac{14}{21}x + \frac{6}{21}x = 40000.$$

(Dodáwszy dwa ułómki) . . . . . . $\frac{20}{21}x = 40000$.
(Podzieliwszy przez 20) . . . . . . $\frac{1}{21}x = 2000$.
(Rozmnożywszy przez 21) . . . . . . $1x = 42000$.

Rozwiązanié. $x = 42000$.

Reszta rozwiązania tak, iak w postępowaniu Arytmetyczném.

Insze przykłady. Pewná osoba dała na zysk w jedno mieysce $\frac{3}{4}$ *swégo maiątku, a w drugié* $\frac{2}{9}$. *Dała zaś ze wszystkiém 70000 Zł.*

Inszá osoba dała na zysk $\frac{2}{5}$ *i* $\frac{3}{7}$ *swégo maiątku, a ze wszystkiém dała Zł. 58000.*

68. *Zadanié 3. Pewná osoba, rachuiąc zbiór, i wydaték roczny, znayduie, iż zebrała summę równaiącą się* $\frac{5}{8}$ *iéy maiątku, a wydała* $\frac{2}{5}$ *tegoż maiątku. Więcéy zaś 27000 zebrała niż wydała.*

Arytmetycznie. Różnica między $\frac{5}{8}$ i $\frac{2}{5}$, albo między $\frac{25}{40}$ i $\frac{16}{40}$, toiest $\frac{9}{40}$ okazuie różnicę między wydátkiém, i zbiorém téy osoby. Że zaś ta osoba zebrała więcéy 27000 Zł. niż wydała; więc $\frac{9}{40}$ całégo maiątku, ró-

wnaią

wnaią śię 27000 Zł. a zatém $\frac{1}{40}$ uczyni tylko dziewiątą część Zł. 27000, toieſt 3000 Zł. A że ta oſoba miała 40 razy 3000 Zł. więc cały iéy maiątek był 120000 Zł.

Maiątek téy oſoby	120000 Zł.
$\frac{5}{8}$ tego maiątku, toieſt zbiór roczny, téy oſoby	75000 Zł.
— $\frac{2}{5}$ tego maiątku, toieſt wydátek roczny, téy oſoby	48000 Zł.
Różnica między wydatkiém i zbiorém . .	27000.

Algiebr: Mian: Maiątek téy oſoby . . . . . x.
Zbiór roczny . . . . $\frac{5}{8}x$.
Wydátek roczny . . . . . . $\frac{2}{5}x$.

Warunek. $\frac{5}{8}x - \frac{2}{5}x = 27000.$

Przeráb: (Przywiódſzy ułómki do iednakowégo mianownika)

$$\frac{25}{40}x - \frac{16}{40}x = 27000.$$

(Wykonáwſzy oznaczoné odeymowanié) $\frac{9}{40}x = 27000.$

(Podzieliwſzy przez 9) . . . . . . $\frac{1}{40}x = 3000.$

(Rozmnożywſzy przez 40) . . . . $1x = 120000.$

Rozwiązanié. $x = 120000$ *Zł.* Maiątek ſzukany.

W poſtępowaniu Arytmetycznėm, mámy wzór reſzty rozwiązania.

Inſzé przykłady. Pewná oſoba zyſkała $\frac{4}{7}$ ſwégo maiątku, a ſtraciła $\frac{3}{8}$. Zyſk przewyżſzá ſtratę 57000 złotémi.

Dwie robotników kupy użyté ſą do kopania rowu: iedna z nich wykopała $\frac{5}{9}$, a drugá $\frac{2}{7}$ tego rowu: piérwſzá zaś wykopała więcéy 510 ſążni, niż drugá. Iléż ſążni wykopały obiedwie té kupy?

69. *Zadanié 4. Dwie oſoby oddaloné na 340 mil iadą ku ſobie. Jedna uieżdżá 2 mile we trzech godzinach, a drugá uieżdżá 3 mile we 4 godzinach. Kiedyż ſię z ſobą zjadą, i ilé mil każda z nich uiedzie, nim ſię ſpotkaią?*

Arytmetycznie. Piérwſzá z tych oſób uieżdżá na godzinę trzecią część dwóch mil, albo $\frac{2}{3}$ iednéy mili, drugá uieżdżá na godzinę czwártą część trzech mil, albo $\frac{3}{4}$ iednéy mili. W jednéy więc godzinie przybliżaią

 ſię

ſię do ſiebie, ſummą $\frac{2}{3}$ i $\frac{3}{4}$ iednéy mili, toieſt $\frac{17}{12}$ mili, a zátém we 12 godzinach, przybliżaią ſię na mil 17. Tylé więc razy iazdę ſwoię dwunaſtogodzinną té oſoby powtórzyć powinny, ilé razy powtórzyć trzeba 17 mil, aby przyśdź do mil 340. Doydziémy zaś tego, dzieląc 340 przez 17. Wielorář 20, ukaże, iż 20 razy uiechać trzeba było tym oſobóm mil 17, aby przeiechały całą odległość mil 340, i razém okáże, iż 20 razy 12 godzin, toieſt 240 godzin na tę drogę łożyć należało.

Godziny całéy iazdy . . . 240.

Jazda 1wſzéy oſoby $\frac{2}{3}$ mili wzięté 240 razy, toieſt 160 mil.
Jazda 2giéy oſoby $\frac{3}{4}$ mili wzięté 240 razy, toieſt 180.
Droga przez obiedwie oſoby przeiechaná . . . 340.

Możná było doyśdź tego ſamégo, przez naſtępuiącé rozumowanié.

Ponieważ piérwſzá oſoba uieżdżá mil 8, a drugá mil 9 w godzinach 12; więc w iakimkolwiek przeciągu czaſu, mile od tych oſób uiechané, będą ſię miały do ſiebie, iak liczby 8 i 9. Summa zaś mil od obudwóch oſób uiechanych, mieć ſię będzie do mil od iednéy oſoby uiechanych, iak 17 do 8, albo 9. Gdy tedy całą drogę, toieſt mil 340, podzieliny na 17 części równych, (z których każdá zawiérać będzie mil 20) piérwſzá z tych oſób uiedzie 8 razy, tę część toieſt uiedzie mil 160, a drugá uiedzie też ſamę część razy 9, toieſt uiedzie mil 180.

Algiebr: Mian: Liczba godzin całéy iazdy . . . x.
Droga uiechaná przez piérwſzą oſobę
$\frac{2}{3}$ mili razy x, toieſt . . . . . $\frac{2}{3}x$.
Droga uiechaná przez drugą oſobę
$\frac{3}{4}$ mili razy x, toieſt . . . . . $\frac{3}{4}x$.

Warunek. $\frac{2}{3}x + \frac{3}{4}x = 340.$

Przeráb: (Przywiódłſzy ułómki do iednakowégo mianownika)
$\frac{8}{12}x + \frac{9}{12}x = 340.$
(Wykonáwſzy oznaczoné dodáwanié) . $\frac{17}{12}x = 340.$
(Podzieliwſzy przez 17) . . . . . $\frac{1}{12}x = 20.$
(Rozmnożywſzy przez 12) . . . . $1x = 240.$

Roz-

Rozwiązanie. $x = 240$. Godziny szukané.
Reszta iak wyżéy.

Insze przykłady. Jedna ze dwóch osób uieżdżá 5 mil w sześciu godzinach, a drugá uieżdżá 6 mil w siédmiu godzinach. Oddaloné są od siebie na mil 142.

Pospiech iazdy iednéy osoby, iest 6 mil w 5 godzinach, drugiéy 4 mile we trzech godzinach: odległość 152 mil.

70. *Zadanié 5. Złodziéy uciekaiąc, 3 mile w 4 godzinach ubiegá. Pogóń we 28 godzin po ucieczce za nim wystaná, ubiégá 4 mile we 3 godzinach. Za iléż godzin złodziéy będzie dogoniony?*

Arytmetycznie. Złodziéy ubiegá na godzinę $\frac{3}{4}$ mili: więc we 28 godzin, ubiegł 28 razy $\frac{3}{4}$ mili, toiest ubiegł 21 mil, nim pogóń za nim wyszła. Ta pogóń ubiegá $1\frac{1}{3}$ mili na godzinę, i zbliżá się co godzina ku złodzieiowi tylé, ilá iest różnica $\frac{3}{4}$ mili od $1\frac{1}{3}$, toiest zbliżá się ku złodzieiowi summą $\frac{1}{4}$, i $\frac{1}{3}$ mili, czyli $\frac{7}{12}$ mili: więc w 12 godzinach zbliży się ku złodzieiowi na mil 7: a przeto tylé razy przez 12 godzin gonić złodzieia potrzeba, ilé razy 7 mil powtórzoné czynią 21 mil: doydziémy zaś tego, dzieląc 21 przez 7, skąd wypadnie wieloráz 3: więc 3 razy przez 12 godzin, toiest przez 36 godzin gonić má pogóń złodzieia, nim go dogoni. Złodziéy zaś uciekál przez 28 godzin dłużéy, toiest uciekál ze wszystkiém przez 64 godzin.

Albo tak: Pogóń ubiégá na godzinę $\frac{4}{3}$ mili, złodziéy $\frac{3}{4}$, albo pogóń $\frac{16}{12}$ mili, a złodziéy $\frac{9}{12}$: więc w iednakowym przeciągu czasu, tak się má droga ubieżoná od pogoni, do drogi ubieżonéy od złodzieia, iak 16 do 9: a zatém, i różnica tych dróg w iednym czasie ubieżonych mieć się będzie do drogi ubieżonéy od pogoni, iak 7 do 16, a do drogi ubieżonéy od złodzieia, iak 7 do 9. Aże ta różnica drogi na początku wyiazdu pogoni iest 21 mil, albo trzy razy 7 mil; więc téż i drogi ubieżoné w iednym czasie od pogoni i od złodzieia, będą do siebie iak 3 razy 16, do 3 razy 9, albo iak 48 mil, do 27: i piérwszá z tych liczba 48 przewyższá drugą 27, tak iak w saméy rzeczy przewyższać powinna liczbą 21.

Algiebr: Mian:	Godziny pogoni	x.
	Godziny ucieczki złodzieia . .	$x + 28$.
	Droga ubieżoná od pogoni . .	$\frac{4}{3}x$
	Droga ubieżoná od złodzieia .	$\frac{3}{4}x + 21$.

Warn-

Warunek. $\frac{4}{3}x = \frac{3}{4}x + 21.$

(Przywiódłſzy ułómki do iednakowégo mianownika)

$\frac{16}{12}x = \frac{9}{12}x + 21$

(Odiąwſzy $\frac{9}{12}x$) . . . . $\frac{7}{12}x = 21.$

(Podzieliwſzy przez 7) . . . . . $\frac{1}{12}x = 3.$

(Rozmnożywſzy przez 12 . . . . . . $1x = 36.$

Rozwiązanié. $x = 36.$ Godziny pogoni.

$x + 28 = 64.$ Godziny ucieczki złodzieia.

$\frac{4}{3}x = 48.$ Droga ubieżoná przez pogóń.

$\frac{3}{4}x + 21 = 48.$ Droga ubieżoná przez złodzieia.

Inſzé przykłady. Dwa okręty idą ku ſobie: iedén uchodzi 5 mil w 4 godzinach, drugi 4 mile w 5 godzinach: nim ſię znidą piérwſzy uydzie 36 mil więcéy, niż drugi. Iléż każdy z nich uydzie nim ſię znidą, i iaká ieſt ich piérwſzá odległość?

Kupuie kto pewną liczbę ſukna iednégo, i płaci 3 Cz. Zł. za 5 łokci. Kupuie tyléż łokci i ſukna drugiégo, i płaci 4 Cz. Zł. za 7 łokci. Zapłacił 8 Cz. Zł. więcéy za piérwſzé, niż za drugié. Iléż było łokci?

Dwa Skaźniki, *czyli* Indexy *zegarka, godzinny i minutowy, zſzedłſzy ſię razém w godzinę* np. *południową; kiedyż znowu zeydą ſię razém?*

Lubo to oſtatnié Zagádniénié, tegoż ieſt co i dwa poprzedzaiącé gatunku, że iednak Uczniowie mogliby tego nie poſtrzédz, przeto ſię tu tak wyłuſzczá.

Arytmetycznie. Skaźnik godzinny przechodzi w tym ſamym czaſie od iednégo podziału godzinnégo, do drugiégo naſtępuiącégo, w którym ſkaźnik minutowy obchodzi całe koło, czyli 12 podziałów godzinnych: a zatém ſkaźnik minutowy w równym czaſie 12 razy tylé ubiegá, ilé ſkaźnik godzinny. Różnica więc tych dwóch biegów, ieſt 11 razy tak wielká, iak bieg ſkaźnika godzinnégo.

A że droga ubieżoná od ſkaźnika minutowégo (rachuiąc ią od iednégo ſpotkania ſię z ſkaźnikiém godzinnym, do naſtępuiącégo) ieſt większá całym obwodém podziału, od drogi w równym czaſie ubieżonéy od ſkaźnika godzinnégo; więc cały tén obwód podziału równá ſię drodze, którą przebiegá ſkaźnik godzinny od iednégo ſpotkania ſię do drugiégo naſtępuiącégo, wziętéy razy 11. A zatém ta droga ſkaźnika godzinnégo czyni iedénaſtą część całégo obwodu podziału, toieſt w czaſie ią rachuiąc, czyni 5 minut piérwſzych, 27 drugich, i coś więcéy.

Algiebr:

Algiebraicznie. Wyſtáwmy ſobie koło, które obiegaią obadwa ſkaźniki w zégarku podzieloné na 12 równych częśći, z których każdá wyráżá czas godzinny.

Mianowanié. Droga ubieżoná od ſkaźnika godzinnégo między iednérm, i drugiém naſtępném ſpotkaniém . . . . x.
Droga ubieżoná w tymże czaſie od ſkaźnika minutowégo . . . $12x$ albo $x + 12$.

Warunek. $12x = x + 12$.

Przerábianié. $11x = 12$.
$1x = \frac{12}{11} = 1\frac{1}{11}$.

Rozwiązanié. $x = 1\frac{1}{11}$. Droga ubieżoná od ſkaźnika godzinnégo.
$12x = 12\frac{12}{11} = 13\frac{1}{11}$. Droga ubieżoná w iednymże czaſie od ſkaźnika minutowégo.
$x + 12 = 1\frac{1}{11} + 12 = 13\frac{1}{11}$. Drugié wyrażénié drogi ubieżonéy od ſkaźnika minutowégo.

71. *Zadanié 6. Woda płynącá iednym kanáłém może napełnić kádź, w którą wpływá 3 razy w 7 dniach: taż woda wypływaiąc innym kanáłém, może wypróżnić tę kádź 2 razy w 5 dniach. Otworzywſzy obadwa té kanáły, iléż czaſu trzeba będzie do napełniénia kadzi? (przypuściwſzy, że woda płynie iednoſtaynie w obudwóch kanáłach.)*

Arytmetycznie. Woda wpływaiącá do innéy kadzi 3 razy tak wielkiéy, iak kádź daná, napełniłaby 7mą iéy część we dniu iednym, a zatém napełniá w tym czaſie $\frac{3}{7}$ kadzi danéy. Taż woda, gdyby wypływała z kadzi dwa razy tak wielkiéy, wypróżniłaby piątą iéy część we dniu iednym, a zatém w tymże czaſie wypróżni $\frac{2}{5}$ kadzi danéy. Więc po ſkończonym dniu iednym płyniénia, i wypłyniénia, tylé wody zoſtanie w kadzi danéy, ilá ieſt różnica $\frac{2}{5}$ od $\frac{3}{7}$, albo $\frac{14}{35}$ od $\frac{15}{35}$, toieſt zoſtanie $\frac{1}{35}$ część kadzi, tą wodą przez dzień napełnioná. Więc po drugim dniu napełnią ſię $\frac{2}{35}$ téyże kadzi i t. d. a za dni 35 napełnią ſię $\frac{35}{35}$ téy kadzi, toieſt cała kádź za dni 35 będzie napełnioná.

Albo tak: Ponieważ 35 ieſt to liczba, która tak przez 5, iako i przez 7 bydź może podzieloną; wyſtáwmy więc ſobie tę kadź, iakoby podzieloną

 na 35

na 35 równych części. Piérwszym kanálém płynącá woda w 7 dniach, napełniłaby 105 takich części, a w jednym dniu 15 części. Drugim kanálem wypływaiącá woda, w 5 dniach wypróżniłaby 70 takichże części, a w jednym dniu 14 części. Więc gdy razém wpływać, i wypływać woda będzie, zostanie iéy w kadzi iedna tylko taká część. A że 35 takich części napełnią kádź całą; więc w 35 dniach będzie napełnioná.

Algiebr: Mian: Liezba dni szukaná . . . . x.
Piérwszym kanálém napełniaią się w jednym dniu $\frac{3}{7}$ kadzi: więc w x dniach . . . $\frac{3}{7}x$.
Drugim kanálém wypływaią $\frac{2}{5}$ kadzi w jednym dniu: więc w x dniach . . . . $\frac{2}{5}x$

Warunek. $\frac{3}{7}x - \frac{2}{5}x = 1.$

Przerób: (Przywiódłszy ułómki do iednakowégo mianownika)
$\frac{15}{35}x - \frac{14}{35}x = 1.$
(Wykonáwszy oznaczoné odeymowanié) $\frac{1}{35}x = 1.$
(Rozmnożywszy przez 35) . . . . $1x = 35.$

Rozwiązanié. $x = 35.$ Liczba dni szukaná.
$\frac{3}{7}x = 15.$ Liczba tylu razy, ilé by z piérwszégo kanálu woda w 35 dniach kádź napełniła.
$\frac{2}{5}x = 14.$ Liczba tylu razy, ilé by drugim kanálém woda w 35 dniach kádź wypróżniła.

Sprádzénié. $\frac{3}{7}x - \frac{2}{5}x = 15 - 14 = 1.$

Insze przykłady. Piérwszy kanál może kadź napełnić 7 razy w 8 dniach, drugi może ią wypróżnić 5 razy w 6 dniach. Iléż dni trzeba będzie do napełniénia kadzi, gdy woda obudwóma razém płynie kanálami?

Pewny kupiec zyskuie co rok $\frac{1}{10}$ maiątku swégo, który miáł handel zaczynaiąc, i wydaie co rok $\frac{1}{15}$ tegoż maiątku. Za iléż lát mieć będzie 2 razy tylé, ilé miáł na początku handlu?

72. *Zadanié 7. Pewny rzemieślnik może zrobić robotę jednę w 12 dniach, a drugi może to samo zrobić w 6 dniach. Biorą razém między siebie tę robotę: za iléż dni mogą ią skończyć?*

Aryt-

Arytmetycznie. Piérwſzy zrobi za dzién $\frac{1}{12}$ téy roboty, a drugi zrobi $\frac{1}{6}$: więc razém zrobią przez dzién $\frac{1}{12} + \frac{1}{6}$, albo $\frac{1}{12} + \frac{2}{12}$, czyli $\frac{3}{12}$, toieſt $\frac{1}{4}$ całéy roboty: a zatém za cztéry dni całą robotę ſkończą.

Algiebr: Mian: Liczba dni ſzukaná . . . . . . x.
Część zrobioná przez rzémieślnika piérwſzégo . . . . $\frac{1}{12}x$.
Część zrobioná przez drugiégo . . . $\frac{1}{6}x$.

Warunek. $\frac{1}{12}x + \frac{1}{6}x = 1$.

Przerób: (Przywiódłſzy ułómki do iednakowégo mianownika) $\frac{1}{12}x + \frac{2}{12}x = 1$.
(Wykonáwſzy oznaczoné dodáwanié) . . . $\frac{3}{12}x = 1$.
(Przywiódłſzy do náyprościeyſzych wyrazów) $\frac{1}{4}x = 1$.
(Rozmnożywſzy przez 4) . . . . . . $1x = 4$.

Rozwiązanié. $x = 4$. Liczba dni ſzukaná.
$\frac{1}{12}x = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$. Część zrobioná przez 1wſzégo.
$\frac{1}{6}x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Część zrobioná przez 2giégo.

Spráwdzenié. $\frac{1}{12}x + \frac{1}{6}x = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$. Cała robota.

Inſzé przykłady. Dwie robotników gromady kopią rów ieden: iedna gromada mogłaby ſkończyć tę robotę za dni 8, a drugá mnieyſzá daleko za dni 56. Za iléż dni wykopią obiedwie razém tén rów?

Woda wchodzi do kadzi przez dwa kanáły: ieden może ią napełnić w 12 godzinach, a drugi w 24 godzinach. Za iléż godzin obadwa razém kadź napełnią?

73. *Zadanié 8. Maiątek oſoby A, ieſt $\frac{2}{3}$ maiątku Oſoby B: A, i B, zyſkuią po Zł. 12, a po tym zyſku maiątek A, będzie $\frac{3}{4}$ maiątku B.*

Arytmetycznie. Aby maiątek A, był iednoſtaynie $\frac{2}{3}$ maiątku B, trzebaby aby i zyſk A, był $\frac{2}{3}$ zyſku B, toieſt 8 Zł. Ale że A, zyſkuie nie 8, ale 12 Zł. więc nad $\frac{2}{3}$ zyſku B, zyſkuie ieſzcze A, 4 Zł: té więc 4 Zł: to czynią, że A, po zyſku nie má $\frac{2}{3}$, alé $\frac{3}{4}$ maiątku B, także po zyſku: więc té 4 złoté ſą w ſamey rzeczy rożnicą między $\frac{3}{4}$ i $\frac{2}{3}$ maiątku B, toieſt, ſą $\frac{1}{12}$ maiątku B. B, tedy mieć będzie po zyſku 12 razy 4 Zł. toieſt 48 Zł.

1wſzy Maiątek B . . . 36 Zł. Maiątek B, po zyſku . . . 48. Zł.
1wſzy Maiątek A . . . 24 Maiątek A, po zyſku . . . 36.

Algiebr: 1wſzy Maiątek B . . . x. Powtórny . . . $x + 12$.
1wſzy Maiątek A . . . $\frac{2}{3}x$. Powtórny . . $\frac{2}{3}x + 12$.
albo . . . . $\frac{3}{4}x + 9$.

Warunek. $\frac{3}{4}x + 9 = \frac{2}{3}x + 12$.

Przeráb: (Przywiódłſzy ułómki do iednakowégo mianownika)
$\frac{9}{12}x + 9 = \frac{8}{12}x + 12$.
(Odiąwſzy $\frac{8}{12}x$) . . . . $\frac{1}{12}x + 9 = 12$.
(Odiąwſzy 9) . . . . $\frac{1}{12}x = 3$.
(Rozmnożywſzy przez 12) . . . . . $1x = 36$.

Rozwiązanié. $x = 36$. 1wſzy maiątek B.
Reſzta iak wyżéy.

Inſzé przykłady. Maiątek A, ieſt $\frac{2}{3}$ maiątku B: A, zyſkuie na B, Zł. 12, które ſtraciwſzy B, má tylko $\frac{2}{3}$ maiątku A.

Maiątek A, ieſt $\frac{3}{4}$ maiątku B. A, zyſkuie Zł. 8. B, zaś traci Zł. 12, i potém tylé má A, ilé i B.

A, má Zł. 24. B, Zł. 18. Iléż má zyſkać tak A, iak i B, aby po równym ich zyſku, maiątek A, przechodził tylko $\frac{1}{6}$ ſtą maiątek B.

A, i B, założyli ſię o Zł. 12, które ieżeli A, wygrá; tedy u B, zoſtanie $\frac{2}{3}$ maiątku A: ieżeli zaś B, wygrá, tedy u B, zoſtanie $\frac{3}{4}$ maiątku A.

Spoſób poſtępowania w rozwięzywaniu tych wſzyſtkich zagádnień wcale ieſt podobny temu, który wyłożyliśmy w Rozdziele poprzedzaiącym. (§. 6 i naſtęp.)

74. *Zadanié 9. A, i B, maią razém . . . . . . 24 Zł.*
C, i D, maią razém . . . . . . 24 Zł.

Maiątek C, ieſt $\frac{2}{3}$ maiątku A.
Maiątek B, ieſt $\frac{3}{4}$ maiątku D.

Fig. 18. *Przez rozumowanié.* Niech liniie równé AB, CD, wyſtawuią nám 24 Zł. Łiniie AX, BX, niech wyſtawuią maiątki A, i B, a liniie CY, DY, niech wyſtawuią maiątki C, i D.

Ponieważ

Ponieważ maiątek C, powinién bydź $\frac{2}{3}$ maiątku A; więc liniiá CY, powinna téż bydź $\frac{2}{3}$ linii AX: toieſt liniiá AX, powinna zawiérać w ſobie półtora razy liniią CY: weźmy liniią EB, równą połowie linii CD: będzie EX, zawiérała w ſobie półtora razy liniią DY. A że BX, má tylko mieć w ſobie $\frac{3}{4}$ linii DY; więc tylé nie doſtaie ieſzcze linii BX, aby była $\frac{3}{2}$ linii DY, ilá ieſt różnica $\frac{3}{4}$ od $\frac{3}{2}$ toieſt nie doſtaie iéy $\frac{3}{4}$ linii DY. Że zaś dodáwſzy BE, do BX, ieſt EX $= \frac{3}{2}$ DY; więc BE równá ſię $\frac{3}{4}$ DY. A ponieważ BE, wyſtáwiá nám Zł. 12; więc i $\frac{3}{4}$ DY, oznaczać będą Zł. 12. $\frac{1}{4}$ DY oznaczy Zł. 4, a cała liniiá DY oznaczy Zł. 16.

Maiątek D	. . . .	16 Zł.
. . . C	. . . .	8.
. . . B	. . . .	12.
. . . A	. . . . .	12.

Algiebr: Mian: Maiątek C . . . . x.
. . . . . A . . . . . . $\frac{3}{2}x$.
. . . . . B . . . $24 - \frac{3}{2}x$.
. . . . . D . . . $24 - x$.
Drugié wyrażénié maiątku B . . . $18 - \frac{3}{4}x$.

Warunek. $24 - \frac{3}{2}x = 18 - \frac{3}{4}x$.

Przerábianié. (Przywiódłſzy ułómki do iednakowégo mianownika)
$$24 - \tfrac{6}{4}x = 18 - \tfrac{3}{4}x.$$
(Dodáwſzy $\frac{6}{4}x$) . . . . . $24 = 18 + \frac{3}{4}x$.
(Odiąwſzy 18) . . . . $6 = \frac{3}{4}x$.
(Podzieliwſzy przez 3) . . . $2 = \frac{1}{4}x$.
(Rozmnożywſzy przez 4) . . $8 = 1x$.

Rozwiązanié. $x = 8$. Maiątek C.
$\frac{3}{2}x = 12$. Maiątek A.
$24 - \frac{3}{2}x = 12$. Maiątek B.
$24 - x = 16$. Maiątek D.

Spráwdzénié. Maiątek B, ieſt w ſaméy rzeczy $\frac{3}{4}$ maiątku D.

Inſzé przykłady. *A, i B, maią razém* . . . . 70. *Zł.*
C, i D, maią razém . . . . 70.

Maiątek C, ieſt $\frac{2}{3}$ maiątku A.
Maiątek B, ieſt $\frac{3}{4}$ maiątku D.

A, i B, maią razém . . . . . 144. Zł.
C, i D, maią razém . . . . . 144. Zł.

Maiątek C, ieſt $\frac{3}{4}$ maiątku A.
Maiątek B, ieſt $\frac{5}{6}$ maiątku D.

75. *Zadanié 10. Pewná oſoba dała $\frac{1}{3}$ maiątku ſwégo na pięć procentu, albo na 5%, a pozoſtałé $\frac{2}{3}$ tegoż maiątku, dała na 6%. Bierze zaś całégo procéntu 17000 Zł. Jakiż ieſt iéy maiątek?*

Arytmetycznie. Gdyby ta oſoba miała 300 Zł. dałaby była 100 Zł. na 5%, a 200 Zł. na 6%: procént z piérwſzéy części byłby 5 Zł. a z drugiéy 12 Zł: a ze wſzyſtkiém 17 Zł. Że zaś odbiérá w procéncie 17000 Zł. toieſt 1000 razy więcéy, więc i kapitál iéy był 1000 razy większy od 300 Zł. a zatém był 300000 Zł.

Algiebr: Mian: Maiątek téy oſoby . . . . x.
Część daná na 5% . . . . $\frac{1}{3}x$.
Część daná na 6% . . . . $\frac{2}{3}x$.
Procént od 1wſzéy części . . . . . $\frac{5}{300}x$.
. . . . od 2giéy . . . . $\frac{12}{300}x$.

Warunek. $\frac{5}{300}x + \frac{12}{300}x = 17000$.

Przeráb: (Wykonáwſzy oznaczoné dodáwanié) $\frac{17}{300}x = 17000$.
(Podzieliwſzy przez 17) . . . . . . $\frac{1}{300}x = 1000$.
(Rozmnożywſzy przez 300) . . . . . . $1x = 300000$.

Rozwiązanié. $x = 300000$. Maiątek téy oſoby.
$\frac{1}{3}x = 100000$. Część tego maiątku na 5%.
$\frac{2}{3}x = 200000$. Część tego maiątku na 6%.
$\frac{5}{300}x = 5000$. Procént z piérwſzéy części.
$\frac{12}{300}x = 12000$. Procént z drugiéy części.
$\frac{17}{300}x = 17000$. Cały procént.

Uwága. Możná toż Zadanié rozwiązać i bez ułómków w tén ſpoſób:

Ozna-

Oznaczmy maiątek téy osoby przez liczbę, która tak przez 3, iak i przez 100 może bydź podzieloną *np:* przez *300x.*

Będzie część piérwszá daná na 5% . . . . *100x.*
Procént od niéy . . . . *5x.*
Część drugá daná na 6% . . . . *200x.*
Procént od niéy . . . . *12x.*

Warunek. $5x + 12x = 17000.$

Przerábianié. $17x = 17000.$
$1x = 1000.$
$300x = 300000.$ Maiątek téy osoby, tén sám co wyżéy.

Inszé przykłady. Pewná osoba dwoiaki handel prowadzi: w jedén włożyła $\frac{2}{5}$ swégo maiątku, w drugi $\frac{3}{5}$ tegoż maiątku. Z piérwszégo handlu zyskuie 10%, a z drugiégo zyskuie 12%. Ze wszystkiém zyskuie za rok 44800 złotych.

Pewná osoba wchodzi w troiaki handel: w jedén wkłàdá $\frac{1}{4}$ swégo maiątku, w drugi $\frac{1}{3}$, a w trzeci resztę tegoż maiątku. Z piérwszégo handlu zyskuie w rok 8%, z drugiégo 12%, a z trzeciégo 15%: ze wszystkiém zaś zyskuie 58800 Zł.

76. *Zadanié* 11. *Pewná osoba dała $\frac{2}{3}$ swégo maiątku na 6%, a $\frac{1}{3}$ na 8%. Z piérwszéy części toiest ze $\frac{2}{3}$ swégo maiątku, więcéy 4800 Zł. zyskuie niż z drugiéy toiest z $\frac{1}{3}$ maiątku. Jakiż iest iéy maiątek?*

Arytmetycznie. Gdyby ta osoba miała tylko 300 Zł. tedy 200 dałaby na 6%, a 100 na 8%. Z piérwszéy więc części miałaby zysku rocznégo 12 Zł. a z drugiéy 8 Zł: a zatém na każdych 300 Zł. zysk z piérwszéy części byłby 4 Zł. większy od zysku z drugiéy części. A że z piérwszéy części więcéy 4800 Zł. zyskuie niż z drugiéy toiest 4 razy 1200; więc téż i kapitáł iéy będzie 300 razy 1200, toiest 360000 Zł.

Część maiątku daná na 6%	240000.
Część maiątku daná na 8%	120000.
Procént z piérwszéy części	14400.
Procént z drugiéy	9600.
Różnica procéntów	4800.

Algiebr:

Algiebr: Mian: Maiątek téy oſoby . . . . x.
Część iego daná na 6% . . . . . $\frac{2}{3}x$.
Część daná na 8% . . . . $\frac{1}{3}x$.
Procént z piérwſzéy części . . $\frac{12}{300}x$
Procént z drugiéy części . . . $\frac{8}{300}x$.

Warunek. $\frac{12}{300}x - \frac{8}{300}x = 4800$.

Przerab: (Wykonáwſzy oznaczoné odeymowanié) $\frac{4}{300}x = 4800$.
(Podzieliwſzy przez 4) . . . . $\frac{1}{300}x = 1200$.
(Rozmnożywſzy przez 300) . . . . $1x = 360000$.
Réſzta iak wyżéy.

Uwága. Możná i to Zadanié rozwiązać Algiebraicznie, nie używaiąc ułómków, ale oznáczaiąc maiątek téy oſoby przez liczbę, która tak przez 3, iak i przez 100 może bydź podzieloną, toieſt przez $300x$.

Inſzé przykłady. Pewná oſoba wchodzi we dwa handle: w jedén kładzie $\frac{2}{5}$ ſwégo maiątku, a w drugi $\frac{3}{5}$. W piérwſzym handlu zyſkuie $\frac{1}{4}$ ſwoiéy wkładki, w drugim zyſkuie $\frac{1}{5}$ ſwoiéy także wkładki. Zyſkuie zaś więcéy 1200 Zł. w drugim handlu niż w piérwſzym.

Inná oſoba má trzy handle: w jedén włożyła $\frac{2}{5}$ ſwégo maiątku, w drugi $\frac{1}{3}$ tegoż maiątku, a w trzeci reſztę. W piérwſzym handlu zyſkuie 20%, w drugim 15%, a w trzecim 8%. Zyſkuie zaś więcéy 1300 Zł. w piérwſzym handlu, niż w drugim i trzecim razém.

77. *Zadanié 12. Pewná oſoba wkładá we dwa handle 10000 Zł. W jednym zyſkuie 10%, a w drugim 12%. Zyſk iéy w roku uroſt do 1080 Zł. Iléż włożyła w jedén, a ilé w drugi handel?*

Arytmetycznie. Gdyby tén maiątek cały był włożony w piérwſzy handel, zyſk z niégo roczny byłby $\frac{1}{10}$ tegoż maiątku, toieſt 1000 Zł. A że zyſk większy ieſt 80 Zł. od 1000 Zł: więc część tego maiątku włożyła ta oſoba i w drugi handel. Na każdych 100 Zł. włożonych w drugi handel zyſkała ona 2 Zł. więcéy, niż na każdych 100 Zł. włożonych w piérwſzy handel: a zatém liczbę tych 100 Zł. znaydziémy, dzieląc 80 przez 2. wypadnie na wieloráz 40. Więc 40 ſet, toieſt 4000 Zł. włożyła ta oſoba w drugi handel, a zatém 6000 Zł. włożyła w piérwſzy.

Algiebr:

Algiebraicznie. Część włożoná w handel, gdzie ieſt zyſk $12\frac{0}{0}$ . . x.
Drugá część włożoná w handel inny, gdzie
ieſt zyſk $10\frac{0}{0}$ . . . . $10000 - x$.
Zyſk z piérwſzéy części . . . . $\frac{12}{100}x$.
Zyſk z drugiéy . . . . $1000 - \frac{10}{100}x$.

Warunek. $\frac{12}{100}x + 1000 - \frac{10}{100}x = 1080$.

Przerób: (Odiąwſzy 1000 po obu ſtronach) $\frac{12}{100}x - \frac{10}{100}x = 80$.
(Wykonáwſzy oznaczoné odeymowanié) . . $\frac{2}{100}x = 80$.
(Podzieliwſzy przez 2) . . . . $\frac{1}{100}x = 40$.
(Rozmnożywſzy przez 100) . . . . $1x = 4000$.

Rozwiązanié. $x = 4000$. Część maiątku, z którėy procént $12\frac{0}{0}$.
$10000 - x = 6000$. Część, z którėy procént $10\frac{0}{0}$.
$\frac{12}{100}x = 480$. Zyſk z piérwſzéy części.
$1000 - \frac{10}{100}x = 600$. Zyſk z drugiéy części.

Sprawdzénié. $480 + 600 = 1080$.

Uwága. Oznáczaiąc przez $100x$ część maiątku przynoſzącą $12\frac{0}{0}$ możná było uchronić ſię ułómków.

Inſzé przykłady. Pewná oſoba dała część iedną maiątku ſwégo na $7\frac{0}{0}$, a drugą część na $5\frac{0}{0}$. Cały zaś maiątek téy Oſoby ieſt 80000 Zł. a cały procént wynoſi na 4500.

Pewná oſoba dzieli maiątek ſwóy między dwa handle. Z jednégo zyſkuie $\frac{1}{5}$ wkładki ſwoiéy, z drugiégo zyſkuie $\frac{1}{6}$ drugiéy wkładki. Cały iéy maiątek ieſt 45000 Zł. a cały zyſk 8400 Zł.

78. *Zadanié 13. Pewná oſoba 15000 Zł. włożyła we dwa handle. W jednym zyſkuie $9\frac{0}{0}$, a w drugim $11\frac{0}{0}$. W roku zaś zyſkała 250 Zł. więcéy w drugim handlu niż w piérwſzym.*

Arytmetycznie. Gdyby ta oſoba cały ſwóy maiątek była włożyła w drugi handel, byłaby z niégo zyſkała za rok Zł. 1650, więcéy niż z piérwſzégo, w który nicby téż była nie włożyła. A że tylko zyſkuie więcéy 250 Zł. z drugiégo handlu, niż z piérwſzégo; więc w tém drugiém mniémaniu zyſkuie mniéy 1400 Zł. niż w piérwſzém.

Na każdém 100 Zł. włożonym raczéy w piérwszy niż w drugi handel, zysk téy osoby w piérwszym handlu powiększá się 9 Zł. a w drugim handlu zmnieyszá się 11 Zł. co czyni różnicę w 20 Zł: na każdém stu złotych. Znaydziémy więc liczbę tych set włożonych w piérwszy handel, dzieląc całą różnicę 1400 Zł. przez 20. A że na wieloráz wypádá 70; więc 70 set, toiest 7000 Zł. włożyła ta osoba w piérwszy handel, a zatém włożyła 8000 Zł. w handel drugi.

Część maiątku w piérwszym handlu . . .	7000 Zł.
. . . . . . w drugim	8000.
Zysk w drugim handlu	880.
. . . w piérwszym	630.
Różnica	250.

Algiebr: Mian: Część w piérwszy handel włożoná . . . . . x.
. . . w drugi . . . . $15000 - x$.
Zysk w piérwszym . . . . $\frac{9}{100}x$.
. . . w drugim . . . . . $1650 - \frac{11}{100}x$.

Różnica zysków . . . . $1650 - \frac{20}{100}x$.

Warunek. $1650 - \frac{20}{100}x = 250$.

Przerób: (Dodáwszy $\frac{20}{100}x$) . . . . $1650 = 250 + \frac{20}{100}x$.
(Odiąwszy 250) . . . . . $1400 = \frac{20}{100}x$.
(Podzieliwszy przez 20) . . $70 = \frac{1}{100}x$.
Rozmnożywszy przez 100) $7000 = 1x$.

Rozwiązanié. $x = 7000$. Część włożoná w piérwszy handel.
Reszta rozwiązania iak wyżéy.

Inszé przykłady. Pewná osoba kupuie 120 łokci materyi we dwóch różnych gatunkach. Jednéy z tych materyi má 3 łokcie za dwa cz. Zł. a drugiéy má 4 łokcie za 3 Cz: Zł. Płaci zaś 12 Cz. Zł. za łokcie wszystkié piérwszéy materyi więcéy niż za wszystkié łokcie drugiéy materyi.

Na obicié pokoiów bierze kto 144 łokcie dwoiakiégo gatunku płótna. Szérokość iednégo iest na 1 łokieć i $\frac{2}{3}$, a szérokość drugiégo na 1 łokieć, i $\frac{3}{4}$. Drugiégo gatunku łokci więcéy iest 47 kwadratowych niż piérwszégo.

79. *Zadanié 14. Pewná osoba dzieli swóy maiątek między dwa handle: w jednym zyskuie 12$\frac{0}{0}$, a w drugim 9$\frac{0}{0}$. Włożyła zaś 5000 Zł. więcéy w piérwszy handel niż w drugi, a w zysku całym odbiérá za rok 2280 Zł. Trzeba znaleźć część iéy maiątku włożonégo w piérwszy i w drugi handel.*

Arytmetycznie. Gdyby ta osoba nie miała tylko té 5000 Zł. którémi więcéy włożyła w piérwszy handel niż w drugi; tedy w rok byłaby zyskała 50 razy 12 Zł. toiest 600 Zł: a że zyskała 2280 Zł. więc zyskała więcéy 1680 Zł. niżby była zyskała, nie maiąc tylko 5000 Zł. Oprócz tych 5000 Zł. ilé set ta osoba kładzie w piérwszy handel, tylé ich téż kładzie i w drugi handel, a za obadwa razém sta Zł. iedno w piérwszy, a drugié włożoné w drugi handel zyskuie razém 21 Zł. Więc tę liczbę set Zł. włożonych w drugi handel znaydziémy, dzieląc 1680 przez 21. Że zaś na wieloráz wypádá 80; więc ta osoba włożyła w drugi handel 80 set Zł. toiest 8000 Zł a w piérwszy handel włożyła 5000 więcéy, toiest 13000 Zł.

Część maiątku włożoná w 1wszy handel	13000 Zł.
Drugá część włożoná w 2gi handel	8000.
Zysk z piérwszégo handlu	1560.
Zysk z drugiégo handlu	720.
Summa zysków	2280.

Algiebr: Mian: Część włożoná w 2gi handel . . . . x.
Część włożoná w 1wszy handel . . $x+5000$.
Zysk z drugiégo handlu . . . . $\frac{9}{100}x$.
Zysk z piérwszégo handlu . . . $\frac{12}{100}x+600$.

Warunek. $\frac{9}{100}x+\frac{12}{100}x+600=2280$.

Przerábianié. (Odiąwszy 600) . . $\frac{9}{100}x+\frac{12}{100}x=1680$.
(Dodáwszy ułómki) . . . . . $\frac{21}{100}x=1680$.
(Podzieliwszy przez 21) . . . $\frac{1}{100}x=80$.
(Rozmnożywszy przez 100) . . . $1x=8000$.
Reszta iak wyżéy.

Insze przykłady. Pewná osoba daie iednę summę na 8$\frac{0}{0}$, a drugą większą 4000 Zł. od piérwszéy na 6$\frac{0}{0}$. Procéntu razém z obudwóch summ má 1920 Zł.

Pewná oſoba ſtawiá mur, którégo wyſokość wſzędzie ieſt iednakowá, a grubość iednéy części, na łokieć $1\frac{1}{3}$, a drugiéy na łokieć 1 i $\frac{3}{4}$. Więcéy zaś ieſt na 24 łokcie wdłuż tego drugiégo muru, niż piérwſzégo: a biorąc tylko wyſokość na 1 łokiec; bryłowatość tego całégo muru ieſt 227 łokci kubicznych. Jakáż będzie długość muru, piérwſzéy i drugiéy ſzérokości?

80. Zadanié 15. *Kupiec pewny z kapitáłu włożonégo w jedén handel zyſkuie 13%, a z jnnégo kapitału w drugi handel włożonégo zyſkuie 9%. Więcéy zaś 8000 Zł. włożył w piérwſzy handel niż w drugi, a zyſk iego roczny z piérwſzégo handlu większy ieſt 1440 Zł. niż zyſk roczny z drugiégo handlu.*

Arytmetycznie. Gdyby tén kupiec miáł tylko 8000 Zł. i té włożył w piérwſzy handel; tedyby w nim zyſkál więcéy 1040 Zł. niż w drugim, w któryby nic nie włożył. A że różnica zyſków, w tych dwóch handlach ieſt większá 400 Zł. od różnicy mniemanéy; więc tén kupiec wchodzi i w drugi handel.

Oprócz 8000 Zł. włożonych w handel pierwſzy, na każdém ſtu złotych włożonych tak w handel piérwſzy iak i drugi zyſkuie tén kupiec więcéy 4 Zł. z piérwſzégo handlu, niż z drugiégo, a całá zyſków różnica wynoſząćá na 400 Zł. pochodzi z téy różnicy 4 Zł. tylé razy powtórzonéy, ilé ieſt ſet złotych włożonych w handel drugi. Znaydziemy więc tę liczbę ſet, dzieląc 400 przez 4: wypadnie na wieloráz 100: a zatém ſto razy 100 Zł. włożył tén kupiec w drugi handel, toieſt włożył weń Zł. 10000.

Kapitáł włożony w piérwſzy handel . .	18000 Zł.
Kapitáł włożony w drugi handel	10000.
Zyſk z piérwſzégo handlu	2340 Zł.
Zyſk z drugiégo handlu	900.
Różnica zyſków . .	1440.

Algiebr: Mian: Część maiątku w 2gim handlu . . . x.
. . . . w 1wſzym . . . . . $x + 8000$.
Zyſk na drugim handlu . . . . . $\frac{9}{100}x$.
. . . na piérwſzym . . . . $\frac{13}{100}x + 1040$.

Różnica tych zyſków . . . $\frac{4}{100}x + 1040$.

Warunek. $\frac{4}{100}x + 1040 = 1440$.

Prze-

Przerab: (Odiąwszy 1040) . . . . $\frac{4}{100} x = 400$.
(Podzieliwszy przez 4) . . $\frac{1}{100} x = 100$.
(Rozmnożywszy przez 100) $1x = 10000$.
Reszta iak wyżéy.

Insze przykłady. Pewná osoba dała iednę summę na 8$\frac{0}{0}$, a drugą większą 12000 złotémi od piérwszéy na 6$\frac{0}{0}$. Zyskuie zaś w procéncie więcéy 150 Zł. z piérwszéy summy niż z drugiéy.

Każe kto kopać rów w pewnéy długości na łokcie rachowanéy, i płaci 100 Zł. za 12 łokci roboty. Każe znowu kopać inny rów szérszy lub głębszy od piérwszégo, i płaci 100 Zł. za 8 łokci roboty, a tén drugi rów má 40 łokci wdłuż więcéy niż piérwszy: zapłacił za całą robotę około drugiégo rowu więcéy 1000 Zł. niż za całą robotę około piérwszégo rowu.

81. *Zadanié 16. Przyymuie kto sługę, i obiecuie mu na rok, albo na 12 miesięcy Cz: Zł: 36, i suknie. Po skończonych 7 miesiącach sługa się odprawuie, i odbiérá w zapłacie Cz: Zł. 16, i nad to ieszcze suknie. Tylé mu się téż w saméy rzeczy należało. Trzeba teráz dóyśdź iak wysoko mu były suknie oszacowané.*

Arytmetycznie. Za 7 miesięcy służby należało się temu słudze $\frac{7}{12}$ rocznych zasług ugodzonych, toiest 21 Cz: Zł. i $\frac{7}{12}$ taxy sukién. Więc suknie oszacowané są w 5 Cz: Zł: i nad to w $\frac{7}{12}$ całéy ich taxy: a zatém $\frac{5}{12}$ całéy téy taxy czynią 5 Cz: Zł: a $\frac{1}{12}$ téy taxy uczyni 1 Cz: Zł. Suknie więc na rok dané, oszacowané są w 12 Cz: Zł.

Algiebr: Mian: Taxa sukién . . . . . x.
Zasługi roczné . . $36 + x$.
Zasługi 7 miesięcy . $21 + \frac{7}{12} x$.

Warunek. $16 + x = 21 + \frac{7}{12} x$.

Przerábianié. (Odiąwszy 16) . . . . . . $x = 5 + \frac{7}{12} x$.
(Odiąwszy $\frac{7}{12} x$) . . . $\frac{5}{12} x = 5$.
(Podzieliwszy przez 5) $\frac{1}{12} x = 1$.
(Rozmnożywszy przez 12) $1x = 12$.

Rozwiązanié. $x = 12$. Taxa Sukiéń.
$36 + x = 48$. Zasługi roczné.
$21 + \frac{7}{12} x = 28$. Zasługi 7 miesięcy.
$16 + x = 28$. Tylé tén sługa odebrál w zasługach za 7 miesięcy.

Uwdga. Maiąc wzgląd sprawiedliwy na to, iż suknie były przez 7 miesięcy zażywané i przyszarzané, i otaxowawszy ié tylko w $\frac{5}{12}$ początkowégo szacunku; niechby tén sługa odebrál, w zasługach za 7 miesięcy 23 Cz: Zł: i suknie. Ponieważ mu się należało 21 Cz: Zł: w pieniędzach, a $\frac{7}{12}$ sukién; więc gdy mu się daie 23 Cz: Zł: otaxowano $\frac{2}{12}$, albo $\frac{1}{6}$ sukién w 2 Cz: Zł: a zatém calé suknie kosztowały z początku 12 Cz: Zł.

Inszé przykłady. Należytość sługi roczná, iest 30 Cz: Zł: i suknie. Po ośmiu miésiącach odbiérá w zasługach 17 Cz: Zł: i suknie otaxowané bez względu na to, że były zażywané.

Należytość sługi roczná iest 32 Cz: Zł: i suknie. Po 9 miesiącach odbiérá w zasługach 27 Cz: Zł. i suknie otaxowané z względém na ich przytarcié.

82. *Zadanié 17. Pewny kupiec powiększá co rok czwártą częścią swóy maiątek, wyłączywszy z niego 800 Cz: Zł: na roczny wydátek. Na końcu dwóch lát tén maiątek iego powiększył się 9000 Cz: Zł. Jakiż był maiątek iego piérwiástkowy?*

Arytmetycznie. Gdyby tén kupiec nic nie wydáwál; tedy na końcu piérwszégo roku powiększyłby $\frac{1}{4}$ częścią maiątek swóy piérwiástkowy, toiest miálby $\frac{5}{4}$ tegoż maiątku. Na końcu drugiégo roku maiątek iego byłby znowu powiększony $\frac{1}{4}$ częścią tychże $\frac{5}{4}$, toiest byłby powiększony $\frac{5}{16}$ piérwiástkowégo maiątku: a zatém na końcu drugiégo roku powiększénié maiątku tego kupca byłoby summą $\frac{1}{4}$ i $\frac{5}{16}$, toiest $\frac{9}{16}$ tegoż piérwiástkowégo maiątku.

Na tych 800 Cz: Zł. które w początku roku piérwszégo wyłączył kupiec na wydátki, byłby przez dwa lata zarobił $\frac{9}{16}$ tychże 800 Cz: Zł: toiest byłby zarobił 450 Cz: Zł: i miálby 1250 Cz: Zł: a na tych 800 Cz: Zł: które wyłączył w początku drugiégo roku także na wydátki, byłby zarobił $\frac{1}{4}$ tychże 800 Cz: Zł: toiest 200 Cz: Zł: i miálby 1000 Cz: Zł. Więc z przyczyny tego wyłączania kapitál iego zmnieyszy się 2250 Cz: Zł: na końcu lát dwóch.

Gdyby

Gdy tedy od $\frac{9}{16}$ piérwiáſtkowégo maiątku tego kupca odeymiémy 2250 Cz: Zł: zoſtanie ſię ieſzcze 9000 Cz: Zł: podług warunku: a zatém przed tém zmnieyſzéniém $\frac{9}{16}$ piérwiáſtkowégo iego maiątku czyniły więcéy 2250 Cz: złotémi; toieſt czyniły 11250 Cz: Zł. Więc $\frac{1}{16}$ tegoż maiątku czyni $\frac{1}{9}$ część Cz: Zł: 11250, toieſt Cz: Zł: 1250: a zatém cały piérwiáſtkowy maiątek był 16 razy tak wielki, toieſt wynoſił na 20000 Cz: Zł:

Algiebraicznie. Maiątek piérwiáſtkowy kupca . . x.
Maiątek po wyłączonych piérwſzy ráz 800 Cz: Zł. . . . . $x - 800$.
Zyſk piérwſzégo roku . . . . $\frac{1}{4}x - 200$.
Maiątek na końcu 1wſzégo roku . $\frac{5}{4}x - 1000$.
Maiątek po wyłączonych drugi ráz 800 czerwonych złotych . . $\frac{5}{4}x - 1800$.
Zyſk drugiégo roku . . . . . . $\frac{5}{16}x - 450$.
Maiątek na końcu drugiégo roku . $\frac{25}{16}x - 2250$.
Powiękſzénié maiątku przez 2 lata $\frac{9}{16}x - 2250$.

Warunek. $\frac{9}{16}x - 2250 = 9000$.

Przeráb: (Dodáwſzy 2250) . . . . $\frac{9}{16}x = 11250$.
(Podzieliwſzy przez 9) . . $\frac{1}{16}x = 1250$.
(Rozmnożywſzy przez 16) $1x = 20000$.

Rozwiązanié. $x = 20000$.	Maiątek piérwiáſtkowy.
$x - 800 = 19200$.	Maiątek po odiętych 1wſzy ráz 800 Cz. Zł.
$\frac{1}{4}x - 200 = 4800$.	Zyſk piérwſzégo roku.
$\frac{5}{4}x - 1000 = 24000$.	Maiątek na końcu 1go roku.
$\frac{5}{4}x - 1800 = 23200$.	Maiątek po odiętych 2gi ráz 800 Cz. Zł.
$\frac{5}{16}x - 450 = 5800$.	Zyſk drugiégo roku.
$\frac{25}{16}x - 2250 = 29000$.	Maiątek na końcu 2go roku.
$\frac{9}{16}x - 2250 = 9000$.	Powiękſzénié maiątku przez dwa lata, takié, iakié bydź powinno.

Inſzé przykłady. Pewny kupiec powiękſzá $\frac{1}{5}$ częścią przez rok ſwóy maiątek, wyłączywſzy 1250 Zł. na wydátki roczné. Na końcu 3 lát powiękſzył 3640 złotémi piérwiáſtkowy ſwóy maiątek.

Pewny

Pewny kupiec powiękſzá $\frac{2}{7}$ przez rok ſwóy maiątek, wyłączywſzy 2401 Zł. na początku każdégo roku. Po 4 latach ſkończonych maiątek iego powiękſzony zoſtáł 43680 Zł. Ileż miáł przéd 4 laty?

83. *Zadanié 18. Pewny kupiec má 5120 Cz: Zł: i wkłádá ié w handel, na którym powiękſzá corocznie ſwóy maiątek $\frac{1}{4}$ onégo częścią, wyłączywſzy na początku każdégo roku ſummę iednakową ſłużyć maiącą na wydátki. Po ſkończonych 4 latach maiątek iego powiękſzył ſię 1845 tz: złotémi. Ileż wyłączá na roczny wydátek.*

Arytmetycznie. Gdyby tén kupiec nic nie wydáwáł, tedy ponieważ w handel wkłádá, naprzód: . . . . 5120 Cz. Zł.

Zyſk iego w piérwſzym roku byłby	1280.
Maiątek na końcu piérwſzégo roku	6400.
Zyſk drugiégo roku	1600.
Maiątek na końcu drugiégo roku	8000.
Zyſk trzeciégo roku	2000.
Maiątek na końcu trzeciégo roku	10000.
Zyſk czwártégo roku	2500.
Maiątek na końcu czwártégo roku	12500.
Powiękſzénié maiątku w 4 latach byłoby . .	7380.
Aże to powiękſzénié ieſt tylko	1845.
Więc mnieyſzé ieſt, niż gdyby nic nie wydáwáł i różnica ta ieſt	5535.

To zmnieyſzénié pochodzi z wyłączania corocznégo pewnéy a iednakowéy ſummy na wydátki.

Summa którą wyłączył na początku czwártégo roku nie była w handlu tegoż roku. Gdyby zaś była, byłby ią na końcu tego czwártégo roku powiękſzył $\frac{1}{4}$ częścią: a zatém miałby $\frac{4}{4}$ i $\frac{1}{4}$ onéyże, toieſt $\frac{5}{4}$. Więc zmnieyſzénié na końcu tego roku pochodzącé z wyłączénia ſummy na wydátki tegoż roku, ieſt $\frac{5}{4}$ téyże ſummy.

Podobnie i ſumma wyłączoná na początka 3ciégo roku, zamiéniłaby ſię na końcu tego 3ciégo roku wráz z zyſkiém na $\frac{5}{4}$ téyże ſummy, a na końcu czwártégo roku byłaby $\frac{5}{4}$ tychże $\frac{5}{4}$, toieſt $\frac{25}{16}$ téyże ſummy. Więc zmnieyſzénié pochodzącé z wyłączénia ſummy na wydátki 3ciégo roku, ieſt $\frac{25}{16}$ téyże ſummy.

Tak

Tak téż i zmnieyſzénié pochodzącé z wyłączénia ſummy na wydátki drugiégo roku ieſt $\frac{5}{4}$ z $\frac{25}{16}$, czyli $\frac{125}{64}$ téyże ſummy.

Nakoniec zmnieyſzénié pochodzącé z wyłączénia ſummy na wydátki piérwſzégo roku ieſt $\frac{5}{4}$ z $\frac{125}{64}$, czyli $\frac{625}{256}$ téyże ſummy.

Zmnieyſzénié tedy całé pochodzącé z tych 4 ſumm wyłączonych naſtępnie na wydátki 4 lát, równá ſię wydátkowi rocznému tylé razy wziętému, ilé wyráżá ſumma ułómków $\frac{5}{4}$, $\frac{25}{16}$, $\frac{125}{64}$, $\frac{625}{256}$, toieſt (przywiódłſzy té ułómki do iednakowégo mianownika) równa ſię ſummie $\frac{320}{256}$, $\frac{400}{256}$, $\frac{500}{256}$, $\frac{625}{256}$, któré to ułómki dodané czynią ſummę $\frac{1845}{256}$.

Więc $\frac{1845}{256}$ rocznégo wydátku wyrównywaią 5535 Cz: Zł. którémi mniéy miál kupiec na końcu lát cztérech, niż gdyby był nic nie wyłączył na roczné wydátki: a zatém $\frac{1}{256}$ tego wydátku będzie znaczyć mniéy 1845 razy, niż 5535 Cz. Zł. toieſt będzie znaczyć 3 Cz: Zł: cały zaś roczny wydátek będzie 256 razy większy, toieſt będzie 768 Cz: Zł.

1wſzy maiątek tego kupca	5120 Cz. Zł.
Wyłączywſzy w 1ſzym roku 768 Cz: Zł: .	4352.
Zyſk 1wſzégo roku	1088.
Maiątek na końcu piérwſzégo roku	5440.
Wyłączywſzy tyléż co wyżéy	4672.
Zyſk 2go roku	1168.
Maiątek na końcu 2go roku	5840.
Wyłączywſzy tyléż co wyżéy	5072.
Zyſk 3go roku	1268.
Maiątek na końcu 3go roku	6340.
Wyłączywſzy tyléż co wyżéy	5572.
Zyſk 4go roku	1393.
Maiątek na końcu 4go roku	6965.
Maiątek na początku 1wſzégo roku . . .	5120.
Różnica, czyli powiękſzénié tego maiątku . .	1845.

Algiebr: Mian:	Wydátek roczny	x.
	Maiątek zmnieyſzony przez x	$5120 - x$.
	Zyſk piérwſzégo roku	$1280 - \frac{1}{4}x$.
	Maiątek na końcu 1wſzégo roku	$6400 - \frac{5}{4}x$.
	Maiątek tén zmnieyſzony przez x . . .	$6400 - \frac{9}{4}x$.
	Zyſk 2giégo roku	$1600 - \frac{9}{16}x$.

Maiątek na końcu 2giégo roku	$8000 - \frac{45}{16}x$.
Maiątek tén zmnieyszony przez x . . .	$8000 - \frac{61}{16}x$.
Zysk 3ciégo roku	$2000 - \frac{61}{64}x$.
Maiątek na końcu 3ciégo roku	$10000 - \frac{305}{64}x$.
Maiątek tén zmnieyszony przez x . . .	$10000 - \frac{369}{64}x$.
Zysk 4tégo roku	$2500 - \frac{369}{256}x$.
Maiątek na końcu 4tégo roku	$12500 - \frac{1845}{256}x$.
Powiększénié całé maiątku	$7380 - \frac{1845}{256}x$.

Warunek. $7380 - \frac{1845}{256}x = 1845$.

Przerób: (Dodáwszy $\frac{1845}{256}x$) . . . . . $7380 = 1845 + \frac{1845}{256}x$.
(Odiąwszy 1845) . . . . . . $5535 = \frac{1845}{256}x$.
(Podzieliwszy przez 1845) . . . $3 = \frac{1}{256}x$.
(Rozmnożywszy przez 256) . $768 = 1x$.
Reszta iak wyżéy.

Uwága. Do rozwiązania podobnych Zadáń trzeba przyspośábiać Uczniów przez przykłady prościeysze, w któréby mnieyszá liczba lát wchodziła.

Przykłady. Pewny kupiec má 30000 Zł. i powiększá ié co rok $\frac{1}{5}$ częścią, wyłączywszy na początku każdégo roku pewną i iednakową summę na wydátki. Po skończonych 2 latach maiątek iego powiększył się 1650 Zł.

Zachowuie kto sobie summę pewną na wydátki iednégo roku wystárczaiącą: daie zaś 16400 Zł. na procént 5$\frac{0}{0}$ maiąc w myśli co rok iednakową summę wydáwać, i tę potém wyłączá na początku drugiégo i trzeciégo roku. Drugi ráz taką summę wyłączywszy, nic mu się nie zostaie. Jakżż iest ta summa?

Inná osoba wyłączywszy na roczné wydátki pewną summę, daie 25220 Zł. na procént 5$\frac{0}{0}$. Wyłączá potém taką summę iako i piérwéy na początku każdégo roku, i po skończonych 4 latach, nic się iéy nie zostaie.

Inná znowu osoba podobnie sobie postępuiąc, daie 689620 Zł. na procént 5$\frac{0}{0}$, i po skończonych 5 latach nic się iéy nie zostaie.

84. *Zadanié 19. Pewny kupiec powiększá $\frac{1}{3}$ częścią corocznie swóy maiątek, wyłączaiąc 2700 Zł. na wydátki każdégo roku. Na końcu 3 lát mieć będzie dwa razy tylé, ilé miáł na początku.*

Arytmetycznie. Gdyby tén kupiec nic na wydátki nie wyłączał; tedy na końcu piérwszégo roku maiątek iego byłby powiększony trzecią częścią;

i z tém

i z tém powiękſzéniém miálby $\frac{4}{3}$ piérwſzégo maiątku. Na końcu drugiégo roku powiękſzyłby znowu $\frac{1}{3}$ częścią té $\frac{4}{3}$, i miálby $\frac{4}{3}$ tych $\frac{4}{3}$, to ieſt miálby $\frac{16}{9}$ piérwſzégo maiątku. Na końcu trzeciégo roku miálby $\frac{4}{3}$ tych $\frac{16}{9}$, toieſt miálby $\frac{64}{27}$ piérwſzégo maiątku. Ale że na końcu trzeciégo roku má tylko tylé dwoie piérwſzégo maiątku, toieſt $\frac{54}{27}$; więc má mniéy $\frac{10}{27}$. A to zmnieyſzénié ſląd pochodzi, że co rok wyłączá pewną i iednakową ſummę na wydátki.

Té 2700 Zł. które kupiec wyłączá na początku trzeciégo roku byłyby mu przyniosły za rok zyſk 900 Zł: więc przez ich wyłączénié kapitál iego zmnieyſzá ſię 3600 Zł. na końcu tego trzeciégo roku.

Podobnie ſumma wyłączoná na początku drugiégo roku nie była w handlu przez 2 lata, a zmnieyſzénié ſtąd pochodzącé ieſt $\frac{16}{9}$ teyżé ſummy, toieſt 4800 Zł.

Summa znowu wyłączoná na początku piérwſzégo roku nie była w handlu przez 3 lata, a zmnieyſzénié ſtąd pochodzącé ieſt $\frac{64}{27}$ téyżé ſummy, toieſt 6400 Zł.

Więc zmnieyſzénié pochodzącé z tych trzech wyłączéń ieſt ſumma 3600, 4800, 6400, toieſt 14800 Zł.

Więc $\frac{10}{27}$ piérwſzégo maiątku czynią 14800 Zł. a zatém $\frac{1}{27}$ tego maiątku czyni . . . . 1480 Zł.

Cały zaś piérwſzy maiątek będzie 27 razy tak wielki, toieſt będzie . . . . 39960 Zł.

Wyłączywſzy 2700 Zł.	37260.
Zyſk piérwſzégo roku	12420.
Maiątek na końcu 1go roku	49680.
Wyłączywſzy 2700 Zł.	46980.
Zyſk 2go roku	15660.
Maiątek na końcu drugiégo roku . . .	62640.
Wyłączywſzy 2700 Zł.	59940.
Zyſk 3go roku	19980.
Maiątek na końcu 3go roku	79920.

Który to oſtatni maiątek ieſt 2 razy tak wielki, iak piérwſzy.

Algiebr: Mian: Piérwſzy maiątek . . . . x.
Po piérwſzém wyłączéniu . . . . . $x - 2700$.
Zyſk 1go roku . . . . $\frac{1}{3}x - 900$.

 Maią-

Maiątek na końcu 1wszégo roku	$\frac{4}{3}x - 3600.$
Po drugiém wyłączéniu	$\frac{4}{3}x - 6300.$
Zysk 2go roku	$\frac{4}{9}x - 2100.$
Maiątek na końcu 2go roku	$\frac{16}{9}x - 8400.$
Po trzeciém wyłączéniu	$\frac{16}{9}x - 11100.$
Zysk 3go roku	$\frac{16}{27}x - 3700.$
Maiątek na końcu 3go roku	$\frac{64}{27}x - 14800.$

Warunek. $\frac{64}{27}x - 14800 = 2x.$

Przerábianié. (Dodáwszy 14800) $\frac{64}{27}x = 2x + 14800.$

$\left\{\begin{array}{l}\text{Obróciwszy } 2x \text{ na ułomek z je-}\\ \text{dnakowym piérwszému mianowni-}\\ \text{kiém.}\end{array}\right\} \frac{64}{27}x = \frac{54}{27}x + 14800.$

(Odiąwszy $\frac{54}{27}x$) . . . . . $\frac{10}{27}x = 14800.$
(Podzieliwszy przez 10) . . $\frac{1}{27}x = 1480.$
(Rozmnożywszy przez 27) . . $x = 39960.$

Reszta iak wyżéy w Arytmetycznéni postępowaniu.

Uwága. Oznaczywszy z początku zaráz maiątek piérwszy tego kupca przez liczbę, którą 27 zupełnie dzieli *np.* przez $27x$, uchronilibyśmy się byli wyrazów ułómkowych w mianowaniu. Tę uwágę przystósować należy, i do inszych podobnych Zadáń.

Inszé przykłady. Pewny kupiec powiększá $\frac{1}{4}$ częścią corocznie swóy maiątek, wyłączywszy 28928 Zł. na początku każdégo roku. Po skończonych 4 latach podwoił swóy piérwszy maiątek.

Pewná osoba wyłączá 131000 co rok z maiątku swégo, zyskuie zaś z reszty na końcu każdégo roku po $10\frac{0}{0}$. Po skończonych trzech latach maiątek piérwszy powiększył się $\frac{1}{5}$ częścią.

85. *Zadanié 20. Pewny chłopek przedáł przez 3 targi, pewną liczbę korcy zboża. Na piérwszym targu przedáł połowę tego zboża, i nad to pół korca: na drugim targu przedáł połowę reszty zboża, i nad to znowu pół korca: na trzecim targu przedáł połowę téy ostatniéy reszty i nad to pół korca, i wszystko wyprzedáł. Iléż miáł do przedania korcy zboża?*

Arytmetycznie. Ponieważ tén chłopek na trzecim targu przedáwszy połowę resztuiącégo zboża, i nad to pół korca, wszystko wyprzedał; więc té pół korca było drugą połową resztuiącégo zboża: a zatém na trzecim targu miáł korzec 1 do przedania.

Tén korzec 1 i pół korca przedané na drugim targu, czyniły razém połowę tego zboża, któré miáł na drugim targu: więc na drugim targu miáł 3 korce do przedania.

Té trzy korce i pół korca przedané na piérwszym targu, czyniły razém połowę zboża, którą miáł na piérwszym targu: więc na piérwszym targu miáł 7 korcy do przedania.

Piérwszá liczba korcy do przedania . . . . 7. korcy.
Gdyby był przedál połowę, zostałoby się . . . . $3\frac{1}{2}$.
Ale że nad to przedál $\frac{1}{2}$ korca, więc zostało . . . . . 3.
Gdyby był na drugim targu przedál połowę, zostałoby się $1\frac{1}{2}$.
Ale że nad to przedál $\frac{1}{2}$ korca; więc się zostało . . . . 1.
Gdyby był na 3cim targu przedál połowę, zostałoby się - $\frac{1}{2}$.
Ale że przedál $\frac{1}{2}$ korca nad to; więc się zostało . . . 0.

Algiebr: Piérwszá liczba korcy . . . . x.
Gdyby był przedál połowę, zostałoby się . . . . . $\frac{1}{2}x$.
Że przedál nad to pół korca; więc się zostaie . . . $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.
Gdyby był na drugim targu przedál połowę, zostałoby się $\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$.
Że przedál nad to pół korca; więc się zostaie . . . $\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}$.
Gdyby był na 3cim targu przedál połowę, zostałoby się $\frac{1}{8}x - \frac{3}{8}$.
Że przedál nad to pół korca; więc się zostaie . . . $\frac{1}{8}x - \frac{7}{8}$.

Warunek. $\frac{1}{8}x - \frac{7}{8} = 0$.

Przeráb: (Dodáwszy $\frac{7}{8}$ po obu stronach) $\frac{1}{8}x = \frac{7}{8}$.
(Rozmnożywszy przez 8) . . . $1x = 7$.
Reszta rozwiązania iak wyżéy.

Insze przykłady. Liczba targów iest 4, 5, 6, 7, *i t. d.*
Liczba korcy po ostatnim targu pozostałych . . . . 1, 3, 7, 15, *i t. d.*

Niechby znowu na każdym targu nad $\frac{2}{3}$ *liczby korcy przedano* $\frac{2}{3}$ *korca, niechby zaś liczba targów była* . . . . 3, 4, 5, 6, 7, *i t. d.*
a liczba korcy po ostatnim targu pozostałych . . . 0, 2, 8, 26, 80. *i t. d.*

Nakoniec niechby nad $\frac{3}{4}$ liczby korcy przedano nąd to na każdym targu $\frac{3}{4}$ korca, a niech liczba korcy pozoſtałych, po oſtatnim targu będzie iedna z tych . . . 0, 3, 15, 63, i t. d.

86. *Zadanié 21. Pewny oyciec dzieli maiątek pomiędzy dzieci ſwoié, w ſpoſób naſtępuiący: náyſtarſzému wyznácza 1000 Cz: Zł: i $\frac{1}{5}$ część reſztuiącégo maiątku. Drugiému wyznácza 2000 Cz: Zł: i $\frac{1}{5}$ część pozoſtałégo ieſzcze bez rozrządzénia maiątku. Trzeciému wyznácza 3000 Cz: Zł: i $\frac{1}{5}$ część reſzty i t. d. powiękſzaiąc zawſze 1000 Cz: Zł: część piérwſzą, maiącą ſię doſtać co ráz młodſzému dziécięciu.*

Tén maiątek równié był tym ſpoſobém między wſzyſtkié dzieci podzielony. Jakiż był? ilé ſię na iedno dziécię doſtało? i ilé było dzieci?

Arytmetycznie. Gdyby oſtatnié dziécię, prócz piérwſzéy części podziálu na nié przypádaiącégo brało nad to i część drugą; tedyby zoſtało ſię ieſzcze $\frac{4}{5}$ téy drugiéy części do dzielénia; a zatém calé dziedzictwo oyca nie byłoby podzieloné. Sama tedy część piérwſzá maiątku doſtaie ſię oſtatniému dziécięciu w podziele. A ta część zamykać w ſobie będzie tylé razy 1000 Cz: Zł: ilé ich oznaczy liczba, oſtatnié dziécię w porządku ſtarſzéńſtwa wyrážaiącá toieſt, będzie ta część tylé razy zawiérała 1000 Czerw: Złotych, ilé ieſt dzieci.

Piérwſzá część maiątku przypádaiącá na dziécię przedoſtatnié zamknie w ſobie 1000 Cz: Zł: tylé razy, ilé ieſt dzieci mniéy iednym, a wráz z drugą częścią zamknie tylé razy 1000 Cz: Zł: ilé ieſt dzieci: a zatém drugá część doſtaiącá ſię przedoſtatniému dziecięciu będzie 1000 Cz: Zł.

Té 1000 Cz: Zł: któré czynią drugą część maiątku doſtaiącégo ſię przedoſtatniému dziécięciu ſą $\frac{1}{5}$ częścią pozoſtałégo po podzielé poprzedzaiących dzieci maiątku oyca: a zatém to, co ſię oſtatniému dziécięciu doſtało, ieſt $\frac{4}{5}$ tegoż maiątku pozoſtałégo. A ponieważ $\frac{1}{5}$ czyni 1000 Czerw: Złot: więc $\frac{4}{5}$ uczynią 4 razy tylé, toieſt 4000 Cz: Zł. Liczba tedy dzieci ieſt 4. Dziáł na każdé dziécię przypádaiący 4000 Czerw: Zł: a cały maiątek oyca 16000 Cz: Zł.

Cały maiątek oyca	16000 Cz: Zł.
Piérwſzá część działu náyſtarſzégo dziécięcia . .	1000.
Zoſtaie ſię	15000.
Drugá część przypádaiącá na toż dziécię . . .	3000.
Zoſtaie ſię	12000.

Piérwſzá

Piérwſzá część 2go dziécięcia	2000.	Cz: Zł:
Zoſtaie ſię	10000.	
Drugá część tegoż	2000.	
Zoſtaie ſię	8000.	
Piérwſzá część 3go dziécięcia	3000.	
Zoſtaie ſię	5000.	
Drugá część tegoż	1000.	
Zoſtaie ſię	4000.	
Piérwſzá część 4go dziécięcia	4000.	
Drugá część tegoż	0.	

Części więc przypádaiącé na té dzieci ſą

Na piérwſzé 1000 i 3000 Cz: Zł: toieſt . .	4000.	Cz: Zł:
Na drugié 2000 i 2000 Cz: Zł: toieſt . .	4000.	
Na trzecié 3000 i 1000 Cz: Zł: toieſt . .	4000.	
Na czwárté 4000 i 0 Cz: Zł: toieſt. . . .	4000.	

Algiebr: Mian: *Cały maiątek oyca* . . . . x.

Ténże po wzięciu 1wſzéy części działu przez 1wſzé dziécię . . . . $x - 1000$.

Drugá część tegoż dziécięcia . . . . $\frac{1}{5}x - 200$.

Dział cały piérwſzégo dziécięcia . . . . . $\frac{1}{5}x + 800$.

Reſzta maiątku oyca . . . . $\frac{4}{5}x - 800$.

Po wzięciu 1wſzéy części działu przez 2gié dziécię $\frac{4}{5}x - 2800$.

Drugá część drugiégo dziécięcia . . . . . . $\frac{4}{25}x - 560$.

Dział cały 2go dziécięcia . . . . $\frac{4}{25}x + 1440$.

Ponieważ zaś wſzyſtkié dzieci maią bydź równo podzielone; więc w ſzczególności tylé ſię doſtaie piérwſzému, ilé i drugiému, a zatém:

Warunek $\frac{1}{5}x + 800 = \frac{4}{25}x + 1440$.

Przeráb: (Odiąwſzy 800) . . . . $\frac{1}{5}x = \frac{4}{25}x + 640$.

(Przywiódłſzy ułómki do jednakowégo mianownika $\frac{5}{25}x = \frac{3}{25}x + 640$.

(Odiąwſzy $\frac{4}{25}x$) . . . $\frac{1}{25}x = 640$.

(Roznnożywſzy przez 25) $1x = 16000$.

Reſzta iak wyżéy w poſtępowaniu Arytmetycznéni.

Inſzé

Inszé przykłady. Piérwszé części działu przypadaiącégo na dzieci rosną iak liczby 1000, 2000, 3000, i t. d. Drugié części są $\frac{1}{6}$, albo $\frac{1}{7}$, albo $\frac{1}{8}$ i t. d. reszty pozostałéy maiątku oyca.

Niech znowu piérwszé części tego działu rosną iak liczby 1000, 3000, 5000, toiest niech ta piérwszá część następnégo każdégo dziécięcia będzie 2000, np. Zł: większá niż poprzedzaiącégo: drugié zaś części niech będą $\frac{2}{7}$, albo $\frac{2}{9}$, albo $\frac{2}{11}$ i t. d. reszt pozostałych. Albo ieszcze niech piérwszé części działu iak 1000, 4000, 7000 i t. d. toiest niech ta piérwszá część działu każdégo następnégo dziécięcia będzie 3000 np. Zł. większá niż poprzedzaiącégo, a drugié części niech będą $\frac{3}{13}$, $\frac{3}{16}$, $\frac{3}{19}$, i t. d. reszt pozostałych.

87. *Zadanié 22. Szérokość pewnégo prostokąta iest $\frac{2}{3}$ długości tegoż prostokąta. Gdy zaś do każdégo boku dodámy po 1 stopie, powierzchniá tego prostokąta powiększy się 21 stopami kwadratowémi.*

Fig. 19. Niech ABCD, będzie prostokąt, którégo szukámy, a którégo szérokość BC, iest $\frac{2}{3}$ długości AB, albo DC. Niech ieszcze będzie takim tén prostokąt, aby dodáwszy do każdégo z boków iego długość iednakową BE, DF, oznáczaiącą 1 stopę, zrobił się inny prostokąt AEGF, którégo powiérzchniá większáby była 21 stop. kw. od powiérzchni tego 1go prostokąta.

Powiększéniém powiérzchni szukanégo prostokąta iest Węgielnica (Norma) BEGFDC, którą można podzielić na dwa prostokąty BI, DH, i na kwadrát CG. Tén kwadrát má 1 stopę kwadratową: więc dwa prostokąty BI, DH, mieć powinny obadwa razém 20 stóp kw. Ponieważ zaś szérokość ich iest 1 stopa, a długość piérwszégo BI, iest $\frac{2}{3}$ długości drugiégo DH; więc piérwszy może bydź podzielony na 2, a drigi na 3 prostokąty mnieyszé iednakowéy długości i szérokości: więc 5 tych równych prostokątów powiérzchniá zawiérać będzie 20 stóp kw: a zatém iedén z nich má w powiérzchni $\frac{1}{5}$ część 20 stóp kw. toiest 4 stopy kwadr. Ze zaś szérokość każdégo z nich iest na 1 stopę; więc długość każdégo z nich będzie na 4 stopy. Piérwszy tedy prostokąt BI, zawiéraiący w sobie 2 takié prostokąciki má 8 stóp kwadr. toiest 1 stopę szérokości, a 8 długości; a drugi DH, zawieraiący w sobie 3 takiéż prostokąciki má 12 stóp kw. toiest 1 stopę szérokości, a 12 długości. A że prostokąt szukany má za szérokość, długość piérwszégo z tych prostokącików, a za długość, długość 2go z tych prostokącików; więc szérokość iego będzie 8 stóp, a długość 12 stóp.

Széro-

Szérokość prostokąta szukanégo . . .	8 stóp. kw.
Długość	12.
Powiérzchniá	96.
Szérokość 2go prostokąta	9.
Długość	13.
Powiérzchniá	117 stóp kw.
Różnica w powiérzchniach	21 stóp kw.

Algiebr: Mian: Długość szukanégo prostokąta . . x.
Szérokość . . . . $\frac{2}{3}x$.
Powiérzchniá . . . . . . $\frac{2}{3}xx$.
Długość 2go prostokąta . . . $x+1$.
Szérokość . . . . $\frac{2}{3}x+1$.
Powiérzchniá . . . . . . $\frac{2}{3}xx+\frac{5}{3}x+1$.
Różnica w powiérzchniach . $\frac{5}{3}x+1$.

Warunek. $\frac{5}{3}x+1=21$.

Przerab: (Odiąwszy 1) . . . . . . $\frac{5}{3}x=20$.
(Podzieliwszy przez 5) . $\frac{1}{3}x=4$.
(Rozmnożywszy przez 3) $1x=12$.
Reszta rozwiązania iak wyżéy.

Uwága. Oznáczywszy szérokość piérwszégo prostokąta przez $2x$, długość przez $3x$, można było uchronić się ułómków.

Inszé przykłady. Szérokość prostokąta iest $\frac{3}{4}$ długości iego: przydáwszy zaś 1 stopę do téy długości, a 2 stopy do szérokości; powiérzchniá tego prostokąta powiększy się 35 stop kw.

Szérokość prostokąta iest $\frac{2}{5}$ iego długości: przydáwszy zaś iednę stopę do téy szérokości, a odiąwszy 2 stopy od długości; powiérzchniá iego powiększy się 31 stop. kw.

Szérokość prostokąta iest $\frac{3}{5}$ iego długości: uiąwszy zaś 2 stopy téy szérokości, a przydáwszy 1 stopę długości, powiérzchniá iego zmnieyszy się 37 stóp kw.

Szérokość prostokąta iest $\frac{4}{7}$ iego długości: odiąwszy zaś po 1 stopie od każdégo boku, powiérzchniá zmnieyszoná będzie 32 stop. kw.

88. *Zadanié 23. Osoba A, dała osobie B, połowę tylé, ilé iuż miała osoba B. Osoba znowu B, dała wzaiémnie Osobie A, połowę tylé, ilé się u A, zostało. Gdy té osoby dwa razy ieszcze podobné zamiany powtórzyły, znalazło się tak u A, iak i u B, po Zł. 729.*

Arytmetycznie. Za każdą razą takiéy zamiany maiątek tak Osoby A, iak i B, powiększa się połową tego, ilé się znayduie u A, lub u B; to iest staie się tén maiątek $\frac{3}{2}$ siebie samégo, albo co na iedno wychodzi, powiększénié tego maiątku iest trzecią częścią tegoż maiątku wráz z powiększéniém.

Zatém idzie, iż, ponieważ A, má na końcu 729 Zł. wziąwszy od B, trzecią część tych 729 Zł. toiest 243; więc przed tym wziątkiém było tylko u A, Zł. 486. Ze zaś B, także má na końcu 729 Zł. dáwszy dlá A, Zł. 243; więc przed tym dátkiém było u B, 972 Zł. B, má 972, wziąwszy od A trzecią część toiest 324: więc przed tym wziątkiém było u B, tylko 648. Że zaś u A, po tym dátku 324 Zł. zostaie 486; więc przed tym było 810.

Tymże sposobém można doyśdź stanu poprzedzaiącégo maiątków tych osób, aż się naostatek dóydzie do piérwiástkowégo ich maiątku. Co następuiącá táblica przed oczy wystawia dostatecznie.

Maiątek . . . A.			Maiątek . . . . B.		
Na końcu		729 Zł.	Na końcu		729 Zł.
Przed wziątkiém	243 . .	486.	Przed dátkiem . .	243 . .	972.
Przed dátkiém . .	324 . .	810.	Przed wziątkiém	324 . .	648.
Przed wziątkiém	270 . .	540.	Przed dátkiém . .	270 . .	918.
Przed dátkiém . .	306 . .	846.	Przed wziątkiém	306 . .	612.
Przed wziątkiém	282 . .	564.	Przed datkiém . .	282 . .	894.
Przed dátkiém . .	298 . .	862.	Przed wziątkiém	298 . .	596.

Osoba A, miała więc na początku złotych . . . . . . 862.

Osoba B, miała na początku złotych . . . . . . 596.

Algiebraicznie. Mianowanié, Maiątek piérwszy B. . . . . x.
Maiątek piérwszy A. . $1458 - x$.

B, odebráwszy $\frac{1}{2} x$ má . . . . $\frac{3}{2} x$.
A, dáwszy $\frac{1}{2} x$ má . . . . . . $1458 - \frac{3}{2} x$.
B, dáwszy $729 - \frac{3}{4} x$, má . . . . $\frac{9}{4} x - 729$.

A, ode-

A, odebráwszy $729 - \frac{3}{4}x$, má . $2187 - \frac{9}{4}x$.
B, odebráwszy $\frac{9}{8}x - 364\frac{1}{2}$, má $\frac{27}{8}x - 1093\frac{1}{2}$.
A, dáwszy $\frac{9}{8}x - 364\frac{1}{2}$ má . . $2551\frac{1}{2} - \frac{27}{8}x$.
B, dáwszy $1275\frac{3}{4} - \frac{27}{16}x$, má . $\frac{81}{16}x - 2369\frac{1}{4}$.
A, odebráwszy $1275\frac{3}{4} - \frac{27}{16}x$, má $3827\frac{1}{4} - \frac{81}{16}x$.
B, odebráwszy $\frac{81}{32}x - 1184\frac{5}{8}$, má $\frac{243}{32}x - 3553\frac{7}{8}$.
A, dáwszy $\frac{81}{32}x - 1184\frac{5}{8}$, má . . $5011\frac{7}{8} - \frac{243}{32}x$.
B, dáwszy $2505\frac{15}{16} - \frac{243}{64}x$, má $\frac{729}{64}x - 6059\frac{13}{16}$.

Warunek. $\frac{729}{64}x - 6059\frac{13}{16} = 729$.

Przerábianié. (Dodáwszy $6059\frac{13}{16}$) $\frac{729}{64}x = 6788\frac{13}{16}$.
(Obróciwszy na ułómek drugą stronę)
$\frac{729}{64}x = \frac{108621}{16}$.
(Podzieliwszy obie strony przez 729.
$\frac{1}{64}x = \frac{149}{16}$.
(Rozmnożywszy wyrazy drugiégo ułómka przez 4)
$\frac{1}{64}x = \frac{596}{64}$.
(Rozmnożywszy przez 64) $1x = 596$.

Maiątek 1wszy B . . . . . 596.
Maiątek 1wszy A . . . . . 862.
B, wziąwszy 298, má . . . . . . 894.
A, dáwszy 298, má . . . . 564.
B, dáwszy 282, má . . . . 612.
A, wziąwszy 282, má . . . . . . 846.
B, wziąwszy 306, má . . . . . . 918.
A, dáwszy 306, má . . . . . . 540.
B, dáwszy 270, má . . . . . . 648.
A, wziąwszy 270, má . . . . . . 810.
B, wziąwszy 324, má . . . . . . 972.
A, dáwszy 324, má . . . . 486.
B, dáwszy 243, má . . . . 729.
A, wziąwszy 243, má . . . . . . 729.

Inszé przykłady. Każdá z tych dwóch osób daie iedna drugiéy trzecią część tego co tamta iuż má, i czyniąc to wzaiémnie po dwa lub trzy razy; będzie mieć na końcu tak iedna iak i drugá, w piérwszym razie po Zł. 256, w drugim po Zł. 4096.

 Niechby

Niechby znowu dáwały ſobie po czwártéy częśći podobnie iak wyżéy, i niechby to po dwa lub trzy razy czyniły, a na końcu miały po Zł. 625 w piérwſzym razie, a w drugim zaś po Zł. 15625.

89. *Zadanié 24. Maiątek oſoby A, zawiérá w ſobie maiątek oſoby B, tylé razy, ilé i maiątek Oſoby B, zawiérá w ſobie maiątek Oſoby A: z tém wſzyſtkiém B, má więcéy 2 Zł. niż A.*

Uwága. Wyrażénié dzieléńia maiątku A, przez maiątek B, może bydź oznaczoné przez ułómek, któręgoby licznikiém był piérwſzy maiątek, á mianownikiém drugi. Toż mówić i o wyrażéniu maiątku B, podzieloné-go przez maiątek A.

Algiebr: Mian: Maiątek A . . . . x.
Maiątek B . . . . $x+2$.
Wyrażénié maiątku B, podzieloné-go przez maiątek A . . . . . $\dfrac{x+2}{x}$
Wyrażénié maiątku A, podzieloné-go przez maiątek B . . . . . $\dfrac{x}{x+2}$.

Warunek. $\dfrac{x+2}{x} = \dfrac{x}{x+2}$.

Przeráb: (Przywiódłſzy obadwa ułómki, do iednakowégo miano-wnika) $\dfrac{xx+4x+4}{xx+2x} = \dfrac{xx}{xx+2x}$.

(Rozmnożywſzy obie ſtrony przez $xx+2x$, albo co na iedno wychodzi, oznáczywſzy równość dwóch liczników, których mianowniki ſą iednakowé)

$$xx+4x+4 = xx.$$

(Odiąwſzy xx) . . . . $4x+4=0$.
(Odiąwſzy 4) . . . . $4x=-4$.
(Podzieliwſzy przez 4) . . . $1x=-1$.

Rozwią-

Rozwiązanié. $x = -1$. Maiątek ofoby A, która w famey rzeczy winna 1 Zł.

$x + 2 = +1$. Maiątek iftotny Ofoby B.

$\frac{x+2}{x} = \frac{+1}{-1} = -1$. Wieloráz z maiątku B, podzielonégo przez maiątek A.

$\frac{x}{x+2} = \frac{-1}{+1} = -1$. Wieloráz z maiątku A, podzielonégo przez maiątek B.

Uwága. Wyrażénié to $\frac{+1}{-1}$ wzięlismy za równé tému -1. Jakoż liczba dzieląca przez wieloráz rozmnożona, równa fię zawfze liczbie podzielnéy: a zatém wieloráz taki tu bydź powinién, aby rozmnożywfzy go przez -1 wypadło $+1$. A że tylko -1 ieft takim wielorazém, który przez $+1$ rozmnożywfzy wypadnie -1; więc wieloráz tén ieft -1. Podobnie możnaby dowieśdź, że wyrażénié to $\frac{-1}{-1}$ równa fię tému $+1$. Skąd można tę regułę dziélenia uftanowić względém znaków: że gdy dwa wyrazy maią przed fobą znak iednakowy; tedy wieloráz ieft *przydayny*, gdy zaś dwa wyrazy maią znaki odmiénné, wtedy wieloráz ieft *uiémny*. I tak:

$\frac{+4}{+2} = +2$; $\frac{-4}{-2} = +2$; $\frac{+4}{-2} = -2$; $\frac{-4}{+2} = -2$.

Infzé przykłady. Niech będzie takié iak wyżéy zadanié ztą różnicą, że B, má więcéy 2000, albo 4000, albo 6000 i t. d. Zł. niż A.

ROZDZIÁŁ III.

Zagadniénia, w któré więcéy wchodzi, niż iedén wyráz niewiadomy.

W przykładach Rozdziałów poprzedzaiących iednégo tylko używaliśmy wyrazu niewiadomégo, lubo kilku częstokroć ilości nám nie znanych szukaliśmy. Té przykłady tak były zawsze dobiérané, że używszy w mianowaniu warunków iednégo tylko znaku wystawuiącégo ilość niewiadomą, i téy ilości doszedłszy, iuż tém samém doyśdź łatwo mogliśmy i innych ilości niewiadomych iako zawisłych od piérwszéy.

Roztrząsnąwszy dobrze Zadanié, i zważywszy podané warunki, można obeyśdź się często w mianowaniu, iednym tylko znakiém ilości niewiadoméy: ale w wielu okolicznościach, chcąc na iednym przestać znaku, stałby się ieszcze zawilszym sposób postępowania, albo dlá wyrazów ułómkowych, albo dlá ilości uiémnych, których ustrzédz się można, wprowadziwszy w mianowanié więcéy niż iedén znak niewiadomy.

To pomnożénié znaków ilości niewiadomych nie powinno powiększyć ucznióm trudności, gdy iuż przez tylé poprzedzaiących przykładów wprawili się w działania z iednym takowym znakiém. Idąc za powszechnym zwyczaiém, używać będziémy ostatnich abecadła liter, iak *np.* x, y, z, do wyrażénia ilości niewiadomych.

90. *Zadanié I.*

3 łokcie sukna i 5 łokci materyi kosztowało . . . *83 Zł.*
3 łokcie tegoż sukna i 7 łokci téyże materyi kosztowało 97.

Ileż kosztował każdy łokieć sukna i każdy łokieć materyi?

Arytmetycznie. W drugim razie tylé kupiło się sukna łokci co i w piérwszym, ale materyi kupiło się 2 łokcie więcéy niż w piérwszym, i dało się téż drugim razém więcéy 14 Zł niż piérwszym: więc té dwa łokcie materyi kosztowały Zł. 14, a zatém 1 łokieć kosztował Zł. 7.

Za 5 tedy łokci materyi przypadnie zł. 35: a że té 5 łokci materyi wráz z trzéma łokciami sukna kosztowały Zł. 83; więc 3 łokcie sukna kosztowały 83 Zł. mniéy 35 złotémi, toiest kosztowały 48 Zł: a zatém 1 łokieć sukna kosztowál 16 Zł.

Cena 1go łokcia sukna	16 Zł.
Cena 1go łokcia materyi	7.
Cena 3ch łokci sukna	48.
Cena 5 łokci materyi	35.
Summa	83.

Cena trzech łokci sukna	48 Zł.
Cena 7 łokci materyi	49.
Summa	97 Zł.

Algiebraicznie.

Cena 1go łokcia sukna	x.
Cena 3ch łokci	$3x$.
Cena 1go łokcia materyi . . .	y.
Cena 5ciu łokci	$5y$.
Cena 7miu łokci	$7y$.

Warunek. $\begin{cases} 3x + 7y = 97. \\ 3x + 5y = 83. \end{cases}$

Przerábianié. (Od każdéy strony piérwszégo równania odiąwszy odpowiadaiącą stronę drugiégo równania) $2y = 14$.
(Podzieliwszy przez 2) . . . . $1y = 7$

Położywszy tę ważność y, w którémkolwiek z piérwszych dwóch równáń, *np.* w piérwszém będzie: $3x + 49 = 97$.
(Odiąwszy 49) . . . . $3x = 48$.
(Podzieliwszy przez 3) $1x = 16$.

Cena 1go łokcia sukna . . . . 16 Zł.
Cena 1go łokcia materyi . . . 7. Tak iak téż znaleźliśmy, postępuiąc Arytmetycznie.

Można także to Zadanié rozwiązać, używaiąc tylko iednégo znaku niewiadomégo.

Cena

Cena 1go łokcia materyi . . . . . y.
Cena 7miu łokci . . . . $7y$.
Cena 5ciu łokci . . . . $5y$.
Cena 3ch łokci ſukna . . $97 - 7y$.
albo . . . . . $83 - 5y$.

Warunek. $83 - 5y = 97 - 7y$.

(Dodáwſzy $7y$) . . . $83 + 2y = 97$.
(Odiąwſzy 87) . . . . . . $2y = 14$.
(Podzieliwſzy przez 2) . . . $1y = 7$.

$97 - 7y = 97 - 49 = 48$. Céna 3ch łokci ſukna.

$\frac{97 - 7y}{3} = \frac{48}{3} = 16$. Cena 1go łokcia ſukna iak wyżéy.

Inſzé przykłady. Kupuie kto pewną liczbę łokci ſukna po 15 Zł. i pewną liczbę łokci materyi po 8 Zł. Inną razą kupuie znowu pewną liczbę łokci ſukna, po téyże co wyżéy cenie, i pewną liczbę łokci materyi po Zł. 6. Piérwſzą razą należało ſię za wſzyſtko Zł. 147, a drugą razą Zł. 129. Iléż było łokci ſukna i materyi w piérwſzym i drugim razie?

Arytmetycznie. Piérwſzą razą zapłaciło ſię więcéy 2 Zł. tylé razy, ilé było łokci materyi. A że ſię zapłaciło piérwſzą razą więcéy 18 Zł. niż drugą; więc 2 Zł. wzięté tylé razy, ilé było łokci materyi czynią Zł. 18, a 1 Zł. wzięty tylé rázy, ilé było łokci materyi czyni Zł. 9. Było więc łokci 9 materyi.

Reſzta rozwiązania nie powinna mieć żádnéy trudności, po wyłuſzczéniu piérwſzégo przykładu.

Użył kto iedną razą 12 mężczyzn, a 8 kobiét, do pewnéy roboty, i zapłacił za tę robotę ze wſzyſtkiém gr. 328.

Inną razą, użył 12 mężczyzn, a 11 kobiét do pewnéy roboty, płacąc tylé każdéy oſobie co i piérwéy: zapłacił zaś ze wſzyſtkiém gr. 370.

Jakáż była płáca mężczyzny, a iaká kobiéty?

Zaciągá kto pewną liczbę robotników po gr. 15, a inną liczbę po gr. 12. Zapłacił wſzyſtkim gr. 423.

Drugę

Drugą razą zaciągá téż sámę co piérwéy liczbę robotników po gr. 15, i tylé znowu robotników po gr. 14, ilé ich naiął piérwéy po gr. 12: płaci zaś wszystkim gr. 471.

Iléż było za każdą razą robotników?

91. *Zadanié 2. Pewny kupiec bierze za 15 łokci sukna w zamianę Zł. 120, i dziesięć łokci innégo sukna.*

Inną razą bierze za 15 łokci piérwszégo sukna Zł. 150, i 8 łokci drugiégo sukna.

Jakáż cena była piérwszégo, a iaká 2gò sukna?

Arytmetycznie. Tén kupiec wziął w zamianie piérwszą razą więcéy 2 łokcie drugiégo sukna niż drugą: w pieniędzach zaś wziął 30 Zł. więcéy drugą razą. Więc cena dwóch łokci sukna gatunku drugiégo iest 30 Zł: a zatém cena 1 łokcia iest 15 Zł. Cena 10 łokci iest 150 Zł. a summa téy ceny, i 120 Zł. iest 270 Zł. A że ta summa 270 Zł wyrównywá cenie 15 łokci sukna gatunku piérwszégo; więc za 1 łokieć gatunku piérwszégo przypádało Zł. 18.

Algiebr: Mian: Cena łokcia gatunku 1go . . . x.
Cena łokcia gatunku 2go . . . y.
Cena 15 łokci gatunku 1go $15x$.
Cena 10 łokci gatunku 2go $10y$.
Cena 8 łokci gatunku 2go . $8y$.

Warunek. $\begin{cases} 15x = 120 + 10y. \\ 15x = 150 + 8y. \end{cases}$

Przerábianié. (Porównáwszy dwie ważności $15x$)

$$120 + 10y = 150 + 8y.$$

(Odiąwszy 120) . . . . . $10y = 30 + 8y$.

(Odiąwszy $8y$) . . . . . . $2y = 30$.

(Podzieliwszy przez 2) . . $1y = 15$.

$$120 + 10y = 120 + 150 = 270.$$
$$15x = 270.$$
$$1x = 18.$$

Rozwiązanié. $1x = 18$. Cena łokcia 1go gatunku.
$1y = 15$. Cena łokcia 2go gatunku.

$$15x = 270.$$ Cena 15 łokci 1go gatunku.

$$120 + 10y = 270.$$
$$150 + 8y = 270.$$ Cena tychże 15 łokci inaczéy wyrażoná.

Uwága. Możná było i w tém Zadaniu podobnie iak w piérwſzém nie używać tylko iednégo znaku niewiadomégo.

Inſzé przykłady. Pewny rzemieślnik ochrániá 12 Zł. w każdy dzień, w który robi: wydáie zaś 5 Zł. w każdy dzień, w który nie robi. Po nieiakim czaſie zebrál 238 Zł.

Inną razą tylé dni co i piérwſzą robił, tylé téż złotych co i piérwéy codziénnie ſobie ochraniaiąc: nie robił przez tylé także dni, co i piérwéy, a w każdy taki dzień wydáwál po Zł. 8. W takim zaś, iak wyżéy przeciągu czaſu ochronił ſobie Zł. 208 tylko.

Iléż dni robił, i ilé nie robił?

Inny rzémieślnik ochrániá ſobie 14 Zł. w każdy dzień, w który robi, wydaie zaś Zł. 8 w każdy dzień, w który nie robi. Po nieiakim czaſie ochronił ſobie Zł. 324.

Innym razém robił mniéy 3 dniami, a nie robił więcéy 3 dniami, zamiáſt iednak 8 Zł. wydáwát Zł. 10 w każdy dzień, w który nie robił. Ochronił ſobie w przeciągu tego ſamégo co wyżéy czaſu Zł. 228.

Uwága. W przykładach poprzedzaiących ſpółczynniki iednéy z dwóch niewiadomych ilości wchodzących we dwa równania ſkładaiące warunek, były iednakowé, i przeto możná było z łatwością przywieśdź zadanié do iednéy niewiadoméy ilości. Do tego célu zmiérzá ſię i we wſzyſtkich Zagádnieniach, maiących więcéy niż iednę ilość niewiadomą: i tym końcém czynią ſię działania, przez które iednéy z ilości niewiadomych równé daią ſię ſpółczynniki.

92. *Zadanié 3.*

3 łokcie ſukna i 5 łokci materyi koſztowało . . . . Zł. 83.
6 łokci tegoż ſukna, i 7 łokci téyże materyi koſztowało . 145.

Jakáż ieſt cena iednégo łokcia ſukna, i iednégo łokcia materyi?

Arytmetycznie. Gdyby w piérwſzym razie tylé ſię kupiło łokci ſukna co i w drugim, toieſt łokci 6, a materyi także tylé drugié, toieſt łokci 10; tedy warunek piérwſzy odmieniłby ſię w naſtępuiący:

6 Łokci

6 Łokci ſukna, 10 łokci materyi koſztowało Zł. 166.

A że w drugim razie 6 łokci ſukna, i 7 łokci materyi koſztowało Zł. 145.

Więc 3 łokcie materyi koſztowały Zł. 21, a zatém 1 łokieć koſztował Zł. 7.

5 tedy łokci materyi koſztowało Zł. 35, a 3 łokcie ſukna koſztowało Zł. 83 mniéy 35 Zł. toieſt koſztowały Zł. 48: a zatém 1 łokieć koſztował Zł. 16.

Algiebr: Mian: Cena łokcia ſukna . . . . x.
Cena łokcia materyi . . . y.
Cena 3 łokci ſukna . . . $3x$.
Cena 5 łokci materyi . . . $5y$.
Cena 6 łokci ſukna . . . $6x$.
Cena 7 łokci materyi . . . $7y$.

Warunek. $\begin{cases} 3x + 5y = 83. \\ 6x + 7y = 145. \end{cases}$

Przerób: (Rozmnożywſzy ſtrony obiedwie piérwſzégo równania przez 2, aby dadź równé ſpółczynniki iednéy z dwóch niewiadomych ilości, toieſt x) $6x + 10y = 166$.
$6x + 7y = 145$.

(Odiąwſzy ſtrony drugiégo równania od ſtrón piérwſzégo) $3y = 21$. (W tém równaniu iedna iuż tylko ieſt niewiadomá)

(Podzieliwſzy przez 3) $1y = 7$.

Położywſzy tę ważność y, w piérwſzém równaniu $3x + 5y = 83$. będzie $3x + 35 = 83$.

(Odiąwſzy 35) . . . . . $3x = 48$.

(Podzieliwſzy przez 3) . $1x = 16$.

Rozwiązanié. $x = 16$. Cena łokcia ſukna.
$3x = 48$. Cena 3 łokci.
$6x = 96$. Cena 6 łokci.
$y = 7$. Cena łokcia materyi.
$5y = 35$. Cena 5 łokci.
$7y = 49$. Cena 9 łokci.

Sprawdzénié. $48 + 35 = 83.$
$96 + 49 = 145.$

Inſzé przykłady. *5 Mężczyzn i 7 kobiét, wydało Zł.* . . . . . *82.*
15 Mężczyzn i 8 kobiét, wydało Zł. . . . . *168.*
Ilėż wydáł każdy mężczyzna i każdá kobiéta?

Pewny kupiec za 12 łokci ſukna wziął 14 łokci materyi, i oprócz tego Zł. 86. Ténże ſám kupiec za 48 łokci tegoż ſukna wziął 50 łokci téyże materyi,. oprócz tego Zł. 384. Jakáż była cena łokcia ſukna tego i łokcia materyi?

Uwága. W przykładach poprzedzaiących możná było łatwo uczynić równémi ſpółczynniki, iednéy z dwóch ilości niewiadomych w obudwóch równaniach, a to dlá tego, że ſpółczynnik ilości niewiadoméy w jednėm równaniu był wielokrotnym (multiplus) ſpółczynnika téyże niewiadoméy w drugim równaniu. Doſyć więc było dlá uczyniénia równémi tych ſpółczynników, rozmnożyć ſtrony równania drugiégo przez wieloráz pochodzący z ſpółczynnika większégo podzielonégo przez ſpółczynnika mnieyſzégo.

Ale gdy ſpółczynniki iednéy z ilości niewiadomych nie zawiéraią ſię zupełnie iedén w drugim; w tedy poſtąpić ſobie trzeba podobnie iak w obrócéniu ułómków z różnémi mianownikami na ułómki z jednakowym mianownikiém, mnożąc obiedwie ſtrony iednégo równania, przez ſpółczynnika téy ilości niewiadoméy drugiégo równania, któréy ſię pozbydź chcémy, i znowu mnożąc obiedwie ſtrony drugiégo równania przez ſpółczynnika, który má taż ilość niewiadomá w piérwſzém równaniu.

93. *Zadanié 4.* *3 korce pſzenicy, i 4 korce żyta, koſztowało Zł.* *58.*
5 korcy pſzenicy, i 7 korcy żyta, koſztowało Zł. *99.*
Ilėż koſztowáł korzec żyta, ilé korzec pſzenicy?

Arytmetycznie. Ponieważ 3 korce pſzenicy, i 4 korce żyta koſztowały Zł. 58; więc 15 korcy pſzenicy, i 20 korcy żyta koſztowałyby złotych 290.

Tak téż ponieważ 5 korcy pſzenicy i 7 korcy żyta koſztowały Zł. 99; więc 15 korcy pſzenicy, i 21 korcy żyta, koſztowałyby Zł. 297.

A że w drugiém kupnie byłoby korcém żyta więcéy niż w piérwſzém, i dlá tego téż w drugim razie zapłaciłoby ſię 7 Zł. więcéy niż w piérwſzym; więc korzec żyta koſztowáł Zł. 7.

Algiebr: Mian: Cena korca pszenicy . . . . x.
Cena 3ch korcy . . . . $3x$.
Cena 5 korcy . . . . $5x$.
Cena korca żyta . . . . y.
Cena 4 korcy . . . . $4y$.
Cena 7 korcy . . . . $7y$.

Warunek. $\begin{cases} 3x + 4y = 58. \\ 5x + 7y = 99. \end{cases}$

Przerób: (Rozmnożywszy strony 1go równania przez 5)
$15x + 20y = 290.$
(Rozmnożywszy strony 2go równania przez 3)
$15x + 21y = 297.$
(Odiąwszy strony 1wszégo równania od strón drugiégo)
$1y = 7.$

Tymże sposobém możnáby pozbydź się ilości niewiadoméy, y chcąc przyśdź do takiégo równania, w któréby tylko wchodziła sama niewiadoma x.
(Rozmnożywszy przez 7, strony 1go równania)
$21x + 28y = 406.$
(Rozmnożywszy przez 4, strony drugiégo równania)
$20x + 28y = 396.$
(Odiąwszy strony drugiégo równania, od strón piérwszégo)
$1x = 10.$

Możná także było tak iak wyżéy położyć w jednėm z dwóch rownań zamiást y, ważność y znalezioną: i tak pozbywszy się niewiadoméy y, dochodzić ważności drugiéy niewiadoméy x, w równaniu iuż uwolnioném od piérwszéy niewiadoméy.

Rozwiązanié. $x = 10.$ Cena korca pszenicy.
$3x = 30.$ Cena 3 korcy.
$5x = 50.$ Cena 5 korcy.
$y = 7.$ Cena korca żyta.
$4y = 28.$ Cena 4 korcy.
$7y = 49.$ Cena 7 korcy.

Sprawdzenié. $\begin{cases} 30 + 28 = 58. \\ 50 + 49 = 99 \end{cases}$

Inſzé przykłady. *5 Mężczyzn i 7 kobiét wydało Zł. 123*
8 Mężczyzn i 9 kobiét wydało Zł. 177
Iléż wydáł każdy mężczyzna? i ilé każdá kobiéta?

Kupił kto wina 15 butelek iednégo gatunku, a 11 butelek drugiégo. Dáł za wſzyſtko Zł. 197.

Kupił powtóré 16 butelek piérwſzégo gatunku, a 15 butelek drugiégo, i zapłacił Zł. 233.

Po czémuż przypádała butelka piérwſzégo i drugiégo gatunku?

Przeſtroga. Gdy znaki poprzedzaiącé ilość niewiadomą, którey ſię pozbydź chcemy ſą przéciwné, toieſt + i —, w dwóch równaniach; wtedy przywiódłſzy ſpółczynników ilości niewiadoméy do równości w obudwóch równaniach, trzeba té równania iuż nie odeymować jak wyżéy iedno od drugiégo, ale do ſiebie dodáwać, aby tym ſpoſobém wyſadzić iedną ilość niewiadomą.

94. *Zadanié 5. 5 Korcy pſzenicy, i 8 korcy żyta koſztowało Zł. 85.*
Za 12 korcy pſzenicy dano w zamianę 11 korcy żyta, i 53 Zł. Jakáż była cena korca pſzenicy i korca żyta?

Opuſzczą ſię tu rozumowania Arytmetyczné mało co od poprzedzaiących różniącé ſię. Célém głownieyſzym ieſt teráz dlá nás rozwiązanié Zagádnień, wprowadzaiąc w nié w rzeczy ſaméy wielé ilości niewiadomych.

Mianowanié. Cena korca pſzenicy . . . . . x.
Cena 5 korcy . . . . $5x$.
Cena 12 korcy . . . . $12x$.
Cena korca żyta . . . . . . y.
Cena 8 korcy . . . . $8y$.
Cena 11 korcy . . . . $11y$.

Warunek. $\begin{cases} 5x + 8y = 85. \\ 12x - 11y = 53. \end{cases}$

Przeráb: Dlá pozbycia ſię niewiadoméy y rozmnóżmy ſtrony piérwſzégo równania przez 11, a drugiégo przez 8 będzie . . . .

$$\begin{cases} 55x + 88y = 935. \\ 96x - 88y = 424. \end{cases}$$

(Dodá-

(Dodáwfzy ftrony odpowiadaiącé fobie) $151x = 1359$.
(Podzieliwfzy przez 151) . . . . . . $1x = 9$.

Dlá pozbycia fię niewiadoméy x rozmnóżmy ftrony piérwfzégo równania przez 12, a drugiégo przez 5, będzie $\begin{cases} 60x + 96y = 1020. \\ 60x - 55y = 265. \end{cases}$

(Odiąwfzy drugié równanié od piérwfzégo) $151y = 755$.
(Podzieliwfzy przez 151) . . . . . . $1y = 5$.

Rozwiązanié. Cena korca pfzenicy . . . 9 Zł.
Cena 5 korcy . . . . . 45.
Cena 12 korcy . . . 108.
Cena korca żyta . . . . . 5 Zł.
Cena 8 korcy . . . . . . 40.
Cena 11 korcy . . . . . 55.

Spráwdzénié. $\begin{cases} 45 + 40 = 85. \\ 108 - 55 = 53. \end{cases}$

Infzé przykłady. Na zapłacénié 464 liwrów Francuzkich, dano 12 Luidorów, i 16 Cz: Zł:

Dłużnik winnym będąc 243 liwrów Francuzkich, dáł 17 Luidorów, a wrócono mu 15 Cz: Zł. Jakąż tu rachuie fię ważność Luidorów i Cz: Zł: w Liwrach Francuzkich?

Na zapłacénié 769 złotych Polfkich, dano 12 luidorów i 17 Czer: Zł. Dłużnik winnym będąc 694 złotych Polfkich, dáł 25 Luidorów, a wrócono mu 18 Cz: Zł. Na iléż tu złotych Polfkich wypádáł Luidor i czerwony złoty. (Obácz w Arytmetyce Rozdział V. Częśći IV.)

Uwága. Spofób poftępowania którégo użyliśmy w rozwięzywaniu Zagádnień zawiéraiących dwa równania, każdé z dwiéma niewiadomémi, náyogólniéy bydź może przyftófowanym. Są atoli infzé ieszcze fpofoby, mniéy lub więcéy wygodné, podług różnych przypádków.

95. Powtórzmy zadania poprzedzaiącégo, dwa równania:

$$\begin{cases} 5x + 8y = 85. \\ 12x - 11y = 53 \end{cases}$$

(W piérwfzém równaniu odiąwfzy $8y$ po obu ftronach)

$$5x = 85 - 8y.$$

(Podzie-

(Podzieliwſzy przez 5) . . . $1x = 17 - \frac{8y}{5}$.

(W wyrazie $12x$ drugiégo równania, położywſzy zamiáſt x, ważność iego znalezioną) $204 - \frac{96y}{5} - 11y = 53$.

(Rozmnożywſzy obie ſtrony przez 5)

$1020 - 96y - 55y = 265$.

toieſt $1020 - 151y = 265$.

(Dodáwſzy $151y$ do obu ſtrón) . . . . $1020 = 265 + 151y$.

(Odiąwſzy 265 od obu ſtrón) . . . . $755 = 151y$.

(Podzieliwſzy obie ſtrony przez 151) . . $5 = 1y$.

A że . . . . . $1x = 17 - \frac{8y}{5}$.

więc . . . . $1x = 17 - 8 = 9$.

Zgádzá ſię to zupełnie z poprzedzaiącém rozwiązaniém.

Tén ſpoſób nazywá ſię *ſpoſobém zamiany* (Methodus ſubſtitutionis.) Wygodnie ieſt wtedy go oſobliwie zażywać, gdy w działania naſzé ułómków nie wprowádzá.

96. *Spoſób porównywania.* Uwolniymy x od ſpółczynnika w pierwſzém równaniu, tak iak wyżéy, będzie $1x = 17 - \frac{8}{5}y$.

Zróbmy toż ſamo w drugiém równaniu, będzie $1x = \frac{53}{12} + \frac{11}{12}y$.

Zrównáymy dwie ważności x, będzie . $17 - \frac{8}{5}y = 4\frac{5}{12} + \frac{11}{12}y$.

Dodáymy $\frac{8}{5}y$ do obu ſtrón . . . . $17 = 4\frac{5}{12} + \frac{11}{12}y + \frac{8}{5}y$.

Odeymiymy $4\frac{5}{12}$ od obu ſtrón . . $12\frac{7}{12} = \frac{11}{12}y + \frac{8}{5}y$.

Przywiedźmy ułómki do iednakowégo mianownika . . . . . $12\frac{35}{60} = \frac{55}{60}y + \frac{96}{60}y$.

Wykonáymy oznaczoné dodanié . . $12\frac{35}{60} = \frac{151}{60}y$.

Rozmnóżmy obie ſtrony przez 60 . . . . $755 = 151y$.

Podzielmy obie ſtrony przez 151 . . . . . $5 = 1y$. tak iak wyżéy.

97. *Uwága.* Jeżeli chcémy uchronić ſię ułómków, pozbywſzy ſię niewiadoméy x w obudwóch równaniach; trzeba téyże niewiadoméy x zoſtawić iéy ſpółczynników, i uczynić ié równémi, rozmnożywſzy wzaiémnie iedné-

iednégo przez drugiégo. I tak we dwóch poprzedzaiących równaniach, zoſtawiwſzy x po iednéy ſtronie z ſwoim ſpółczynnikiém, będzie

$$\begin{cases} 5x = 85 - 8y. \\ 12x = 53 + 11y. \end{cases}$$

Rozmnożywſzy piérwſzé równanié przez 12, a drugié przez 5, będzie $\begin{cases} 60x = 1020 - 96y. \\ 60x = 265 + 55y. \end{cases}$

Zrównáwſzy dwie ważności $60x$:

$$1020 - 96y = 265 + 55y.$$

Dodáwſzy $96y$ po obu ſtronach $1020 = 265 + 151y$.

Odiąwſzy 265 . . . . . . $755 = 151y$.

Podzieliwſzy przez 151 . . $5 = 1y$. tak iak wyżéy.

98. *Zadanié 6. Dáł kto 1200 Zł: na pewny procént, a 1700 Zł. na inny procént. Odebrát w obudwóch razém procéntach Zł. 191.*

Kto inny znowu dáł 8000 Zł. na piérwſzy procént, a 1500 Zł. na drugi: i odebrát cał́égo procéntu Zł: 585.

Jakiéż były té dwa procénta?

Mianowanié. Niech będzie piérwſzy procént od 100 . . x.

Procént od 1200 Zł: . . . . . . $12x$.

Procént od 8000 Zł. . . . . . . $80x$.

Niech będzie 2gi procént od 100 . . y.

Procént od 1700 Zł. . . . . . . $17y$.

Procént od 1500 Zł. . . . . . . $15y$.

Warunek. $\begin{cases} 12x + 17y = 191. \\ 80x + 15y = 585. \end{cases}$

Przerábianié. Podzieliwſzy ſtrony drugiégo równania przez 5, dlá większéy w dalſzém działaniu łatwości, będzie . . . . $16x + 3y = 117$. Że zaś piérwſzé równanié do prościeyſzych wyrazów bydź przywiedzionem nié może; więc $\begin{cases} 12x + 17y = 191. \\ 16x + 3y = 117 \end{cases}$

Ponieważ piérwſzym ſpoſobém poſtępuiąc za cél iedyny to ſobie wyſtawuiémy, aby ſpółczynniki iednéy z niewiadomych *np.* x uczynić równémi; gdy tedy doſtąpić tego możná krótſzą drogą, a nie przez mnóżénié całych tych ſpółczynników iednégo przez drugi, umnieyſzymy ſobie pracy, i ochronimy

nimy czasu. A że dwa spółczynniki niewiadoméy x, mogą bydź zupełnie podzielone przez 4; więc możémy ié przywieśdź do równości, mnożąc wyrazy piérwszégo równania, przez 4, toiest przez wieloráz z 16 podzielonych przez 4: i znowu mnożąc wyrazy drugiégo równania przez 3, toiest przez wieloráz z 12 przez 4 podzielonych. Wypadną po takowém mnożéniu dwa równania $\begin{cases} 48x + 68y = 764. \\ 48x + 9y = 351. \end{cases}$

(Odiąwszy 2gié równanié, od 1wszégo) . . . $59y = 413$.
(Podzieliwszy przez 59) . . . . $1y = 7$.
Aby znaléźć ważność x, w równaniu *np.* $16x + 3y = 117$.
Połóżmy zamiást y, iego ważność, a będzie $16x + 21 = 117$.
(Odiąwszy 21) . . . . $16x = 96$.
(Podzieliwszy przez 16) . . . . $1x = 6$.

Rozwiązanié. Piérwszy procént od 100 . . . . . . 6.
Procént od 1200 . . . . 72.
od 8000 . . . . 480.

Drugi procént od 100 . . . . 7.
Procént od 1700. . . . . 119.
od 1500. . . . . . 105.

Sprawdzénié. $\begin{cases} 72 + 119 = 191. \\ 480 + 105 = 585. \end{cases}$

Insze przykłady. 8000 Zł. danych na pewny procént a 15000 Zł. danych na inny procént, przyniosły zysku całégo Zł. 1450.

12000 Zł. danych na 1wszy procént a 25000 Zł. danych na drugi procént, przyniosły zysku całégo Zł. 2350.

Jakież są té dwa procénta?

Uwága. Ponieważ w przykładach poprzedzaiących summy dané zawiérały w sobie sta zupełnie bez żádnéy reszty; można więc było wyznaczyć ich procénta nie wprowádzaiąc ułómków.

Trzeba iednak wprawiać Uczniów, i na takich przykładach, w któré wchodzą ułómki.

Przykłád. 1225 Zł. danych na pewny procént a 1240 Zł. danych na inny procént, przyniosły ze wszystkiém zysku 222 Zł.

2375 Zł. danych na piérwszy procént, a 3270 Zł. danych na drugi rocént, przyniósłszy ze wszystkiém zysku 517 Zł.

Jakież były té procénta?

Mianowanie. Procént 1wszy od 100 . . . . . x.

. . . . od 1225 Zł . . . $\frac{1225x}{100}$.

. . . . od 2375 Zł. . . . $\frac{2375x}{100}$.

Procént 2gi od 100 . . . . . . y.

. . . . . . od 1240 . . . $\frac{1240y}{100}$.

. . . . . . od 3270 . . . $\frac{3270y}{100}$.

Warunek. $$\begin{cases} \frac{1225x}{100} + \frac{1240y}{100} = 222. \\ \frac{2375x}{100} + \frac{3270y}{100} = 517. \end{cases}$$

Przerábianie. (Rozmnożywszy przez 100 strony obudwóch równáń)

$$\begin{cases} 1225x + 1240y = 22200. \\ 2375x + 3270y = 51700. \end{cases}$$

(Podzieliwszy przez 5 strony obudwóch równáń)

$$\begin{cases} 245x + 248y = 4440. \\ 475x + 654y = 10340. \end{cases}$$

(Rozmnożywszy przez 95 strony piérwszégo równania, a przez 49 strony drugiégo) $\begin{cases} 23275x + 23560y = 421800. \\ 23275x + 32046y = 506660. \end{cases}$

(Odiąwszy strony 1go równania od strón 2go . . . . $8486y = 84860$.

(Podzieliwszy przez 8486) . . . $1y = 10$.

Położywszy tę ważność y w równaniu $245x + 248y = 4440$.
będzie . . . . $245x + 2480 = 4440$.
(Odiąwszy 2480) . . . . . . $245x . . . . = 1960$.
(Podzieliwszy przez 245) . . . . $1x = 8$.

Rozwiązanié. $x = 8$. Procént 1wszy od 100.

$$\frac{1225x}{100} = 98.$$ Procént od 1225 Zł.

$$\frac{2375x}{100} = 190.$$ Procént od 2375 Zł.

$y = 10$. Procént 2gi od 100.

$$\frac{1240y}{100} = 124.$$ Procént od 1240 Zł.

$$\frac{3270y}{100} = 327.$$ Procént od 3270 Zł.

Sprawdzénié. $\begin{cases} 98 + 124 = 222. \\ 190 + 327 = 517. \end{cases}$

99. *Zadanié 7. Trzy osoby A, B, i C, rozbiéraią między siebie 24 warcabów.*

A, udziélá dwóm innym każdéy z osobna tylé, ilé każdá iuż miała.

B, potém udziélá dwóm innym każdéy z osobna tylé, ilé iuż każdá má.

C, naostatek udziélá dwóm innym każdéy z osobna, tylé, ilé każdá z nich má.

Po takowych udziáłach każdá z tych osób mieć będzie po 8 warcabów. Iléż warcabów miała każdá osoba przy piérwszém rozebraniu między siebie tychże warcabów?

Mianowanié. Liczba warcabów, którą następnie maią té trzy osoby:

	B.	C	A.
Na początku má	x	y	$24 - x - y$.
Po udziele od A,	$2x$	$2y$	$24 - 2x - 2y$.
Po udziele od B,	$4x - 24$	$4y$	$48 - 4x - 4y$.
Po udziele od C,	$8x - 48$	$8y - 24$	$96 - 8x - 8y$.

Waru-

Warunek. $\begin{cases} 8x - 48 = 8. \\ 8y - 24 = 8. \end{cases}$

Przerábianié. (Dodáwſzy 48 po obu ſtronach 1go równania a 24 po obu ſtronach 2go równania) $8x = 56.$

$8y = 32.$

a zatém $x = 7.$

$y = 4.$

Liczba warcabów.

	B.	C.	A.
Na początku	7	4	13.
Po udziele od A	14	8	2.
Po udziele od B	4	16	4.
Po udziele od C	8	8	8.

Inſzé przykłady. Té trzy oſoby, któré w piérwſzym razie udzielały ſobie po razu ſwoich warcabów, niechby ich ſobie w podobny iak wyżéy ſpoſób udzielały po dwa razy: naoſtatek mieć będą po 64 warcaby.

Niechby znowu udzielały ich ſobie po trzy razy: mieć będą naoſtatek po 512 warcabów.

Każdá z tych 3 oſób daie każdéy ze dwóch innych tylé dwoie, ilé każdá z nich má: po iednéy takiéy zamianie, każdá z 3 oſób mieć będzie po 27, a po dwóch takich zamianach, każdá mieć będzie po 729.

Każdá z tych trzech oſób, daie każdéy ze dwóch innych połowę tego co iuż má: a po iednokrotném udzielaniu wzaiemném mieć będą po 27, a po dwukrotném udzielaniu mieć będą po 729.

Co do poſtępowania Arytmetycznégo obácz Rozdziału I. Zadanié 28, i Zadanié 23. Rozdziału II.

100. *Zadanié 8. Trzeba znaleźć proſtokąt, którégo ani długości, ani ſzérokości nie mámy wiadoméy: wiémy tylko, że gdyby był 3 ſtopami dłużſzy, a 2 ſzérſzy; tedy powiérzchniá iego więkſzá byłaby 47 ſt. kwadr: gdyby zaś więcéy miál na 4 ſtopy długości, a na 3 ſzérokości; tedy powiérzchniá iego powiękſzyłaby ſię 70 ſtóp kw.*

Jakiéż ſą wymiary ıwſzégo tego proſtokąta?

Przygotowanié. Niech będzie ABCD, proſtokąt ſzukany, którégo Fig. 20.
długości AB, dodáliśmy liniią BE, wyrážaiącą 3 ſtopy, a ſzérokości AD, dodali-

daliśmy liniią DG, wyrażaiącą 2 stopy. Powiększénié powiérzchni 1wszégo prostokąta składać się będzie ze dwóch prostokątów, CG, BH, i z prostokąta CF, maiącégo 6 stóp kw. Więc summa prostokątów CG, BH, czyni 41 stóp kw. Piérwszy z tych prostokątów może się rozłożyć na dwa inné maiącé szérokości 1 stopę, a długość równą długości szukanégo prostokąta. Drugi także z tych prostokątów, może się rozłożyć na trzy inné maiącé szérokości 1 stopę, a długość równą szérokości szukanégo prostokąta. Summa zaś tych 5 prostokątów wyrównywá iednému prostokątowi maiącému 1 stopę szérokości, a długość równą summie długości dwa razy wziętéy, a szérokości trzy razy wziętéy szukanégo prostokąta. Piérwszy więc warunek na tén wychodzi, iż summa długości prostokąta szukanégo dwa razy wziętéy, i szérokości trzy razy wziętéy powinna uczynić 41 stóp. Tymże sposobém dowiéśdźby można, iż i drugi warunek na to wychodzi, że summa długości prostokąta szukanégo 3 razy wziętéy, i szérokości 4 razy wziętéy powinna uczynić 58 stóp.

Mianowanié. Długość szukanégo prostokąta . . x.
Szérokość . . . . y.

Warunek. $\begin{cases} 2x + 3y = 41. \\ 3x + 4y = 58. \end{cases}$

Przeráb: (Przywiódłszy do równości spółczynniki niewiadoméy x)

$$\begin{cases} 6x + 9y = 123. \\ 6x + 8y = 116. \end{cases}$$

(Odiąwszy 2gié równanié od 1wszégo $1y = 7$.

(Przywiódłszy spółczynniki niewiadoméy y, do równości)

$$\begin{cases} 8x + 12y = 164. \\ 9x + 12y = 174. \end{cases}$$

(Odiąwszy 1wszé równanié od 2go) $1x = 10$.

Rozwiązanié. $x = 10$. Długość prostokąta szukanégo.
$y = 7$. Szérokość prostokąta szukanégo.

70 Powiérzchniá.
$x + 3 = 13$. Długość powtórná.
$y + 2 = 9$. Szérokość powtórná.

117. Powiérzchniá.
47. Różnica powiérzchni 2giéy od 1wszéy.

$x + 4 = 14$.

$x+4=14$. Długość trzeciá.
$y+3=10$. Szérokość trzeciá.

140. Powiérzchniá.
70. Różnica powiérzchni 3ciéy od 1wszéy.

Uwági w przygotowaniu do mianowania służyły tylko do skrócénia onégo. Możnáby iednak i bez tych uwág przyśdź do tychże samych równáń. I tak:

1wszá długość . . . . x. Drugá długość . . . $x+3$.
1wszá szérokość . . . . y. Drugá szérokość . . . $y+2$.
1wszá powiérzchniá . . xy. Drugá powiérzchniá $xy, +2x, +3y+6$.

Różnica . . . . . $2x+3y+6$.

3ciá długość . . . . . $x+4$.
3ciá szérokość . . . . $y+3$.
3ciá powiérzchniá . . $xy+3x+4y+12$.

Różnica . . . $3x+4y+12$.

Warunek. $\begin{cases} 2x+3y+6=47. \\ 3x+4y+12=70. \end{cases}$

Przeráb: $\begin{cases} 2x+3y=41. \\ 3x+4y=58 \end{cases}$ Té to są samé równania, które wchodziły w warunki wyżéy z uwág poprzedzaiących wyprowadzoné.

Inszé przykłady. Nie wiémy wymiarów iakiégo prostokąta, wiémy tylko, że przydáwszy stóp 3 do iego długości, a stóp 4 do iego szérokości, powiérzchniá iego powiększy się 80 st. kw.

Przydáwszy zaś do długości tego prostokąta niewiadomégo stóp 4, a stóp 3 do iego szérokości, powiérzchniá iego byłaby powiększoná 77 stopami kw.

Uwága. W tym przykładzie tymże samym postąpić możná sobie sposobém co i w poprzedzaiącym. Możná iednak przerábianié łatwiéy ieszcze wykonać.

Dowiedzénié tego, że dwa warunki wychodzą na następuiącé, iest to samo co wyżéy.

Summa długości 4 razy wziętéy, i szérokości 3 razy wziętéy iest . . . . 68.

Summa

Summa długości 3 razy wziętéy, i ſzérokości 4 razy wziętéy ieſt . . . . 65.

Dodáwſzy té 2 równania, będzie 7 razy długość, i 7 razy ſzérokość . . . . 133.

Więc ſumma poiedynczéy długości, i poiedynczéy ſzérokości, ieſt . . . . , ... 19.

Odiąwſzy drugié równanié od 1wſzégo, długość ráz wzięta, mniéy ſzérokością ráz wziętą, będzie . . . . 3.

Więc to Zadanié wychodzi na naſtępuiącé, któré ieſt bardzo łatwé do rozwiązania. *Różnica dwóch ilości ieſt 3. ſumma ieſt 19.*

Jakiéż ſą té ilości?

Znaydziémy odpowiédź: 11 na długość
8 na ſzérokość. (Obácz w Rozdziale I. Zadanié 3.)

Tę uwágę przyſtóſowáć możná do wſzyſtkich przypádków, w których ſpółczynniki iednéy niewiadoméy w piérwſzém równaniu ſą równé ſpółczynnikóm drugiéy niewiadoméy w drugiém równaniu: a wzaiémnie ſpółczynniki drugiéy niewiadoméy w piérwſzém równaniu, ſą równé ſpółczynnikóm piérwſzéy niewiadoméy w drugiém równaniu: znaki zaś przed tą ſamą niewiadomą w obudwóch równaniach ſą iednakowé.

Przykład zagadniénia, któré zdaie ſię bydź *wyznaczonėm* (Problema determinatum) a w ſaméy rzeczy ieſt *niewyznaczonėm.* (Problema indeterminatum.

Nie wiémy wymiarów iakiégo proſtokąta: wiémy tylko, że dodáwſzy 2 ſtopy do iego długości, a 3 ſtopy do iego ſzérokości; powiérzchniá iego powiękſzy ſię 56 ſtóp kwadr: ieżeli zaś dodámy 4 ſtopy do długości, a 6 ſtóp do ſzérokości; powiérzchniá powiękſzy ſię 124 ſtóp kwadr.

Fig. 21. Niech będzie iakikolwiek proſtokąt ABCD, do którégo długości dodaná ieſt CG, wyrážaiącá 2 ſtopy: do ſzérokości zaś iego dodaná ieſt AE, wyrážaiącá 3 ſtopy. Powiękſzéniém powiérzchni tego proſtokąta będzie ſumma proſtokątów CI, BE, i IH.

Dodáwſzy ieſzcze do długości linią GN, wyrážaiącą także 2 ſtopy, a do ſzérokości linią EL, wyrážaiącą także 3 ſtopy; węgielniczka GNMLEF, którą powiękſzony ieſt powtórnie proſtokąt, przenieſie węgielniczkę CGFEAB, którą naprzód był powiękſzony ténże proſtokąt, proſtokątém HQMO, dwa razy tak wielkim, iak proſtokąt BIFH, toieſt w danym przypádku przenieſie ią proſtokątém zawiéraiącym w ſobie 12 ſtóp kwadr.

Jeżeli

Jeżeli tedy piérwſzé powiękſzénié ieſt na 56 ſtóp kw. drugié będzie dwa razy tylé, toieſt 112 ſtóp kw. i oprócz tego 12 ſtóp kw. a ze wſzyſtkiém 124 ſtóp kw. nié maiąc nawet względu na żádną długość piérwſzégo boku wyznaczoną w proſtokącie.

To ſamo rozumowanié przyſtóſować można we wſzyſtkich przykładach, gdzie liniiá CN, tylé razy zawiérá w ſobie liniią CG, ilé razy i liniiá AL, zawiérá w ſobie liniią AE.

Gdyby drugá różnica nie taká była daná, iaká bydź powinna podług powiękſzéń boków, i podług piérwſzégo powiękſzénia powiérzchni; tedy Zagádniénié byłoby do rozwiązania niepodobném, albo co na iedno wychodzi, warunki znoſiłyby ſię iedén przez drugi.

Poſtępuiąc ſobie Algiebraicznie odkrylibyśmy podobnie to ſamo niewyznaczénié, czyli ſprzeciwiéńſtwo, którégośmy przez rozumowanié doſzli.

Jakoż niech będzie piérwſzá długość x, a piérwſzá ſzérokość y. Doydziémy do naſtępuiących dwóch równáń.

$$\begin{cases} 3x + 2y + 6 = 56. \\ 6x + 4y + 24 = 124. \end{cases}$$

Weźmy połowę drugiégo równania, będzie . . $3x + 2y + 12 = 62.$

Odiąwſzy 6 po obu ſtronach, będzie . . . . . $3x + 2y + 6 = 56.$

Oſtatnié to równanié, na które przerobiliśmy 2gié równanié, nic ſię nie różni od piérwſzégo: a zatém dwa równania, które ſkłádaią warunek, ſą w iſtocie té ſamé, i iednakowé zawſze zoſtaną między ſobą, iakáżkolwiek byłaby ważność niewiadomych x i y A gdyby drugá ſtrona drugiégo równania nie taká była iakąśmy ią wyznaczyli; tedy dwa równania maiącé piérwſzé dwie ſtrony równé, miałyby nierównė drugié dwie ſtrony.

Trzeba to ieſzcze wyłuſzczyć i na przykładach liczebnych.

Nie wiémy wymiarów iakiégo proſtokąta, wiémy tylko, że zmnieyſzywſzy 2 ſtopami ſzérokość iego, a powiękſzywſzy 2 ſtopami długość; powiérzchniá iego zmnieyſzy ſię 32 ſtopami kwadr: gdyby zaś ſzérokość zmnieyſzoná byłá 3 ſtopami, a długość powiękſzoná 4 ſtopami; tedy powiérzchniá zmnieyſzyłaby ſię 45 ſtop: kwadr:

Niech znowu będzie inny proſtokąt, który powiękſzony w długości na 4 ſtopy, a zmnieyſzony w ſzérokości na 5 ſtóp, mnieyſzą mieć będzie powiérzchnią 27 ſtóp kwadr: gdy zaś długość iego zmnieyſzy ſię na 5 ſtóp, a ſzérokość

kość powiększy na 4 stopy; powiérzchniá przez to będzie zmnieyszoná 20 stopami kw.

Jąko w poprzedzaiących Zagádniéniach dwie ilości niewiadomé zawiéraiących, do tego przez przerábianié równáń zmierzaliśmy, aby zagadniénié przywiéśdź do iednéy niewiadoméy; tak i w jnnych Zagadniéniach, gdźie więcéy wchodzi niewiadomych, działania przerábiáń dzieią się końcém wysadzénia z równáń co ráz po iednéy niewiadoméy, aż się nakoniec iedna tylko niewiadomá zostanie z wyrazami wáżność iéy okázuiącémi, a przez nię dochodzimy dopiéro wáżności innych niewiadomych.

101. *Zadanié 9. Mężczyzn 4, kobiét 3, i dzieci 2 wydało 38 Zł.*
5 Mężczyzn, 4 kobiét, i 3 dzieci, wydało . . . . . 50.
7 Mężczyzn, 5 kobiét, i 4 dzieci, wydało . . . . . 67.

Iléż wydál 1 mężczyzna, 1 kobiéta, i 1 dziécię?

Mianowanié. Wydátki 1 mężczyzny . . . . x.
. . . . . 1 kobiéty . . . . y.
. . . . . 1 dziécięcia . . . . z.

Warunek. $\begin{cases} 4x + 3y + 2z = 38 & (\text{A}). \\ 5x + 4y + 3z = 50 & (\text{B}). \\ 7x + 5y + 4z = 67 & (\text{C}). \end{cases}$

Przerábianié. W równaniach B, i A, zróbmy równémi spółczynniki niewiadoméy x. $\begin{cases} 20x + 16y + 12z = 200. \\ 20x + 15y + 10z = 190. \end{cases}$

Odiąwszy . . . $1y + 2z = 10.$ (D).

W równaniach C, i A, zróbmy także równémi spółczynniki niewiadoméy x. $\begin{cases} 28x + 20y + 16z = 268. \\ 28x + 21y + 14z = 266. \end{cases}$

Odiąwszy . . . $-y + 2z = 2.$ (E).

W równaniach D, i E, spółczynniki niewiadomych są równé iedné względém drugich, ale znaki iednéy z tych niewiadomych są odmiénné.
Odiąwszy równanié E, od równania D, będzie . . . $2y = 8.$
$y = 4.$

Dodá-

Dodáwszy té dwa równania D, i E, będzie . . . . . $4z = 12.$
$$1z = 3.$$

W jedném ze trzech piérwszych równáń, *np.* w równaniu A, położywszy ważność znalezioną niewiadomych y, z, będzie

$$4x + 12 + 6 = 38.$$
$$\text{czyli } 4x + 18 = 38.$$
$$\text{więc } 4x = 20.$$
$$1x = 5.$$

Rozwiązanié. Wydátek 1 Mężczyzny . . . . . 5. Zł.
1 Kobiéty . . . . . 4.
1 Dziécięcia . . . . . 3.

Sprdwdz:
$$\begin{cases} 20 + 12 + 6 = 38. \\ 25 + 16 + 9 = 50. \\ 35 + 20 + 12 = 67. \end{cases}$$

Uwága. Gdyby za trzeci warunek podano było, że 7 mężczyzn, 6 kobiét, i 5 dzieci, wydało 74 Zł: tedy zagadnienié na pozór wyznaczoné byłoby w samèy rzeczy nie wyznaczoném: bo tén trzeci warunek byłby koniecznym wnioskiém ze dwóch piérwszych.

Jakoż w drugim razie więcéy iest 1 mężczyzną, 1 kobiétą, i 1 dziécięciém, niż w piérwszym: i dlá tego w drugim razie, więcéy się 12 Zł. wydaie niż w piérwszym.

A że w trzecim razie byłoby więcéy 2 mężczyznami, 2 kobiétami, i 2 dziećmi, więcéy niż w drugim; więc w tym trzecim razie wydátek byłby większy 24 Zł. niż w drugim: i gdyby tén wydátek nie był dany większy 24 złotémi niż drugi; tedy warunki Zagadniénia sprzeciwiałyby się iedné drugim.

Inszé przykłady. *20 Korcy pszenicy, 30 korcy żyta, i 12 korcy owsa, kosztowały* . . . . *1164 Zł.*

25 Korcy pszenicy, 36 korcy żyta, i 18 korcy owsa, kosztowały . . . . *1464.*

32 Korcy pszenicy, 40 korcy żyta, i 24 korcy owsa, kosztowały . . . . *1776.*

Iléż kosztowáł korzec pszenicy, żyta i owsa?

Mianowanié. Niech ceny korca pszenicy, żyta i owsa będą x, y, z.

Warunek. $\begin{cases} 20x + 30y + 12z = 1164. \\ 25x + 36y + 18z = 1464. \\ 32x + 40y + 24z = 1776. \end{cases}$

Skrócénié. Podzielmy strony piérwszégo równania przez 2, a strony trzeciégo równania przez 4.

$$\begin{cases} 10x + 15y + 6z = 582. & (A) \\ 25x + 36y + 18z = 1464 & (B.) \\ 8x + 10y + 6z = 444 & (C.) \end{cases}$$

Przerdbianié. Ponieważ spółczynniki niewiadoméy z, równé są w równaniach A, i C; więc odeymiéymy C, od A . . . . $2x + 5y = 138$ (D.)

Że znowu społczynnik niewiadoméy z, w równaniu B, iest 3 razy tak wielki, iak spółczynnik téyże niewiadoméy w równaniu *np.* C; rozmnóżmy więc strony równania C, przez 3 . . . . $24x + 30y + 18z = 1332$.

Odiąwszy strony tego ostatniégo równania od strón równania B, będzie . . . . $1x + 6y = 132$ (E.)

Trzy niewiadomé, i trzy równania, przywiedliśmy iuż do dwóch, toiest $\begin{cases} 2x + 5y = 138. \\ 1x + 6y = 132. \end{cases}$

Podwóymy strony 2go równania $\begin{cases} 2x + 5y = 138. \\ 2x + 12y = 264. \end{cases}$

Odeymiymy 1wszé od 2go . . . . . $7y = 126$.

Podziélmy obie strony przez 7 . . . $1y = 18$.

Położywszy ważność znalezioną niewiadoméy y, w równaniu E . . . . . $1x + 108 = 132$.

więc $1x = 24$.

Położywszy ważność niewiadomych x, i y, w równaniu *np.* A, będzie . . . . . $240 + 270 + 6z = 582$.

czyli $510 + 6z = 582$.

więc . . . $6z = 72$.

a . . . . . $1z = 12$

Rozwiązanié. Cena 1 korca pszenicy . . . . 24 Zł.

. . . 1 korca żyta . . . . . . 18.

. . . 1 korca owsa . . . . . . 12.

Sprawdz:

$$\text{Spráwdz:} \begin{cases} 480 + 540 + 144 = 1164. \\ 600 + 648 + 216 = 1464. \\ 768 + 720 + 288 = 1776. \end{cases}$$

102. *Zadanié 10. Summa maiątku osoby A, i podwóynégo maiątku Osób B, i C, czyni . . . . 62. Zł.*

Summa maiątku B, i potróynégo maiątku A, i C, czyni . . . . 84.

Summa maiątku C, i poczwórnégo maiątku A, i B, czyni 102

Jakież są maiątki tych osób w szczególności?

Możnáby tu podobnym cale sposobém sobie postąpić, iak w éwiczéniach poprzedzaiących, możná iednak skrócić cokolwiek działanié w prowádzaiąc nową niewiadomą s, któráby wyrážała summę tych trzech maiątków, oznaczywszy maiątki té szczególnie brané, przez x, y, z.

Piérwszé równanié będzie . . $x + 2\ (s - x)$ albo $2s - x = 62$.
Drugié . . . . $y + 3\ (s - y)$ albo $3s - 2y = 84$.
Trzecié . . . . $z + 4\ (s - z)$ albo $4s - 3z = 102$.

Rozmnóżmy 1wszé równanié, przez 6, drugié przez 3, trzecié przez 2, dlá zrównaniá spółczynników ilości niewiadomych: x, y, z.

$$\text{Zrobią się té 3 równaniá} \begin{cases} 12s - 6x = 372. \\ 9s - 6y = 252. \\ 8s - 6z = 204. \end{cases}$$

Dodáymy strony tych 3 równáń,
zrobi się następuiącé równanié: . . . $29s - 6x - 6y - 6z = 828$.
albo . . $29s - 6s$ . . . . . $= 828$.
toiest $23s$ . . . . . . $= 828$.
a . . . . $1s$ . . . . . . $= 36$.

Położywszy wáżność znalezioną niewiadoméy s, w trzech powyższych równaniach, toiest: $2s - x = 62$. będzie $72 - x = 62$.
$3s - 2y = 84$ . . $108 - 2y = 84$.
$4s - 3z = 102$ . . $144 - 3z = 102$.

Więc $72 = 62 + 1x$ albo $72 = 62 + 1x$.
$108 = 84 + 2y$ . . . $54 = 42 + 1y$.
$144 = 102 + 3z$ . . . $48 = 34 + 1z$.

Więc nakoniec $x = 10.$
$y = 12.$
$z = 14.$

Sprawdz: $\begin{cases} 10 + 24 + 28 = 62. \\ 30 + 12 + 42 = 84. \\ 40 + 48 + 14 = 102. \end{cases}$

Inſzé przykłady.
Maiątek A, złączony z połową maiątków B, i C, czyni . 50 *Zł.*
Maiątek B, złączony z $\frac{1}{3}$ *maiątków A, i C, czyni* . . 36.
Maiątek C, złączony z $\frac{1}{4}$ *maiątków A, i B, czyni* . . 46.
Jakież ſą té maiątki w ſzczególności?
Summa maiątków A, i B, przenoſi 7 złotémi maiątek C.
Summa podwóyná maiątków A, i C, przenoſi 15 Zł. maiątek B.
Summa potróyná maiątków B, i C, przenoſi 21 Zł. maiątek A.
Jakież ſą té maiątki w ſzczególności?

103. *Zadanié 11. Maiątek A, złączony z* $\frac{1}{2}$ *maiątku B, czyni* 25 *Zł.*
Maiątek B, złączony z $\frac{1}{3}$ *maiątku C, czyni także* . . . 25.
Maiątek C, złączony z $\frac{1}{4}$ *maiątku A, czyni także* . . . 25.
Jakież ſą té trzy maiątki w ſzczególności?

Mianowanié. Niech x, y, z, wyrażaią trzy naſtępnie maiątki: A, B, C.

Warunek. $\begin{cases} x + \frac{1}{2}y = 25. \\ y + \frac{1}{3}z = 25. \\ \frac{1}{4}x + z = 25. \end{cases}$

Przerábianié. Rozmnóżmy każdé z tych równáń, przez mianownika ułómka w nim ſię znayduiącégo, będzie:

$$\begin{cases} 2x + y = 50. \\ 3y + z = 75. \\ x + 4z = 100. \end{cases}$$

Podwóymy ſtrony 3go równania . . $2x + 8z = 200.$
Odeymiéymy ſtrony 1go równania . . $2x + y = 50.$

Zoſtanie . . . $8z - y = 150.$

Rozmnó-

Rozmnóżmy ſtrony 2go równania przez 8 . . . $8z + 24y = 600$.
Odeymiéymy od tego równania poprzedzaiącé . . . . $25y = 450$.
Podziélmy to oſtatnié równanié przez 25 . . . . . . $1y = 18$.

Połóżmy tę ważność niewiadoméy y, w 1wſzém, i 2giém równaniu przerobionén . . $2x + 18 = 50$, $54 + z = 75$ więc $2x = 32$. $x = 16$. $z = 21$.

Rozwiązanié. $x = 16$.
$y = 18$.
$z = 21$.

Inſzé przykłady. Maiątek A, złączony z $\frac{1}{3}$ maiątku B, czyni 62 *Zł.*
Maiątek B, złączony z $\frac{1}{4}$ maiątku C, czyni . . . . . 62.
Maiątek C, złączony, $\frac{2}{5}$ *maiątku A, czyni* . . . . . 62.

Maiątek A, przenoſi połowę maiątku B . . . . 11. *Zł.*
Maiątek B, przenoſi trzecią część maiątku C . . 11.
Maiątek C, przenoſi piątą część maiątku A . . . 11.

104. *Zadanié 12. Trzy Oſoby: A, B, C, dzielą między ſiebie 10500 Zł. w naſtępuiący ſpoſób:*

Jeżeli Oſoba A, bierze 2 Zł. B, powinna wziąść 3. Jeżeli zaś B, bierze 4 Zł. C, powinna wziąść 5.

Arytmetycznie. Jeżeli B, bierze 12 Zł. (toieſt liczbę, którá tak przez 3 iak i przez 4 bydź może podzieloną;) tedy A, weźmie 8 Zł. a C, weźmie 15 Zł. razém zaś wſzyſtkié té trzy oſoby wezmą 35 Zł. Że zaś 10500 Zł. podzielić maią między ſiebie, toieſt 300 razy 35 Zł: więc téż i części przypádaiącé na A, B, C, będą 300 razy tak wielkié, iak były mniemané ich piérwſzé podziáły, toieſt 8, 12, 15 Zł. a zatém będą 2400, 3600, i 4500 Zł.

Algiebraicznie. Mianowanié. Podziáły oſób A, B, C.
. . . . . . x, y, z.

Warunek. $\begin{cases} x = \frac{2}{3}y. \\ y = \frac{4}{5}z. \\ x + y + z = 10500. \end{cases}$

Prze-

Przerób: Ponieważ $x = \frac{2}{3}y$.
$y = \frac{4}{5}z$.
więc $x = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5}z = \frac{8}{15}z$.
a zatém $x + y + z = \frac{8}{15}z + \frac{4}{5}z + z = \frac{8}{15}z + \frac{12}{15}z + z =$
$\frac{8}{15}z + \frac{12}{15}z + \frac{15}{15}z = \frac{35}{15}z = \frac{7}{3}z$.

Że zaś iest $x + y + z = 10500$.
więc . . . . . $\frac{7}{3}z = 10500$.
$\frac{1}{3}z = 1500$.
$z = 4500$.
$y = \frac{4}{5}z = 3600$.
$x = \frac{2}{3}y = 2400$.

Inſzé przykłady. *Trzy oſoby A, B, C, dzielą między ſiebie 70800 Zł.*
Jeżeli A, bierze 3 Zł. tedy B, powinna wziąść 4.
Jeżeli B, bierze 5 Zł. tedy C, powinna wziąść 6.

Niech znowu ſumma do podziáłu będzie 3536.
Jeżeli A, bierze 5 Zł. B weźmie 8.
Jeżeli B, weźmie 9 Zł. C, weźmie 13.

Spoſób poſtępowania ténże ſám ieſt, chociáżby więcéy niż trzy było niewiadomych ilości. Starać ſię zawſze należy, aby po iednéy co ráz zmnieyſzać liczbę tych niewiadomych. Doſyć będzie na to dadź iedén lub dwa przykłady.

105. *Zadanié 13.* *Łokci 7 ſukna, 5 łokci kitáyki, 4 łokcie atłaſu, i 6 łokci płótna, koſztowało . . . . 205 Zł.*
8 Łokci ſukna, 9 kitáyki, 11 atłaſu, 7 płótna, koſzt: 322.
9 Łokci ſukna, 7 kitáyki, 8 atłaſu, 5 płótna, koſzt: 288.
11 Łokci ſukna, 8 kitáyki, 7 atłaſu, 6 płótna, koſzt: 320.

Mian: Cena łokcia ſukna x, kitáyki y, atłaſu z, płótna v.

$$\text{Warunek.}\left\{\begin{array}{l} 7x + 5y + 4z + 6v = 205. \\ 8x + 9y + 11z + 7v = 322. \\ 9x + 7y + 8z + 5v = 288. \\ 11x + 8y + 7z + 6v = 320. \end{array}\right.$$

Prze-

Przerábianié. Chcąc ſię pozbydź niewiadoméy *np.* v, możnaby, porównywaiąc iedno z równáń z każdém ze trzech innych, uczynić równémi ſpółczynniki téyże niewiadoméy, które i bez tego iuż ſą równé, w 1wſzém, i 4 równaniu. Można iednak ſkrócić ieſzcze to działanié.

Odeymiéymy 1wſzé równanié od 2go, zoſtanie $1x + 4y + 7z + 1v = 117.$
Rozmnóżmy to równanié przez 6 . . . . $6x + 24y + 42z + 6v = 702.$
Odeymiéymy od niego 1wſzé równanié . . . $7x + 5y + 4z + 6v = 205.$
Zoſtanie . . . . — $1x + 19y + 38z = 497.$
Odeymiéymy 3cié równanié od 4go, zoſtanie: $2x + y - z + v = 32.$
Rozmnożmy przez 6 to równanié . . . . $12x + 6y - 6z + 6v = 192.$
Odeymiéymy to oſtatnié równanié od 4go $11x + 8y + 7z + 6v = 320.$
Zoſtanie . . . . — $x + 2y + 13z = 128.$
Naoſtatek weźmy różnicę 1wſzégo równania od 4go, będzie

$$4x + 3y + 3z = 115.$$

Przywiedliśmy iuż Zagadnienié do trzech tylko naſtępuiących warunków,

$$\begin{cases} -1x + 19y + 38z = 497. \\ -1x + 2y + 13z = 128. \\ 4x + 3y + 3z = 115. \end{cases}$$

Odeymiéymy 2gié równanié od 1go, zoſtanie $17y + 25z = 369$
Rozmnóżmy ſtrony drugiégo równania przez 4, będzie

$$-4x + 8y + 52z = 512.$$

Dodáymy do tego równania 3cié $4x + 3y + 3z = 115.$
będzie $11y + 55z = 627.$

Zagadniénié przywiedliśmy do dwóch równáń $\begin{cases} 17y + 25z = 369. \\ 11y + 55z = 627. \end{cases}$

Podzielmy ſtrony drugiégo z tych równáń przez 11, będzie . . . . $1y + 5z = 57.$
Rozmnóżmy to oſtatnié równanié przez 5 . . $5y + 25z = 285.$
Odeymiéymy tak rozmożoné równanié od tego $17y + 25z = 369.$
Zoſtanie . . . . $12y = 84.$
więc . . . . $1y = 7.$

A że $1y + 5z = 57$; więc $7 + 5z = 57.$
a zatém $5z = 50$; a $z = 10.$
$4x + 3y + 3z = 115$; więc $4x + 21 + 30 = 115.$

S czyli

czyli $4x + 51 = 115$; a zatém $4x = 64$. a, $x = 16$.
$1x + 4y + 7z + v = 117$; więc $16 + 28 + 70 + v = 117$.
czyli $114 + v = 117$; a zatém . . . . $v = 3$.

Rozwiązanie $x = 16$. Cena łokcia ſukna.
$y = 7$. Cena łokcia kitáyki.
$z = 10$. Cena łokcia atłaſu.
$v = 3$. Cena łokcia płótna.

Sprawdz:
$$\begin{cases} 112 + 35 + 40 + 18 = 205. \\ 128 + 63 + 110 + 21 = 322. \\ 144 + 49 + 80 + 15 = 288. \\ 176 + 56 + 70 + 18 = 320. \end{cases}$$

Inſzé przykłady. Maiątki oſób cztérech A, B, C, D, ſą takié, iż

Summa maiątku A, z podwóyną ſummą trzech innych maiątków, czyni . . . . *61. Cz: Zł:*

Summa maiątku B, z potróyną ſummą trzech innych maiątków czyni 2 razy 61, toieſt . . . . *122.*

Summa maiątku C, z poczwórną ſummą trzech innych maiątków czyni 3 razy 61, toieſt . . . . *183.*

Summa maiątku D, z wziętą pięć razy ſummą trzech innych maiątków, czyni 4 razy 61, toieſt . . . . *244.*

Jakiéż ſą té maiątki w ſzczególności?

Niech znowu maiątki oſób 4 A, B, C, D, będą takié, iż

Dodáwſzy maiątek A, do połowy ſummy innych trzech maiątków, uczyni to . . . . *37. Cz: Zł.*

Dodáwſzy maiątek B, do 3ciéy części ſummy innych my innych trzech maiątków, uczyni i to . . . . *37.*

Podobnie maiątek C, dodany do czwártéy części ſummy innych 3 maiątków, uczyni . . . . *37.*

Naoſtatek i maiątek D, dodany do 5téy części ſummy innych trzech maiątków, uczyni . . . . *37.*

Maiątki oſób 5, A, B, C, D, E, ſą takié, iż

Summa maiątku A, i połowy maiątku B, czyni . . . . *721 Zł.*

Summa maiątku B, i 3ciéy części maiątku C, czyni . . . *721.*

Summa maiątku C, i 4tey części maiątku D, czyni . . . 721.
Summa maiątku D, i ⅕tey części maiątku E, czyni. . . . 721.
Summa maiątku E, i ⅙tey części maiątku A, czyni . . . 721.

ROZDZIÁŁ IV.

Algiebra Ogólná.

106. Działania około ilości niewiadomych, albo około ich znaków w Algiebrze używané, pokázały nám iednę dopiéro różnicę zachodzącą w téy mierze między Arytmetyką i Algiebrą. Różni się ieszcze Algiebra od Arytmetyki, i w sposobie w którym wiadomé ilości oznáczá.

W piérwszém Zagadniéniu Rozdziału I. następuiącé Zadanié było nám do rozwiązania podané: *Ze dwóch osób A, i B, piérwszá má dwa razy tylé, ilé drugá: má zaś 12 Zł. więcéy niż drugá.*

Rozumowanié, któré czyniliśmy końcém rozwiązania tego Zadania, było to samo, któréby czynić należało za daną iakąkolwiek inną różnicą dwóch maiątków. Nié maiąc względu na żádną szczególną liczbę wyznaczoną za tę różnicę, moglibyśmy byli rozumować w sposób następuiący.

Nadmiarém maiątku téy osoby maiętnieyszéy, nad maiątek osoby mniéy maiętnéy iest maiątek téyże samey osoby mniéy maiętnéy. Więc maiątek osoby mniéy maiętnéy iest różnicą daną dwóch maiątków: a maiątek osoby maiętnieyszéy iest dwa razy tak wielki, iak iest różnica daná.

Jakáżkolwiek tedy liczba wyznaczoná będzie za różnicę dwóch maiątków; natychmiást zadanié takowé rozwiążémy, pomniąc na to ogólné rozumowanié uczynioné nad wszystkiémi różnicami, któréby wyznaczyć można.

Aby wygodnie wyrazić ogólné rozwiązanié podobnych Zadáń, zgodzono się na oznaczénié różnicy danéy przez znak ogólny, na mieysce którégo możnáby potém w każdym przypádku szczególnym położyć wáżność różnicy wyznaczonéy.

Oznáczaiąc *np.* przez *d*, tę różnicę, iakążkolwiek ona będzie; poprzedzaiącé Zadanié możnáby bez wyszczególniénia tak wwrazić: *Znaléźć dwie liczby, z których iedna dwa razy iest tak wielká, iak drugá, a których różnica iest d.* Odpowiédź znaleziona przez poprzedzaiącé rozumowanié byłaby ta, że dwie ilości szukané są d, i $2d$.

Sposób postępowania wcale Algiebraiczny, używaiąc znaków niewiadomych tamżeby nás gdzie i piérwszy zaprowadził.

Mianowanié. Mnieyszá ilość . . . . x.
Większá ilość . . . . $x + d$ albo $2x$.

Warunek. $x + d = 2x$.

Przerábianié. $d = x$.

Rozwiązanié. $x = d$. Ilość mnieyszá.
$x + d = 2d$. Ilość większá.
$2x = 2d$. Drugié wyrażénié ilości większéy.

Gdyby iedna z szukanych ilości, miała bydź trzy razy tak wielká, iak drugá; tedy różnica byłaby 2 razy tak wielká, iak ilość mnieyszá: a zatém ilość mnieyszá byłaby połową różnicy danéy: a ilość większá zawiérałaby w sobie półtora razy tę różnicę.

Ponieważ zawsze oznáczámy różnicę daną przez d, więc mnieyszá ilość oznaczona tu będzie przez $\frac{1}{2}d$, a większá przez $\frac{3}{2}d$.

Algiebraicznie. Mianowanié. Mnieyszá ilość . . x.
Większá . . . . . $x + d$, albo $3x$.

Warunek. $3x = x + d$.

Przerábianié. (Odiąwszy x po obu stronach) . . . $2x = d$.
(Podzieliwszy obié strony przez 2) . $1x = \frac{1}{2}d$.

Rozwiązanié. $1x = \frac{1}{2}d$. Ilość mnieyszá.
$x + d. = 1\frac{1}{2}d$. Ilość większá.
$3x = 1\frac{1}{2}d$. Drugié wyrażénié ilości większéy.

Jakążkolwiek liczbę razy zawiérałaby w sobie zupełnie iedna ilość drugą; rozumowanié i sposób postępowania byłby tén sám co wyżéy. Zawsze tych

tych dwóch ilości różnicą byłaby mnieyszá ilość wzięta iedén ráz mniéy, niżeli się zamyká w większéy ilości: a zatém wyrażéniém téy mnieyszéy ilości byłaby różnica daná podzieloná przez liczbę mnieyszą iednością, od téy, któráby okazywała, ilé razy większá ilość zawiérá w sobie mnieyszą.

Otóż znowu przywiedzéni iesteśmy do oznaczénia tego nowégo stopnia ogólności przez wybranié iakiégo znaku do woli, *np.* m, którby wyrázáł liczbę tylu razy, ilé iedna ilość zawiérá w sobie drugą. Wyrażéniém zatém mnieyszéy ilości będzie $\frac{d}{m - 1}$ czyli różnica daná podzieloná przez liczbę iednością mnieyszą od téy, która oznáczá ilé razy większá ilość zawiérá w sobie mnieyszą: a większá będzie m, razy tylá, iak mnieyszá, co się wyráżá następuiącym sposobém $\frac{md}{m - 1}$: toiest mnożąc przez m licznik ułómka, który oznáczá ilość mnieyszą.

Té wyrażénia $\frac{d}{m - 1}$, i $\frac{md}{m - 1}$, oznáczaią ieszcze, iż ilość d, rozmnożoná iest przez ułómki $\frac{1}{m - 1}$, i $\frac{m}{m - 1}$: i przeto następuiącym sposobém zwykły się oznáczać dwie ilości.

Mnieyszá ilość . . . . $\frac{1}{m - 1}d.$

Większá ilość . . . . $\frac{m}{m - 1}d.$

Przykłady. Niech będzie naprzód $m = 3$, toiest niech będzie iedna ilość trzy razy tak wielká, iak drugá.

$$\frac{1}{m - 1} = \frac{1}{3 - 1} = \tfrac{1}{2}.$$

$$\frac{m}{m - 1} = \frac{3.}{3 - 1} = \tfrac{3}{2} = 1\tfrac{1}{2}.$$

Będą więc ilości szukané $\frac{1}{2}d$, i, $1\frac{1}{2}\,d$, tak iak wyżéy.

Niech znowu będzie $m = 4$.

$$\frac{1}{m-1} = \frac{1}{4-1} = \tfrac{1}{3}.$$

$$\frac{m}{m-1} = \frac{4}{4-1} = \tfrac{4}{3} = 1\tfrac{1}{3}.$$

Będą więc ilości szukané $\frac{1}{3}d$, i, $\frac{4}{3}d$, albo $1\frac{1}{3}d$.

Trzeba przytoczyć więcéy ieszcze innych przykładów; i naznaczyć różnicy d, różné ważności szczególné.

Sposobém postępowania Algiebraicznym doszlibyśmy tego samégo.

Mianowanié. Mnieyszá ilość . . . x.
Większá . . . . . $x+d$, albo mx.

Warunek. $mx = x+d$.

Przerab: (Odiąwszy x po obu stronach) $mx - x = d$.

Piérwszá strona tego równania oznáczá, iż wziąwszy x razy m, trzeba od tak rozmnożonégo x, toiest od mx, odiąć ráz x: albo co na iedno wychodzi, że x, bierze się razy $m-1$. To zaś tak się inaczéy oznáczá $(m-1)x$ (*).

Więc. $(m-1)x = d$.

(Podzieliwszy obie strony przez $m-1$) $x = \frac{d}{m-1}$ albo $\frac{1}{m-1}d$.

Rozwiązanié. $x = \frac{1}{m-1}d$. Ważność mnieyszéy ilości.

$mx = \frac{m}{m-1}d$. Ważność większéy ilości.

$$x+d = \frac{1}{m-1}d+d, = d\left(\frac{1}{m-1}+1.\right)$$

Wyraż-

(*) Gdyby się *nawias*, (parenthesis) opuścił, i tylko napisało się $m-1x$, toby oznáczało, że od ilości m, trzeba odiąć $1x$: przypádá zaś tu odiąć $1x$, od mx, a nie od m.

Wyráźmy iedność, czyli 1, nakſztáłt ułómku $\frac{m-1}{m-1}$.

będzie $x+d=d\left(\frac{1}{m-1}+\frac{m-1}{m-1}\right)$.

Dodáymy té dwa ułómki, dodaiąc ich liczniki będzie . . . . .

$x+d=d\left(\frac{m}{m-1}\right)$ drugié wyrażénie ilości większéy.

Gdy większá ilość zawiérá w ſobie mnieyſzą nie zupełnie ale z ułómkiém; wtedy mianowniki ułómków wchodzących w wyrażénia ilości ſzukanych, ſą ſamé ilościami ułomkowémi, i té ułómki ułómków powinny bydź w każdym ſzczególnym razie przywiedzioné do ułómków próſtych.

Można iednak uchronić ſię tego działania używaiąc ſpoſobu naſtępuiącégo.

Niechby *np.* iedna ilość zawiérała w ſobie drugą półtora razy, w takim razie większá ilość, miałaby w ſobie 3 takié części, iakich mnieyſzá miałaby tylko 2. Niechby iedna taká część ogólnie była oznaczoná przez a, większá ilość mogłaby bydź ogólnie także oznaczoná przez $3a$, mnieyſzá przez $2a$: ponieważ $3a$, zawiérá w ſobie $2a$, półtora razy.

Podobnie iakiéżkolwiek byłoby wyrażénié ułómkowé, właściwie, albo niewłáściwie tak nazwané, któréby oznáczało, ilé razy iedna ilość zawiérá w ſobie drugą; można zawſze wyrazić wielkość tych ilości, iednéy względém drugiéy, albo ſtoſunek iednéy do drugiéy, przez liczby cáłkowité.

Niech więc będzie Zadanié daleko ogólnieyſzé takié: *Znaleźć dwie ilości, któréby tak ſię do ſiebie miały, iak liczby cáłkowité* m, *i* n (m, *większá liczba* n, *mnieyſzá*,) *i których różnica ieſt* d.

Mianowanié. Mnieyſzá ilość . . . nx.
Większá ilość . . . mx albo $nx+d$.

Warunek $mx=nx+d$.

Przerábianié. (Odiąwſzy nx po obu ſtronach) $mx-nx=d$.
(Rozłożywſzy pierwſzą ſtronę na dwa *Czynniki* (Factores,) z których ſię ſkładá $1x\,(m-n)=d$.

(Podzie-

(Podzieliwszy obié strony przez $m-n$) $x = \frac{1}{m-n} d.$

Rozwiązanie. $nx = \frac{n}{m-n} d.$ Mnieysza ilość.

$mx = \frac{m}{m-n} d.$ Większa ilość.

$$nx + d = \frac{n}{m-n} d + d = d\left(\frac{n}{m-n} + 1\right) = d\left(\frac{n}{m-n} + \frac{m-n}{m-n}\right)$$

$= d\left(\frac{m}{m-n}\right)$. Drugié wyrażénié większéy ilości. (*)

Przykłady. Złodziéy uciekaiący ubiéga 5 mil na dzién: pogón cztéry dni po ucieczce za nim wysłaná ubiéga na dzién mil 7. Jakże prędko dogoni złodzieia?

Rozumo: Przy wysłaniu pogoni złodziéy przez 4 dni iuż uciekaiąc, ubiégł mil 20, i ta iest różnica początkowá drogi pogoni od drogi złodzieia.

Drogi przez pogóń, i przez złodzieia ubieżoné będą względém pogoni 7, a względém złodziéia 5 mil, tylé razy wziętych, ilé dni iest ich biegu. Więc $m = 7$.

$n = 5$.

$d = 20$.

Położywszy zamiást m, n, d, ważności ich szczególné, będzie

$x = \frac{1}{m-n} \times d = \frac{1}{2} \times 20 = 10.$ Dni biegu pogoni.

$mx = \frac{m}{m-n} \times d = \frac{7}{2} \times 20 = 70.$ Mile uiechané od pogoni w 10 dniach.

$nx = \frac{n}{m-n} \times d = \frac{5}{2} \times 20 = 50.$ Mile ubieżoné od złodzieia od czasu wysłania pogoni.

Niech

(*) Gdyby się postrzegało, iż wprowadzénié więcéy niż iednégo znaku ogólnégo sprawuie trudność uczniom, tedy Nauczyciel dłużéy się zabawi nad sa-

Niech znowu będzie

$m = 8.$	$m = 10.$	$m = 13.$	$m = 15.$
$n = 5.$	$n = 6.$	$n = 9.$	$n = 11.$ i t. d.
$d = 24.$	$d = 32.$	$d = 36.$	$d = 40.$

107. *Zadanié 2. Znaléźć dwie ilości których summa iest daná, i z których iedna podwóyná iest drugiéy.*

Rozumowanié. Ponieważ iedna z tych ilości podwóyná iest drugiéy; więc ich summa będzie potróyná ilości mnieyszéy: a zatém mnieyszá ilość będzie trzecią częścią téy summy, a większá będzie $\frac{2}{3}$ téyże summy. Przeto gdy summę daną oznaczymy przez s, mnieyszá ilość oznaczy się przez $\frac{1}{3}s$, a większá przez $\frac{2}{3}s$.

Algiebraicznie. Mianowanié. Mnieyszá ilość . . . x.
Większá . . . . . $2x$.

Warunek. $1x + 2x = S.$

Przerábianié. $3x = S.$

$$1x = \frac{S}{3} = \tfrac{1}{3} S.$$

Rozwiązanié $x = \frac{1}{3} S.$ Mnieyszá ilość.
$2x = \frac{2}{3} S.$ Większá ilość.

Sprawdzénié. $\frac{1}{3} S + \frac{2}{3} S = S.$

Toż samo rozumowanié, i ténże sposób postępowania má mieysce, iakążkolwiek liczbę razy zawiérałyby iedna ilość drugą, gdy obudwóch ich summa iest daná.

Trzeba to piérwéy na wielu przykładach okázać, nim się przystąpi do ogólnych wyrażéń spółczynników.

W ogólności mówiąc: niech będzie summa daná s, do podzielénia na dwie części, któréby się do siebie miały iak liczby dané m, i n.

 Miano-

mémi przypádkami, że ich tak nazwę, półogólnémi, w którychby spółczynniki ilości niewiadomych, były wyszczególnioné przez liczby; a sama tylko różnica, oznaczoná, ogólnie. Przez ćwiczénié się na zadaniach następuiących nabiorą Uczniowie łatwości w obchodzéniu się w przypádkach tych mniéy ogólnych.

Mianowanié. Części szukané . . . mx, nx.

Warunek. $mx + nx = S.$

Przerábianié. $x(m+n) = S$, $x = \dfrac{S}{m+n} = \dfrac{1}{m+n} S.$

Rozwiązanié. $mx = \dfrac{m}{m+n} S.$
Części szukané.
$nx = \dfrac{n}{m+n} S.$

Sprawdzénié. $\dfrac{m}{m+n} S + \dfrac{n}{m+n} S = S\left(\dfrac{m+n}{m+n}\right) = S.$

108. *Przykłady. Dwie osoby w odległości 272 mil będącé iadą na przeciwko siebie. Jedna z nich ieżdżá na dzién mil 9, a drugá 7. Za iléż dni zjadą się z sobą, i iak wielé mil każdá z nich uiedzie?*

Rozwiązanié. Mile od tych osób uiechané przed spotkaniém się powinny zamykać w sobie 9, i 7 mil tylé razy, ilé dni té osoby iechały do siebie: więc

$x = \dfrac{1}{m+n} S = \dfrac{272}{9+7} = \dfrac{272}{16} = 17.$ Dni iazdy.

$mx = \dfrac{m}{m+n} S = \dfrac{9 \times 272}{9+7} = \dfrac{2448}{16} = 153.$ Mile od 1wszéy osoby uiechané.

$nx = \dfrac{n}{m+n} S = \dfrac{7 \times 272}{9+7} = \dfrac{1904}{16} = 119.$ Mile od 2giéy osoby uiechané.

Pewná osoba kupiwszy pewną liczbę łokci sukna po 12 Zł. i tyléż łokci materyi po 7 Zł. zapłaciła za wszystko 285 złotych.

Niech znowu będzie $m = 7.$ $m = 8.$
$n = 5.$ $n = 5.$
$S = 168.$ $S = 195.$

Uwága.

Uwága. Ostatnié Zagadnienié wychodzi na iedno, co reguła spółki w Arytmetyce. Rozwiązaliśmy ié Jeometrycznie na swoiém mieyscu (Jeom. Część I. § 221.) Rachunek poprzedzaiący możná do wykréślénia przystósować. Jakoż niechby trzeba podzielić liniią AB, na 2 części, któréby się tak do siebie miały, iak dwie liniie dané. Przez końce A, i B, linii AB, pociągniéymy po dwóch stronach téy linii, liniie AC, BD, równo-odległé od siebie, i równé względém liniy danych. Punkt X, w którym liniiá CD przeymie liniią AB, będzie punktém podziáłu szukanégo. Dlá przystósowania tego wykréślénia do rachunku poprowádźmy CE, równo-odległą od AB, tak daleko, aż spotká BD w E. Niech będzie $AB = a$. Fig. 22.

$$AC = m. \quad BD = n. \quad \text{Więc } DE = AC + BD = m + n.$$
$$CE = a.$$

Tróykąty DEC, DBX, są podobné: więc
DE : DB = CE : BX.

albo; $m+n : n = a : BX$, a zatém $BX = a \times \frac{n}{m+n}$.

Tróykąty: DEC, CAX, są także podobné: więc
DE : AC = CE : AX;

albo: $m+n : m = a : AX$; a zatém, $Ax = a \times \frac{m}{m+n}$.

Podobné przystósowanié uczynić możná, i do piérwszégo Zadania.

109. *Zadanié 3. Znaléźć dwie ilości, których daná iest summa i różnica.*

Rozumowanié. Jeżeli dlá otrzymania większéy ilości, dodaie się do połowy summy danéy ilość pewná; toć tę samę ilość odiąć trzeba od połowy summy, aby mieć ilość mnieyszą: więc różnica dwóch ilości szukanych, będzie dwa razy tak wielká, iak iest różnica iednéy z nich od połowy summy: a zatém większá ilość przewyższá połowę summy połową różnicy danéy, a mnieyszá ilość nie dochodzi połowy téy summy połową także różnicy danéy.

Niechby summa daná dwóch ilości była oznaczoná przez s, a różnica przez d; będzie ilość większá szukaná $= \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}d$, a mnieyszá $= \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}d$.

Algiebraicznie. Mianowanié. Mnieyſzá ilość . . x.
Większá . . . . $x + d$.
Summa . . . . $2x + d$.

Warunek. $2x + d = ſ$.

Przerábianié. (Odiąwſzy d) . . . . . $2x = ſ - d$.
(Podzieliwſzy przez 2) . $1x = \frac{1}{2}ſ - \frac{1}{2}d$.

Rozwiązanié. $x = \frac{1}{2}ſ - \frac{1}{2}d$. Mnieyſzá ilość.
$x + d = \frac{1}{2}ſ - \frac{1}{2}d + d = \frac{1}{2}ſ - \frac{1}{2}d + \frac{2}{2}d = \frac{1}{2}ſ + \frac{1}{2}d$.
Większá ilość.

Sprawdzénié. $\frac{1}{2}ſ - \frac{1}{2}d + \frac{1}{2}ſ + \frac{1}{2}d = \frac{1}{2}ſ + \frac{1}{2}ſ = ſ$.

Twiérdzénié. Ze dwóch ilości większá równá ſię zawſze połowie ich ſummy, i połowie różnicy: mnieyſzá zaś równá ſię połowie ſummy mniéy połową różnicy.

Jeſt to twiérdzénié wielkiéy wági, któré nám iuż użyteczné było w Jeometryi (§. 342, 343, Częśći I.) a któré i w ciągu tego dzieła wielé ſię przyda. Można tu przypomnieć dowodzénié Jeometryczné, (§. 188, Częśći I.) i przyſtóſować ié do wielu liczebnych przykładów.

110. *Zadanié. 4. A, má 3 razy tylé, ilé B: gdy zaś zyſká tak A, iak i B, iednakową ſummę* a; *maiątek A, będzie 2 razy tylko tak wielki, iak maiątek B.*

Przez rozumowanié. Po zyſkanéy ſummie a przez B, aby maiątek A, był ieſzcze 3 razy tak wielki, iak maiątek B; trzeba było oſobie A, zyſkać $3a$. Ale że A, zyſknie tylko a; więc nie doſtaie iéy $2a$, do tego, aby miała 3 razy tylé, ilé má B, po zyſku. Że zaś po tym zyſku z obu ſtrón A, má tylko dwa razy tylé, ilé B; więc nie doſtaie oſobie A, maiątku oſoby B, który má po zyſku, aby A, była i potym zyſku 3 razy tak maiętná iak B; więc maiątek B po zyſku, ieſt $2a$, a przed zyſkiém był a.

Algiebraicznie. 1wſzy maiątek B . . . . x.
1wſzy maiątek A . . . . $3x$.
2gi maiątek B . . . . . $x + a$.
2gi maiątek A . . . . . $3x + a$, albo $2x + 2a$.

Warunek. $3x + a = 2x + 2a$.

Prze-

Przerabianie. $1x + a = 2a$ $1x = a$.
Rozwiązanie $1x = a$. 1wſzy maiątek B.
$3x = 3a$. 1wſzy maiątek A.
$x + a = 2a$. 2gi maiątek B.
$3x + a = 4a$. 2gi maiątek A.
$2x + 2a = 4a$. Drugié wyrażénié tego 2go maiątku A.

Jakążkolwiek tedy będzie ſumma daná, którą tak A, iak i B zyſkuie, wſzelako piérwſzy maiątek B, zawſze będzie równy téy ſummie, byleby warunki Zagadniénia téż ſamé zoſtały. Choćby zaś i nierówné były zyſki, i oſoba A, zyſkała ſummę a, oſoba zaś B, ſummę b; tedy ſpoſób poſtępowania tak przez rozumowanié, iak i przez Algiebrę byłby prawie tén ſám co wyżéy.

I tak, aby oſoba A, miała zawſzé 3 razy tylé, ilé B; trzebaby iéy zyſkać $3b$, ale że zyſkuie tylko a, (które a, oznácza ſummę mnieyſzą niż $3b$;) więc nie doſtaie iéy $3b - a$, do tego, aby miała 3 razy tylé, ilé B, po zyſku. Że zaś brakuie iéy do tego w ſaméy rzeczy maiątku B, po zyſku; więc maiątek B, po zyſku ieſt $3b - a$.

1wſzy maiątek B . . .	$2b - a$.
1wſzy maiątek A . . .	$6b - 3a$.
2gi maiątek B	$3b - a$.
2gi maiątek A	$6b - 2a$.

Algiebraicznie. 1wſzy maiątek B . . . x.
1wſzy maiątek A . . . $3x$.
2gi maiątek B . . . . $x + b$.
2gi maiątek A . . . . $3x + a$ albo $2x + 2b$.

Warunek. $3x + a = 2x + 2b$.
(Odiąwſzy $2x$) $1x + a = 2b$.
(Odiąwſzy a) $1x = 2b - a$. tak iak wyżéy.

Tymże ſamym ſpoſobém poſtąpić ſobie należy, iakiéżkolwiek były by liczby razy, któréni iedna z jlości ſzukanych zawiéralyby w ſobie drugą, tak przed zyſkiém iak i po zyſku, co téż na różnych przykładach okázać trzeba. Naoſtatek rozwiąże ſię ogólné zagadnienié, ſzukaiąc dwóch ilości, których wiadomy ieſt ſtoſunek, i których powiękſzonych danémi ilościami, ſtoſunek także ieſt wiadomy. Niech będą dwie ilości, z których naprzód iedna

dna zawiérá w ſobie drugą razy m: niech iedna z nich powiękſzá ſię ilością a, drugá zaś ilością b, i po tém powiękſzéniu piérwſzá niech zawiérá drugą, razy n.

Przez rozumowanié. Ponieważ 2gá ilość powiękſzá ſię ilością b, więc gdyby piérwſzá powiękſzyła ſię ilością mb; tedy i po powiękſzéniu zawiérałaby w ſobie ilość drugą razy m. Więc ieżeli $a = mb$, tedy n, będzie $= m$, i zagadniénié ieſt nie wyznaczoném. Jeżeli a mniéy waży niż mb; tedy po powiękſzéniu obudwóch ilości brakuie 1wſzéy $\overline{mb - a}$ do tego, aby była m razy tak wielká, iak 2gá. Że zaś brakuie iéy także $\overline{m - n}$ razy 2giéy ilości po iéy powiękſzéniu; więc 2gá ilość po ſwoiém powiękſzéniu waży $\frac{mb - a}{m - n}$: przed powiękſzéniém zaś taż ilość ważyła

$$\frac{mb - a}{m - n} - b = \frac{mb - a - mb + nb}{m - n} = \frac{nb - a}{m - n}.$$

1wſzá ważność mnieyſzéy ilości . . . . $\frac{nb - a}{m - n}$.

1wſzá ważność większéy ilości . . . . $\frac{mnb - ma}{m - n}$.

2gá ważność mnieyſzéy ilości . . . . $\frac{mb - a}{m - n}$.

2gá ważność większéy ilości . . . . $\frac{mnb - na}{m - n}$.

Jeżeli a więcéy waży, niż mb; tedy po powiękſzéniu obudwóch ilości 1wſzá zawiérá w ſobie więcéy niż m, razy drugą: i do tego, aby ią zawiérała razy m, má nad to $\overline{a - mb}$: ale że też má nad to i drugą ilość po iéy powiękſzéniu wziętą razy $n - m$; więc 2gá ilość po ſwoiém powiękſzéniu waży $\frac{a - mb}{n - m}$, przed powiękſzéniém zaś ważyła $\frac{a - mb}{n - m} - b$ $= \frac{a - nb}{n - m}$.

Uwága.

Uwága. Dwa wyrażénia $\frac{nb - a}{m - n}$ i $\frac{a - nb}{n - m}$ ſą równé, gdy té ſamé w obudwóch wyrażéniach ſą ważności liter, a, b, m, n: co okázać można wieloráko, *np.* ſtąd, że wyrazy 2go ułómku ſą té ſamé co i wyrazy 1go ułómku rozmnożoné przez tę ſamę ilość — 1. Dlá ſamégo więc tylko rozumowania przyſtało mieć wzgląd na wielkość a, względém wielkości mb.

Algiebr: Drugá ilość . . . x. 2gá ilość pomnożoná . . $x+b$.
1wſzá . . . . . mx. 1wſzá ilość pomnożoná $mx+a$.
albo . . . $nx+nb$.

Warunek. $mx + a = nx + nb$.

Przerábianié. (Odjąwſzy a) . . . $mx = nx + nb - a$.
(Odjąwſzy nx) . . . $mx - nx = nb - a$.
(Podzieliwſzy przez $m - n$) $x = \frac{nb - a}{m - n}$.

Rozwiąz: $x = \frac{nb - a}{m - n}$. 1wſzá ważność 2giéy ilości. (*)

$mx = \frac{mnb - am}{m - n}$. 1wſzá ważność 1wſzéy ilości.

$x + b = \frac{mb - a}{m - n}$. 2gá ważność 2giéy ilości.

$mx + a = \frac{mnb - na}{m - n}$. 2gá ważność 1wſzéy ilości.

Należy

(*) O trudoności naſtępuiącéy nie trzeba wſpominać Ucznióm, chyba że ią ſami wzniecą.

Gdy $a = mb$, a zatém $m = n$ wtedy wyrażénié $\frac{nb - a}{m - n}$ odmiéniá ſię w naſtępuiącé: $\frac{nb - mb}{m - n} = b\left(\frac{n - m}{m - n}\right) = b \times \frac{0}{0}$. Ilość zaś ta $\frac{0}{0}$ może bydź

Należy przyſtóſować té *Formy ogólné* (Formulæ generales) do wielu przykładów ſzczególnych.

Przykład. Niech będzie . . . . . . $m = 4$.

$n = 3$.

$$x = 3b - a.$$
$$mx = 12b - 4a.$$
$$x + b = 4b - a.$$
$$mx + a = 12b - 3a.$$

Podadzą tu Nauczyciele do rozwiązania, i ſtakié Zagadniénia, w których iedna ilość powiękſzá ſię, a drugá zmnieyſzá ilością daną, wyznaczywſzy ſtoſunki dwóch ſzukanych ilości, nim ſię odmiénią, i po ich odmianach.

111. *Zadanié 5. Maiątki trzech oſób A, B, C, ſą takié: że Summa maiątków A, i B, ieſt* . . . . a.
. . . . *A, i C,* . . . . b.
. . . . *B, i C,* . . . . c.
Jakiéż będą té maiątki w ſzczególności?

Arytmetycznie.. Summa podwóyná maiątków A, B, C. ieſt . . . . $a+b+c$.

Summa poiedynczá tychże maiątków $\dfrac{a+b+c}{2}$

Maiątek A . . . . $\dfrac{a+b+c}{2} - c = \dfrac{a+b-c}{2}$.

. . . . . B . . . . $\dfrac{a+b+c}{2} - b = \dfrac{a-b+c}{2}$.

. . . . . C . . . . . $\dfrac{a+b+c}{2} - a = \dfrac{-a+b+c}{2}$.

Jeżeli

iakążkolwiek ilością ſkończoną. Bo dáymy iakikolwiek wielorázˌ z tego licznika podzielonégo przez mianownika zawſze z rozmnożénia tego wielorazu przez mianownika o, wypadnie o. Więc równie z rachunku, iak i z rozumowania okazuie ſię, iż zadanié będzie niewyznaczoné, gdy $m = n$. Co ſię iuż pokázało w rozumowaniu.

Jeżeli tedy od summy dwóch ilości, których częścią iest maiątek iednéy z tych 3. osób, odeymiémy summę danę maiątku dwóch innych osób; połowa reszty okáże maiątek téyże osoby.

Algiebr: Mian: Summa szukaná 3 osób . . . x.
Maiątek A . . . . $x - c$.
. . . . . B . . . . $x - b$.
. . . . . C . . . . $x - a$.
Summa 3 maiątków . . . . $3x - a - b - c$

Warunek. $3x - a - b - c = x$.

Przerábianié. (Dodáwszy $a+b+c$) $3x = x + a + b + c$.
(Odiąwszy $1x$) . . . $2x = a + b + c$.
(Podzieliwszy przez 2) $1x = \dfrac{a+b+c}{2}$.

Rozwiązanié. $x - c = \dfrac{a+b-c}{2}$. Maiątek A.

$x - b = \dfrac{a-b+c}{2}$. Maiątek B.

$x - a = \dfrac{-a+b+c}{2}$. Maiątek C.

Sprawdzénié. $\dfrac{a+b-c}{2} + \dfrac{a-b+c}{2} = a$.

$\dfrac{a+b-c}{2} + \dfrac{-a+b+c}{2} = b$.

$\dfrac{a-b+c}{2} + \dfrac{-a+b+c}{2} = c$.

Przykłád. $a = 20$.
$b = 16$.
$c = 14$.

$$\frac{a+b-c}{2} = \frac{20+16-14}{2} = \frac{22}{2} = 11.$$

$$\frac{a-b+c}{2} = \frac{20-16+14}{2} = \frac{18}{2} = 9.$$

$$\frac{-a+b+c}{2} = \frac{-20+16+14}{2} = \frac{10}{2} = 5.$$

Jakiż będzie maiątek każdéy ze 4 osób A, B, C, D, gdy summa maiątków A, B, C . . . . ieſt . . . . a.
. . . . . A, B, . . D . . . . b.
. . . . . A, . . C, D . . . . c.
. . . . B, C, D . . . . d.

Arytmetycznie. Potróyná ſumma 4 maiątków ieſt $a+b+c+d$.

Summa poiedynczá tychże 4 maiątków . . . . . $\frac{a+b+c+d}{3}$.

Maiątek A . . . $\frac{a+b+c+d}{3} - d = \frac{a+b+c-2d}{3}$.

. . . . . B . . . $\frac{a+b+c+d}{3} - c = \frac{a+b-2c+d}{3}$.

. . . . . C . . . $\frac{a+b+c+d}{3} - b = \frac{a-2b+c+d}{3}$.

. . . . . D . . . $\frac{a+b+c+d}{3} - a = \frac{-2a+b+c+d}{3}$.

Jeżeli tedy od ſummy trzech ilości, któréy częścią ieſt maiątek iednéy z tych 4 osób odeymiémy podwóyną ſummę daną maiątku trzech innych osób, i reſzty weźmiémy część trzecią; ta okáże maiątek téy osoby.

Sposób poſtępowania Algiebraicznégo ieſt także tén ſám co wyżéy.

Mianowanie. Summa ſzukaná 4 maiątków . . . . . x.
Maiątek A . . . . $x-d$.
. . . . . B . . . . $x-c$.
. . . . . C . . . . $x-b$.
. . . . . D . . . . $x-a$.

Summma 4 maiątków . . . . $4x - a - b - c - d.$
albo . . . . $4x - (a + b + c + d.)$

Warunek. $4x - (a + b + c + d) = x.$

Przerábianié. (Dodáwszy $a+b+c+d$) $4x = x + (a+b+c+d.)$
(Odiąwszy $1x$) . . . . . $3x = a+b+c+d.$
(Podzieliwszy przez 3) $1x = \frac{a+b+c+d}{3}.$

Ténże sám sposób iest postępowania, gdy więcéy ieszcze będzie ilości, których (oprócz iednéy z nich) dané są wszystkié summy.

112. *Zadanié 6. Maiątki cztérech osób: A, B, C, D, są takié, że*
A, i B, maią razém summę. . . . $a.$
C, i D, maią razém summę . . . $b.$
A, má 2 razy tylé, ilé C.
D, má 3 razy tylé, ilé B.
Jakież są té maiątki w szczególności?

Przez rozumowanié. Niech liniiá AB, wystáwiá nám summę maiątków, A i B: a liniiá CD, niech wystawiá summę maiątków C, i D. Niech AX, wystáwiá maiątek szukany, A: BX, maiątek B: CY, maiątek C: DY, maiątek D. Fig. 23.

Gdyby AB, była dwa razy tak wielká, iak CD; tedy ponieważ maiątek A, dwa razy iest tak wielki, iak maiątek C; maiątek także B, byłby dwa razy tak wielki, iak maiątek D. Ale że maiątek B, iest mnieyszy niż maiątek D, dwa razy wzięty; więc AB, powinna bydź daná mnieyszá niżeli CD, dwa razy wziętá. Niech będzie AE, dwa razy tak wielká, iak CD, będzie téż EX, dwa razy tak wielká, iak DY. A że DY, má bydź trzy razy tak wielká, iak BX; więc liniiá DY, dwa razy wziętá, będzie 6 razy tak wielká, iak BX: a zatém EX, sześć razy także zamyká w sobie liniią BX. EB, zaś będzie 5 razy tylá, ilá iest BX. A że EB $= 2b - a$, więc BX $= \frac{2b - a}{5}.$

Maiątek B . . . $\frac{2b - a}{5}.$

. . . . . A . . $a - \left(\frac{2b - a}{5}\right) = \frac{6a - 2b}{5}.$

 Maią-

Maiątek D . . . $\dfrac{6b-3a}{5}$.

. . . . . C . . $b-\left(\dfrac{6b-3a}{5}\right)=\dfrac{3a-b}{5}$.

Algiebr: Mian: Maiątek B . . . . . . x.
. . . . . A . . . . $a-x$.
. . . . D . . . . . $3x$.
. . . . C . . . . $b-3x$.

Warunek. $a-x=2(b-3x.)$

Przerábianié. $a-x=2b-6x$.
(Dodáwszy $6x$) . . . . $5x+a=2b$.
(Odiąwszy a) . . . . . . $5x\quad =2b-a$.
(Podzieliwszy przez 5) . $1x=\dfrac{2b-a}{5}$. tak iak wy-
żéy.

Sposób postępowania nie odmiéni się, choćby odmiénné były dané stosunki: co na innych przykładach okázać należy, z przystosowaniém każdégo przypádku do liczb szczególnych.

Mało co także tén sposób odmiéni się, gdy dane będą różnice maiątków, albo iednych summa, a drugich różnica. (Obácz w Rozd:. I. Zadanié 21, 22, 23.)

Naostatek przystosowanié iest łatwé, i do innych przypádków, gdzieby więcéy iak 4 ilości wchodziło. (Obácz ieszcze i w téy mierze Rozdz: I. Zadanié 29.)

113. *Zadanié 7. Maiąc dané dwie ilości*, a, *i* b, *z których piérwszá bierze się za więcéy niż dwa razy tak wielką, iak drugá: iléż trzeba będzie dodádź iednéy, i drugiéy, aby piérwszą zrobić podwóyną drugiéy.*

Fig. 24. Niech liniie AB, i CD, wystawuią nám ilości dané a, i b, z których a, więcéy niż dwa razy iest tak wielká, iak b. Weźmy na AB, liniią AE, dwa razy tak wielką iak CD, i niech liniie równé BX, DY, oznáczaią ilość, którą trzeba dodádź tak do AB, iak i do CD, aby mieć AX, dwa razy tak wielką, iak CY.

Ponie-

Ponieważ AX, powinna bydź dwa razy tak wielká, iak CY, a że iuż ieſt AE, dwa razy tak wielká, iak CD; więc EX, będzie dwa razy tak wielká, iak DY, albo BX: a zatém $BX = EB$.

A że $EB = a - 2b$, więc $BX = DY = a - 2b$.
$AX = a + (a - 2b) = 2a - 2b$.
$CY = b + (a - 2b) = a - b$.

Algiebr: Mian: Ilość ſzukaná dlá dodania . . . x.
Summy ſzukané . . . $a+x$, i $b+x$.

Warunek. $a+x = 2b+2x$.

Przerábianié. (Odiąwſzy x) $a = 2b+x$.
(Odiąwſzy $2b$) $1x = a - 2b$. tak iak wyżéy.

Tymżé ſpoſobém maiąc dané dwie ilości a, i b, wyznaczyć możná ilość trzecią, któráby tak do a, iak i do b, dodaná, uczyniła ſummę piérwſzą 3, 4, 5, i t. d. razy tak wielką iak drugá, a w ogólności mówiąc, któráby to ſprawiła, aby piérwſzá ſumma była do drugiéy w danym ſtoſunku.

Nie odmiénny ieſt i tén ſpoſób, którym rozwiązać możémy naſtępuiącé Zadanié.

Jakąż ilość odiąć potrzeba, od iednéy i od drugiéy ilości danéy, albo dodadź do iednéy, a odiąć od drugiéy, aby té dwie ilości miały ſię do ſiebie, iak 2 liczby dané?

114. *Zadanié 8. Pewná oſoba kupuie liczbę* n, *łokci ſukna, dwoiakiégo gatunku, lepſzégo łokieć po Zł.* a, *podleyſzégo zaś łokieć po Zł.* b. *Wydała ze wſzyſtkiém na ſukno ſummę* ſ.

Iléż łokci było w wyżſzéy, a ilé w niżſzéy cenie?

Arytmetycznie. Gdyby wſzyſtkié łokcie tego ſukna były po Zł. a, tedyby koſztowały Zł. an, a że tylko koſztowały $ſ$, więc mniéy w ſaméy rzeczy koſztowały Zł. $an - ſ$. Ta zaś różnica ſtąd pochodzi, że była kupioná pewná liczba łokci, tylko po Zł. b, toieſt taniéy łokieć złotémi $a - b$; a zatém ilé razy ta różnica $a - b$, ceny łokcia ſukna tańſzégo, od drożſzégo, znayduie ſię w różnicy $an - ſ$, ceny wſzyſtkich łokci ſukna tańſzégo, od drożſzégo; tylé téż łokci było ſukna tańſzégo. Podzieliwſzy więc $an - ſ$, przez $a - b$, doydziémy liczby łokci ſukna tańſzégo.

$$\frac{an - ſ}{a - b}.$$ Liczba łokci ſukna tańſzégo.

$$n - \left(\frac{an - ſ}{a - b}\right) = \frac{an - bn}{a - b} - \left(\frac{an - ſ}{a - b}\right) = \frac{ſ - bn}{a - b}.$$ Liczba łokci ſukna drożſzégo.

Uwága. To Zadanié ogólniéy ieſzcze wzięté, takby mogło bydź wyrażoné.

Podzielić liczbę daną n, *na dwie części, których rozmnożonych przez liczby dané* a, *i* b, *ſumma równałaby ſię liczbie danéy* ſ.

Toż Zadanié uważaiąc ié Jeometrycznie, wyſzłoby na naſtępuiącé:

Znaléźć dwie linie, których daná ieſt ſumma, i których wiémy ſummę proſtokątów, przez dwie inné linie dané.

Fig. 25. Niech będzie AB, liniiá daná, którą tak podzielić trzeba w punkcie X, aby ſumma proſtokątów ze dwóch części AX, BX, przez linie dané AC, BD, równała ſię wielkości danéy.

Wyſtáwmy ſobie, iak gdyby zrobioné dwa proſtokąty AXYC, BXZD, z części ſzukanych AX, BX, przez linie dané: i pociągniymy DZ, aż ſię ſpotká, z AC, w E.

Proſtokąt ABDE, z całéy linii danéy AB, przez BD, ieſt wiadomy, więc proſtokąt EZYC, który ieſt nadmiarém ſummy danéy dwóch proſtokątów, nad proſtokąt ABDE, będzie także wiadomy. Aże iedén bok iego CE, który ieſt różnicą dwóch liniy danych AC, BD, ieſt wiadomy; więc téż i drugi bok EZ, albo AX wiadomy będzie.

Niech będzie iak wyżéy . . . . . . AB $= n$.
AC $= a$.
BD $= b$.
Summa daná powiérzchni 2 proſtokątów . . . . $ſ$.

Będzie ABDE $= nb$.
a zatém EZYC $= ſ - nb$.
a że ieſt EC $= a - b$.

więc EZ, albo AX $= \dfrac{ſ - nb}{a - b}$;

BX

$$BX = AB - AX = n - \left(\frac{ſ - nb}{a - b}\right) = \frac{an - ſ}{a - b}.$$

$$AXYC = \frac{ſ - nb}{a - b} \times a = \frac{aſ - anb}{a - b}.$$

$$BXZD = \frac{an - ſ}{a - b} \times b = \frac{abn - bſ}{a - b}.$$

$$AXYC + BXZD = \frac{aſ - anb}{a - b} + \frac{abn - bſ}{a - b} = \frac{aſ - bſ}{a - b} = ſ\left(\frac{a - b}{a - b}\right) = ſ.$$

Algiebraicznie. Mianowanie. Jedna część . . . . x.
Drugá część . . . $n - x$.

Piérwſzá część przez a rozmnożoná . . . ax.
Drugá część przez b rozmnożoná . . . $bn - bx$.

Warunek. $ax + bn - bx = S$.

Przerób: (Odiąwſzy bn) . . . . $ax - bx = ſ - bn$.
albo . . . . $x(a - b) = ſ - bn$.
(Podzieliwſzy przez $a - b$) $x = \frac{ſ - bn}{a - b}$. tak iak wyżéy.

Możnáby tak ogólnie rózwiązać i Zadania 31 aż do 34go Rozdziału I. które na to wychodzą, aby znaleźć dwie liczby, których ſumma, albo różnica ieſt daná, i których wiémy także ſummę, albo różnicę wieloczynów, przez liczby dané.

Trzeba będzie każdy przypádek, do przykładów liczebnych przyſtóſować.

115. *Zadanié 9. Jeſt proſtokąt, którégo długość dwa razy tak wielká, iak ſzérokość. Dodano liczbę ſtóp* m, *wiadomą do iego długości, a liczbę ſtóp* n *także wiadomą, do iego ſzérokości. Powiérzchnia proſtokąta powiękſzyła ſię przez to liczbą daną* p, *ſtóp kwadratowych.*

Niech będzie AXYZ proſtokąt, którégo długość AX, dwa razy ieſt tak wielká, iak ſzérokość AZ: gdy do boków iego dodámy liniie wiadomé BX, CZ, (m, i n) powiérzchniá powiękſzoná będzie liczbą daną p, ſtóp kwadratowych. Fig. 25.

Powię-

Powiękſzéniém téy powiérzchni ieſt Węgielniczka BXYZCDB, którą można rozłożyć na dwa proſtokąty BY, i FZ, maiące za boki liniie dané BX, CZ, i liniie ſzukané XY, ZY, i na proſtokąt EDFY, którégo daná ieſt powiérzchniá mn. Więc i ſumma dwóch proſtokątów BY, i FZ, będzie daná, bo będzie $p - mn$.

Summa tych dwóch proſtokątów, równá ſię trzém proſtokątóm maiącym za bok iedén ſpólny ſzérokość XY, piérwſzégo proſtokąta, a z których dwa maią za drugi bok powiękſzénié CZ, albo n ſzérokości, trzeci zaś má za bok drugi powiękſzénié BX, albo m, długości, i powiérzchniá tych trzech proſtokątów, równałaby ſię powiérzchni iednégo proſtokąta, któryby miáł za iedén bok ſzérokość XY, piérwſzégo proſtokąta, a za bok drugi ſummę z liniy BX, i dwa razy wziętéy CZ. Powiérzchniá tego proſtokąta, byłaby $p - mn$; a że iedén bok iego wiadomy, ieſt $m + 2n$, więc drugi iego bok XY, będzie $\frac{p - mn}{m + 2n}$.

Szérokość 1go proſtokąta . . . . $\frac{p - mn}{m + 2n}$.

Długość . . . . $\frac{2p - 2mn}{m + 2n}$

Powiérzchniá . . . . $\frac{2(pp - 2pmn + mmnn)}{mm + 4mn + 4nn}$.

Drugá ſzérokość . . . . . . $\frac{p - mn}{m + 2n} + n = \frac{p + 2nn}{m + 2n}$.

Drugá długość . . . . . . $\frac{2p - 2mn}{m + 2n} + m = \frac{2p + mm}{m + 2n}$.

Drugá powiérzchniá . . . . $\frac{2pp + pmm + 4pnn + 2mmnn}{mm + 4mn + 4nn}$

Różnica dwóch powiérzchni . . . $\frac{pmm + 4pmn + 4pnn}{mm + 4mn + 4nn} =$

$$p\left(\frac{mm + 4mn + 4nn}{mm + 4mn + 4nn}\right) = p.$$

Wzór

Wzór rozmnożéń poprzedzaiących:

$p + 2nn$ . . . . Mnożny.
$2p + mm$ . . . . Mnożnik.

$2pp + 4pnn$ . . . . . . Wieloczyn przez $2p$.
$pmm + 2mmnn$ . . . . . Wieloczyn przez mm.

$2pp + 4pnn + pmm + 2mmnn$. Wieloczyn cáłkowity.

$p - mn$ . . . . Mnożny.
$p - mn$ . . . . Mnożnik.

$pp - pmn$. . . . . . . Wieloczyn przez p.
$- pmn + mmnn$ . . . . Wieloczyn przez $- mn$.

$pp - 2pmn + mmnn$ . . . Wieloczyn cáłkowity.
$2pp - 4pmn + 2mmnn$ . . . Wieloczyn z $p - mn$, przez $2(p - mn)$

$2pp + 4pnn + pmm + 2mmnn$. *Odiemny*, (Minuendus.)
$2pp - 4pmn \qquad + 2mmnn$. *Odiemnik*. (Subtrahendus.)

$4pnn + 4pmn + pmm$.

albo . . . . $p(4nn + 4mn + mm.)$
albo nakoniec, . . . $p(2n + m)^2$ . . . . Reſzta.

Algiebr: Mian: 1 wſzá ſzérokość . . . . x.
1 wſzá długość . . . . $2x$.
1 wſzá powiérzchniá . . . . . . $2xx$.

2gá ſzérokość . . . . . $x + n$. Mnożny.
2gá długość . . . . . . $2x + m$. Mnożnik.
$2xx + 2nx$. Wieloczyn przez $2x$.
$mx + mn$. Wieloczyn przez m.

2gá powiérzchniá . . $2xx + x(m + 2n) + mn$. Wieloczyn cáłkowity.

$x(m + 2n) + mn$. Różnica dwóch powiérzchni.

Warunek. $x(m + 2n) + mn = p$.

Przerábianié. (Odiąwszy mn) . . . . . . $x(m+2n)=p-mn$.

(Podzieliwszy przez $m+2n$) $x=\frac{p-mn}{m+2n}$. 1wszá szérokość tak iak wyżéy.

Ténże sám iest sposób postępowania, iakiżkolwiek będzie stosunek dwóch boków 1go prostokąta: co na wielu przykładach okázać należy. Tymże prawie sposobém możnáby ogólnie rozwiązać Zadanié 37, i 38. Rozdziału I.

Przy tych Zadaniach podała się pora, do czyniénia mnożénia Algiebraicznégo przez znaki ogólné.

116. *Przykłád 1. Znaléźć wyrażénié kwadratu summy dwóch ilości?*

$a+b$. Mnożny.
$a+b$. Mnożnik.

$aa+ab$. Wieloczyn przez a.

$ab+bb$. Wieloczyn przez b.

$aa+2ab+bb$. Kwadrát z $a+b$, który zawiérá w sobie kwadrát z a, i z b, i dwa razy wzięty wieloczyn iednéy z tych ilości przez drugą.

To podanié dowiodło się na swoiém mieyscu sposobém Jeometrycznym, i służyło za wstęp do sposobu wyciągniénia piérwiástku kwadratowégo. (§. 111. Części I. Jeom.)

117. *Przykłád 2. Znaléźć kwadrát różnicy dwóch ilości?*

$a-b$. Mnożny.
$a-b$. Mnóżnik.

$aa-ab$. Wieloczyn przez a.
$-ab+bb$. Wieloczyn przez b.

$aa-2ab+bb$. Wieloczyn cálkowity, czyli kwadrát z $a-b$.

Tego podania możná także dowiéśdź Jeometrycznie.

Jakož

Jakoż niech będą AB, BC, dwie liniie, których różnicą ieſt AC: zróbmy kwadrát ABDE, z AB, i weźmy AF, EI, BH, równé linii AC. Poprowádźmy FH, IC, któréby ſię przecięły w G; i na BC, wyſtáwmy kwadrát BCLM. Fig. 27.

Kwadrát ACGF, różnicy AC, równá ſię kwadratowi ABDE, mniéy węgielniczką BDEFGCB. albo, (dodáwſzy i odiąwſzy kwadrát BCLM) kwadrát ACGF, równá ſię kwadratowi ABDE, mniéy węgielniczką MLGFEDM, a więcéy kwadratém BCLM. Że zaś ta węgielniczka ſkłádá ſię ze dwóch proſtokątów równych MG, FD, któré ſą proſtokątami z liniy AB, i BC; więc kwadrát różnicy AC, dwóch liniy AB, BC, równá ſię różnicy między ſummą kwadratów tychże liniy, i ich proſtokątém dwa razy wziętym.

118. *Przykłád 3. Znaléźć wyrażénié wieloczynu z ſummy dwóch iłości, przez ich różnicę?*

$a + b.$ Summa dwóch iłości.
$a - b.$ Różnica tychże iłości.

$aa + ab.$ Wieloczyn przez a.
$- ab - bb.$ Wieloczyn przez $-b$.

$aa - bb.$ Wieloczyn cáłkowity.

Wieloczyn ſummy dwóch iłości przez ich różnicę, równá ſię różnicy kwadratów, tychże iłości.

W figurze poprzedzaiącéy niech będą AB, i AC, dwie liniie, których różnica ieſt BC: i niech tych dwóch liniy będą kwadraty AD, AG; różnicą tych kwadratów ieſt węgielniczka BCGFEDB, która ſię równá ſummie proſtokątów BCID, EFGI, maiących też ſamę ſzérokość BC, toieſt różnicę dwóch liniy AB, AC, a ſummę długości tę ſamę, co ſumma liniy BD, (albo AB) i EI, (albo AC.)

Wnioſek. Niech będą AC, CD, dwie liniie, których ſumma ieſt AD, a których różnica BD, wyznaczoná będzie, biorąc BC równą AC. Proſtokąt z AD, przez BD, równá ſię różnicy kwadratów z AC, i z CD. Więc wzaiémnie uważaiąc liniie AD, BD, iak dwie iłości, których połową ſummy, ieſt AC, a połową różnicy ieſt CD; proſtokąt tych dwóch iłości, równá ſię różnicy kwadratów połowy ich ſummy, i połowy różnicy. Fig. 28.

119. *Przykłád 4. Gdy do kwadratu ſummy dwóch iłości, dodámy kwadrát ich różnicy, iakiéż będzie wyrażénié ſummy, z tego dodania wynikaiącéy?*

$a + b$ . . . Kwadrát $aa + 2ab + bb$.
$a - b$ . . . Kwadrát $aa - 2ab + bb$.

Summa kwadratów . . . . . . $2aa \quad + 2bb = 2(aa + bb.)$

Jeżeli tedy do kwadratu ſummy dwóch ilości, dodámy kwadrát ich różnicy; wypadnie ſumma zawiéraiącá w ſobie dwa razy ſummę kwadratów, tych dwóch ilości.

Fig. 29. *Jeometrycznie.* Niech będą AC, BC, dwie liniie, których ſumma ieſt AB, a których znaydziémy różnicę, wziąwſzy CD, równą AC.

Wyſtáwmy na linii AD, proſtopadłą CE, równą AC, albo CD, i poprowádźmy AE, DE. Niech ieſzcze będzie i BF, proſtopadła do AD, ſpotykaiącá w F, liniią DE. Pociągniymy AF, i FG, proſtopadłá do CE. Liniie BD, BF, ſą równé; więc kwadrát z AF, który ieſt równy ſummie kwadratów z AB, i z BF, będzie téż równy ſummie kwadratów z AB, i z BD. Ponieważ zaś kąt AED, ieſt proſty; więc kwadrát z AF, będzie także równy ſummie kwadratów, z AE, i z EF, a zatém ſumma kwadratów z AE, i z EF, równá ſię ſummie kwadratów, z AB, i z BD.

A że Tróykąty: ACE, EGF, ſą proſtokątné, i równoramiénné; więc kwadraty z AE, i z EF ſą, piérwſzy dwa razy tak wielki, iak kwadrát z AC, a drugi dwa razy tak wielki, iak kwadrát z FG, albo z BC.

Więc ſumma kwadratów z AB, i z BD, ieſt dwa razy tak wielká, iak ſumma kwadratów z AC, i z BC.

Wzaiémnie gdyby liniie AB, i BD były dané, tedy ſumma ich kwadratów byłaby dwa razy tak wielká, iak ſumma kwadratów połowy ich ſummy AC, i połowy ich różnicy BC.

A zatém áby przeciąć liniią AD, na dwie takié części, których ſumma kwadratów byłaby iak może bydź náymnieyſzá; trzeba ią przeciąć na dwie części równé.

120. *Przykłád 5. Gdy od kwadratu ſummy dwóch ilości odeymiémy kwadrát ich różnicy, iakáż będzie różnica tych kwadratów?*

$a + b$ . . . Kwadrát $aa + 2ab + bb$.
$a - b$ . . . Kwadrát $aa - 2ab + bb$.

Różnica . . . . $4ab$.

Jeżeli

Jeżeli tedy od kwadratu summy dwóch ilości, odeymiémy kwadrát ich różnicy; zostanie się wieloczyn tych dwóch ilości cztéry razy wzięty.

Jeometrycznie. Niech będą AB, BC, dwie linie, których summa iest AC. Weźmy AD = BC, i wystáwmy kwadrát ACDE na linii AC: weźmy CF, DG, EH, równé linii BC, albo AD. Przez punkta F, i H, poprowádźmy rowno-odległé od AC, a przez punkta D, i G, poprowádźmy równo-odległé od AE, któréby spotkały piérwszé równo-odległé w punktach M, L, N, I. Fig. 30.

Kwadrát ACDE, iest kwadratém summy liniy AB, BC, a kwadrát ILMN, iest kwadratém różnicy BD, tychże liniy. Różnica zaś tych dwóch kwadratów skłádá się ze cztérech prostokątów takich iak CDLF, których boki równé są liniióm AB, BC.

121. *Przykłád 6. Jakiż iest skłád sześcianu z summy dwóch ilości?*

Summa podaná	$a + b.$	
Kwadrát téy summy . . .	$aa + 2ab + bb.$	Mnożny.
	$a + b$	Mnożnik.
	$aaa + 2aab + abb.$ . .	Wieloczyn przez a.
	$aab + 2abb + bbb.$	Wieloczyn przez b.
	$aaa + 3aab + 3abb + bbb.$	Wieloczyn cáłkowity, albo sześcián z $a + b$.

122. *Uwága.* Zamiást aaa, pisze się téż a^3, i obadwa té wyrażénia znaczą, że a przez a, i znowu przez a, ciągło iest rozmnożoné, czyli że a, bierze się 3 razy za Czynnika. Liczba 3 má tu nazwisko *wykładnika.* Podobnie téż pisze się aa, albo a^2, dlá oznaczénia kwadratu z a, albo Wieloczyna z a, przez a: albo nakoniec (co na iedno wychodzi,) dlá oznaczénia, że a, dwa razy się bierze za Czynnika.

Podług tego, Sześcián z $a + b$, oznaczyłby się następuiącym sposobém:

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, któré to wyrażénié skłádá się z Sześcianu iednéy ilości . . . (a^3.)

z potróynégo wieloczyna kwadratu téy ilości przez drugą ($3a^2b$.)

z potróynégo wieloczyna téyże ilości przez kwadrát drugiéy ($3ab^2$.)

 i z szei z ſześcianu drugiéy iłości (b^3.)

To podanié Jeometrycznie iuż wyłożyliśmy, i służyło nám do wyciągniénia piérwiáſtku Sześciannégo. (§. 35. Części II.)

123. *Przykłád 7. Jakiż ieſt ſkłád ſześcianu, z różnicy dwóch iłości?*

$$\begin{array}{lll}
\text{Różnica podaná} \ldots & a - b & \\
\text{Kwadrát téy różnicy} & aa - 2ab + bb. & \text{Mnożny.} \\
 & a - b \ldots\ldots & \text{Mnożnik.} \\
\hline
 & a^3 - 2a^2b + ab^2. & \text{Wieloczyn przez } a. \\
 & \quad - a^2b + 2ab^2 - b^3. & \text{Wieloczyn przez } -b. \\
\hline
 & a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3. & \text{Wieloczyn całkowity,} \\
 & & \text{albo ſześcián z } a - b.
\end{array}$$

Tę regułę Algiebraiczną Sześcianu, wyłożyć słowy można podobnie iak wyżéy.

124. *Zadanié 10. Pewny oyciec zapiſuie náyſtarſzému dziécięciu ſummę* a, *i* $\frac{1}{6}$ *część reſzty maiątku: drugiému zapiſuie 2a, i* $\frac{1}{6}$ *część reſzty maiątku: trzeciému zapiſuie 3a, i* $\frac{1}{6}$ *część reſzty maiątku. i t. d. Wſzyſtkié iego dzieci równie były podzielone tym ſpoſobém. Iléż ich było? ilé ſię każdému doſtało? i iaki był cały maiątek oyca?*

Rozumowanié Arytmetyczné to ſamo tu przyſtóſować możná, którégo użyliśmy w 21 Zadaniu, Rozdz: II.

Jakoż naymłodſzé dziécię nie weźmie żádnéy części drugiéy na ſwóy dział: bo gdyby ią wzięło; tedyby ieſzcze coś z całégo oycowſkiégo maiątku pozoſtało: nic zaś pozoſtać nie powinno. Więc na dział iego przypadnie ſumma a, tylé razy wziętá, ilé ieſt wſzyſtkich dzieci.

Piérwſzá część działu na przedoſtatnié dziécię przypádaiącá, będzie od działu dziécięcia oſtatniégo mnieyſzá ilością a: a że tylé mu ſię má doſtać co i náymłodſzému; więc drugá część działu iego będzie a.

A że ta drugá część ieſt $\frac{1}{6}$ częścią reſzty maiątku, przed wzięciém téyże części; więc nim to przedoſtatnié dziécię wzięło $\frac{1}{6}$ część, zoſtáwało ieſzcze $6a$: a zatém na dział náymłodſzému doſtało ſię $5a$.

Że zaś náymłodſzé dziécię wzięło a tylé razy, ilé było dzieci; więc było ich 5. Jeſt tedy dział każdégo dziécięcia $5a$, a wáżność maiątku oycowſkiégo $25a$.

Maiątek

Maiątek oycowſki . . . . $25a.$
1wſzá część náyſtarſzégo dziécięcia . . . . $a.$
Zoſtaie ſię máiątku . . . . . $24a.$
2gá część náyſtarſzégo . . . . $4a.$

Cały dział náyſtarſzégo . . . . $5a.$
Zoſtaie ſię . . . . $20a.$
1wſzá część 2go dziécięcia . . . . $2a.$
Zoſtaie ſię . . . . $18a.$
2gá część tegoż . . . . $3a.$

Cały dział . . . . $5a.$
Zoſtaie ſię . . . . $15a.$
1wſzá część 3go . . . . $3a.$
Zoſtaie ſię . . . . $12a.$
2gá część tegoż . . . . $2a.$

Cały dział . . . . $5a.$
Zoſtaie ſię . . . . $10a.$
1wſzá część 4go . . . . $4a.$
Zoſtaie ſię . . . . $6a.$
2gá część tegoż . . . . $1a.$

Cały dział . . . . $5a.$
Zoſtaie ſię . . . . $5a.$
1wſzá część oſtatniégo . . . . $5a.$
Zoſtaie ſię . . . . $0.$
2gá część tegoż . . . . $0.$

Cały dział . . . . $5a.$

Algiebr: Mian: Maiątek oycowſki . . . . $x.$
1wſzá część działu náyſtarſzégo dziecięcia . . . . . $a.$
Zoſtaie ſię maiątku . . . $x - a.$
2gá część działu tegoż . . . . $\frac{1}{6}x - \frac{1}{6}a.$

Dział náyſtarſzégo dziécięcia . . . . $\frac{1}{6}x + \frac{5}{6}a.$
Zoſtaie ſię maiątku . . . $\frac{5}{6}x - \frac{5}{6}a.$
1wſzá część działu 2go dziécięcia . . . . $2a.$
Zoſtaie ſię maiątku . . . $\frac{5}{6}x - \frac{17}{6}a.$

2gá

2gá część działu tegoż . . . . $\frac{5}{36}x - \frac{17}{36}a$.

Dział 2go dziécięcia . . . . $\frac{5}{36}x + \frac{55}{36}a$.

Warunek. $\frac{1}{6}x + \frac{5}{6}a = \frac{5}{36}x + \frac{55}{36}a$.

Przerábianié. (Przywiódłſzy ułómki do iednakowégo mianownika)

$$\frac{6}{36}x + \frac{30}{36}a = \frac{5}{36}x + \frac{55}{36}a.$$

(Rozmnożywſzy przez 36) $6x + 30a = 5x + 55a$.

(Odiąwſzy $5x$) . . . . $1x + 30a = 55a$.

(Odiąwſzy $30a$) . . . . . . $1x = 25a$.

Zgádzá ſię to z rozwiązaniém, przez rozumowanié.

Tymże ſpoſobém możnáby ſobie poſtąpić, iakiżkolwiek byłby ułómek maiący iedność za licznika, a liczbę cáłkowitą za Mianownika, i ukazuiący część reſzty maiątku pozoſtałégo, przypádaiącą na drugą część działu każdégo dziecięcia. Niechby *np.* ta drugá część działu każdégo dziécięcia oznaczoná była ogólnie przez $\frac{1}{n}$ reſzty. Na náymłodſzé dziécię ta drugá część nie przypadnie, ale tylko weźmie tylé razy a, ilé ieſt dzieci.

Piérwſzá część przedoſtatniégo dziécięcia, zawiérać będzie tylé razy a, mniéy iednėm a: przeto na drugą część témuż dziécięciu przypadnie a.

A że ta drugá część ieſt $\frac{1}{n}$ reſzty maiątku, przed wzięciém téyże części; więc ta reſzta maiątku przed wzięciém téy części była na, po wzięciu zaś zoſtanie a, wzięté razy $n-1$, albo $(n-1)a$, na dział náymłodſzégo dziécięcia.

Liczba dzieci . . . $n-1$.

Dział każdégo dziécięcia $(n-1)a$.

Maiątek oycowſki . . $(n-1)^2 a$.

1wſzá część działu náyſtarſzégo dziécięcia . . . . a.

Zoſtaie ſię . . . . $a(nn-2n.)$

2gá część działu tegoż . . . . $a(n-2)$.

Dział tego dziécięcia . . . . $a(n-1.)$

Zoſtaie ſię maiątku $a(n-1)(n-2.)$

albo . . $a(nn-3n+2.)$

1wſzá

1wſzá część działu 2go dziécięcia . . . . $2a$.
Zoſtaie ſię maiątku . . . $a(nn-3n)$.
2gá część działu tegoż . . . . $a(n-3)$.

Dział tego dziécięcia . . . . $a(n-1)$.
Zoſtaie ſię maiątku . . $a(n-1)(n-3)$.
albo $a(nn-4n+3)$.

1wſzá część działu 3go dziécięcia . . . . $3a$.
Zoſtaie ſię maiątku . . $a(nn-4n)$.
2gá część działu tegoż . . . . $a(n-4)$.

Dział tego 3ciégo dziécięcia . . . . $a(n-1)$.
Zoſtaie ſię maiątku . . $a(n-1)(n-4)$.
albo $a(nn-5n+4)$. I t. d.

125. *Uwága ſłóſowná do własności liczb kwadratowych, a z poprzedzaiącégo Zadania wypádaiącá.*

Liczbę kwadratową uwáżać możná, iako równą piérwiáſtkowi iéy wziętému tylé razy, ilé tén piérwiáſtek zawiérá w ſobie iedności, albo téż uwáżać ią możná, iako równą tylu párom liczb, równym piérwiáſtkowi kwadratu, ilé tén piérwiáſtek má iedności. A w ſzczególności wſzyſtkié té páry uwáżać możná, iako złożoné ze dwóch wyrazów czyniących dwa *Ciągi* (Series,) z których iedén rośnie od 1, aż do ważności piérwiáſtku, przez różnicę równą iedności: drugi zaś zmnieyſzá ſię przez różnicę także równą iedności, zaczynaiąc od liczby mnieyſzéy iednością od piérwiáſtku, aż do zera. Takié będą naſtępuiącé Ciągi:

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \ldots\ldots n-3, \; n-2, \; n-1, \; n-0.$$
$$n-1, \; n-2, \; n-3, \; n-4, \; n-5, \ldots\ldots 3, \quad 2, \quad 1, \quad 0.$$

Ponieważ ze dwóch wyrazów składaiących iednę párę wyráz iedén ieſt pod wyrazém drugim, a ſumma dwóch wyrazów każdéy takiéy páry ieſt n; gdy tedy i liczba pár będzie n, ſumma wſzyſtkich pár razém będzie nn.

Od téy ſummy odiąwſzy ſummę iakiéykolwiek liczby pár naſtępnych po ſobie (zaczynaiąc od 1wſzéy páry,) i oráz odiąwſzy piérwſzy wyráz pary naſtępuiącéy, a reſztę podzieliwſzy przez liczbę iednością więkſzą od liczby pár

 wſzyſt-

wſzyſtkich, toieſt przez $n+1$; wieloráz będzie drugim wyrazém téy páry naſtępuiącéy.

Weźmy liczbę pár m, ſumma tych pár będzie mn; piérwſzy wyráz pary naſtępuiącéy będzie $m+1$. Odiąwſzy od ſummy pár wſzyſtkich nn tamtę ſummę mn, wráz z piérwſzym wyrazém páry naſtępuiącéy $m+1$, toieſt odiąwſzy $mn+m+1$ od nn; zoſtanie $nn-mn-m-1$, albo $(nn-1)-(mn+m)$ albo $(n-1)(n+1)-m(n+1)$ albo $(n+1)(n-m-1)$ albo $(n+1)(n-(m+1))$

Podzieliwſzy tę reſztę przez $n+1$; wieloráz będzie $n-(m+1)$ a tén ieſt drugim wyrazém páry maiącéy za piérwſzy wyráz $m+1$.

126. *Zadanié 11. Znaléźć wzór ogólny do rozwiązania zagadnićń ze dwiéma niewiadoméni.*

Niech będą dwa równania: $\begin{cases} mx+ny=a. \\ px+qy=b. \end{cases}$

Trzeba wyznaczyć niewiadomych x, y, ważność w jlościach wiadomych a, b, m, n, p, q.

Rozmnożywſzy ſtrony piérwſzégo równania przez p, ſtrony zaś drugiégo przez m.

będzie $\begin{cases} mpx+npy=ap. \\ mpx+mqy=mb. \end{cases}$

Odiąwſzy; będzie $npy-mqy=ap-bm$.

albo $y(np-mq)=ap-mb$.

a zatém $y=\dfrac{ap-bm}{np-mq}$.

Rozmnożywſzy zaś ſtrony piérwſzégo równania przez q, a ſtrony drugiégo przez n.

będzie $\begin{cases} mqx+nqy=aq. \\ npx+nqy=bn. \end{cases}$

Odiąwſzy piérwſzé to równanié od drugiégo,

będzie $npx-mqx=bn-aq$.

albo $x(np-mq)=bn-aq$.

a zatém $x=\dfrac{bn-aq}{np-mq}$.

Spráwdz:

Sprawdzénié. $$mx = \frac{bmn - amq}{np - mq}.$$

$$ny = \frac{anp - bmn}{np - mq}.$$

$$mx + ny = \frac{anp - amq}{np - mq} = a\left(\frac{np - mq}{np - mq}\right) = a.$$

$$px = \frac{bnp - apq}{np - mq}.$$

$$qy = \frac{apq - bmq}{np - mq}.$$

$$px + qy = \frac{bnp - bmq}{np - mq} = b\left(\frac{np - mq}{np - mq}\right) = b.$$

Należy tén wzór przyſtóſować do wielu przykładów liczebnych.

Co ſię tycze Zagadnién ze trzéma, ze cztéréma i t. d. niewiadomemi, ponieważ wzory do ich rozwiązania ſą dłużſzé i zawilſzé, a przyſtóſowania rzádkié (*) doſyć będzie dadź tu iedén przykład pół ogólny.

127. *Zadanié* 12. *Znaléźć trzy ilości* x, y, z, *takié, aby piérwſzá złączoná z połową ſummy dwóch innych, czyniła* a, *aby drugá złączoná z trzecią częścią ſummy dwóch innych, czyniła* b, *i aby trzeciá, złączoná z czwártą częścią ſummy dwóch innych czyniła* c.

Wprowádźmy czwártą niewiadomą $ſ$, dlá wyrażénia ſummy niewiadoméy trzech ilości x, y, z. Wypadną trzy naſtępuiącé równania:

$$x + \tfrac{1}{2}(ſ - x) = a.$$
$$y + \tfrac{1}{3}(ſ - y) = b.$$
$$z + \tfrac{1}{4}(ſ - z) = c.$$

albo $x + ſ = 2a.$
$$2y + ſ = 3b.$$
$$3z + ſ = 4c.$$

 Roz-

(*) Obácz w téy mierze przydatek do początków, o liniiach krzywych w Xiędze Jmć P. CRAMERA dawniéy Profeſſora Matematyki w Genewie. Tytuł Xiążki *Introduction à l'Analyſe des Lignes Courbes.*

Rozmnożywſzy ſtrony piérwſzégo równania przez 6, drugiégo przez 3, trzeciégo przez 2, będzie

$$6x + 6ſ = 12a.$$
$$6y + 3ſ = 9b.$$
$$6z + 2ſ = 8c.$$

Dodáwſzy té trzy równania, będzie

$$6ſ + 11ſ = 12a + 9b + 8c.$$

albo

$$17ſ = 12a + 9b + 8c.$$

$$ſ = \frac{12a + 9b + 8c}{17}.$$

$$x = 2a - ſ = 2a - \left(\frac{12a + 9b + 8c}{17}\right) = \frac{22a - 9b - 8c.}{17}$$

$$2y = 3b - ſ = 3b - \left(\frac{12a + 9b + 8c}{17}\right) = \frac{-12a + 42b - 8c}{17.}$$

$$y = \frac{-6a + 21b - 4c}{17}.$$

$$3z = 4c - ſ = 4c - \left(\frac{12a + 9b + 8c}{17}\right) = \frac{-12a - 9b + 60c}{17.}$$

$$z = \frac{-4a - 3b + 20c}{17}.$$

Gdyby wſzyſtkié ilości a, b, c, były równé, tedyby było

$$x = \tfrac{5}{17}\ a.$$
$$y = \tfrac{11}{17}\ a.$$
$$z = \tfrac{13}{17}\ a.$$

Przykład. Niech będzie $a = 17.$

tedy $x = 5.$
$y = 11.$
$z = 13.$ Co łatwo możémy ſprawdzić.

ROZDZIÁŁ V.

O Proporcyach Arytmetycznych i Jeometrycznych, ogólnie uwáżanych.

128. Gdy dwie ilości przyrównywámy iednę do drugiéy, chcąc wiedzieć ich różnicę; wtedy mówi się, iż się zatrudniámy około ich *stosunku Arytmetycznégo.* Co z takiégo przyrównywania wypádá, toiest różnica między témi dwiéma ilościami, nazywa się *Wykładnikiém* tego stosunku.

I tak niech będą dwie ilości a, i b, dwomá do przyrównywania wyrázami: wyrażénié to $a-b$, albo $b-a$, będzie wykładnikiém stosunku ich Arytmetycznégo, podług tego iak będzie a, większé czy mnieyszé względém b.

W stosunku Arytmetycznym wyráz który się piérwszy pisze, nazywá się *Poprzednikiém*, drugi *Następnikiém.*

Mówi się, iż dwa stosunki Arytmetyczné są równé, gdy będą równé ich wykładniki. I tak maiąc dwie ilości a, i b, których różnica $a-b$, i dwie ilości c, i d, których różnica iest $c-d$: ieżeli $a-b=c-d$, tedy stosunki Arytmetyczné a, do b, i c, do d, nazywaią się równémi: i o cztérech tych ilościach a, b, c, d, mówi się, że czynią *Proporcyą Arytmetyczną.*

129. *Twiérdzénié* I. *Gdy cztéry ilości czynią proporcyą Arytmetyczną, summa dwóch skraynych, równá się summie dwóch srzednich.*

Niech będzie $a-b=c-d.$
tedy $a+d=b+c.$

Dowodzénié. Ponieważ podług przypuszczénia iest
$a-b=c-d.$ więc dodáwszy do obudwóch strón $b+d.$ będzie
$$a-b+b+d,=c-d+b+d.$$
toiest summy $a+d$, i $c+b$, będą równé.

 130.

130. *Twiérdzénié 2. Wzaiémnie, ieżeli ſumma dwóch iakich ilości równá ſię ſummie dwóch innych; tedy możná wziąść dwie piérwſzé ilości za dwa ſkrayné, a dwie drugié ilości za dwa średnie wyrazy proporcyi Arytmetyczněy.*

Niech będzie $a + d = b + c$.
tedy $a - b = c - d$.

Dowodzénié. Przez przypuſzczénié, ieſt
$a + d = b + c$; więc odiąwſzy $b + d$ od obudwóch ſtron będzie
$a + d - b - d = b + c - b - d$, toieſt
reſzty $a - b$, i $c - d$ będą równé: a zatem cztéry ilości . . . . a, b, c, d, czynić będą proporcyą Arytmetyczną.

131. *Wnioſki.* Gdy cztéry iakié ilości czynią proporcyą Arytmetyczną; tedy možná odmienić mieyſcé dwóm średnim, albo dwóm ſkraynym wyrazóm, albo też położyć dwa średnié, na mieyſcu dwóch ſkraynych, a dwa ſkrayné, na mieyſcé dwóch średnich, a proporcyá wſzelako zachowaná będzie: ponieważ przypuściwſzy ráz że ſummy dwie ſkraynych i średnich ſą równé; té iednoſtayné zawſze będą przy tych wſzyſtkich odmianach.

W przypádku ſzczególnym, w którym dwa średnié wyrazy ſą równé, proporcyá nazywá ſię *ciągłą*, (continua) i ſumma dwóch ſkraynych równá ieſt w tym razie średniému dwa razy wziętému: średni zaś równy ieſt połowie ſummy dwóch ſkraynych. Nazwáwſzy tedy przez $ſ$, połowę ſummy dwóch ilości, a przez d, różnicę każdéy z tych dwóch ilości od połowy ſummy; té trzy ilości $ſ + d$, $ſ$, $ſ - d$, czynić będą proporcyą Arytmetyczną ciągłą.

Maiąc dané trzy ilości proporcyi Arytmetyczněy, znaydniémy czwártą, odiąwſzy ilość piérwſzą od ſummy dwóch średnich. Jakož ieżeli ieſt $a - b = c - d$, tedy $a + d = b + c$: odiąwſzy zaś a, po obu ſtronach, będzie $d = b + c - a$.

132. Gdy dwie ilości przyrównywámy iednę do drugiéy chcąc wiedzieć ilé razy iedna z nich zawiérá w ſobie drugą; wtedy mówi ſię, iż ſię zatrudniámy około ich *ſtoſunku Jeometrycznégo.* Co z takiégo przyrównywania wypádá, toieſt Wieloráz z podzielénia iednéy z tych ilości przez drugą, nazywá ſię *Wykładnikiém* tego ſtoſunku.

I tak

I tak przyrównywaiąc tym końcém do siebie dwie liczby 8, i 4, zatrudnialibyśmy się w samey rzeczy stosunkiém Jeometrycznym. Liczba 2, z takowégo przyrównania wypádaiącá na wieloráz, zwałaby się *Wykładnikiém* tego stosunku.

Ze dwóch wyrazów, które tak przyrównywámy do siebie, piérwszy nazywá się *Poprzednikiém*, drugi *Następnikiém*.

Wykładnik tedy takiégo stosunku może bydź uwáżany, iak liczba *oddzielná*, (abstractus) toiest, iak liczba oznáczaiącá tylko, ilé razy dwie ilości, które przyrównywámy zawiéraią się iedna w drugiéy: tak właśnie, iak Wieloráz w dzieleniu, iest także liczbą oddziélną, gdy dwa wyrazy dzielénia, są ilościami iednakowégo gatunku.

Gdy Wykładniki dwóch stosunków są równé, wtedy mówi się, że té dwa stosunki są równé: iakiégożkolwiek zaś gatunku będą dwa wyrazy iednégo z tych stosunku; tedy dwa wyrazy drugiégo stosunku, mogą bydź, albo tego samégo, albo téż i innégo gatunku.

Możná jednak wystawić sobie i dwa iakiékolwiek wyrazy stosunku, iak liczby oddziélné, a to dzieląc każdy z tych dwóch wyrazów, na części równé sobie, i uwáżaiąc liczbę tych części, zawiéraiących się w jednym i w drugim stosunku. I tak niechby dwa *np.* czasy zawiérały w sobie iedén 5 godzin, a drugi 7 godzin, té dwa czasy mieć się do siebie będą, iak dwie liczby 5 i 7, toiest stosunek tych dwóch czasów, ténże sám będzie, co i stosunek dwóch liczb 5 i 7.

Arytmetyka i Jeometryá podały wielé zdarzéń zatrudniania się równością stosunków dwóch Jeometrycznych, z których wyrazy iednégo były odmiennégo gatunku, od wyrazów drugiégo. Wykładać to samo teráz będziemy sposobém ogólnieyszym, przywodząc ilości wchodzić maiącé w działania, do wyrazów liczebnych, które przez ogólné znaki nazwiémy.

Każdy stosunek Jeometryczny uwáżanym bydź może, iak ułómek, którégo Licznik iest poprzednikiém, a Mianownik następnikiém. Wielkość także ułómku, którą oznáczá wieloráz z piérwszégo wyrazu, przez drugi odpowiédá wielkości wykładnika.

Stąd wypádá, że możná rozmnożyć lub podzielić obadwa wyrazy stosunku, przez tęż samę liczbę, a wykładnik iego, a zatém i wielkość przez to się nieodmiéni.

Gdy dwa stosunki Jeometryczné, są równé, wtedy mówi się, że ich wyrazy skłádaią *proporcyą Jeometryczną*; toiest mówi się, że piérwszy Poprzednik, tak się má do swégo Następnika, iak i drugi Poprzednik do swégo także Następnika.

I tak niechby a, i b, były wyrazy iednégo ſtoſunku, c, i d drugiégo, równégo piérwſzému: tedy równość tych dwóch ſtoſunków, czyli proporcyá Jeometryczná między témi 4ma wyrazami zachodzącá tak ſię oznaczy $a : b = c : d$.

133. *Twiérdzénié 1. W każdéy proporcyi Jeometrycznéy wieloczyn dwóch wyrazów ſkraynych, równá ſię wieloczynowi dwóch ſrzédnich.*

Jeżeli . . . $a : b = c : d$; tedy $ad = bc$.

Dowodzénié. Przez przypuſzczénié $a : b = c : d$.
A że téż ieſt . . $a : b = ad : bd$.
. . . . . i . . $c : d = bc : bd$.
Więc . . . . $ad : bd = bc : bd$.

Że zaś dwa naſtępniki téy oſtatniéy proporcyi ſą równé; więc równé także będą, i dwa iéy Poprzedniki, toieſt $ad = bc$.

134. *Twiérdzénié 2. Wzaiemnie: ieżeli dwa Wieloczyny ſą równé: tedy wziąwſzy dwa Czynniki iednégo za ſkrayné, a dwa Czynniki drugiégo za ſrzednié; cztéry té wyrazy tak ułożoné uczynią proporcyą Jeometryczną.*

Jeżeli . . . . $ad = bc$, tedy $a : b = c : d$.

Dowodzénié. Ponieważ . . . . $ad = bc$.
więc będzie $ad : bd = bc : bd$.
A że ieſt . . . . $ad : bd = a : b$.
. . . . i . . . . $bc : bd = c : d$.
więc . . . . . . $a : b = c : d$.

135. *Wnioſek 1.* Czwárty wyráz proporcyi Jeometrycznéy, maiąc dané trzy piérwſzé, znayduie ſię, dzieląc Wieloczyn dwóch śrzednich, przez wyráz piérwſzy: bo ponieważ z proporcyi $a : b = c : d$ wypádá $ad = bc$; więc podzieliwſzy obiedwie ſtrony przez a, będzie $d = \frac{bc}{a}$.

Na tym wnioſku zaſádzá ſię reguła trzech, wyłożoná w Arytmetyce przez ſzczególné nad każdym przypádkiém rozumowanié.

136. *Wnioſek 2.* Maiąc daną Proporcyą Jeometryczną, możná odmiénié mieyſce wyrazóm iéy śrzednim lub ſkraynym: albo téż położyć wyra-

zy

zy śrzednié, na mieyſcu ſkraynych, a ſkrayné na mieyſcu śrzednich, a proporcyá wſzelako będzie zachowaná: bo przy tych wſzyſtkich odmianach, wieloczyn z wyrazów ſkraynych, równy zawſze będzie wieloczynowi z wyrazów śrzednich tak, iak w piérwſzéy danéy proporcyi.

WZÓR TYCH ODMIAN.

Proporcyá daná	. . .	$a : b = c : d.$
Proporcye z niéy wniesioné.	1.	$a : c = b : d.$
	2.	$b : a = d : c.$
	3.	$b : d = a : c.$
	4.	$c : d = a : b.$
	5.	$c : a = d : b.$
	6.	$d : c = b : a.$
	7.	$d : b = c : a.$

137. *Twiérdzénié 3.* W każdéy proporcyi Jeometrycznéy można uczynić naſtępuiącé odmiany.

Summa albo różnica dwóch wyrazów 1wſzégo ſtoſunku, tak ſię má do Poprzednika lub do Naſtępnika tegoż ſtoſunku; iak ſumma, albo różnica dwóch wyrazów drugiégo ſtoſunku, do Poprzednika lub Naſtępnika tego drugiégo ſtoſunku.

1. Jeżeli $a : b = c : d.$
tedy 1. $a+b : b = c+d : d.$ Ta odmiana nazywá ſię: *przez dodanié* albo *ſkłádanié*, (addendo, *albo* componendo.)

Jakoż $a+b$, zawiérá w ſobie b, ráz więcéy, niżeli ſamo a, zawiérá w ſobie toż b: także $c+d$, zawiérá w ſobie d, ráz więcéy, niżeli ſamo c, zawiérá w ſobie toż d: toieſt, tak Wykładnik ſtoſunku $a+b$, do b, iak i wykładnik ſtoſunku $c+d$, do d, ieſt większy iednością od Wykładnika ſtoſunku a, do b, i od Wykładnika ſtoſunku c, do d. A że wykładniki ſtoſunków dwóch oſtatnich, ſą równé, podług przypuſzczénia; więc wykładniki ſtoſunków piérwſzych, będą równé: a zatém $a + b : b = c + d : d.$

2. $a - b : b = c - d : d.$ Ta odmiana nazywá ſię: przez *odeymowanié*, albo przez *dzielénié*, (ſubtrahendo, *albo* dividendo.)

Rozumowanié ieſt to ſamo, co wyżéy, ztą tylko rożnicą, że Wykładniki ſtoſunków $a-b$, do b i $c-d$, do d, ſą obadwa mnieyſzé iednością od wykładników ſtoſunków, a, do b, i c, do d, któré to wykładniki wzięté ſą za równé.

3. $a+b:a=c+d:c$.

Dowodzénié. Ponieważ $a:b=c:d$; więc też będzie (§. 136 odmiana 2) $b:a=d:c$.
a zatém (podług 1.) $b+a:a=d+c:c$.

4. $a-b:a=c-d:c$. Dowodzénié ieſt to ſamo, iak 3. podług 2.

5. $a+c:b+d=a:b$.

Dowodz: Ponieważ $a:b=c:d$.
więc też $a:c=b:d$.
a zatém $a+c:a=b+d:b$.
albo $a+c:b+d=a:b$.

6. $a-c:b-d=a:b$. Dowodzénié to ſamo prawie co wyżéy.

138. *Uwága.* Piąté z tych podáń rozciągnąć można do iakiéykolwiek liczby ſtoſunków Jeometrycznych równych: toieſt maiąc iakąkolwiek liczbę tychże ſtoſunków równych, zawſze ſumma wſzyſtkich Poprzedników, tak ſię mieć będzie do ſummy wſzyſtkich Naſtępników; iak poprzednik iedén którégokolwiek z tych ſtoſunku, do ſwégo naſtępnika.

Jakoż niech będzie q, Wykładnik iednégo z tych ſtoſunku, będzie też i każdégo innégo ſtoſunku równégo piérwſzému Wykładnikiém także q: a zatém ieżeli naſtępniki tych ſtoſunków ſą, a, b, c, d, e, f, i t. d. poprzedniki ich będą, aq, bq, cq, dq, eq, fq, i t. d.

Summa wſzyſtkich poprzedników będzie $aq + bq + cq + dq + eq + fq$ i t. d. toieſt q $(a+b+c+d+e+f$, i t. d.) a zatém wykładnik ſtoſunku ſummy wſzyſtkich poprzedników, do ſummy wſzyſtkich naſtępników będzie q, toieſt tén ſám, który ieſt wykładnikiém ſtoſunku, którégokolwiek z poprzedników poiedynczo wziętych do iego naſtępnika.

139. *Twiérdzénié 4. Niech będą dwie proporcye Jeometryczné,*
$a:b=c:d$.
$e:f=g:h$.

Wyrazy ich odpowiedaiącé ſobie rozmnożywſzy iedné przez drugié, Wieloczyny ae, bf, cg, dh, *będą także w proporcyi.*

Dowodzénié. Ułómki $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$, które ſą wykładnikami dwóch

ſtoſun-

ſtoſunków czyniących piérwſzą proporcyą ſą równé: dwa także ułómki $\frac{e}{f}$ i $\frac{g}{h}$, które ſą wykładnikami ſtoſunków czyniących drugą proporcyą, ſą równé: będzie tedy

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

$$\frac{e}{f} = \frac{g}{h}.$$

Więc Wieloczyn ułómków, które ſą piérwſzémi ſtronami tych dwóch równáń będzie równy Wieloczynowi ułómków, które ſą drugiémi ſtronami tychże równáń: toieſt $\frac{ae}{bf} = \frac{cg}{dh}$, a ułożywſzy to równanié w proporcyą, będzie $ae : bf = cg : dh$.

140. Wyrazy téy oſtatniéy proporcyi ſą wyprowadzoné z Wieloczynów, wykładników należących do ſtoſunków dwóch piérwſzych proporcyy: i przez to, wykładniki ſtoſunków, z których ſię ſkłádá ta oſtatniá proporcyá, nazywaią ſię ſkłádanémi z ſtoſunków dwóch piérwſzych proporcyy. (Obácz w Jeometryi Częśći I. na karcie 217, i naſtępuiących, to, co ſię tam mówiło o ſtoſunkach ſkłádanych w tym razie, gdy wyrazy ſtoſunków maiących ſię ſkłádać, nie ſą iłośćiami liczebnémi, w którychby można oznaczyć, albo wykonać mnożénié.).

141. Podobnie dowiéśdźby można, że maiąc trzy, cztéry, pięć i t. d. proporcyy, a wyrazy ich odpowiedaiące ſobie, iedné przez drugié ciągło rozmnożywſzy; Wieloczyny, które z takiégo rozmnożénia wypadną, będą także w proporcyi: przeto ſtoſunek ſkłádany, ze wſzyſtkich piérwſzych ſtoſunków, każdéy w ſzczególnośći proporcyi, równy będzie ſtoſunkowi ſkłádanému z drugich ſtoſunków téyże proporcyi: a zatém iakążkolwiek byłaby liczba ſtoſunków równych, po dwa branych, zawſze ſtoſunki z nich ſkłádané będą równé.

142. Náywiękſzéy wági dlá wielu użytecznych przyſtóſowáń, ieſt tén przypádek, w którym wſzyſtkié do ſkłádania ſtoſunki ſą równé. W takim razie, ieżeli ſtoſunków liczba ieſt 2, 3, 4, 5, 6, i t. d. Stoſunek z nich

ſkłádany, nazywá ſię dwumnożnym, tróymnożnym, czwórmnożnym, pięciomnożnym, ſześciomnożnym. i t. d. iednégo z tych ſtoſunku. A ieżeli nie tylko ſą równé té do ſkłádania ſtoſunki, ale nad to, ieżeli wſzyſtkié ich wyrazy ſą iednakowé; tedy wyrazy ſtoſunku ſkłádanégo będą té ſamé, co i ſtoſunki iednégo z ſkłádaiących, wziętégo 2, 3, 4, 5, 6, i t. d. razy za Czynnika.

143. To, co wypádá z rozmnożénia iakiéy liczby wziętéy kilka lub więcéy razy za Czynnika, nazywać można *Mnogoſcią* téy liczby. (Po Łacinie nazywá ſię to *Dignitas*, albo *Potentia*.) I tak zrobi ſię 2gá, 3ciá, 4tá, 5tá, 6, . . . *n*ta *Mnogość* liczby, podług tego iak będzie wziętá czy 2 razy, czy 3, 4, 5, 6, . . . czy ogólnie *n*, razy za czynnika. Ilości tedy naſtępuiącé *aa*, *aaa*, *aaaa*, *aaaaa*, *aaaaaa*, i t. d. ſą 2gą, 3cią, 4tą, 5tą, 6tą, i t. d. Mnogością liczby *a*. Dlá ſkrócénia zaś tak ſię piſzą a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, i t. d. Liczby 2, 3, 4, 5, 6, i t. d. w górze napiſané, oznáczaią liczbę tylu razy, ilé razy wzięło ſię *a*, za Czynnika. Nazywaią ſię té liczby Wykładnikami. W ogólności mówiąc, wyrażénié to a^n oznácza, iż trzeba wziąść *a*, razy *n*, za Czynnika, i nazywá ſię Mnogością *n*tą ilości *a*.

Stoſunek więc, który zachodzi między téniż ſamémi Mnogościami dwóch liczb, ſkłádá ſię z tylu ſtoſunków równych ſtoſunkowi tych dwóch liczb, ilé wykładnik tych Mnogości zawiérá w ſobie iedności. I tak ſtoſunek a^2, do b^2, ſkłádá ſię ze dwóch ſtoſunków, równych ſtoſunkowi *a*, do *b*. Stoſunek a^3, do b^3, ſkłádá ſię ze trzech ſtoſunków równych ſtoſunkowi *a*, do *b*: a w ogólności ſtoſunek a^n, do b^n, ſkłádá ſię z *n* ſtoſunków równych ſtoſunkowi *a*, do *b*.

144. Cokolwiek tu dotąd ſię mówiło, wſzyſtko to było w tém mniemaniu, że dwa iednégo ſtoſunku wyrazy miały ſpólną miarę, tak dalece, że ſtoſunek tych dwóch wyrazów mógł bydź oznaczonym przez liczby: a zatém że i wſzyſtkié inſzé ſtoſunki równé tamtému mogły także bydź przez liczby wyrażoné, i że wykładnikami tych ſtoſunków były liczby ſpółmierné, i równé. Jednakże widzieliſmy w Jeometryi częſté przykłady ilości nieſpółmiernych: wyciąganié piérwiáſtków kwadratowych i ſześciennych, podáwało nám wielé takich ilości, których ſtoſunek nié mógł bydź przez liczby wyrażony. Aleśmy téż oráz widzieli, że wſzyſtkié podania względém proporcyonalności, między ilościami ſpółmiernémi były równie prawdziwé i w przypádku

pádku nieſpółmierności: *np.* że té Równoległo-boki i té Graniaſto-ſłupy, któré iednakowé maią podſtawy, były względém ſiebie iak ich wyſokości, gdy té wyſokości były ſpółmierné; ale oráz té Równoległo-boki, i té Graniaſtoſłupy były także w tym ſamym do ſiebie ſtoſunku, gdy ich wyſokości były nieſpółmierné. Dowiódłſzy, iż Tróykąty równokątné miały boki względém ſiebie proporcyonalné, gdy dwa ich boki odpowiedaiącé ſobie były ſpółmiernémi; pokázaliśmy oráz, że taż proporcyonalność była i wtedy zachowaná, gdy dwa ich boki odpowiedaiącé ſobie były nieſpółmiernémi. i t. d.

Spoſób dowodzénia tych podáń, może bydź ogólnie przyſtoſowanym, do proporcyonalności iakichkolwiek ilości nieſpółmiernych, gdy tylko ta proporcyonalność znayduie ſię w jlościach ſpółmiernych. I tak, ponieważ mieyſca od ciál przebieżoné z jednakową prędkością, maią ſię do ſiebie, iak czaſy przez któré biegną té ciała, gdy czaſy ſą ſpółmierné; więc téż i mieyſca té będą do ſiebie iak té czaſy, chociáżby czaſy były nieſpółmierné. Aby to ieſzcze tém widoczniéy okázać, można powtórzyć niektóré przykłady, iuż w piérwſzéy części Jeometryi wyłożoné.

I tak gdy podſtawy dwóch proſtokątów, iednakową maiących wyſokość ſą ſpółmierné, a podzielimy ié na iakąkolwiek liczbę części ſobie równych, których iedna podſtawa zawiérać będzie liczbę *m*, a drugá liczbę *n*, powiérzchnie téż tych proſtokątów będą mogły bydź podzieloné, na liczbę *m*, i *n*, części ſobie równych: i iako ſtoſunek dwóch podſtáw tych proſtokątów ieſt ténże ſám, co i liczb ſpółmiernych *m*, i *n*; tak téż ſtoſunek ich powiérzchni będzie ténże ſám, co tych dwóch liczb *m*, i *n*.

Jeżeli zaś podſtawy ſą nieſpółmierné, i iedna z nich, a zatém i Proſtokąt, do którégo należy dzieli ſię na iakążkolwiek liczbę *m*, części równych; tedy gdy drugá podſtawa, więcéy niż *n*, takich części, a mniéy, niż $n+1$ zawiérać będzie; powiérzchniá téż 2go proſtokąta, zawiérá więcey niż *n*, a mniéy niż $n+1$, takich części, na iakié podzieloná była powiérzchniá piérwſzégo proſtokąta. I kiedykolwiek cztéry ilości ſą takié, że ſtoſunek piérwſzéy do drugiéy, równá ſię ſtoſunkowi trzeciéy, do czwártéy, gdy pierwſzá z drugą, a zatém i trzeciá z czwártą, ſą ſpółmierné; iakáżkolwiek byłaby liczba ſpółmierná, wyrážaiącá ſtoſunek dwóch piérwſzych, tedy i w tym razie, gdzieby dwie piérwſzé ilości były nieſpółmierné, można przybliżyć do prawdziwégo, wyrażénié ſtoſunków: tak dalece, że, oznáczywſzy poprzednika piérwſzégo ſtoſunku przez liczbę iaką cáłkowitą, liczba, któráby oznáczała prawdziwégo iego Naſtępnika, zawiérałaby ſię, między dwiéma liczbami różniącémi ſię od ſiebie iednością: a podzieliwſzy poprzednika drugiégo ſtoſunku, na części równé, których liczba równałaby się liczbie części piérwszégo poprzednika, następnik także tego drugiégo stosunku, oznáczyłby się przez liczbę zawartą między témi saméni dwiéma liczbami, między któremi zawiérała się liczba części, na które podzielony był 1wszy Następnik.

145. *Twiérdzénie. Niech będą cztéry ilości A, B, C, D, z których A, B, są niespółmierné, i C, D, także niespółmierné.*

Podzielmy A, na iakąkolwiek liczbę *m*, części równych, z których każdá niech będzie *a*.

Podzielmy także i C, na tęż samę liczbę *m*, części równych, z których każdá niech będzie *c*.

Niech B, zawiérá więcéy niż *n*, a mniéy niż $n+1$ takich części iaką iest *a*: niech D, zawiérá także więcéy niż *n*, mniey zaś niż $n+1$ takich części iaką iest *c*: i niech się to zawsze prawdzi, iakiéżkolwiek liczby znaczyć będą litery *m*, i *n*.

Té cztéry ilości A, B, C, D, będą Jeometrycznie proporcyonalné.

Gdyby między témi cztéréma ilościami nie zachodziła proporcyá Jeometryczná; tedyby iedén z tych stosunków A, do B, albo C, do D, był większy od drugiégo: a zatém trzebaby powiększyć następnika stosunku, z tych dwóch większégo, aby ténże stosunek zmnieyszyć i uczynić równym mnieyszému stosunkowi. Niechże więc, ieśli to bydź może, stosunek *np.* drugi, toiest C, do D, będzie większy od stosunku piérwszégo A, do B; i niechby, dáymy to, miała mieysce ta proporcyá, A : B = C : E wziąwszy E, za ilość większą od D.

Jakáżkolwiek byłaby różnica ilości D, od E, możná zawsze podzielić ilość C, na tylé części równych, aby każdá z nich mnieyszą była od téy różnicy. Niech *m*, oznáczá liczbę tych części, a niech *c*, oznáczá każdą z tych części. Podzielmy A, na tyléż części równych, i każdą z nich oznáczmy przez *a*. Weźmy część *c*, tylé razy, aby summa, która ztąd urośnie, przybliżała się iak náybardziéy do ilości D, ale iéy nie przewyższała: za dodaniém zaś iednéy ieszcze części *c*, aby się ta summa większą stała od D, a mnieyszą od E, (ponieważ wzięliśmy *c*, za ilość mnieyszą od różnicy między E, i D.)

Niech *n*, i $n+1$, oznáczaią ilé razy się brało część *c*, przed przydaniém iednégo ostatniégo *c*, i po przydaniu. Weźmy téż tylé razy ilośc *a*. Ilość B, będzie przez przypuszczénié, większá niżeli *na*, mnieyszá iednak niżeli $(n+1)a$.

Ponieważ

Ponieważ té cztéry ilości ma, czyli A; $(n+1)a$; mc, czyli C, i $(n+1)c$, są ſpółmierné; wypadnie więc proporcyá:

$A : (n+1)a = C : (n+1)c.$

A że przez przypuſzczénié má bydź $A : B = C : E$.

Albo $B : A = E : C$.

więc $B : (n+1)a = E : (n+1)c$.

Że zaś przypuściliśmy, iż poprzednik B, ieſt mnieyſzy, niżeli iego naſtępnik $(n+1)a$; więc téż i poprzednik E, powiniénby bydź mnieyſzym od ſwégo naſtępnika $(n+1)c$. A że przez dowodzénié, okázáł ſię bydź więkſzym; więc ta proporcyá $A : B = C : E$, nié má wtedy mieyſca, gdy E, ieſt więkſzé od D: a zatém naſtępnik D, ſtoſunku drugiégo téy proporcyi $A : B = C : D$, nie ieſt nadto mały względém ſwégo poprzednika C, toieſt, ſtoſunek tén drugi C, do D, nie ieſt nadto wielki. Możnáby dowiéśdź takim ſpoſobém, że i naſtępnik 1go ſtoſunku nie ieſt nad to mały do zachowania proporcyi, czyli że ſtoſunek piérwſzy, nie ieſt nad to wielki.

Więc dwa ſtoſunki $A : B$, i $C : D$, ſą równé.

Podanié poprzedzaiącé może bydź i tak wyrażoném:

Jeżeli dwie ilości A, i B, tak iedna od drugiéy zawiſły, że wráz powiękſzaią ſię, lub zmnieyſzaią, i że gdy np. *B, ſtaie ſię* $= b$, *wtedy* $A = a$.

gdy $B = 2b$, *wtedy* $A = 2a$.

gdy $B = 3b$, *wtedy* $A = 3a$. a w ogólności

gdy $B = nb$, *wtedy* $A = na$. (biorąc n, za iakąkolwiek liczbę cáłkowitą;) w takim razie dwie ilości A, i B, powiękſzaią ſię lub zmnieyſzaią w proporcyi Jeometryczné́y, i ieżeli B zamiéniá ſię na β, gdy A, zamiéniá ſię na α, tedy będzie $\alpha : a = \beta : b$.

146. *Zadanié* 1. *Niech będą dané cztéry ilości: trzeba znaléźć taką ilość, którąby do każdéy z tamtych cztérech dodaná, uczyniła między niémi proporcyą Jeometryczną.*

Niech będą té cztéry ilości a, b, c, d.

Mianowanié. Niech będzie x, ilość ſzukaná, a zatém ſummy cztéry będą

$$a + x,\ b + x,\ c + x,\ d + x.$$

Warunek. $a + x : b + x = c + x : d + x.$

Prze-

Przerób: Przez dzieléníé (§. 137) $a-b:c-d=a+x:c+x$.
więc . . . $a-b-c+d:c-d=a-c:c+x$.
i . . . . . $a-b-c+d:a-b=a-c:a+x$.
podobnie téż $a-b\ :\ c-d\ =b+x:d+x$.
więc . . . $a-b-c+d:c-d=b-d:d+x$.
i . . . . . $a-b-c+d:a-b=b-d:b+x$.

Cztéry tedy wyrazy proporcyi których ſzukámy, będą naſtępuiącé:

$$\frac{(a-c)(a-b)}{a-b-c+d},\ \frac{(a-b)(b-d)}{a-b-c+d},\ \frac{(a-c)(c-d)}{a-b-c+d},\ \frac{(c-d)(b-d)}{a-b-c+d}.$$

Stoſunek 1wſzych dwóch wyrazów ieſt tén ſám, co $a-c$, do $b-d$.
Stoſunek 2gich dwóch wyrazów ieſt także tén ſám, co $a-c$, do $b-d$.
Ilość zaś x, którą do każdéy ilości danéy dodadź trzeba będzie $\frac{bc-ad}{a-b-c+d}$.

Przykład. Niech będzie $a=3$, $b=5$, $c=9$, $d=14$;
będzie . . . $bc=45$; $ad=42$; $bc-ad=3$; $a-b-c+d=$;
$3-5-9+14=17-14=3$: $\frac{bc-ad}{a-b-c+d}=\frac{3}{3}=1$.

Dodáwſzy 1 do każdéy z cztérech liczb 3, 5, 9, 14, wypadnie proporcyá $4:6=10:15$.

Uwágá. Gdy b, i c, ſą równé, proporcyá któréy ſzukámy, będzie ciągłą: a ilość którą dodadź przypadnie do każdégo ze trzech wyrazów a, b, d, będzie $\frac{bb-ad}{a-2b+d}$.

147. *Zadanié 2. Niech będą dané boki* a, *i* b, *proſtokąta: trzeba znaléźć taki kwadrát, aby powiérzchniá tego proſtokąta i kwadratu, były do ſiebie iak ich obwody.*

Mianowanié. Niech będzie x, bok kwadratu ſzukanégo.
Obwód iego będzie $4x$, a powiérzchniá xx.

Waru-

Warunek. $2a + 2b : 4x = ab : xx.$

Przerábianié. (Podzieliwſzy przez 2, dwa 1wſzé proporcyi wyrazy)
$a + b : 2x = ab : xx.$
(Rozmnożywſzy przez x, dwa piérwſzé wyrazy)
$(a+b)x : 2xx = ab : xx.$
$= 2ab : 2xx.$
(Porównáwſzy dwa poprzedniki, dlá równości dwóch Naſtępników) $(a+b)x = 2ab.$

(Podzieliwſzy przez $a+b$) $x = \dfrac{2ab}{a+b}.$

Skąd wypádá ta proporcyá:
$a + b : 2a = b : x.$

albo nakoniec $\dfrac{a+b.}{2} : a = b : x.$

Więc bok ſzukany kwadratu, ieſt czwártą proporcyonalną do połowy ſummy boków proſtokąta i do każdégo z nich w ſzczególności. (Co do rozwiązania Jeometrycznégo, obácz Jeometryi. Części I. §. 234, i 235.)

148. *Uwága.* Z proporcyi téy $\dfrac{a+b}{2} : a = b : x$, można łatwo wyznaczyć taką ważność iednégo boku proſtokąta, którégo bok drugi ieſt nám iuż wiadomy, aby powiérzchnie proſtokąta i kwadratu danégo, tak ſię miały do ſiebie iak ich obwody.

Bo ponieważ wypádá ta proporcyá, $a+b : a = 2b : x$, więc $b : a = 2b - x : x$, albo $2b - x : x = b : a$. toieſt bok proſtokąta ſzukany będzie czwártą proporcyonalną do różnicy boku kwadratu, od danégo boku w proſtokącie dwa razy wziętégo, i do boku tak kwadratu, iako téż i do tego ſamégo wiadomego boku proſtokąta.

Przykład. Niech będzie . . . $a = 3,\ b = 6.$
$a = 4,\ b = 12.$

149. *Zadanié 3. Niech będą dané trzy krawędzie a, b, c, w Równoległościanie proſtokątnym: trzeba znaléźć bok ſześcianu takiégo, aby ſtoſunek powiérzchni Równoległościanu, i ſześcianu równy był ſtoſunkowi ich bryłowatości.*

Mianowanié. Niech będzie x, bok ſzukany ſześcianu.

Wyrażénié połowy powiérzchni Równoległościanu ieſt $ab+ac+bc$.

Wyrażénié iego bryłowatości ieſt . . . . abc.

Wyrażénié połowy powiérzchni ſześcianu ieſt $3xx$.

Wyrażénié iego bryłowatości ieſt . . . . x^3.

Warunek. $ab+ac+bc : 3xx = abc : x^3$.

Przerób: Rozmnożywſzy piérwſzé dwa wyrazy przez x, a drugié dwa przez 3, aby zrównać dwa naſtępniki; i zrównawſzy dwa poprzedniki, będzie $x(ab+ac+bc) = 3abc$.

(Podzieliwſzy obie ſtrony przez $ab+ac+bc$.

$$x = \frac{3abc}{ab+ac+bc}.$$

Rozwiąz: $x = \dfrac{3abc}{ab+ac+bc}$. Bok ſzukany ſześcianu.

Przykład. $a = 6$.	$a = 141$.
$b = 9$.	$b = 188$.
$c = 15$.	$c = 235$.

150. *Zadanié 4. Niech będzie daná wyſokość walca proſtégo, i promiéń iego podſtawy; trzeba wyznaczyć promiéń takiéy kuli, aby cała powiérzchniá walca i kuli, tak ſię miała iedna do drugiéy, iak ſię maią ich bryłowatości?*

Mianowanié. Niech będzie a, wyſokość daná Walca: r, promiéń podſtawy iego: x promiéń ſzukany kuli.

Niech będzie π, okrąg koła, którégo promiéń ieſt . . . 1.

Okrąg koła maiącégo promiéń r, będzie . . . . πr.

Powiérzchniá tego koła będzie . . . . $\frac{1}{2}\pi rr$.

Summa powiérzchni dwóch podſtáw Walca, będzie πrr.

Powiérzchniá zaś iego krzywá . . . . πra.

Więc cała powiérzchniá Walca, będzie . . $\pi rr + \pi ra$.

Bryłowatość Walca, będzie . . . . $\frac{1}{2}\pi rra$.

Okrąg wielkiégo koła kuli ſzukanéy, będzie . . . πx.

Powiérzchnia kuli, będzie . . . . $2\pi xx$.
Bryłowatość kuli będzie . . . . $\frac{2}{3}\pi x^3$.

Warunek. $\pi rr + \pi ra : 2\pi xx = \frac{1}{2}\pi rra : \frac{2}{3}\pi x^3$.

Przerábianié. (Podzieliwszy przez π, wszystkié wyrazy téy proporcyi) $rr + ra : 2xx = \frac{1}{2}rra : \frac{2}{3}x^3$.
(Rozmnożywszy piérwszé dwa wyrazy proporcyi przez $\frac{1}{3}x$)
$\frac{1}{3}x(rr + ra) : \frac{2}{3}x^3 = \frac{1}{2}rra : \frac{2}{3}x^3$.
(Porównáwszy dwa poprzedniki dlá równości następników)
$\frac{1}{3}x(rr + ra) = \frac{1}{2}rra$.
(Podzieliwszy przez r, obiedwie strony równania)
$\frac{1}{3}x(r + a) = \frac{1}{2}ra$.
(Przywiódłszy dwa ułómki do iednakowégo Mianownika, a potém go opuściwszy) $2x(r + a) = 3ra$.
(Podzieliwszy obie strony przez $2(r + a)$

$$x = \frac{3ra}{2(r+a)}.$$

Rozwiązanié. $$x = \frac{3ra}{2(r+a)}.$$

Przykłád. Niech będzie $a = 2r$, (taki Walec którégo wysokość równá iest średnicy podstawy iego, nazywa się Walcém Archimedesa) tedy

$$x = \frac{6rr}{2(3r)} = \frac{6rr}{6r} = r,$$ co iuż w Jeometryi Części II. §. 148 okazało się.

Niechby było $r = 10$.
$a = 15$.

Będzie $$x = \frac{3.\ 10.\ 15}{2\ \ 25.} = 9.$$

Byłby więc w tym razie promiéń kuli $= 9$.

151. *Uwága.* Z równania $x = \frac{3ra}{2(r+a)}$ można wyprowadzić ważność promiénia r, podstawy Walca wyrażoną przez a, i x: można podobnie

dobnie wyprowadzić, i ważność wyſokości a, w ważnościach r, i x; toieſt, maiąc daną kulę i promień podſtawy Walca proſtégo lub iego wyſokość, można wyznaczyć promień podſtawy iego lub wyſokość, tak, aby bryłowatości tych dwóch bry!, były do ſiebie, iak ich powiérzchnie.

ROZDZIAŁ VI.

Zagadniénia drugiégo Stopnia.

Wyciąganié piérwiáſtku kwadratowégo potrzebné do rozwiązania Zagadnién drugiégo ſtopnia okazuie widocznie różnicę tychże Zagadnién, od Zagadnién piérwſzégo ſtopnia.

W Zagadniéniach Rozdziáłów poprzedzaiących, ilości niewiadomé mnożoné były przez ſamé tylko ilości wiadomé, a ieżeli czaſém (iak w Zagadniéniach 35, i naſtępuiących piérwſzégo Rozdziału) mnożyły ſię przez ſiebie ſamé; tedy wyrazy takowé, albo w ſamych Mianowaniach ginęły, albo zaráz na początku przerábiania.

W Zagadniéniach zaś drugiégo ſtopnia, wyrazy té, w które wchodzą ilości niewiadomé mnożoné przez ſiebie ſamé, giną dopiéro w Rozwiązaniu.

152. *Zadanié I. Proſtokąt którégo bok iedén dwa razy ieſt tak wielki, iak bok drugi, má 72 ſtóp kwadr: w powiérzchni. Jakież ſą boki tego proſtokąta?*

Arytmetycznié. Ponieważ długość tego proſtokąta dwa razy ieſt tak wielká, iak ſzérokość; więc powiérzchniá iego będzie dwa razy tak wielká, iak powiérzchniá kwadratu iego ſzérokości: więc kwadrát ſzérokości dwa razy wzięty ieſt 72, a ráz wzięty ieſt 36. Więc ſzérokość tego proſtokąta wyrazi ſię przez liczbę, którá przez ſiebie rozmnożoná, czyni 36, toieſt, wyrazi ſię przez piérwiáſtek kwadratowy liczby 36. Takim zaś piérwiáſtkiém, ieſt liczba 6.

Szérokość proſtokąta . . . . . . 6 ſtóp.
Długość . . . . 12.
Powiérzchniá . . . . 72 ſtóp kw:

Algie-

Algiebraicznie. Mian: Szérokość . . . . . . x.
Długość . . . . $2x$.
Powiérzchniá . . . . $2xx$.

Warunek. $2xx = 72$.

Przerάb: (Podzieliwszy obie strony przez 2) . . . $1xx = 36$.
(Wyciągnąwszy piérwiast: kwadr:) . . . $1x = 6$.

Rozwiązanié. $1x = 6$. Szérokość szukaná.
Reszta iak wyżéy.

Insze przykłady. Znaléźć dwie liczby, z którychby iedna trzy razy była tak wielká, iak drugá: a które rozmnożywszy iednę przez drugą, wypadłoby na Wieloczyn 75.

Znaléźć dwie liczby, z którychby iedna była $\frac{2}{3}$ *drugiéy, a Wieloczyn ich 96.*

153. *Zadanié 2. Znaléźć takié trzy liczby, aby Wieloczyn*
piérwszéy przez drugą był . . . . 18.
piérwszéy przez trzecią . . . . . 24.
drugiéy przez trzecią . . . . . . 48.

Arytmetycznie. Gdy trzecią liczbę rozmnożymy osobno przez piérwszą, i osobno przez drugą liczbę, Wieloczyn w drugim razie, będzie dwa razy tak wielki, iak w piérwszym: a zatém drugá liczba musi być dwa razy tak wielká, iak piérwszá. Że zaś Wieloczyn piérwszéy liczby przez drugą iest 18; więc (podług piérwszégo Zadania) kwadrát piérwszéy liczby iest 9, piérwszá zatém liczba iest 3, a drugá 6. Trzecią iest wieloráz 24 przez 3, albo 48. przez 6. toiest 8.

Liczba piérwszá . . . . . 3.
. . . . drugá . . . . 6.
. . . . trzeciá . . . . 8.

Wieloczyn piérwszéy przez drugą . . . 18.
. . . . . . piérwszéy przez trzecią . . 24.
. . . . . . drugiéy przez trzecią . . . . 48.

Algiebraicznie. Mian: Piérwszá liczba . . . . x.

Drugá . . . . $\frac{18}{x}$.

Trzeciá . . . . $\frac{24}{x}$.

Wieloczyn drugiéy liczby przez trzecią $\frac{432}{xx}$.

Warunek. $\frac{432}{xx} = 48$.

Przeráb: (Rozmnożywſzy obie ſtrony przez xx) $432 = 48xx$.
(Podzieliwſzy przez 48) . . . . $9 = xx$.
(Wyciągnąwſzy piérwiáſt: kwadr:) . . . $3 = x$.

Rozwiązanié. $x = 3$. Piérwſzá liczba, tak iak wyżéy.

Inſzé przykłady. Znaléźć takié trzy liczby, aby Wieloczyn dwóch piérwſzych był 12, dwóch ſkraynych był 14, a dwóch oſtatnich był 42.

Znaléźć takié trzy liczby, aby Wieloczyn dwóch piérwſzych był 96, dwóch ſkraynych 120, a dwóch oſtatnich 180.

Ogólnie. Niech będą wieloczyny dané a, b, c.

Mianowanié. 1wſzá liczba . . . . x.

2gá . . . . $\frac{a}{x}$.

3ciá . . . . $\frac{b}{x}$.

Wieloczyn dwóch oſtatnich . $\frac{ab}{xx}$.

Warunek. $\frac{ab}{xx} = c$.

Przeráb: (Rozmnożywſzy obie ſtrony przez xx) $ab = cxx$.

(Podzieliwſzy obie ſtrony przez c.) . . $\frac{ab}{c} = xx$.

(Wyciął:

(Wycią: piérwiáſt: kwadr:) . . . $\sqrt{\frac{ab}{c}} = x$.

$$\frac{aa}{xx} = aa : \frac{ab}{c} = aa \times \frac{c}{ab} = \frac{ac}{b}.$$

Więc $\frac{a}{x} = \sqrt{\frac{ac}{b}}$.

$$\frac{bb}{xx} = bb : \frac{ab}{c} = bb \times \frac{c}{ab} = \frac{bc}{a}.$$

Więc $\frac{b}{x} = \sqrt{\frac{bc}{a}}$.

Rozwiązanié. Liczby ſzukané $\sqrt{\frac{ab}{c}}, \sqrt{\frac{ac}{b}}, \sqrt{\frac{bc}{a}}$.

albo $\sqrt{\frac{abc}{cc}}, \sqrt{\frac{abc}{bb}}, \sqrt{\frac{abc}{aa}}$.

albo $\frac{\sqrt{abc}}{c}, \frac{\sqrt{abc}}{b}, \frac{\sqrt{abc}}{a}$.

Toieſt, chcąc znaléźć każdą ze trzech ilości, trzeba zrobić Wieloczyn ze trzech Wieloczynów danych; wyciągnąć z niégo piérwiáſtek kwadratowy, a Wieloráz tego piérwiáſtku przez Wieloczyn dany dwóch ilości, okáże wáżność ilości trzeciéy, którá w tén Wieloczyn niewchodzi.

Przykłád. $a = 18$.

$b = 24$.

$c = 48$.

$$\frac{ab}{c} = \frac{18.\ 24.}{48.}.\ \sqrt{\frac{ab}{c}} = 3.$$

$$\frac{ac}{b} = \frac{18.\ 48}{24}.\ \sqrt{\frac{ac}{b}} = 6.$$

$$\frac{bc}{a} = \frac{24.\ 48.}{18.}.\ \sqrt{\frac{bc}{a}} = 8.$$

154. *Zadanié 3. Znaléźć trzy takié liczby, aby Wieloczyn z pierwszéy i z summy dwóch pozostałych był . . . . 18.*
Z drugiéy, i z summy dwóch innych . . . . 24.
Z trzeciéy, i z summy dwóch innych . . . . 30.

Arytmetycznie. Wieloczyny dané tak piérwszy iak i drugi, zawiéraią w sobie Wieloczyn dwóch piérwszych liczb szukanych.

Wieloczyny dané piérwszy i trzeci zawiéraią w sobie podobnie Wieloczyn piérwszéy i trzeciéy liczby szukanéy.

Wieloczyny dané drugi i trzeci zawiéraią także w sobie Wieloczyn drugiéy i trzeciéy liczby szukanéy.

Więc summa trzech Wieloczynów danych, zawiérá w sobie dwa razy summę trzech Wieloczynów ze trzech liczb szukanych branych po dwie. A że ta summa trzech Wieloczynów danych iest 72, a połowa iéy 36; więc summa poiedynczá Wieloczynów liczb szukanych po dwie branych.

$$\text{toiest}\quad \left.\begin{array}{l} 1\text{wszéy i } 2\text{giéy.} \\ 1\text{wszéy i } 3\text{ciéy.} \\ 2\text{giéy i } 3\text{ciéy.} \end{array}\right\} \text{iest } 36.$$

Że zaś summa Wieloczynów trzeciéy liczby przez piérwszą i drugą iest 30.

Więc Wieloczyn piérwszéy przez drugą będzie różnicą między 36, i 30, toiest 6.

Summa także Wieloczynów 2giéy liczby przez 1wszą i 3cią iest 24.

Więc Wieloczyn piérwszéy i 3ciéy będzie różnicą między 36, i 24, toiest 12.

Naostatek summa Wieloczynów 1wszéy liczby przez 2gą i 3cią iest 18.

Więc Wieloczyn 2giéy i 3ciéy będzie różnicą między 36, i 18, toiest 18.

Całé więc to Zagadnienié przywiedzioné iest tym sposobém do poprzedzaiącégo, aby znaléźć trzy liczby, których po dwie branych wiadomé nám są Wieloczyny.

Té trzy liczby będą 2, 3, 6; co łatwo sprawdzić można.

Algiebraicznie. Mianowanié. Liczby trzy szukané x, y, z.

Waru-

Warunek. $\begin{cases} x(y+z) = 18. \\ y(x+z) = 24. \\ z(x+y) = 30. \end{cases}$

Przeráb: $\begin{cases} xy + xz \quad = 18. \\ xy \quad + yz = 24. \\ \quad xz + yz = 30. \end{cases}$

Dodáwſzy . . . $2xy + 2xz + 2yz = 72.$
Podz: przez 2 $\quad xy + xz + yz = 36.$
Odiąwſzy naſtępnie każdé ze trzech równáń Przerábiania.

$$xy \; . \; . \; . \; . = 6.$$
$$xz \; . \; . = 12.$$
$$yz = 18.$$

Ze dwóch piérwſzych równáń
poniewáż . . . . $2xy = 12.$
$xz = 12.$
Wypádá . . . . . . $2xy = xz.$
a zatém . . . . . $2y = z.$
więc . . . . . . $2yy = yz.$

A że . . . . . . $yz = 18.$
więc . . . . $2yy = 18.$
$yy = 9.$
$y = 3.$
$z = 2y = 6.$

$$x = \frac{6}{y} = \frac{6}{3} = 2. \quad \text{tak iak wyżéy.}$$

Inſzé przykłady. Znaléźć trzy takié liczby, aby Wieloczyn z 1wſzéy i z ſummy dwóch pozoſtałych był . . . 80.
. . . *z 2giéy* . . . . 98.
. . . *z 3ciéy* . . . . 108.

Niechby znowu trzy Wieloczyny dané były:

372.
420.
432.

Ogólnie. Trzy Wieloczyny dané, ſą p, q, r.

 xy

$$\textit{Warunek.}\left\{\begin{array}{l} xy + xz \quad\; = p. \\ xy \quad\; + yz = q. \\ \quad\; xz + yz = r. \end{array}\right.$$

Więc $2xy + 2xz + 2yz = p + q + r.$

$$xy + xz + yz = \frac{p+q+r}{2}.$$

A że 1. . . . . . $xz + yz = r.$

Więc . . $xy = \frac{p+q+r}{2} - r = \frac{p+q-r}{2}.$

2. $xy + yz = q.$

Więc . . . . . . $xz = \frac{p+q+r}{2} - q = \frac{p-q+r}{2}.$

3. $xy + xz = p.$

Więc . . . . $yz = \frac{p+q+r}{2} - p = \frac{-p+q+r}{2}.$

Więc, (podług Zagadnienia poprzedzaiącego) położywszy zamiast a; ilość $\frac{p+q-r}{2}$; zamiast b, $\frac{p-q+r}{2}$; zamiast c, $\frac{-p+q+r}{2}$

będzie $xx = \frac{(p+q-r)(p-q+r)(-p+q+r)}{2(-p+q+r)^2}.$

$$x = \frac{\sqrt{(2(p+q-r)(p-q+r)(-p+q+r)}}{2(-p+q+r)}.$$

$$yy = \frac{(p+q-r)(p-q+r)(-p+q+r)}{2(p-q+r)^2}.$$

$$y = \frac{\sqrt{(2(p+q-r)(p-q+r)(-p+q+r)}}{2(p-q+r)}.$$

$$zz = \frac{(p+q-r)(p-q+r)(-p+q+r)}{2(p+q-r)^2}.$$

$$z = \frac{\sqrt{(2(p+q-r)(p-q+r)(-p+q+r)}}{2(p+q-r)}.$$

Przykład. Niechby było $p=18.$
$q=24.$
$r=30.$

Będzie $xx = \frac{12\times24\times36}{2\times36^2} = \frac{12\times24}{2\times36} = 4.$

$x=2.$

$yy = \frac{12\times24\times36}{2\times24^2} = \frac{12\times36}{2\times24} = 9.$

$y=3.$

$zz = \frac{12\times24\times36}{2\times12^2} = \frac{24\times36}{2\times12} = 36.$

$z=6.$

155. *Uwága.* Gdyby nám przyszło szukać trzech liczb, wiadomé maiąc Wieloczyny każdéy z nich, przez różnicę dwóch pozostałych; tedy zagadniénié na pozór wyznaczoné byłoby niewyznaczoném w saméy rzeczy.

Jakoż niech będą trzy równania
$x(y-z)=p.$
$y(x-z)=q.$
$z(x-y)=r.$
toiest $xy-xz \qquad =p.$
$xy \qquad -yz=q.$
$xz \quad -yz=r.$

Odiąwszy 1wszé równanié od 2giégo,
będzie $xz-yz=q-p.$

A że 1wszá strona tego równania iest ta sama, co i piérwszá strona 3go równania; więc i drugié strony tychże równáń powinny bydź równé: a zatém, ieżeli $r, =q-p$, tedy 3cié równanié dané iest zbytecznem, ponieważ iuż się zamykało we dwóch 1wszych równaniach. Jeżeli zaś nie iest $r=q-p$; tedy 3cié równanié sprzeciwiá się dwóm piérwszym, i zagadniénié staie się niepodobném.

156. *Zadanié 4. Znaléźć dwie liczby, z których iedna byłaby dwa razy tak wielká iak drugá, a ſumma ich kwadratów* 45.

Arytmetycznie. Większá z tych liczb ieſt podwóyná mnieyſzéy, więc iéy kwadrát ieſt poczwórny kwadratu mnieyſzéy, a ſumma tych dwóch kwadratów, zamyká w ſobie 5 razy kwadrát téyże mnieyſzéy liczby. Więc kwadrát mnieyſzéy liczby 5 razy wzięty czyni 45, a zatém poiedynczo wzięty będzie $\frac{1}{5}$ liczby 45, toieſt 9. Liczba tedy mnieyſzá ieſt 3, a większá 6.

Mnieyſzá liczba	3.	Kwadrát iéy	9.
Większá	6.	Kwadrát iéy	36.
		Summa	45.

Algiebr: Mian:

Mnieyſzá liczba	x.
Większá	$2x$.
Kwadrát mnieyſzéy	xx.
Kwadrát większéy	$4xx$.
Summa kwadr:	$5xx$.

Warunek. $5xx = 45$.

Przeráb: (Podziel: obie ſtrony przez 5) . . $xx = 9$.
(Wyciągn: piérwiáſt: kwadr:) . . . $x = 3$ tak iak wyżéy.

Inſzé przykłady. Znaléźć dwie liczby z których iedna byłaby potróyną drugiéy, a ſumma ich kwadratów 250.

I znowu znaléźć dwie liczby, z których iedna byłaby $\frac{2}{3}$ drugiéy, a ſumma ich kwadratów 325.

Ogólnie. Znaléźć dwie liczby któréby były do ſiebie w ſtoſunku m, *do* n: *ſummą zaś ich kwadratów byłaby ilość daná* q.

Mian: Liczby ſzukané mx. Kwadraty . . . $mmxx$.
. . . . . . nx. . . . . $nnxx$.

Summa . . . . $xx(mm+nn)$

Warunek. $xx(mm+nn)=q$.

Przeráb:

Przerábianié. (Podzieliwſzy obie ſtrony przez $mm + nn$)

$$xx = \frac{q}{mm + nn}.$$

(Wyciągnąwſzy piérwiáſtek kwadratowy)

$$x = \sqrt{\left(\frac{q}{mm + nn}\right)}$$

Rozwiązanié. $mx = m\sqrt{\left(\frac{q}{mm + nn}\right)}$.

$$nx = n\sqrt{\left(\frac{q}{mm + nn}\right)}.$$

Spráwdzénié. $mmxx = mm\left(\frac{q}{mm + nn}\right)$.

$$nnxx = nn\left(\frac{q}{mm + nn}\right).$$

$$xx(mm + nn) = (mm + nn)\left(\frac{q}{mm + nn}\right) = q.$$

Przykłád. Niech będzie $m = 1$.

$n = 3$.

$q = 250$.

$$xx = \frac{q}{mm + nn} = \frac{250}{10} = 25.$$

x albo $mx = 5$.

$3x$ albo $nx = 15$.

$$\begin{array}{r}
xx = 25 \\
9xx = 225. \\
\hline
10xx = 250.
\end{array}$$

Uwága. Zagadniénié naſtępuiące: *Znaléźć trzy tákié liczby, aby Wieloczyny każdéy z nich, przez iednę i drugą z pozoſtałych były wiadomé, i aby ſumma kwadratów z tych dwóch liczb oſtatnich była także wiadomá:* to, *mówię, Zagadniénié wychodzi na poprzedzaiącé.*

157. *Zadanié 5. Znaléźć trzy liczby których wiadomé są trzy Wielorazy, wypádaiącé z Wieloczynów liczb tych po dwie branych, a przez zcią pozostałą podzielonych.*

Niech będą trzy Wielorazy dané a, b, c.

Mianowanié. Liczby szukané x, y, z.

Warunek. $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{xy}{z} = a. \\ \dfrac{xz}{y} = b. \\ \dfrac{yz}{x} = c. \end{array}\right.$

Przeráb: $\dfrac{xy}{z} : \dfrac{xz}{y} = \dfrac{y}{z} : \dfrac{z}{y} = yy : zz.$

że iest . . . $\dfrac{xy}{z} : \dfrac{xz}{y} = a : b.$

więc . . . . $yy : zz = a : b.$

a zatém . . . . . . $y : z = aa : ab = a : \sqrt{ab}.$

że zaś . . . . $\dfrac{xy}{z} = a.$

więc . . . . $y : z = a : x.$ A zatém

$x = \sqrt{ab}.$

Podobnie będzie . . . . $y = \sqrt{ac}.$

$z = \sqrt{bc}.$

Rozwiązanié $x = \sqrt{ab}$; $y = \sqrt{ac}$; $z = \sqrt{bc}$.

Przykłád. Niech będzie $a = 4.$
$b = 9.$
$c = 36.$

albo $a = 8.$
$b = 18.$
$c = 32.$

158. *Zadanié 6. Znaléźć dwie liczby, z których iedna byłaby dwa razy tak wielká iak drugá, a różnica ich kwadratów 48.*

Arytmetycznie. Większá z tych liczb ieſt podwóyná mnieyſzéy, więc iéy kwadrát ieſt poczwórny kwadratu mnieyſzéy, a różnica tych kwadratów będzie potróyná kwadratu téyże liczby mnieyſzéy. Więc kwadrát liczby mnieyſzéy trzy razy wzięty czyni 48, a zatém poiedynczo wzięty będzie $\frac{1}{3}$ liczby 48, toieſt 16. Liczba tedy mnieyſzá ieſt 4, a większá 8: toieſt piérwiáſtek kwadratowy ſummy 48, i 16, czyli 64.

Mnieyſzá liczba . . .	4.	Kwadrát iéy . . .	16.
Większá	8.	Kwadrát	64.
		Różnica	48.

Algiebr: Mian: Mnieyſzá liczba . . . x.
Większá . . . . . . $2x$.
Kwadrát mnieyſzéy . . xx.
. . . . . większéy . . $4xx$.

Różnica kwadratów $3xx$.

Warunek. $3xx = 48$.

Przeráb: (Podzieliwſzy obie ſtrony przez 3) $1xx = 16$.
(Wyciąg: piérwiáſt: kwadr:) . . . . . $1x = 4$.

Rozwiązanié. $x = 4$. Tak iak wyżéy.

Inſzé przykłady. Znaléźć dwie liczby, z których iedna byłaby potróyną drugiéy, a różnica ich kwadratów 200.

I znowu znaléźć dwie liczby, z których iedna byłaby $\frac{2}{3}$ drugiéy, a różnica ich kwadratów 80.

Ogólnie. *Znaléźć dwie liczby, z których większá miałaby do mnieyſzéy ſtoſunek* m, *do* n, *a różnica ich kwadratów równałaby ſię liczbie danéy* q.

Mianowanié. Liczby ſzukané . . . . mx, nx.
Ich kwadraty . . . . . $mmxx$, $nnxx$.
Różnica tych kwadratów . . $mmxx - nnxx$.
albo . . . . $xx(mm - nn)$.

Wa-

Warunek. $xx(mm - nn) = q.$

Przerábianié. (Podzieliwszy obie strony przez $mm - nn$).

$$xx = \frac{q}{mm - nn}.$$

(Wyciągn: piérwiástek kwadratu)

$$x = \sqrt{\left(\frac{q}{mm - nn}\right)}.$$

Rozwiąz: $mx = m\sqrt{\left(\frac{q}{mm - nn}\right)}$; $mmxx = mm\left(\frac{q}{mm - nn}\right)$

$nx = n\sqrt{\left(\frac{q}{mm - nn}\right)}$; $nnxx = nn\left(\frac{q}{mm - nn}\right)$

Spráwdzénié. $mmxx - nnxx = \frac{q}{mm - nn}(mm - nn) = q.$

Przykłád. Niech będzie $m = 3.$
$n = 2.$
$q = 80.$

$$\frac{q}{mm - nn} = \frac{80}{9 - 4} = \frac{80}{5} = 16.$$

$$\sqrt{\left(\frac{q}{mm - nn}\right)} = 4$$

Liczby szukané $mx = 12.$ Kwadraty . . . 144.
$nx = 8$ . . . . 64.

Różnica kwadr: 80.

159. *Uwági.* Do poprzedzaiącégo Zadania łatwo można przywiéśdź następuiące: *Znaléźć trzy liczby, z których iednéy wiémy wieloczyny przez dwie pozostałé brané z osobna, i wiémy także różnicę kwadratów, tych dwóch liczb ostatnich.*

Uwáżaiąc czwárté i szósté poprzedzaiącé zadania Jeometrycznie; wychodzą oné na iedno, iak gdyby przyszło wyznaczyć Tróykąt prostokątny, którégo

Inſzé przykłady. Summa daná . . . . 48 . . . . 50.
Wieloczyn . . . . 560 . . . 489.

Ogólnie. Summa daná . . . . $2f$.
Wieloczyn dany . . . . . p.

Mianowanié. Różnica ſzukaná dwóch liczb . . . $2d$.
Liczby ſzukané . . . . $f+d$.
$f-d$.

Wieloczyn $ff-dd$.

Warunek. $ff-dd=p$.

Przerábianié. (Dodáwſzy dd po obu ſtronach)
$ff=p+dd$.
(Odiąwſzy p po obu ſtronach)
$ff-p=dd$.
(Wyciągnąwſzy piérwiáſtek kwadratowy)
$d=\sqrt{(ff-p)}$.

Rozwiąz: $d=\sqrt{(ff-p)}$. Połowa różnicy dwóch liczb ſzukanych

$$\left.\begin{array}{l} f+d=f+\sqrt{(ff-p)} \\ f-d=f-\sqrt{(ff-p)} \end{array}\right\}\text{ Liczby ſzukané.}$$

$f+\sqrt{(ff-p)}$ Mnożny.
$f-\sqrt{(ff-p)}$. Mnożnik.

$ff+f\sqrt{(ff-p)}$ Wieloczyn przez f.
$-f\sqrt{(ff-p)}-(ff-p)$ Wieloczyn przez $-\sqrt{(ff-p)}$.
$ff \qquad -(ff-p)=p$. Wiel: cały.

Przykłád. Niech będzie . . . $f=24$.
$p=560$.

$$\begin{array}{r} ff=576. \\ p=560. \\ \hline ff-p=16. \\ \sqrt{(ff-p)}=4=d. \end{array}$$

$f+\sqrt{(ff-p)}=28$.
$f-\sqrt{(ff-p)}=20$,

162. *Uwági* 1. Ponieważ Wieloczyn dwóch liczb, powinién bydź powiękſzonym przez kwadrát połowy ich Różnicy, aby tak powiękſzony zrównał kwadrát połowy ich ſummy; przeto tén Wieloczyn będzie zawſze mnieyſzy, niżeli kwadrát połowy ſummy dwóch liczb: a zatém aby Zagadniénié rozwiązać można, trzeba aby Wieloczyn dany p, mnieyſzym był od $ſſ$. Tego w ſamey rzeczy uczą nás i bez rozumowania, ſamé poprzedzaiącé Formy.

Jakoż kwadrát ilości przydaynéy lub uiemnéy ieſt zawſze przydaynym (60 i naſtęp:): a zatém ieżeli uważać kiedy muſimy ilość uiémną, iak kwadrát; tedy wyobrażénia piérwiáſtku kwadratu tego wyſtawić ſobie żádną miarą nie będziémy mogli: bo piérwiáſtkiém tym nié może bydź, ani ilość przydayná, ani uiémná, a to dlá tego, że i w piérwſzym, i w drugim razie kwadrát téy ilości, byłby przydaynym, i nié mógłby wydádź ilości uiémnéy, która powinna bydź jego kwadratém.

Piérwiáſtki tedy kwadratowé ilości uiémnych, podaią nowy gatunek ilości, które ſię nazywaią *beziſtotnémi*, (imaginariæ,) z przyczyny, iż nié można ich ſobie wyſtawić pod żadną poſtacią iſtotnych rzeczy, i że ſą przeciwnémi ilościóm tym, które ſię nazywaią *iſtotnémi*, (reales.)

Przykłád. Podzielić liczbę 10, na dwie części, których Wieloczyn byłby 26.

Podług Formy poprzedzaiącéy $ſſ - p = dd$, znaydziémy

$$dd = 25 - 26 = -1.$$

a zatém $d = \sqrt{-1}$. Ilość beziſtotná.

Wyrażénia także ilości ſzukanych będą beziſtotné

$$5 + \sqrt{-1},$$
$$5 - \sqrt{-1}.$$

Lubo zaś té dwie oſtatnié ilości ſą beziſtotnémi, czynią iednak zadoſyć dwóm Warunkóm podanym, iako to łatwo ſprawdzić można w ſzczególności.

Zgádzanié ſię tych wyrażéń z dwóma Warunkami Zadania ſtąd pochodzi, że maiąc wzgląd na Warunki dané, ilości té dwie beziſtotné, dlá znaków przed ſobą przeciwnych $+$, i $-$, niſzczy iedna drugą w działaniach, których té Warunki wyciągaią. I tak ſumma tych dwóch ilości $5 + \sqrt{-1}$, i $5 - \sqrt{-1}$, ieſt ta ſama, co i ſumma dwóch ilości 5, i 5, albo 10, ponieważ ilość $\sqrt{-1}$, ráz przydaná do 5, a drugi ráz od 5 odiętá, żadnéy w powyżſzéy ſummie odmiany nie ſprawuie.

Tak

mi tylko proſtémi równaniami, a nie z ſkładanémi mieć będą do czynie'nia. I tak w poprzedzaiącém Zadaniu, zamiáſt coby mieli ſzukać bezśrzednie obudwóch ilości żądanych, których daná ieſt różnica i Wieloczyn; mogą ſzukać naprzód ſummy tych dwóch ilości, i oznaczyć większą ilość przez połowę ich ſummy wráz z połową ich Rożnicy, mnieyszą zaś przez połowę także ich ſummy, odiąwszy od niéy połowę ich Różnicy.

Mianowanié. Niech będzie ſumma ſzukaná . . . $2ſ$.
Różnica . . . . $2d$.
Ilości ſzukané . . . $ſ+d$ i $ſ-d$.
Wieloczyn . . . . $ſſ-dd$.

Warunek. $ſſ-dd=p$.

Przerábianié. (Dodáwszy dd po obu ſtronach)
$ſſ=p+dd$.
(Wyciągnąwszy piérwiáſtek kwadratowy.)
$ſ=\sqrt{(p+dd.)}$

Rozwiązanié. $ſ+d=\sqrt{(p+dd)}+d.$ $ſ-d=\sqrt{(p+dd)}-d.$ $\Bigg\{$ Wyrażenia dwóch ilości ſzukanych takié iak wyżéy.

161. *Zadanié 8. Znaléźć dwie liczby, których ſumma 20, a Wieloczyn 91.*

Arytmetycznie. Ponieważ kwadrát połowy ſummy dwóch ilości równá ſię ſummie z jch Wieloczynu, i z kwadratu połowy ich Różnicy, (116 i naſtęp.) więc w przypádku danym 100 równać ſię będzie Summie z Wieloczyna 91, i z kwadratu połowy różnicy, liczb ſzukanych: a zatém kwadrát téyże połowy różnicy równy będzie różnicy między 100, i 91, toieſt, równy będzie liczbie 9: więc ſama połowa Różnicy liczb ſzukanych ieſt 3.

Ilości ſzukané $\begin{cases} 10+3=13. \\ 10-3=7. \end{cases}$

Algiebraicznie. Piérwszym ſpoſobém.

Mianowanié. Jedna ilość ſzukaná . . . x.
Drugá . . . . $20-x$.

Wieloczyn . . . . $20x-xx$.

 Waru-

Warunek. $20x - xx = 91.$

Przerábiánié. (Dodáwfzy xx po obu ftronach)

$$20x = 91 + xx.$$

(Odiąwfzy $20x$ po obu ftronach)

$$0 = 91 + xx - 20x.$$

albo $xx - 20x + 91 = 0.$

Dopełnivmy kwadratu, kładąc kwadrát z 10, toieft, z połowy fpółczynnika drugiégo wyrazu za wyráz trzeci, to zaś uczynimy przydáwfzy 9, do trzeciégo wyrazu 91, i oráz do drugiéy ftrony. Będzie tedy . . . . $xx - 20x + 100 = 9.$

albo $(x - 10)^2 = 9.$

(Wyciągnąwfzy piérwiáftek kwadratowy po obu ftronach)

$$x - 10 = 3.$$

(Dodáwfzy 10 po obu ftronach)

$$x = 13.$$

Rozwiązanié. $x = 13.$ Jedna ilość fzukaná.

$20 - x = 7.$ Drugá ilość fzukaná.

$20x - xx = 91.$ Wieloczyn.

Drugim fpofobém.

Mianowanié. Różnica fzukaná dwóch liczb . . $2d.$

Liczby fzukané . . . . . . $10 + d$, i $10 - d.$

Ich wieloczyn . . . . $100 - dd.$

Warunek. $100 - dd = 91.$

Przerábianié. (Dodáwfzy dd po obu ftronach)

$$100 = 91 + dd.$$

(Odiąwfzy 91 po obu ftronach)

$$9 = d.$$

(Wyciągnąwfzy piérwiáftek kwadratowy)

$$3 = d.$$

Rozwiązanié. $\left.\begin{array}{l} 10 + d = 13. \\ 10 - d = 7. \end{array}\right\}$ tak iak wyżéy.

Infzé

Wyciągnąwſzy piérwiáſtek kwádratowy po obu ſtronach . . . . $x + 4 = 11.$

$x \quad = 7.$

Ogólnié. *Niech będzie Rożnica daná:* 2d, *a Wieloczyn dany* p.

Mianowanié. Mnieyſzá ilość . . . . . $x.$
Większá ilość . . . . . $x + 2d.$
Wieloczyn . . . . . . $xx + 2dx.$

Warunek. $xx + 2dx = p.$

Przeráb: Połowa Spółczynnika ilości niewiadoméy w drugim wyrazie ieſt d, kwadrát téy połowy dd. Dodáwſzy tén kwadrát do obu ſtrón, będzie . . . . $xx + 2dx + dd = p + dd.$
albo . . . $(x + d)^2 \quad = p + dd.$

Wyciągnąwſzy piérwiáſtek kwadratowy po obu ſtronach . . . . $x + d = \sqrt{(p + dd)}.$
Odiąwſzy d, od obu ſtrón . . . . $x \quad = \sqrt{(p + dd)} - d$

Rozwiązanié. $x = \sqrt{(p + dd)} - d.$ Mnieyſzá ilość.
$x + 2d = \sqrt{(p + dd)} + d.$ Większá ilośc.
$\sqrt{(p + dd)} - d.$ Mnożny.
$\sqrt{(p + dd)} + d.$ Mnożnik.

$p + dd - d\sqrt{(p + dd)}.$ Wieloczyn przez $\sqrt{(p + dd)}$. (*)
$d\sqrt{(p + dd)} - dd.$ Wieloczyn przez d.

$p + dd \qquad - dd = p.$ Wieloczyn cały równaiący ſię Wieloczynowi danému.

Ogólné Formy dopiéro wywiedzioné możná tak wymiénić:

Do danégo Wieloczynu má ſię dodadź kwadrát, połowy Różnicy danéy, a z téy ſummy má bydź wyciągniony piérwiáſtek kwadratowy. Dopiéro do tego piérwiáſtku dodaie ſię lub od niego odeymuie połowa Rożnicy danéy: i tak nakoniec znayduie ſię większá ilość w ſummie, a mnieyſzá w reſzcie.

(*) Ponieważ piérwiáſtek kwadratowy iakiéy ilości, ieſt tą ilością, która przez ſiebie rozmnożoná, wydáie ilość, któréy ieſt piérwiáſtkiém; więc Wielo-

Przykład. Niech będzie $2d = 6;\ d = 3.$

$$p = 55.$$
$$dd = 9;\ p + dd = 64.$$
$$\sqrt{(p+dd)} = 8.$$
$$\sqrt{(p+dd)}+d = 11.$$
$$\sqrt{(p+dd)}-d = 5.$$

We wſzyſtkich przykładach poprzedzaiących umyślnie ſię dobiérało liczb takich, że można było wyciągnąć Piérwiáſtek kwadratowy z ilości wiadomych, gdzie tego była potrzeba. Mogą ſię zaś zdarzyć i takié przykłady, w których piérwiáſtek kwadratowy wyciągnionym bydź nié może z ilości wiadomych z których ſprzypádá wyciągnąć piérwiáſtek kwadratowy, i takié ilości nazywaią ſię *nieſpółmiernémi* (irrationales *albo* incommenſurabiles.) Nowá ſtąd pokazuie ſię Różnica, między Rozwiązaniém Zagadnién piérwſzégo i drugiégo ſtopnia. Gdy w Zagadnieniach piérwſzégo ſtopnia wchodzące tam ilości wiadomé, ſą ſpółmiernémi, będą ſpółmiernémi także i niewiadomé ilości, odpowiedaiące na Zagadniénié. W Zagadniéniach zaś drugiégo ſtopnia bardzo ſię częſto przytráfiá, że chociáż ilości wiadomé będą ſpółmiernémi, wſzelako ważność ilości ſzukanych pokaże ſię bydź nieſpółmierną.

Przykład. Niech będzie $2d = 6.$

$$p = 9.$$
$$p+dd = 9+9 = 18 = 9 \times 2.$$
$$\sqrt{(p+dd)} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$ Ilość nieſpółmierná.

Dwie tedy ſą ilości ſzukané . . . . . $3\sqrt{2}+3.$

$$3\sqrt{2}-3.$$

Uwága. Wprawiaiąc Uczniów w Rozwięzywanié Równán ſkładanych, aby nabrali łatwości w takowém rozwięzywaniu, w którém ſię równán ſkładanych uſtrzedz nié można; trzeba oráz im pokazać, iż częſtokroć obrotnie ſobie poſtąpiwſzy w Mianowaniach, mogą tego dokázać: iż z ſamémi

czyn ilości $\sqrt{(p+dd)}$ przeż nię ſamę, toieſt kwadrát ilości $\sqrt{(p+dd)}$ ieſt $p+dd$.

Tak też $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$, bo niech będzie $\sqrt{a}=p;\ \sqrt{b}=q;$ Więc $a=pp;$ $b=qq;$ a zatém $ab=ppqq=pq\times pq;$ a ſtąd $\sqrt{ab}=pq;$ że zaś $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=pq;$ Więc $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}.$

którégo wiémy przeciw prostokątną, i stosunek dwóch Ramión kąta prostégo, (co służy do 4tégo Zadania,) albo którégo wiadomé nám iest iedno ramié kąta prostégo, i stosunek dwóch innych boków, (co służy do 6tégo Zadania.) Rozwiązanié Jeometryczné tych dwóch Zadáń, iest bardzo łátwé.

W poprzedzaiących Zadaniach niewiadomym był tylko wyráz zawiéraiący kwadrát ilości niewiadoméy, a zatém oswobodziwszy go (przez sposoby w Rozdziale I. wyłożoné) z działáń którémi był powikłany, przychodziliśmy do kwadratu niewiadomégo, równégo kwadratowi wiadomému, a naostatek doszliśmy i do saméy ilości niewiadoméy, równaiącéy się piérwiástkowi kwadratowému ilości wiadoméy. Działania, które nám czynić trzeba było do rozwiązania tych Zadáń prostych, różniły się tylko od działáń, któré nás wyżéy zatrudniały, wyciąganiém piérwiástku kwadratowégo z liczb wiadomych.

Ale gdy się trafi, że Równanié, któré rozwiązać przypádá, zamyká w sobie dwa wyrazy z niewiadomą ilością, a w jednym z tych wyrazów iest ilość niewiadomá, rozmnożoná przez siebie samę, w drugim zaś iest taż sama ilość rozmnożoná przez ilości wiadomé; w takim razie trzeba uczynić poprzednicze działania, przez któré iedna strona Równania zawiéraiącá wyrazy niewiadomé, stałaby się kwadratém. I to czyni powtórną różnicę w rozwiązaniu Zagadnién piérwszégo stopnia, od rozwiązania Zagadnién drugiégo stopnia.

160. *Zadanié 7. Znaléźć dwie liczby, których różnicá iest 2, a Wieloczyn 35.*

Arytmetycznie. Z przykładów §. 116 i następuiących łátwo wnieść można, że Wieloczyn ze dwóch ilości, równá się różnicy, kwadratów z połowy ich summy i z połowy różnicy: albo co na iedno wychodzi, że kwadrát z połowy summy dwóch ilości, równá się summie z jch Wieloczynu, i z kwadratu połowy ich różnicy. W przypádku teraźnieyszym połowa różnicy danéy iest 1, Wieloczyn dany iest 35, summa tych dwóch ilości, a zatém kwadrát połowy summy iest 36: przeto sama połowa summy będzie 6.

Więc Zagadniénié uczynioné wypádá na to, aby znaléźć dwie ilości, których połowa summy iest 6, a połowa różnicy 1. Będzie tedy większá ilość 7, a mnieyszá 5: ich Wieloczyn 35, a Różnica 2.

Algiebr: Mian: Mnieyszá ilość . . . . . . x.
Większá . . . . $x+2$.

Wieloczyn . . . . . . $xx+2x$.

 Warunek

Warunek. $xx + 2x = 35$.

Gdy ilość ſkłádá ſię ze dwóch części, wtedy kwadrát iéy ſkłádać ſię będzie ze trzech części; toieſt, z kwadratu piérwſzéy części, z podwóynégo Wieloczynu piérwſzéy części przez drugą, i z kwadratu drugiéy części (116.) Wyſtawuiąc ſobie x, iako część ilości złożonéy ze dwóch wyrazów, z których kwadrát czynić przypádá, xx będzie kwadratém téy części, $2x$ będzie podwóynym Wieloczynėm téy części przez część drugą, a zatém $1x$ będzie poiedynczym Wieloczynėm piérwſzéy części x przez drugą: więc ta drugá część będzie 1, któréy kwadratém ieſt także 1. Dodáwſzy tedy 1, do piérwſzéy ſtrony równania podanégo, będzie $xx + 2x + 1$, toieſt kwadrát z $x + 1$. Dlá zachowania równości dodáwſzy także 1, i do drugiéy ſtrony, będzie Równanié $xx + 2x + 1 = 36$ albo $(x + 1)^2 = 36$. Wyciągnąwſzy piérwiáſtek kwadratowy po obu ſtronach, będzie $x + 1 = 6$. Odiąwſzy 1, od obu ſtrón . . . . . $x = 5$.

Rozwiązanié. $x = 5$. Mnieyſzá liczba.
$x + 2 = 7$. Więkſzá liczba.
$xx + 2x = 35$. Wieloczyn równy danému.

Uwága. Przybyło tu nowé działanié w Przerábianiu téy ſtrony Równania, która zamykała w ſobie wyrazy niewiadomé. To przerábianié wykonaliśmy, przywiódłſzy do kwadratu tę ſtronę przez wzięcié połowy Spółczynnika w drugim wyrazie $2x$, toieſt, przez wzięcié 1, i przez dodanié do każdéy ſtrony Równania, kwadratu téy połowy, toieſt 1.

Inſzé przykłady. Niech będzie różnica daná 6, a Wieloczyn 55.

Przydziémy do Równania . . . $xx + 6x = 55$.

Spółczynnikiém drugiégo wyrazu ieſt 6, połowa iego 3, a kwadrát téy połowy 9. Dodáwſzy tén kwadrát do obu ſtrón, będzie $xx + 6x + 9 = 64$.

albo . . . . . . $(x + 3)^2 = 64$.
Wyciągn: piérwi: kwadr: $x + 3 = 8$.
a ſamo . . . . . . $x = 5$.

Niech znowu będzie Różnica daná 8, a Wieloczyn 105.

W równaniu $xx + 8x = 105$. połowa Spółczynnika wyrazu drugiégo, ieſt 4: dodáwſzy do obu ſtrón kwadrát téy połowy, toieſt 16; będzie

$$xx + 8x + 16 = 121.$$

albo . . . $(x + 4)^2 = 121$.

Wycią-

Tak téż w Wieloczynie ze dwóch ilości $5, +\sqrt{-1}$, i $5, -\sqrt{-1}$ dwie części $+5, \sqrt{-1}$, i $-5, \sqrt{-1}$ giną w dodáwaniu, które się czynić powinno dlá otrzymania całego Wieloczynu, i nie zostaią w nim tylko té dwie ilości 25, i $-(-1)$, toiest $25 + 1 = 26$, gdzie iuż żádné nie wchodzą ilości bezistotné.

2gá. Tén gatunek ilości, które wniyśdź mogą w działania, wynikaiącé z Zadáń bez przyzwoitégo zastanowiénia się wyłożonych, wprowádzá nową różnicę między Zagadniénia piérwszégo i drugiégo stopnia: bo rozwiązania Zadáń piérwszégo stopnia, gdzie Warunki nie zawisły iedné od drugich, zawsze są w jlościach istotnych, gdy tylko samé Zadania zawiéraią ilości istotné: w Zagadniéniach zaś drugiégo stopnia, choćby Warunki iedné od drugich nie zawisły co do wyznaczénia iednégo Warunku przez drugi; często iednak będzie ta między niémi zawisłość, co do granic, które iedén, lub więcéy tych Warunków, zakłádaią innym Warunkóm. I tak w przykładzie poprzedzaiącym gdzie summa daná dwóch liczb, była 10, możná było za Wieloczyn ich podadź iakąkolwiek liczbę od 0, aż do 25, czyli to całkowitą, czyli téż ułómkową, a nawet i niespółmierną, ale granicą tego Wieloczynu, była liczba 25, nad którą nié mógł bydź większym.

3tia. Trzeba tu dadź poznać Uczniom zgodę Jeometryi z Formami Algiebraicznémi. W Jeometryi, aby podzielić liniią daną na dwie części, których Prostokąt równałby się kwadratowi innéy linii danéy; wykréślá się na piérwszéy linii, iak na śrzednicy półkolé; (227 Jeom: Część I.) wynosi się od którégokolwiek iéy punktu prostopadłá, równá linii drugiéy danéy, i przez iéy wiérzchołek ciągnie się rowno-odległá od śrzednicy.

Jeżeli ta równo-odległá spotyká gdzie okrąg pół koła; Zagadniénié będzie podobném do Rozwiązania: ieżeli zaś ta równo-odległá nigdzie okręgu nie spotyká; Zagadniénié takié iest do Rozwiązania niepodobném, toiest, drugá liniiá była daná nad to wielká względém piérwszéy, a dokładniéy mówiąc daná była większá, niżeli połowa piérwszéy linii. Jeometryá więc oznáczá niepodobiéństwo Zagadniénia przez nieprzecinanié się tych liniy, któréby się przeciąć powinny, gdyby Zagadniénié nie było niepodobném. Algiebra zaś okazuie to niepodobiéństwo, przez wsuniénié się ilości bezistotnych, czyli piérwiástków kwadratowych z jlości uiémnych.

4ta. Gdyby podobná było wystawić sobié iakikolwiek obráz ilości $\sqrt{-1}$; tedyby podobnie możná sobie wyobrazić i każdą inną ilość bezistotną *np.* $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-3}$, $\sqrt{-4}$ i t. d.

Jakoż $-2 = 2 \times -1$. Więc $\sqrt{-2} = \sqrt{2} \times \sqrt{-1}$.

 I znowu

I znowu $-3 = 3 \times -1$; Więc $\sqrt{-3} = \sqrt{3} \times \sqrt{-1}$.
. . . . . $-4 = 4 \times -1$, Więc $\sqrt{-4} = \sqrt{4} \times \sqrt{-1}$.

5ta. W tém ieſzcze Algiebra i Jeometryá odpowiedaią ſobie, że w Jeometrycznćm wykréśléniu *np.* Zadania poprzedzaiącégo, gdy bok kwadratu, (którému má bydź równy proſtokąt dwóch części ſzukanych, linii danéy) mnieyſzy ieſt niż połowa téy linii; wtedy równo-odległá ciągnioná przez koniec tego boku, przeciná we dwóch punktach okrąg półkoła; i proſtopadłé ſpuſzczoné do śrzednicy, od dwóch punktów przecięcia, wyznáczaią na téyże śrzednicy czyli linii danéy dwa punkta, z których równie iedén iak i drugi, czyni zadoſyć Zagadnieniu. W tym razie, odległości tych dwóch punktów od śrzodka koła, i od linii danéy do podzielénia ſą równé, i różnią ſię tylko odmiénném ſwoiém położéniém. W Algiebrze zaś to dwoiſté rozwiązanié, (na któré dotąd nie uważaliśmy) czyli dwoiſté czynienié zadoſyć Zagadnieniu oznácza ſię przez dwoiſtą ważność, którą má zawſze Piérwiáſtek kwadratowy iakiéy liczby: a ta dwoiſtá ważność nie różni ſię iedna od drugiéy, tylko ſamym znakiém, który ią poprzedzá. Jakoż że tak $+1$, iak -1, má za kwadrát $+1$, więc téż wzaiémnie piérwiáſtek kwadratowy ilości $+1$; będzie równie $+1$, iak i -1; A ogólnie mówiąc, piérwiáſtek kwadratowy ilości aa, ieſt $+a$, albo $-a$.

I tak w przykładzie poprzedzaiącym, przyſzedłſzy do Równania $dd = ff - p$, można z niégo wyprowadzić dwoiſtą ważność ilości d: i będzie d, albo $= + \sqrt{(ff - p)}$, albo $= - \sqrt{(ff - p)}$, i co razém tak ſię oznácza $d = \pm \sqrt{(ff - p)}$. A ſtąd wypadną dwie części ſzukané $f \pm \sqrt{(ff - p)}$, i $f \mp \sqrt{(ff - p)}$: toieſt, gdy iednéy będzie ważność $f + \sqrt{(ff - p,)}$ będzie ważność drugiéy, $f - \sqrt{(ff - p)}$; a gdy piérwſzá waży $f - \sqrt{(ff - p)}$, drugá ważyć będzie $f + \sqrt{(ff - p)}$, tak dalece, że równie tak piérwſzá, iak i drugá z tych ważności może bydź wziętá za mnieyſzą lub za większą: iako ſię to niżéy oczywiście pokáże *np.* §. 163.

Gdy ieſt $p = ff$, wtedy ilość piérwiáſtkowá niknie, i iedno tylko Rozwiązanié będzie Zadania: bo tak iedna, iak i drugá ſzukaná część będzie $= f$: co także zgádzá ſię z Jeometryą. W tym albowiém razie, równo-odległá od śrzednicy koła ciągnioná przez wiérzch proſtopadłéy, do téyże śrzednicy, ſpotká okrąg w iednym tylko punkcie, i będzie ſtyczną okręgu koła.

Ta dwoiſtość w Rozwiązaniu przydaie znowu różnicę między Zagadniéniami piérwſzégo i drugiégo ſtopnia: w Zagadniéniach piérwſzych gdy tylko ſą wyznaczoné, iedno ieſt Rozwiązanié, w drugich zaś ſą dwa zawſze Rozwiązania.

Trzeba

Trzeba to przystosować do niektórych Zagadnień poprzedzaiących: któré *oddzielnie*, (abstracte) brané, dwa zawsze maią rozwiązania.

Przykład. Znaléźć dwie liczby, z których iedna byłaby podwóyną drugiéy, a Wieloczyn ich 32.

Kwadrát mnieyszéy iest . . . . 16.
Sama przez się liczba mnieyszá . . . . ± 4.
. . . . większá . . . . ± 8.
Podług piérwszégo rozwiązania, Wieloczyn $+4$,
przez $+8$ . . . . $+32$.
Podług drugiégo Rozwiązania, Wieloczyn -4,
przez -8, iest także . . . . $+32$.

Takié dwoisté rozwiązanié, może bydź przystosowané i w tym przypádku, gdzie całé równanié dá się podzielić przez znak x, ilości niewiadoméy, mnożący wszystkié wyrazy tegoż równania.

Przykład. Znaléźć dwie liczby, z których iedna byłaby podwóyną drugiéy, a oráz iedna rozmnożoná przez drugą dałaby tén sám Wieloczyn, któryby wypádł z rozmnożénia summy tych dwóch liczb przez 4.

Mianowanié. Liczby szukané . . . . . x, i $2x$.
Wieloczyn ich . . . . . . $2xx$.
Summa ich . . . . $3x$.

Warunek. $2xx = 12x$.

W tém Równaniu iedna ważność ilości szukanéy x, iest o: ponieważ położywszy ią zamiást x, będą w saméy rzeczy równé sobie dwie strony tego równania, i tak iedna, iak i drugá będzie $= o$, toiest, niczému.

Podzieliwszy to równanié przez x, będzie $2x = 12$, a $1x = 6$. I ta iest drugá ważność ilości x.

Tęż samę dwoistą ważność ilości x, znaleźlibyśmy postępuiąc sobie zwyczaynym sposobém bez dzielénia przez x.

Jakož ponieważ $2xx = 12x$.
więc $xx = 6x$.
a, $xx - 6x = o$.

Więc dopełniwszy kwadratu, będzie $xx - 6x + 9 = 9$.

Wyciągnąwszy piérwiástek kwadratowy $x - 3 = \pm 3$.
a zatém $x = 3 \pm 3 = {}^{6}_{0}$. Dwoistá ważność ilości x, tak iak wyżéy.
Może się komu zdáwać mnieyszéy wági to dwoiste rozwiązanié Zagadniéń drugiégo stopnia, dlá tego, że we wszystkich prostych a niesktádanych Zagadniéniach, którémiśmy się dotąd zatrudniali, dwoisté takié rozwiązania nie różniły się tylko przez znaki $+$, i $-$, które poprzedzaią ilości rozwięzuiącé Zagadniénié: albo téż, że oboiętną iest rzeczą wziąźć, czy iednę czy drugą znalezioną ważność ilości niewiadoméy. Wszakże iednak obáczymy potém takié przykłady, w których té dwoisté rozwiązania odpowiedaią na Zagadniénié weale odmiénnie: osobliwie zaś w Zagadniéniach Jeometrycznych, wzgląd na takié dwoisté rozwiązania mieć potrzeba.

163. *Zadanié 9. Znaléźć dwie liczby, których summa iest 12, a summa ich kwadratów 74.*

Przez rozumowanié. Widzieliśmy (119), że summa kwadratów ilości dwóch, iest podwóyná summy kwadratów połowy summy, i połowy różnicy tychże dwóch ilości. Więc w ninieyszym przypádku, połowa liczby 74, toiest 37, równać się będzie summie kwadratów, połowy summy i połowy różnicy dwóch liczb szukanych. A że ta połowa summy danéy iest 6, a kwadrát téy połowy 36, różnica zaś 36, od 37, iest 1; więc kwadrát połowy różnicy będzie 1, a zatém i połowa różnicy iest téż 1.
Liczby szukané $6 + 1$, i $6 - 1$; toiest 7, i 5.

Algiebr: Mian: Nazwiéymy iednę liczbę . . x.
Będzie drugá . . . . $12 - x$.
Kwadrát piérwszéy . . xx.
. . . . 2giéy $144 - 24x + xx$.

Summa kwad: $144 - 24x + 2xx$.

Warunek. $2xx - 24x + 144 = 74$.

Przerábianié. (Wziąwszy połowę obudwóch strón)
$$xx - 12x + 72 = 37.$$
(Odiąwszy 37, od obu strón)
$$xx - 12x + 35 = 0.$$
(Dodáwszy 1, do obu strón, dla uczyniénia piérwszéy, zupełnym kwadratém) $xx - 12x + 36 = 1$.

(Wy-

(Wyciągnąwszy piérwiástek kwadratowy)

$x - 6 = \pm 1.$

Rozwiązanié. $x = 7$, albo $= 5$. $12 - x = 5$, albo 7.

Liczby szukané i tu na przemián idą, i są 5, i 7: ich kwadraty 25, i 49: Summa tych kwadratów 74.

Drugi sposób. *Mianowanié.* Różnica szukaná dwóch liczb . . $2d$.
Liczby szukané . . . . $6 + d$.
i . . . . $6 - d$.
Kwadraty ich $36 + 12d + dd$.
$36 - 12d + dd$.
Summa kwadr. $72 \quad + 2dd$.

Warunek. $72 + 2dd = 74.$

Przerábianié. (Odiąwszy 72 po obu stronach)

$2dd = 2.$

$dd = 1.$

$d = \pm 1.$

Rozwiązanié. $6 + d = {7 \atop 5}$: $6 - d = {5 \atop 7}$; tak iak wyżéy.

Insze przykłady. *Summa dwóch liczb* . . . . 18.
Summa ich kwadratów . . . 170.
Summa dwóch liczb . . . 36.
Summa ich kwadratów . . 698.

Ogólnie. Summa daná dwóch liczb . . . . $2s$.
Summa daná ich kwadratów . . . $2q$.

Mianowanié. Różnica szukaná . . . $2d$.
Liczby szukané . . $s + d$.
i . . . $s - d$.
Kwadraty ich . . . . . . $ss + 2ds + dd$.
i . . . . . . $ss - 2ds + dd$.
Summa kwadratów . . . $2ss \quad + 2dd$.

Warunek. $2ss + 2dd = 2q.$

Przerábianié. $ss + dd = q.$

(Odiąwszy ss po obu stronach)

$$dd = q - ss.$$

(Wyciągnąwszy piérwiástek kwadratowy)

$$d = \pm \sqrt{(q - ss)}.$$

Rozwiązanié. $s + d = s \pm \sqrt{(q - ss)}.$

$$s - d = s \mp \sqrt{(q - ss)}.$$

Spráwdzenié. $ss + 2ds + dd = q \pm 2s\sqrt{(q - ss)}.$

$$ss - 2ds + dd = q \mp 2s\sqrt{(q - ss)}.$$

$$2ss \quad + 2dd = 2q.$$

164. *Uwági.* *1wszá.* To wyrażénié $\sqrt{(q - ss)}$ oznáczá ilość istotną, wtedy tylko, gdy $q - ss$, iest ilością przydayną: a zatém gdy q, nie iest mnieyszé od ss. Gdy $ss = q$, wtedy $q - ss = o$, a zatém $\sqrt{(q - ss)} = \sqrt{o} = o$. Gdy nakoniec ss, iest większé niż q, wtedy $q - ss$, będzie ilością uiémną, a $\sqrt{(q - ss)}$, będzie ilością bezistotną. Stąd wyniká, iż náymnieyszá wáżność summy danéy dwóch kwadratów taká tylko bydź może, aby iéy połowa równała się kwadratowi połowy summy danéy dwóch liczb: toiest, summa daná dwóch kwadratów nie powinna bydź mnieyszá, niż połowa kwadratu summy dwóch liczb. W przypádku téy równości dwie liczby których szukámy będą równé: co się zupełnie zgádzá z rozumowaniém Arytmetycznem.

2gá. Tymże samym sposobém postąpilibyśmy sobie, gdyby daná była różnica dwóch ilości, i summa ich kwadrátów. W takim razie w równaniu powyższém ogólném, $2ss + 2dd = 2q$, ilość s, byłaby niewiadomą, i równałaby się ilości następuiącéy $\sqrt{(q - dd)}$.

3ciá. Gdy iest $q = dd$, toiest, gdy q, má wáżność iaką tylko mieć może náymnieyszą, wtedy dwie szukané ilości są $+ d$, i $- d$.

165. *Zadanié 10. Znaléźć dwie liczby, których wiadomá iest summa, i summa summy ich kwadratów i Wieloczynu.*

166. *Zadanié 11. Znaléźć dwie liczby, których wiadomá iest różnica, i summa summy ich kwadratów, i Wieloczynu.*

167. *Zadanié 12. Znaléźć dwie liczby, których wiadomá iest summa, i Nadmiár summy ich kwadratów, nad ich Wieloczyn.*

168. *Zadanié 13. Znaléźć dwie liczby, których wiadomá iest różnica, i nadmiár summy ich kwadratów nad ich Wieloczyn.*

169.

169. *Zadanié 14. Znaléźć dwie liczby, których wiadomá iést różnica, i ſumma ich Wieloczynu, i różnicy ich kwadratów.*

Po wyłożonych Zagadniéniach poprzedzaiących, té oſtatnié żadnéy trudności ſprawić nie powinny.

170. *Zadanié 15. Znaléźć dwie liczby, których wiémy Wieloczyn, i ſummę ich kwadratów.*

Arytmetycznie. Ponieważ dany ieſt, tych dwóch liczb Wieloczyn; będzie więc wiadomy ténże Wieloczyn podwoiony: a zatém wiedzieć będziemy tak ſummę, iak i różnicę ſummy danéy kwadratów, i tego podwóynégo Wieloczynu. Że zaś ta ſumma, i ta różnica nie czém innéın ieſt, tylko piérwſzá kwadratém ſummy, a drugá kwadratém różnicy dwóch liczb ſzukanych; więc téż ſumma i różnica dwóch liczb ſzukanych daná będzie: a zatém daná ieſt tak iedna, iak i drugá liczba.

Algiebraicznie. Liczby ſzukané . . . . . . x, i y.
Summa daná kwadratów . . . . q.
Wieloczyn dany . . . . p.

Warunek. $\begin{cases} xx + yy = q. \\ xy = p. \end{cases}$

Przerób: $\begin{cases} xx + yy = q. \\ 2xy = 2p. \end{cases}$

(Dodáwſzy i odiąwſzy té dwa równania, będzie)

$$\begin{cases} xx + 2xy + yy = q + 2p. \\ xx - 2xy + yy = q - 2p. \end{cases}$$

(Wyciągnąwſzy piérwiáſtek kwadratowy)

$$\begin{cases} x + y = \sqrt{(q + 2p)} \\ x - y = \sqrt{(q - 2p.)} \end{cases}$$

(Dodáwſzy, i odiąwſzy)

$$\begin{cases} 2x = \sqrt{(q + 2p)} + \sqrt{(q - 2p.)} \\ 2y = \sqrt{(q + 2p)} - \sqrt{(q - 2p.)} \end{cases}$$

$$\text{Więc} \ldots x = \frac{\sqrt{(q + 2p)} + \sqrt{(q - 2p.)}}{2}.$$

$$y = \frac{\sqrt{(q + 2p)} - \sqrt{(q - 2p.)}}{2}.$$

Sprawdz:

Sprawdz: $xx = \frac{2q + 2\sqrt{(qq - 4pp)}}{4}.$

$$yy = \frac{2q - 2\sqrt{(qq - 4pp)}}{4}.$$

$$xx + yy = \tfrac{4q}{4} = q.$$

$$xy = \frac{(q + 2p) - (q - 2p)}{4} = \frac{4p}{4} = p.$$

171. *Uwága.* Granice náymnieyſzéy wáżności, którą mieć może ilość q, ſą wtedy gdy q, dwa razy tylé oznáczá ilé p: i w takim razie dwie liczby ſzukané ſą równé, i wyráżá ſię tak iedna iako i drugá przez $\frac{\sqrt{(q + 2p)}}{2}$.

Przykłád. Niech będzie 1. $q = 145.$
$p = 72.$
2. $q = 346.$
$p = 165.$
3. $q = 530.$
$p = 247$ (*).

172. *Zadanié 16. Znaléźć dwie ilości, z których iednéy ráz wziętéy, a drugiéy dwa razy wziętéy wiémy ſummę: i wiémy także ſummę ich kwadratów.*

Niech będzie $ſ$, ſummą iednéy ilości ráz wziętéy, i drugiéy dwa razy wziętéy: niech p, będzie ſummą kwadratów ilości dwóch ſzukanych. Jakiéż będą té ilości?

Mianowanié. Niech x oznáczá drugą ilość ſzukaną, będzie $ſ - 2x$ piérwſzą ilością.

Kwadraty tych ilości ſą $\begin{cases} \quad\quad\quad xx. \\ ſſ - 4ſx + 4xx. \end{cases}$

Summa tych dwóch kw: $ſſ - 4ſx + 5xx.$

Warunek. $ſſ - 4ſx + 5xx = p.$

Prze-

(*) Gdyby Nauczyciel oſądził, iż Uczniowie iego nie ſą ieſzcze w ſtanie rozwiązania ogólnie tego Zagadniénia, i naſtępuiących, które także w ogólności po-

Przerób: (Podzieliwszy przez 5 obie strony)

$$xx - \frac{4sx}{5} + \tfrac{1}{5}ss = \tfrac{1}{5}p.$$

(Dopełniwszy kwadratu)

$$xx - \tfrac{4}{5}sx + \tfrac{4}{25}ss = \tfrac{1}{5}p - \tfrac{1}{25}ss = \frac{5p - ss}{25}.$$

(Wyciągnąwszy piérwiástek kwadratowy)

$$x - \tfrac{2}{5}s = \pm \frac{\sqrt{(5p - ss)}}{5}.$$

Rozwiązanié. $x = \dfrac{2s \pm \sqrt{(5p - ss)}}{5}.$

$$s - 2x = s - \frac{4s \pm 2\sqrt{(5p - ss)}}{5} = \frac{s \mp 2\sqrt{(5p - ss)}}{5}$$

Sprawdz: $xx = \dfrac{4ss \pm 4s\sqrt{(5p - ss)} + (5p - ss)}{25}.$

$$= \frac{3ss + 5p \pm 4s\sqrt{(5p - ss)}}{25}.$$

$$ss - 4sx + 4xx = \frac{ss \mp 4s\sqrt{(5p - ss)} + 4(5p - ss)}{25}.$$

$$= \frac{-3ss + 20p \mp 4s\sqrt{(5p - ss)}}{25}.$$

$$ss - 4sx + 5xx = \frac{25p}{25} = p.$$

Granice. Aby $\sqrt{(5p - ss)}$, był ilością istotną, trzeba żeby $5p$, nie było mnieysze od ss: toiest, náymnieysza ważność summy danéy kwadratów, ilości

dané będą; tedy stosuiąc się do poiętności tychże Uczniów, zadáwać im piérwéy może szczególné przykłady, postępuiąc zawsze, od łatwieyszych, do mniéy łatwych, i zawilszych.

ilości dwóch ſzukanych ieſt tá, która ſię równá $\frac{1}{5}$ kwadratu ſummy iednéy ilości ráz wziętéy, i drugiéy dwa razy wziętéy. W takim razié drugá ilość bedzie dwa razy tak wielká iak piérwſzá.

Przykład. Niech będzie 15 ſummą iednéy ilości ráz wziętéy, i drugiéy dwa razy wziętéy. Niech té dwie ilości będą 3, i 6 Summa ich kwadratów 9, i 36, toieſt 45, mnieyſzą będzie, niż iakákolwiek inna ſumma kwadratów, któráby pochodziła z innégo podziáłu.

I tak niechby piérwſzá ilość byla 5, drugá téż byłaby 5: a ſumma ich kwadratów $25 + 25 = 50$. większá niż 45. Niechby byla piérwſzá 1, a drugá 7: ſumma kwadratów będzie $1 + 49 = 50$.

Ogólnie. Oznaczmy ſummę daną przez . . . $5a$.
Niech będzie drugá ilość . . . . . . $2a$.
piérwſzá . . . . . . a.
Summa ich kwadratów . . . . . $5aa$.
Niechby była drugá ilość . . . . $2a \pm z$.
będzie piérwſzá . . . $a \mp 2z$.

Kwadrát drugiéy . . . $4aa \pm 4az + zz$.
Kwadrát piérwſzéy . . $aa \mp 4az + 4zz$.

Summa kwadratów . . $5aa \qquad + 5zz$ Która to ſumma przewyżſzá ilość $5aa$, ilością zawſze przydayną $5zz$.

173. *Uwága.* Gdy to Zagadnienié ieſt do rozwiązania podobném, toieſt, gdy p, ieſt większé niż $\frac{1}{5}ſſ$, w takim razie dwoiſté má rozwiązanié.

Podług piérwſzégo będą dwie ilości

$$\frac{2ſ + \sqrt{(5p - ſſ)}}{5}, \text{ i } \frac{ſ - 2\sqrt{(5p - ſſ)}}{5}.$$

Podług drugiégo będą dwie ilości

$$\frac{2ſ - \sqrt{(5p - ſſ)}}{5}, \text{ i } \frac{ſ + 2\sqrt{(5p - ſſ)}}{5}.$$

Przykład. Niech będzie . . . $ſ = 30$.
$p = 185$.

Podług piérwſzégo rozwiązania, wypadnie 13, i 4.
Podług drugiégo . . . . 11, i 8.

$$13^2 = 169. \qquad 11^2 = 121.$$
$$4^2 = 16. \qquad 8^2 = 64.$$

Summa . . . . 185. Summa 185.

Inſzé przykłady. $ſ = 45$; $ſ = 60$; $ſ = 100$.
$p = 410$; $p = 725$; $p = 2005$.

174. Aby Zagadniénié to rozwiązać przez rozumowanié, zdaie ſię, iż trzeba do tego zaciągnąć pomocy z Jeometryi.

Niech liniiá AB, wyſtáwiá nám ſummę daną iednéy ilości ráz wziętéy, i drugiéy dwa razy wziętéy. Niech liniiá AX, wyrážá piérwſzą z jlości ſzukanych: a niech BX, wyrážá drugą ilość dwa razy wziętą. Niech będzie AC, proſtopadłá do AB, i równá iéy połowie. Pociągniymy BC, a od X, wynieśmy XZ, proſtopadłą do AB, aż do iéy ſpotkania ſię w punkcie Z, z liniią BC. Poprowadźmy do Z, liniją AZ: liniiá XZ, będzie połową linii BX, toieſt, będzie drugą liniią ſzukaną: kwadrát zaś linii AZ, wyſtawi nám ſummę daną kwadratów. Aby więc znaléźć dwa punkta X, i Z, trzeba od punktu A, iak od śrzodka promiéniém równym linii, którey kwadrát równáłby ſię ſummie dwóch kwadratów danych, nakréślić koło, którégo okrąg przecináłby (ieżeli to bydź może) w punkcie Z, liniią BC, i ſpuścić potém od tego punktu proſtopadłą ZX. Fig. 31.

Aby Zagadniénié to było do rozwiązania podobném, okrąg koła powinién ſpotkać liniią BC: a zatém náymnieyſzá wáżność ſummy danéy dwóch kwadratów będzie wtedy, gdy bok kwadratu równégo téy ſummie równá ſię proſtopadłéy AD, ſpuſzczonéy od punktu A, na liniią BC: a ſpuściwſzy DE, proſtopadłą do AB, liniie AE, i DE, będą liniiami ſzukanémi. W tym razie $DE = 2AE$.

Jakož . . $BD : CD = AB^2 : AC^2 = 4 : 1$.
A že . . $BD : CD = BE : AE$.
Więc . . $BE = 4AE$.
a . . . . $DE = 2AE$.
I znowu $BC^2 : AC^2 = AB^2 : AD^2$.
albo $5AC^2 : AC^2 = AB^2 : AD^2$.
więc $AD^2 = \frac{1}{5}AB^2 = \frac{1}{5}ſſ$.

Gdy liniiá AZ, większá ieſt niż AD, wtedy koło przeciná liniią BC, we dwóch punktach równie-odległych od punktu D.

Niechby *np.* było $AZ^2 = p$.

będzie $DZ^2 = p - \frac{1}{5}ss = \frac{5p - ss}{5}$.

A że ieſt $DZ^2 : EX^2 = BC^2 : AB^2 = 5 : 4$.

Więc $EX^2 = \frac{4}{5} DZ^2 = \frac{4}{25}(5p - ss)$.

A zatém $EX = \frac{2\sqrt{(5p - ss)}}{5}$.

$$AX = AE + EX = \frac{s + 2\sqrt{(5p - ss)}}{5}$$

$$BX = BE - EX = \frac{4s - 2\sqrt{(5p - ss)}}{5}.$$

$$EX' = \frac{2\sqrt{(5p - ss)}}{5}.$$

$$AX' = AE - EX = \frac{s - 2\sqrt{(5p - ss)}}{5}.$$

$$BX' = BE + EX' = \frac{4s + 2\sqrt{(5p - ss)}}{5}.$$

$$ZX = \frac{2s - \sqrt{(5p - ss)}}{5}.$$

$$Z'X' = \frac{2s + \sqrt{(5p - ss)}}{5}.$$

Wſzyſtko to zgádzá ſię z poſtępowaniém Algiebraicznêm, wyżéy użytém.

175. *Uwága.* Kiedykolwiek liniiá AZ, nie ieſt więkſzá od AB, wtedy iedén z punktów przecięcia Z, ieſt między punktami B, i C: a zatém jedén z punktów przecięcia X. ieſt między punktami A, i B. W takim więc razie iedno przynáymniéy rozwiązanié ieſt przydaynêm.

Gdy nie tylko liniiá AZ, nie ieſt większá od AB, ale nawet ani od AC, wtedy obadwa rozwiązania będą przydaynémi.

Gdy liniiá AZ, nie ieſt więkſzá od AB, ieſt iednak więkſzá od AC; wtedy iedno rozwiązanié będzie przydaynêm: w drugim zaś rozwiązaniu będzie

dzie ważność linii AX, uiémná: i gdybyśmy w tym razie uważać chcieli AX, iak ilość przydayną, tedy AB, byłaby nie summą, ale nadmiarém iednéy ilości dwa razy wziętéy, nad drugą ráz wziętą.

Nakoniec ieżeli liniiá AZ, większá ieſt od AB, w takim razie obadwa punkta Z, Z′, leżą nie na ſaméy linii BC, ale na iéy przedłużéniu: a zatém też i punkta X, X′, znaydować ſię będą na przedłużéniu linii AB, i tak iedno, iak i drugié rozwiązanié zawiérá w ſobie ilości uiémné.

W piérwſzém rozwiązaniu liniiá AB, będzie Nadmiarém iednéy ilości ráz wziętéy nad drugą, dwa razy wziętą: w drugim rozwiązaniu, liniiá AB, będzie Nadmiarém drugiéy ilości dwa razy wziętéy, nad piérwſzą ráz wziętą.

Té wnioſki wyprowadzoné z wykréślénia Jeometrycznégo zgádzaią ſię zupełnie z wnioſkami, któré wyprowadzić możná z Form ogólnych Algiebraicznych.

Jakoż aby ilość $ſ - 2\sqrt{(5p - ſſ)}$ byłaby przydayną, trzeba, aby $ſ$, nie było mnieyſzé od $2\sqrt{(5p - ſſ)}$: toieſt $ſſ$, nie powinno bydź mnieyſzé od $4(5p - ſſ)$: a zatém $5ſſ$, nie powinno bydź mnieyſzé od $20p$: albo ieſzcze $ſſ$, nie powinno bydź mnieyſzé od $4p$: a nakoniec p, nie powinno bydź większé od $\frac{1}{4}ſſ$, czyli AZ, nie powinna bydź większá od AC.

I znowu aby ilość $2ſ - \sqrt{(5p - ſſ)}$, była przydayną, trzeba, aby $2ſ$, nie było mnieyſzé od $\sqrt{(5p - ſſ)}$: toieſt $4ſſ$, nie powinno bydź mnieyſzé, niż $5p - ſſ$, czyli $5ſſ$, nie powinno bydź mnieyſzé od $5p$, albo $ſſ$, nie powinno bydź mnieyſzé od p, albo nakoniec AZ, nie powinna bydź większá od AB.

Inſzé przykłady. Znaléźć dwie ilości, których wiadomá ieſt ſumma kwadratów, i ſumma iednéy z nich ráz wziętéy, a drugiéy trzy, cztéry, pięć, ſześć, i t. d. razy wziętéy.

76. *Zadanié 17. Podzielić 100 dwa razy: każdy zaś ráz na dwie liczby tak, aby iedna ze dwóch liczb piérwſzégo podziálu, była dwa razy tak wielká, iak iedna ze dwóch liczb drugiégo podziálu, dwóch zaś liczb pozoſtałych Wieloczyn, aby był 1792.*

Mianowanié.	1wſzá część 2go podziálu . . .	x.
	1wſzá część 1go podziálu . . .	$2x$.
	2gá część 2go podziálu . .	$100 - x$.
	2gá część 1go podziálu . .	$100 - 2x$.

Wieloczyn dwóch drugich części $10000 - 300x + 2xx$.

 Wa-

Warunek. $10000 - 300x + 2xx = 1792.$

Przerábianié. (Podzieliwſzy obie ſtrony przez 2, i położywſzy naprzód wyrazy niewiadomé)

$$xx - 150x + 5000 = 896.$$

(Dlá dopełniénia kwadratu, dodáwſzy 625, do piérwſzéy ſtrony, i do drugiéy)

$$xx - 150x + 5625 = 1521.$$

(Wyciągnąwſzy piérwiáſtek kwadr: z obu ſtrón)

$$x - 75 = \pm 39.$$

(Dodáwſzy 75 do obu ſtrón)

$$x = \begin{matrix} 114 \\ 36 \end{matrix}$$

Rozwiązanié. $x = {}^{36}_{114} \quad 100 - x = {}^{64}_{-14}.$

$2x = {}^{72}_{228} \quad 100 - 2x = {}^{28}_{-128}.$

Spráwdzénié. $\begin{cases} 64 \times 28 = 1792. \\ -14 \times -128 = 1792. \end{cases}$

Uwága. Gdyby ſię brały *przydaynie*, (poſitive), drugié częśći dwóch podziáłów, tedy w tym razie, iuż nie ſumma, ale różnica części ſzukanych byłaby daná.

Przez rozumowanié. To Zadanié może wypaśdź na iedno co i Zadanié 7, któré bardzo łatwo rozwiązało ſię ſpoſobém Arytmetycznym.

Fig 32. Jakoż niech linie równé AB, CD, wyſtawuią nám liczbę 100: a linije AX, BX, CY, DY, niech wyſtawuią liczby ſzukané: toieſt, niech CY, będzie dwa razy tak wielká iak AX. Gdy tedy weźmiemy liniią CE, dwa razy tylą, ilá ieſt AB, będzie téż i liniiá EY, dwa razy tak wielká iak BX: a proſtokąt EY $\times$ DY, będzie dwa razy tak wielki, iak proſtokąt DY $\times$ BX. Że zaś tén drugi proſtokąt waży 1792, więc piérwſzy wáżyć będzie 3584. A że różnica dwóch liniy EY, DY, ieſt wiadomá, bo nią ieſt liniiá DE, któ-rá wyráźá liczbę 100; więc podług Zadania 7, linije EY, i DY, wáżą, piérwſzá $78 + 50$, drugá $78 - 50$. toieſt 128, i 28. $BX = \frac{1}{2}EY = 64$: $AX = 100 - 64 = 36$: $CY = 100 - 28 = 72$.

Tén ſpoſób poſtępowania, nie zawiſſ od równości liniy AB, i CD, a nawet ani od ſtoſunku linii AX, do CY.

Ogólnie. Niech będą dwie liczby dané a, b: trzeba tak iednę, iak drugą podzielić na dwie części, aby iedna część iednégo podziáłu, była do ie-

dnéy

danéy części drugiégo podziału, iak m, do n: Wieloczyn zaś drugiéy części iednégo podziału, przez drugą część drugiégo podziału, aby był równy ilości danéy p.

Mianowanié. Niech będą dwie piérwszé części . . . mx, i nx.

Dwie drugié części będą . . . . . $a-mx$, i $b-nx$.

Wieloczyn tych dwóch 2gich części $ab-x(an+bm)+mnxx$.

Warunek. $ab-x(an+bm)+mnxx=p$.

Przerób: $mnxx-x(an+bm)+ab=p$.

(Odiąwszy ab, po obu stronach)

$mnxx-x(an+bm)=p-ab$.

(Podzieliwszy obie strony, przez mn)

$$xx-\frac{x(an+bm)}{mn}=\frac{p}{mn}-\frac{ab}{mn}.$$

(Dodáwszy do obu strón kwadrát ilości $\frac{an+bm}{2mn}$)

$$xx-x\left(\frac{an+bm}{mn}\right)+\frac{aann+2abmn+bbmm}{4mmnn}=\frac{p}{mn}+$$
$$\frac{aann+2abmn+bbmm}{4mmnn}-\frac{ab}{mn}=\frac{p}{mn}+\frac{aann+2abmn+bbmm}{4mmnn}$$
$$-\frac{4abmn}{4mmnn}=\frac{p}{mn}+\frac{aann-2abmn+bbmm}{4mmnn}=\frac{p}{mn}+\left(\frac{an-bm}{2mn}\right)^2=$$
$$\frac{4mnp+(an-bm)^2}{4mmnn}.$$

$$x-\frac{an+bm}{2mn}=\pm\frac{\sqrt{(4mnp+(an-bm)^2)}}{2mn}.$$

$$x=\frac{an+bm\pm\sqrt{(4mnp+(an-bm)^2)}}{2mn}.$$

Rozwiązanié. $mx=\frac{an+bm\pm\sqrt{(4mnp+(an-bm)^2)}}{2n}.$

$nx=$

$$nx = \frac{an + bm \pm \sqrt{(4mnp + (an - bm)^2)}}{2m.}$$

$$a - mx = \frac{an - bm \mp \sqrt{(4mnp + (an - bm)^2)}}{2n.}$$

$$b - nx = \frac{-an + bm \mp \sqrt{(4mnp + (an - bm)^2)}}{2m.} =$$

$$\frac{-(an - bm) \mp \sqrt{(4mnp + (an - bm)^2)}}{2m}.$$

$$ab - x(an + bm) + mnxx = \frac{-(an - bm)^2 + (4mnp + (an - bm)^2)}{4mn.} =$$

$$\frac{4mnp}{4mn} = p.$$

Uwága. Do tychże ſamych Form łatwoby przyśdź można, postępuiąc ſobie przez ſamo tylko rozumowanie.

Przykład. Niech będzie tak, iak w Zadaniu ſzczególném . . . .

$a = 100.$
$b = 100.$
$n = 1.$
$m = 2.$
$p = 1792.$

wypadnie ſtąd,

$$mx = \frac{300 \pm \sqrt{(8.1792 + 100^2)}}{2} = \frac{300 \pm 156}{2} = 150 \pm 78 = {}^{228}_{72}.$$

$$nx = \frac{300 \pm \sqrt{(8.1792 + 100^2)}}{4} = \frac{300 \pm 156}{4} = 75 \pm 39 = {}^{114}_{36}.$$

Inſzé przykłady.

$a = 100.$	$a = 144.$
$b = 120.$	$b = 150.$
$m = 3.$	$m = 5.$
$n = 2.$	$n = 3.$
$p = 1824.$	$p = 5842.$

177. *Zadanié 18. Podzielić tak 100, iak i 180 na dwie części, aby iedna część drugiéy liczby dwa razy była tak wielka, iak iedna część piérwszéy liczby, i aby summa kwadratów dwóch części pozostałych czyniła 9760.*

Mianowanié. Piérwszá część liczby 100 . . . . . x.
Drugá część . . . . $100-x$.
Piérwszá część liczby 180. . . . . . $2x$.
Drugá część . . . . $180-2x$.

$$\text{Kwadraty dwóch drugich części} \begin{cases} 10000-200x+xx. \\ 32400-720x+4xx. \end{cases}$$

$$\text{Summa} \;.\;.\;.\;.\; 42400-920x+5xx.$$

Warunek $5xx-920x+42400=9760$.

Przerábianié. (Podzieliwszy obie strony przez 5)

$$xx-184x+8480=1952.$$

Położmy na piérwszéy stronie za trzeci wyráz, kwadrát połowy liczby 184, toiest 92: tym kwadratém będzie 8464: aby zaś mieć tén kwadrát, trzeba odiąć 16 po obu stronach.

$$xx-184x+8464=1936.$$

(Wyciągnąwszy piérwiastek kwadratowy po obu stronach)

$$x-92=\pm 44.$$

(Dodáwszy 92 do obu strón)

$$x=92\pm 44=\begin{matrix}136\\48\end{matrix}$$

Rozwiązanié. $x=\begin{matrix}48.\\136.\end{matrix}\quad 2x=\begin{matrix}96.\\272.\end{matrix}$

$$100-x=\begin{matrix}52.\\-36.\end{matrix}\quad 180-2x=\begin{matrix}84\\-92.\end{matrix}$$

$$(100-x)^2=\begin{matrix}2704\\1296.\end{matrix}\quad (180-2x)^2=\begin{matrix}7056\\8464.\end{matrix}$$

Sprawdzénié. $2704+7056=9760.$
$1296+8464=9760.$

Uwága. Gdybyśmy brali za przydayné, a nie za uiémné, drugié części, drugiégo rozwiązania; tedy té odpowiedałaby innému Zadaniu, w którém iuż nie summa, ale różnica ich od piérwszych części byłaby daná.

178. Zagadnienié to uważané Jeometrycznie i ogólnie, takby się wyraziło. *Przeciąć dwie liniie dané, iednę i drugą na dwie części, tak, aby stosunek iednéy części iednéy linii, do iednéy części drugiéy linii był dany: i aby summa kwadratów, dwóch drugich części była także daná.*

Rozwiązanié Jeometryczné tego Zadania ogólnie uważanégo służyć nám będzie za przykład, iak mámy sobie postępówać, rozwięzuiąc przez rozumowanié, iakiéżkolwiek Zadanié, któré kilka, szczególnych przypádków może mieć.

Fig. 33. Niech będą AB, i CD, dwie liniie dané, któré tak podzielić trzeba, iednę w punkcie X, a drugą w punkcie Y, aby stosunek AX, do CY, był równy danému; i aby summa kwadratów z BX, i z DY, była także równá danéy.

Przypádek 1wszy. Niech liniie AB, i CD, będą do siebie w stosunku danym AX, do CY: będzie więc i stosunek BX, do DY równy témuż stosunkowi: a zatém tén przypádek wychodzi na iedno z Zadaniém 4 tego Rozdziału.

Przykład. Niech będzie $\begin{matrix} AB = 40. \\ CD = 60. \end{matrix}$ i niech będzie stosunek dany AX, do CY, równy stosunkowi 2, do 3, w którym także są do siebie liniie AB, i CD

Niech będzie 1573, summą daną dwóch kwadratów.

Ponieważ w tym razie, liniie BX, DY, maią się także do siebie iak 2, do 3; będą więc ich kwadraty, iak 4, do 9: a zatém té kwadraty, i ich summa, będą się miały do siebie, iak liczby 4, 9, i 13: samé zaś kwadraty będą $\frac{4}{13}$, i $\frac{9}{13}$ względém ich summy: toiest iedén będzie 484, a drugi 1089: więc liniie BX, i DY, odpowiadać będą piérwiástkóm kwadratowym liczb 484, i 1089, toiest, liczbóm 22, i 33.

$$AX = 18. \qquad BX = 22.$$
$$CY = 27. \qquad DY = 33.$$

Uwága. Wyciągaiąc z liczb 484, i 1089, piérwiástki kwadratowé, możná ié brać przydatnie, lub uiémnie, tak dalece, że liniióm BX, i DY, odpowiadać będą dwie wáżności ± 22, ± 33.

Wáżności uiémné oznáczaią, że punkta X, i Y, są na liniiach AB, i CD, przedłużonych. W takim razie liniie AX, i CY, większé są od liniy, BX, i DY, liniiami AB, i CD, toiest, wáżność linii AX, będzie 62, a wáżność linii BX, będzié 93.

Przypá-

Przypádek 2gi. Niech liniiá CD, będzie mnieyſzá od innéy linii, Fig. 34.
któréy ſto~~ſunek do~~ AB, byłby równy ſtoſunkowi dánému CY, do AX.

Niech CE, będzie tą liniią, maiącą do AB, ſtoſunek dany CY, do AX. Niech CF, równá AB, będzie proſtopadłą do CD: poprowádźmy liniią EF. Gdy od punktu Y, wynieſiémy YZ, proſtopadłą do CD, i przecinaiącą w punkcie Z, liniią EF; ſtoſunek ~~linii EY, do~~ linii YZ, równy będzie ſtoſunkowi linii EC, do CF, czyli EC, do AB, ąlbo CY, do AX, albo nakoniec BX, do EY: a zatém YZ, równá ſię linii BX: będzie przeto daná ſumma kwadratów z linii DY, i YZ. Gdy tedy z punktu D, iak od śrzodka, nakréślimy koło promiéniém równym linii, któréy kwadrát równáłby ſię ſummie danéy dwóch kwadratów, to koło liniią EF, przetnie w punkcie Z, punkt tén Z, będzie wyznaczonym: a zatém i punkt Y, ſpuściwſzy proſtopadłą ZY.

Spuśćmy proſtopadłą DG, na EF. Z proporcyi $EF:FC = ED:DG$, wyrachuymy liniią DG. Kwadrát iéy oznaczy náymnieyſzą ważność ſummy dwóch kwadratów. Spuśćmy znowu proſtopadłą GH, na CE, i wyrachuymy liniią $DH = \frac{DG^2}{DE}$. Od ſummy danéy dwóch kwadratów, odeymiéymy kwadrát DG^2 (mnieyſzy niż ta ſumma) zoſtanie ſię kwadrát GZ^2, a przez proporcyą $EF^2:EC^2 = GZ^2:HY^2$; znaydziémy HY^2. Wyciągnąwſzy piérwiáſtek kwadratowy, znaydziémy ważność linii HY, od któréy odiąwſzy DH, zoſtanie ważność linii DY.

Koło wykréślone z punktu D, iak ze śrzodka promieniém DZ, przetnie liniią FG, przedłużoną w punkcie Z′, co dá ważność linii HY′, równéy linii HY: do HY′, dodáwſzy DH, będzie DY′, któréy odpowiédá ważność linii BX′. Liniie DY′, BX′, ſą niemné względém teraźnieyſzégo Zadania, w którém ſię kładzie, iż punkta X, i Y, ſą piérwſzy między punktami A, i B, drugi między punktami C, i D. Téż ſamé zaś liniie DY′, i BZ′, rozwiązałyby ſpoſobém przydaynym inſzé Zagadniénié, w którém różnica liniy AX′, BX′, byłaby daná, i w którém także daná byłaby różnica liniy CY′, DY′.

Aby przynaymniéy iedno rozwiązanié było przydaynéṃ, trzeba do tego, żeby liniiá DZ nie była większá od linii DF: toieſt, żeby ſumma daná dwóch kwadratów, nie była większá od ſummy kwadratów liniy AB, i CD.

Przykład. Niech będzie $AB = 8100.$
$CD = 6400.$
Niech będzie AX do CY, iak 3, do 4.
a zatém $CE = 10800.$
$DE = 4400.$
$CE^2 : CF^2 = 16 : 9.$ więc $EF^2 : CF^2 = 25 : 9.$
A że $EF^2 : CF^2 = ED^2 : DG^2.$
więc $25 : 9 = 19\ 360\ 000 : DG^2.$
więc $DG^2 = 6\ 969\ 600.$

$$DH = \frac{6\ 969\ 600}{4400} = 1584.$$

Niech będzie ſumma daná kwadratów,
toieſt $DZ^2 = 30\ 009\ 600.$
więc $GZ^2 = 23\ 040\ 000.$
A że $25 : 16 = GZ^2 : HY^2.$
więc $25 : 16 = 23040000 : HY^2.$
(Wyciągnąwſzy ze wſzyſtkich wyrazów pierwiáſtek)
będzie $5 : 4 = 4800 : XY.$
albo $10 : 8 = 4800 : XY.$
a zatém $HY = HY' = 8 \times 480 = 3840.$
$DY = 3840 - 1584 = 2256.$
$DY' = 3840 + 1584 = 5424.$
$CY = CD - DY = 6400 - 2256 = 4144.$
$CY' = CD + DY' = 6400 + 5424 = 11824.$
$AX = \frac{3}{4} CY = 3108.$
$AX' = \frac{3}{4} CY' = 8868.$
$BX = AB - AX = 8100 - 3108 = 4992.$
$BX' = AX' - AB = 8868 - 8100 = 768.$

Fig. 35. *Przypádek 3ci.* Niech będzie liniiá CD, większá niż inná liniiá, któréy ſtoſunek do AB, równałby ſię ſtoſunkowi danému CY, do AX.

Niech będzie CE, tą liniią, która do AB, má ſtoſunek dany CY, do AX. Niech będzie CF, proſtopadłá do CD, i równá linii AB. Poprowádźmy EF, a od punktu D, iak od śrzodka promiéniém równym linii, któréy kwadrát równałby ſię ſummie danéy kwadratów, nakréślmy koło, któréby przecięło w punktach Z, Z', liniią EF. Niech będą ZY, Z'Y', proſtopadłé do CD: liniie CY, DY, i CY', DY', wzięté na linii CD, zadoſyć

uczyoczynią zagadnieniu: tym zaś liniiom odpowiadać będą, na linii AB, liniie AX, (równá linii ZY,) BX: i AX′ (równá linii Z′Y′) BX′.

Co do rachunku: niech będzie DG, proſtopadłá do FE: oznaczy ona náymnieyſzą ważność linii DZ: niech znowu będzie GH, proſtopadłá do CD.

Wyrachowáwſzy liniią GD, z proporcyi EF:FC=ED:GD. znaydziémy ważność linii $DH = \frac{DG^2}{ED}$. W troykącie DGZ, którégo wiadomá ieſt przeciwproſtokątná DZ, i iedén bok DG, wyrachuiémy GZ^2. Z proporcyi $EF^2 : EC^2 = GZ^2 : HY^2$, będzie możná wyrachować HY^2: a zatém i HY, któréy równá ſię HY′. Dodaiąc, i odeymuiąc DH, znaydziémy DY, i DY′.

Przykład. Niech będzie AB = 156. CD = 328. i niech będzie ſtoſunek dany AX, do CY, równy ſtoſunkowi 3, do 5.

A że ieſt 3:5 = 156:260; więc CE = 260; a zatém DE = 68.

Trzy ilości EF^2, EC^2, CF^2, ſą do ſiebie iak liczby, 34, 25, 9: A że $EF^2 : FC^2 = DE^2 : DG^2$; więc $34 : 9 = 68^2 : DG^2$; a zatém $DG^2 = 1224$, a $DH = \frac{1224}{68} = 18$.

Náymnieyſzá tedy ważność DZ^2, ieſt 1224. Niechby było $DZ^2 = 50320$, więc $GZ^2 = 50320 - 1224 = 49096$. A że $34 : 25 = 49096 : HY^2$, więc HY = 190.

DY = HY + HD = 190 + 18 = 208. DY′ = HY′ — HD = 190 — 18 = 172.

CY = 120. AX = 72. BX = 84.
CY′ = 500. AX′ = 300. BX′ = 144.

Drugié rozwiązania, odpowiedaią różnicy danéy, ilości ſzukanych, a nie ich ſummie.

Niech będzie DL, proſtopadłá do CD, i ſpotykaiącá FE w L. Jeżeli DZ, ieſt daná mnieyſzá, niż DL, tedy dwa punkta przecięcia Y, Y′, przypádaią między C, i D, a zatém dwie ważności liniy wziętych na CD, ſą przydayné. W tym przypádku ieżeli DL, większá ieſt od DE, tedy dwa rozwiązania względém linii AB, ſą niemné; ponieważ w tym razie liniie ZY, Z′Y′, będą miały położénia ſwoie z téy ſaméy ſtrony liniy CD, z któréy ieſt liniá Y′Z′. Ale ieżeli w tymże przypádku, liniá DL, ieſt mnieyſzá od DE, tedy iedno rozwiązanié, względém linii AB, będzie przydayné.

Wszystkié té przypádki można obiaśnić, na przykładach liczebnych.

Nakoniec podług wykréślénia poprzedzaiącégo, można ustanowić formę ogólną.

Niech będzie $AB = a$.

$DC = b$.

Niech będzie stosunek dany AX, do CY, równy stosunkowi AB, do CE, i niech będzie $CE = c$.

$DE = b - c$. (w trzecim przypádku)

$EF^2 : CF^2 = DE^2 : DG^2$.

czyli $aa + cc : aa = (b-c)^2 : DG^2 = \frac{aa}{aa+cc}(b-c)^2$.

$$DH = \frac{DG^2}{DE} = \frac{aa}{aa+cc}(b-c)^2 : (b-c) = \frac{aa}{aa+cc}(b-c).$$

Niech będzie $DZ^2 = q$.

$$GZ^2 = q - \frac{aa}{aa+cc}(b-c)^2 = \frac{q(aa+cc) - aa(b-c)^2}{aa+cc}.$$

A że, $aa + cc : cc = \frac{q(aa+cc) - aa(b-c)^2}{aa+cc} : HY^2$.

Więc $HY = \frac{c}{aa+cc}\sqrt{(q(aa+cc) - aa(b-c)^2)}$.

$$DY = \frac{c}{aa+cc}\sqrt{(q(aa+cc) - aa(b-c)^2)} + \frac{aa}{aa+cc}(b-c)$$

$$DY' = \frac{c}{aa+cc}\sqrt{(q(aa+cc) - aa(b-c)^2)} - \frac{aa}{aa+cc}(b-c)$$

Stąd łatwo iuż będzie, i inszych ilości ważność oznaczyć.

179. *Zadanié 19. Prostokąt pewny, má dwa razy tak wielką długość, iak szérokość. Gdy do każdégo boku iego dodámy po iednéy stopie, powiérzchniá zawiérać w sobie będzie stóp kwadr: 120.*

Mianowanié.	1wszá szérokość . . .	x.
	1wszá długość . .	$2x$.

$$
\begin{array}{ll}
\text{2gá szérokość} \;.\;.\;.\;.\;. & x+1. \\
\text{2gá długość} \;.\;.\;.\;.\;. & 2x+1. \\
\hline
\text{2gá powiérzchniá} \;.\;. & 2xx+3x+1.
\end{array}
$$

Warunek. $2xx + 3x + 1 = 120.$

Przerábianié. (Odiąwszy 1 po obu stronach)

$$2xx + 3x = 119.$$

(Podzieliwszy obie strony przez 2)

$$xx + \tfrac{3}{2}x = 59\tfrac{1}{2}.$$

Połowa Spółczynnika drugiégo wyrazu, iest $\frac{3}{4}$, *kwadrát* $\frac{9}{16}$.

(Dodáwszy $\frac{9}{16}$ do obu strón)

$$xx + \tfrac{3}{2}x + \tfrac{9}{16} = 59\tfrac{1}{2} + \tfrac{9}{16} = 60\tfrac{1}{16} = \tfrac{961}{16}.$$

(Wyciągnąwszy piérwiástek kwadratowy)

$$x + \tfrac{3}{4} = \pm \tfrac{31}{4}.$$

(Odiąwszy $\frac{3}{4}$ po obu stronach)

$$x = \begin{array}{c} \frac{28}{4} \\ -\frac{34}{4} \end{array} = \begin{array}{c} 7. \\ -8\frac{1}{2}. \end{array}$$

Rozwiązanié. $x = \begin{array}{c} 7. \\ -8\frac{1}{2}. \end{array}$

$$2x = \begin{array}{c} 14. \\ -17. \end{array}$$

$$x + 1 = \begin{array}{c} 8. \\ -7\frac{1}{2}. \end{array}$$

$$2x + 1 = \begin{array}{c} 15. \\ -16. \end{array}$$

Sprâwdzénié. $8 \times 15 = 120.$

$$-16 \times -7\tfrac{1}{2} = 120.$$

Uwága. Gdyby w drugim rozwiązaniu, brały się wyrazy przyday-nie, tedy takowé rozwiązanié odpowiedałoby następuiącému Zadaniu: *Znaléźć Prostokąt, którégo iedén bok, dwa razy iest tak wielki, iak drugi, i którégo powiérzchniá, odiąwszy od każdégo boku po 1 stopie, byłaby 120 stóp kwadratowych.*

Rozwią-

Rozwiązanié tego Zagadniénia, mogłoby téż bydź przywiedzionéın przez rozumowanié, do 7 Zadania tego Rozdziału.

Fig 36. Niech będzie AXYZ, Prostokąt szukany, którégo długość AX, dwa razy iest tak wielká, iak szérokość AZ. Niech równé liniie AD, BY, dodané do boków tego prostokąta wystawuią nám długość iednéy stopy, i niech po tém dodaniu powiérzchniá prostokąta DXBC, będzie 120 stóp kwadr:

Powiérzchniá tego prostokąta, zmnieyszoná kwadratém CZ, zawiérá 119 stóp kwadr. Ta powiérzchniá tak zmnieyszoná, skłádá się z piérwszégo Prostokąta AXYZ, i ze dwóch prostokątów DZ, BZ, iednakiéy szérokości; a długość drugiégo BZ, dwa razy będzie tak wielká, iak długość piérwszégo DZ. Weźmy liniią DE, dwa razy tylą, ilá iest AD, i dopełniymy prostokąta EXYF. Prostokąt DF, równy będzie prostokątowi BZ: a zatém prostokąt EXYF, równy będzie prostokątowi DXBC, zmnieyszonému kwadratém CZ, więc tén prostokąt zawiérá w sobie stóp kw. 119: Prostokąt zaś z linii EX, AX, iako dwa razy tak wielki zawiérać będzie stóp kwadr: 238. A że wiadomá iest różnica liniy EX, AX, toiest, liniiá AE, zawiéraiącá 3 stopy, więc Zadanié wypádá na to sámo, co i Zadanié 7 tego Rozdziału.

Inszé przykłady. Znaléźć Prostokąt, którégo długość trzy razy tak wielká, iak szérokość; a gdy się dodá po 2 stopy do każdégo boku, powiérzchniá będzie 260 stóp kwadr:

Naiął kto pewną liczbę robotników, z których każdy bierze 4 razy tylé groszy, ilé iest robotników: ténże przybrał drugą razą 3 ieszcze robotników więcéy, i płaci każdému z nich po 2 groszé drożéy, niż piérwszym razém; wydał zaś tą drugą razą na tychże robotników groszy 456.

180. *Uwága.* W Zagadniéniach tego gatunku, częstokroć się przytráfiá, iż dlá uwolniénia ilości niewiadoméy, od spółczynnika, zawiłém się czyni równanié, z przyczyny wprowadzonych ułómków: atoli można się ich uchronić, mnożąc równanié przez taką ilość, aby spółczynnika kwadratu ilości niewiadoméy, uczynić kwadratém. I tak w równaniu $3xx + 8x + 4 = 260$, (któré wypádá z drugiégo przykładu tego Zadania) rozmnożywszy obiedwie strony przez 3, będzie $9xx + 24x + 12 = 780$. Uważaiąc $3x$, iak ilość niewiadomą, czyli piérwszy wyráz piérwiástku kwadratowégo piérwszéy strony tego równania, przywiedzionéy do kwadratu, będzie $24x$, podwóynym wieloczynéın drugiégo wyrazu tegoż Piérwiástku rozmnożonégo przez piérwszy wyráz $3x$: albo, (co na iedno wychodzi) będzie $24x$ poiedynczym Wieloczynéın tego drugiégo wyrazu, przez $6x$: więc drugi wyráz piérwiástku iest 4. Piérwszą tedy stronę równania przywiéśdź trzeba do tego, aby była

była kwadratém z $3x+4$, toieſt $9xx+24x+16$: co będzie gdy dodámy 4, do obu ſtrón równania: tak albowiém wypadnie równanié $9xx+24x+16=784$, z którégo wyciągniony piérwiáſtek kwadratowy, będzie $3x+4=28$; (opuściwſzy piérwiáſtek uiémny) a zatém $3x=24$, $1x=8$.

W piérwſzym przykładzie tego Zadania, rozmnożywſzy przez 2, równanié $2xx+3x=119$; będzie $4xx+6x=238$. Ponieważ zaś piérwſzy wyráz piérwiáſtku piérwſzéy ſtrony, przywiedzionéy do kwadratu, ieſt $2x$; więc drugi wyráz będzie wielorazém, z $6x$, podzielonych przez $4x$; czyli z 6 podzielonych przez 4, który to wieloráz ieſt ułómkowy $\frac{3}{2}$. Gdy dlá uchroniénia ſię iego, rozmnożymy ieſzcze całé równanié przez kwadrát mianownika tego ułómku, toieſt przez 4, będzie $16xx+24x=952$.

W tém oſtatniém równaniu, ponieważ $4x$, ieſt piérwſzym wyrazém piérwiáſtku piérwſzéy ſtrony, przywiedzionéy do kwadratu; więc wieloráz z 24, podzielonych przez 8, toieſt 3, będzie drugim wyrazém tego piérwiáſtku, i całé równanié przywiedzioné do tego, aby piérwſzá iego ſtrona, była kwadratém, będzie $16xx+24x+9=961$.

Wyciągnąwſzy piérwiáſtek kwadratowy (przydayny)

$$4x+3=31.$$
$$4x\quad=28.$$
$$1x\quad=7.$$ tak iak wyżéy.

Wſzyſtkié więc ſpółczynniki wyrazów będą cálkowité, używſzy tego ſpoſobu:

W ogólności. Niech będzie równanié $axx+2bx=p$, które rozwiązać chcémy, chroniąc ſię ułómków w Przerábianiu.

Rozmnożywſzy całé równanié przez a.

będzie $aaxx+2abx=ap$.

Dopełniymy kwadratu, dodáwſzy bb, po obu ſtronach:

będzie $aaxx,+2abx+bb,=ap+bb$.

Wyciągniymy piérwiáſtek kwadratowy.

będzie $ax+b=\pm\sqrt{(ap+bb)}$.

$$ax=\pm\sqrt{(ap+bb)}-b.$$
$$x=\frac{\pm\sqrt{(ap+bb)}-b.}{a.}.$$

Jeżeli ſpółczynnikiém drugiégo wyrazu byłaby liczba nie párzyſtá c, tedy rozmnożyć trzeba równanié $axx+cx=p$, przez $4a$; i będzie

$$4aaxx+4acx=4ap.$$

Gg Drugi

Drugi wyráz Piérwiáſtku w piérwſzéy ſtronie równania, którą obrócić mámy na kwadrát, będzie $\frac{4ac}{4a} = c$.

Dopełniwſzy kwadratu, będzie

$$4aaxx + 4acx + cc = cc + 4ap.$$

Wyciągnąwſzy piérwiáſtek kwadratowy, będzie

$$2ax + c = \pm\sqrt{(cc + 4ap)}$$

$$x = \frac{\pm\sqrt{(cc+4ap)} - c}{2a}.$$

181. *Zadanié 20. Proſtokąt pewny má dwa razy tak wielką długość iak ſzérokość. Gdy dodámy iednę ſtopę do iego długości, a odeymiémy iednę ſtopę od iego ſzérokości, powiérzchniá mieć będzie ſtóp kwadratowych 90.*

Mianowanié. 1wſzá ſzérokość . . . . x.
1wſzá długość . . . . $2x$.
2gá ſzérokość . . . . $x - 1$.
2gá długość . . . . $2x + 1$.
2gá powiérzchniá . . . . . $2xx - 1x - 1$.

Warunek. $2xx - 1x - 1 = 90$.

Przeróbianie. (Dodáwſzy 1 do obu ſtrón)

$$2xx - 1x = 91.$$

(Rozmnożywſzy obie ſtrony przez 8.)

$$16xx - 8x = 728.$$

(Dopełniwſzy kwadr: przez dodanié 1)

$$16xx - 8x + 1 = 729.$$

(Wyciągnąwſzy piérwiáſtek kwadratowy)

$$4x - 1 = \pm 27.$$

(Dodáwſzy 1 po obu ſtronach)

$$4x = \begin{matrix} 28. \\ -26. \end{matrix}$$

(Podzieliwſzy obie ſtrony przez 4)

$$x = \begin{matrix} 7. \\ -6\tfrac{1}{2}. \end{matrix}$$

Rozwiązanié. $x = 7$. 1wſzá ſzérokość.
$2x = 14$. 1wſzá długość.

$x - 1 = 6.$

$x - 1 = 6.$ 2gá ſzérokość.

$2x + 1 = 15.$ 2gá długość.

$2xx - 1x - 1 = 90.$ 2gá powiérzchniá.

Drugié rozwiązanié $x = -6\frac{1}{2}$ uważané przydaynie, wychodzi na to, aby znaléźć proſtokąt, którégo długość byłaby dwa razy tak wielká iak ſzérokość, i do którégo ſzérokości dodáwſzy 1 ſtopę, a od długości uiąwſzy 1 ſtopę, powiérzchniá mieć będzie 90 ſtóp kwadratowych.

1wſzá ſzérokość	$6\frac{1}{2}$.
1wſzá długość	13.
2gá ſzérokość	$7\frac{1}{2}$.
2gá długość	12.
2gá powiérzchniá . . .	$12 \times 7\frac{1}{2} = 90.$

182. *Uwága.* W każdém zagadnieniu, gdy iuż ráz przywiedzioné ieſt do równania, tedy potém nie myśli ſię więcéy o zamiarze, który nám założono w témże zagadniéniu, ale ſię tylko zatrudniá około rozwiązania równania, w liczbach ogólnié, czyli oddzielnie branych; które to rozwiązanié zdaie ſię czaſém bydź trudném, gdy go przychodzi przyſtóſować do zamiaru wyrażnégo, któryśmy naprzód mieli przed oczyma. I tak w przykładzie poprzedzaiącym, gdyby zagadniénié podané było oddzielnie, tak na przykład: *Znaléźć dwie liczby, z których iedna byłaby dwa razy tak wielká, iak drugá; i które nadto byłyby takié, że dodáwſzy 1, do iednéy, a odiąwſzy 1, od drugiéy, wieloczyn byłby 90:* tedy drugié rozwiązanié zachowané uiémnie, odpowiedá tak zupełnie na zadanié, iak i rozwiązanié przydayné.

Toż ſamo zadanié możná przywieśdź do zadania 7, w ſpoſób naſtępuiący.

Niech będzie proſtokąt AXYZ, którégo długość AX, byłaby dwa razy tak wielká, iak ſzérokość XY. Do długości AX, dodáymy AD, wyrażaiącą iednę ſtopę, a od ſzérokości XY, odeymiéymy BY, wyrážaiącą także iednę ſtopę. Po téy odmianie powiérzchniá proſtokąta DXBC, zawiérać będzie ſtóp kwadr: 90. Dopełniymy kwadratu CZ, który má w ſobie iednę ſtopę kwadratową: Summa proſtokątów DZ, AB, mieć będzie ſtóp kwadr: 91: czyli cały proſtokąt DY, mniéy proſtokątém BZ, zawiérać będzie ſtóp kwadratowych 91. A że proſtokąt BZ, dwa razy ieſt tak wielki, iak proſtokąt DZ; więc wziąwſzy AE, równą AD, i poprowadziwſzy EF, równoległą od AZ, proſtokąt EY, zawiérać będzie 91 ſtóp kwadr: więc proſtokąt z linii EX, przez linią AX, (dwa razy tak wielką iak AZ,) zawiérać będzie 182 ſtóp kwadrat: Że zaś różnica liniy AX, i EX, ieſt daná w iednéy ſtopie; więc zagadniénié przywiedliśmy do zadania 7. Fig. 37.

Inſzé

Insze przykłady. Znaléźć prostokąt, którégo długość byłaby trzy razy tak wielka, iak szérokość: gdy zaś dodámy 2 stopy do iego długości, a odeymiémy 3 stopy od iego szérokości, powiérzchniá mieć będzie 92 stóp kwadr.

Znaléźć prostokąt, którégo długość miałaby się do szérokości, iak 4 do 3: gdy zaś dodámy do szérokości iego stóp 2, a odeymiémy od długości stóp 3, powiérzchniá będzie 182 stóp kwadr.

183. *Zadanié 21. Powiérzchniá pewnégo prostokąta md stóp kwadr: 391. Gdy zaś do każdégo iego boku dodámy po 1 stopie, powiérzchniá iego mieć będzie stóp kwadr: 432.*

Fig. 38. *Przez rozumowanié* Niech będzie XYZV, prostokąt szukany, któremu dodané są liniie równé YP, VR, wyrážaiącé 1 stopę. Róźnica daná dwóch prostokątów, iest 41 stóp kwadr. A że ta różnica składá się ze dwóch prostokątów PZ, RZ, (których szérokości iest 1 stopa, a długość ich równá długości prostokąta szukanégo XYZV) i z kwadratu QZ, który zawiérá 1 stopę kwadr: więc summa dwóch tych prostokątów zawierać będzie 40 stóp kwadratowych. A że w szérokości swoiéy maią tylko 1 stopę; więc summa długości ich będzie 40 stóp: a zatém zagadniénié przywiedzioné iest do zadania 8; i takby go możná wyrazić: *Znaléźć dwie liniie, których summa iest 40 stóp, a prostokąt z nich 391 stóp kwadratowych.* Kwadrát połowy różnicy tych liniy iest 9, połowa ich różnicy 3, połowa summy 20: są zatém té liniie szukané, iedna 17 stóp, drugá 23.

Algiebraicznie. Niech będzie 1 bok 1go prostokąta . . x.

Będzie drugi bok iego . . . . $\frac{391}{x}$.

Jedén bok 2go prostokąta będzie . . $x+1$.

Drugi bok iego będzie $\frac{432}{x+1}$ albo $\frac{391}{x}+1$.

Warunek. $\frac{391}{x}+1=\frac{432}{x+1}$.

Przeráb: (Przywiódłszy dwa ułómki do iednakowégo mianownika)

$$\frac{391x+391}{xx+x}+1=\frac{432x}{xx+x}.$$

(Odię-

(Odiąwſzy $391x$ po obu ſtronach od liczników)

$$\frac{391}{xx+x}+1=\frac{41x}{xx+x}.$$

(Obróciwſzy 1, na ułómek)

$$\frac{391+xx+x}{xx+x}=\frac{41x}{xx+x}.$$

(Rozmnożywſzy obie ſtrony przez $xx+x$)

$$391+xx+x=41x.$$

(Odiąwſzy $41x$ po obu ſtronach)

$$xx-40x+391=0.$$

(Dodáwſzy 9 do obu ſtrón, aby trzeci wyráz ſtał ſię kwadratém z 20) $xx-40x+400=9$.

(Wyciągnąwſzy piérwiáſtek kwadratowy)

$$x-20=\pm 3.$$

(Dodáwſzy 20 po obu ſtronach)

$$\left.\begin{array}{l} x=\begin{array}{l}23.\\17.\end{array}\\[1ex] \dfrac{391}{x}=\begin{array}{l}17.\\23.\end{array}\end{array}\right\}$$ Ważność boków, które na przemián przypádaią.

Rozwiązanié. $x=23.$ Jedén bok 1go proſtokąta.

$\frac{391}{x}=17.$ Drugi bok 1go proſtokąta.

$x+1=24.$ Jedén bok 2go proſtokąta.

$\frac{432}{x+1}=18.$ Drugi bok 2go proſtokąta.

$\frac{391}{x+1}+1=18.$ Drugié wyrażénié tego oſtatniégo boku równé piérwſzému.

184. *Przyſtóſowanié.* Spoſób wyżéy podany przez rozumowanié, ſłuży nie tylko w tym razie, gdy dodania do obudwóch boków ſą równé, ale i w innych.

Przykład. Znaléźć proſtokąt, któr'ego powiérzchniá zawiérá 221 ſtóp kw. a dodáwſzy do iednégo boku ſtóp 2, do drugiégo ſtóp 3, zawiérdłaby 300 ſtóp kw.

 Niech

Fig. 39. Niech będzie XZ, prostokąt, którégo powiérzchniá zawiérá 221 stóp kwadr. Niech bokami iego będą linie XY, XV, powiększyymy piérwszą przez YP, oznáczaiącą 3 stopy, drugą przez VR, oznáczaiącą 2 stopy; i niech prostokąt XPQR, zawiérá stóp kwadr: 300. Różnica tych dwóch prostokątów, iest 79 stóp kwadr: A że tę różnicę rozłożyć możná na dwa prostokąty PZ, RZ, i na trzeci prostokąt QZ, który zawiérá 6 stóp kwadr: więc summa prostokątów PZ, RZ, zawiérać będzie 73 stóp kwadr: A że znowu té dwa prostokąty rozłożyć możná, piérwszy na 3, a drugi na 2 prostokąty iednakowéy szérokości, długość zaś trzech piérwszych, będzie YZ, (bok piérwszégo prostokąta szukanégo), a długość dwóch drugich będzie VZ, (bok drugi tegoż prostokąta); i summa tych 5 prostokątów, równá się iednému takiému, któryby miał szérokość im równą, a długość równą, potróynéy linii YZ, i oráz podwóynéy VZ; więc summa potróynéy YZ, i podwóynéy VZ, czyni 73 stóp.

Niechby liniiá AB, była równá téy summie, niech liniiá AS, wyrážá podwóyną XY, czyli VZ, a liniiá BS, niech wyrážá potróyną YZ, czyli VX.

Ponieważ prostokąt z linii XY, przez YZ, zawiérá 221 stóp kwadr: więc prostokąt z AS, przez BS, sześć razy tak wielki, zawiérać będzie 1326 stóp kwadr: A że summa liniy AS, BS, oznácza 73 stóp; więc połowa oznaczy $36\frac{1}{2}$ stóp. Kwadrát połowy téy summy iest $1332\frac{1}{4}$, a nadmiár tego kwadratu nad 1326, toiest $6\frac{1}{4}$, czyli $\frac{25}{4}$, będzie kwadratém połowy różnicy, między AS, i BS, a zatém połowa téy różnicy iest $\frac{5}{2}$, czyli $2\frac{1}{2}$.

$$\text{Więc}\quad BS = 36\tfrac{1}{2} \pm 2\tfrac{1}{2} = \begin{matrix} 39. \\ 34. \end{matrix}$$

$$AS = 36\tfrac{1}{2} \mp 2\tfrac{1}{2} = \begin{matrix} 34. \\ 39. \end{matrix}$$

$$\text{A że iest } BS = 3YZ;\ \text{więc } YZ = \begin{matrix} 13. \\ 11\frac{1}{3}. \end{matrix}$$

$$AS = 2XY;\ \text{więc } XY = \begin{matrix} 17. \\ 19\frac{1}{2}. \end{matrix}$$

Więc w tym razie Zagadniénié má dwa rozwiązania odmienné, tak, iak wyżéy.

Algiebraicznie. Niech będzie bok $XY = x$.

$$YZ = \frac{221}{x}.$$

$XP = x + 3.$

$$XP = x + 3.$$

$$XR = \frac{300}{x+3} \text{ albo } \frac{221}{x} + 2.$$

Warunek. $\frac{221}{x} + 2 = \frac{300}{x+3}$.

Przeráb: (Przywiódłszy dwa ułómki do iednakowégo mianownika)

$$\frac{221x + 663}{xx + 3x} + 2 = \frac{300x}{xx + 3x}.$$

(Odiąwszy $221x$ po obu stronach od Liczników)

$$\frac{663}{xx + 3x} + 2 = \frac{79x}{xx + 3x}.$$

(Obróciwszy 2 na ułómek)

$$\frac{663 + 2xx + 6x}{xx + 3x} = \frac{79x}{xx + 3x};$$

(Rozmnożywszy obie strony przez mianownika)

$$663 + 2xx + 6x = 79x.$$

(Odiąwszy $79x$ po obu stronach)

$$2xx - 73x + 663 = 0.$$

(Rozmnożywszy wszystko przez 8, dlá uniknienia ułómków)

$$16xx - 584x + 5304 = 0.$$

(Położywszy za trzeci wyráz kwadrát z 73)

$$16xx - 584x + 5329 = 25.$$

(Wyciągnąwszy piérwiástek kwadratowy)

$$4x - 73 = \pm 5.$$

(Dodáwszy 73 po obu stronach)

$$4x = \begin{matrix} 78. \\ 68. \end{matrix}$$

Więc : : $1x = \begin{matrix} 19\frac{1}{2} \\ 17. \end{matrix}$ tak iak się téż wynalazło przez rozumowanié.

Insze przykłady. Kupuie kto pewną liczbę łokci materyi, za którę płaci zł. 204. Inną razą kupuie 5 łokci więcéy niż piérwszą innéy materyi, któréy łokieć płaci 4 złotémi drożéy, niż łokieć piérwszéy, i zapłacił 352 zł. Ileż łokci kupił, i iaką ceną łokieć tak piérwszéy, iak i drugiéy materyi?

Naięto

Naięto rdz pewną liczbę robotników, i zapłacono im gr. 432.
Inną razą naięto 3 robotnikami więcéy, i każdému z nich dano 4 gr. więcéy: rozdano zaś dlá wszystkich gr. 594.
Iléż było robotników, i ilé każdému z nich dano?

Uwága. Zadanié następuiącé: *Znaléźć prostokąt, którégo wiadoma iest powiérzchniá, i którégo powiérzchniá wiadomá także będzie, gdy od iego boków odeymiémy długości dané;* to mówię zadanié, wychodzi na poprzedzaiącé, uważaiąc boki drugiégo prostokąta, iakby powiększoné, wtedy gdy się staią bokami piérwszégo prostokąta.

185. *Zadanié 23. Má prostokąt 135 stóp kwadr: w powiérzchni: gdy do iednégo boku iego dodámy iednę stopę, a od drugiégo odeymiémy także 1 stopę, powiérzchniá iego mieć będzie 140 stóp kwadr.*

Algiebraicznie. Mianowanié Niech prostokąta piérwszégo bok iedén będzie . . . . x.

Drugi będzie . . $\frac{135}{x}$.

Boki drugiégo prostokąta, będą . . . . $x+1$, i $\frac{135}{x} - 1$.

albo . . . . $x+1$, i $\frac{140}{x+1}$.

Warunek. $\frac{140}{x+1} = \frac{135}{x} - 1$.

Przeráb: (Przywiódłszy ułómki do iednakowégo mianownika)

$$\frac{140x}{xx+x} = \frac{135x+135}{xx+x} - 1.$$

(Odiąwszy $135x$ po obu stronach od liczników)

$$\frac{5x}{xx+x} = \frac{135}{xx+x} - 1.$$

(Obróciwszy 1, na ułómek)

$$\frac{5x}{xx+x} = \frac{135-xx-x}{xx+x}.$$

(Rozmno-

(Rozmnożywszy obie strony przez $xx+x$)

$$5x = 135 - xx - x.$$

(Dodáwszy $xx+x$ po obu stronach)

$$xx + 6x = 135.$$

(Dopełniwszy kwadratu 1wszéy strony)

$$xx + 6x + 9 = 144.$$

(Wyciągnąwszy kwadrát z obu strón)

$$x + 3 = \pm 12.$$

(Odiąwszy 3, po obu stronach)

$$x = \begin{matrix} 9. \\ -15. \end{matrix}$$

Rozwiąz: $x = \begin{matrix} 9 \\ -15. \end{matrix}$ Jedén bok 1go prostokąta.

$\dfrac{135}{x} = \begin{matrix} 15. \\ -9. \end{matrix}$ Drugi bok 1go prostokąta.

$x + 1 = \begin{matrix} 10. \\ -14. \end{matrix}$ Jedén bok 2go prostokąta.

$\dfrac{140}{x+1} = \begin{matrix} 14. \\ -10. \end{matrix}$ Drugi bok 2go prostokąta.

Uwága. Wziąwszy drugié rozwiązanié przydaynie, wypadnie to na iedno co i piérwszé, sią tylko różnicą, że bok, który w piérwszém rozwiązaniu uważaliśmy, iako maiący bydź zmnieyszonym, w tym razie ma bydź powiększonym, i wzaiémnie. Nie zawadzi tu powtórzyć uwágę Zadania 20.

Zadanié to możná przywiéśdź do Zadania 7, tym sposobém. Niech będzie XYVZ, Prostokąt szukany, którégo powiérzchniá zawiérá 135 stóp kwadr. Odiąwszy od boku XY, liniią YP, wyrážaiącą 1 stopę, a dodáwszy do boku XV, liniią VR, wyrážaiącą także iednę stopę, prostokąt XPQR, zawiérać będzie stóp kwadr: 140.

Nadmiár drugiégo prostokąta nad piérwszy iest 5 stóp kwadr: a że tym nadmiarém iest różnica prostokątów VQ, PZ; więc ta różnica iest 5 stóp kwadr: a zatém powiększywszy prostokąt VQ, kwadratém QZ, różnica prostokątów RZ, PZ, będzie 6 stóp kwadr. A że obadwa té prostokąty maią w szérokości po 1 stopie; więc różnica ich długości, toiest liniy VZ, YZ, będzie 6 stóp. Że zaś prostokąt z tych liniy, iest 135 stóp kwadr: więc (podług Zadania 7) kwadrát połowy summy tych dwóch liniy, iest 144 stóp kw. Fig. 40.

a sama

a ſama połowa ich ſummy 12: będą tedy té dwie liniie $12+3$, i $12-3$, toieſt 15, i 9.

186. *Przyſtóſowanié.* Tén oſtatni ſpoſób poſtępowania, ſłuży nie w tych tylko przypádkach, gdy powiękſzénié iednégo boku równé ieſt zmnieyſzéniu drugiégo boku, ale i w jnnych.

Przykłád. Proſtokątá powiérzchniá má 247 ſtóp kwadr: gdy ſię zaś dodadzą 3 ſtopy do iednégo boku, a odeymą 2 ſtopy od drugiégo, powiérzchniá mieć będzie ſtóp kwadr: 272.

Fig. 41. Niech będzie XYVZ proſtokąt, którégo powiérzchniá má 247 ſtóp kwadr: Od XY, odeymiéymy PY, wyráżaiącą 2 ſtopy, a do XV, dodáymy VR, wyráżaiącą 3 ſtopy. Powiérzchniá proſtokąta PQRX, mieć będzie ſtóp kwadr: 272. Różnica tych dwóch proſtokątów ieſt 25 ſtóp kwadr. A że tą różnicą ieſt nadmiár proſtokąta VQ, nad proſtokąt PZ; więc różnica tych téż dwóch proſtokątów, ieſt 25 ſtóp kwadr: a zatém dodáwſzy do proſtokąta VQ, proſtokąt QZ, zawiéraiący 6 ſtóp kwadr: różnica dwóch proſtokątów RZ, i PZ, będzie 31 ſtóp kwadr: Że zaś piérwſzy z tych proſtokątów rozłożyć można na inſzé trzy, maiącé 1 ſtopę w ſzérokości, a długości VZ, drugi także proſtokąt rozłożyć można na dwa inſzé, maiącé 1 ſtopę w ſzérokości, a długość YZ; więc różnica tych dwóch proſtokątów, równá ſię proſtokątowi, maiącému 1 ſtopę za ſzérokość, a za długość różnicę między potróyną liniią VZ, i podwóyną YZ: a zatém $3VZ-2YZ=31$ ſtóp.

Fig. 42. Niech liniiá BA, oznáczá 31 ſtóp, liniiá zaś BS, niech oznáczá liniią potróyną VZ: liniiá zatém AS, oznáczać będzie podwóyną YZ. Ponieważ proſtokąt z linii VZ, przez YZ, zawiérá 247 ſtóp kwadr: więc proſtokąt 6 razy tak wielki z linii BS, przez AS, zawiérać będzie 1482 ſtóp kwadr: a zatém zagadniénié przywodzi ſię do tego, aby znaléźć dwie ilości AS, i BS, których różnica ieſt 31, Wieloczyn ich 1482.

Połowa różnicy ieſt $15\frac{1}{2}$, kwadrát téy połowy $\frac{961}{4}$, kwadrát połowy ſummy, ieſt $\frac{961}{4}+1482=\frac{6889}{4}$.

Połowa więc ſummy $=\pm\frac{83}{2}$.

$$BS = \begin{matrix} 57. \\ -26. \end{matrix} \qquad AS = \begin{matrix} 26. \\ -57. \end{matrix}$$

$$VZ = \tfrac{1}{3}\,BS = \begin{matrix} 19. \\ -\,8\frac{2}{3}. \end{matrix} \quad YZ = \tfrac{1}{2}AS = \begin{matrix} 13. \\ -28\frac{1}{2}. \end{matrix}$$

W drugiém rozwiązaniu wziętém przydaynie trzebaby zamiáſt odięcia 3 ſtóp, przydadź ié do piérwſzégo boku, zamiáſt przydania 2 ſtóp do drugiégo boku, odiąć ié od tegoż boku: i wtedy obadwa rozwiązania, odpowiedać będą na Zadanié uważané Jeometrycznie. Spo-

Spoſób rozwiązania Algiebraiczny, żádnéy nié má trudnośći.

Inſzé przykłady. Kupiec zakupuie pewną liczbę łokci materyi za 1728 zł. 24 łokci bierze na właſné używanié, a reſztę przedaie za 1800 zł. zyſkuie na łokciu po 3 zł.

Iléż łokci kupił i po czému, ilé ich przedáł i po czému?

Inſzy kupiec zapłacił zł. 1200 za pewną liczbę łokci materyi: gdyby zaś był kupił 16 łokci więcéy materyi, któréy łokieć byłby tańſzy 3 złotémi; tedyby go koſztowała tylko 1152 zł.

Pewná liczba przyiaciół złożyła ſię równie na 432 zł. dwóm z nich wrócili ſkłádkę, inſi pozoſtali, przez co ſkłádka każdégo z tych pozoſtałych powiękſzyła ſię 3 złotémi.

187. *Zadanié 23. Dwa ſą proſtokąty równé, któych ſumma podſtáw wynoſi na 100 ſtóp. Gdyby piérwſzy z nich miáł wyſokość drugiégo; tedyby w powiérzchni ſwoiéy miáł 720 ſtóp kwadr. Gdyby zaś drugi miáł wyſokość piérwſzégo; tedyby w powiérzchni ſwoiéy miáł 320 ſtóp kwadr.*

Algiebraicznie. Podſtawa 1wſzégo proſtokąta . . . . x.

2go . . . . . . $100 - x$.

Wyſokość 2go . . . . $\dfrac{720}{x}$.

Wyſokość 1go . . . . $\dfrac{320}{100-x}$.

Powiérzchniá 1go . . . . . . $\dfrac{320x}{100-x}$.

Powiérzchniá 2go . . . . . $\dfrac{72000 - 720x}{x}$.

Warunek. $\dfrac{320x}{100-x} = \dfrac{72000 - 720x}{x}$.

Przeráb: (Przywiódłſzy obadwa ułómki do iednakowégo mianownika)

$$\frac{320xx}{x(100-x)} = \frac{7200000 - 144000x + 720xx}{x(100-x)}.$$

(Rozmnożywſzy wſzyſtko przez $x(100-x)$)

$$320xx = 7200000 - 144000x + 720xx.$$

 (Po-

(Podzieliwszy obie strony przez 80)

$$4xx = 90000 - 1800x + 9xx.$$

(Odiąwszy $4xx$ od obu strón)

$$0 = 90000 - 1800x + 5xx.$$

(Podzieliwszy przez 5, i przełożywszy)

$$xx - 360x + 18000 = 0.$$

(Dopełniwszy kwadratu w piérwszéy stronie)

$$xx - 360x + 32400 = 14400.$$

(Wyciągnąwszy piérwiast: kwadr: z obu strón)

$$x - 180 = \pm 120.$$

(Dodáwszy 180 po obu stronach)

$$x = \begin{matrix} 300. \\ 60. \end{matrix} \qquad 100 - x = \begin{matrix} -200. \\ +40. \end{matrix}$$

Rozwiązanié. $x = \begin{matrix} 60. \\ 300. \end{matrix}$ Podstawa 1go prostokąta.

$100 - x = \begin{matrix} 40. \\ -200. \end{matrix}$ Podstawa 2go prostokąta.

$\dfrac{720}{x} = \begin{matrix} 12 \\ 2\frac{2}{5} \end{matrix}$ Wysokość 2go prostokąta.

$\dfrac{320}{100-x} = \begin{matrix} 8. \\ -1\frac{3}{5}. \end{matrix}$ Wysokość 1go prostokąta.

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{320x}{100-x} = \begin{matrix} 60 \times 8 \\ -1\frac{3}{5} \times 300 \end{matrix} = \pm 480. \\ \dfrac{72000 - 720x}{x} = \begin{matrix} 40 \times 12 \\ -200 \times 2\frac{2}{5} \end{matrix} = \pm 480. \end{matrix}\right\} \text{Powiérzchnie równé.}$$

Drugié to rozwiązanié brałoby się przydaynie, gdyby nie summa, ale różnica podstáw była $= 100$.

188. *Uwága.* W mianowaniu powyższém wyraziwszy dwie powiérzchnie w takowy kształt $\dfrac{320 \times x}{100 - x}$, i $\dfrac{720 \times (100 - x)}{x}$, i przywiódłszy té dwa ułómki do iednakowégo mianownika, byłoby $\dfrac{320 \times xx}{x(100-x)}$,

i $\frac{720 \times (100-x)^2}{x(100-x)}$: a zatém $320 \times xx = 720 \times (100-x)^2$; a podzieliwszy przez 80; $4 \times xx = 9 \times (100-x)^2$; wyciągnąwszy zaś piérwiástek kwadratowy $2x = 3(100-x)$

Więc $x : 100 - x = 3 : 2$; toiest stosunek dwóch podstáw, równá się stosunkowi 3, do 2.

A że summa tych podstáw iest 100; więc iedna z nich będzie $\frac{3}{5}$, a drugá $\frac{2}{5}$ stu: toiest 60, i 40: tak iak wyżéy.

Używaiąc proporcyi toż samo nám wypadnie z uwág Jeometrycznych.

Niech liniá AB, wyráżá summę daną dwóch podstáw AX, BX, należących do dwóch prostokątów równych, których wysokości BZ, AY: więc $AX : BX = BZ : AY$. Fig. 43.

Rozmnożywszy dwa poprzedniki przez BZ, a 2 następniki przez AY.

$AX \times BZ : BX \times AY = BZ^2 : AY^2 = AX^2 : BX^2$.

A że . . . $AX \times BZ = 720 : BX \times AY = 320$;

Więc . . . $720 : 320 = AX^2 : BX^2$.

albo . . . . $9 : \quad 4 = AX^2 : BX^2$.

A zatém . . . $3 : \quad 2 = AX : BX$: tak iak się znalazło sposobém Algiebraicznym.

Insze przykłady. Dwie osoby niosły razém na przedáż 200 iay: powracaią do domu z jednakową summą pieniędzy za té iaia przedané. Gdyby zaś iedna z tych osób przedała była tak drogo każdé iaié iak drugá, a drugá iak piérwszá; tedy piérwszéy przypadłoby za nié gr: 180, a drugiéy gr: 80.

Znayduie się u kupca pewná liczba sukna przednieyszégo, i 90 łokci więcéy nad piérwszé podleyszégo: za wszystko to sukno podleyszé tylé razém bierze, ilé za przednieyszé. Gdyby zaś po téy cenie przedáł był sukno przednieyszé, po któréy przedáł podleyszé, i wzaiémnie; tedyby za piérwszé wziął 900 zł. a za drugié 2500 zł.

189. *Zadanié 24. Dwóch kupców miało razém 10000 zł: zarábiá zaś tak iedén, iak drugi równo, w proporcyi swégo kapitału; i tylé, że piérwszy z nich za trzy lata, a drugi za dwa, má 9900 zł. Jakiż był piérwiástkowy kapitáł, piérwszégo z tych kupców, a iaki drugiégo?*

Mianowanié. Kapitáł 1go . . . . . x.

Kapitáł 2go . . . $10000-x$.

Zysk 1go przez 3 lata . . $9900-x$.

Zyſk 1go przez 1 rok . . $\dfrac{9900 - x}{3}$.

Zyſk 2go przez 2 lata . . $x - 100$.

Zyſk 2go przez 1 rok . . $\dfrac{x - 100}{2}$.

Ponieważ zyſki roczné tych dwóch kupców, maią ſię do ſiebie, iak ich kapitały; więc

Warunek. $x : 10000 - x = \dfrac{9900 - x}{3} : \dfrac{x - 100}{2}$.

Przerób. (Przywiódłſzy dwa wyrazy drugiégo ſtoſunku, do iednakowégo mianownika)

$x : 10000 - x = 19800 - 2x : 3x - 300$.

(Zrównáwſzy wieloczyn ſkraynych wyrazów, i ſrzednich)

$3xx - 300x = 198000000 - 39800x + 2xx$.

(Odiąwſzy $2xx$ od obu ſtrón)

$xx - 300x = 198000000 - 39800x$.

(Dodáwſzy $39800x$ do obu ſtrón)

$xx + 39500x = 198000000$.

(Dopełniwſzy kwadratu w piérwſzéy ſtronie)

$xx + 39500x + 390062500 = 588062500$.

(Wyciągnąwſzy piérwiáſtek kwadratowy)

$x + 19750 = \pm 24250$.

$x = \begin{matrix} 4500 \\ -44000 \end{matrix} = 4500$.

Rozwiązanié. $x = 4500$ Kapitáł 1go kupca.

$10000 - x = 5500$. Kapitáł 2go.

$9900 - x = 5400$. Zyſk 1go przez 3 lata.

$\dfrac{9900 - x}{3} = 1800$. Zyſk 1go przez rok.

$x - 100 = 4400$. Zyſk 2go przez 2 lata.

$\dfrac{x - 100}{2} = 2200$. Zyſk 2go przez rok.

Sprawdzénié. $1800 : 2200 = 4500 : 5500$.

Jakož

Jakoż $1800 = 200 \times 9.$
$2200 = 200 \times 11.$
$4500 = 500 \times 9.$
$5500 = 500 \times 11.$

Albo tak: Niech liniiá A B, wyſtáwiá nám ſummę dwóch kapitałów, toieſt, w przypádku teráźnieyſzym 10000 Zł. Niech liniie równé AD, BC, wyrážaią maiątki dané, iedén na końcu 3 lát, drugi na końcu 2 lát, toieſt 9900 Zł, Liniie DX, CX, wyrażać będą zyſki, w przeciągu tych dwóch czaſów. Fig. 44.

Będzie więc proporcyá:

$DX : CX = 3AX : 2BX.$
a zatém $DX + CX : CX = 3AX + 2BX : 2BX.$
toieſt $CD : CX = 2AB + AX : 2BX.$
Niech będzie $AE = 2AB.$
więc $CD : CX = EX : 2BX.$
albo $2CD : CX = EX : BX.$
więc $2CD : 2CD + CX = EX : EX + BX.$
Niech będzie $2CD = CF.$
więc $2CD : FX2CD:FX = EX : EB.$

Więc zadanié przywiedliśmy do zadania 7 tgo Rozdziału, tak przedłużaiąc do X, linią daną EF, aby proſtokątk $EX \times FX$ był dany.

W przykładzie poprzedzaiącym $AC = 100.$
$CE = 20100.$
$CF = 19600 = 2CD.$
Więc $EF = 500.$ Przeciąwſzy EF, na dwie równé częśći w G;

będzie $FG = 250;\ FG^2 = 62500.$
$EB = 30000.$
$2CD = 19600.$
$2CD \times EB = 588000000.$
$GX^2 = 588000000 + 62500 = 588062500.$
$GX = \sqrt{588062500} = 24250.$
A że $AG = 19750;$
Więc $AX = 4500.$ tak iak wyżéy.

Inſzé przykłady. Dwie oſoby miały razém 120000 Zł: obie iednakowo zyſkuią rocznie w proporcyi ſwoich kapitałów. Jedna zaś z nich na końcu 3 lát, má 70200 Zł. a drugá na końcu 5 lát má 99000 Zł.

Ze dwóch

Ze dwóch osób, iedna má 40000 zł. więcéy niż drugá: obie iednakowo zyskuią rocznie w proporcyi swoich kapitałów: iedna zaś z nich na końcu lát 4, má 217600 zł. drugá na końcu lát pięciu, má 174000 zł.

Przestroga. Zyski na końcu każdégo roku, nie łączą się tu wráz z kapitałami, i tylko piérwiástkowy kapitál podług rachunku naszégo, zysk sobie proporcyonalny co rok przynosi.

190. *Zadanié 25. Dwóch kupców przedało po sztuce materyi: iedna zaś z tych sztuk miała 5 łokci mniéy niż drugá; wzięli razém za obie té sztuki zł. 1290.*

Kupiec, który przedál piérwszą materyą, mówi tak do drugiégo: Gdybym był midł twoię sztukę, i przedál ią po téy cenie, po którév przedálém moię; byłbym wziął za nię zł. 540. Drugi zaś kupiec, mówi tak do piérwszégo: Já gdybym był przedál twoię sztukę po téy cenie, po któréy przedálém moię; byłbym wziął za nię zł. 720.

Mian: Liczba łokci 1wszéy materyi . . . . . x.
. . . . . 2giéy . . . . $x+5$.

Piérwszy kupiec byłby wziął zł. 540, za łokci $x+5$; więc za 1 łokieć wziął $\dfrac{540}{x+5}$, a za łokci x, wziął $\dfrac{540x}{x+5}$.

Drugi kupiec byłby wziął zł. 720, za łokci x; więc za 1 łokieć wziął $\dfrac{720}{x}$, a za łokci $x+5$, wziął $\dfrac{720x+3600}{x}$.

Warunek. $\dfrac{540x}{x+5} + \dfrac{720x+3600}{x} = 1290.$

Przerób: (Przywiódłszy dwa ułómki do iednakowégo mianownika)

$$\frac{540xx}{x(x+5)} + \frac{720(x+5)^2}{x(x+5)} = 1290.$$

(Rozmnożywszy obie strony przez $x(x+5)$)

$$540xx+720(x+5)^2 = 1290xx+6450x.$$

albo $1260xx+7200x+18000 = 1290xx+6450x.$

(Odiąwszy $1260xx$ po obu stronach)

$$7200x + 18000 = 30xx + 6450x.$$

(Odiąwszy $7200x$ po obu stronach)

$18000 = 30xx - 750x$; albo $30xx - 750x = 18000.$

(Podzie-

(Podzieliwſzy przez 30 z obu ſtrón)

$$xx - 25x = 600.$$

(Rozmnożywſzy obie ſtrony przez 4.)

$$4xx - 100x = 2400.$$

(Dopełniwſzy kwadratu w piérwſzéy ſtronie)

$$4xx - 100x + 625 = 3025.$$

(Wyciągnąwſzy piérwiáſtek kwadr: po obu ſtronach)

$$2x - 25 = \pm 55.$$

(Dodáwſzy 25 do obu ſtrón)

$$2x = \begin{matrix} 80. \\ -30. \end{matrix}$$

$$x = \begin{matrix} 40. \\ -15. \end{matrix}$$

Rozwiąz: $x = 40.$ Liczba łokci piérwſzéy ſztuki.
$x + 5 = 45.$ Liczba łokci drugiéy ſztuki.

$$\frac{540}{x+5} = 12.$$ Cena łokcia piérwſzéy ſztuki.

$$\frac{540x}{x+5} = 480.$$ Liczba zł: wziętych od 1go kupca.

$$\frac{720}{x} = 18.$$ Cena łokcia drugiéy ſztuki.

$$\frac{720(x+5)}{x} = 810.$$ Liczba zł. wziętych od 2go kupca.

Spráwdzénié. $480 + 810 = 1290.$

Inſzé przykłady. Sztuka iedna zawiérá w ſobie łokci 12 więcéy niż drugá. Za obie ſztuki wzięto zł. 1756. Gdyby większą ſztukę przedano w cenie ſztuki mnieyſzéy, przypadłoby za nię zł. 780: a gdyby ſztukę mnieyſzą, przedano w cenie ſztuki więkſzéy, przypadłoby za nię zł. 936.

Dwie ſztuki zawiéraią razém łokci 120, i wzięto za nié zł. 1090. Za piérwſzą ſztukę przedaną w cenie ſztuki drugiéy, wziętoby zł. 550. Za drugą ſztukę przedaną w cenie ſztuki piérwſzéy wziętoby 520.

Jedna ſztuka zawiérá w ſobie 16 łokci więcéy niż drugá, i więcéy téż za nię bierze ſię zł. 432, niż za drugą. Za piérwſzą ſztukę przedaną w cenie

nie ſztuki drugiéy wziętoby ſię zł. 864, za drugą zaś przedaną po téy cenie iak piérwſzá, wziętoby ſię zł 960.

Dwie ſztuki zawiéraią w ſobie razém łokci 136, i wzięto za iednę więcéy zł. 192, niż za drugą. Za piérwſzą ſztukę przedaną, w cenie ſztuki drugiéy, wziętoby zł. 512. Za drugą ſztukę, przedaną w cenie ſztuki piérwſzéy, wziętoby zł. 864.

191. *Zadanié 26. Znaléźć trzy liczby w proporcyi Arytmetycznéy, których ſumma kwadratów ieſt 200, a kwadrát śrzedniéy przewyżſzá wieloczyn ſkraynych cztéréma iednościami.*

Przez rozum. Kwadrát wyrazu śrzedniégo, albo kwadrát połowy ſummy dwóch wyrazów ſkraynych, przewyżſzá wieloczyn tychże ſkraynych kwadratém połowy ich różnicy, albo kwadratém różnicy iednégo z tych wyrazu, od wyrazu śrzedniégo: więc kwadrát różnicy naſtępnéy iednégo wyrazu, od drugiégo ieſt 4, a ſama różnica ieſt 2. Summa kwadratów wyrazów dwóch ſkraynych, wyrównywá dwa razy wziętému kwadratowi połowy ich ſummy, z przydaynym kwadratém połowy ich różnicy dwa razy także wziętym: albo podwóynému kwadratowi wyrazu śrzedniégo wráz z kwadratém różnicy naſtępnéy dwa razy wziętym: toieſt wráz z 8. Summa zaś kwadratów liczb trzech, wyrównywá trzy razy wziętému kwadratowi wyrazu śrzedniégo przydáwſzy 8: a zatém kwadrát potróyny wyrazu śrzedniégo, równá ſię liczbie 200, mniéy 8, toieſt 192. Kwadrát wyrazu śrzedniégo, ieſt trzecią częścią liczby 192, toieſt 64: ſám zaś wyráz śrzedni ieſt 8. Dwa tedy wyrazy ſkrayné będą $8+2$, i $8-2$; toieſt 10, i 6.

Liczby więc, których ſzukaliśmy ſą: 10, 8, 6: i łatwo możná ſprawdzić, że zadoſyć czynią zadaniu.

Algiebr: Miaw:	Summa dwóch ſkraynych . . .	$2x$.
	Różnica dwóch ſkraynych . . .	$2y$.
	Dwa wyrazy ſkrayné	$x+y$; $x-y$.
	Wyráz śrzedni	x.
	Wieloczyn ſkraynych	$xx-yy$.
	Kwadraty trzech wyrazów	$\begin{cases} xx+2xy+yy. \\ xx. \\ xx-2xy+yy. \end{cases}$
	Summa tych trzech kwadratów	$3xx \quad +2yy$.

$$\textit{Warunek.}\ \begin{cases} xx-(xx-yy)=4. \\ 3xx+2yy \qquad =200. \end{cases}$$

Przeráb: $\begin{cases} yy = 4. \\ 3xx + 2yy = 200. \end{cases}$

(Położywszy w drugiém równaniu zamiást yy, ważność iego wyprowadzoną z piérwszégo równania) $3xx + 8 = 200.$

(Odiąwszy 8 po obu stronach) $3xx = 192.$

(Podzieliwszy przez 3) $xx = 64.$

(Wyciągnąwszy piérwiástek kwadratowy) $x = \pm 8.$

A że iest $yy = 4$, więc $y = \pm 2$: tak iak wyżéy.

Uwága. Sciśle mówiąc, Zadanié to má cztéry rozwiązania, wypadaiącé z porównania każdégo znaku ważności x, z każdym znakiém ważności y.

Cztéry ważności piérwszégo wyrazu, są

$$\begin{cases} +8+2 \text{ albo } 10. \\ +8-2 \ldots\ldots 6. \\ -8+2 \ldots\ldots -6. \\ -8-2 \ldots\ldots -10. \end{cases}$$

Cztéry ważności trzeciégo wyrazu, odpowiedaiącé piérwszym cztérém, są

$$\begin{cases} +8-2 \text{ albo } +6. \\ +8+2 \ldots\ldots 10. \\ -8-2 \ldots\ldots -10. \\ -8+2 \ldots\ldots -6. \end{cases}$$

Tak dalece, że cztéry następuiącé proporcye

$$\begin{cases} +10, +8, +6. \\ +6, +8, +10. \\ -6, -8, -10. \\ -10, -8, -6. \end{cases}$$

zadosyć czynią zadaniu: ale dwie piérwszé nie różnią się od siebie, tylko porządkiém wyrazów, a dwie drugié, nie różnią się od dwóch piérwszych, tylko znakami.

Inszé przykłady. Kwadrát wyrazu śrzedniégo, przewyższá liczbą 9 Wieloczyn wyrazów skraynych: summa zaś kwadratów iest 318.

Kwadrát wyrazu śrzedniégo, przewyższá liczbą 25 Wieloczyn wyrazów skraynych, a summa kwadratów iest 557.

192. *Zadanié 27. Znaléźć 4 liczby, którychby różnica następná była iednakowá, i których wieloczyn dwóch śrzednich przewyższáłby liczbą 8, Wieloczyn dwóch skraynych: a summa kwadratów cztérech tych liczb, byłaby 216.*

Mian: Summa dwóch śrzednich . . . . . $2x$.

Różnica dwóch śrzednich . . . . . $2y$.

Wyrazy dwa śrzednié . . . $x+y$, $x-y$.

Dwa ſkrayné wyrazy znaydziémy, odiąwſzy iedén średni od drugiégo podwoionégo: będą więc cztérech liczb wyrażénia:

$x+3y$, $x+y$, $x-y$, $x-3y$.

Wieloczyn ſkraynych . . . . $xx-9yy$.

Wieloczyn średnich . . . . $xx-yy$.

Różnica tych wieloczynów . . . . $8yy$.

Kwadraty cztérech wyrazów $\left\{\begin{array}{l} xx+6xy+9yy. \\ xx+2xy+yy. \\ xx-2xy+yy. \\ xx-6xy+9yy. \end{array}\right.$

Summa tych kwadratów . . . . $4xx \quad +20yy$.

Warunek. $\left\{\begin{array}{r} 8yy=8. \\ 4xx+20yy=216. \end{array}\right.$

Przerób: (Podzieliwſzy piérwſzé równanié przez 8, a drugié przez 4)

$$\left\{\begin{array}{r} yy=1. \\ xx+5yy=54. \end{array}\right.$$

(Położywſzy w drugiém równaniu ważność yy, wyciągnioną z piérwſzégo równania) $xx+5=54$.

(Odiąwſzy 5 po obu ſtronach) $xx \quad =49$.

(Wyciągnąwſzy piérwiaſtek kwadratowy) $x=7$.

Liczby ſzukané . . . $7+3$, $7+1$, $7-1$, $7-3$;

albo . . . 10, 8, 6, 4. któréto liczby czynią zadoſyć dwóm warunkóm.

Trzeba tu tę ſamę uwágę uczynić względém wielości rozwiązáń, którąśmy uczynili po zadaniu poprzedzaiącém.

Inſzé przykłady. Rożnica dwóch wieloczynów, ieſt . . 32.

Summa cztérech kwadratów . . . . 864.

Rożnica wieloczynów . . . 72.

Summa kwadratów . . . . 964.

193. *Zadanié 28. Podzielić liczbę daną 2a, na dwie takié części, aby kwadrát iednéy, równał ſię wieloczynowi drugiéy, przez całą liczbę daną.*

Mianowanié. Niech będzie iedna część . . . . x.

Będzie drugá . . . . $2a-x$.

Kwadrát piérwſzéy części . . . . xx.

Wieloczyn drugiéy części, przez całą liczbę $4aa-2ax$.

Warunek. $xx=4aa-2ax$.

Prze-

Przeráb: (Dodáwſzy $2ax$, po obu ſtronach) $xx+2ax=4aa$.
(Dopełniwſzy kwadratu w piérwſzéy części)
$xx+2ax+aa=5aa$.
(Wyciągnąwſzy piérwiáſtek kwadr:) $x+a=\pm a\sqrt{5}$.
(Odiąwſzy a, po obu ſtronach)

$$x=\begin{matrix} a(\sqrt{5}-1). \\ a(-\sqrt{5}-1). \end{matrix}$$

Rozwiązanié. $x=\begin{matrix} a(\ \sqrt{5}-1). \\ a(-\sqrt{5}-1). \end{matrix}$ Część 1wſzá.

$2a-x=a\begin{pmatrix}3-\sqrt{5}\\3+\sqrt{5}\end{pmatrix}$. Część drugá.

$aa\begin{pmatrix}6-2\sqrt{5}\\6+2\sqrt{5}\end{pmatrix}$. Kwadrát z piérwſzéy części.

$aa\begin{pmatrix}6-2\sqrt{5}\\6+2\sqrt{5}\end{pmatrix}$. Wieloczyn z całéy liczby przez część iéy drugą.

194. *Uwága 1wſzá.* Piérwſzá część drugiégo rozwiązania wziętá przydawnie, odpowiedałaby na naſtępuiące Zadanié: *Znaléźć dwie liczby, których różnica ieſt daná, i z których iednéy kwadrát, równá ſię wieloczynowi drugiéy, przez różnicę daną.*

Gdyby więc różnica daná oznaczoná była przez $2a$; tedy piérwſzá liczba byłaby . . . . . . $a(\sqrt{5}+1)$.
drugá. . . . . $a(\sqrt{5}+3)$.

Jakážkolwiek zaś będzie wážność ſpółmiérná ilości a, wſzelako dwóch części ſzukanych wypadną wážności nieſpółmiérné: któráto nieſpółmiérność pochodzi z wyrażénia $\sqrt{5}$, wmięſzanégo w jnné ilości ſpółmiérné.

195. *Uwága 2gá.* Té wyrażénia, dwoiakié Zadania rozwiązanié, i nieſpółmiérność części ſzukanych, zgádzá ſię z wykréśléniém Jeometrycznym, gdy przeciąć liniią przypádá *w śrzednim i ſkraynym ſtoſunku*; (in media & extrema ratione)

Niechby liniią AB, przeciąć trzeba w punkcie X, na dwie takié części, aby kwadrát z linii AX, równał ſię Proſtokątowi z całéy linii AB, przez drugą iéy część BX. Fig. 45.

Wyſtáwmy ſobie, iakby iuż wykréślony kwadrát AXYZ, i proſtokąt BXVC. Dopełniwſzy kwadratu ABCD, linii AB, i dodáwſzy tak do kwadratu AY; iak do równégo mu proſtokąta BV, ténże ſám proſtokąt AXVD; proſtokąt DVYZ, równy będzie kwadratowi danému linii AB. Skąd wypádá naſtępuiącé wykréślénié: Wynieśmy liniią AD, proſtopadłą do AB, i onéy równą.

wną. Tę liniią AD, przetniéymy w punkcie E, na dwie równé części: i poprowádźmy EB. Z punktu E, iak od środka promiéniém EB, wykreślmy koło, któréby przecinało w punkcie Z, liniią AE, przedłużoną. Przenieśmy AZ, na AB, do X. Tén punkt X, będzie punktém podziału szukanym.

Koło wykréślone, od środka E, promiéniém EB, przeciná w punkcie Z′, liniią AE, przedłużoną, za punkt D, i liniiá AZ′, leżącá nie po téy stronie linii AB, po któréy leży liniiá AZ, iest względém niéy uiémną: a zatém ponieważ liniiá AZ, przeniesioná iest na liniią AB, od punktu A, ku B; więc liniiá AZ′, má bydź przeniesioná na tęż liniią AB, przedłużoną w stronę przeciwną do X′. Wtedy liniie AX′, BX′, będą takié, że ich różnicą będzie liniiá daná AB, a kwadrát z linii AX′, równy będzie prostokątowi, z linii AB, przez BX′: czego bardzo łatwo dowiéśdź možná Jeometrycznie.

Niech będzie $AB = 2a$: więc $AE = \frac{1}{2}AB = a$.

$$BE^2 = AB^2 + AE^2 = 4aa, + aa = 5aa;\ BE = a\sqrt{5}.$$

Więc téż $EZ = a\sqrt{5}$; $AZ = a\sqrt{5} - a = a(\sqrt{5} - 1) = AX$

$$BX = AB - AX = 2a - (a\sqrt{5} - a) = 3a - a\sqrt{5} = a(3 - \sqrt{5}).$$

I znowu, $EZ' = a\sqrt{5}$, $AZ' = AX' = a\sqrt{5} + a = a(\sqrt{5} + 1)$.

$$BX' = AB + AX' = 2a + a\sqrt{5} + a = 3a + a\sqrt{5} = a(3 + \sqrt{5}).$$

196. *Uwága 3ciá.* Lubo nie możná dokładnie wyrazić dwóch części linii, albo liczby podzielonéy w taki sposób, iak Zadanié wyznácza; możná iednak ważność tych części przybliżyć do práwdziwéy więcéy, niżby oznáczała iakákolwiek różnica daná. Następuiący *Ciąg*, (Series) dopełniá tego zamiáru 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597: 2584, 4181, i t. d.

W tym ciągu, każdy wyráz następny równá się summie dwóch wyrazów, któré go tuż poprzedzaią: a wziąwszy trzy którékolwiek następné wyrazy, kwadrát śrzedniégo wyrazu, od wieloczynu dwóch skraynych, różnić się będzie iednością na przemiany, ráz przez *Nadmiár*, (Excessus,) drugi ráz przez *Niedomiár*, (defectus).

Przeto, ponieważ naywiększá z tych trzech liczb, wyráżá summę dwóch innych; więc té dwie tym bliżéy wyrażać będą części odpowiedaiącé na zadanié, im téż liczby większé będą. I tak niech będą té trzy liczby 5, 8, 13: kwadrát śrzedniéy, różnić się tylko będzie iednością od wieloczynu dwóch skraynych, a tą różnicą iest $\frac{1}{64}$ tegoż sámégo kwadratu. Wziąwszy zaś trzy liczby 89, 144, 233; różnicą między takimże kwadratém, i takim wieloczyném, będzie $\frac{1}{20000}$ tego kwadratu, lub tego wieloczynu.

W ogól-

W ogólności. Niech będą cztéry, ktorékolwiek następné wyrazy ciągu poprzedzaiącégo: niech na trzech piérwszych wyrazach prawdzi się, że kwadrát srzedniégo z nich różni się iednością, przez nadmiár lub niedomiár od wieloczynu dwóch skraynych: tedy i na trzech ostatnich wyrazach prawdzić się także będzie, że kwadrát srzedniégo, różnić się będzie od wieloczynu dwóch skraynych iednością, ale przeciwnie przez niedomiár, lub nadmiár.

Oznaczmy cztéry liczby następné przez a, b, $a+b$, $a+2b$.

Jeżeli $bb = a(a+b) \pm 1$.

tedy będzie także $(a+b)^2 = b(a+2b) \mp 1$.

Dowodz: Przez przypuszczénié $bb = aa + ab \pm 1$.

więc $bb \mp 1 = aa + ab$.

Dodáwszy $ab+bb$ z obu strón) $ab + 2bb \mp 1 = aa + 2ab + bb$.

albo, $(a+b)^2 = b(a+2b) \mp 1$.

A że to przypuszczénié prawdziwé iest co do trzech piérwszych wyrazów ciągu, więc prawdziwé iest także, i co do trzech którychkolwiek następnych wyrazów tegoż ciągu.

Insze przykłady. Podzielić 100 na dwie takié częsci, aby kwadrát iednéy, równy był wieloczynowi drugiéy przez 90.

Podzielić 144 na dwie takie częsci, aby kwadrát iednéy równy był wieloczynowi drugiéy przez 24.

W ogólności: podzielić ilość daną na dwie takié częsci, aby kwadrát iednéy równy był wieloczynowi drugiéy przez ilość także daną.

197. *Przystósowania Zadania poprzedzaiącégo.*

Wyznaczyć tróykąt prostokątny, którégo trzy boki czyniłyby ciągłą proporcyą Jeometryczną.

Niech będzie XZY, tróykąt prostokątny, którégo trzy boki, XY, XZ, ZY, czynić maią ciągłą proporcyą Jeometryczną. Spuśćmy prostopadłą ZV. Fig. 46.

Trzeba, aby było $XZ^2 = XY \times ZY$.

A że iest . . $XZ^2 = XY \times XV$.

Więc . . $XY \times ZY = XY \times XV$.

a zatém . . . $ZY = XV$.

. . . . $ZY^2 = XV^2$.

a że . . . . $ZY^2 = XY \times VY$.

Więc . . . . $XV^2 = XY \times VY$.

Więc przeciwprostokątná XY, tróykąta szukanégo, powinna bydź przecięta w punkcie V, spodnim przy prostopadłéy, w stosunku srzednim, i skraynym.

Kwa-

Kwadraty boków XY, XZ, ZY, będą do ſiebie, iak $2. \sqrt{5}-1, 3-\sqrt{5}$.
Kwadrát wyſokości VZ, będzie do kwadratu boku ZY, iak XV, do XY.
Kwadrát zaś boku ZY, będzie do kwadratu boku XZ, iak VY, do VX.
Áże $XV : XY = VY : VX$, więc, $VZ^2 : ZY^2 = ZY^2 : XZ^2$.

Więc trzy także liniie XZ, ZY, VZ, czynią ciągłą proporcyą: a zatém i trzy boki tego tróykąta, i czwártá wyſokość, czynią także proporcyą ciągłą Jeometryczną.

Zadania podobné naſtępuiącému, ſą téż tego ſamégo gatunku, co i zadanié poprzedzaiącé.

Kupiec przedaiąc konia za 11 Cz: Zł: zyſkáł na nim tylé procéntu od ſta, ilé go koń koſztowáł: cóż więc dáł za niégo, i ilé zyſkáł?

Cena kupna tego konia, tak ſię má do zyſku w przedaży, iak ſumma 100 Cz: Zł: do téyże ceny kupna: a zatém kwadrát liczby, oznaczaiący cenę kupna, równá ſię liczbie oznaczaiącéy zyſk, rozmnożonéy przez 100. Więc trzeba podzielić cenę przedaży, 11 Cz: Zł: na dwie takié części, aby kwadrát iednéy równáł ſię wieloczynowi drugiéy przez 100.

Mianowanié. Cena kupna konia . . . . x.
Zyſk w przedaży . . . $11-x$.

Warunek. $x : 11 - x = 100 : x$.

Przerób: (Zrównáwſzy wieloczyny, ſkraynych i śrzednich wyrazów)
$xx = 1100 - 100x$.
(Dodáwſzy $100x$ po obu ſtronach) $xx + 100x = 1100$.
(Dopełniwſzy kwadratu piérwſzéy ſtrony)
$xx + 100x + 2500 = 3600$.
(Wyciągnąwſzy z obu ſtrón piérwiáſtek kwadratowy.
$x + 50 = 60$.
(Odiąwſzy 50 po obu ſtronach) $x = 10$.

Rozwiązanié. $x = 10$. Cena kupna konia.
$11 - x = 1$. Zyſk.

Spráwdzénié. $10 : 1 = 100 : 10$.

Inſzé przykłady. Cena przedaży ieſt 24, 39, 56, i t. d. Cz: Zł: reſzta iak wyżéy.

198. *Zadanié 29. Podzielić ilość daną* 2a, *na dwie takié części, aby ich wieloczyn równał się różnicy ich kwadratów.*

Mianowanié. Różnica dwóch części szukanych. . . . $2x$.
Części szukané . . . . . . $a+x, a-x$.
Wieloczyn tych dwóch części . . $aa-xx$.
Kwadraty tych dwóch części . . $\begin{cases} aa+2ax+xx. \\ aa-2ax+xx. \end{cases}$
Różnica tych dwóch kwadratów . . . $4ax$.

Warunek. $4ax = aa - xx$.

Przeráb: (Dodáwszy xx po obu stronach) $xx + 4ax = aa$.
(Dopełniwszy kwadratu 1wszéy strony)
$xx + 4ax + 4aa = 5aa$.
(Wyciągnąwszy piérwiástek kwadratowy) $x+2a = a\sqrt{5}$.
(Odiąwszy $2a$ po obu stronach) $x = a(\sqrt{5}-2.)$

Rozwiązanié. $a + x = a(\sqrt{5}-1)$.
$a - x = a(3-\sqrt{5})$.

Więc dwie szukané części są dwiéma częściami summy danéy, podzielonéy w stosunku śrzednim i skraynym.

Sprawdz: $(a+x)^2 = aa(6-2\sqrt{5})$.
$(a-x)^2 = aa(14-6\sqrt{5})$.
$4ax = aa(4\sqrt{5}-8)$.
$aa-xx = aa(4\sqrt{5}-8)$.

Przykłady z ilościami niespółmiernémi. Podzielić summę daną na dwie takié części, aby różnica ich kwadratów, tak się miała do ich wieloczynu, iak 3, do 2.

Niechby znowu różnica kwadratów, tak się miała do wieloczynu ze dwòch części, iak 8, do 3, albo iak 5, do 6.

199. *Zadanié 30. Podzielić summę daną* 2a, *na dwie takié części, aby stosunek ich równy był stosunkowi summy ich* 2a, *do ichże różnicy.*

Mianowanié. Różnica dwóch ilości szukanych. . . . $2x$.
Ilości dwie szukané . . . . $a+x, a-x$.

Warunek. $a+x : a-x = 2a : 2x = a : x$.

Przeráb: (Dodaiąc) $2a : a + x = a + x : a$.
więc $(a+x)^2 = 2aa$, toiest kwadrát iednéy części, ró-

wná fię połowie kwadratu fummy danéy: a zatém, tak fię má część większá, do fummy dwóch części, iak bok kwadratu, do iego przeciwproftokątnéy.

Rózwiązanié. $a+x=a\sqrt{2}$.

$$x=a(\sqrt{2}-1).$$

$$a-x=a(2-\sqrt{2})=a\sqrt{2}(\sqrt{2}-1).$$

200. *Uwága.* Ważność tych ilości niefpółniérnych możná do prawdziwéy przybliżyć, tak, iak tylko zechcémy, przez naftępuiące ułómki;

$\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{12}{17}$, $\frac{29}{41}$, $\frac{70}{99}$, $\frac{169}{239}$, $\frac{408}{577}$, $\frac{985}{1393}$, $\frac{2378}{3363}$, i t. d.

W tym Ciągu licznik każdégo ułómka, ieft fummą dwóch wyrazów ułómka poprzedzaiącégo: a mianownik każdégo ułómka, ieft fummą z jego licznika, i z licznika ułómku poprzedzaiącégo.

Jeżeli mianownik iednégo z tych ułómków oznaczy fummę daną; tedy licznik iego i różnica dwóch iego wyrazów, toieft, licznika i mianownika, oznáczać będzie bardzo blizko dwie części fzukané téy fummy: albo co na iedno wychodzi, kwadrát mianownika ułómku każdégo naftępnégo w tym ciągu co ráz bardziéy fię przybliżá do podwóynégo kwadratu licznika iego.

Przykłád. Kwadraty wyrazów ułómka $\frac{12}{17}$, fą 144; i 289, drugi zaś z nich nie róźni fię tylko iednością od piérwfzégo kwadratu podwoionégo. Podobnie i kwadraty wyrazów ułómka $\frac{70}{99}$, fą 9801, i 4900: z których piérwfzy, różni fię tylko iednością od drugiégo podwoionégo.

Summa dwóch części fzukanych, té famé dwie części, i ich różnica, fą do fiebie tak prawie iak liczby 17, 12, 5, 7, albo iak liczby 99, 70, 29, 41; i mało co chybiać będą naftępuiące proporcye:

$$\begin{matrix} 12:\ 5=17:\ 7, \\ 70:29=99:41, \end{matrix} \text{ albo } \begin{matrix} 12:17=\ 5:\ 7 \\ 70:99=29:41 \end{matrix}, \text{ ponieważ}$$

w każdym ftofunku, kwadraty naftępników, fą prawie dwa razy tak wielkié, iak kwadraty poprzedników.

Możná tu ieszcze tę famę uwágę przydadź, która fię uczyniła (§. 196.)

201. *Zadanié 31. Znaléźć dwie liczby, których wiadomy ieft wieloczyn i różnica kwadratów.*

Niech będzie tén wieloczyn 35, a kwadratów różnica 24.

Spofób 1. Nazwiéymy iednę z liczb fzukanych . . . x, drugá zatém bydź powinna $\frac{35}{x}$, bo tak wieloczyn z nich wypadnie 35.

Kwadraty tych dwóch liczb . . . . $\left\{xx,\ \text{i}\ \frac{1225}{xx}\right.$.

Waru-

Warunek. $xx - \frac{1225}{xx} = 24.$

Przerób: (Rozmn: przez xx obie ſtrony) $x^4 - 1225 = 24xx.$
(Dodáwſzy 1225 po obu ſtronach) $x^4 = 24xx + 1225.$
(Odiąwſzy $24xx$ po obu ſtronach) $x^4 - 24xx = 1225.$
(Dopełniwſzy kwadratu w piérwſzéy ſtronie)
$x^4 - 24xx + 144 = 1369.$
(Wyciągnąwſzy piérwiáſtek kwadratu z obu ſtrón)
$x^2 - 12 = \pm 37.$
(Dodáwſzy 12 po obu ſtronach) $xx = \begin{matrix} +49. \\ -25. \end{matrix}$
(Wyciągnąwſzy znowu piérwiáſtek kwadratowy)
$x = \begin{matrix} \pm 7. \\ \pm 5\sqrt{-1}. \end{matrix}$

202. *Uwága.* To Zadanié zaprowadziło nás do równania, w którém ilość niewiadomá wzięta była 4 razy, i znowu 2 razy za *Czynnika*, (Factor,) toieſt, że téy ilości wykładnik był 4, w jednym wyrazie, a 2, w drugim. Ale że *Mnogość*, (Potentia) ilości niewiadoméy (x^4), w piérwſzym wyrazie ieſt kwadratém mnogości w drugim wyrazie (x^2), i że w całym równaniu, nié má więcéy, iak té dwa wyrazy, w któré ilość niewiadomá wchodzi; więc można ſię było obéyśdź z tém równaniém, iak gdyby tylko było w drugim ſtopniu, wyſtawuiąc ſobie xx, za ilość niewiadomą, a zatém wyſtawuiąc ſobie drugi równania wyráz $24xx$, za podwóyny wieloczyn ilości niewiadoméy xx, przez drugi wyráz piérwiáſtku.

Łatwiéy ieſzcze to przerábianié zrozumiémy, położywſzy ilość z, jednégo tylko *wymiaru*, (dimenſio) za ilość xx, dwóch wymiarów, a tak okáże ſię równanié w kſztałcie zwyczaynym.

$zz - 24z = 1225.$
Więc $zz - 24z + 144 = 1369.$
$z - 12 = \pm 37.$
$z = \begin{matrix} +49 \\ -25 \end{matrix} = xx;$
Więc $x = \begin{matrix} \pm 7. \\ \pm 5\sqrt{-1}. \end{matrix}$ tak iak wyżéy.

$$\frac{35}{x} = \frac{35}{\pm 7} = \pm 5.$$

$$= \frac{35}{\pm 5\sqrt{-1}} = \frac{35\sqrt{-1}}{\mp 5} = \mp 7\sqrt{-1}.$$

Widzimy tu także, iż Zadanié to miéć może cztéry rozwiązania, z których każdé czyni zadosyć warunkóm wyłożonym w témże Zadaniu.

Ilości dwie szukané, mogą miéć cztéry odpowiedaiącé im ważności:

$+7, +5.$
$-7, -5.$
$+5\sqrt{-1}, -7\sqrt{-1}.$
$-5\sqrt{-1}, +7\sqrt{-1}.$

Z tych cztérech rozwiązań, ponieważ ostatnié dwa, są *bezistotné*, (imaginariæ) czyli nie podobné; więc ié trzeba opuścić. Że zaś dwa piérwszé, różnią się tylko samémi znakami, któré nie czynią żadnéy odmiany ani w wieloczynie, (dlá iednakowości tychże znaków w czynnikach) ani w kwadratach; więc té dwa piérwszé rozwiązania, wychodzą na iedno co do wielkości: tak dalece, iż w każdém przystosowaniu tego Zadania, do *przedmiotów*, (objecta) istotnych, można wziąźć dwie té ważności 7, i 5, za samé i iedné ilości szukané.

Sposób 2. Summa dwóch ilości szukanych . . $2s$.
Różnica . . . . $2d$.
Ilości dwie szukané $\begin{cases} s+d. \\ s-d. \end{cases}$
Wieloczyn . . . . . $ss-dd$
Kwadraty . . . . $\begin{cases} ss+2ds+dd. \\ ss-2ds+dd. \end{cases}$
Różnica kwadratów . . . $4ds$.

Warunek. $\begin{cases} ss-dd = 35. \\ 4ds = 24. \end{cases}$

Przerób: (Strony 2go równania przez 2 podzieliwszy.)
$\begin{cases} ss-dd = 35. \\ 2ds = 12. \end{cases}$
(Skwadrowawszy strony obudwóch równań)
$\begin{cases} s^4 - 2ddss + d^4 = 1225. \\ 4ddss = 144. \end{cases}$
(Dodáwszy strony odpowiedaiącé sobie, w obudwóch równaniach) $s^4 + 2ddss + d^4 = 1369.$

(Wycią-

(Wyciągnąwſzy piérwiáſtek kwadratowy)

$$ss + dd = \pm 37.$$

a że $ss - dd = 35.$

Więc dodáwſzy i odiąwſzy ſtrony ſobie odpowiedniącé:

$$2ss = \begin{matrix} +72. \\ -2. \end{matrix} \qquad \text{Więc} \qquad ss = \begin{matrix} +36. \\ -1. \end{matrix}$$

$$2dd = \begin{matrix} +2. \\ -72. \end{matrix} \qquad\qquad dd = \begin{matrix} +1. \\ -36. \end{matrix}$$

Porzuciwſzy rozwiązania uiémné, z którychby wypadły piérwiáſtki beziſtotné, zoſtaną dwá przydayné:

$$ss = 36; \quad dd = 1.$$

Więc $s = \pm 6; \quad d = \pm 1.$

Wziąwſzy i tu znowu ſamé ważności przydayné, będzie

$$s = 6; \; d = 1.$$

a zatém $s + d = 7.$

$s - d = 5.$ tak iak wyżéy.

Lubo to Zadanié zaprowadziło nás do równania zawiéraiącégo w ſobie ilość niewiadomą, ze 'cztéréma wymiarami; možná iednak tož Zadanié przywiéśdź do Zadania 1go w tym Rozdziale, tak go wyrażaiąc: *Znaléźć dwie liczby, których wiémy ſtoſunek i wieloczyn.* albo: *Znaléźć dwie liniie, których wiémy ſtoſunek i proſtokąt.*

203. *Maiąc wiadomy Wieloczyn dwóch liczb, lub proſtokąt dwóch liniy, i różnicę ich kwadratów, będzie w ſzczególności wiadomy ſtoſunek tychże liczb, albo liniy.*

Wyſtáwmy ſobie, iakoby dwie ilości ſzukané, były dwa ramiona kąta proſtégo w troykącie proſtokątnym XYZ. Spuśćmy proſtopadłą YP, na przeciw-proſtokątną XZ, i przetniéymy tę przeciw-proſtokątną w punkcie S, na dwie równé części: z punktu S, poprowádźmy SY. Proſtokąt ze dwóch liniy XY, ZY, równá ſię proſtokątowi z przeciw-proſtokątnéy XZ, i z wyſokości YP, (Jeom: Część I. §. 226.) Ponieważ zaś kwadraty z liniy XY, i YZ, równé ſą, piérwſzy proſtokątowi z przeciw-proſtokątnéy XZ, przez odcinek XP, drugi proſtokątowi z téyże proſtokątnéy XZ, przez odcinek ZP; (Część I. §. 126) więc różnica tych kwadratów, równá będzie proſtokątowi z przeciwproſtokątnéy XZ, przez różnicę liniy XP, ZP, toieſt przez dwa razy wziętą SP. A że ſtoſunek 'proſtokąta, do różnicy kwadratów liniy XY, i YZ, ieſt dany; więc téż i ſtoſunek proſtokątów z przeciwproſtokątnéy przez PY, i przez 2SP, dany będzie: a zatém i ſtoſunek linii PY, do SP, także dany będzie: a ſtąd Fig. 47.

 wia-

wiadomy także będzie, i stosunek PY^2, do SP^2, iako téż i stosunek $PY^2+SP^2=SY^2=SX^2=SZ^2$, do SP^2. Więc stosunek linii SX, albo SZ, do SP, iest także dany: więc i stosunek $SX+SP$, albo PX, do $SZ-SP$, albo PZ iest dany. A że tén ostatni stosunek, równá się stosunkowi XY^2 do ZY^2; więc stosunek XY^2, do ZY^2, a zatém i stosunek XY, do ZY, iest dany.

W przykładzie poprzedzaiącym;

	$XY^2 - ZY^2 : XY \times ZY$	$=$	$24 : 35.$
albo . , . . .	$XZ \times 2SP : XZ \times PY$	$=$	$24 : 35.$
a zatém	$2SP : PY$	$=$	$24 : 35.$
	$SP : PY$	$=$	$12 : 35.$
więc	$SP^2 : PY^2$	$=$	$144 : 1225.$
więc	$SP^2 : SX^2$	$=$	$144 : 1369.$
a zatém	$SP : SX$	$=$	$12 : 37.$
więc	$XP : PZ$	$=$	$49 : 25.$
albo	$XY^2 : YZ^2$	$=$	$49 : 25.$
a zatém	$XY : YZ$	$=$	$7 : 5.$
więc téż	$XY^2 : XY \times YZ$	$=$	$7 : 5.$
A że iest	$XY \times YZ$	$=$	35
więc	$XY^2 : 35$	$=$	$7 : 5 = 49 : 35.$
więc	XY^2	$=$	49, a $XY = 7.$
Tak téż będzie	YZ	$=$	$5.$

Insze przykłady. *Wieloczyn dany* . . 77.
Różnica kwadratów . 72.
Wieloczyn dany . . . 425.
Różnica kwadratów . . 336.

204. *Zadanie 32.* *Znaléźć dwie liczby, których daná iest summa* $2s$, *i daná summa ich sześcianów* $2c$.

Mianowanie. Różnica liczb szukanych . . . . $2d.$

Liczby szukane . . . . . . $\begin{cases} s+d. \\ s-d. \end{cases}$

Sześciany liczb szukanych . . . $\begin{cases} s^3+3s^2d+3sd^2+d^3. \\ s^3-3s^2d+3sd^2-d^3. \end{cases}$

Summa sześcianów . . $2s^3 \quad +6sd^2.$

Warunek. $2s^3+6sd^2=2c.$

Prze-

Przeráb: (Podzieliwſzy przez 2) . $s^3 + 3sd^2 = c$.
(Odiąwſzy s^3) . . . . . $3sd^2 = c - s^3$.

(Podzieliwſzy przez $3s$) . . . $d^2 = \frac{c}{3s} - \frac{1}{3}s^2$.

(Wyciągnąwſzy piérw: kwadr:) . $d = \pm\sqrt{\left(\frac{c}{3s} - \frac{s^2}{3}\right)}$

Rozwiązanié. $s + d = s \pm \sqrt{\left(\frac{c}{3s} - \frac{s^2}{3}\right)}$.

$s - d = s \mp \sqrt{\left(\frac{c}{3s} - \frac{s^2}{3}\right)}$.

Dwie tedy ſzukané liczby, ſą $s + \sqrt{\left(\frac{c}{3s} - \frac{ss}{3}\right)}$ i $s - \sqrt{\left(\frac{c}{3s} - \frac{ss}{3}\right)}$.

Spráwdzénié.

$$\left(s + \sqrt{\left(\frac{c}{3s} - \tfrac{1}{3}ss\right)}\right)^3 = s^3 + 3ss\sqrt{\left(\frac{c}{3s} - \tfrac{1}{3}ss\right)} + 3s\left(\frac{c}{3s} - \tfrac{1}{3}ss\right) + \left(\frac{c}{3s} - \tfrac{1}{3}ss\right)\sqrt{\left(\frac{c}{3s} - \tfrac{1}{3}ss\right)}$$

$$\left(s - \sqrt{\left(\frac{c}{3s} - \tfrac{1}{3}ss\right)}\right)^3 = s^3 - 3ss\sqrt{\left(\frac{c}{3s} - \tfrac{1}{3}ss\right)} + 3s\left(\frac{c}{3s} - \tfrac{1}{3}ss\right) - \left(\frac{c}{3s} - \tfrac{1}{3}ss\right)\sqrt{\left(\frac{c}{3s} - \tfrac{1}{3}ss\right)}$$

Summa . . . $2s^3 \qquad + 6s\left(\frac{c}{3s} - \tfrac{1}{3}ss\right) = 2s^3 + 2c - 2s^3 = 2c$.

$2s = 12$; $2c = 468$.
Przykłady. $2s = 22$; $2c = 2926$.
$2s = 28$; $2c = 6244$.

205. *Zadanié 33. Znaléźć dwie liczby, ktòrych wiadomá ieſt ròżnica* 2d, *i ròżnica ich ſześcianòw* 2c.

Mianowanié. Summę dwóch liczb ſzukanych, oznaczywſzy przez $2s$, znaydziémy tymże ſpoſobém, iak w mianowaniu poprzedzaiącém, że różnica ſześcianów będzie $6ssd + 2d^3$.

Warunek. $6ssd + 2d^3 = 2c$.
Przeráb: (Odiąwſzy $2d^3$) $6ssd = 2c - 2d^3$.

(Podzieliwſzy przez $6d$) $ss = \frac{c}{3d} - \frac{1}{3}dd$.

(Wycią-

(Wyciąg: piérw: kwadr:) $s = \pm\sqrt{\left(\frac{c}{3d} - \frac{1}{3}dd\right)} = \sqrt{\left(\frac{c}{3d} - \frac{1}{3}dd\right)}$

Uwága. To wyrażénié ilości s, w jlości d, ieſt to ſamo, któré było ilości d, w jlości s, w poprzedzaiącém zagadniéniu.

Przykłady. $2d = 2;\quad 2c = 218.$
$2d = 4;\quad 2c = 1468.$
$2d = 6;\quad 2c = 3582.$

Zadania naſtępuiącé, *Znaléźć dwie liczby, których ſumma i różnica ſześcianów ieſt wiadoma*: albo, *których wiadomá ieſt różnica, i ich ſześcianów ſumma:* nié mogą bydź przywiedzioné do drugiégo ſtopnia: i przeſzłyby granice wymierzoné téy początkowéy Algiebrze.

206. *Zadanié 34. Znaléźć dwie liczby, których wiadomá ieſt ſumma, i ſumma ich czwártych mnogości.* (*)

Niech będzie dwóch liczb ſumma daná . . $2s$.
Tychże liczb, czwártych mnogości ſumma . $2q$.
Mian: Różnica ſzukaná tych liczb . . . . . . $2d$.
a zatém té dwie liczby ſzukané . . . $s+d,\ s-d$.

Czwárté mnogości tych liczb $\begin{cases} s^4 + 4s^3d + 6s^2d^2 + 4sd^3 + d^4. \\ s^4 - 4s^3d + 6s^2d^2 - 4sd^3 + d^4. \end{cases}$

Summa . . . . . $2s^4 \qquad + 12s^2d^2 \qquad + 2d^4.$

Warunek. $2d^4 + 12ssdd + 2s^4 = 2q.$

Przeráb: (Podzieliwſzy przez 2) $d^4 + 6ssdd + s^4 = q.$

(Dopełniwſzy kwadratu w piérwſzéy ſtronie)

$$d^4 + 6ssdd + 9s^4 = q + 8s^4.$$

(Wyciągnąwſzy piérw: kwadr:) $d^2 + 3s^2 = \pm\sqrt{(q+8s^4)}.$

(Odiąwſzy $3s^2$) . . . . $d^2 \quad = \pm\sqrt{(q+8s^4)} - 3s^2.$

Opuściwſzy drugié rozwiązanié, dlá tego, iż na dd, daie wáżność niémną; będzie $dd = \sqrt{(q+8s^4)} - 3s^2.$

(*) Czwártą mnogością ilości iakiéy, naprzykłád liczby, nazywámy tén wieloczyn, który uróſł z jednéy liczby cztéry razy wziętéy za czynnika; albo co na iedno wychodzi, gdy kwadrát iakiéy liczby przez ténże ſám kwadrát rozmnożymy; zrobi ſię wieloczyn, który zowiémy *czwártą mnogością* téy liczby. Po łacinie nazywa ſię to *quarta potentia.*

Więc $d = \pm\sqrt{(\sqrt{(q+8s^4)}-3s^2)}$.
$s+d = s\pm\sqrt{(\sqrt{(q+8s^4)}-3s^2)}$
$s-d = s\mp\sqrt{(\sqrt{(q+8s^4)}-3s^2)}$ Té ważności, są względém siebie *wzaiémné*, (reciprocæ) tak iak w rozwiązaniu zadania 32.

Przykłady. $2s = 8;\quad 2q = 706.$
$2s = 10;\quad 2q = 2482.$
$2s = 12;\quad 2q = 3026.$

Tymże sposobém rozwiązać można następuiące zadanié: *Znaléźć dwie liczby, których wiémy różnicę, i których wiémy także różnicę czwártych mnogości.*

207. *Zadanié 35. Znaléźć dwie liczby, których summa iest wiadomá, i wiadomá także summa ich piątych mnogości.*

Niech będzie dwóch liczb summa daná . . $2s$.
Piątych ich mnogości summa . . . . . $2q$.

Mianowanié. Różnica tych liczb szukaná . . . . $2d$.

Liczby szukané . . . . $\begin{cases} s+d. \\ s-d. \end{cases}$

Piąté ich mnogości $\begin{cases} s^5+5s^4d+10s^3d^2+10s^2d^3+5sd^4+d^5. \\ s^5-5s^4d+10s^3d^2-10s^2d^3+5sd^4-d^5. \end{cases}$

Summa . . . . $2s^5 \quad +20s^3d^2 \quad +10sd^4.$

Warunek. $10sd^4+20s^3d^2+2s^5 = 2q.$

Przerób: (Podzieliwszy przez $10s$) $d^4+2s^2d^2+\frac{1}{5}s^4 = \dfrac{q}{5s}.$

(Dopełniwszy kwadratu w piérwszéy stronie przez dodanié $\frac{4}{5}s^4$)

$$d^4+2s^2d^2+s^4 = \frac{q}{5s}+\tfrac{4}{5}s^4.$$

(Wyciągnąwszy piérw: kwadr:) $d^2+s^2 = \sqrt{\left(\dfrac{q}{5s}+\tfrac{4}{5}s^4\right)}$

(Odiąwszy s^2) $d^2 = \sqrt{\left(\dfrac{q}{5s}+\tfrac{4}{5}s^4\right)}-s^2.$

 (Wyciąg-

(Wyciągnąwszy piérwiástek kwadratowy)

$$d = \sqrt{\left(\sqrt{\left(\frac{q}{5s} + \tfrac{4}{5}s^4\right)} - s^2\right)}.$$

$$s + d = s + \sqrt{\left(\sqrt{\left(\frac{q}{5s} + \tfrac{4}{5}s^4\right)} - s^2\right)}.$$

$$s - d = s - \sqrt{\left(\sqrt{\left(\frac{q}{5s} + \tfrac{4}{5}s^4\right)} - s^2\right)}.$$

Przykłady. $2s = 8; \quad 2q = 3368.$
$2s = 10; \quad 2q = 17050.$
$2s = 12; \quad 2q = 19932.$

Tymże ſpoſobém rozwiążémy następuiącé Zadanié: *Znaléźć dwie liczby, których wiadomá ieſt różnica, i wiadomá ieſt także różnica piątych ich mnogości.*

208. *Zagadniénié niewyznaczoné.* (indeterminatum).

Znaléźć trzy liczby, których wiémy ſummę, wiémy także ſummę ich kwadratów, i ſummę wieloczynów tychże liczb branych parami.

W tém zadaniu trzy ſą ilości ſzukané, i zdaie ſię, że także trzy warunki ſą dané: a zatém zagadniénié zdaie ſię bydź wyznaczonéın. Ale że trzeci warunek ieſt koniecznym wnioſkiém ze dwóch piérwſzych; przeto zagadniénié ieſt w ſaméy rzeczy nie wyznaczoném.

Jakoż niech będą x, y, z, trzy ilości ſzukané, których Summa s.

Ponieważ $(x + y + z) = s.$
będzie $(x + y + z)^2 = ss.$
albo $xx + 2xy + yy + 2xz + 2yz + zz = ss.$
czyli $(xx + yy + zz) + 2(xy + xz + yz) = ss.$
A że $(xx + yy + zz)$ ieſt ſummą kwadratów ilości trzech ſzukanych.

a $2(xy + xz + yz)$ ieſt podwóyną ſummą wieloczynów tychże ilości, branych parami; więc ſumma ich wieloczynów tak branych ieſt iuż wyznaczoná przez ſummę tychże ilości, i przez ſummę ich kwadratów: toieſt, ſummą tych trzech wieloczynów będzie połowa nadmiaru kwadratu ſummy trzech ilości, nad ſummę ich kwadratu.

Tymże wcale ſpoſobém okázaćby można, że kwadrát ſummy ilukolwiek ilości ſkłádá ſię z ſummy kwadratów tychże ilości, i z podwóynéy ſummy wieloczynów tychże ilości po dwie branych: a zatém ſumma taká wieloczyłoczynów, zawſzé ieſt połową nadmiaru kwadratu ſummy tych ilości, nad ſummę ichże kwadratów.

Jakoż niech będzie $a+b+c+d+e+f+g$, i t. d. Summa iłukolwiek ilości: Kwadrát téy ſummy, ſkłádá ſię z kwadratu piérwſzéy ilości, z ſummy podwóynych wieloczynów téy piérwſzéy ilości przez wſzyſtkié inné ilości i z kwadratu ſummy tychże innych ilości. Tén oſtatni kwadrát, ſkłádá ſię z kwadratu drugiéy ilości, z ſummy podwóynych wieloczynów téyże ilości, przez wſzyſtkié inné pozoſtałé, i z kwadratu tych oſtatnich ilości pozoſtałych: który to znowu kwadrát, ſkłádá ſię z kwadratu trzeciéy ilości, z ſummy podwóynych wieloczynów téyże ilości przez wſzyſtkié inné pozoſtałé, i z kwadratu tychże oſtatnich ilości i t. d.

I tak, $(a+b+c+d)^2 = aa+2ab+2ac+2ad+bb+2bc+2bd+cc+2cd+dd = (aa+bb+cc+dd)+2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$.

209. *Drugié zagadnićnié niewyznaczoné. Znaléźć proporcyą Arytmetyczną, któréy wiémy ſummę cztérech wyrazów, ſummę ich kwadratów, i ſummę ich ſześcianów.*

Ponieważ ſumma wyrazów ſkraynych proporcyi ſzukanéy równać ſię powinna ſummie wyrazów środnich; więc tak piérwſzá, iak i drugá ta ſumma, równá będzie połowie ſummy danéy cztérech wyrazów: a zatém ieżeli ſummę cztérech wyrazów nazwiémy $4s$; ſumma dwóch ſkraynych, albo dwóch środnich, będzie $2s$.

Niech różnica środnich będzie . . . $2x$.

Różnica ſkraynych . . . . $2y$.

$$\text{Będą cztéry wyrazy proporcyi} \ldots \begin{cases} s+y. \\ s+x. \\ s-x. \\ s-y. \end{cases}$$

$$\text{Kwadraty} \ldots \begin{cases} ss+2sy+yy. \\ ss+2sx+xx. \\ ss-2sx+xx. \\ ss-2sy+yy. \end{cases}$$

$$\text{Summa kwadratów} \ldots \quad 4ss \quad + 2(xx+yy).$$

$$\text{Sześciany} \ldots \begin{cases} s^3+3s^2y+3sy^2+y^3. \\ s^3+3s^2x+3sx^2+x^3. \\ s^3-3s^2x+3sx^2-x^3. \\ s^3-3s^2y+3sy^2-y^3. \end{cases}$$

$$\text{Summa ſześcianów} \ldots \quad 4s^3 \quad + 6s(xx+yy)$$

 W wy-

W wyrażéniu ſummy kwadratów ſama tylko ſumma $xx+yy$, ieſt niewiadomá, i taż także ſumma ieſt ilością niewiadomą w ſummie ſześcianów. A w ſzczególności: ſumma ſummy ſześcianów ilości cztérech w proporcyi Arytmetycznéy, i ſześcianu połowy ſummy tychże cztérech ilości, ieſt potróyná wieloczynu z ſummy kwadratów tychże ilości, przez czwártą część ich ſummy.

Jakoż piérwſzá ſumma ieſt $12s^3+6s(xx+yy)=3(4s^3+2s(xx+yy))$
$=3s(4ss+2(xx+yy))$.

210. *Trzecié Zagadniénié niewyznaczoné.*

Wyznaczyć proporcyą Jeometryczną, któréy wiémy ſummę ſkraynych, i ſummę ſrzednich wyrazów, i nadmiár ſummy kwadratów z ſkraynych, nad ſummę kwadratów z ſrzednich.

Ponieważ cztéry wyrazy ſzukané maią ułożyć proporcyą Jeometryczną; więc wieloczyn ſkraynych będzie równy wieloczynowi ſrzednich. Kwadrát dany ſummy ſkraynych równy ieſt ſummie kwadratów tychże ſkraynych, i podwóynégo ich wieloczynu; a kwadrát dany ſummy ſrzednich równy także ieſt ſummie kwadratów tychże ſrzednich, wráz z wieloczyném ich podwóynym, albo wráz z podwóynym wieloczyném ſkraynych. Więc różnica tych dwóch kwadratów równá będzie różnicy między ſummą kwadratów ſkraynych, i ſummą kwadratów ſrzednich: a zatém ta oſtatniá różnica wyznaczoná ieſt przez różnicę między kwadratami ſummy ſkraynych, i kwadratami ſummy ſrzednich.

Fig. 48. *Jeometrycznie.* Niech ſrzednica AB, oznáczá ſummę ſkraynych wyrazów, toieſt náywiękſzégo i náymnieyſzégo, i niech cięciwa DE, oznáczá ſummę ſrzednich. Niech będą ſkrayné AX, BX: a ſrzednie DX, EX. Od ſrzodka C, ſpuśćmy CF, proſtopadłą do DE, i poprowádźmy promień CE.

$$AX^2+BX^2=2CB^2+2CX^2.$$
$$EX^2+DX^2=2EF^2+2FX^2.$$

Więc; $(AX^2+BX^2)-(EX^2+DX^2)=2CB^2-2EF^2+(2CX^2-2FX^2)$
$=2CB^2-2EF^2+2CF^2.$
$=2CB^2-4EF^2+(2CF^2+2EF^2)$
$=2CB^2-4EF^2+2CB^2.$
$=4CB^2-4EF^2.$
$=AB^2-ED^2.$

Niech ſumma daná ſkraynych będzie . . . . $2a$.
. . . . ſrzednich . . . . $2b$.
Różnica ſkraynych . . . . $2x$.
. . . ſrzednich . . . . $2y$.

Skrayne

$$\text{Skrayné} \begin{cases} a + x. \\ a - x. \end{cases}$$

$$\text{Srzednié} \begin{cases} b + y. \\ b - y. \end{cases}$$

$$\text{Kwadraty ſkraynych} \begin{cases} aa + 2ax + xx. \\ aa - 2ax + xx. \end{cases}$$

$$\text{Kwadraty śrzednich} \begin{cases} bb + 2by + yy. \\ bb - 2by + yy. \end{cases}$$

Summa kwadratów ſkraynych . . . $2aa + 2xx$.
. . . . śrzednich . . . $2bb + 2yy$.

Różnica tych dwóch ſumm . . $2aa + 2xx - (2bb + 2yy)$.
$= 2(aa - bb) + 2(xx - yy)$.

Przez przypuſzczénié, ieſt $aa - xx = bb - yy$.
albo $xx - yy = aa - bb$.
więc $2(xx - yy) = 2(aa - bb)$.
a zatém $2(aa - bb) + 2(xx - yy) = 4(aa - bb)$.
$= 4aa - 4bb$.

2. Tymże ſpoſobém możnáby okázać, że gdyby daná była różnica dwóch wyrazów ſkraynych, różnica dwóch wyrazów śrzednich, i nadmiár ſummy kwadratów ſkraynych, nad ſummę kwadratów śrzednich; Zagadniénié to, byłoby także nie wyznaczonèm: ponieważ tén oſtatni nadmiár ieſt równy różnicy kwadratów dwóch różnic danych

3. I to także Zagadniénié byłoby niewyznaczoném, gdyby nám wiadomá była ſumma ſkraynych wyrázów; (náywiękſzégo i náymnieyſzégo) różnica śrzednich, i ſumma kwadratów cztérech wyrazów: ponieważ ta oſtatniá ſumma równá ieſt ſummie kwadratów ſummy ſkraynych, i różnicy śrzednich wyrazów.

211. Naſtępuiącé iednak Zagadniénia ſą wyznaczonémi.

1. *Wiadomá ieſt ſumma ſkraynych, ſumma śrzednich, i ſumma kwadratów ilości cztérech.*

2. *Wiadomá ieſt różnica ſkraynych, różnica śrzednich, i ſumma kwadratów ilości cztérech.*

3. *Wiádomá ieſt ſumma ſkraynych, różnica śrzednich, i nadmiár ſummy kwadratów ſkraynych nad ſummę kwadratów śrzednich.*

4. *Wiadomá ieſt różnica ſkraynych, ſumma śrzednich, i ſumma kwadratów ilości cztérech.*

 5. *Wia-*

5. *Wiadomá iest różnica skraynych, summa średnich, i różnica między summą kwadratów skraynych, a summą kwadratów średnich*

Przykład. Ponieważ summa kwadratów ze cztérech wyrazów proporcyi Jeometryczné równá się summie kwadratów summy skraynych, i różnicy średnich téyże proporcyi; więc piérwszé dwie summy maiąc dané, będzie tém samém daná i różnica średnich: a zatém ieżeli summa tychże średnich iest daná, będą obadwa w szczególności wiadomé.

Niech będzie $2s$ summa skraynych.

$4q$ Summa 4 kwadratów.

$2m$ Summa dwóch średnich.

Kwadrát różnicy dwóch średnich $4q - 4ss = 4(q - ss)$.

Różnica dwóch średnich . . . $2\sqrt{(q-ss)}$.

Wyrazy średnié $\begin{cases} m + \sqrt{(q-ss)}. \\ m - \sqrt{(q-ss)}. \end{cases}$

Wieloczyn tych średnich, a zatém i skraynych.

$$mm - (q - ss) = mm - q + ss.$$

Kwadrát połowy różnicy dwóch skraynych.

$$ss - (mm - q + ss) = q - mm.$$

Więc różnica skraynych $\sqrt{(q - mm)}$.

Proporcyá.

$$s+\sqrt{(q-mm)} : m+\sqrt{(q-ss)} = m-\sqrt{(q-ss)} : s-\sqrt{(q-mm)}$$

ROZDZIAŁ VII.

O Ciągach Arytmetycznych.

212. Tén *szereg*, (series) liczb nazywámy *Ciągiém Arytmetycznym*, (Progressio Arithmetica) gdzie różnica dwóch liczb następnie po sobie idących iest iednakowá.

I tak, szereg liczb naturalnych 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, i t. d.

Szereg liczb niepárzystych 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 21, i t. d. nazywá się Ciągiém Arytmetycznym.

W piér-

W piérwszym z tych szeregu różnica dwóch wyrazów blizkich iest 1; w drugim szeregu ta różnica iest 2.

W piérwszym szeregu, każdy wyráz równá się liczbie oznaczaiącéy mieysce, które tén wyráz zastępuie w tym szeregu.

I tak dziesiąty *np.* wyráz w tym szeregu liczb naturalnych będzie 10, dwudziesty wyráz 20, setny 100 i t. d. a w ogólności wyráz *n*ty, będzie *n*.

W drugim szeregu, piérwszy wyráz iest 1; drugi má więcéy 2, iednościami od piérwszégo, trzeci má więcéy 2 iednościami od drugiégo; takié więc bydź może iego oznaczénié $1+2\times 2$; czwárty má więcéy, dwomá iednościami od trzeciégo; takié więc bydź może iego oznaczénié $1+3\times 2$; tak dalece, że każdy wyráz szeregu liczb nie párzystych, oznaczyć można przez summę z iedności, i z różnicy następnéy 2, wziętéy iedén ráz mniéy, niż wyráżá liczba oznaczaiącá mieysce, które tén wyráz w szerégu zastępuie. I tak, dziesiątá liczba niepárzystá, będzie $1+2\times 9$: dwudziestá $1+2\times 19$: setná $1+2\times 99$. Liczba *n*ta nie párzystá $1+2(n-1)=1+2n-2=2n-1$, toiest każdá liczba niepárzystá, zawsze będzie iednością mnieyszá od podwóynéy liczby oznáczaiącéy mieysce, które tamta liczba zastępuie w szeregu liczb niepárzystych.

W ogólności; niech będzie Ciąg Arytmetyczny, którégo piérwszy wyráz *a*, różnica zaś następná dwóch wyrazów, niech będzie *d*.

W takowym Ciągu, będą wyrazy następuiącé:

2gi.	3ci.	4ty.	5ty.	6ty.	7my.	8my.
$a+d.$	$a+2d.$	$a+3d.$	$a+4d.$	$a+5d.$	$a+6d.$	$a+7d.$

9ty   10ty . . . . 20ty   . .   100tny . . . .   *n*ty.

$a+8d.$ $a+9d.\ldots.a+19d$ . . $a+99d$ . . . $a+d(n-1).$

Oznaczénié to $a+d(n-1)$ nazywá się *wyrazém ogólnym* (terminus generalis) ciągu. Położywszy zamiást *n*, w tém oznaczéniu ogólném wáżności szczególné wyrazów; *np.* 10tégo, 20tégo, i t. d. będzie wyráz 10ty, $a+9d$: 20ty $a+19d$, i t. d.

Niech będzie 10 piérwszych liczb naturalnych 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10: zrómby znich 5 pár, tak aby iedna pára składała się ze dwóch skraynych wyrazów, inné zaś páry aby się składały ze dwóch wyrazów iednakowo odległych od skraynych: summa każdéy z tych pár będzie iednakowá,

toiest $1+10=11.$

$2+\ 9=11.$

$3+\ 8=11.$

$4+\ 7=11.$

$5+\ 6=11.$

Jakoż,

Jakoż, piérwſzy *np.* wyráz drugiéy páry przewyżſzá iednością piérwſzy wyráz piérwſzéy páry: ale przeciwnie, drugi wyráz drugiéy páry mnieyſzy ieſt iednością od drugiégo wyrazu piérwſzéy páry. Piérwſzé wyrazy 3ciéy, 4téy, 5téy páry większé ſą względém piérwſzégo wyrázu piérwſzéy páry dwiéma, trzéma, cztéréma iednościami: ale przeciwnie drugié wyrazy tychże pár mnieyſzé ſą tyląż iednościami względém drugiégo wyrazu téyże piérwſzéy páry. Wziąwſzy tedy wyrazy piérwſzéy páry za ſkrayné; będzie można wziąźć wyrazy każdéy innéy páry za śrzednié proporcyi Arytmetycznéy: a zatém ſumma każdéy páry ieſt iednakowá.

To rozumowanié przyſtoſówać ſię może do tylu pár, ilé zechcémy. Zawſze różnica piérwſzégo wyrazu któréykolwiek páry od wyrazu piérwſzégo piérwſzéy páry równá będzie różnicy drugiégo wyrazu tamtéy páry od wyrazu drugiégo piérwſzéy páry. I to ſię prawdzi na każdym ciągu Arytmetycznym.

Jakoż, niech w ciągu iakimkolwiek Arytmetycznym piérwſzy wyráz będzie a, różnica naſtępná dwóch wyrazów d, liczba tych wyrazów $n+1$; oſtatni wyráz będzie $a+dn$.

2gié wyrazy od ſkraynych, będą $a+d$, i $a+d\,(n-1)$.
3cié . . . . $a+2d$, i $a+d\,(n-2)$.
4té . . . . $a+3d$, i $a+d\,(n-3)$.
5té . . . . $a+4d$, i $a+d\,(n-4)$.
:
:
:
*m*té . . . . $a+d(m-1)$, i $a+d(n-(m-1))$.

Summa zaś każdéy pary, będzie $2a+dn$.

Jeżeli liczba wyrazów Ciągu ieſt niepárzyſtá, tedy wyráz śrzodkowy będzie śrzednim Arytmetycznym między dwóma ſkraynémi: a zatém równy będzie połowie ich ſummy.

Té właſności Ciągów Arytmetycznych ſłużą oſobliwiéy do wyznaczénia ſummy liczby podanéy wyrazów naſtępnych w tychże ciągach bez dodáwania ciągłégo tychże wyrazów.

Przykłád. Summa 10 piérwſzych liczb naturalnych równá ſię 5 párom wyrazów. Summa zaś każdéy páry ieſt 11: a zatém ſumma wſzyſtkich 10 wyrazów będzie 5 razy 11; toieſt 55.

Jeżeli liczba wyrazów ieſt niepárzyſtá, *np.* 15, tedy ſumma ich równá ſię 7 párom liczb, (z ktorych pár ſumma każdéy ieſt 16,) i ieſzcze liczbie śrzodkowéy toieſt 8: któráto liczba śrzodkowá równá ſię połowie ſummy dwóch wyrazów ſkraynych: a zatém ſumma tych 15 wyrazów będzie równá ſummie ſkraynych toieſt 16, wziętéy razy 7 i puł, albo 120. *W ogól-*

W ogólności, aby znaléźć summę wyrazów n, liczb naturalnych, trzeba wziąć summę $n+1$, pierwszego i ostatniégo wyrazu, czyli dwóch skraynych wyrazów, i trzeba ią rozmnożyć przez połowę liczby wyrażów, toiest przez $\frac{n}{2}$.

Wieloczyn $\frac{(n+1)n}{2}$, albo $\frac{nn+n}{2}$ wyrazi summę szukaną.

Przykład. Niech będzie $n = 10$. Summa $\frac{(n+1)n}{2} = \frac{11 \times 10}{2} = 55$.

$$n = 100 \ldots \frac{(n+1)n}{2} = \frac{101 \times 100}{2} = 5050.$$

$$n = 1000 \ldots \frac{(n+1)n}{2} = \frac{1001 \times 1000}{2} = 500500.$$

213. Liczby 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55 ... $\frac{n(n+1)}{2}$, które wyrażaią summy liczb naturalnych nazywaią się *Tróykątnémi*, (Numeri Triangulares). Niechby był tróykąt iaki równoboczny, i każdy bok iego podzielony na iednakową liczbę części równych. Przez punkta podziału boku iednégo, i przez punkta podziału odpowiedaiące w drugich bokach tego troykąta poprowadziwszy liniie (które będą równo odległé względém iednégo boku przez którégo podział nie przechodzą) i wystawiwszy sobie punkta iakoby położoné na wszystkich punktach przecięciów, i na wszystkich punktach podziałów; o tych punktach tak ustawionych mówi się, iż ustawioné są *tróykątnie*, (triangulariter) i liczba ich wyráżá się przez summę liczb naturalnych zaczynaiąc od iedności: a wielość wyrazów czyli liczb oznácza się przez liczbę punktów znayduiących się na iednym z boków tróykąta.

I tak na figurze ponieważ liczba punktów znayduiących się na iednym boku tróykąta iest 10; liczba wszystkich punktów na tróykącie położonych, będzie 55. Fig. 49.

W takowém ułożéniu punkt którykolwiek wzięty między bokami tróykąta iednakowo iest odległym od sześciu punktów iému náybliższych: a zatém iest w śrzodku sześciokąta forémnégo, którégo wierzchołki przez té 6 punktów są oznaczoné: trzy zaś punkta náybliższé, z których dwa są w jednym rzędzie (równo-odległym od iednégo boku) a trzeci punkt równie-odległy w rzędzie náy-

náybliżſzym, będą zaſtępować mieyſcé trzech wiérzchołków tróykąta równobocznégo.

Liczba tróykątná przewyżſzá połówę odpowiedaiącéy ſobie liczby kwadratowéy połową piérwiáſtku; a zatém liczba tróykątná tym bardziéy ſię przybliżá do połowy kwadratu odpowiédaiącégo; im będzie więkſzá. Stoſunek tedy, który zachodzi między dwiéma liczbami tróykątnémi tym bliżſzy będzie ſtoſunku kwadratów odpowiedaiących tymże liczbóm, im té liczby tróykątné więkſzé będą.

Przykłád. Dzieſiątá i dwudzieſtá liczba tróykątná ieſt 55, i 210, a ſtoſunek ich ieſt równy ſtoſunkowi 11 do 42: téy zaś oſtatniéy liczbie brakuie $\frac{1}{21}$ iéy ſaméy, aby cztéry razy zamykała w ſobie liczbę piérwſzą 11.

Setná, i dwuchſetná liczba tróykątná ieſt 5050, i 20100: ſtoſunek ich równá ſię ſtoſunkowi 101 do 402: téy zaś oſtatniéy liczbie brakuie tylko $\frac{1}{201}$ iéy ſaméy, aby była poczwórná piérwſzéy 101.

A w ogólności, ſtoſunek liczby tróykątnéy n, do liczby tróykątnéy $2n$, równá ſię ſtoſunkowi $(nn+n)$ do $2n(2n+1)$, toieſt, ſtoſunkowi $n+1$, do $4n+2$: ta zaś oſtatniá liczba $4n+2$, różni ſię tylko częścią $\frac{1}{2n+1}$ ſiebie ſaméy, od liczby piérwſzéy $n+1$, poczwórnie wziętéy.

Niech znowu będzie liczb niepárzyſtych ciąg.

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 . . . $2n-1$; którégo ſummę znaléźć trzeba.

Summa dwóch ſkraynych ieſt . . . $2n$.

Liczba wyrazów . . . . n.

A zatém liczba pár równych . . . $\frac{1}{2}n$.

Nakoniec ſummą całégo ciągu ieſt wieloczyn ważności iednéy páry przez liczbę pár: toieſt wieloczyn z $2n$ przez $\frac{1}{2}n$, czyli nn.

Summy więc liczb niepárzyſtych zacząwſzy od piérwſzéy czynią odpowiedaiącé im kwadraty.

Liczby niepárzyſté	1,	3,	5,	7,	9,	11,	13,	15,	17,	19,	21,	23,	25	it. d.
Ich ſummy . . .	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81,	100,	121,	144,	169	it. d.
Liczby, które téo oſtatni Ciąg układaią, ſą w ſaméy rzeczy kwadratami liczb naturalnych.	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11,	12,	13	it. d.

Tę właſność liczb niepárzyſtych okázać można przez ułożénié punktów uſtawionych kwadratowo tymże ſamym ſpoſobém, iakéśmy uczynili względém zebrania w iednę ſummę liczb naturalnych (*). W ogól-

(*) Jmć Pan LE SAGE przyſtóſował użytecznie do goſpodarſtwa wieyſkiégo ułoże-

W ogólności, niechby trzeba zebrać w jednę summę następuiący Ciąg Arytmetyczny.

a, $a+d$, $a+2d$, $a+3d$, $a+4d$, $a+5d$, $a+6d$, $a+7d$ . . . $a+d(n-1)$.

Summa z piérwszégo i ostatniégo wyrazu, iest . . . . . $2a+d(n-1)$.

Liczba wyrazów iest n: a zatém liczba pár iednakowych co do summy będzie $\frac{1}{2}n$. Więc summa ciągu całégo, będzie summą szczególną $2a+d(n-1)$ wziętą razy $\frac{1}{2}n$: toiest, będzie ta summa $an+d\times\frac{n(n-1)}{2}$.

Albo tak: Summa szukaná, składá się z piérwszégo wyrazu a, wziętégo tylé razy, ilé iest wyrazów, (który to wieloczyn będzie an) i z różnicy następnéy d, wziętéy tylé razy, ilé oznácza summa liczby $n-1$, piérwszych liczb naturalnych: którá to summa będzie $\frac{n(n-1)}{2}$; a zatém summa całégo ciągu iest $an+d\times\frac{n(n-1)}{2}$.

Uwága. W tém wszystkiém, cokolwiek się wyżéy mówiło, zawsze się brał *Ciąg rósnący*: gdyby zaś był *Ciąg maleiący*, toiest, co ráz maiący mnieyszé wyrazy; tedy nie trzebaby przydáwać, ale odeymować różnicę iednostayną d; czyli co na iedno wychodzi, trzebaby odmiéniać w tém wszystkiém, o czym się dotąd mówiło, znak dodáwania poprzedzaiący różnicę d, na znak odeymowania.

 Wyra-

---

nia tróykątné, i kwadratowé. Ponieważ korzenia krzewiów, *np.* drzew wyciągaią sok w około; ieżeli tedy wyznaczoná będzie obszérność mieysca potrzebná drzewu, lub innému iakiému krzewiu do iego posiłku, więcéy tych krzewiów zmieści się w ziemi danéy wielkości, (któréy wymiary są większé znacznie względém odległości dwóch stop blizkich) zachowuiąc ułożénié tróykątné, a niżeli gdyby się trzymano ułożénia kwadratowégo: a to w tym samym stosunku, w którym iest bok tróykąta równobocznégo do iegoż wysokości: z przyczyny, że w tymże stosunku rzędy krzewiów będą bliższé podług piérwszégo ułożénia, niż podług drugiégo, lubo odległość krzewiów náybliższych siebie przez to się nie odmiéni.

Stosunek tén iest równy stosunkowi 2, do $\sqrt{3}$, albo prawie 8, do 7, a ieszcze bliżéy 15, do 13.

Wyrażénié to $an+d\times n(\frac{n-1}{2})$, które oznácza ważność summy ciągu iakiégokolwiek Arytmétycznégo, nazywa się *wyrazém zbiernym*, (terminus summatorius) tego ciągu. W tym wyrażéniu położywszy zamiást n, iaką tylko zechcémy liczbę, będziemy mieli summę tylu wyrazów tego ciągu, ilé iedności zamykać w sobie będzie ta liczba położona zamiást n.

Toż wyrażénié náyogólnieysze weźmie na siebie kształty mniéy ogólné podług szczególnych ważności, które dámy piérwszému wyrazowi a, i różnicy d. I tak niechby był do zebrania w jednę summę ciąg liczb naturalnych.

W tym przypádku będzie $a=1$, $d=1$, a wyrażénié poprzedzaiącé wéźmie tén kształt $n+n(\frac{n-1}{2})=n\times(1+\frac{n-1}{2})=n(\frac{n+1}{2})=\frac{nn+n}{2}$.

Jeżeli $a=1$, $d=2$, tedy ciąg do zebrania będzie ciągiém liczb niepárzystych, a wyrażénié poprzedzaiącé náyogólnieysze weźmie tén kształt $n+2\times n(\frac{n-1}{2})=n+(nn-n)=nn$.

Zgádza się to zupełnie z tém, cośmy wyżéy powiedzieli o summie tych dwóch ciągów w szczególności.

214. *Zadanié* 1. *Ileż trzeba liczb naturalnych, aby uczyniły summę* 136.

Mianowanié. Liczba wyrazów szukaná . . . . n.

Summa liczb n piérwszych naturalnych $n(\frac{n+1}{2})$.

Warunek. $n(\frac{n+1}{2})=136$.

Przerábianié. (Rozmnożywszy obie strony równania przez 2)

$n(n+1)=272$, czyli $nn+n=272$.

(Rozmn. ż: obie strony przez 4) $4nn+4n=1088$.

(Dopełniwszy kwadratu w piérwszéy stronie)

$4nn+4n+1=1089$.

(Wyciągnąwszy piérwiástek kwadr: po obu stronach)

$2n+1=33$.

(Odiąwszy 1 po obu stronach) $2n=32$.

(Podzieliwszy przez 2) $n=16$.

Rozwią-

Rozwiązanié. $n = 16.$ Liczba wyrazów ſzukaná.

$$n\left(\frac{n+1}{2}\right) = \frac{16 \times 17}{2} = 8 \times 17 = 136.$$

W ogólności. Iléż trzeba liczb naturalnych, zacząwſzy od 1, aby uczyniły ſummę daną ſ.

Mianowanié. Niech będzie n, liczba wyrazów ſzukaná.

Summa tych wyrazów . . $n\left(\frac{n+1}{2}\right).$

Warunek. $n\left(\frac{n+1}{2}\right) = ſ.$

Przerób: $\frac{nn+n}{2} = ſ.$

(Rozmnożywſzy obie ſtrony przez 2) $nn + n = 2ſ.$
(Rozmnożywſzy obie ſtrony przez 4) $4nn + 4n = 8ſ.$
(Dopełniwſzy kwadratu w piérwſzéy ſtronie)
$4nn + 4n + 1 = 8ſ + 1.$
(Wyciągnąwſzy piérwiáſtek kwadr:) $2n + 1 = \sqrt{(8ſ+1)}.$
(Odiąwſzy 1) $2n = \sqrt{(8ſ+1)} - 1.$
(Podzieliwſzy przez 2) $n = \frac{\sqrt{(8ſ+1)} - 1}{2}.$

Rozwiązanié. $n = \frac{\sqrt{(8ſ+1)} - 1}{2}.$

Przykład. Niech będzie $ſ = 55.$

$$n = \frac{\sqrt{(440+1)} - 1}{2} = \frac{\sqrt{441} - 1}{2} = \frac{21-1}{2} = \tfrac{20}{2} = 10.$$

Niech będzie $ſ = 171.$

$$n = \frac{\sqrt{(1368+1)} - 1}{2} = \frac{\sqrt{1369} - 1}{2} = \frac{37-1}{2} = \tfrac{36}{2} = 18.$$

Aby n, znaczyło liczbę ſpółmierną, a zatém aby ważność iego, którą forma wyráżá, odpowiedała na Zadanié; trzeba do tego, aby to wyrażénié $8ſ + 1$ było kwadratém. Jeżeli zaś $ſ$, ieſt liczbą tróykątną, tedy $8ſ+1$ zawſze będzie kwadratém ſkąd wypádá

125.

215. *Twierdzénié Jeżeli liczbę iakąkolwiek tróykątną rozmnożymy przez 8, a do wieloczynu tego dodámy 1, summa będzie kwadratém.*

Jakoż, niech będzie liczba iakákolwiek tróykątná $\frac{nn+n}{2}$; wieloczyn téy liczby przez 8, rozmnożonéy będzie $4nn+4n$: a dodáwszy 1, będzie $4nn+4n+1$; ta zaś ostatniá summa iest kwadratém z $2n+1$.

216. *W ogólności. Maiąc dané trzy którékolwiek z tych cztérech ilości;* a, d, n, s, *možná z tego zbiérnégo wyrazu ciągu Arytmetycznégo* $s=an+d\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)$ *wyznaczyć czwártą ilość.*

1. $s=an+d\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)$.

2. (Odiąwszy $d\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)$ po obu stronach, będzie)

$$an=s-d\left(\frac{n(n-1)}{2}\right).$$

(Podzieliwszy przez n, będzie)

$$a=\frac{s}{n}-d\times\frac{n-1}{2}.$$

3. (Odiąwszy an, po obu stronach w 1wszym równaniu)

$$s-an=d\left(\frac{n(n-1)}{2}\right).$$

(Rozmnoż: przez 2) $2s-2an=d\times n(n-1)$.

(Podzieliwszy przez $n(n-1)$) $d=\frac{2s-2an}{n(n-1)}$.

4. (Wykonáwszy oznaczoné rozmnożénia w piérwszém rownaniu, będzie) $\frac{dnn-dn}{2}+an=s$.

(Rozmnożywszy przez 2) $dnn-dn+2an=2s$.

(Rozmnożywszy przez $4d$, dla uchronénia się ułómków)

$$4ddnn-4ddn+8adn=8ds.$$

albo

albo $4ddnn + 4dn(2a-d) = 8ds$.
(Dopełniwszy kwadratu w piérwszéy stronie)

$$4ddnn + 4dn(2a-d) + (2a-d)^2 = 8ds + (2a-d)^2.$$

(Wyciągnąwszy piérwiástek kwadratowy)

$$2dn + (2a-d) = \sqrt{(8ds + (2a-d)^2)}.$$

(Odiąwszy $2a-d$ po obu stronach)

$$2dn = \sqrt{(8ds + (2a-d)^2)} - (2a-d).$$

(Nakoniec podzieliwszy przez $2d$)

$$n = \frac{\sqrt{(8ds + (2a-d)^2)} - (2a-d)}{2d}.$$

217. *Zadanié 2. Dwie osoby wyieżdżaią razém na przeciwko siebie: iedna z nich przed spotkaniém się uiéżdżała na dzién po mil 10, drugá zaś piérwszégo dnia uiechała mil 5, drugiégo mil 6, i t. d. milą co dzién więcéy uiéżdżaiąc. Gdy się z sobą té osoby spotykaią, tylé iedna z nich uiechała, co i drugá.*

Dni iezdy, tak iednéy, iak i drugiéy osoby . . . x.
Mile które piérwszá z nich uiechała . . . . . $10x$.
Mile które uiechała drugá

$$5+6+7+8+9+ \ . \ . \ . \ 5+(x-1) = \left(\frac{9+x}{2}\right)x.$$

Warunek. $\left(\frac{x+9}{2}\right) x = 10x.$

Przerab: (Podzieliwszy obie strony przez x) $\frac{x+9}{2} = 10.$

(Rozmnożywszy przez 2) $x + 9 = 20.$
(Odiąwszy 9) $x = 11.$

Rozwiązanié. $x = 11.$ Liczba szukaná dni iazdy.
$10x = 110.$ Droga przez piérwszą osobę uiechaná.
$\left(\frac{x+9}{2}\right) = 110.$ Droga przez drugą osobę uiechaná.

Inszé przykłady. Piérwszá osoba uieżdżá ráz wráz po 8 mil na dzién. Drugá osoba uieżdżá 6 mil piérwszégo dnia, a innych dni następnych, co ráz milą więcéy.

Piérwszá uieżdżá raz wráz po 9 mil na dzién. Drugá uieżdża 7 mil piérwszégo dnia, a innych dni następnych co ráz milą więcéy.

218.

218. *Zadanié 3.* Dwie osoby odległé na mil 164, iadą naprzeciwko siebie. Jedna z nich uieżdżá co dzién po 10 mil, drugá uieżdżá 7 mil piérwszégo dnia, każdégo zaś potém dnia następnégo co ráz więcéy 1 milą uieżdżá. Kiedyż się ziadą.

Mian: Dni iazdy tych dwóch osób . . . x.
Droga przez 1wszą uiechaná . . . . $10x$.
Droga przez 2gą uiechaná $7+8+9+10$ . . $7+(x-1)=\left(\frac{13+x}{2}\right)x$.
Droga przez obie osoby uiechaná . . . $10x+\left(\frac{13+x}{2}\right)x$.

Warunek. $10x+\left(\frac{13+x}{2}\right)x=164$.

Przerab: (Rozmnoż: przez 2) $20x+13x+xx=328$.
albo $xx+33x=328$.
(Rozmn: przez 4 dla uchronićnia się ułómków) $4xx+132x=1312$.
(Dopełniwszy kw: w 1wszéy stronie przez dodanié kwadratu z 33)
$4xx+132x+1089=2401$.
(Wyciąg: piérw: kwadr:) . . . $2x+33=49$.
(Odiąwszy 33) . . . . $2x=16$.
(Podzieliwszy przez 2) . . $x=8$.

Rozwiązanié. $x=8$. Dni drogi szukané.
$10x=80$. Droga uiechaná przez piérwszą osobę.
$x\times\left(\frac{13+x}{2}\right)=84$. Droga uiechaná przez 2gą.

Sprawdzénié. $10x+\left(\frac{13+x}{2}\right)x=80+84=164$. tak iak bydź powinno.

Inszé przykłady. Odległość dwóch osób iest 168 mil: piérwszá uieżdżá 9 mil na dzién, drugá 5 mil dnia piérwszégo, a innych dni następnych co ráz po dwie mile więcéy.

Pewná osoba má dochodu rocznégo 100 Cz: Zł: Zamiást coby go miała łożyć na iakié wydátki, daie na procént 5 $\frac{0}{0}$ za każdą razą za którą go odbiérá: i tak przymnáżá co rok procéntów, lubo iuż od nich nie bierze znowu procéntu. Za iléż lát przydzie ta osoba do kapitału 1225 Cz: Zł.

To ostatnié Zadanié nie różni się prawie od poprzedzaiącégo.

Niech

Niech będzie x, liczba ſzukaná lát.

Ta oſoba odbierze dochód 100 Cz: Zł: razy x; odbierze więc $100x$.

Dochód odebrany na końcu 1wſzégo roku przynoſi procént przez lát $x - 1$.

Dochód odebrany na końcu drugiégo roku przynoſi procént przez lát $x - 2$; i tak aż do oſtatniégo dochodu, który iuż procéntu nieprzynoſi.

A że procént od 100 Cz: Zł: ieſt 5 Cz:Zł: więc oſoba ta weźmie ze wſzyſtkiém procéntu 5 Cz: Zł. tylé razy rozmnożonych, ilé oznaczy ſumma liczb piérwſzych naturalnych, których powinno bydź $x-1$; ta zaś ſumma będzie $x\left(\frac{x-1}{2}\right)$

Warunek. $100x + 5 \times x\left(\frac{x-1}{2}\right) = 1225.$

Przeráb: (Podziéliwſzy obie ſtrony przez 5)

$$20x + x\left(\frac{x-1}{2}\right) = 245.$$

(Rozmnożywſzy przez 2) $40x + xx - x = 490.$

albo $xx + 39x = 490.$

(Rozmnożywſzy przez 4) $4xx + 156x = 1960.$

(Dopełniwſzy kwadr: w 1wſzéy ſtronie przez dodanié kwadratu z 39) $4xx + 156x + 1521 = 3481.$

(Wyciągnąwſzy piérw: kwadr:) $2x + 39 = 59.$

(Odiąwſzy 39) . . . . . $2x = 20.$

(Podzieliwſzy przez 2) . . $x = 10.$

Ta oſoba odebrała więc dochodu 1000 Cz: Zł: a ſumma procéntów będzie 5 Cz: Zł: rozmnożonych przez ſummę dziewięciu piérwſzych liczb naturalnych, toieſt przez 45: będzie więc $5 \times 45 = 225$

A zatém za 10 lát ta oſoba przydzie do kapitału 1225 Cz: Zł.

• *Inſzé przykłady. Dochód ieſt 300 Cz: Zł: procént 6%, którégo corocznie przybywá tak, iak wyżéy. Za iléż lát oſoba na zyſk ſwóy dochód tén obracaiącá, mieć będzie 2904 Cz: Zł. ?*

Dochód ieſt 400 Cz: Zł: Procént 7%. Za iléż lát oſoba zbieraiącá tén dochód przydzie do 6648 Cz: Zł.

219. *Zadanié 4 Winiéném komu ſummę* ſ, *którą teráz zaráz mám zapłacić. Godzę ſię z wierzycielém, iż mi tę ſummę częſciami równémi na iedénáſcie*

rát rocznych wypłacać ſobie pozwálá, odbieraiąc natychmiáſt odemnie iednę ratę. Iléż mám na każdą ratę wypłácać, abym po oſtatniéy raty wypłacéniu móy dług zgładził, rachuiąc procént po $5\frac{0}{0}$.?

Gdybym teráz zaráz wypłacił ſummę $ſ$, którą winiénem, tedy ponieważ procént od téy ſummy na rók ieſt $\frac{1}{20}$ téyże ſummy, więc za 10 lát tén procént byłby $\frac{10}{20}ſ$, albo $\frac{1}{2}ſ$. A zatém oſoba, któréy dłużny ieſtém, miałaby w takowy ſpoſób za 10 lát $ſ+\frac{1}{2}ſ=\frac{3}{2}ſ$.

Mianowanie. Niech x, oznácza ratę, którą corocznie wypłácać powiniénem.

Summa tych wſzyſtkich 11 rát będzie	. . . .		$11x$.
1wſzá rata przynoſi procént przez	10 lát, toieſt		$\frac{1}{20}x\times 10$.
2gá	9	. . .	$\frac{1}{20}x\times 9$.
3ciá	8	. . .	$\frac{1}{20}x\times 8$.
4tá	7	. . .	$\frac{1}{20}x\times 7$.
⋮			
10tá	1	. . .	$\frac{1}{20}x\times 1$.

A zatém ſumma wſzyſtkich procéntów będzie $\frac{1}{20}x$, rozmnożoná przez ſummę 10 piérwſzych liczb naturalnych: która to ſumma ieſt 55: więc będzie $\frac{55}{20}x=\frac{11}{4}x$.

Warunek. $11x+\frac{11}{4}x=\frac{3}{2}ſ$.

Przeráb: (Obróciwſzy całą piérwſzą ſtronę na ułómki) $\frac{55}{4}x=\frac{3}{2}ſ$.
(Przywiódłſzy obie ſtrony do iednakowégo mianownika, i opuściwſzy go) $55x=6ſ$.
(Podzieliwſzy przez 55) $1x=\frac{6}{55}ſ$.

Rozwiązanié. $x=\frac{6}{55}ſ$. Wáżność każdéy raty roczné.
$11x=\frac{6}{5}ſ$. Wáżność wſzyſtkich rat rocznych.
$\frac{11}{4}x=\frac{3}{10}ſ$. Summa procéntów od wſzyſtkich rát rocznych.
$11x+\frac{11}{4}x=\frac{6}{5}ſ+\frac{3}{10}ſ=\frac{15}{10}ſ=\frac{3}{2}ſ$. Wáżność wſzyſtkich rát wráz z procéntami.

Przykłady: *Niech będzie $ſ=5500$. będzie $x=600$.*
$ſ=4400$. będzie $x=480$.

Niechby znowu procént był $6\frac{0}{0}$. liczba lát 8, a $ſ=24200$.

Uwága.

Uwága. Gdyby dług cały wypłacić razém przypádało w pewnym czaſie, *np.* za lát 10; tedy z tym długiém zrównalibyśmy ważność ſummy rát rocznych i ich procéntów, któréby na końcu tychże lát wyznaczonych przypádały.

220. *Zadanié 5. Mám komu wypłacić corocznie pewną ſummę* a, *przez lát 11, rachuiąc od teraźnieyſzégo zarάz czaſu. Chcę ſię od razu pozbydź tego długu. Jakąż więc ſummę przydzie mi natychmiáſt wypłacić, rachuiąc procént 5°/o.*

Dowiedzie ſię tak, iak wyżéy, że ważność 11 rát, będzie . . . . . $11a+\frac{1}{20}a(1+2+3+\ldots 10)=11a+\frac{55}{20}a=11a(1+\frac{1}{4})=11a\times\frac{5}{4}=\frac{55}{4}a.$

Mianowanié. Niech x oznácza ſummę, którą mi zaráz wypłacić przypádá, abym ſię całégo długu pozbył.

Procént róczny od téy ſummy będzie $\frac{1}{20}x$, a zatém przez lát 10, będzie ténże procént $\frac{10}{20}x=\frac{1}{2}x$.

Warunek. $x+\frac{1}{2}x=\frac{55}{4}a.$

Przerάb: (Obróciwſzy całą 1wſzą ſtronę na ułómki) $\frac{3}{2}x=\frac{55}{4}a.$
(Przywiódłſzy dwie ſtrony do iednakowégo mianownika, i opuściwſzy go) $6x=55a.$
(Podzieliwſzy przez 6) $x=\frac{55}{6}a.$

Rozwiązanié. $x=\frac{55}{6}a.$ Summa ſzukaná.
Procént róczny od téy ſummy . . . . . . $\frac{55}{6}a\times\frac{1}{20}=\frac{11}{24}a.$
Procént 10letni, od téyże ſummy . . . . . . $\frac{55}{12}a.$
Ważność całéy ſummy nakońcu 10 lát . . . $\frac{55}{6}a+\frac{55}{12}a=$
$55a(\frac{1}{6}+\frac{1}{12})=55a(\frac{2}{12}+\frac{1}{12})=55a\times\frac{3}{12}=55a\times\frac{1}{4}=\frac{55}{4}a.$ I ta to ieſt ſumma całégo długu wraz z procéntém.

Przykłady. *Niech będzie* $a=120$; *będzie* $ſ=55\times 20=1100$; { $a=144$. *będzie* $ſ=1320$.

Niechby znowu była liczba lát 12, 15, 18, 20, a procént 6, 7, i t. d. od ſta.

Uwága. Tén ſpoſób rachowania ważności teraźnieyſzéy długu, który przez przeciąg pewnéy liczby lát ratami miał bydź wypłácany nie ieſt zupełnie dokładnym, iako to obáczymy w Rozdziele naſtępuiącym. Gdy iednak liczba lát ieſt mała; wtedy nieznaczné bardzo będzie uchybiénié.

221. *Zadanié 6. Pewná oſoba, którάby mogła corocznie pożytkować z ſwégo maiątku po 4°/o. daie go innéy oſobie bez obowiązku nazád go powrócénia.*

cénia, byleby corocznie odbiérała od niéy 10%; i tén procént 10% roczny, daie znowu potém na procént 4%, nie rachuiąc procéntu od procéntu. Za iléż lát zbierze ténże fám maiątek, któryby była zebrała, dáwfzy fwóy piérwiáftkowy maiątek, na procént 4%?

Niech tén procént 10%, albo raczéy penfya roczná umówioná, będzie $\int$, będzie kapitáł cały, z którego ta penfyá má bydź wypłácaná $10\int$.

Mianowanié. Niech będzie x, liczba fzukaná lát.

Kapitáł téy ofoby, gdyby go była dała na procént 4%, byłby powiękfzony fummą $\frac{1}{25}\,10\int$, albo $\frac{2}{5}\int$ wziętą tylé razy, ilćby było lát, przez któréby tén procént wypłácano: á zatém na końcu lát x, tén kapitáł byłby $10\int+\frac{2}{5}\int x$.

Ta ofoba odbierze fwoię penfyą $\int$, razy x, więc z tego zbioru, będzie miała naoftatek $\int x$.

Penfyá odebraná na końcu piérwfzégo roku przyniefie procént przez lát . . . . $x-1$.

Na końcu 2go roku . . . . $x-2$.

. . . . . 3go roku . . . . $x-3$.

.
.
.

. . . . . $x-1$ roku . . . . 1.

. . . . . x roku . . . . 0.

A że procént roczny od téy penfyi ieft $\frac{1}{25}\int$; więc procént od wfzyftkich tych penfyy będzie

$$\tfrac{1}{25}\textstyle\int(1+2+3+4+5\ \ldots\ x-1)=\tfrac{1}{25}\int\left(\dfrac{(x-1)x}{2}\right)$$

Warunek. $\int x+\frac{1}{25}\int\left(\dfrac{(x-1)x}{2}\right)=10\int+\frac{2}{5}\int x.$

Przerób: (Podzieliwfzy obie ftrony przez $\int$)

$$x+\frac{(x-1)x}{50}=10+\tfrac{2}{5}x.$$

(Rozmnożywfzy obie ftrony przez 50)

$50x+(x-1)x=500+20x$: albo $xx+49x=500+20x$.

(Odiąwfzy $20x$ po obu ftronach) $xx+29x=500$.

(Rozmnożywfzy obie ftrony przez 4) $4xx+116x=2000$.

(Dopełniwfzy kwadratu w piérwfzéy ftronie, przez dodanié z obu ftrón kwadratu z 29) $4xx+116x+841=2841$.

(Wy-

(Wyciąg: piérwiâſt: kwadr:) $2x+29=\sqrt{2841}=53,3+$.
(Odiąwſzy 29) $2x=24,3+$.
(Podzieliwſzy przez 2) $x=12,15,+$ toieſt 12 lát, i máło co mniéy od 2 mieſięcy.

Przykł: Niech będzie penſyá roczná . . 1200 Zł.
a zatém kapitáł . . . . 12000 Zł.
Procént $4\frac{0}{0}$ na rok od 12000 Zł. ieſt . . . 480 Zł.
Ténże procént za lát 12, i 2 mieſiące . . . 5840.
Więc kapitáł za lát 12 i 2 mieſiące byłby . . 17840.
Ta oſoba wziętaby za lát 12, Zł. 1200, razy 12, toieſt 14400.
Procént roczny od penſyi 1200 Zł byłby . . . 48.
Summa wſzyſtkich naſtępnych penſyi ieſt 48 (1+2+3+ . . . 11) =

$$\frac{48\times 11\times 12}{2}=3168.$$

Summa wſzyſtkich penſyy i procéntów za lát 12, 17568 Zł.
Procént 2 mieſięcy od 14000 Zł. . . . . . 109.
Część 13ſtéy penſyi, należącéy ſię za 2 mieſiące 200.
Summa . . . . 17877.

Ta oſtatniá ſumma, mało co ſię różni od ważności wyżéy znalezionéy, do któréy byłby uróſł kapitáł w przeciągu tegoż ſamégo czaſu.

Inſzé przykłady. Penſyá roczná wypłácaná z kapitału ieſt $10\frac{0}{0}$. Oſoba w tén ſpoſób pożytkuiącá z kapitału mogłaby byłá obrócić go na procént $5\frac{0}{0}$, tak, iak w ſaméy rzeczy obrácá na ténże procént penſye ſwoié naſtępné.

Niechby znowu roczná penſyá była $12\frac{0}{0}$. Niech penſye naſtępné obrócone będą na procént $5\frac{0}{0}$, ſám zaś kapitáł mógł bydź obróconym na procént $4\frac{0}{0}$.

222. *Zadanié 7. Pewná oſoba maiąca 100000 Zł. w dobrach, które iéy czynią tylko 4000 Zł. przypożyczá na początku każdégo roku na różné wydatki po 6000 Zł. od których obowięzuie ſię płacić procéntu $10\frac{0}{0}$. Nie wypłáca ani kapitału, ani procéntu co rok ſię pomnáżaiącégo (nie będąc wſzelako obowiązaną płacić procént od procéntu.) Za iléż lát ta oſoba wcale ſię zniſzczy?*

Mianowanié. Niech liczba ſzukaná lát, będzie . . . x.
Przypadnié téy oſobie pożyczyć 6000 Zł. razy x, toieſt . . . . $6000x$.
Procént roczny od 6000 Zł. ieſt 600 Zł.
1wſzé, 2gié, 3cié, 4té . . . . . $x$té pożyczénie Zł. 6000, ciągnie za ſobą procént przez . . . x, $x-1$, $x-2$, $x-3$ . . . . 1 lát.

A zatém ſumma długów téy oſoby na końcu lát x, maiąc wzgląd na ſamé procénta,

będzie $600\,(1+2+3+4+5\ \ldots\ x) = 600\left(\frac{x(x+1)}{2}\right)$.

A cały iéy dług będzie $6000x + 600\left(\frac{x(x+1)}{2}\right)$

Warunek. $6000x + 600\left(\frac{x(x+1)}{2}\right) = 100000.$

Przerób: (Rozmn: obie ſtrony przez 2) $12000x + 600xx + 600x = 200000.$
albo $600xx + 12600x = 200000.$

(Podziel: obie ſtrony przez 200) $3xx + 63x = 1000.$

(Rozmn: przez 12 dlá uchronienia ſię ułómków)
$36xx + 756x = 12000.$

(Dopełn: kwadratu w 1 wſzéy ſtronie, przez dodanié 63^2 po obu ſtronach) $36xx + 756x + 3969 = 15969.$

(Wyciąg: piérwiáſt: kwadr:) $6x + 63 = \sqrt{15969} = 126,\ 36.$

(Odiąwſzy 63) $6x = 63,\ 36.$

(Podzieliwſzy przez 6) $1x = 10,\ 56,$ toieſt lát 10, i trochę więcéy niż pół ſiódma mieſiąca.

Summa pożyczek przez 10 lát . . . . 60000 Zł.
Summá procéntów od tychże pożyczek, ieſt
$600\,(1+2+3+\ \ldots\ 10) = 600 \times 55 = 33000$ Zł.
Procént od 60000 Zł. za 6 mieſięcy . . . 3000.
Pożyczyła ieſzcze ta oſoba na 6 mieſięcy . . 3000.
Procént od téy oſtatniéy pożyczki . . . . 150.
Będą więc długi do dodania

60000 Zł.	
33000.	
3000.	
3000.	
150.	
99150.	Dług na końcu 10 lát i 6 mieſięcy.

Procént

Procént od 60000 Zł. za 7 mieſięcy	3500. Zł.
Dług 7 mieſięcy	3500.
Procént od tego oſtatniégo długu	204.
Wártość 10 piérwſzych pożyczek, wráz z procentém od nich	93000.
Dług cały na końcu lát 10, i 7 mieſięcy . .	100204.

Inſzé przykłady. Maiątek téy oſoby, ieſt 150000 Zł: z którégo má 7000 Zł: rocznégo dochodu, wydaie zaś ta oſoba co rok Zł: 12000, i zapożyczá ſię po 10°/o.

Maiątek téy oſoby ieſt 200000 Zł. z których má 9000 złotych dochodu. Wydatek iéy roczny ieſt 16000 Zł. i zapożyczá ſię po 12°/o.

Przyſtóſowanié zbioru w jednę ſummę ciągów Arytmetycznych do zbioru liczb tróykątnych, i liczb kwadratowych.

223. *Liczby tròykątné.*

1wſzá $= 1 = 1.$
2gá $= 3 = 1+2.$
3ciá $= 6 = 1+2+3.$
4tá $= 10 = 1+2+3+4.$
5tá $= 15 = 1+2+3+4+5.$
6tá $= 21 = 1+2+3+4+5+6.$
7má $= 28 = 1+2+3+4+5+6+7.$
8má $= 36 = 1+2+3+4+5+6+7+8.$
⋮

$$n\text{tá} = \frac{n\times(n+1)}{2} = 1+2+3+4+5+6+7+8\ \ldots\ n.$$

$$\begin{aligned} \text{S. (Summa ſzukaná)} &= 1\times n+2(n-1)+3(n-2)+4(n-3)+5(n-4)+6(n-5) \\ &\quad +7(n-6)+8(n-7)+\ \ldots\ n\times 1. \\ &= 1\times n+2(n-1)+3(n-2)+4(n-3)+5(n-4)+6(n-5) \\ &\quad +7(n-6)+8(n-7)+\ \ldots\ n(n-(n-1)). \\ &= n(1+2+3+4+5+6+7+8+\ \ldots\ n) \\ &\quad -(1\times2+2\times3+3\times4+4\times5+5\times6+6\times7+7\times8+\ldots(n-1)n) \end{aligned}$$

Oſtatni ſzereg wyráżaiący ſummę ſzukaną, ſkłádá ſię ze dwóch, z których w piérwſzym ieſt n, rozmnożoné przez ſummę liczb n piérwſzych naturalnych, albo przez ntą liczbę tróykątną. W drugim zaś z tych ſzeregu każdy wyráz

ráz ieſt podwóynym liczby tróykątnéy, zacząwſzy od piérwſzéy, a kończąc na przedoſtatniéy. Summa więc drugiégo tego ſzeregu będzie podwóyną ſummy ſzukanéy zmnieyſzonéy *n*tą, toieſt oſtatnią liczbą troykątną: a zatém wypadnie naſtępuiącé równanié wyráżaiącé ſummę całégo ſzeregu liczb tróykątnych. $ſ = n\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) - 2\left(ſ - \frac{n(n+1)}{2}\right)$.

$$\text{albo } ſ = \frac{n \times n(n+1)}{2} - 2ſ + 2n\left(\frac{n+1}{2}\right).$$

(Dodáwſzy $2ſ$ do obu ſtrón, będzie)

$$3ſ = \frac{n \times n(n+1)}{2} + \frac{2n(n+1)}{2}.$$

$$= \frac{n \times (n+1)(n+2)}{2}.$$

(Podzieliwſzy obie ſtrony przez 3, będzie)

$$ſ = \frac{n \times (n+1)(n+2)}{1 \times 2 \times 3}.$$

Aby więc znaléźć ſummę liczby podanéy liczb tróykątnych, zacząwſzy od piérwſzéy; trzeba zrobić wieloczyn ciągły ze trzech liczb naturalnych naſtępnych, z których piérwſzá oznáczałaby liczbę wyrazów tego ciągu liczb tróykątnych, i wziąźć ſzóſtą część tego wieloczynu.

Przykłád. Daymy że $n = 5$. będzie $\frac{n \times (n+1) \times (n+2)}{1 \times 2 \times 3} = \frac{5 \times 6 \times 7}{1 \times 2 \times 3} = 35$.

Dáymy że $n = 10$. będzie $\frac{n \times (n+1)(\times n+2)}{1 \times 2 \times 3} = \frac{10 \times 11 \times 12}{1 \times 2 \times 3} = 220$.

Przyſtóſowanié. Niechby kulé uſtawioné były w oſtrográn tróykątny, którégo bok podſtawy ieſt n; *liczba kul, z których ſię tén oſtrográn ſkłádá, będzie* $\frac{n \times (n+1)(\times n+2)}{1 \times 2 \times 3}$.

224. *Liczby kwadratowe.*

1wszá $= 1 = 1.$

2gá $= 4 = 1 + 3.$

3ciá $= 9 = 1 + 3 + 5.$

4tá $= 16 = 1 + 3 + 5 + 7.$

5tá $= 25 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9.$

6tá $= 36 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11.$

7má $= 49 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13.$

8má $= 64 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15.$

⋮

*n*tá $= nn = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + \ldots 2n-1.$

$\int$ (Summa szukaná) $= 1.\ n + 3(n-1) + 5(n-2) + 7(n-3) + 9(n-4) + 11(n-5) + 13(n-6) + 15(n-7) + \ \ldots\ (2n-1)(n-(n-1)).$

$= n(1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + \ \ldots\ 2n-1)$

$-(1\times3 + 2\times5 + 3\times7 + 4\times9 + 5\times11 + 6\times13 + 7\times15 + \ldots (n-1)(2n-1).$

Ostatni szereg wyráżaiący summę szukaną ciągu liczb kwadratowych skłáda się ze dwóch, z których piérwszy równá się *n*téy liczbie kwadratowéy wziętéy razy *n*. W drugim zaś szeregu każdy wyráz skłádá się z podwóynéy liczby kwadratowéy, i z liczby naturalnéy odpowiedaiącéy w porządku wyrazów, zacząwszy od piérwszéy, a kończąc na przedostatniéy. Będzie więc summa drugiégo szeregu równá summie dwóch następuiących szeregów.

$$2(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + \ \ldots\ (n-1)^2.$$

$$\text{i}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + \ldots\ldots n-1 = \frac{(n-1)n}{2}.$$

a zatém summa całégo szeregu liczb kwadratowych będzie

$$\int = n\times nn - 2(\int - nn) - \frac{(n-1)n}{2}.$$

albo $$\int = n\times nn - 2\int + 2nn - \frac{(n-1)n}{2}.$$

(Dodáwszy $2\int$, po obu stronach, będzie)

$$3\int = n\times nn + 2nn - \frac{(n-1)n}{2}.$$

$$= n(nn + 2n - \frac{n-1}{2}).$$

$$= \frac{n(2nn + 3n + 1)}{2}.$$

$$= n(\frac{(n+1)\ (2n+1)}{2}).$$

Podziel: obie ſtrony przez 3.

$$ſ = \frac{n \times n+1 \times 2n+1}{1 \times 2 \times 3}.$$

Przyſtóſowanié. Niechby kule ułożoné były w oſtrográn kwadratowy, którégo bok podſtawy ieſt n; *liczba kul zawartych w tym oſtrogranie*, będzie $\frac{n \times n+1 \times 2n+1}{1 \times 2 \times 3}$.

Przykłady. Dáymy że $n = 10$.

będzie $\frac{n \times n+1 \times 2n+1}{1 \times 2 \times 3} = \frac{10 \times 11 \times 21}{1 \times 2 \times 3} = 5 \times 11 \times 7 = 385$.

Dáymy że $n = 15$.

będzie $\frac{n \times n+1 \times 2n+1}{1 \times 2 \times 3} = \frac{15 \times 16 \times 31}{1 \times 2 \times 3} = 5 \times 8 \times 31 = 1240$.

225. *Zbiór kwadratów z wyrazów iakiégokolwiek ciągu Arytmetycznégo możná przywiéſdź do zbioru poprzedzaiącégo.*

Ciąg Arytmetyczny.

a $a+d$ $a+2d.$ $a+3d.$ $a+4d.$ $a+(n-1)d.$

Kwadraty.

$aa.$ $aa+2ad+dd.$ $aa+4ad+4dd.$ $aa+6ad+9dd.$ $aa+8ad+16dd.$ $aa+2ad(n-1)+dd(n-1)^2.$

Summa tego ſciągu kwadratów ſkłádá ſię

1. Z kwadratu 1 wſzégo wyrazu aa, tylé razy wziętégo, iléieſt wyrazów.

2. Z podwóynégo wieloczynu $2ad$, rozmnożonégo przez ſummę liczb naturalnych $(1+2+3+4+5+6+ \ \ldots\ (n-1))$.

3. Z kwa.

3. Z kwadratu różnicy dd, rożmnożonéy przez ſummę liczb kwadratowych $(1+4+9+16+25+36+\ \ldots\ (n-1)^2)$.

Więc ſumma tego ciągu, ieſt

$$aan+2ad\,\frac{(n\times n-1)}{1\times 2}+dd\left(\frac{(n-1)n(2n-1)}{1\times 2\times 3}\right).$$

226. W wyrażénié téy ſummy możná wprowadzić ſám tylko kwadrát różnicy naſtępnéy wyrazów bez wieloczynu iéy przez piérwſzy wyráz, a to w naſtępuiący ſpoſób:

1. Niech liczba wyrazów ciągu, będzie niepárzyſtá, i oznaczoná przez $2n+1$.

Oznaczywſzy wyráz środni przez a, wyrazy dwa, między którémi tén wyráz środni znayduie ſię, oznaczmy przez $a+d$, i $a-d$.

Zacząwſzy od wyrazu środniégo, rozłóżmy ciąg na dwa naſtępuiącé:

$$a.\ \begin{matrix} a+d. & a+2d. & a+3d. & a+4d. & a+5d. & a+6d\ \ldots & a+nd. \\ a-d. & a-2d. & a-3d. & a-4d. & a-5d. & a-6d\ \ldots & a-nd \end{matrix}$$

Kwadraty.

$$aa\ \begin{matrix} aa+2ad+dd.aa+4ad+4dd.aa+6ad+9dd.aa+8ad+16dd\ldots aa+2and+nndd. \\ aa-2ad+dd.aa-4ad+4dd.aa-6ad+9dd.aa-8ad+16dd\ldots aa-2and+nndd. \end{matrix}$$

W każdéy párze kwadratów, podwóyné wieloczyny niſzczą ſię, i zoſtaie $aa(2n+1)+2dd(1+4+9+16+\ldots nn)=aa(2n+1)+2dd\left(\frac{n\times n+1\times 2n+1}{1\times 2\times 3}\right)$.

2. Niech liczba wyrazów ciągu będzie párzyſtá, i oznaczoná przez $2n$.

Oznáczmy wyrazy dwa środnié przez $a+d$, i $a-d$.

Ciąg Arytmetyczny będzie mógł bydź rozłożonym, na dwa naſtępuiącé:

$$\begin{matrix} a+d. & a+3d. & a+5d. & a+7d. & a+9d. & a+11d & a+(2n-1)d. \\ a-d, & a-3d. & a-5d. & a-7d. & a-9d. & a-11d. & a-(2n-1)d. \end{matrix}$$

Kwadraty.

$$\begin{matrix} aa+2ad+dd.aa+6ad+9dd.aa+10ad+25dd\,aa+14ad+49dd\ldots aa+2ad(2n-1)+(2n-1)^2dd \\ aa-2ad+dd.aa-6ad+9dd.aa-10ad+25dd.aa-14ad+49dd\ldots aa-2ad(2n-1)+(2n-1)^2dd \end{matrix}$$

Summa tych kwadratów.

$$2aa(n)+2dd(1+9+25+49+\ \ldots\ (2n-1)^2).$$

Aby znaléźć ſummę kwadratów tych liczb n, niepárzyſtych $(1, 3, 5, 7, 9\ \ldots\ 2n-1)$.

Od ſummy kwadratów liczb piérwſzych $2n-1$ naturalnych: 1, 2, 3, 3, 4, 5, 6, 7, . . . $2n-1$, która ieſt $\frac{(2n-1)(2n)(4n-1)}{1\times2\times3}$

odiąć potrzeba ſummę kwadratów liczb piérwſzych $2n-1$ párzyſtych;

$2(1+2+3+4+5+6 \; . \; . \; . \; . \; n-1)$; która ieſt $4\left(\frac{(n-1)n(2n-1)}{1\times2\times3}\right)$

Zoſtanie $(2n-1)2n)\left(\frac{4n-1}{1\times2\times3}-2\left(\frac{(n-1)}{1\times2\times3}\right)=\frac{(2n-1)(2n)(2n+1)}{1\times2\times3}\right.$.

Więc naoſtatek doydziémy ſummy ſzukanéy, i ta będzie

$$2aa\times n+2dd\left(\frac{(2n-1)(2n)(2n+1)}{1\times2\times3}\right).$$

227. *Przykłady do przyſtóſowania.*

1. *Znaléźć 9 liczb w ciągu Arytmetycznym, których ſumma 99, a ſumma ich kwadratòw* 1329.

Wyráz śrzedni, będzie $\frac{1}{9}$ częścią 99, toieſt 11.

Wzór ogólny. $aa(2n+1)+2dd\left(\frac{n\times n+1\times2n+1}{1\times2\times3}\right)$ zamiéni ſię

na tén ſzczególny $121\times9+2dd\left(\frac{4\times5\times9}{1\times2\times3}\right)$.

Więc $121\times9+2dd\left(\frac{4\times5\times9}{1\times2\times3}\right)=1089+60dd$.

a zatém; $1089+60dd=1329$.

Odiąwſzy 1089 po obu ſtronach, będzie $60dd=240$.

Podzieliwſzy obie ſtrony, przez 60, będzie $dd=4$.

Wyciągnąwſzy piérwiáſtek kwadratowy, będzie $d=2$.

Ciąg tedy, zacząwſzy od wyrazu śrzedniégo, będzie

11, 9, 7, 5, 3.
13, 15, 17, 19.

2. *Znaléźć 10 liczb w ciągu Arytmetycznym, których ſumma 110, a ſumma ich kwadratów* 1540.

Summa tych wyrazów pár 5, ieſt 110, a zatém ſumma káżdéy páry będzie 22, więc $a=11$.

Wzór

Wzór ogólny, $2aa \times n + 2dd\left(\frac{(2n-1)\,(2n)\,(2n+1)}{1\times2\times3}\right)$ (położywszy 11, zamiást *a*, 5, zamiást *n*;) zamiéni ſię na tén ſzczególny:

$$121\times10+2dd\left(\frac{9\times10\times11}{1\times2\times3}\right)=121\times10+2dd\times165.$$

Więc $1210+330dd=1540$;

a zatém $121+33dd=154$.

Więc $33dd=33$. $dd=1$.

$d=1$.

Wyrazy dwa śrzednié: 12; 10; Ciąg 10, 8, 6, 4, 2. 12, 14, 16, 18, 20.

ROZDZIAŁ VIII.

O ciągach Jeometrycznych, i o Logarytmach.

228. Gdy będzie ſzereg takich ilości, których ſtoſunek dwóch naſtępnych ieſt zawſze iednakowy; o takich ilościach mówi ſię, że ſkłádaią ciąg Jeometryczny.

Przykł: Liczby 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, i t. d. ſkłádaią ciąg Jeometryczny.

Podobnie będą w ciągu Jeometrycznym, i liczby naſtępuiące:

1, 3, 9, 27, 81, 243, i t. d.

1, 4, 16, 64, 256, 1024, i t. d.

Liczba oznáczaiąca ilé razy w wyrazie każdym naſtępnym zawiérá ſię tén, który go poprzedził, czyli *Wykładnik*, (Exponens) ſtoſunku dwóch wyrazów bliżkich, nazywá ſię *Wykładnikiém* ciągu. I tak we trzech poprzedzaiących ciągach, wykładnikami ſą liczby 2 w piérwſzym ciągu: 3 w drugim: a 4 w trzecim.

Ciągi przykładów poprzedzaiących ſą roſnącé: ponieważ każdy w nich naſtępny wyráz większy ieſt od poprzedzaiącégo. Gdy zaś wyrazy zacząwſzy

 od

od piérwszégo co ráz się zmnieyszaią: ciąg taki nazywá się maleiącym. I takié są następuiącé ciągi:

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$, i t. d.

$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}$, i t. d.

$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \frac{1}{256}$ i t. d.

229. W poprzedzaiących ciągach Jeometrycznych zaczynaiących się od 1, każdy wyráz po tym piérwszym idący iest wieloczynném z drugiégo wziętégo tylé razy ciągle za czynnika; ilé wyznáczá liczba okázuiącá mieyscé, któré tén wyráz w ciągu zastępuie po piérwszym wyrazie. I tak w piérwszym ciągu, drugi wyráz czyli piérwszy, po iedności iest 2: trzeci, czyli drugi po 1, iest 4, który iest wieloczyném ze dwóch, wziętych dwa razy za czynnika: a w ogólności wyráz $(n+1)$ty, czyli $n$ty po 1, iest 2, wzięté n, razy za czynnika, albo mnogość $n$ta liczby 2, czyli 2^n.

Idzie zatém, że każdy ciąg Jeometryczny, zaczynaiący się od 1, złożony iest z następnych mnogości drugiégo wyrazu: toiest, że tén drugi wyráz zostánie bez odmiany: trzeci wyráz będzie iego drugą mnogością, albo stopniém: czwárty wyráz będzie trzecią iego mnogością: 5ty będzie czwártą iego mnogością: i t. d. Przeto każdy ciąg Jeometryczny zaczynaiący się od 1, możná tak ogólnie wyrazić:

$1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, a^8, a^9, a^{10}, a^{11}, a^{12}, \ldots a^{n-1}$.

230. Aby ktorékolwiek dwa wyrazy ciągu Jeometrycznégo, rozmnożyć iedén przez drugi; dosyć iest dodádź wykładniki dwóch tych wyrazów, i summę tych dwóch wykładników dadź za wykładnika drugiému wyrazowi ciągu, który to wyráz stanie się wieloczyném dwóch tamtych. Jakož wyráz *np.* a^3 oznáczá, że a, wzięté iest za czynnika razy 3: wyráz a^4 oznáczá, że a, wzięté iest za czynnika razy 4: a zatém wieloczyn z a^3, przez a^4, zawiérać w sobie będzie a, wzięté za czynnika tylé razy, ilé oznáczá summa liczb 3, i 4: którá to summa iest 7, więc $a^3 \times a^4 = a^7$. A w ogólności wieloczyn z a^p, przez a^q, powinién zamykać a, wzięté za czynnika tylé razy, ilé oznáczá summa wykładników p, i q; a zatém $a^p \times a^q = a^{p+q}$ (gdy p, i q, wyráżaią liczby cáłkowité.)

231. Aby zaś podzielić wyráz którykolwiek tego ciągu przez drugi wyráz; trzeba odiąć ich wykładniki iedén od drugiégo. Jakož ponieważ dzielny powinién bydź równy dzielnikowi rozmnożonému przez wieloráz; więc wykładnik dzielnégo będzie równy summie wykładników dzielnika i wielorazu; (co się dopiéro wyżéy okázało) a zatém wykładnik wielorazu będzie różnicą wykładników dzielnégo i dzielnika.

I tak

I tak $a^5 : a^3 = a^2$; $a^6 : a^2 = a^4$; $a^8 : a^5 = a^3$; W ogólności: $a^p : a^q = a^{p-q}$.

232. Gdy $p = q$, wtedy $a^p : a^q = a^p : a^p = 1$. A że w takim razie $a^{p-q} = a^0$, więc $a^0 = 1$.

233. Gdy p, ieſt mieyſzé niż q, wtedy $p-q$, będzie mnieyſzé niż o, toieſt będzie ilością uiémną: a zatém w takim razie wykładnik $p-q$, w wyrażéniu tém a^{p-q}, będzie uiémny. I tak $a : a^2 = a^{1-2} = a^{-1}$. Że zaś $a : a^2 = \frac{a}{aa} = \frac{1}{a}$; więc zachowuiąc iednokſztáltność wykładników, można wyrazić ułómek $\frac{1}{a}$ i w tén ſpoſób a^{-1}. Tak też $\frac{1}{a^2} = a^{-2}$; $\frac{1}{a^3} = a^{-3}$ i t. d.

Gdybyśmy chcieli, aby powyżſzy ciąg nie zaczynał ſię od iedności, ale miał ieſzcze przed nią wyrazy ułómkowé, (ieżeli a ieſt większé niż 1); tedy możnáby takowy ciąg dwoiako wyrazić.

albo tak $\frac{1}{a^5}, \frac{1}{a^4}, \frac{1}{a^3}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^1}. \frac{1}{a}$, albo $1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6$, i t. d.

albo też $a^{-5}, a^{-4}, a^{-3}, a^{-2}, a^{-1}, a^0$ albo $1, a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6$, i t. d.

234. Jeżeli zaś a, ieſt ułómkiém, *np.* ieżeli ieſt $= \frac{1}{2}$; tedy ciąg byłby maleiącym w tych wyrazach, któréby po 1 naſtępowały, a byłby rosnącym w tych wyrazach, któréby przed 1 znaydowały ſię: zaczynaiąc w obiedwie ſtrony ciąg od 1. W takim razie wykładniki wyrazów ułómkowych byłyby przydayné, a wykładniki wyrazów większych od iedności byłyby uiémné. Otóż znowu nowy przykład, na którym widzimy, iako wyrażénia ilości przydaynych i ułómnych zawiſły od tego względu, pod którym ié uważámy.

235. Aby mieć kwadrát wyrazu iakiégo w ciągu Jeometrycznym, trzeba podwoić wykładnika tego wyrazu: aby mieć iego ſześcián, trzeba tegoż wykładnika potroić; aby mieć czwártą iego mnogość, trzeba wykładnika poczwórnić, i t. d. A w ogólności, aby wynieść wyráz a^m, do mnogości n, trzeba wykładnika m, rozmnożyć przez n, z którégo to rozmnożénia, wypadnie a^{mn}, toieſt mnogość n, wyrazu a^m. Co bezśrzednie wypádá z rozumowania uczynionégo względém zamiany rozmnożénia na dodáwanié.

236. Aby zaś wyciągnąć pierwiáſtek kwadratowy, ſześcienny, czwártéy mnogości, i t. d. z wyrazu iakiégo w ciągu Jeometrycznym; trzeba wykładnika tego wyrazu podzielić przez 2, 3, 4, i t. d, Okázać to na oko można

można tym ſpoſobém, którymeśmy zamianę dzieléńia wyrazów na odeymowanié ich wykładników wywiedli z zamiany rozmnożénia tychże wyrazów na dodáwanié ich wykładników.

237. Jeżeli wykładnik wyrazu iakiégo nié może bydź podzielonym przez wykładnika piérwiáſtku, który wyciągnąć chcemy; tedy wykładnik wypádaiący z takowégo dzieléńia nie będzie liczbą cáłkowitą, a zatém nie będzie ſię téż znaydowáł w ciągu Jeometrycznym: ale liczba odpowiedaiącá takiému piérwiáſtkowi mieyſcé mieć będzie między dwóma wyrazami tego ciągu, których wykładniki różnią ſię od ſiebie iednością, i iedén z nich więkſzy będzie, a drugi mnieyſzy od wykładnika tego ułómkowégo.

I tak: niech będzie wyráz a^5, którégo oznaczyć trzeba piérwiáſtek kwadratowy. Wykładnik ilości a, w wyrażéniu tego piérwiáſtku będzie $\frac{5}{2}$, a zatém wyrażénié tego piérwiáſtku będzie $a^{\frac{5}{2}}$, toieſt piérwiáſtek kwadratowy piątéy mnogości, ilości a. Zachowuiąc tedy i tu iednokſztałtność wykładników, ieſt $\sqrt[2]{a^5}=a^{\frac{5}{2}}$. Podobnie $\sqrt[2]{a^3}=a^{\frac{3}{2}}$; $\sqrt[2]{a^7}=a^{\frac{7}{2}}$; $\sqrt[3]{a^4}=a^{\frac{4}{3}}$; $\sqrt[3]{a^5}=a^{\frac{5}{3}}$; $\sqrt[3]{a^7}=a^{\frac{7}{3}}$; i t. d.

238. Té różné wyrażénia wprowadzoné w ciąg Jeometryczny, który z początku miáł ſamé wykładniki cáłkowité, zaméńią tén ciąg w inny ſzereg, w którym pomieſzané będą wyrazy maiącé wykładniki cáłkowité z wyrazami maiącémi wykładniki ułómkowé: i tén drugi ſzereg, nie będzie ciągiém Jeometrycznym chyba w tym razie, gdy różnica dwóch którychkolwiek wyrazów naſtępnych, zawſze ieſt iednakowá.

I tak ſzereg tén $1, a^{\frac{1}{2}}, a^1, a^{\frac{3}{2}}, a^2, a^{\frac{5}{2}}, a^3, a^{\frac{7}{2}}, a^4, a^{\frac{9}{2}}, a^5, a^{\frac{11}{2}}, a^6$; i t. d. nie przeſtaie bydź ciągiém Jeometrycznym zupełnym, ponieważ między wſzyſtkié dwa naſtępné wyrazy piérwſzégo ciągu z wykładnikami cáłkowitémi wprowadziliśmy iedén wyráz śrzedni Jeometryczny.

Tak téż i ſzereg naſtępuiący $1, a^{\frac{1}{3}}, a^{\frac{2}{3}}, a, a^{\frac{4}{3}}, a^{\frac{5}{3}}, a^2, a^{\frac{7}{3}}, a^{\frac{8}{3}}, a^3, a^{\frac{10}{3}}, a^{\frac{11}{3}}, a^4$, i t. d. ieſt ciągiém Jeometrycznym zupełnym, iakimeśmy go uczynili przez wprowadzénié dwóch wyrazów śrzednich ieometrycznych pomiędzy dwa kazdé wyrazy piérwſzégo ciągu z wykładnikami cáłkowitémi.

To wprowadzénié wykładników ułómkowych, zawiſło od wyrazu, któryśmy wybrali za drugi do ciągu zaczynaiącégo ſię od 1. I tak w tym ciągu $1, a^{\frac{1}{2}}, a, a^{\frac{3}{2}}, a^2$, i t. d. ieżeli $a=2$, tedy on zaméni ſię w naſtępuiący: $1, \sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}, 8$, i t. d. ieżeli zaś a, wáży iedno co $\sqrt{2}$,

a zatém

a zatém $aa=2$; tedy wſzyſtkié w tym ciągu wykładniki ſą cálkowité: co na oko ſię pokáże, ułożywſzy dwa naſtępuiącé ciągi:

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, i t. d.
i 1, 4, 16, 64, 256, i t. d.

Jeżeli w drugim tym ciągu, uwáżać będziémy liczbę 4, iak wyráz piérwſzy po 1, a zatém liczby 1, 4, 16, 64, 256, i t. d. iako maiącé wykładniki 0, 1, 2, 3, 4, i t. d. tedy pośrzednié wyrazy 2, 8, 32, 128, i t. d. będą miały za wykładników ilości ułómkowé $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$, i t. d. Té zaś ſamé wyrazy mieć będą za wykładników ilości cálkowité 1, 3, 5, 7, i t. d. gdy uwáżać będziémy liczbę 2 za piérwſzy wyráz ciągu po 1.

239. Wſzyſtkié przerábiania dziáłáń czynionych w wyrazach z wykładnikami cálkowitémi, na dziáłania daleko prościéyſzé, maiącé bydź czynioné z wykładnikami tychże wyrazów, té, mówię, przerábiania maią mieyſcé i w wyrazach z wykładnikami ułómkowémi.

Przykł: Niech będzie $a^{\frac{m}{n}}$ wyráz iakikolwiek ciągu, z wykładnikami ułómkowémi, kwadrát tego wyrazu będzie

$$a^{\frac{2m}{n}}; \text{ albo } \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^2 = \sqrt[n]{a^{2m}}.$$

Jakoż niech będzie $\sqrt[n]{a^m}=z$.
Więc podnióſſzy do mnogości n, obiedwie ſtrony, będzie
$$a^m=z^n.$$
A zkwadrowawſzy obiedwie ſtrony, będzie
$$a^{2m}=z^{2n}=z^n\times z^n, \text{ toieſt } zz, \text{ wzięté razy } n=(zz)^n.$$
Więc wyciągnąwſzy piérwiáſt: $n$ty z obu ſtrón, będzie

$$\sqrt[n]{a^{2m}}=zz; \text{ albo } a^{\frac{2m}{n}}=zz.$$

A że $\sqrt[n]{a^m}=z$, a zaś $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^2=zz$.

Więc; $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^2=a^{\frac{2m}{n}}$.

Toż ſamo rozumowanié przyſtóſować można i do innéy iakiéykolwiek ilości z wykładnikiém ułómkowym, którąby trzeba wynieść do ſmnogości iakiéykolwiek całkowitéy. I tak: $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p = a^{\frac{pm}{n}}$.

240. Aby zaś wyciągnąć piérwiáſtek iaki, *np.* kwadratowy, z wyrazu iakiégo, maiącégo wykładnika ułómkowégo; trzeba podzielić licznika w tym wykładniku przez 2, albo rozmnożyć mianownika iego przez 2. I tak $\sqrt{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)} = a^{\frac{m}{2n}}$. Jakoż ponieważ ilość $\frac{m}{n}$, ieſt podwóyna tego wyrazu $\frac{m}{2n}$ więc $a^{\frac{m}{n}}$, będzie kwadratém z $a^{\frac{m}{2n}}$, podług tego, co ſię wyżéy powiedziało: a wzaiémnie $a^{\frac{m}{2n}}$, będzie piérwiáſtkiém kwadratowym z $a^{\frac{m}{n}}$. Można to przyſtóſować i do innégo iakiégokolwiek piérwiáſtku, tak dalece, że $a^{\frac{m}{pn}}$, będzie piérwiáſtkiém *p*tym ilości $a^{\frac{m}{n}}$.

241. Stąd ſię w ſzczególności wnoſi, iż wielkość ilości maiącéy wykładnika ułómkowégo przez to ſię nie odmiéni, gdy tak licznika, iako i mianownika, tego wykładnika rozmnożymy przez ténże ſám wyráz. I tak *np.* podwoiwſzy licznika w wykładniku, oznaczymy przez to, że ilość całá podnieſioná ieſt do kwadratu, a podwoiwſzy znowu mianownika, oznaczymy, że bierzémy piérwiáſtek tegoż kwadratu. Więc po tém dwoiakiém działaniu ilość zoſtanie ta ſama, iaka była przed tém działaniém. A w ogólności: $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{pm}{pn}}$

242. Idzie także zatém, że z wykładnikámi ułómkowémi ilości iakich można czynić też ſamé działania, któréśmy czynili w Arytmetyce z ułómkami zwyczaynémi: a w ſzczególności można przywiéśdź té wykładniki ułómkowé do iednakowégo mianownika.

I tak ilości $a^{\frac{m}{n}}$, $a^{\frac{p}{q}}$, przywiedzioné do iednakowégo mianownika, wezmą tén kſztáłt $a^{\frac{mq}{nq}}$, $a^{\frac{np}{nq}}$. Piérwſzá z tych ilości ieſt piérwiáſtkiém *nq*tym ilości a^{mq}; drugá ieſt piérwiáſtkiém *nq*ty ilości a^{np}.

243.

243. Stąd ieſzcze wynika, iż aby rozmnożyć iednę przez drugą dwie ilości. z wykładnikami ułómkowémi, których podſtawa czyli ilość maiącá té wykładniki ieſt iednakową, trzeba dádź téy podſtawie za wykładnika ſummę tamtych wykładników. I tak $a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}} = a^{\frac{mq+np}{nq}}$.

Jakoż $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mq}{nq}}$.

A zaś, $a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{np}{nq}}$.

Więc, $a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \times \sqrt[nq]{a^{np}}$.

Niech będzie $\sqrt[nq]{a^{mq}} \times \sqrt[nq]{a^{np}} = z = a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}}$.

Więc podnióſſzy obie ſtrony do mnogości $nq^{téy}$ (co ſię ſtanie, gdy każdégo czynnika piérwſzéy ſtrony, podnieſiémy do téyże mnogości) będzie $a^{mq} \times a^{np} = z^{nq}$. albo, $a^{mq+np} = z^{nq}$.

A wyciągnąwſzy z obu ſtrón, piérwiáſtek mnogości nq, będzie $\sqrt[nq]{(a^{mq+np})} = z$, albo, $a^{\frac{mq+np}{nq}} = z$.

Że zaś $z = a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}}$; więc $a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{mq}{nq} + \frac{np}{nq}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}$.

Ténżé ſám ſpoſób poſtępowania, i toż rozumowanié przyſtóſować można z równą łatwością i do wykładników ułómkowych uiémnych.

244. Stoſunek, który zachodzi między piérwſzym wyrażém ciągu Jeometrycznégo, i którymkolwiek wyrazém tegoż ciągu uważać można iak złożony z ſtoſunków piérwſzégo wyrazu do drugiégo, drugiégo do trzeciégo, trzeciégo do czwártégo, i t. d. aż do ſtoſunku wyrazu przed tym, o który idzie, znayduiącégo ſię, do tegoż ſamégo wyrazu. A że w ciągu Jeometrycznym wſzyſtkié té ſtoſunki powinny bydź równé, a liczba tych ſtoſunków oznaczoną ieſt przez wykładnika oſtatniégo wyrazu; więc wykładnika

wyrazu każdégo w ciągu Jeometrycznym, uważać można iako oznáczaiącégo liczbę ſtoſunków równych, z których ſię ſkłádá ſtoſunek piérwſzégo wyrazu ciągu Jeometrycznégo, do tego oſtatniégo wyrazu.

Pod tymto oſtatnim względém uważać ſię zwykły w wyżſzéy matematyce wykładniki wyrazów w ciągu Jeometrycznym; i wtedy té wyrazy nazywaią ſię Logarytmami: gdyż ſą nieiaką miarą ſtoſunków, toieſt, oznáczaią liczbę ſtoſunków, z których ſię ſkłádá tén w ſzczególności ſtoſunek, około którégo czynimy działania, tak prawie, iak łuki kół, ſłużą za miarę kątów. Uważaiąc poprzednika wſzyſtkich ſtoſunków, z którémi przypádá nám mieć do czyniénia, iakoby ténże ſám był wſzędzie, ſkrócono wyrażénié w tén ſpoſób, i nazwano miarą ſtoſunków, Logarytmy naſtępników tychże ſtoſunków, opuściwſzy ich piérwſzé znaczénié, (§. 301. Części I. Jeom:)

245. Którymkolwiek z tych dwóch ſpoſobów uważać będziémy Logarytmy; zawſze wnieść można, że ténże ſám ſtoſunek, albo taż ſama liczba, má różné Logarytmy, podług różnégo ſtoſunku, który wzięliśmy za podſtawę, czyli podług różnéy liczby, którą wzięliśmy za drugi wyráz ciągu. I tak uważaiąc ſtoſunek 1, do 2, iak ſtoſunek iednoſtayny dwóch wyrazów ciągu; ſtoſunek 1 do 64, ſkłádać ſię będzie z 6 ſtoſunków równych ſtoſunkowi 1 do 2: a zatém Logarytm ſtoſunku 1 do 64, czyli Logarytm liczby 64, będzie 6. Gdyby zaś ſtoſunek iednoſtayny był 1, do 4; tedy ſtoſunek 1, do 64, ſkłádáłby ſię tylko ze trzech takowych ſtoſunków: a zatém w takowém braniu ſtoſunku iednoſtaynégo, Logarytm ſtoſunku 1, do 64, czyli liczby 64, byłby 3.

W piérwſzym razie, Logarytm liczby *np.* 64, ieſt podwóynym Logarytmu téyże liczby w drugim razie. Tożby było i względém iakiéykolwiek innéy liczby: zawſze iéy Logarytm w piérwſzém wzięciu, byłby podwóynym Logarytmu, w drugiém wzięciu.

Jakoż niech w piérwſzém wzięciu będzie $2^m = a$.
A niech w drugiém wzięciu będzie . . . $4^n = a$.
Póydzie zatém, że $m = 2n$; toieſt, że m, ieſt ilość podwóyná ilości n. Bo ponieważ tak 2^m, iak i 4^n, równá ſię téyże ſaméy ilości a; więc $2^m = 4^n$. A że $4^n = 2^n \times 2^n = 2^{2n}$; więc $2^m = 2^{2n}$: a zatém $m = 2n$.

Gdyby drugi wyráz drugiégo ciągu był 8, a zatém ſtoſunek iednoſtayny tego drugiégo ciągu, albo ſtoſunek piérwiáſtkowy, był 1 do 8; tedy wykłakładnik każdégo wyrazu w piérwszym ciągu, byłby potróynym wykładnika odpowiédaiącégo sobie, w drugim tym ciągu: a zatém ułożywszy tablicę Logarytmów podług piérwszégo ciągu, i wziąwszy potém połowy, albo trzecié części tych Logarytmów; té połowy, albo trzecié części będą Logarytmami wyrazów piérwszym odpowiedaiących w drugim ciągu, gdzie za drugi wyráz wzięliśmy 4, albo 8. A wzaiémnie ułożywszy Táblicę Logarytmów podług iednégo z tych dwóch ostatnich ciągów; té samé Logarytmy podwóyné lub potróyné, będą Logarytmami wyrazów odpowiedaiących w piérwszym ciągu.

246. *Układ* (systema) Logarytmów zawisł od stosunku piérwiástkowégo, z którégo uważámy iakoby złożoné inné stosunki: czyli zawisł od wyrazu wziętégo za drugi w ciągu Jeometrycznym. Tén wyráz nazywá się *podstawą* układu Jeometrycznégo: który to wyráz má 1 za Logarytm. Wykładnik zaś mnogości, do któréy wyniéść trzeba tę podstawę, aby otrzymać liczbę daną, iest Logarytmém téy liczby.

247. W Táblicach zwyczaynych wzięto liczbę 10, za drugi wyráz ciągu, toiest, za podstawę, któréy Logarytmém iest 1. W takiém wzięciu, Logarytmy liczb 100, 1000, 10000, i t. d. któré to Logarytmy są podwóynémi, potróynemi poczwórnémi, i t. d. względém Logarytmu liczby 10, będą 2, 3, 4, i t. d. Logarytmy liczb pośrzednich, między 1, i 10, są przydayné, ale mnieysze od 1, a zatém są właściwémi ułómkami. I tak Logarytmy liczb 2, 3, 4, 5, i t. d. są 0, 3010300, 0, 4771213, 0, 6020600; 0, 6989700. i t. d.

Logarytmy liczb pośrzednich, między 10, i 100, są pośrzedniémi, między 1, i 2, i znak ich całkowity, czyli cécha iest 1, po któréy idą znaki dziesiątné, któré tu nazywámy *przydatkowémi*, (wŁacińskich Xiążkach nazywaią ié *mantissa*). *Obácz w Trygonométryi, o Logarytmach, na karcié 313, §. 301 i następ:)*

Gdybyśmy chcieli uważać Logarytmy iak liczby zupełnie cálkowité; tedyby uważać trzeba stosunek 1, do 10, iako skłádaiący się z 10000000 stosunków równych między sobą, a w takim razie stosunek 1 do 2, skłádálby się z 3010300 takichże stosunków; stosunek 1 do 3, skłádálby się z 4771213 takich także stosunków; stosunek 1 do 4, skłádálby z 6020600 równych piérwszym stosunków i t. d. Albo téż trzebaby uważać liczbę 10, iako 10000000wą mnogość pewnéy iakiéy liczby; a w takowém uważaniu liczby 2, 3, 4, 5,

i t. d.

i t. d. byłyby 3010300ą, 4771213ą, 6020600ą, 6989700ą i t. d. mnogością téyże liczby.

Aby przywiéśdź układ Táblicżny Logarytmów do układu, w którymby liczba 2, była podstawą; trzebaby podzielić wszystkié Logarytmy Táblicowé przez Logarytm táblicowy liczby 2, toiest przez 0, 3010300, albo ié rozmnożyć przez 3, 321928. A w ogólności, aby przywiéśdź Logarytmy táblicżné do układu Logarytmów, maiącégo za podstawę liczbę iakąkolwiek; trzeba ié podzielić przez Logarytm tabliczny téyże liczby.

Podzieliwszy Logarytmy táblicżné przez liczbę 2, 302585, będziémy mieli Logarytmy nazwané Hyperbolicznémi, których wielkié iest używanié w wyższéy Matematyce, a których podstawą iest 2, 71828183.

Co się tycze przystósowania rachunku przez Logarytmy do mnożénia, dzielénia, reguły trzech, wyciągania piérwiástków kwadr: i t. d. *Obácz Część I. Jeom: §. 304 i nast:*

248. *Zadanié* 1. *Pewná osoba maiąca 10000 Cz: Zł: bierze z nich 5% procéntu, nie prostégo, ale skłáddnégo: toiest procént wzięty każdégo roku łącząc z kapitałém i wráz z nim daiąc go znowu na podobny procént 5% na rok każdy następuiący: Iléż ta osoba ze wszystkiém będzie miała za lát 10?*

Możnáby tén rachunek odprawić dodaiąc do kapitáłu procént, na końcu 1go roku, i szukaiąc procéntu od téy summy na końcu 2go roku, a tén znowu procént 2go roku dodáwszy do summy na końcu 1go roku zebranéy, szukaiąc procéntu, który od téy nowéy summy przypadnie, na końcu 3go roku, i t. d. Ale taki rachunek byłby bardzo długi, gdyby liczba lat miała bydź znaczná: możná zaś prędko go zakończyć używszy Logarytmów.

Na końcu 1go roku kapitał powiększy się $\frac{1}{20}$ częścią siebie samégo; toiest stanie się $\frac{21}{20}$ siebie samégo.

Na końcu 2go roku, tén kapitáł będzie $\frac{21}{20}$ częścią tego, czém był na początku 2go roku, toiest będzie $\frac{21}{20}$ z $\frac{21}{20}$; albo $(\frac{21}{20})^2$ tego czém był z samégo początku.

Podobnym sposobém tén kapitáł na końcu 3go roku będzie $\frac{21}{20}$ z $(\frac{21}{20})^2$ siebie samégo, albo $(\frac{21}{20})^3$ siebie samégo.

Ténże kapitáł na końcu 4go, 5go . . . 10go roku będzie $(\frac{21}{20})^4$ . . . . $(\frac{21}{20})^5$ . . . . $(\frac{21}{20})^{10}$ piérwszéy swoiéy wáżności

Więc na końcu 10 lát, tén kapitáł będzie $10000 \times (\frac{21}{20})^{10}$.

$$\text{Log.} \; . \; . \; . \; \tfrac{21}{20} = 0,\ 0211893.$$
$$\text{Log.} \; . \; . \; . \; (\tfrac{21}{20})^{10} = 0,\ 2118930.$$
$$\text{Log.} \; . \; . \; . \; 10000 = 4,\ 0000000.$$
$$\text{Log.}\ 10000 \times (\tfrac{21}{20})^{10} = 4,\ 2118930. = \text{Log.}\ 16289.$$

Więc za 10 lát ta osoba mieć będzie 16289 Cz: Zł.

Gdyby tén kapitał dany był na procént prosty, tak dalece, aby procénta każdégo roku, nie przynosiły nowych procéntów na lata następuiącé; tedy, ponieważ procént roczny iest 500 Cz: Zł: więc procént za 10 lát, byłby 5000 Cz: Zł: a zatém summa za 10 lát urosłaby tylko do 15000 Cz: Zł: toiest, mniéy 1289 Cz: Zł.

Insźé przykłady. Pewná osoba maiącá 12000 Cz: Zł. bierze z nich 6% procéntu składanégo. Iléż zbierze wráz z kapitałém za lát 15. I iléby znowu miała za téż lát 15, gdyby zamiást tego, co bierze procént roczny po 6%, brała go co 6 miesięcy po 3%.

Pewny kupiec powiększá co rok swóy maiątek $\frac{1}{4}$ częścią; iléż będzie miáł ze wszystkiém za lát 10?

249. *Zadanié 2. Pewná okolica, którá w sobie zamykała tylko 10000 dusz w lát 12, powiększyła się do 15000 dusz; iakiéż było powiększanié się tychże dusz?*

Niech będzie stosunek ludności na początku iednégo roku, do iéy powiększania się przez tén rok, iak 10000 do x. W taki sposób na końcu każdégo roku, ludność będzie $\frac{10000+x}{10000}$ téy ludności, którá była na początku tego roku a na końcu 12 lát będzie ta ludność $\left(\frac{10000+x}{10000}\right)^{12}$ téy ludności, którá była przed témi 12 laty. Wypadnie zatém następuiącé równanié.

$$\left(\frac{10000+x}{10000}\right)^{12} \times 10000 = 15000.$$

Wziąwszy Logarytmy obu strón.

$$12\ \text{Log.}\ \frac{10000+x}{10000} + \text{Log.}\ 10000 = \text{Log:}\ 15000.$$

Więc

$$\text{Więc Log: } \frac{10000+x}{10000} = \text{Log. } \frac{15000 - \text{Log: } 10000}{12}.$$

$$\text{A że Log: } \frac{10000+x}{10000} = \text{Log: } (10000+x) - \text{Log: } 10000.$$

$$\text{Więc Log: } (10000+x) - \text{Log: } 10000 = \frac{\text{Log. } 15000 - \text{Log: } 10000.}{12}$$

$$\text{A Log: } (10000+x) = \frac{\text{Log: } 15000 - \text{Log: } 10000}{12} + \text{Log: } 10000$$

$$\text{Że zaś Log: } 15000 - \text{Log: } 10000 = 0,\ 1760913.$$

$$\text{A zatém } \frac{\text{Log: } 15000 - \text{Log: } 10000}{12} = 0,\ 0146743.$$

a dodawſzy 4, toieſt

Log: 10000, będzie . . . . . . 4, 0146743.

Więc, Log: $(10000+x) = 4,\ 0146743 =$ Log: 10344.

a zatém, $10000 + x = 10344.$

$x = 344.$

Więc powiękſzénié roczné ludności, ieſt między 3, i 4 od ſta.

Inſzé przykłady. Pewny kráy, którégo ludność nie ieſt w mierze obſzérności iego, zawiérá w ſobie duſz 8000000, iakiżby powinién bydź ſtoſunek téy ludności do rocznégo iéy powiękſzénia ſię, aby po ſkończonym wieku iednym kráy tén zawiérał w ſobie 12000000.

Pewná oſoba chciałaby w lát 18 podwoić ſwóy maiątek 10000 Cz: Zł: dając go na procént ſkłádany. Jakiż má bydź tén procént?

250. *Zadanié 3. Winiénem komu 10000 Cz: Zł: które obowiązałém ſię za lát 6 wypłacić. Iléżby mi terâz zaráz wypłacić należało dlá pozbycia ſię tego długu, rachuiąc procént po 6$\frac{0}{0}$?*

Gdy dziś winién ieſtém ſummę iaką rachuiąc procént po 6$\frac{0}{0}$, iedno to ieſt, iak gdybym był winién $(\frac{106}{100})^6$ téy ſummy, które $(\frac{106}{100})^6$ miáłbym wypłacić dopiéro za 6 lát bez procéntu; albo, co na iedno wychodzi, gdy dziś winién ieſtém *np.* 100^6 Cz: Zł. iedno to ieſt, iak gdybym był winién 106^6 Cz: Zł: za lát 6. I wzaiémnie ieżeli winién ieſtem 106^6 Cz: Zł: które mám za 6 lát wy-

wypłacić, iedno to ieſt, iak gdybym dziś zaráz obowiązanym był wypłacić 100^6 Cz: Zł: azatém ſumma ſzukaná, ieſt czwártym wyrazém proporcyi, któréy trzema piérwſzémi wyrazami ſą liczby 106^6, 100^6, i 10000. Wyrażénié zaś téy ſummy będzie naſtępuiącé: $10000 \times (\frac{100}{106})^6$.

Log: $\frac{100}{106} = -1, + 9746941$.

6 Log: $(\frac{100}{106})$, albo Log: $(\frac{100}{106})^6 = -1, + 8481646$.

Log: $10000 = \quad 4$.

Summa . . . . . . 3, 8481646 = Log: 7050 Cz: Zł: blizko. Ważność długu któréy ſzukałém.

Dlá ſpráwdzénia tego, ſzukáymy ważności po 6 latach ſkończonych ſummy 7050 Cz: Zł: któréby teráz zaráz wypłacić należało. Ważność ta będzie $7050 \times (\frac{106}{100})^6$: uczyniwſzy zaś rachunek iak wyżéy, znaydziémy tę ważność, ledwie pół Cz: Zł: różniącą ſię od 10000 Cz: Zł:

Inſzé przykłady. Jakáż ieſt teraźniéyſzá ważność Cz: Zł: 12000, któré dopiéro za lát 10 maią bydź wypłaconé, rachuiąc procént po 5%.

I znowu. Jakáż ieſt ważność teráźnieyſzá 18000 Cz: Zł: któré dopiéro za lát 20 maią bydź wypłaconé rachuiąc procént po 5%?

251. *Zadanié 4. Pewná oſoba má 10000 Cz: Zł: z których bierze procént ſkłádany po 5%. Za iléż lát maiątek téy oſoby będzie podwoionym?*

Niech liczba lát ſzukaná będzie x: ważność kapitału 10000 Cz: Zł: na końcu lát x, będzie $10000 \times (\frac{21}{20})^x$.

Warunek. $10000 \times (\frac{21}{20})^x = 20000$.

Przerábianié. (Podzieliw: obie ſtrony przez 10000) $(\frac{21}{20})^x = 2$.

(Wziąwſzy Log: obu ſtrón) x Log: $\frac{21}{20} =$ Log: 2.

albo $x \times 0, 0211893 = 0, 3010300$.

Więc $x = \frac{3010300}{211893} = 14$ lát, i prawie 2 mieſiącóm.

Więc na końcu 14 lát, kapitál uróſł do $10000 \times (\frac{21}{20})^{14}$ Czerw: Zł: = 19800 Cz: Zł: blizko. Na końcu 15 lát uróſł blizko do 20790 Cz: Zł: A zatém kapitál tén podwoiony był na końcu trochę więcéy niż cztérnáſtu lát.

Inſzé przykłady. Za iléż lát pewná ſumma daná na procént ſkłádany 6% powiękſzoná będzie $\frac{1}{7}$ częścią iéy ſaméy?

Za iléż lát pewná ſumma daná na procént ſkłádany 6% będzie potroioná?

252. *Zadanié 5. Pewná oſoba dała 12000 Zł: na procént ſkłádany 5%, a 10000 Zł: na procént ſkłádany 6%. Za iléż lát dwa té kapitáły, wzięté wráz z procéntami ſwémi zrownaią ſię z ſobą?*

Ważność 1go kapitału na końcu téy liczby lát będzie $12000 \times (\frac{105}{100})^x$
. . . . . 2go . . . . $10000 \times (\frac{106}{100})^x$

Warunek. $12000 \times (\frac{105}{100})^x = 10000 \times (\frac{106}{100})^x$.

Przerąb: Podziel: obie ſtrony przez 2000) $6 \times (\frac{105}{100})^x = 5 \times (\frac{106}{100})^x$.
(Rozmn: obie ſtrony przez 100^x) $6 \times 105^x = 5 \times 106^x$.
(Wziąwſzy Logarytm obu ſtrón)
Log: 6+x Log: 105 = Log: 5+x Log: 106.
(Odiąwſzy Logarytm 5 po obu ſtronach)
Log: 6 — Log: 5+x Log: 105 = x Log: 106.
(Odiąwſzy x Logarytm 105 po obu ſtronach)
Log: 6 — Log: 5 = x Log: 106 — x Log: 105.
(Podzieliwſzy obie ſtrony przez Log: 106 — Log: 105)

$$\frac{\text{Log: } 6 - \text{Log: } 5}{\text{Log: } 106 - \text{Log: } 105} = x.$$

Rozw: $x = \frac{\text{Log: } 6 - \text{Log: } 5}{\text{Log: } 106 - \text{Log: } 105} = \frac{0,0791813}{0,0041166} = \frac{791813}{41163} =$
19 lát i trochę mniéy, niż 3 mieſiące.

Na końcu 19 lát 1wſzy kapitał będzie $12000 \times (\frac{105}{100})^{19} = 30324$ blizko.
. . . . . . 2gi . . . . . $10000 \times (\frac{106}{100})^{19} = 30255$ blizko.

Dodáwſzy do każdéy z tych dwóch ſumm, czwártą część ich procéntów roku całego, będzie 1wſzá ſumma 30703: a drugá 30708: które to ſummy różnią ſię tylko od ſiebie 5 Cz: Zł: ta zaś różnica względém ſummy całéy większéy niż 30000, nie ieſt nawet $\frac{1}{6000}$ częścią onéyże.

Inſzé przykłady. Pewná oſoba daie 15000 Zł: na procént ſkłádany 7$\frac{0}{0}$, a 20000 Zł: na procént także ſkłádany 5$\frac{0}{0}$. Za ileż lát té dwa kapitały wzięté wráz z procéntami ſwémi, zrównaią ſię?

Niech znowu będą dwie ſummy 24000, i 18000 Zł: procént od 1wſzéy 6$\frac{0}{0}$, od 2giéy 8$\frac{0}{0}$. Za ileż lát 1wſzy kapitał przewyżſzać będzie tylko $\frac{1}{5}$ częścią drugi kapitał?

253. *Zadanié 6. Pewná oſoba daie 5600 Zł. na ſkłádany procént 6$\frac{0}{0}$; ale tak, że procént tén, má iéy przypádać co 6 mieſięcy po 3$\frac{0}{0}$, i znowu daie 6000 Zł: na takiż procént po 6$\frac{0}{0}$; tén zaś drugi procént má iéy rocznie przypádać. Za ileż lát té dwa kapitały, wzięté wráz z procéntami ſwémi zrównaią ſię?*

Niech

Niech będzie liczba ſzukaná lát . . . . . x.
Ważność 1go kapitáłu na końcu lát x, będzie . . $5600 \times (\frac{103}{100})^{2x}$.
. . . 2go . . . . $6000 \times (\frac{106}{100})^{x}$.

Warunek. $5600 \times (\frac{103}{100})^{2x} = 6000 \times (\frac{106}{100})^{x}$.

Przerab: (Podziel: obie ſtrony przez 400) $14 \times (\frac{103}{100})^{2x} = 15 (\frac{106}{100})^{x}$.
(Wziąwſzy Logarytm obu ſtron)
$\text{Log: } 14 + 2x \text{ Log: } \frac{103}{100} = \text{Log: } 15 + x \text{ Log: } \frac{106}{100}$.
(Odiąwſzy po obu ſtronach Log: 14 i x Log: $\frac{106}{100}$)
$2x \text{ Log: } \frac{103}{100} - x \text{ Log: } \frac{106}{100} = \text{Log: } 15 - \text{Log: } 14$.
albo $x(2 \text{ Log: } \frac{103}{100} - \text{Log: } \frac{106}{100}) = \text{Log: } 15 - \text{Log: } 14$.
(Wziąwſzy w ſamey rzeczy te Logarytmy)
$x(2 \times 0,\ 0128372 - 0,\ 0253059) = 0,\ 0299633$.
albo $x(0,\ 0003665) = 0,\ 0299633$.

Rozwiązanie. $x = \frac{299633}{3665}$ = trochę mniéy niż 82 lát.

Inſzy przykład prawie podobny piérwſzému.

Pewná oſoba dała 10000 Zł. na procént ſkładany $8\frac{0}{0}$, rachuiąc procénta co 6 mieſięcy; za iléż lát cały maiątek téy oſoby będzie większy $\frac{1}{20}$ częścią, niż gdyby ta oſoba też ſamę ſummę dała była, na ténże ſám procént $8\frac{0}{0}$, wymáwiaiąc go ſobie dopiéro po każdym roku ſkończonym.

254\. Można znaléźć ſummę ciągu Jeometrycznégo bez dodáwania naſtępnégo wyrazów tego ciągu.

I tak niech będzie ciąg Jeometryczny podwóyny.

$1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4,\ 2^5,\ 2^6,\ 2^7\ \ldots\ 2^{n-1}$.

Podwoiwſzy każdy wyráz będzie . . . $2,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4,\ 2^5,\ 2^6,\ 2^7\ \ldots\ 2^n$.

Ponieważ wſzyſtkie wyrazy drugiégo ciągu, ſą podwóynémi wyrazów piérwſzégo ciągu; więc różnicą tych dwóch ciągów będzie ſámże ciąg 1wſzy. A że téż różnica tych dwóch ciągów ieſt $2^n - 1$, bo wſzyſtkié wyrazy drugiégo ciągu oprócz 2^n, ſą i w piérwſzym ciągu, a w drugim ciągu nié maſz znowu wyrazu 1, który ieſt w piérwſzym ciągu; więc aby znaléźć ſummę liczby n, wyrazów ciągu Jeometrycznégo, podwóynégo, zaczynaiącégo ſię od 1; *trzeba odiąć tę iedność od oſtatniégo wyrazu podwoionégo, czyli od wyrazu, któryby naſtępowáł po oſtatnim.*

Niech będzie $s = 1+2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6+2^7+ \,.\,.\, 2^{n-1}.$

Podwoiwſzy każdy wyráz, będzie $2s = \quad 2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6+2^7+ \,.\,.\, 2^n.$

Od ſtrón 2go rówwnania, odiąwſzy ſtrony 1go równania, będzie $1s = -1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; + 2^n.$

albo . . . . $s = 2^n - 1.$

Przykł: Koń má 8 gwożdzi, u każdéy podkowy, a zatém u 4 podków má 32 gwożdzi. Iléżby przypadło dadź za tégo konia, gdyby kto chciáł go przedadź pod tym warunkiém, aby mu za 1wſzy gwóźdź dano groſz 1, za 2gi groſzy 2, za 3ci gr: 4, za 4ty gr. 8, i t. d. dwoiąc zawſze cenę każdégo gwożdźia naſtępnégo.

Cena tego konia ieſt $2^{32}-1$, gr. podług tego, co ſię dopiéro powiédziało,

$2^2 = 4.$
$2^4 = 16.$
$2^8 = 256.$
$2^{16} = 65536.$
$2^{32} = 4294967296.$
$2^{32}-1 = 4294967295$ groſzy.

Podzieliwſzy tę oſtatnią liczbę przez 540, toieſt przez ważność czerwonégo złotégo w groſzach, byłaby cena konia 7953643 Czł: Zł: i gr: 75, albo Zł: 2, gr: 15.

255. Niech znowu będzie $s = 1+3+3^2+3^3+3^4+3^5+3^6+3^7+3^8+\ldots 3^{n-1}.$

Potroiwſzy każdy wyráz będzie . . . . $3s = \quad 3+3^2+3^3+3^4+3^5+3^6+3^7+3^8+\ldots 3^n.$

Od ſtrón 2go równania, odiąwſzy ſtrony 1go równania będzie $2s = -1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; +3^n = 3^n - 1.$

Podzieliwſzy obie ſtrony przez 2; będzie . . . . . $s = \dfrac{3^n - 1.}{2}$ — Trzeba więc od wyrazu tego, któryby naſtępowáł po oſtatnim, odiąć 1, i téy reſzty wziąźć połowę.

256 Niech będzie $ſ = 1+4+4^2+4^3+4^4+4^5+4^6+4^7+\ldots 4^{n-1}$.
Poczwórzywſzy każdy wyráz będzie . . $4ſ = \quad 4+4^2+4^3+4^4+4^5+4^6+4^7+\ldots 4^n$.
Odiąwſzy tak iak wyżéy będzie . . . . $3ſ = -1 \quad \ldots\ldots \quad +4^n = 4^n - 1$.
Podzieliwſzy obie ſtrony przez 3 będzie $ſ = \dfrac{4^n - 1}{3}$. *Trzeba więc od wyrazu tego, któryby naſtępowáł po oſtatnim, odiąć 1, i reſzty wziąść 3cią część.*

Ogólnie. Niech będzie $ſ = 1+p+p^2+p^3+p^4+p^5+p^6+p^7+\ldots p^{n-1}$.
Rozmn: każdy wyráz przez p, będzie . . $pſ = \quad p+p^2+p^3+p^4+p^5+p^6+p^7+\ldots p^n$.
Odiąwſzy tak iak wyżéy, będzie . . . $pſ - ſ = -1 \quad \ldots\ldots \quad +p^n = p^n - 1$.
albo $ſ(p-1) = p^n - 1$.
Podzieliwſzy obie ſtrony przez $p-1$ . . . $ſ = \dfrac{p^n - 1}{p-1}$.

Toieſt: *trzeba od wyrazu, któryby naſtępowáł po oſtatnim odiąć 1, i reſztę podzielić przez różnicę piérwſzych dwóch wyrazów.*

257. Jeżeli ciąg Jeometryczny nie zaczyná ſię od iednégo; tedy wſzelako możná go przywiéſdź do takiégo ciągu, któryby za 1wſzy wyráz miáł 1.

I tak niech będzie ciąg Jeometryczny, którégo piérwſzym wyrazém ieſt a, drugim b; wykładnik tego ciągu ieſt $\frac{b}{a}$, a zatém ciąg tén możná w taki kſztáłt wyrazić:

$$a,\ a\times\frac{b}{a},\ a\times\frac{b^2}{a^2},\ a\times\frac{b^3}{a^3},\ a\times\frac{b^4}{a^4},\ a\times\frac{b^5}{a^5},\ a\times\frac{b^6}{a^6}+\ \ldots\ a\times\frac{b^{n-1}}{a^{n-1}}.$$

Więc ſumma tego ciągu ieſt:

$$a\left(1+\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}+\frac{b^3}{a^3}+\frac{b^4}{a^4}+\frac{b^5}{a^5}+\frac{b^6}{a^6}+\frac{b^7}{a^7}+\ldots\frac{b^{n-1}}{a^{n-1}}\right).$$

$$=a\left[\frac{\frac{b^n}{a^n}-1}{\frac{b}{a}-1}\right]=a\left(\frac{b^n-a^n}{a^n}:\frac{b-a}{a}\right)=a\left(\frac{b^n-a^n}{a^n}\times\frac{a}{b-a}\right)=$$

$$a \times \frac{(b^n - a^n)}{a^{n-1}(b-a)} = \frac{b^n - a^n}{a^{n-2}(b-a)}.$$ Uczyniwſzy $\frac{b}{a} = p$; będzie ta ſumma $= a \times \frac{p^n - 1}{p - 1}$.

258. W wyrażéniu tém $\frac{p^n - 1}{p - 1}$, ſummy ciągu Jeometrycznégo, który má 1 za piérwſzy wyráz, a którégo wykładnikiém ieſt p; ieżeli p, ieſt mnieyſzé od 1; tém bardziéy p^n mnieyſzé będzie od 1: a zatém tak licznik, iak i mianownik tego ułómku $\frac{p^n - 1}{p - 1}$ będą w takim razie uiémnémi. Rozmnożywſzy zaś każdégo z nich przez ilość -1, obadwa ſtaną ſię przydaynémi, i wyrażénié powyżſzé ſummy zamiéni ſię w to $\frac{1-p^n}{1-p} = \frac{1}{1-p} - \frac{p^n}{1-p}$ Co téż możnáby i bezśrzednie okázać w ſpoſób naſtępuiący:

259. Niech będzie ciągu Jeometrycznégo ſumma . $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \ldots \frac{1}{2^{n-1}}$.

Wziąwſzy połowę, będzie . . . . $\frac{1}{2}S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \ldots \frac{1}{2^n}$

Odiąwſzy ſtrony 2go równania od ſtrón 1go będzie $\frac{1}{2}S = 1 \ldots\ldots - \frac{1}{2^n}$

Podwóiwſzy obie ſtrony . . . . . . $S = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$. To oſtatnie wyrażénie zgádzá ſię z wyrażéniém ogólném $\frac{1}{1-p} - \frac{p^n}{1-p}$. Bo tu ieſt $p = \frac{1}{2}$. a zatém:

$$\frac{1}{1-p} - \frac{p^n}{1-p} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} - \frac{(\frac{1}{2})^n}{\frac{1}{2}} = 2 - 2 \times \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

W tym

W tym razie, *ieżeli od 2, odeymiémy ostatni wyráz ciągu, reszta będzie summą całégo ciągu.* Czego nawet dowiéśdź możná i przez rozumowanié.

Summie dwóch piérwszych wyrazów, brakuie $\frac{1}{2}$ do tego, aby czyniła 2: a zatém trzebaby, aby trzeci wyráz był $\frac{1}{2}$, toby dopiéro summa trzech wyrazów piérwszych była 2. A że tén trzeci wyráz iest tylko $\frac{1}{4}$, toiest połowa drugiégo wyrazu $\frac{1}{2}$; więc summie trzech wyrazów piérwszych, brakować będzie $\frac{1}{4}$ do tego, aby ta summa czyniła 2, toiest brakować iéy do tego będzie samégo trzeciégo wyrazu. Tak téż summie czterech piérwszych wyrazów, brakować będzie połowy z $\frac{1}{4}$, albo $\frac{1}{8}$, toiest brakować iéy będzie czwártégo wyrazu do tego, aby ta summa czyniła 2, i t. d.

A zatém summa ciągu maleiącégo 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, i t. d. tém bardziéy zbliżá się do 2; im większá iest liczba wyrazów tego ciągu, i możé do téy ważności 2, przybliżyć się bardziéy, niż iakákolwiek różnica naznaczoná, nigdy iednak téy ważności 2, nie przeniesie. I przeto gdy ciąg powyższy uważá się iakoby przedłużony był, nad wszelką liczbę wyrazów naznaczoną; tedy liczba 2, w takim razie nazywa się summą tego ciągu.

260. Niech znowu będzie ciąg Jeometryczny maleiący:

$$1, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{9}, \tfrac{1}{27}, \tfrac{1}{81}, \tfrac{1}{243}, \tfrac{1}{729} \;\ldots\; \frac{1}{3^{n-1}}.$$

Niech będzie $\int = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}+\frac{1}{729}+ \;\ldots\; \frac{1}{3^{n-1}}.$

Wziąwszy 3cią

część będzie . . . $\frac{1}{3}\int = \frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}+\frac{1}{729}+ \;\ldots\; \frac{1}{3^n}.$

Odiąwszy 2gié równa-

nié od 1wszégo będzie $\frac{2}{3}\int = 1 \;\ldots\ldots\ldots\; - \frac{1}{3^n}.$

Potroiwszy obie

strony . . . . $2\int = 3 - \frac{1}{3^{n-1}}.$

Podzie-

Podzieliwszy

przez 2; . . . $\int = \frac{3}{2} - \frac{1}{2 \times 3^{n-1}}$.

Toiest: *od $1\frac{1}{2}$, trzeba odiąć połowę ostatniégo wyrazu, a reszta będzie summą ciągu maiącégo liczbę n wyrazów, a zatém wyráz ułómkowy $1\frac{1}{2}$, iest granicą summy tego ciągu.* Co téż okázać można, i przez rozumowanié podobné tému, którégośmy użyli w ciągu poprzedzaiącym.

261. Niech ieszcze

będzie . . . . . $\int = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \frac{16}{81} + \frac{32}{243} + \frac{64}{729} + \ldots \frac{2^{n-1}}{3^{n-1}}$.

Wziąwszy $\frac{2}{3}$ obu

stron . . . . $\frac{2}{3}\int = \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \frac{16}{81} + \frac{32}{243} + \frac{64}{729} + \ldots \frac{2^n}{3^n}$.

Odiąwszy 2gié

równanié od 1wszégo $\frac{1}{3}\int = 1 \ldots\ldots\ldots - \frac{2^n}{3^n}$.

Rozmnożywszy

obie strony przez 3 . . $\int = 3 - \frac{2^n}{3^{n-1}} = 3 - 2 \times \frac{2^{n-1}}{3^{n-1}}$.

Toiest: *od 3, trzeba odiąć podwóyny wyráz nty, a tak znaleziona będzie summa liczby n wyrazów tego ciągu: a zatém liczba 3 iest tu granicą ciągu, która to liczba 3, iest summą ciągu całégo, gdy tén ciąg uważymy, iakoby przedłużony aż do liczby wyrazów, przewyższaiącéy wszelką liczbę naznaczoną.*

Ogólnie. Niech będzie ciąg maleiący:

$$1, \frac{1}{p}, \frac{1}{p^2}, \frac{1}{p^3}, \frac{1}{p^4}, \frac{1}{p^5}, \frac{1}{p^6}, \ldots \frac{1}{p^{n-1}}.$$

Niech będzie $\int = 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p^4} + \frac{1}{p^5} + \frac{1}{p^6} + \frac{1}{p^7} \ldots \frac{1}{p^{n-1}}$.

Rozmn: obie strony

przez $\frac{1}{p}$, będzie $\frac{1}{p}\int = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p^4} + \frac{1}{p^5} + \frac{1}{p^6} + \frac{1}{p^7} \ldots \frac{1}{p^n}$.

Odiąwszy

Odiąwſzy 2gié równanié od 1wſzégo . . $ſ\left(1-\frac{1}{p}\right)=1.$: . . $-\frac{1}{p^n}$.

$$\text{albo; } ſ\times\frac{p-1}{p}=1-\frac{1}{p^n}.$$

Podzieliwſzy obie ſtrony przez $\frac{p-1}{p}$, czyli rozmnożywſzy przez

$\frac{p}{p-1}$; $ſ=\frac{p}{p-1}-\frac{1}{p-1}\times\frac{1}{p^{n-1}}$.

Toieſt: *trzeba podzielić wykładnika ciągu przez tegoż wykładnika zmnieyſzonégo iednością, a od wielorazu tego odiąć oſtatni wyráz ciągu podzielony przez wykładnika zmnieyſzonégo iednością: reſzta będzie ſummą liczby* n, *wyrazów ciągu.* A zatém wyráz $\frac{p}{p-1}$, ieſt granicą ciągu, który to wyráz nazywá ſię wtedy ſummą ciągu, gdy liczba wyrazów przewyżſzá wſzelką liczbę naznaczoną.

262. Jeżeli licznik drugiégo wyrazu nie ieſt 1, tak dalece, że $\frac{1}{p}$

$=\frac{m}{n}$, albo $p=\frac{n}{m}$; wtedy $ſ=\frac{n}{m}:\frac{n}{m}-1=\frac{n}{m}:\frac{n-m}{m}=\frac{n}{n-m}$.

263. Nakoniec, ieżeli piérwſzym wyrazém ciągu nie ieſt 1, ale naprzykład a, i ieżeli drugi wyráz *np.* b, ieſt mnieyſzy od pierwſzégo; tedy i w takim razie można oznaczyć ciąg Jeometryczny maleiący, na wzór ciągów roſnących, w ſpoſób naſtępuiący:

$$a, a\times\frac{b}{a}, a\times\frac{b^2}{a^2}, a\times\frac{b^3}{a^3}, a\times\frac{b^4}{a^4}, a\times\frac{b^5}{a^5} \;.\;.\; a\times\frac{b^{n-1}}{a^{n-1}}.$$

$$\text{albo; } a\left(1+\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}+\frac{b^3}{a^3}+\frac{b^4}{a^4}+\frac{b^5}{a^5}\;.\;.\;.\;.\;\frac{b^{n-1}}{a^{n-1}}\right.$$

 Gra-

Granicą tego ciągu ieſt $a\left(\frac{a}{a-b}\right)$, albo $\frac{aa}{a-b}$.

264. *Zagadnienie 1. Maiąc dany drugi wyráz ciągu Jeometrycznego maleiącego, i iego granicę* (którą daléy nazywać będziémy ſummą) *znaléźć tén ciąg.*

Niech będzie $ſ$, ſumma daná, niech będzie b, wyráz drugi ciągu także dany.

Mianowanie. Piérwſzy wyráz ſzukany . . . x.

Summa ciągu będzie . . . . $\frac{xx}{x-b}$.

Warunek. $\frac{xx}{x-b} = ſ$.

Przeráb: (Rozmnożywſzy obie ſtrony przez $x-b$)

$$xx = ſx - bſ.$$

(Odiąwſzy $ſx$ po obu ſtronach) $xx - ſx = -bſ$.

(Dopełniwſzy kwadratu w piérwſzéy ſtronie)

$$xx - ſx + \tfrac{1}{4}ſſ = \tfrac{1}{4}ſſ - bſ = \frac{ſſ - 4bſ}{4}.$$

(Wyciągn: piérw: kwadratu z obu ſtrón)

$$x - \tfrac{1}{2}ſ = \frac{\pm\sqrt{(ſſ - 4bſ)}}{2}.$$

(Dodáwſzy $\tfrac{1}{2}ſ$ po obu ſtronach)

$$x = \frac{ſ \pm \sqrt{(ſſ - 4bſ)}}{2}.$$

Rozwiązanie. $x = \frac{ſ \pm \sqrt{(ſſ - 4bſ)}}{2}$,

$$xx = \frac{2ſſ - 4bſ \pm 2ſ\sqrt{(ſſ - 4bſ)}}{4} = \frac{ſſ - 2bſ \pm ſ\sqrt{(ſſ - 4bſ)}}{2}.$$

$$x - b = \frac{ſ - 2b \pm \sqrt{(ſſ - 4bſ)}}{2}.$$

$$\frac{xx}{x-b} = \frac{ss-2bs \pm s\sqrt{(ss-4bs)}}{2} : \frac{s-2b \pm \sqrt{(ss-4bs)}}{2} =$$

$$\frac{ss-2bs \pm s\sqrt{(ss-4bs)}}{s-2b \pm \sqrt{(ss-4bs)}} = s.$$

265. *Uwága* 1. Aby x, było ilością iſtotną, a zatém, aby Zagadnienié mogło ſię rozwiązać, trzeba do tego, aby $\sqrt{(ss-4bs)}$ był ilością iſtotną: przeto $(ss-4bs)$, powinno bydź ilością przydayną. Więc w poprzedzaiącém rozwiązaniu, náymnieyſzá wáżność ss, powinna bydź równá wáżności $4bs$, a zatém náymnieyſzá wáżnośc s, wtedy będzie, gdy ſię równá wáżności $4b$. W takim razie $x = \frac{1}{2}s = 2b$. Więc ciąg, ieſt wtedy ciągiém Jeometrycznym *półdwóynym* (Progreſſio ſubdupla) toieſt takim, gdzie każdy wyráz naſtępny, ieſt połową poprzedzaiącégo.

2. Poki s, ieſt większé niż $4b$, póty wáżności s, i b, odpowiédaią dwie wáżności x, czyli wáżności piérwſzégo wyrazu, tak dalecé, że dwa będą takié ciągi, których taż ſama będzie ſumma, i ténże ſám wyráz drugi.

Przykłád. Niech będzie $s = \frac{3}{2}$; $b = \frac{1}{3}$.

$$x = \frac{\frac{3}{2} \pm \sqrt{(\frac{9}{4}-2)}}{2} = \frac{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}}{2} = \frac{\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}}{2} = \begin{matrix}1\\ \frac{1}{2}.\end{matrix}$$

Dwa ciągi będą $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}, \frac{1}{729}$ i t. d.

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{4}{27}, \frac{8}{81}, \frac{16}{243}, \frac{32}{729}$ i t. d.

Summa 1go ciągu ieſt $\dfrac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$.

Summa 2go ciągu ieſt $\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = \frac{1}{4} : \frac{1}{6} = \frac{1}{4} \times 6 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.

Podobnie niech będzie $s = 1\frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{4}$.

$$x = \frac{1\frac{1}{3} \pm \sqrt{(\frac{16}{9}-\frac{4}{3})}}{2} = \frac{1\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9}}}{2} = \frac{1\frac{1}{3} \pm \frac{2}{3}}{2} = \begin{matrix}1\\ \frac{1}{3}.\end{matrix}$$

Dwą ciągi będą $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \frac{1}{256}$, i t. d.

$\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{16}, \frac{9}{64}, \frac{27}{256}$, i t d.

 Summa

$$\text{Summa 1go ieſt } \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = 1 : \tfrac{3}{4} = 1 \times \tfrac{4}{3} = 1\tfrac{1}{3}.$$

$$\text{Summa 2go ieſt } \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}} = \tfrac{1}{9} : (\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}) = \tfrac{1}{9} : \tfrac{1}{12} = \tfrac{1}{9} \times 12 = \tfrac{12}{9} = 1\tfrac{1}{3}.$$

3. Możná, ilé zechcémy, tylé znaléźć ciągów Jeometrycznych maleiących, którychby ſumma była iednakowá; ponieważ w oznaczéniu poprzedzaiących ważności 1go wyrazu doſyć będzie tym końcém odmiéniać co ráz ważność 2go wyrazu.

Wygodniéy iednak ieſt odmiéniać ważność 1go wyrazu, a potém wyprowadzić ſtąd ważność 2go wyrazu. Dlá czégo w równaniu tém $\frac{aa}{a-b} = ſ$, ſzukáymy ważności wyrazu drugiégo b, któryby był oznaczony w jlościach a, i $ſ$. Będzie naprzód: $aa = aſ - bſ$, a ſtąd, $b = \frac{aſ - aa}{ſ} = a - \frac{aa}{ſ}$.

Przykład. Niech będzie $ſ = 2$; $a = 1$; $b = \frac{1}{2}$.
$a = \frac{1}{2}$; $b = \frac{3}{8}$.
$a = \frac{1}{3}$; $b = \frac{5}{18}$.
$a = \frac{2}{3}$; $b = \frac{4}{9}$.
$a = \frac{3}{2}$; $b = \frac{3}{8}$.

4. Jeżeli weźmiémy a, większé niżeli $ſ$, tedy ilość $a - \frac{aa}{ſ}$, czyli b, toieſt wyráz drugi będzie uiémnym, i ciąg ſkłádać ſię będzie z wyrazów na przemiany przydaynych i uiémnych.

Przykł: $a = 3, ſ = 2, a - \frac{aa}{ſ} = 3 - \frac{9}{2} = \frac{6}{2} - \frac{9}{2} = -\frac{3}{2}$.

Ciąg: $3 - \frac{3}{2} + \frac{3}{4} - \frac{3}{8} + \frac{3}{16} - \frac{3}{32} + \frac{3}{64} - \frac{3}{128}$ i t. d.
$= 3(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} - \frac{1}{128}$ i t. d.)

Szereg tén $(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} - \frac{1}{128}$ i t. d.) ieſt różnicą dwóch naſtępuiących ſzeregów.

$(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots)$ i $(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{128} + \ldots)$.

Różnica

Różnica ta ieſt $(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots)-\frac{1}{2}(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots)$ $=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots)=\frac{1}{2}(1:\frac{3}{4})=\frac{2}{3}$. które to $\frac{2}{3}$, rozmnożywſzy przez 3, wypadnie 2, toieſt ſumma daná.

266. *Zagadniénié 2. Pewná oſoba, którá má ſummę* ſ, *powiękſzá ſwóy maiątek czwártą część corocznie, odłączywſzy na wydátki iednakową ſummę na początku każdégo roku: Jakáż powinna bydź ta ſumma, aby maiątek téy oſoby w lát 10, zoſtáł 5 razy tak wielki, iak był na początku?*

Gdyby ta oſoba nie wyłączała nic na wydátki z maiątku ſwégo; tedy na końcu lát 10, maiątek iéy byłby $(\frac{5}{4})^{10}ſ$.

Summa, którą zebrała na początku 1go roku, ſtałaby ſię na końcu 10 lát $(\frac{5}{4})^{10}$ téyże ſaméy ſummy.

Summa, którą zebrała na początku 2go roku, ſtałaby ſię za 9 lát $(\frac{5}{4})^{9}$ onéyże ſaméy.

Summa, którą zebrała na początku 3go roku, ſtałaby ſię za 8 lát $(\frac{5}{4})^{8}$ onéyże ſaméy.

I tak daléy, aż do ſummy, którą ta oſoba zebrała na początku 10tégo roku, którá to ſumma przez 1 rok, ſtałaby ſię $\frac{5}{4}$ onéyże ſaméy.

Nazwiéymy wydatek roczny przez x.

Zmnieyſzénié całé maiątku téy oſoby, pochodzącé z wyłączéń wſzyſtkich corocznych na wydátki, to, mówię, zmnieyſzénié wyráźá ſię przez wieloczyn z jłości x, rozmnożonéy przez ſummę ciągu

$(\frac{5}{4}+(\frac{5}{4})^2+(\frac{5}{4})^3+(\frac{5}{4})^4 \quad . \quad . \quad +(\frac{5}{4})^{10}.))$

Tén zaś wieloczyn ieſt $\frac{5}{4}x\left(\frac{(\frac{5}{4})^{10}-1}{\frac{5}{4}-1}\right)=5x\left(\frac{5^{10}-4^{10}}{4^{10}}\right)$

A maiątek téy oſoby na końcu 10 lát, będzie

$$(\tfrac{5}{4})^{10}ſ-5x\times\frac{5^{10}-4^{10}}{4^{10}}.$$

A że ta oſoba má mieć na końcu 10 lát, 5 razy tylé, ilé miała na początku; więc

Warunek. $(\frac{5}{4})^{10}ſ-5x\times\dfrac{5^{10}-4^{10}}{4^{10}}=5ſ.$

Przeráb: (Dodáwſzy $5x\times\dfrac{5^{10}-4^{10}}{4^{10}}$ po obu ſtronach)

 $(\frac{5}{4})^{10}$

$$\left(\tfrac{5}{4}\right)^{10} s = 5s + 5x \times \frac{5^{10}-4^{10}}{4^{10}}.$$

(Podzieliwszy obie strony przez 5)

$$\frac{5^9}{4^{10}} s = s + x \times \frac{5^{10}-4^{10}}{4^{10}}.$$

(Odiąwszy s, po obu stronach, i przywiódłszy ié do ułómków)

$$\frac{5^9-4^{10}}{4^{10}} s = x \times \frac{5^{10}-4^{10}}{4^{10}}.$$

(Rozmnożywszy obie strony przez 4^{10})

$$(5^9-4^{10})s = x(5^{10}-4^{10}).$$

(Podzieliwszy obie strony przez $5^{10}-4^{10}$)

$$x = \frac{5^9-4^{10}}{5^{10}-4^{10}} s = \frac{1953125-1048576}{9765625-1048576} s = \frac{904549}{8717049} s = \tfrac{11}{106} s, \text{blizko}$$

Przeto, ieżeli ta osoba miała naprzód Zł. 8717049; tedyby wydátek iéy roczny powinién bydź 904549 Zł. aby się práwdziło, iż za lát 10, zbierze 5 razy tylé, ilé miała przed 10 laty.

Insze przykłady. Pewná osoba, która iuż nie zakłádá sobie żyć więcéy, iak lát 6, a má z czego utrzymywać się przez rok 1, daie summę s, *na 5% procéntu. Jakąż część téy summy má corocznie wybiérać na roczné wydátki, zacząwszy od początku 2go roku, aż do początku 6tégo roku, aby wybrawszy ostatnią część, nic iéy się z kapitału całégo nie zostało.*

Inná osoba chciałaby znowu pod podobnémi, iak tamta, warunkami, aby iéy kapitał za lát 10, zmnieyszył się do połowy.

Winién kto 10000 Cz: Zł: które má wypłacić za lát 10, bez procéntu. Godzi się z wierzycielém, iż mu corocznie równą część wypłacać będzie, zaczynaiąc to wypłacénié za rok (co uczyni 10 równych wypłacéń). *Iléż za każdą razą przydzie mu wypłacić, aby zupełnie dług zaspokoił, po ostatniém wypłacéniu, rachuiąc procént skłádany po 5%.*

267. *Zagadniénié 3. Pewná osoba má 10000 Cz: Zł: od których może mieć skłádany procént 5%, obiérá sobie iednak dadź tén kapitál na* przepádek (*á fond perdu*) *byleby corocznie brała od niego aż do śmierci procént po 10%, toiest 1000 Cz: Zł: Tén dochód odbieraiąc na końcu każdégo roku, daie go zaráz na procént 5%, i pozwálá zbiérać się co ráz bardziéy tym procéntém. Za iléż lát będzie ta osoba miała ténże sám kapitál, którýby téż była zebrała w tymże czasie, gdyby*

by była nie dáwała na przepádek ſwoiéy ſummy 10000 Cz: Zł: ale tylko na ſkłádany procént $5\frac{0}{0}$?

Niech będzie x, liczba lát.

Kapitáł téy oſoby na końcu lát x, ſtáłby ſię $10000\,(\frac{21}{20})^x$ (§. 248).

Dochód 1000 Cz: Zł: który ta oſoba odbierze na końcu 1go roku, urośnie przez lát $x-1$, (przez które procént ſkłádany przynoſić będzie) do $1000\,(\frac{21}{20})^{x-1}$.

Dochód 2gi przez lát $x-2$, urośnie do $1000\,(\frac{21}{20})^{x-2}$.

Dochód 3ci, przez lát $x-3$, urośnie do $1000\,(\frac{21}{20})^{x-3}$.

I t. d. aż do oſtatniégo dochodu, który wáżności ſwoiéy nie odmiéni.

A zatém cáłá wáżność tego dochodu, na końcu liczby lát ſzukanéy, będzie

$$1000\,\left((\tfrac{21}{20})^{x-1}+(\tfrac{21}{20})^{x-2}+(\tfrac{21}{20})^{x-3}+\ \ldots\ 1\right) \text{ albo,}$$

$$1000\,\left(1+\tfrac{21}{20}+(\tfrac{21}{20})^2+(\tfrac{21}{20})^3+\ \ldots\ (\tfrac{21}{20})^{x-1}\right) =$$

$$\frac{1000\times((\frac{21}{20})^x-1)}{\frac{21}{20}-1}\ (\S 255) = 20000\,\left((\tfrac{21}{20})^x-1\right).$$

Warunek. $20000\left((\frac{21}{20})^x-1\right) = 10000\,(\frac{21}{20})^x$.

Przeráb: (Podzieliwſzy obie ſtrony przez 10000)

$$2\left((\tfrac{21}{20})^x-1\right)=(\tfrac{21}{20})^x \text{ . albo } 2\times(\tfrac{21}{20})^x-2=(\tfrac{21}{20})^x.$$

(Dodáwſzy 2 po obu ſtronach)

$$2\times(\tfrac{21}{20})^x=(\tfrac{21}{20})^x+2.$$

(Odiąwſzy $(\frac{21}{20})^x$ po obu ſtronach) $(\frac{21}{20})^x=2.$

(Wziąwſzy Logarytm obu ſtrón)

$$x\ \text{Log: } \tfrac{21}{20}=\text{Log: } 2.$$

A że Log: $\frac{21}{20}=0,0211893.$

A Log: $2=0,3010300.$

Więc $x\times0,0211893=0,3010300.$

a zatém $x=\dfrac{0,\ 3010300}{0,\ 0211893}=\dfrac{3010300}{211893}=14$ lát $2\frac{1}{2}$ mieſięcy blizko.

Na końcu 14 lát, kapitáł 10000 Cz: Zł: z procéntém ſkłádanym po $5\frac{0}{0}$, ſtáłby ſię $10000\times(\frac{21}{20})^{14}=19799$ Cz: Zł: blizko.

Procént od tego oſtatniégo kapitału za półtrzecią mieſiąca ieſt prawie 206 Cz: Zł: które przydáwſzy do kapitáłu, będzie ze wſzyſtkiém 20005 Czer: Zł: i to, ieſt wáżność całégo kapitáłu za lát 14, i blizko półtrzecia mieſiąca.

Dochód

Dochód roczny 1000 Cz: Zł: z ſkładanym procéntém $5\frac{0}{0}$ przez lát 14, czyni ſummę $\dfrac{1000\left(\left(\frac{21}{20}\right)^{14}-1\right)}{\frac{21}{20}-1} = 20000\left(\left(\frac{21}{20}\right)^{14}-1\right) = 20000\left(\left(\frac{21}{20}\right)^{14}\right) - 20000 = 19598$ Cz: Zł: blizko.

Procént od téy oſtatniéy ſummy, za półtrzecia mieſiąca, ieſt prawie 204 Cz: Zł.

Część dochodu przypádaiącá na rok 15ſty za półtrzecia mieſiąca ieſt prawie 207 Cz: Zł:

Summę tych dwóch oſtatnich liczb, dodáwſzy do ważności całégo dochodu przez lát 14, wypadnie 20008 Cz: Zł: na ważność odpowiedaiącą bardzo blizko czaſowi znalezionému.

Ważność cała tego dochodu nie różni ſię od ważności, do któréy były by przyſzedł piérwiáſtkowy kapitáł w tymże czaſie, iak tylko 3 iednościami, względém blizko 20000; toieſt mniéy niż $\frac{1}{6000}$ całégo kapitału.

Inſzé przykłady. Pewná oſoba daie 12000 Cz: Zł: na przepádek, wymawiaiąc ſobie dochód roczny $9\frac{0}{0}$ (co wynoſi 1080 Cz: Zł:) *Za ileż lát wybierze tén kapitáł wráz z procéntami iego* $4\frac{0}{0}$*?*

268. *Zagadniénié 4. Winiénem komu dochód roczny 300 Cz: Zł: który przez 20 lát obowiązałém ſię wypłácać, teráz zaráz zaczynaiąc, i rachuiąc procént ſkładany po* $5\frac{0}{0}$. *Przez iakąż ſummę mogę natychmiáſt tén cały dwudzieſtoletni dochód zaſpokoić?*

Spoſób 1wſzy poſtępowania. Ważność tego dochodu, na początku 20ſtégo roku, dodaiąc 20 naſtępnych wypłaceń: będzie

$$300\left(\left(\tfrac{21}{20}\right)^{19}+\left(\tfrac{21}{20}\right)^{18}+\left(\tfrac{21}{20}\right)^{17}+\ .\ .\ .\ .\ .\ 1\right) =$$

$$300\left(\frac{\left(\frac{21}{20}\right)^{20}-1}{\frac{21}{20}-1}\right) = 6000\left(\frac{21^{20}-20^{20}}{20^{20}}\right) \text{ (§. 267).}$$

Niech będzie x, ſumma teráz zaráz wypłaconá, wyrównywaiącá tamtému dochodowi. Ta ſumma na początku 20ſtégo roku, albo na końcu 19go, ważyć będzie $x \times \left(\frac{21}{20}\right)^{19}$.

Warunek. $x \times \left(\frac{21}{20}\right)^{19} = 6000 \times \dfrac{21^{20}-20^{20}}{20^{20}}$.

Przeráb:

Przerób: (Rozmn: obie ſtrony przez 20^{19})

$$x \times 21^{19} = 6000 \times \frac{21^{20} - 20^{20}}{20} = 300(21^{20} - 20^{20}.$$

Podzieliwſzy obie ſtrony przez 21^{19})

$$x = 300 \frac{(21^{20} - 20^{20})}{21^{19}} = 300 \times 21 - 300 \times \frac{20^{20}}{21^{19}} = 6300 - 6000 \times (\tfrac{20}{21})^{19}.$$

A że $6000 \times (\frac{20}{21})^{19} = 2374$ blizko.

Więc $6300 - 6000 \times (\frac{20}{21})^{19} = 6300 - 2374 = 3926$ blizko.

I ta ieſt ważność dochodu ſzukana.

2gi ſpoſób. Gdyby tén dochód procéntowy miał bydź nieuſtannym, tedyby winno ſię oddadź kapitał tego dochodu, toieſt 6000 Cz: Zł: których procénta po 5$\frac{0}{0}$, ſą 300 Cz: Zł. I oprócz tego, trzebaby dadź ieſzcze 300 Cz: Zł: ponieważ tén dochód má ſię zaráz zaczynać, a nie dopiéro za rók, trzebaby więc ze wſzyſtkiém zapłacić 6300 Cz: Zł:

Ale że tén dochód przypádá tylko wypłacić 20 razy; więc na początku 20ſtégo roku, byłby wypłaconym: a zatém oſoba, którá używá tego dochodu, powinnaby oddadź nazád 6000 Cz: Zł: przez lát 19, toieſt powinnaby wypłacić ważność teraźnieyſzą 6000 Cz: Zł: maiących ſię wypłacać przez lát 19. Ta zaś ważność teraźnieyſzá ieſt $6000 \times (\frac{20}{21})^{19} = 2374$ blizko.

Więc oſoba, która winná tén dochód, powinnaby teráz zaráz wypłacić 6300 Cz: Zł. a nazád odebrać 2374: więc powinna w ſamêy rzeczy wypłacić 3926 Cz: Zł:

Inſzé przykłady. Jakáż ieſt ważność teraźnieyſzá rocznégo dochodu 500 Cz: Zł: maiącégo ſię wypłacać przez lát 30, rachuiąc procént po 6$\frac{0}{0}$?

Jakáż ieſt ważność teraźnieyſzá rocznégo dochodu 400 Cz: Zł: maiącégo ſię wypłácać przez lát 35, rachuiąc procént po 4$\frac{0}{0}$?

269. *Zagadniénie 5. Cały maiątek pewnêy oſoby oſzacowany ieſt na 100000 Zł. z którégo má dochodu rocznégo 4$\frac{0}{0}$, toieſt 4000 Zł.*

Téyże oſobie wychodzi corocznie na różné wydatki 10000 Zł. a co nad dochód roczny wydaie, toieſt 6000 Cz: Zł: tego inaczéy pożyczyć nie może, iak z procéntém 10$\frac{0}{0}$. Za iléż lát oſoba ta zniſzczy ſię wcale, przypuściwſzy, że wierzyciel dozwálá zbierać ſię procéntóm ſkłádanym od téy ſummy 6000 Cz: Zł: którą naſtępnie pożyczá na początku każdégo roku.

Ta oſoba podług przypuſzczénia muſi corocznie przypożyczyć 6000 Zł. aby wyſtarczyć mogła, na coroczné ſwoié wydatki.

Niech będzie x, liczba lát ſzukaná.

Dług zaciągniony na początku 1go roku, będzie na końcu lat x $6000 \times (\frac{11}{10})^x$.

. . . . 2go roku $6000 \times (\frac{11}{10})^{x-1}$.

. . . . 3go roku $6000 \times (\frac{11}{10})^{x-2}$.

. . . . $x$go roku $6000 \times \frac{11}{10}$.

Więc ważność wſzyſtkich tych długów, na końcu lát x, ieſt

$$6000\left((\tfrac{11}{10})^x + (\tfrac{11}{10})^{x-1} + (\tfrac{11}{10})^{x-2} + (\tfrac{11}{10})^{x-3} + \ldots . \tfrac{11}{10}\right).$$
$$= (6000 \times \tfrac{11}{10} \times \left((\tfrac{11}{10})^{x-1} + (\tfrac{11}{10})^{x-2} + (\tfrac{11}{10})^{x-3} + \ldots . 1\right).$$
$$= (6000 \times \tfrac{11}{10}\left(\frac{(\frac{11}{10})^x - 1}{\frac{11}{10} - 1}\right) = 66000 \times (\tfrac{11}{10})^x - 66000.$$

Warunek. $66000 \times (\frac{11}{10})^x - 66000 = 100000$.

Przerób: (Dodáwſzy 66000 po obu ſtronach)

$$66000 \times (\tfrac{11}{10})^x = 166000.$$

(Podzieliwſzy obie ſtrony przez 2000).

$$33 \times (\tfrac{11}{10})^x = 83.$$

(Podzieliwſzy obie ſtrony przez 33)

$$(\tfrac{11}{10})^x = \tfrac{83}{33}.$$

(Wziąwſzy Logarytm obu ſtrón)

$$x \text{ Log: } \tfrac{11}{10} = \text{Log: } \tfrac{83}{33}.$$

albo; $x \times 0,\ 0413927 = 0,\ 4005642$.

i

więc $x = \dfrac{0,\ 4005642}{0,\ 0413927} = \dfrac{4005642}{413927} = 9$ lát, i cokolwiek więcéy niż 8 mieſięcy.

Na końcu lát 9, dług téy oſoby będzie $6000\left((\frac{11}{10})^9 + (\frac{11}{10})^8 + (\frac{11}{10})^7 + \ldots . \frac{11}{10}\right) = 6000 \times \frac{11}{10}\left(\frac{(\frac{11}{10})^9 - 1}{\frac{11}{10} - 1}\right) = 66000 \times (\frac{11}{10})^9 - 66000 =$ 89625 Zł.

Procént od téy ſummy za 8 mieſięcy, ieſt prawie . .	5955 Zł.
Póżyczénié na początku 10tégo roku na 8 mieſięcy	4000.
Procént za té 8 mieſięcy . . . prawie . . .	266.
Summa długów na końcu 9 lát, i ośmiu mieſięcy .	99846.

Kapitáł

Kapitáł na końcu 9 lát	89625 Zł.
Procént od tego kapit: za 9 miesięcy	6722.
Pożyczénié na 9 miesięcy . . .	4500.
Procént za té 9 miesięcy . . .	337.
Summa cała . . .	101184.

Więc dług urośnie do 100000 Zł: za lát 9, i cokolwiek więcéy niż 8 miesięcy.

Inszé przykłady. Maiątek téy osoby niech będzie 150000 Zł. Wydátek roczny nad dochód, niech będzie 8000 Zł. a procént od nich $9\frac{0}{0}$.

I znowu, niech będzie maiątek 200000 Zł. wydatek roczny z pożyczanych pieniędzy 10000 Zł. procént od nich $12\frac{0}{0}$.

270. *Zagadniénié 6. Znaléźć trzy liczby, w proporcyi Jeometryczney ciągłéy, których wiadomá iest summa, i summa ich kwadratów.*

Niech będzie trzech liczb szukanych summa daná . . $2s$.

Summa ich kwadratów . . . . $4q$.

Niech będzie $2x$ summa dwóch skraynych.

. . . . $2y$. Różnica tychże.

Dwa wyrazy skrayné $x + y$, $x - y$.

Kwadrát śrzedniégo . . . . $xx - yy$; Wyráz śrzedni $\sqrt{(xx - yy)}$ albo $2s - 2x$.

Kwadraty trzech wyrazów . . . $xx + 2xy + yy$.

$$xx \quad - yy.$$

$$xx - 2xy + yy.$$

Summa trzech kwadratów . . . $3xx + yy$.

Warunek. $\begin{cases} 3xx + yy = 4q. \\ xx - yy = (2s - 2x)^2 = 4ss - 8sx + 4xx. \end{cases}$

Przeráb: (Dodáwszy strony odpowiédaiącé sobie we dwóch równaniach) $4xx = 4q + 4ss - 8sx + 4xx$.

(Odiąwszy $4xx$ po obu stronach) $o = 4q + 4ss - 8sx$.

(Dodáwszy $8sx$ do obu strón) $8sx = 4q + 4ss$.

(Podziel: obie strony przez $4s$) $2x = \dfrac{q + ss}{s}$. Summa wyrazów skraynych.

$$2s - 2x = 2s - \frac{q+ss}{s} = \frac{ss-q}{s}.$$ Wyráz śrzedni.

Aby znaléźć dwa wyrazy skrayné, trzeba od kwadratu połowy ich summy $\left(\frac{q+ss}{2s}\right)^2$ odiąć kwadrát wyrazu śrzedniégo $\left(\frac{ss-q}{s}\right)^2$; albo wieloczyn dwóch skraynych. Reszta będzie kwadratém połowy ich różnicy, toiest:

$$\frac{qq+2qss+s^4}{4ss} - \frac{qq-2qss+s^4}{ss} = \frac{10qss-3(qq+s^4)}{4ss}$$

$$= \frac{4qss-3(q-ss)^2}{4ss}.$$

Więc połowa różnicy dwóch skraynych, iest $\frac{\sqrt{(4qss-3(q-ss)^2)}}{2s}$

A zatém dwa wyrazy skrayné są

$$\frac{q+ss}{2s} + \frac{\sqrt{(4qss-3(q-ss)^2)}}{2s}; \text{ i } \frac{q+ss}{2s} - \frac{\sqrt{(4qss-3(q-ss)^2)}}{2s}$$

Proporcyá szukaná.

$$\frac{q+ss}{2s} + \frac{\sqrt{(4qss-3(q-ss)^2)}}{2s}, \frac{ss-q}{s}, \frac{q+ss}{2s} - \frac{\sqrt{(4qss-3(q-ss)^2)}}{2s}$$

271. *Uwága. Można krócéy wynaléźć wyráz śrzedni, albo i summę dwóch skraynych, w sposób następuiący:*

Fig. 50. Niech będzie AB, summa daná trzech ilości, niech PQ, wyráżá liniią, któréy kwadrát byłby równy summie kwadratów ilości trzech szukanych.

Niech linie AY, XY, wystawuią nám dwa wyrazy skrayné szukané, a liniiá BX, niech wystawuie wyráz śrzedni.

$BX = AB - AX.$

Więc; $BX^2 = AB^2 - 2AB \times AX + AX^2.$

A że iest $AX = AY + XY.$

Więc, $AX^2 = AY^2 + 2AY \times XY + XY^2.$

$= AY^2 + 2BX^2 + XY^2 = BX^2 + PQ^2.$

Więc, $BX^2 = AB^2 - 2AB \times AX + BX^2 + PQ^2.$

Więc, $o = AB^2 - 2AB \times AX + PQ^2.$

Więc, $2AB \times AX = AB^2 + PQ^2.$

a zatém,

a zatém, $AX = \frac{AB^2 + PQ^2}{2AB}$. Toż ſamo znaleźliśmy i piérwſzym ſpoſobém.

Przykłady. Niech będzie $2s = 30$, $2s = 14$, $2s = 38$,
$4q = 364$, $4q = 84$, $4q = 532$,

Tymże prawie ſpoſobém trzebaby ſobie poſtąpić, gdyby wiadomy był nadmiár ſummy dwóch ſkraynych, nad wyráz środni, i ſumma trzech kwadratów.

272. *Zagadnienié 7. Znaléźć trzy liczby w proporcyi Jeometryczney ciągłéy, których wiadomá ieſt ſumma, i nadmiár ſummy kwadratów wyrazów dwóch ſkraynych nad kwadrát wyrazu środniégo.*

Niech będzie $2s$ ſumma daná; $2q$, różnica kwadratów.

Mianowanié. Summa wyrazów ſkraynych . . . $2x$.
Różnica . . . . $2y$.
Proporcyá . . . $x+y$, $2s-2x$, $x-y$.
Kwadraty $xx+2xy+yy$; $4ss-8sx+4xx$; $xx-2xy+yy$.
Summa dwóch kwadratów ſkraynych $2xx+2yy$.
Nadmiár téy ſummy, nad kwadrát wyrazu środniégo . . . . $8sx-4ss-2xx+2yy$.

Warunek. $\begin{cases} 8sx-4ss-2xx+2yy=2q. \\ 4ss-8sx+4xx = xx-yy. \end{cases}$

Przeráb: $\begin{cases} 4sx-2ss-xx+yy=q. \\ -8sx+4ss+3xx+yy=0. \end{cases}$

(Odiąwſzy 2gié równanié od 1wſzégo)
$12sx-6ss-4xx=q$.
albo; $4xx-12sx+6ss+q=0$.
(Dopełniwſzy kwadratu w piérwſzéy ſtronie)
$4xx-12sx+9ss=3ss-q$.
(Wyciągnąwſzy piérw: kwadr: z obu ſtrón)
$2x-3s=\pm\sqrt{(3ss-q)}$.
(Dodáwſzy $3s$ po obu ſtronach)
$2x=3s\pm\sqrt{(3ss-q)}$.
(Podzieliwſzy obie ſtrony przez 2)

 $x =$

$$x = \frac{3s \pm \sqrt{(3ss - q)}}{2}.$$

$$2s - 2x = -s \mp \sqrt{(3ss - q)}.$$

Aby wyráz śrzedni nie był uiémnym, trzeba użyć drugiégo wyrażénia, toieſt $x = \frac{3s - \sqrt{(3ss - q)}}{2}$.

$$2s - 2x = \sqrt{(3ss - q)} - s.$$

$$xx - yy = (2s - 2x)^2.$$

Więc, $yy = xx - (2s - 2x)^2 = \left(\frac{3s - \sqrt{(3ss - q)}}{2}\right)^2 - (\sqrt{(3ss - q)} - s)^2$

$$= \left(\frac{3s - \sqrt{(3ss - q)}}{2}\right)^2 - \left(\frac{2\sqrt{(3ss - q)} - 2s}{2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{3s - \sqrt{(3ss - q)}}{2} + \frac{2\sqrt{(3ss - q)} - 2s}{2}\right)\left(\frac{3s - \sqrt{(3ss - q)}}{2} - \frac{2\sqrt{(3ss - q)} - 2s}{2}\right)$$

$$= \frac{s + \sqrt{(3ss - q)}}{2} \times \frac{5s - 3\sqrt{(3ss - q)}}{2} = \frac{2s\sqrt{(3ss - q)} + 3q - 4ss}{4}$$

$$y = \frac{\pm\sqrt{2s\sqrt{(3ss - q)} + 3q - 4ss}}{2}.$$

Wyrazy ſkrayné proporcyi $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{3s - \sqrt{(3ss - q)} + \sqrt{2s\sqrt{(3ss - q)} + 3q - 4ss}}{2} \\[2ex] \dfrac{3s - \sqrt{(3ss - q)} - \sqrt{2s\sqrt{(3ss - q)} + 3q - 4ss}}{2}. \end{array}\right.$

Wyráz śrzedni . . . . . $\sqrt{(3ss - q)} - s$.

Uwdga. To zagadniénié wzięté oddzielnie może mieć cztéry rozwiązania, które przez znaki tylko różnią ſię od ſiebie. Gdyby zaś, zamiáſt, cobyśmy mieli ſzukać dwóch wyrazów ſkraynych przez ich ſummę, albo różnicę, chcieliśmy każdégo z nich dochodzić bezśrzednie; tedyby przyſzło ſię do takiégo równania, w którém ilość niewiadomá byłaby podnieſioná do czwártégo ſtopnia.

Przy-

Pzykłady Zagadniénia poprzedzaiącégo.

Niech będzie $2ſ=14$, $2ſ=42$.
$2q=52$, $2q=468$.

Tymże ſpoſobém możnáby rozwiązać i naſtępuiącé Zagadniénié: *Znaléźć trzy liczby w proporcyi Jeometryczné y, których wiémy nadmiár ſummy dwóch ſkráynych nad wyráz ſrzedni, i nadmiár ſummy kwadratów tychże dwóch ſkraynych nad kwadrát wyrazu ſrzedniégo.*

Możná także użyć do rozwiązania tych zagadniéń ſpoſobu drugiégo użytégo w poprzedzaiącém zagadniéniu.

273. *Zagadniénié 8. Znaléźć cztéry liczby, ciągło Jeometrycznie proporcyonalné, których ſumma dwóch ſrzednich ieſt* 2a *ſumma zaś dwóch ſkraynych* 2b.

Mianowanié. Różnica dwóch ſrzednich . . . $2d$.
Dwa wyrazy ſrzednié . . . . $a+d$, i $a-d$.
Dwa ſkrayné . . . . $\dfrac{(a+d)^2}{a-d}$, i $\dfrac{(a-d)^2}{a+d}$

Warunek. $\dfrac{(a+d)^2}{a-d}+\dfrac{(a-d)^2}{a+d}=2b.$

Przeráb: (Przywiódłſzy dwa ułómki piérwſzéy ſtrony, do iednakowégo mianownika) $\dfrac{(a+d)^3+(a-d)^3}{aa-dd}=2b.$

(Wykonáwſzy oznaczoné dodanié) $\dfrac{2a^3+6add}{aa-dd}=2b.$

(Podzieliwſzy obie ſtrony przez 2)
$\dfrac{a^3+3add}{aa-dd}=b$, albo $a\left(\dfrac{aa+3dd}{aa-dd}\right)=b.$

(Ułożywſzy to równanié w proporcyą)
$aa+3dd:aa-dd:b:a$ (A).

(Rozmnożywſzy obadwa naſtępniki przez 3)
$aa+3dd:3aa-3dd=b:3a.$

(Dodaiąc) $4aa:3aa-3dd=b+3a:3a.$ (§. 137)
albo $4aa:aa-dd=b+3a:a$ (B).

(Dzie-

(Dzieląc w proporcyi A) $4dd : aa - dd = b - a : a$.

albo $aa - dd : 4dd = a : b - a$.

Składaiąc tę ostatnią proporcyą, z proporcyą B, będzie

$4aa : 4dd = b + 3a : b - a$.

albo $aa : dd = b + 3a : b - a$.

więc $dd = aa \times \frac{b - a}{b + 3a}$.

a zaś $d = a\sqrt{\left(\frac{b - a}{b + 3a}\right)}$.

Rozwiązanie. $a + d = a\left(1 + \sqrt{\left(\frac{b - a}{b + 3a}\right)}\right)$.

$$a - d = a\left(1 - \sqrt{\frac{b - a}{b + 3a}}\right).$$

$$\frac{(a+d)^2}{a-d} = \frac{(a+d)^3}{aa-dd} = \frac{a\left(1+\sqrt{\left(\frac{b-a}{b+3a}\right)}\right)^3}{1-\frac{b-a}{b+3a}} = \frac{a(b+3a)\left(1+\sqrt{\left(\frac{b-a}{b+3a}\right)}\right)^3}{4a}$$

$$= (b+3a)\frac{\left(1+\sqrt{\left(\frac{b-a}{b+3a}\right)}\right)^3}{4}.$$

$$\frac{(a-d)^2}{a+d} = \frac{(a-d)^3}{aa-dd} = a\left[\frac{\left(1-\sqrt{\left(\frac{b-a}{b+3a}\right)}\right)^3}{1-\frac{b-a}{b+3a}}\right] = \frac{a(b+3a)\left(1-\sqrt{\left(\frac{b-a}{b+3a}\right)}\right)^3}{4a} =$$

$$(b+3a)\frac{\left(1-\sqrt{\left(\frac{b-a}{b+3a}\right)}\right)^3}{4}.$$

Sprawdz:

Správdz: $\frac{(a+d)^2}{a-d} + \frac{(a-d)^2}{a+d}$.

$$= \left(\frac{b+3a}{4}\right)\left(\left(1+\sqrt{\frac{b-a}{b+3a}}\right)^3+\left(1-\sqrt{\frac{b-a}{b+3a}}\right)^3\right)$$

$$= \frac{b+3a}{4}\left(2+6\times\frac{b-a}{b+3a}\right)=\frac{b+3a}{2}\left(1+\frac{3b-3a}{b+3a}\right)$$

$$=\frac{b+3a}{2}\left(\frac{4b}{b+3a}\right)=\frac{4b}{2}=2b$$

Przykł: Niech będźie $2a=36;\ 2b=84$.
$2a=12;\ 2b=18$.
$2a=24;\ 2b=36$.

274. *Zagadnienie 9. Znaléźć cztéry liczby ciągło proporcyonalné, których wiémy różnicę śrzednich i różnicę skraynych.*

Sposób postępowania iest prawie tén sám, co i w poprzedzaiącém Zadaniu.

Przykł: Różnica śrzednich 18.	*Różnica skraynych*	78.
. . . . 4.	. . . .	14.
. . . . 8.	. . . .	28.

275. *Zagadnienie 10. Znaléźć cztéry liczby, w ciągu Jeometrycznym, maiąc wiadomą ich summę, i summę ich kwadratów.*

Summa dana cztérech wyrazów . . . a.
Summa ich kwadratów . . . . b.

Mianowanie. Summa dwóch wyrazów śrzednich . . $2x$.
Różnica ich . . . . $2y$.
Wyrazy śrzednie . . . . $x+y$.
$x-y$.

Ciąg $\frac{(x+y)^2}{x-y}$, $x+y$, $x-y$, $\frac{(x-y)^2}{x+y}$.

Summa tego ciągu: $2x+\frac{2x^3+6xyy}{xx-yy}=2x\left(1+\frac{xx+3yy}{xx-yy}\right)=$

 2x

$$2x\left(\frac{2xx+2yy}{xx-yy}\right)=\frac{4x(xx+yy)}{xx-yy}.$$

Kwadraty. $\frac{(x+y)^4}{(x-y)^2}$, $(x+y)^2$, $(x-y)^2$, $\frac{(x-y)^4}{(x+y)^2}$.

Summa

$$\frac{(x+y)^6+(x-y)^6}{(xx-yy)^2}+(2xx+2yy)=\frac{2x^6+30x^4yy+30xxy^4+2y^6}{(xx-yy)^2}+(2xx+2yy).$$

$$=(2xx+2yy)\left(\frac{x^4+14xxyy+y^4}{(xx-yy)^2}+1\right)=(2xx+2yy)\frac{(2x^4+12xxyy+2y^4)}{(xx-yy)^2}$$

$$=(4xx+4yy)\frac{(x^4+6xxyy+y^4)}{(xx-yy)^2}.$$

Warunek.
$$\begin{cases} 4x\dfrac{(xx+yy)}{xx-yy}=a\ \text{(A.)} \\ (4xx+4yy)\dfrac{(x^4+6xxyy+y^4)}{(xx-yy)^2}=b.\ \text{(B.)} \end{cases}$$

Przerábianié. (Podzieliwſzy ſtrony równania B, przez ſtrony odpowiedaiącé, równania A)

$$\frac{x^4+6xxyy+y^4}{x(xx-yy)}=\frac{b}{a}\ \text{albo}\ \frac{(xx+yy)^2+4xxyy}{x(xx-yy)}=\frac{b}{a}\ \text{(C.)}$$

(Przywiódłſzy równanié A, do Mianownika równania C)

$$\frac{4xx(xx+yy)}{x(xx-yy)}=a\,\text{(D)}.$$

(Odiąwſzy równanié C, od równania D)

$$\frac{4x^4-(xx+yy)^2}{x(xx-yy)}=a-\frac{b}{a}.$$

A że ieſt; $\frac{4x^4-(xx+yy)^2}{x(xx-yy)}=\frac{2xx+(xx+yy)\ (2xx-(xx+yy))}{x(xx-yy)}=$

(3xx

$$\frac{(3xx+yy)(xx-yy)}{x(xx-yy)} = \frac{3xx+yy}{x}.$$

więc, $\dfrac{3xx+yy}{x} = a - \dfrac{b}{a} = \dfrac{aa-b}{a}$.

więc, $3xx+yy : aa-b = x : a$.

A że, (w równaniu A) $\dfrac{4x(xx+yy)}{xx-yy} = a$.

więc, $xx+yy : xx-yy = a : 4x$.

a zatém, $xx : yy = a+4x : a-4x$. (§. 137.)

więc, $3xx : yy = 3(a+4x) : a-4x$.

więc, $3xx : 3xx+yy = 3(a+4x) : 4a+8x$.

więc, $xx : 3xx+yy = a+4x : 4(a+2x)$.

a że, $3xx+yy : aa-b = x : a$.

więc, $xx : aa-b = x(a+4x) : 4a(a+2x)$ (§. 139.)

więc, $x : a+4x = aa-b : 4aa+8ax$.

więc, $4aax+8axx = a(aa-b)+4x(aa-b)$.

więc, $8axx+4bx = a(aa-b)$.

więc, $xx + \dfrac{b}{2a}x = \dfrac{aa-b}{8}$.

więc, $xx + \dfrac{b}{2a}x + \dfrac{bb}{16aa} = \dfrac{aa-b}{8} + \dfrac{bb}{16aa} =$

$$\frac{2a^4-2aab+bb}{16aa} = \frac{a^4+(aa-b)^2}{16aa}.$$

$$x + \frac{b}{4a} = \frac{\sqrt{(a^4+(aa-b)^2)}}{4a}.$$

$$x = \frac{\sqrt{(a^4+(aa-b)^2)}-b}{4a}.$$

$$yy = xx\times\left(\frac{a-4x}{a+4x}\right) = \left(\frac{\sqrt{(a^4+(aa-b)^2}-b}{4a}\right)^2 \times \frac{aa+b-\sqrt{(a^4+(aa-b)^2)}}{aa-b+\sqrt{(a^4+(aa-b)^2)}}$$

Przykład. Niech będzie $a = 40$.
$b = 820$.

$$aa = 1600; \quad a^4 = 2560000; \quad \begin{cases} aa - b = 780. \\ (aa-b)^2 = 608400. \\ aa + b = 2420. \end{cases}$$

$$a^4 + (aa-b)^2 = 3168400.$$

$$\sqrt{(a^4+(aa-b)^2)} = 1780.$$

$$x = \frac{1780-820}{160} = 6$$

$$yy = 6^2 \times \frac{2420}{780+1780} = 6^2 \times \frac{640}{2560} = 6^2 \times \frac{64}{256} = 6^2 \times \frac{1}{4} = \frac{36}{4} = 9.$$

$$y = 3.$$

Wyrazy śrzednié . . . $6+3.$ albo $9.$
$6-3.$ $3.$

Ciąg . . . 27, 9, 3, 1.

Inszé przykłady. $a = 15.$ $b = 85.$ $a = 65.$ $b = 1261.$

276. *Zagadniénié 11. Znaléźć cztéry liczby w ciągu Jeometrycznym maiąc wiadomą ich summę, i nadmiár summy kwadratów wyrazów dwoch skraynych nad summę kwadratów wyrazów dwóch śrzednich.*

277. *Zagadniénié 12. Znaléźć cztéry liczby w ciągu Jeometrycznym, maiąc wiadomą różnicę summy wyrazów śrzednich, od summy wyrazów skraynych, i różnicę summy kwadratów skraynych, od summy kwadratów śrzednich.*

278. *Zagadniénié 13. Znaléźć cztéry liczby w ciągu Jeometrycznym, maiąc wiadomą różnicę między summą skraynych i summą śrzednich, i summę kwadratów wszystkich cztérech wyrazów.* (To Zagadniénié zawiérá w sobie iedno równanié trzeciégo stopnia.)

279. Następuiącé Zagadniénié w wielu przypádkach może bydź przestósowané, a w szczególności w rachunkach dochodów dożywotnich, z przypádkiém kapitału. (Takié dochody nazywaią się po Francuzku *viagères*).

Niech będzie ciąg Arytmetyczny . . . . . $a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ a+4d,\ a+5d \ldots a+d(n-1)$

Niech będzie ciąg Jeometryczny . . . $1,\ p,\ p^2,\ p^3,\ p^4,\ p^5,\ \ldots p^{n-1}.$

Rozmnóżmy (po dwo biorąc) wyrazy tych ciągów odpowiedaiącé sobie, zrobi się szereg następuiący: $a,\ ap+pd,\ ap^2+2p^2d,\ ap^3+3p^3d,\ ap^4+4p^4d,\ ap^5+5p^5d$ . . $ap^{n-1} + (n-1)p^{n-1}d.$

Trzeba

Trzeba znaléźć wyrażénié summy tego ostatniégo szeregu.

Szereg ten może bydź rozłożony na następuiącé ciągi Jeometryczné, których można znaléźć wyrażénié summ.

$$a+ap+ap^2+ap^3+ap^4+ap^5+ap^6+ap^7+ap^8+\ldots\ldots ap^{n-1}=a\times\frac{p^n-1}{p-1}.$$

$$dp+dp^2+dp^3+dp^4+dp^5+dp^6+dp^7+dp^8+\ldots\ldots dp^{n-1}=dp\left(\frac{p^{n-1}-1}{p-1}\right)$$

$$dp^2+dp^3+dp^4+dp^5+dp^6+dp^7+dp^8+\ldots\ldots dp^{n-1}=dp^2\left(\frac{p^{n-2}-1}{p-1}\right)$$

$$dp^3+dp^4+dp^5+dp^6+dp^7+dp^8+\ldots\ldots dp^{n-1}=dp^3\left(\frac{p^{n-3}-1}{p-1}\right)$$

$$dp^4+dp^5+dp^6+dp^7+dp^8+\ldots\ldots dp^{n-1}=dp^4\left(\frac{p^{n-4}-1}{p-1}\right)$$

$$dp^5+dp^6+dp^7+dp^8+\ldots\ldots dp^{n-1}=dp^5\left(\frac{p^{n-5}-1}{p-1}\right)$$

$$dp^6+dp^7+dp^8+\ldots\ldots dp^{n-1}=dp^6\left(\frac{p^{n-6}-1}{p-1}\right)$$

. . . .

. . . .

$$dp^{n-1}=dp^{n-1}\times\frac{p-1}{p-1}$$

Więc zebranié tego szeregu w jednę summę wychodzi na zebranie w jednę summę szeregu następuiącégo.

$$a\times\frac{p^n-1}{p-1}+dp\times\frac{p^{n-1}-1}{p-1}+dp^2\times\frac{p^{n-2}-1}{p-1}+dp^3\times\frac{p^{n-3}-1}{p-1}+dp^4\times\frac{p^{n-4}-1}{p-1}+$$

$$\ldots\ldots dp^{n-1}\times\frac{p-1}{p-1}.$$

Opuść-

Opuśćmy piérwszy wyráz; a wykonáymy oznaczoné mnożénié, w drugich wyrazach będzie

$$\frac{dp^n - dp}{p-1} + \frac{dp^n - dp^2}{p-1} + \frac{dp^n - dp^3}{p-1} + \frac{dp^n - dp^4}{p-1} + \frac{dp^n - dp^5}{p-1} + \ldots \frac{dp^n - dp^{n-1}}{p-1}.$$

albo $\frac{n \times dp^n}{p-1} - \frac{dp}{p-1}(1+p+p^2+p^3+p^4+p^5+ \ldots p^{n-2})$.

$$= n \times \frac{dp^n}{p-1} - \frac{dp}{p-1}\left(\frac{p^{n-1}-1}{p-1}\right).$$

Wiąc wyrażénié summy szukanéy będzie

$$a \times \frac{p^n - 1}{p-1} + n \times \frac{dp^n}{p-1} - \frac{dp^n - dp}{(p-1)^2}.$$

Uwága. Gdy p, iest mnieysze od iedności, tedy należy wyrazié tę summę pod tym ksztáłtém $a \times \frac{1-p^n}{1-p} - n \times \frac{dp^n}{1-p} + \frac{dp - dp^n}{(1-p)^2}$.

A granicą tego ostatniégo postępowania, będzie $a \times \frac{1}{1-p} + \frac{dp}{(1-p)^2}$.

ROZDZIAŁ IX.

Zagadnienia niewyznaczoné, i wstęp do Zagadnień Diiofantycznych.

Widzieliśmy iuż, że do tego, aby Zagadnienié iakié było wyznaczonéin, tylé w niém powinno bydź ilości niewiadomych, ilé warunków, któréby iedné od drugich nie zawisły. Jeżeli tego nie będzie, tedy Zadanié uważané oddzielnie, tylé mieć może rozwiązáń; ilé tylko zechcemy. Atoli cél, do którégo w szczególności zmierzá Zadanié, może znacznie ścieśnić liczbę rozwiązáń, choćby Zagadnienié miało mniéy warunków, niż ilości szukanych, iako to obáczymy na przykładach następuiących.

280. *Zadanié 1. Znaléźć wszystkié takié liczby, że gdy ié podzielimy przez 2, zostanie 1, gdy zaś ié podzielimy przez 3, nic nie zostanie.*

Arytmetycznie. Ponieważ té liczby nie daią się dzielić przez 2, bez reszty, więc są nie parzysté. Ale, że té liczby mogą bydź podzieloné przez 3; więc zamknięté będą w następuiącym ciągu.

3, 9, 15, 21, 33, 39, 45, 51, i t. d . . . . . którégo ogólném wyrażéniém iest $3+6a$, gdzie a, oznáczá iakąkolwiek liczbę całkowitą.

Algiebraicznie. Niech x, oznáczá liczbę tylu razy, ilé iedna z liczb szukanych zawiérá w sobie 2: a niech y, oznáczá znowu liczbę tylu razy, ilé taż liczba szukaná zawiérá w sobie 3.

Będziémy mieli dwa wyrażénia następuiącé, liczby szukanéy . . . . . $2x+1$, i $3y$.

Warunek. $2x+1=3y$.

Przerábianié. (Odiąwszy 1, po obu stronach) $2x=3y-1$.
(Podzieliwszy obie strony przez 2)

$$x=\frac{3y-1}{2}=y+\frac{y-1}{2}.$$

Ilość x. powinna wyrážać liczbę całkowitą: więc i oznaczénié ważności x, powinno wyrážać liczbę całkowitą: a że iedna część y, téy ważności, powinna bydź liczbą całkowitą; więc i drugá część $\frac{y-1}{2}$. musi także bydź liczbą całkowitą. Niech będzie tą liczbą całkowitą liczba nie wyznaczoná a, więc

$$\frac{y-1}{2}=a.$$

Podwoiwszy obie strony, będzie $y-1=2a$.
Dodáwszy 1 do obu strón . . . . $y=2a+1$.
a zatém $3y=6a+3$. Wyrażénié liczby szukanéy.

To Zagadnienié przyiąć może nieokréśloną liczbę rozwiązáń: iednákże liczba ich daleko iest mnieyszá, niż gdyby się miało tylko wzgląd na równanié warunku wziętégo, i sposób wcale ogólny, i oddzielny. Wszystkié tu wyłączaią się ułómki, iako téż i wszystkié liczby uiémné, wszystkié ilości niespółmierné, i bezistotné. Wyłączaią się nawet i té liczby całkowité i przydayné, których kształt inny iest, a nie $6a+3$.

Insze

Inſzé przykłady. Znaléźć wſzyſtkié liczby podzielné przez 3, któré gdy przez 4 podzielimy, zoſtanie 3.

Znaléźć wſzyſtkié liczby podzielné przez 5, któré gdy przez 4 podzielimy, zoſtanie 3.

281. *Zadanié 2. Rachuiąc kto iabłka zebrané w ogrodzie znayduie, iż licząc ié,*

po 2 . . . zoſtaie mu ſię 1.
. . 3 . . . . 2.
. . 4 . . . . 3.
. . 5 . . . . 4.
. . 6 . . . . 5.
. . 7 . . . . 0.

Iléż w ſaméy rzeczy zebrał tych iabłek?

1. *Przez rozumowanié.* Piérwſzy warunek zawarty ieſt w trzecim, z którégo wypádá, że liczba iabłek ieſt nie párzyſtá.

2. Piąty warunek wypływá koniecznie z drugiégo. Jakoż gdy liczba iaká, ieſt podzielná przez 3; tedy podziéliwſzy ią przez 6, albo nic nie zoſtanie, albo zoſtanie 3. Więc téż gdy podzieliwſzy liczbę iaką przez 3, zoſtanie 2, tedy podzieliwſzy ią przez 6, zoſtanie albo 2, albo 5. A że w piérwſzym razie byłaby ta liczba párzyſtą; więc gdy ieſt niepárzyſtą, zoſtanie 5.

Zadanié więc wypádá na naſtępuiącé:

Znaléźć wſzyſtkié liczby podzielné przez 7, i takié, że gdy ié podzielimy przez 6, zoſtanie 5.
. . . . 5 . . . . . 4.
. . . . 4 3

Jedna z liczby ſzukanéy, powinna ſię zamykać w ciągu naſtępuiącym: 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98, 105, 112, 119, 126, 133, 140, 147, i t. d.

Opuśćmy liczby párzyſté, zoſtanie
7, 21, 35, 49, 63, 77, 91, 105, 119, 133, 147, i t. d.

Liczba ſzukaná powiękſzoná iednością, powinna bydź podzielną przez 6, 5, i 4.

Przydáymy więc 1 do każdéy liczby ciągu poprzedzaiącégo, a będzie 8, 22, 36, 50, 64, 78, 92, 106, 120, 134, 148, i t. d.

Opuśćmy té liczby, któré nie ſą podzielné, *np* przez 5, toieſt, któré ſię nie kończą, albo na 0, albo na 5; zoſtaną z ciągu poprzedzaiącégo tylko dwie liczby

liczby 50, i 120. Piérwszá z nich ani przez 6, ani przez 4 nié może bydź podzieloną: drugá zaś wykonywá trzy ostatnié warunki, toiest dzielą ią trzy liczby 6, 5, i 4: a zatém liczba 119 iest liczbą w piérwszym ciągu odpowiedaiącą na zadanié, i czyni zadosyć wszystkim tego zadania warunkóm.

Jeżeli do téy liczby dodámy liczbę podzielną przez każdą z tych liczb 4, 5, i 7, (która to liczba będzie kształtu następuiącégo $420a$) wypadnie summa $420a+119$; która iest wyrażéniém ogólném liczby szukanéy, wziąwszy za a, iakąkolwiek liczbę cáłkowitą.

Algiebraicznie. Niech x, y, z, v, wyrážaią liczbę tylu razy, ilé liczba szukaná powinna zamykać w sobie 3, 4, 5, 7.

Będziémy mieli cztéry wyrażénia $3x+2$, $4y+3$, $5z+4$, $7v$, na liczbę szukaną.

Warunek. $3x+2=4y+3$.

Przeráb: $3x=4y+1$; $x=\dfrac{4y+1}{3}=y+\dfrac{y+1}{3}$.

$$\frac{y+1}{3}=a;\ y+1=3a;\ y=3a-1.$$

$$4y=12a-4.$$

$4y+3=12a-1$. Wyrażénié ogólné liczby odpowiedaiącéy dwóm piérwszém wyrażénióm.

Warunek 2. $5z+4=12a-1$.

Przeráb: $5z=12a-5$; $z=\dfrac{12a-5}{5}=2a-1+\frac{2}{5}a$.

$$\tfrac{2}{5}a=b;\ 2a=5b;\ a=2b+\tfrac{1}{2}b.$$

$$\tfrac{1}{2}b=c;\ b=2c.$$

więc $2a=10c$; $a=5c$.

$5z+4=60c-1$. Wyrażénié ogólné liczby odpowiedaiącéy trzém piérwszém wyrażéniom.

Warunek 3. $7v=60c-1$.

Przeráb: $v=\dfrac{60c-1}{7}=8c+\dfrac{4c-1}{7}$.

$$\frac{4c-1}{7}=d;\ 4c-1=7d;\ 4c=7d+1.$$

$$c=d+\frac{3d+1}{4}$$

$$\frac{3d+1}{4}=e;\ 3d+1=4e:\ 3d=4e-1;\ d=e+\frac{e-1}{3}.$$

$$\frac{e-1}{3}=f;\ e-1=3f;\ e=3f+1.$$

$$d=e+\frac{e-1}{3}=3f+1+f=4f+1.$$

$$c=d+\frac{3d+1}{4}=4f+1+e=4f+1+3f+1=7f+2.$$

$$7v=60c-1=420f+119.$$

Więc wyrażénié liczby szukanéy, iest liczba iakákolwiek cáłkowitá, wziętá razy 420, dodáwszy do niéy 119; náymnieyszą zaś tą liczbą szukaną, iest 119

Inszé przykłady. Kupiono pewną liczbę łokci sukna po Zł: 8, i pewną inną liczbę po Zł: 13. Zapłacono za wszystkié łokcie pierwszégo gatunku Zł: 75 więcéy niż za drugié.

Używá kto robotników mężczyzn i kobiét, płaci po gr: 15 każdému mężczyznie, a po gr: 11 każdéy kobiecie, więcéy zaś wydáł 81 gr: na mężczyzny niż na kobiéty.

282: *Zadanié 3. Niech będzie dany ułómek* $\frac{113}{355}$.

Trzeba znaléźć drugi ułómek $\frac{x}{y}$ *taki, aby różnica tych dwóch ułómków przywiedzionych do iednakowégo mianownika, miała za licznika liczbę cáłkowitą daną* d.

Warunek. $\frac{113}{355}-\frac{x}{y}=\pm\frac{d}{355y}.$

Przerábianié. $\frac{113y-355x}{355y}=\pm\frac{d}{355y}.$

więc,

więc, $113y - 355x = \pm d$.

$113y = 355x \pm d$.

$$y = \frac{355x \pm d}{113} = 3x + \frac{16x \pm d}{113}.$$

$$\frac{16x \pm d}{113} = a. \text{ Liczba całkowita.}$$

$$16x \pm d = 113a;\ 16x = 113a \mp d;\ x = \frac{113a \mp d}{16} = 7a + \frac{a \mp d}{16}.$$

$$\frac{a \mp d}{16} = b. \text{ Liczba całkowita. } a \mp d = 16b;\ a = 16b \pm d.$$

$$16x = 113(16b \pm d) \mp d = 113 \times 16b \pm 112d.$$
$$x = 113b \pm 7d.$$

$$113y = 355x \pm d = 355(113b \pm 7d) \pm d = 355 \times 113b \pm 2486d.$$
$$y = 355b \pm 22d.$$

$$\frac{x}{y} = \frac{113b \pm 7d}{355b \pm 22d}.$$

Przykł: *Niech będzie* $b = 0$, $d = 1$, $\frac{x}{y} = \frac{7}{22}$; $\frac{113}{355} - \frac{7}{22} = \frac{1}{22 \times 355}$.

Niech będzie $b = 1$, $d = 1$.

wtedy $\frac{x}{y} = \frac{120}{377}$; (gdy weźmiémy piérwszy znak +)

$\frac{x}{y} = \frac{106}{333}$; (gdy weźmiémy drugi znak —)

$$\frac{113}{355} - \frac{120}{377} = \frac{1}{355 \times 377}.$$

$$\frac{106}{333} - \frac{113}{355} = \frac{1}{333 \times 355}.$$

Niech znowu będzie iednostaynie $b = 1$; a zaś niech będzie d, koleyno . . . 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ... 16. Weźmy ráz wráz znak drugi —, wypadną naſtępuiącé ułómki $\frac{99}{311}$, $\frac{92}{289}$, $\frac{85}{267}$, $\frac{78}{245}$, $\frac{71}{223}$, $\frac{64}{201}$, $\frac{57}{179}$, $\frac{50}{157}$, $\frac{43}{135}$, $\frac{36}{113}$, $\frac{29}{91}$, $\frac{22}{69}$, $\frac{15}{47}$, $\frac{8}{25}$, $\frac{1}{3}$ Których to ułómków różnice względém piérwſzégo ułómku $\frac{113}{355}$ będą naſtępuiącé:

$$\frac{2}{355\times311},\ \frac{3}{355\times289},\ \frac{4}{355\times267}\ \ldots\ldots\ldots\ \frac{16}{3\times355}.$$

Tym ſpoſobém poſtępowania znayduiémy ciąg ułómków, których wyrazy mnieyſzé ſą od wyrazów ułómka danégo, i które tym bardziéy ſię zbliżaią do równości z tymże ułómkiém; im ich wyrazy mniéy ſię od niego różnią: a w ſzczególności znaléźliśmy dwa ułómki $\frac{7}{22}$, i $\frac{106}{333}$, piérwſzy mnieyſzy, a drugi większy, od ułómku danégo: ale tak mała ieſt różnica, że przywiodłſzy ié oſobno, wráz z danym ułómkiém do iednakowégo mianownika, piérwſzégo z nich licznik mnieyſzy iednością, drugiégo zaś licznik większy iednością tylko będzie od licznika ułómku danégo. Co ſię téż zgádzá z tém co ſię powiédziało w Części I Jeometryi, §. 398 i naſt: o ſtoſunkach przybliżonych okręgu koła do śrzednicy iego.

283. *Zadanié 4. Niech będzie ułómek dzieſiątny 2, 236; który oznácza prawie piérwiáſtek kwadratowy liczby 5. Trzeba znaléźć ułómki zwyczayné przybliżaiącé ſię do wáżności tego piérwiáſtku kwadratowégo.*

Ułożywſzy ułómek dany w tym kſztáłcie $\frac{2236}{1000}$, albo w tym $2+\frac{236}{1000}$, albo nakoniec w tym $2+\frac{59}{250}$, ſzukać będziémy ułómków, któréby ſię zbliżały do tégo ułómku $\frac{59}{250}$, i któréby miały mnieyſzé od niégo wyrazy.

Znaydziémy tymże iak wyżéy ſpoſobém:

$$\frac{x}{y}=\frac{59b\pm21d}{250b\pm89d}.$$

Niech będzie $b=0$, $d=1$.
Wypadnie ſtąd ułómek $\frac{21}{89}$ bardzo przybliżaiący ſię do ułómku $\frac{59}{250}$.
Niech będzie $b=1$, $d=1$, i weźmy znak niżſzy —, wypadnie ułómek $\frac{38}{161}$.

. . . . $b=1$, $d=2$, ... $\frac{17}{72}$.
. . . . $b=2$, $d=3$, ... $\frac{55}{233}$.
. . . . $b=2$, $d=5$, ... $\frac{13}{55}$ i t. d.

Albo tak;

Albo tak; $\frac{59}{250}=\frac{1}{\frac{250}{59}}=\frac{1}{4+\frac{14}{59}}=\frac{1}{4+\frac{1}{\frac{59}{14}}}=\frac{1}{4+\frac{1}{4+\frac{3}{14}}}=\frac{1}{4+\frac{1}{4+\frac{1}{\frac{14}{3}}}}$

$$=\frac{1}{4+\frac{1}{4+\frac{1}{4\frac{2}{3}}}}=\frac{1}{4+\frac{1}{4+\frac{1}{4+\frac{1}{\frac{3}{2}}}}}=\frac{1}{4+\frac{1}{4+\frac{1}{4+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}}$$

$$\tfrac{1}{4}=\tfrac{1}{4}.$$

$$\frac{1}{4+\frac{1}{4}}=\frac{1}{\frac{17}{4}}=\tfrac{4}{17}.$$

$$\frac{1}{4+\frac{1}{4+\frac{1}{4}}}=\frac{1}{4+\frac{4}{17}}=\tfrac{17}{72}.$$

$$\frac{1}{4+\frac{1}{4+\frac{1}{4+\frac{1}{1}}}}=\frac{1}{4+\frac{1}{4+\frac{1}{5}}}=\frac{1}{4+\frac{5}{21}}=\tfrac{21}{89}.$$

Tym ſpoſobém poſtępowania znayduiémy naſtępnie ułómki $\frac{1}{4}$, $\frac{4}{17}$, $\frac{17}{72}$, $\frac{21}{89}$, które co ráz bardziéy przybliżaią ſię do dawnégo ułómka $\frac{59}{250}$; tak dalece, że *np.* $\frac{17}{72}-\frac{59}{250}=\frac{1}{9000}$ tylko.

Zamiár tych, które daiémy, początków, nie pozwálá nám dłużéy bawić ſię około takowych dziáłáń, które Matematycy tego wieku, okázáwſzy liczné ich przyſtóſowania, bardzo ważnémi uczynili. Obácz w téy mierze *np. Algiebrę* Saundersona, Dzieło Eulera, pod tytułém *Introductio ad Analyſim infinitorum,* a oſobliwie przydatki P. de la Grange, do Algiebry Eulera, po Francuzku wydané.

284. *Zadanié 5. Kupił kto pewną liczbę łokci ſukna po Zł: 12, i znowu kupił inną liczbę łokci innégo gatunku ſukna po Zł: 17. Zapłacił za wſzyſtko Zł: 479*

Iląż ſpoſobami mogło ſię ſtać to kupno, przypuściwſzy, że liczba łokci ſukna oboyga gatunków była cáłkowitá?

Mianowanié. Niech będzie liczba łokci ſukna po Zł: 12 . . . x.

. . . . 17 . . . y.

Zapłata za wſzyſtkié łokcie 1go ſukna. . . . $12x$.

. . . . 2go. . . . . $17y$.

Warunek. $12x+17y=479$.

Przerábianié. $12x=479-17y$.

$$x=\frac{479-17y}{12}=39-y+\frac{11-5y}{12}=39-y-\frac{5y-11}{12}.$$

Ponieważ x, powinno bydź liczbą cáłkowitą; więc $39-y-\frac{5y-11}{12}$ powinno także bydź liczbą cáłkowitą.

A że $39-y$, ieſt liczbą cáłkowitą, ieżeli y, ieſt liczbą cáłkowitą; więc także $\frac{5y-11}{12}$, powinno bydź liczbą cáłkowitą.

Niech będzie $\frac{5y-11}{12}=a$. liczba cáłkowitá.

więc, ... $5y-11=12a$.

$$5y\quad=12a+11.$$

$$y\quad=\frac{12a+11}{5}=2a+2+\frac{2a+1}{5}.$$

Przez rozumowanié podobné poprzedzaiącému, będzie $\frac{2a+1}{5}=b$. liczba cáłkowitá.

$$2a+1=5b.$$

$$2a\quad=5b-1.$$

$a=$

$$a = \frac{5b-1}{2} = 2b + \frac{b-1}{2}.$$

$\frac{b-1}{2} = c.$ liczba cáłkowitá.

$$b-1 = 2c.$$
$$b = 2c+1.$$
$$a = 2b+c = 5c+2.$$
$$y = 2a+2+b = 12c+7.$$
$$x = 39-y-a = 39-(12c+7)-(5c+2) = 39-(17c+9) = 30-17c.$$

Rozwiąz: $x = 30 - 17c;$ . . . . $12x = 360 - 12 \times 17c.$
$y = 12c + 7;$ . . . . $17y = 119 + 12 \times 17c.$

Spráwdzénié. $12x + 17y = 479.$

W Zagadniéniach poprzédzaiących ostatnié, liczba rozwiązáń była nieograniczoną: ponieważ można było ilości niewyznaczonéy, w któréy niewiadomé ilości były wyrażoné dadź taką ważność cálkowitą i przydayną, iaką byśmy tylko chcieli. W zadaniach zaś gatunku takiégo, iak ostatnié zadanié, liczba rozwiązáń iest ograniczoną.

Jakoż aby y, było przydayném; trzeba do tego, aby można odiąć $17c$ od 30, więc $17c$ nie powinno bydź więksźé od 30, a zatém c, nie powinno bydź więksźé od $\frac{30}{17}$, albo od $1\frac{13}{17}$.

Aby także x, było przydaynem, trzeba do tego, aby $12c + 7$ nie było mnieysźé od o, więc $12c$ nie powinno bydź mnieysźé od -7, a zatém c, nie powinno bydź mnieysźé od $-\frac{7}{12}$. A zatém ważność c, iest między $-\frac{7}{12}$ i $1\frac{13}{17}$. A że c, bydź má liczbą cálkowitą; a między $-\frac{7}{12}$, i $1\frac{13}{17}$ dwie tylko są liczby cálkowité o, i 1, więc dwie tylko mogą bydź ważności odpowiedaiącé na zadanié, toiest o, i 1.

Rozwiązania szczególné, któré tylko samé odpowiédaią Zagadniéniu. $\left\{ \begin{array}{l} x = 30 \text{ albo } 13. \\ y = 7 \quad\quad\;\; 19. \end{array} \right.$

$12x = 360$	. . . .	$156.$
$17y = 119$	, ...	$323.$
$12x+17y = 479$	. . . .	$479.$

Insźé

Insze przykłady. 30 *Mężczyzn, i* 17 *kobiet odebrało razém w nagrodę roboty Zł:* 509. *Iléż iest sposobów, którémi możnáby zapłacić każdému mężczyźnie i każdéy kobiécie, aby iednak summa zawsze iednakowá wychodziła?*

Kupiono pewną liczbę łokci sukna po 25 *Zł: i pewną liczbę łokci materyi po Zł:* 7: *zapłacono ze wszystkiém Zł:* 995.

Kupiono 40 *sztuk bydła, toiest wołów, krów, i owiec.*

Każdy wół kosztowáł . . . Zł:	120.
. . . . krowa	90.
. . . . Owca	24.
Dano za wszystko Zł:	2838.

285. *Zadanié* 6. *Znaléźć wszystkié sposoby, którémi boki prostokąta mogą bydź wyrażoné w liczbach cáłkowitych, tak iednak, aby zawsze obwód tego prostokąta, tylé zawiérał zwyczaynych stóp, ilé powiérzchniá iego zawiérá stóp kwadratowych.*

Mianowanié Niech będą boki prostokąta . . x. i y.
Obwód iego . . . . . $2x+2y$.
Powiérzchniá . . . . . xy.

Warunek $xy = 2x+2y$.

Przerábianié. $xy-2x=2y$; albo $x(y-2)=2y$.

więc $x=\frac{2y}{y-2}$. Licznik $2y$ iest tu dwa razy tak wielki, iak piérwszy mianownika wyráz y. Dodáymy, i odeymiymy od tego licznika drugi wyráz mianownika podwóynie wzięty; będzie

$$x=\frac{2y-4+4}{y-2}=\frac{2y-4}{y-2}+\frac{4}{y-2}=\frac{4}{y-2}.$$

Aby x, było liczbą cáłkowitą, trzeba aby téż $\frac{4}{y-2}$ było liczbą cáłkowitą, więc 4 powinno bydź podzielné przez $y-2$: a zatém $y-2$ powinno równać się iednému z dzielników liczby 4.

A że takiémi dzielnikami są trzy liczby, 1, 2, 4; więc wáżności y, są trzy, 3, 4, 6, a wáżności x, odpowiedaiące tamtym są 6, 4, 3.

Dwa

Dwa więc Rozwiązania má Zadanié, toieſt bok ieden proſtokąta má 3 ſtopy, a drugi 6: albo tak iedén iak i drugi má 4 ſtopy.

Inſzé przykłady. Powiérzchniá proſtakąta powinna zawiérać 2, 3, 4, i t. d. razy tylé ſtòp kwadratowych, ilé ſtòp zwyczaynych zawiérá obwòd tegoż proſtokąta.

Niech znowu będzie Ròwnoległościán praſtokątny, ktòrégo iedén bok má 3 ſtopy. Znaléźć dwa inné boki tego ròwnoległościanu w liczbach cáłkowitych, tak iednak, aby bryłowatość iego, tylé ſtòp ſześciénnych zawiérała, ilé powiérzchniá iego zawiérá ſtòp kwadratowych.

286. *Zadanié 7. Znaléźć wſzyſtkié ſpoſoby napełniénia mieyſca, ktòré ieſt na płaſzczyźnie około iakiégo punktu, używaiąc do tego ſamych tylko kątòw wielokątòw forémnych.*

Widzieliśmy *w Częśći I. Jeom: §. 88*, że używaiąc kątów wielokątów foremnych iednégo gatunku, trzy tylko były ſpoſoby napełniénia niémi mieyſca na płaſzczyźnie około iakiégo punktu, toieſt że to mieyſcé napełnić ſię może,

6 kątami troykąta proſtokątnégo.
4 kątami kwadratu.
i 3 kątami ſześciokąta forémnégo.

Więcéy iednak ieſt ſpoſobów napełniénia tego mieyſca, gdy użyiémy kątów, wielokątów forémnych różnégo gatunku: któréto ſpoſoby wſzyſtkié teráz wyliczymy.

1. *Użyymy 4 kątòw tròykąta ròwnobocznégo:* mieyſcé niémi napełnioné, zawiérać będzie 4 razy $\frac{2}{3}$ kąta proſtégo, albo 2 $\frac{2}{3}$ kąta proſtégo: zoſtanie ieſzcze do napełniénia 1$\frac{1}{3}$ kąta proſtégo, którą to ważnosć má w ſobie 1 kąt ſześciokąta forémnégo.

2. *Użyymy trzech kątów tròykąta ròwnobocznégo:* zoſtaną ieſzcze do napełniénia dwa kąty proſté, co tylko wykonać potrafią dwa kąty kwadratu: ponieważ każdy kąt wielokąta, maiącégo więkſzą liczbę boków od kwadratu, ieſt téż więkſzy niż kąt proſty.

3. *Użyymy dwòch kątów tròykąta ròwnobocznégo, i iednégo kąta kwadratu:* zoſtanie ieſzcze do napełniénia 1$\frac{2}{3}$ kąta proſtégo. Więc kąt zewnętrzny wielokąta forémnégo, którégo kąta wewnętrznégo użyć trzeba, do napełniénia tego mieyſca, ważyć będzie $\frac{1}{3}$ kąta proſtégo, albo $\frac{1}{12}$ cztérech kątów proſtych. A że ważności kąta zewnętrznégo wielokąta forémnégo, dochodzimy dzieląc 4 kąty proſté przez liczbę boków wielokąta forémnégo, (Część I. Jeom: §. 86. i naſtęp:) więc liczba boków wielokąta, którégo użyć trzeba do dopełniénia mieyſca tego ieſt 12.

Jeżeli, oprócz dwóch boków tróykąta równobocznégo, użyiémy kąta pięciokąta, (którégo ważność ieſt $1\frac{1}{5}$ kąta proſtégo) zoſtanie ieſzcze do napełniénia $1\frac{7}{15}$ kąta proſtégo. Więc kąt zewnętrzny wielokąta użyć ſię maiącégo, powiniénby miéć $\frac{8}{15}$ kąta proſtégo, albo $\frac{2}{15}$ cztérech kątów proſtych: co w żadnym wielokącie forémnym bydź nié może. Jeżeli zaś na mieyſcé kąta pięciokąta, użyiémy kąta ſześciokąta forémnégo, który waży $1\frac{1}{3}$ kąta proſtégo; tedy zoſtanie ieſzcze do napełniénia $1\frac{1}{3}$ kąta proſtégo, co także wykona iedén kąt, ſześciokąta forémnégo.

Co do wielokątów trzymaiących większą liczbę boków od ſześciokąta: dwa ich kąty wążą więcéy niż dwa kąty ſześciokąta, a zatém wráz z dwómá kątami tróykąta równobocznégo, nié mogą napełnić mieyſca na płaſzczyźnie około iakiégo punktu.

4. *Użyymy iednego tylko kąta tròykąta ròwnobocznégo.* Jeżeli, oprócz tego, użyiémy iednégo ieſzcze kąta kwadratu; zoſtaną do napełniénia $2\frac{1}{3}$ kąta proſtégo: żádén zaś kąt na to ſię nie zdá ze wſzyſtkich wielokątów, których liczba boków ieſt większá nad 6. Jeżeli przydámy drugi kąt kwadratu; zoſtanie do napełniénia $1\frac{1}{3}$ kąta proſtégo, któráto ważność ieſt 1 kąta ſześciokąta.

Gdyby używſzy 1 kąta tróykąta równobocznégo, i kąta 1 kwadratu, użyłiśmy ieſzcze 1 kąta pięciokąta; zoſtáłby do napełniénia $1\frac{2}{15}$ kąta proſtégo: czégo żadén z kątów wielokąta forémnégo wykonać nié może. *Nakoniec ieżeli z dwoma piérwſzémi kątami, użyiémy kąta ſześciokąta forémnégo*; tedy czwárty kąt dopełniaiący mieyſcé, będzie kątém kwadratu, tak, iak iuż wyżéy widzieliśmy.

Niech znowu, oprócz kąta Tròykąta równobocznégo, drugi kąt będzie Pięciokąta forémnégo, (ieżeli to bydź może). W takim razie zoſtaną do napełnienia $2\frac{2}{15}$ kąta proſtégo: czego żádén z kątów Wielokątów wyżſzych nad pięciokąt, nié dokáże: bo lubo taki Wielokąt miáłby każdy kąt większy, niż $1\frac{1}{5}$ kąta proſtégo: ale zawſze mnieyſzy niż 2 kąty proſté.

Niech ieſzcze, oprócz kąta Tròykąta ròwnobocznégo, drugi kąt będzie Sześciokąta: zoſtaną do napełniénia 2 kąty proſté: czego żádén kąt Wielokątów wyżſzych od Sześciokąta dokázać nié może, ale tylko dwa kąty kwadratu, iako to iuż wyżéy pokázaliśmy.

Gdyby naoſtatek z kątém 1 Tròykąta ròwnobocznégo, chcieliśmy użyć innych kątòw, z ktòrych każdy należáłby do Wielokąta wyżſzégo nad ſześciokąt; tedy, ponieważ trzy takié kąty większé ſą od 4 kątów proſtych, nie trzebaby ich tylko dwa do napełniénia mieyſca pozoſtałégo.

Niech

Niech będą m i n, liczby boków w tych dwóch Wielokątach.

Każdy kąt ich ważyć będzie w kątach prostych $2 - \frac{4}{m}$, i $2 - \frac{4}{n}$.

(Część I. Jeometryi §. 85.)

Warunek. $\frac{2}{3} + 2 - \frac{4}{m} + 2 - \frac{4}{n} = 4.$

Przerabianie. $\frac{2}{3} - \frac{4}{m} - \frac{4}{n} = 0.$

albo, $\frac{1}{3} - \frac{2}{m} - \frac{2}{n} = 0.$

więc, $\frac{1}{3} = \frac{2}{m} + \frac{2}{n} = \frac{2n+2m}{mn}$; a zatém $\frac{mn}{3mn} = \frac{6n+6m}{3mn}$.

więc, $mn = 6n + 6m.$

$mn - 6m = 6n.$

$$m = \frac{6n}{n-6} = \frac{6n-36}{n-6} + \frac{36}{n-6} = 6 + \frac{36}{n-6}.$$

Dzielnikami liczby 36, są 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36.

Więc ważnościami ilości $n-6$, mogą bydź niektóre z tych liczb: ważności zaś odpowiedaiące ilości n, są 7, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 24, 42, a ważności odpowiedaiące ilości m, będą 42, 24, 18, 15, 12, 10, 9, 8, 7.

Co daie pięć różnych sposobów napełnienia mieysca, około punktu trzema kątami Wielokątów foremnych, z których ieden tylko byłby kątem Tróykąta równobocznego.

5. *Jeżeli użyiémy 3, albo dwóch kątów kwadratu*; tedy mieysce pozostałe będzie napełnione w pierwszym razie przez 1 kąt kwadratu, w drugim zaś razie, albo przez dwa kąty kwadratu, albo przez 1 kąt Tróykąta prostokątnego i kąt sześciokąta.

Jeżeli użyiémy 1 kąta kwadratu; tedy zostaną ieszcze do napełnienia 3 kąty proste: które to mieysce napełnione bydź powinno naywięcey przez 2 kąty Wielokątów wyższych od kwadratu.

Niech będą m, i n, liczby boków tych Wielokątów.

Ich kąty ważyć będą w kątach prostych.

$$2-\frac{4}{m}, \text{ i } 2-\frac{4}{n}, \text{ albo } 4-\left(\frac{4}{m}+\frac{4}{n}\right).$$

Warunek. $4-\left(\frac{4}{m}+\frac{4}{n}\right)=3.$

Przerab: $1-\left(\frac{4}{m}+\frac{4}{n}\right)=0.$

$$1=\frac{4}{m}+\frac{4}{n}.$$

albo; $\frac{mn}{mn}=\frac{4n+4m}{mn}.$

więc, $mn=4n+4m.$

a zatém $mn-4m=4n.$

albo; $m(n-4)=4n.$

więc $m=\frac{4n}{n-4}=\frac{4n-16}{n-4}+\frac{16}{n-4}.$

Dzielniki liczby 16, toieſt ważności ilości $n-4$,

ſą	1,	2,	4,	8,	16.
Ważności odpowiedaiącé ilości n	5,	6,	8,	12,	20.
Ważności odpowiedaiącé ilości m	20,	12,	8,	6,	5.

Więc używſzy iednégo tylko kąta kwadratu, trzy ſą ſpoſoby napełniénia mieyſca pozoſtałégo dwoma kątami wielokątów forémnych, toieſt iednym kątém Pięciokąta, i iednym Dwudzieſtokąta; iednym kątém Sześciokąta, i iednym Dwunaſtokąta; i dwoma kątami Ośmiokąta.

6. *Jeżeli użyiémy iednégo kąta Pięciokąta*, tedy mieyſcé pozoſtałé, powinno ſię napełnić przez dwa także kąty.

Niech będą m, i n, liczby boków Wielokątów, których kąty powinny napełnić mieyſcé pozoſtałé. Ważności tych kątów ſą, $2-\frac{4}{m}$, i $2-\frac{4}{n}$; których ſumma ieſt $4-\left(\frac{4}{m}+\frac{4}{n}\right)$. A że ta ſumma powinna ważyć w kątach proſtych $4-(1\frac{1}{5})$; więc

$$4 - \left(\frac{4}{m} + \frac{4}{n}\right) = 4 - (1\tfrac{1}{5}).$$

$$\text{albo } \frac{4}{m} + \frac{4}{n} = \tfrac{6}{5}.$$

$$20m + 20n = 6mn.$$
$$6mn - 20m = 20n.$$
$$m(6n - 20) = 20n.$$
$$m = \frac{20n}{6n-20} = \frac{10n}{3n-10}.$$

A że $\frac{10n}{3n-10}$ powinno bydź liczbą całkowitą; więc także liczbą całkowitą będzie $\frac{30n}{3n-10}$. Że zaś $\frac{30n}{3n-10} = \frac{30n-100}{3n-10} + \frac{100}{3n-10} = 10 + \frac{100}{3n-10}$

Więc $\frac{100}{3n-10}$ powinno też bydź liczbą całkowitą: a zatém $3n - 10$, powinno bydź dzielnikiém liczby 100.

A że dzielnikiém liczby 100.

są . . . . . . 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100.

więc $3n - 10 =$ 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100.

$3n =$ 11, 12, 14, 15, 20, 30, 35, 60, 110.

A ważności całkowité ilości n, są . . . 4, 5, 10, 20.

Ważności odpowiedaiącé ilości m . . . 20, 10, 5, 4.

Więc dwa są sposoby napełniénia mieysca około punktu trzéma kątami, z których iedén byłby kątém Pięciokąta. Piérwszy z tych sposobów, iuż był wyżéy wynaleziony: w drugim używá się dwóch kątów Pięciokąta, i iednégo kąta Dziesięciokąta.

7. *Nie zostaie iuż, tylko użyć ieszcze trzech kątów Sześciokąta:* ponieważ każdy kąt Wielokąta maiącégo więcéy niż 6 boków większy iest niż kąt Sześciokąta; a zatém trzy iakiékolwiek kąty Wielokątów wyższych od Sześciokąta, ważyłyby więcéy niż 4 kąty prosté. Ponieważ zaś każdy kąt iakiégożkolwiek Wielokąta forémnégo waży mniéy niż 2 kąty prosté; więc trzeba przynáymniéy trzech kątów Wielokątów forémnych do napełniénia mieysca około punktu.

Powtórzénié. Sposoby napełniénia mieysca około punktu na płaszczyźnie, przez kąty Wielokątów forémnych.

Napełnią to mieysce.

1. 6 Kątów Tróykąta równobocznégo.
2. 4 Kąty Tróykąta równobocznégo i kąt Sześciokąta.
3. 3 Kąty Tróykąta równobocznégo i 2 kąty kwadratu.
4. 2 Kąty Tróyk: równob: 1 kąt kw: i 1 kąt Dwunastokąta.
5. 2 . . . . i 2 kąty Sześciokąta.
6. 1 Kąt Troyk: równob: 2 kąty kw: i 1 kąt Sześciokąta.
7. . . . . i 1 kąt Siedmiokąta, i 1 kąt Czterdziest:
8. . . . . i 1 kąt Ośmiokąta, i 1 kąt Dwudziestoczwar.
9. . . . . , ... i 1 kąt Dziewięć: i 1 kąt Osimnastokąta.
10. . . . . i 1 kąt Dziesięciok: i 1 kąt Piętnastokąta.
11. . . . . 2 kąty Dwunastokąta.
12. 4 Kąty kwadratu.
13. 1 Kąt kwadratu, 1 Pięciokąta, i 1 Dwudziestokąta.
14. . . . . 1 Sześciokąta, i 1 Dwunastokąta.
15. . . . . i 2 Ośmiokąta.
16. 2 Kąty Pięciokąta, i 1 Dziesięciokąta.
17. 3 Kąty Sześciokąta.

Z tych różnych sposobów niektóré takié są, że używszy ich do napełnienia mieysca około punktu, można ié daléy ciągnąć do przykrycia iakiégo mieysca na płaszczyźnie, i mogą bydź przystósowané w Budownictwie domowém. I takié są z pomiędzy wzwyż wyliczonych, 1wszy, 12y, 14y, 15y, 17.

287. *Zadanié 7. Znaléźć trzech boków Tróykąta prostokątnégo takié wyrażénia, aby boki té były spółmiérné.*

Mian: Niech będą x, i y, dwa ramiona kąta prostégo tego Tróykąta. Summa kwadratów tych 2 ramión, albo kwadrát przeciwprostokątnéy, będzie $xx+yy$.

Aby przeciwprostokątna, była spółmierną, trzeba do tego, żeby to wyrażénié $xx+yy$ było kwadratém.

Niech będzie $x+v$ piérwiástkiém tego kwadratu.

Warunek. $xx+yy=(x+v)^2$.

Przerábianié. $xx+yy=xx+2vx+vv$.

$$yy= \quad 2vx+vv.$$

$$2vx=yy-vv.$$

$x=$

$$x = \frac{yy - vv}{2v}.$$

$$xx = \frac{y^4 - 2vvyy + v^4}{4vv}.$$

$$xx + yy = \frac{y^4 + 2vvyy + v^4}{4vv} = \left(\frac{yy + vv}{2v}\right)^2$$

Więc gdy y, i v, ſą ilościami ſpółmiernémi, to i trzech boków Tróykąta proſtokątnégo wyrażénia, któreby té boki ſpółmiernémi oznaczyły będą y, $\frac{yy-vv}{2v}$, i $\frac{yy+vv}{2v}$. A zatém té trzy boki ſą do ſiebie, iak té trzy ilości $2vy$, $yy - vv$, i $yy + vv$.

Przykłady. Niech będzie $y = 2$; $v = 1$.

W takim razie 3 boki będą $4, 3, 5,$

Niech będzie $y = 3$; $v = 2$.

W takim razie 3 boki będą 12, 5, 13.

288. *Przyſtòſowaniè. Znalèżć wyrażénia ſpòłmiernè iakiégokolwiek Tròykąta takié, aby wyſokość iego, a zatém i powiérzchniá i promiéniè koła wpiſanégo, i opiſanégo, były także wyrażonè ſpòłmiernie.*

To Zagadniénié łatwo przywieśdź do poprzedzaiącégo.

Jakoż oznaczywſzy wyſokość Tróykąta przez y, a dwa odcinki podſtawy, któré czyni proſtopadłá, oznaczywſzy przez $\frac{yy-vv}{2v}$, i $\frac{yy-xx}{2x}$ dwa inné boki będą, iedén $\frac{yy+vv}{2v}$, drugi $\frac{yy+xx}{2x}$. Podſtawa oznaczoná będzie przez ſummę albo przez różnicę dwóch odcinków $\frac{yy-vv}{2v}$, i $\frac{yy-xx}{2x}$, toieſt przez $\frac{x(yy-vv) \pm v(yy-xx)}{2vx}$; (przez ſummę, gdy proſtopadłá przypádá na ſamę podſtawę, przez różnicę, gdy proſtopadłá przypádá na przedłużénié podſtawy.) A zatém trzy boki Tróykąta, i wyſokość, będą do ſiebie iak té wyrażénia $x(yy-vv) \pm v(yy-xx)$; (albo $(yy-vx)(x \pm v)$), $x(yy+vv)$, $v(yy+xx)$, i $2vxy$; gdzie x, y, v. znaczą ilości ſpółmierné i całkowité.

Wyra-

Wyrażénié powiérzchni $vxy(x(yy-vv)\pm v(yy-xx))$.
$= vxy(yy-vx)(x\pm v)$.

Wyrażénié promiénia koła wpiſanégo wypadnie z podzielénia powiérzchni, przez połowę obwodu, i będzie

$$\frac{vxy(yy-vx)(x+v)}{xyy+vyy} \text{ albo } \frac{vxy(yy-vx)(x-v)}{xyy+vxx}.$$

toieſt . . . . $\frac{vx(yy-vx)}{y}$, albo $\frac{vy(yy-vx)(x-v)}{yy+vx}$.

Wyrażénié promiénia koła opiſanégo, wypadnie ſtąd, iż Proſtokąt z śrzednicy przez wyſokość, równá ſię Proſtokątowi ze dwóch boków: a zatém wyrażénie śrzednicy, będzie równé wyrażéniu Proſtokąta ze dwóch boków, podzielonému przez wyrażénié wyſokości, a połowa tego wſzyſtkiégo będzie wyrażéniém promiénia koła opiſanégo, toieſt $\frac{x(yy+vv)\times v(yy+xx)}{4vxy} = \frac{(yy+vv)(yy+xx)}{4y}$.

Przykłád. Niech będzie $y=3$, $v=1$, $x=2$.

Będą boki Tróykąta $2(8)\pm 1\times 5$; $2(10)$; $1(13)$.

toieſt $\frac{21}{11}$; 20 13.

Wyſokość 12.

Promiéń koła wpiſanégo $\frac{14}{3}$; albo 3,

Promiéń koła opiſanégo $\frac{65}{6}$.

Wyrażénia cáłkowité (rozmnożywſzy wſzyſtkié poprzedzaiącé przez 6) będą

Podſtawa $\frac{126}{66}$. Boki 120; 78. Wyſokość 72.

Promiéń koła wpiſanégo $\frac{28}{18}$ koła opiſanégo 65.

Powiérzchniá $\frac{4536}{2376}$.

Zadania gatunku takiégo, iakiégo ieſt poprzedzaiącé, w których rzecz idzie o to, aby dokazać tego, iżby podané ilości, były kwadratami, nazywané ſą *Zagadniéniami Diiofantycznémi*, od nazwiſka Matematyka, którégo pozoſtało iedno całé dziéło w téy materyi. Gdybyśmy mieli obſzérniéy nią ſię zatrudniać, przechodziłoby to zamiár tych początków Algiebry. Kto zechce więcéy w téy mierze nabydź wiadomości niech czyta Algiebrę SAUNDERSONA, a mianowicie drugi Tom Algiebry EULERA, gdzie znaydzie dokładnie to, czego żądá.

KONIEC ALGIEBRY.

KRÓTKI ZBIÓR
HISTORYI MATEMATYCZNÉY.

Izbytnią i niepodobną byłoby rzeczą zwracać się aż do piérwszych zawziątków nauki tak powszechnie użytecznéy, iak iest Arytmetyka. Ustanowiénié prawa własności, i utworzénié towarzystwa choćby téż náymniéy licznégo, iest Epoką, w któréyby szukać należało piérwszych nauki téy szladów. Ale w czasach owych, gdzie rozum grubą ieszcze ciemnotą był pokryty, przestaiąc ludzie na tém, co nagleyszym ich potrzebom dogádzało, trzymali się zápewne bardzo nie doskonałégo sposobu rachowania swéy trzody, i innych dobytków, a wiadomości ich w téy mierze, tak szczupłémi były określoné granicami, że imiénia Nauki ani zasłużyć, ani nosić nié mogły.

Toż sprawiedliwie twiérdzić możná i o piérwszym Jeometryi wynaleziéniu. Jeżeli iednak domyślać się godzi, tedy podobno przed wszystkiémi innémi Narodami Egipcyanie zatrudniali się tą częścią Jeometryi, która do rozmiaru i podziáłu gruntów się ściągá. Gdy Nil wylewami swémi, zabiérał iednym właścicielom pola, a przydawał drugim, potrzeba stąd wynikła dlá Egipcyán, wyznaczénia rozległości i położénia każdégo gruntu w szczególności, aby rosterki wyniknąć z podobnégo zamiészania mogącé, łatwiéy napotém uspokoić. Práce za panowania Sezostrysa nakázané, i podięté około kopania schodzących się kanáłów, którémi w różne strony Egipt był przerznięty, i inné tego rodzaiu, doſtatecznie dowodzą, że iuż owych czaſów nie mało w téy części Jeometryi poſtąpiono. Zdało ſię nawet poſpólſtwu, iż takowá robota, więcéy niż ludzkiégo rozumu ſkutkiém była, i przeto Bóſtwu za nię cześć oddawało. Jeſt nawet do prawdy podobieńſtwo, że u tychże Egipcyän zawzięła ſię piérwſzy ráz Matematyka uważaná, ilé ieſt Nauką i zbiorém niezawodnych prawideł. Przyczynę tego bardzo pozorną daie Aryſtoteles, że w tym kraiu, mówi on, duchowni uwolnionémi byli od goſpodarſkich zatrudnién, i czas ſwóy doſkonaléniu rozumu poświęcali. Twiérdzić iednak z pewnością nié można, iak obſzérné były w téy mierze ich wiadomości.

Thales Milezyusz, który żył około 600 roku przed narodzéniém Chryſtuſa Pana, piérwſzy z Greków, ilé nám ieſt wiadomo, guſt do nauk Matematycznych wzniécił, i rozſzérzył. Tym końcém przeniósł ſię on do Egiptu, aby był z przewodnictwa tamteyſzych Xięży, ſkárb nauk wſzyſtkich pod ſwoim kluczém trzymaiących pożytkowáł: i tylé tam w krótkim czaſie poſtąpił, że ſamych nawet przeſzedł Nauczycielów. Wymiàr Piramid przez niego uczyniony, z cienia, który rzucały, zadziwił Króla Amazyſa. To działanié, które dziś zdaie nám ſię tak proſté, okazywało w owym czaſie wielki dowcip wynalázcy. Umiáł on niedoſtępnych przedmiotów wyznaczać odległości, lubo nie wiémy czyli iému winniśmy tén wynalazek. Nie doſzło do nás żádné dziéło tego dawnégo Jeometry; wielé mu iednak nowo odkrytych wiadomości przypiſuią. Między innémi ieſt i ta o nim powieść, że gdy doſzedł właſności kąta w półkole, takiém to zadziwiéniém i radością go napełniło, że na znak wdzięczności ofiarę za tén dar Muzóm uczynił.

Nie ieſt tu mieyſcé mówić o licznych Thalesa wiadomościach, w innych częściach Matematyki, a oſobliwie w Aſtronomii.

Był on fundatorém ſekty, nazwanéy *Jońſką*; i miáł wielu w niéy uczniów, których tu imiona opuſzczámy, zwláſzcza że práce ich w Matematyce teoryczněy bardzo mało nám ſą wiadomé.

Nié możémy atoli zamilczyć o Pitagoresie, urodzonym około 540 roku przed Chryſtuſém Panén, o uczniu Thalesa náyſławniéyſzym z obſzérnych w Aſtronomii, Jeometryi, Muzyce, Metafizyce, i innych głębſzych naukach wiadomości. Idąc on za radą Nauczyciela ſwégo, udáł ſię także do Egiptu, a ſtamtąd do Indyi, do tamteyſzych Brachmanów, od których ſławné o przenoſzéniu ſię duſz z ciała do ciała (Metempſicoſis) zdanie przeiął, i potém utrzymywáł.

Wielé kraiów zwiedziwszy, osiádł we Włoszech, gdzie założył szkołę nazwaną *Pytagorycką*, która znaczną liczbę sławnych Matematyków wydała.

Odkrytá i dowiedzioná piérwszy ráz przez Pitagoresa równość kwadratu przeciwprostokątnéy z summą kwadratów ramión kąta prostégo, dosyćby była do uczyniénia imienia iego wiekopomném. Przyganiaią mu iednak, i ucznióm iego, że częstokroć w Matematyce i w Fizyce szli za wykwintnémi a nawet i dziwacznémi wyobrażeniami, ktòre sobie w układzie świata poczynili. Nie wchodząc w pobudki ich szperáń przyznać wszelako należy, iż wielé rzeczy bardzo ważnych stąd odkryto. Naukę brył foremnych przez nich podaną, sprawiedliwie dziś poczytuią za rzecz saméy tylko ciekawości dogadzaiącą; i cale się nie ściągaiącą do układu świata. Jak wielé atoli mámy wiadomości Jeometrycznych i Arytmetycznych, do których ta nauka zagłębiona, tak iak się zdaie, iż była przez Pitagoreyczyków, otwierá drogę? Takąż w szczególności była i nauka o ilościach niespółmiernych, które sobie za cel godny usilnych szperáń wystawili. Jakoż doprowadziła ich do zagadnień tego gatunku, ktòréśmy nazwali zagadniéniami diiofantycznémi, a w których do tego się zmiérzá, aby uczynić spółmiérnémi ilości té, ktòre uważané ogólnie, wystawuią nám się pod kształtém ilości niespółmiérnych. Takié naprzykład iest wyrażénié spółmierné trzech boków tróykąta prostokątnégo.

Empedocles, Filolaus, Architas, Timeusz, i Leucippus, byli znakomitszymi Pitagoresa uczniami: dzieła ich do nas nie doszły, po większéy zaś części ściągały się do Matematyki praktycznéy, a w szczególności do Astronomii. Dokładność i głębokość wielu ich wyobrażéń względém téy ostatniéy nauki dowodzą dostatecznie, iak obszérné mieli wiadomości i w Matematyce teorycznéy.

Toż twiérdzić možná i o dziełach Demokryta, który, iako zaświadcza *Poema* Lukrecyusza *o przyrodzeniu rzeczy* (de natura rerum) zdrowo bardzo i czysto sądził o wielu ważnych w Fizyce materyach.

Hippokrates z *Chio*, ułożył xiążkę początkową Jeometryi; nie znany teráz skądinąd, iak tylko z *Xiężyczków*, które się od imiénia iego nazywaią *Lunulae Hippocratis*.

Założénie szkoły Platońskiéy, iest znakomitą Epoką postępku w Matematyce. Plato, uczéń Sokratesa, czuł więcéy nad swego nauczyciela ważność, i powaby téy nauki. Zwiedziwszy Egipt, i udáwszy się do Włoch, dlá nabrania światła większégo od sławnieyszych Pitagoreyczyków; powrócil cił około roku 370 przed Chryſtuſém Panéḿ do Atén oyczyzny ſwoiéy, gdzie założył ſławną ſzkołę, zaſzczyconą imiéniém Jego. Jeometryá była zaſadą iego nauk. Nad bramą wchòd do ſzkoły czyniącą, wyryty czytać ſię dáwáł napis, wyłączaiący od ſpołeczeńſtwa nauk iego tych wſzyſtkich, ktòrymby początki Jeometryczne nie znané ieſzcze były.

Platonowi winniśmy część Jeometryi nazwaną *Rozbiorém dáwnym* (Analyſis antiqua).

Lubo mało nadto używana témi czaſy, przeczyć atoli nié możná, iż znacznie i ſzczęśliwie pomogła do wydoſkonalénia Jeometryi. Rozbiòr takowy zawiſł na tém, aby rozwiązać zagadniénié Jeometryczné, przez Jeometryą teoryczną, z uważania ſaméy figury, i przez takié wykréślénié, do iakiégo prawie zawſze prowadzą ſpoſobém wybornieyſzym rozumowania proſto do tego zmiérzaiącé, niżeli rachunek.

Drugim wynalazkiém ieżeli nie Platona, tedy uczniòw iego, ſą *Przecięcia oſtrokręgowé* (Sectiones conicæ), i ich własności. Przyſtòſowali ié oni do rozwiązania ròżnych zagadnień, ktòrych albo przez liniią proſtą, albo przez ſamo koło rozwiązać nie możná. Takié ſą *np.* zagadniénia przecięcia iakiégokolwiek kąta na trzy ròwné części, wynaleziénia dwòch śrzednich ciągło-proporcyonalnych, i dwumnożénia ſześcianu. Spoſòb rozwiązania tych zagadnień podany od Menechma, i Dynostratesa, doſzedł do naſzéy wiadomości.

Trzecim wynalazkiém ściſły związek maiącym, z każdym ze dwòch powyżſzych, ſą *Mieyſca Jeometryczné*, których przykłady mieliśmy podané w początkowéy Jeometryi, a których obſzérnieyſzé wyłuſzczénié znaléźć będzie możná, w dziéle od nas zamyślonéḿ, a ściągaiącém ſię mianowicie do piérwſzégo z tych trzech wſpomionych wynalázkòw.

Arystoteles, uczeń Platona, a nauczyciel wielkiégo Alexandra, i uſtanowiciel ſzkoły Perypatetyckiéy, znaiomſzy nám ieſt daleko bardziéy z prác ſwoich w Filozofii, Fizyce, i Hiſtoryi naturalnéy, niżeli w Matematyce.

Roſtérki i zamiéſzania zaſzłé po śmierci Alexandra wielkiégo, nie mało zatamowały poſtępek dalſzy nauk.

Założénié *Szkoły Alexandryyſkiéy* pod panowaniém Ptolomeuſzòw, czyni nową Epokę, w ktòréy nauki życié odzyſkały.

Między innymi Matematykami, ktòrych względy od Ptolomeuſzòw uczonym okazywané pociągnęły do Egiptu, wſławił ſię mianowicie Euklides, oſiádłſzy tám około roku 300 przed Chryſtuſém Paném. Oyczyzna iego, i ſzczei ſzczególnieyſzé życia okoliczności ſą nám niewiadome. Początki Jeometryi przez niego napiſane ſtały ſię iakoby xięgą świętą dlá wſzyſtkich Matematyków. Zgromadził on tam w związku przedziwnym náyważnieyſzé podania początkowéy Jeometryi na ów czas znané. Sześć piérwſzych iego xiążek, prócz tych iedenáſtá i dwunáſtá, powinny być koniecznie czytané, i zrozumiané od tych, którzy tylko chcą pożytkować z dzieł Fizycznych, i wyżſzéy Matematyki; tak dlá wybornégo porządku i związku nieprzerwanégo podań iednych z drugiémi, iako téż i dlá tego, że wſzyſcy prawie Matematycy odſyłaią do xięgi Euklidesa, gdzie tylko zachodzi materya, którą on ſię zatrudniáł, albo gdzie poprzedzaiąca wiadomość iego dzieła potrzebna ieſt do zrozuménia tego, czego autor chce nauczyć.

Dzieło to Euklidesa było roztrząſané, wyłuſzczané, i przekſztáłcané od wielu Matematyków. Náylepſzé iego wydania ſą té, które naywięcéy zbliżaią ſię do oryginału Greckiégo. Takim ieſt Bermanna po łacinie, i Roberta Simpsona po Angielſku, które po Francuzku przełożył P. Castillon.

Drugié dzieło Euklidesa mniéy znané od piérwſzégo, a ściągaiącé ſię do Rozbioru dáwnégo, do którégo téż za wſtęp ſłużyć powinno, má tytuł. *Dané*, (ilości) (Data). Spodziéwámy ſię mieć ſpoſobność obſzérnie o nim mówiénia w dziele naſzém o téy materyi. Inni filozofowie ſzkoły Alexandryyſkiéy ſzczególniey ſię Aſtronomiią zatrudniali.

Archimedes, urodzony w Syrakuzie około roku 287 przed Chr: Panem, naywięcéy ze wſzyſtkich ſtarożytnych Matematyków podochodził rzeczy nayważnieyſzych, i naytrudnieyſzych. Jemu winniśmy wiadomość ſtoſunku powiérzchni, i bryłowatości kuli do powiérzchni, i bryłowatości walca na niéy opiſanégo. Wynalázek tén tak mu był ſzacowny i miły, że chciáł go mieć wyrytym na grobie ſwoim. On piérwſzy wyznaczył ſtoſunek okręgu koła, do iego średnicy, ſpoſobém cale doſtatecznym do wſzyſtkich przyſtóſowáń w kunſztach, i potrzebach życia. Do wyznaczénia tego użył wielokątów foremnych o 96 bokach, i w naſtępnych piérwiáſtków kwadratowych wyciąganiach, potrzebnych do zamiérzonégo przybliżénia, a zawiſłych iednych od drugich, poſtąpił ſobie z zręcznością pełną takiéy przezorności, że omyłki nawet nieuchronné w takowych naſtępnych wyciąganiach, zamiáſt co miały oſłabiać iego rachunek, ieſzcze mu pomágały. Z tego wynalazku mógł przez przybliżénié porównywać koło i iego części, z mieyſcami przez proſté linie zawartémi, powiérzchnie, i bryłowatości oſtrokręgów, walców, kul, i ich części, z powiérzchniami płaſkiémi proſtokreślnémi, i bryłami zakończonémi przez powiérzchnie płaſkié. Odkrył on wielé ieſzcze innych rzeczy

)a3(nawet

nawet w Matematyce teoryczney, które iednak nie wchodzą w układ tych początków. Wynaleziénié przez niego dokładnéy kwadratury *Paraboly* albo *Równorzutni*, piérwszy wystáwiá przykład krzywéy linii mogącéy się zupełnie kwadrowáć, czyli porównać z powiérzchnią prostokréślną.

Dzieła dawnych Matematyków, a w szczególności ARCHIMEDESA, różnią się mianowicie od nowszych, w téy ścisłości postępowania, któréy się zawsze trzymali w swoich dowodzeniach W Części II. Jeometryi §. 104 i nast: staraliśmy się dadź dokładné wyobrażénié ich *sposobu czérpania*, którégo, oprócz innych przystósowáń, używali szczególniey do zamiany porównániá mieysc krzywokréślnych, i powiérzchni krzywych, na porównanie mieysc prostokréślnych; i do porównania brył zakończonych powiérzchniami krzywémi, tak z sobą, iako téż i z bryłami zakończonémi przez powiérzchnie płaskié. Sposób tén mógłby bydź sprawiedliwie uważanym, iak nasiénié wynalázków w nowych rachunkach, które wsławiły teraźnieyszych Matematyków.

Zamiár nasz nie pozwálá nám mówić tu, czego doszedł ARCHIMEDES w częściach wyższéy Matematyki, i w częściach Fizyko-Matematycznych, Mechanice, Katoptryce, i Hidraulice, które piérwszy zaszczepił. Obrona Syrakuzy, któréy przez samo tylko podeyście Rzymianie dostać mogli, wielkość i wytworność dowcipu ARCHIMEDESA okazuie. Naylepszé wydanié dzieł iego iest to, którém się zatrudnił Doktór BARROU.

APOLLONIUS z *Pergu* w Pamfilii, urodzony prawie w półtrzecia wieku przed Chrystusém Panem; nazwany był *wielkim Jeometrą*, z przyczyny zapewné wielu bardzo w Matematyce wiadomości, które posiádał; bo co się tycze dowcipu, w tym bez wątpienia ARCHIMEDES przeszedł wszystkich dawnych.

Wsławił się szczególniey APOLLONIUSZ dziełem o Przecięciach Ostrokręgowych. Które w swoim gatunku iest tém, czém dzieło EUKLIDESA iest względem Matematyki początków.

Inne APOLLONIUSZA dzieła zawiéraiącé początkowé Matematyki Części w szacunku są, osobliwie u tych, którzy się przywiązali do Rozbioru Jeometrycznégo dawnych.

Piérwszé z tych dzieł, o *Przecięciu myślném*, (De Sectione Rationis) doszło nas w ięzyku Arabskim. P. HALLEY, iedén z celnieyszych Matematyków tego wieku, dał nám poznać to Dzieło w wyborném onego wydaniu po łacinie, roku 1708. Zagadnienié nayogólnieysze, które się tam rozwiązané znáyduie, iest następuiącé: *Maiąc dané z położénia dwie linii prosté, i dwa punkta, (po iednym na każdéy z tych linii) pociągnąć przez trzeci punkt dany linią trzecią, któráby od dwóch piérwszych odcięła części rachować się maiącé od punktów danych, takie, któ-*

ktòréby były w stosunku danym. Wielka odmienność, która bydź może w położeniach trzech punktów danych, czyni téż wielką rozmaitość przypádków, przez które to Dzieło służy bardzo do ćwiczénia się w Rozbiorze.

Uważaiąc wytknięte od Pappusa mieysca, w Xiędze pod tytułem *Zbiory Matematyczné*, (Collectiones Mathematicæ) pozbierali Matematycy teraźnieysi, i na nowo nám prawie podali Dzieła Apolloniusza.

Tenże sám co wyżéy P. Halley, przywrócił nám Dzieło o *Przecięciu mieysca* (De Sectione Spatii).

Różni się to Dzieło w tém od piérwszégo, że zamiást stosunku części odciętych przez liniią szukaną, kładzie się ich prostokąt.

W Dziéle o *Przecięciu wyznaczoném* (De Sectione determinata) znayduie się rozwiązanié náyogólnieyszégo zagadniénia następuiącégo: *Maiąc dané cztéry punkta na iednéy linii, znaléźć punkt piąty na téyże saméy linii, taki, aby Prostokąt odległości tego punktu, od dwòch punktòw danych, był do Prostokąta odległości tegoż punktu od dwòch innych danych, w danym stosunku.* Dzieło to Apolloniusza było naprzód ułożoné przez Sneliiusza Matematyka Hollenderskiégo, ale sposobem od Jeometrycznégo bardzo oddalonym. Dało się potém widzieć wráz z innémi wybornémi rozbioru Matematycznégo wzorami w Dziełach pogrobowych (posthuma) Roberta Symsona (*)

Ténże sám Matematyk powrócił do swoiéy całości inné ieszcze Appolloniusza Dzieła pod tytułem: *Mieysca płaskie* (Loca plana) tak w rozbiorze Jeometrycznym potrzebné, iak Euklidesa Dané (ilości). To Dzieło, które w swoim czasie, i mieyscu obszérniéy i dokładniéy poznać damy, zawiérá wielé własności mieyscowych linii prostéy, i koła. Zebrał ie także, i ułożył Fermat i Schotten, ale w dokładności uchybili.

W Piątym Dziéle o *Dotknięciach* (de Tactionibus) náytrudnieysze iest Zagadnienie *wykréślenia koła ktòréby się trzech innych dotykało*; a w ogólności Dzieło to zawiérá rozwiązanié dziesiąciu Zagadnień, w które wchodzą punkta, linie, i koła, wyznaczaiące wielkość i położénié takiégo koła; któreby się ich dotykało. Viete Matematyk, Francuz, żyiący w szesnástym wieku wydał na nowo to Dzieło pod imiéniém Apoloniusza Francuzkiégo; wráz z swoiém trudnieyszém ieszcze od piérwszégo, gdzie zamiást liniy prostych, i kół,

kła-

(*) Winniśmy wyborné Dzieł pogrobowych tegoj wielkiégo Matematyka wydanié, staraniu i wspaniałości Lorda Stanhope, iednégo z nayglębszych Matematyków tego wieku. Przyznać należy, iż w Anglii Jeometryá dawnych znalazła swoié schroniénié, a tén z wielu miár zacny Pan, nie mało się z strony swoiéy przyłożył do iéy rozszérzenia.

kładzie płaſzczyzny, i kule którychby dotykała ſię kula ſzukaná. Dzieła tego Matematyka ſą bardzo rzadkie, i trudno ich doſtać. LAWSON Angielczyk, dobrze biegły w Rozbiorze dáwnych, wydaniém wybornem obudwóch tych dzieł w oyczyſtym ſwoim ięzyku, łatwieyſzémi ie do nabycia uczynił.

Dziéło naoſtatek APOLLONIUSZA o *Pochyłościach* (De inclinationibus) zawiérà w ſobie między innemi, ogólné Zagadnienie, i do wielu bardzo ſzczególnych przypàdków, mogące ſię przyſtoſować, a to ieſt takowe: *Niech będą dwa koła dané z położenia, i niech środki ich łączą ſię linią: przez punkt gdzie ta linia ſpotyká okrąg iednégo z kòł, trzeba poprowadzić taką linią, ktòréy część zawartá między okręgami tych dwòch kół, byłaby wielkości danéy.* MARYN GETHALDI Raguzańczyk po części pozbierał to dzieło; dopełnił go ANDERSON, ale ſpoſobém cale Algiebraicznym. HORSLEY Sekretarz Towarzyſtwa uczonych Londyńſkiego, zatrudnił ſię takiém iego wydaniém którému nic nie brakuie.

TEODOZYUSZ z Trypolu znany ieſt mianowicie z Dzieła ſwego, o ilościach *Kuliſtych* (De ſphaericis) ktòré lubo ſzczególniéy ściągá ſię do Aſtronomii, nauki celnieyſzey tego Matematyka, átoli iednak ſłużyć może i do Jeometryi początkowéy. Wydanié tego dzieła przez Doktora BARROW ieſt naylepſzé.

Matematyka ròwnié iak i inné nauki i umiejętności, iednakowego w zaniedbaniu ich doznały loſu przez piętnáście, lub ſześnaście wiekòw *Czaſokrzu* (aera) Chrześciańſkiego. Długi ten przeciąg wiekòw ciemnych gdzie nie gdzie zabłyſnął światłém dowcipu, ktòrégo iednak ani liczba, ani obſzerność nie odpowiadała cale tak wielkiéy czaſu rozległości.

MENELAUS w drugim wieku piſał o *Trygonometryi.* Dzieło iego o *Cięciwach* (de Chordis) ktòré do nàs nie doſzło, zawiérać w ſobie miało ułożénié Tablic Trygonometrycznych. Zoſtawił ieſzcze pamiątkę ſwoię w dziele o *Troykątach kuliſtych.*

SEVERUS w trzecim, lub czwartym wieku podał o *Przecięciach Walca* Dziéło ſwoie, w ktòrém wielé znayduié ſię kawàłkòw początkowych. HALLEY w wydaniu ſwoiém przyłączył ié do przecięć Oſtrokręgowych APOLLONIUSZA.

Do tąd nic prawié nie mòwiliśmy o wiadomościach Matematykòw dáwnych w rachunku. Jakoż bardzo mało poznakòw mamy ich w tey mierze ſzperáń i dochodzeń. Kſięgi iednak 7, 8, 9, 10, EUKLIDESA dowodzą między innémi poſtępku ich i w téy części Matematyki; a nawet i prá-

ce

ce Aſtronomiczne, ktòremi ſię zatrudniali, wyciągały koniecznie téy wiadomości. Nie ieſt nám wiadomo, czyli ſpoſòb od nich użyty podobny był do naſzego Algiebraicznego, w przypádkach, gdzie zachodzące trudności zdałą nam ſię przewyżſzać rachunek ſaméy Arytmetyki.

Diofant z Alexandryi, ktòry żył w czwártym wieku, miany ieſt za wynalazcę Algiebry, z przyczyny, iż Dzieło iego pod tytułem *Zadań Arytmetycznych*, náydáwnieyſzé ieſt z tych wſzyſtkich, ktòré nás doſzły w tey części Matematyki. Autor tego Dzieła rozwiązáwſzy wielé Zagadnień piérwſzego ſtopnia, wyznaczonych, przywiązał ſię ſzczegòlniey, do tego gatunku Zagadnień, ktòré noſzą iego Imié, i w ktòrych założył ſobie uczynić ſpołmiernémi té ilości, ktòré ſię wyſtawiaią pod kſztałtém ilości nieſpółmiernych. Z trzynáſtu Xiążek ktòré w początku ſwoim zawierało iego Dzieło, nie zoſtało nám tylko ſześć, w ktòrych Diofant coráz daléy poſtępuie koleyno z trudności iednéy do drugiéy; i z tey to miary ſzkoduiemy ſzczegòlniéy z utraty reſzty xiążek iego Wielu Autorów poźnieyſzych iak *np.* Fermat, Vieta, Bachet, Frenicle, Billi, Prestet, rozſzérzyło coráz bardziéy Teoryą Diofanta w tym gatunku Zagadnień; drugi iednak Tom Algiebry Eulera ſtanie teraz za wſzyſtkie tamté Dzieła.

Dzieło Pappusa z Alexandryi pod tytułem *Zbiorów Matematycznych*, (Collectiones Mathematicae) ma ſwóy ſzacunek z Hiſtoryi Matematycznéy, i wiele nam pomogło do poznania ſpoſobu poſtępowania dáwnych w ich ſzpéraniach i do znaiomości w dochodzeniach ich Xiąg; których inaczéy i tytuły nawet nie byłyby nám wiadomé. Słychać iż teráz w Anglii pracuią około tego Dzieła wydania poprawniéyſzego od tych wſzyſtkich które go poprzedziły.

Po wzięciu Alexandryi w Roku 641, i zburzeniu ſzacownéy i niezmiernéy Biblioteki, która znakomitą była ozdobą tego Miaſta, iuż żadnégo więcéy nie znayduiemy Matematyka, którégo prace mogłyby bydź z prácami dáwnieyſzych porównané. Arabowie ćwiczyli ſię w Matematyce oſobliwie *mieſzanéy* (Matheſis mixta.) Tłumaczénia przez rożnych Autorów Greckich, dało ich ſzczególniéy poznać teraźnieyſzym Matematykom; i ułatwiło im tę naukę. Arabòm także winniśmy ſproſtowanié Rachunków Trygonometryi płaſkiey, i kuliſtey; ktòre za czaſów Menelausa, i Ptolomeusza były bardzo rozwlekłé. Użycié wſtáw łuków, zamiáſt ich Cieńciw wielé pomogło do tego ſproſtowania. Im przypiſuią i proſtość znaków naſzych liczebnych, iako też i ſztukę w ich układaniu, i mianowaniu.

 Podo-

Podobieńſtwo ſamo ſłowa Algiebry, do nazwiſka Matematyka Geber, dało powód do poczytania go za Wynalazcę téy nauki.

Upádek Páńſtwa Greckiégo, i wzięcié Stambułu, wśrzód piętnaſtégo wieku, ieſt początkiém odnowiénia Nauk na Zachodzie. Wſparcié które tam Królowie i Xiażęta, oſobliwie we Włoſzech, dáwali uczonym, pociągało ich do opuſzczenia oyczyzny uciśnioney, i do zaſzczépiénia w tamtych krajach Nauk prawie nie znanych. Tłumaczono naprzód Autorów dáwnych a nié zadługo potém, porzuciwſzy niewolniczé naśladowanié, właſnégo rozumu ſiłami pracować zaczęto. Drukarſtwo na początku ſzeſnáſtégo wieku wſzędzie iuż prawie było używané, i wielé bez wątpiénia pomogło do roznieſiénia światła. W tym właśnié wieku widzieć ſię dały piérwſze wydania Dziéł dáwnych Matematyków: Euklidesa, Archimedesa, Aploniusza, Teodozyusza, i inſzych. Commandinus między inſzemi, nié miał doſyć na ſamém zebraniu tego co dawnieyſi przed nim piſali; ale licznémi a dobrze przyſtóſowanémi przypiſami, okázał obſzérność wiadomości ſwoich w Matematyce. Tartalea zaſzczycił Imié ſwoié przez użyteczné i dowcipné w Algiebrze wynalázki. a Maurolicus wiele w przecięciach Oſtrokręgowych podochodził. (*)

Viete pracował we wſzyſtkich częściach Matematyki teoryczney. Wyżey mowiliśmy o przywróconym nám przez niego Dziéle Aponiuſza *o Dotknięciach*. Pierwſzy on pociągnął przybliżénié rachunku okręgu koła, aż do 10 dzieſiętnych; wprowadził ogólné znaki zamiáſt ſzczególnych; których aż do czaſów iego używano, a tak dał nowy kſztałt Algiebrze, i użyteczniey-ſzą ią uczynił. Możná go mieć ſprawiedliwieza piérwſzégo Zaſzczepiciela Trygonometryi *Rozbiorowey*. (Trigonometria Analytica) Wiele on bardzo poodkrywał w rozwięzywaniu rownáń wyżſzych, i uſtanowił pewną drogę, która prowadzi do doyścia wielkiéy wági Twierdzenia Newtona *o Mnogościach ilości dwuczęściowéy* (De potentiis binomii.) Umarł w Paryżu R. 1603. Schotten wydál R. 1646. wſzyſtkie Dziéła iego, które tylko mógł zebrać.

Metius i Ludolf Van Ceulen Hollender, znani ſą, mianowicie z prác ſwoich około przybliżénia rachunku ściągaiącégo ſię do okręgu koła. Piérwſzy z nich znalázł ſtoſunek śrzednicy koła do iego okręgu bardzo do kła-

(*) Algiebra Łukasza de Burgo piérwſzá z druku wyſzła nadrzód roku 1494, a potém 1523. Nie zaſzedł w niéy Autor daléy iak do równáń drugiégo ſtopnia. Scipion Ferreo, Cardan, Tartalea, Ferrai, Bomaetti, dotknęli koleyno, i rozciągnęli rzecz o Równaniach trzeciégo i czwártégo ſtopnia.

CLAIRAUT, ieden z naygłębſzych Matematyków tego wieku, raczył iednak zniżyć ſię, i do początkowych Matematyki części. Początkow iego Jeometryi zamiarem, ieſt przyuczyć młódź do ściſłości Matematyczney, i do pokazania im poſtępu w wynalázkach. Algiebra iego początkowá, byłaby ze wſzech miár doſtateczná, gdyby ieſzcze więcey przykładów zawierała. Niedoſtatkowi temu zaradzili w Xięgach ſwoich Algiebry, SAUNDERSON, SIMPSON, MAC-LAURIN i EULER. W Arytmetyce, i Jeometryi CAMUSA, dziełach z innych miar bardzo dobrych, brakuie większey zwięzłości.

DE LA CAILLE zamknął w niewielkiey doſyć Xiążce wſzyſtko to, cokolwiek ieſt ważnieyſzego w Matematyce początkowey; ſtą zaś dokładnością to wykonáł, którá właściwá ieſt i innym iego Dziełóm. KARSTEN w Dziele ſwoim może mu bydź z tey miary porównany.

Zadaią Matematykom Francuzkim, iż oni mniey ſą troſkliwi o ściſłość w dowodzeniach; a w ſzczególności, iż wiele ſobie w tey mierze pozwalaią w Podaniach, daiących mieyſce do wprowadzenia ilości niepodzielnych, nie wyłożywſzy pierwey i niedowiódłſzy prawości tego używania. W ciągu xiąg naſzych Elementarnych wſpomnieliśmy iuż o wybornym Dziele początkowym P. BERTRANDA Profeſſora Matematyki w Gienewie.

Uczniowie, którzy zechcą nad granice początków przeſtąpić, i poznać przyſtoſowania Matematyki teoryczney, wielką do tego znaleźć mogą pomoc w Dziełach PP. DE LA CAILLE, MAUDUIT, BOSSUT, BEZOUT, WOLF, KAESTNER, i SEGNER, i innych podobnych. *Przecięcia Oſtrokręgowé* podane przez SIMSONA, HAMILTONA, GUIDO-GRANDI, ſą to wyborne Dzieła napiſane ſpoſobem cale Jeometrycznym, dawnych. *W Przecięciach Oſtrokręgowych* Margrabi *de l'Hopital*, w Xięgach pod tytułem: *Inſtitutions Analitiques* Panny AGNESI; *Introductio ad Analyſim Infinitorum*, EULERA; *Introduction à l'Analyſe des lignes Courbes*, CRAMERA, możemy czerpać naylepſze ſpoſoby przyſtoſowania rachunku do Liniy krzywych, i te Dzieła ſłużyć nám mogą do przeyścia od początków do części wyżſzych Matematyki teoryczney.

Naoſtatek *Pamiętniki* (Mémoires) Akademiy Paryzkiey, Londyńſkiey, Petersburſkiey, Berlińſkiey, i inſze, wiele bardzo oſobnych kawałków zawieraią, ściągaiących ſię do Matematyki teoryczney, i przyſtóſowaney.

Koniec Historyi Matematyczney.

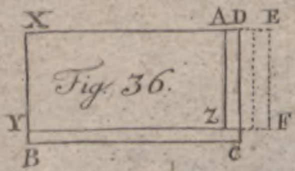

Fig. 36.

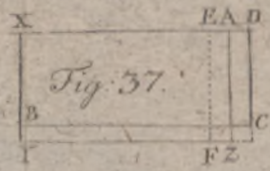

Fig. 37.

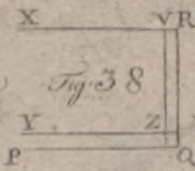

Fig. 38

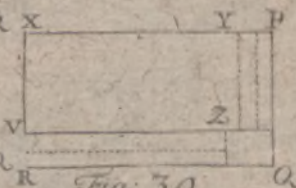

Fig. 39

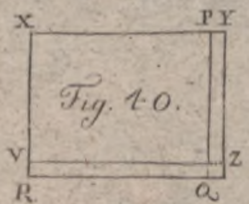

Fig. 40.

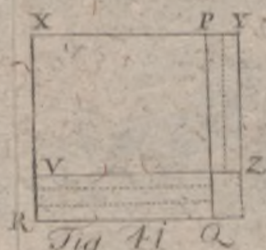

Fig. 41

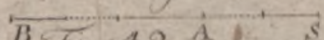

Fig. 42

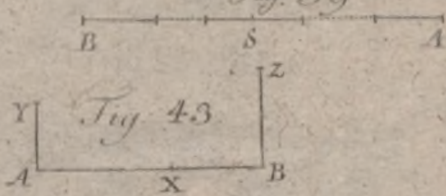

Fig. 43

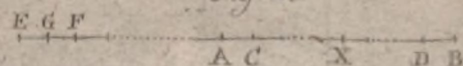

Fig. 44

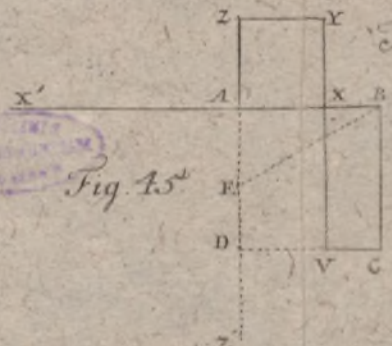

Fig. 45

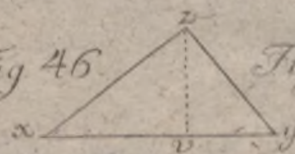

Fig. 46

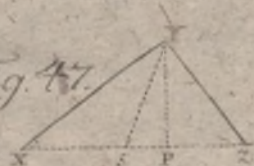

Fig. 47.

Fig. 48.

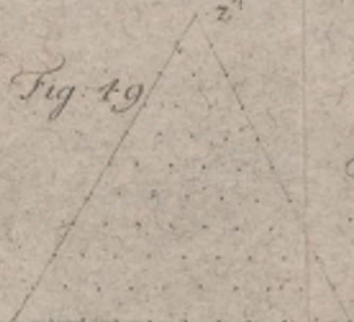
Fig. 49.

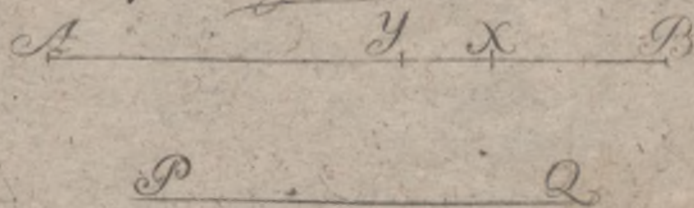

Fig. 50.

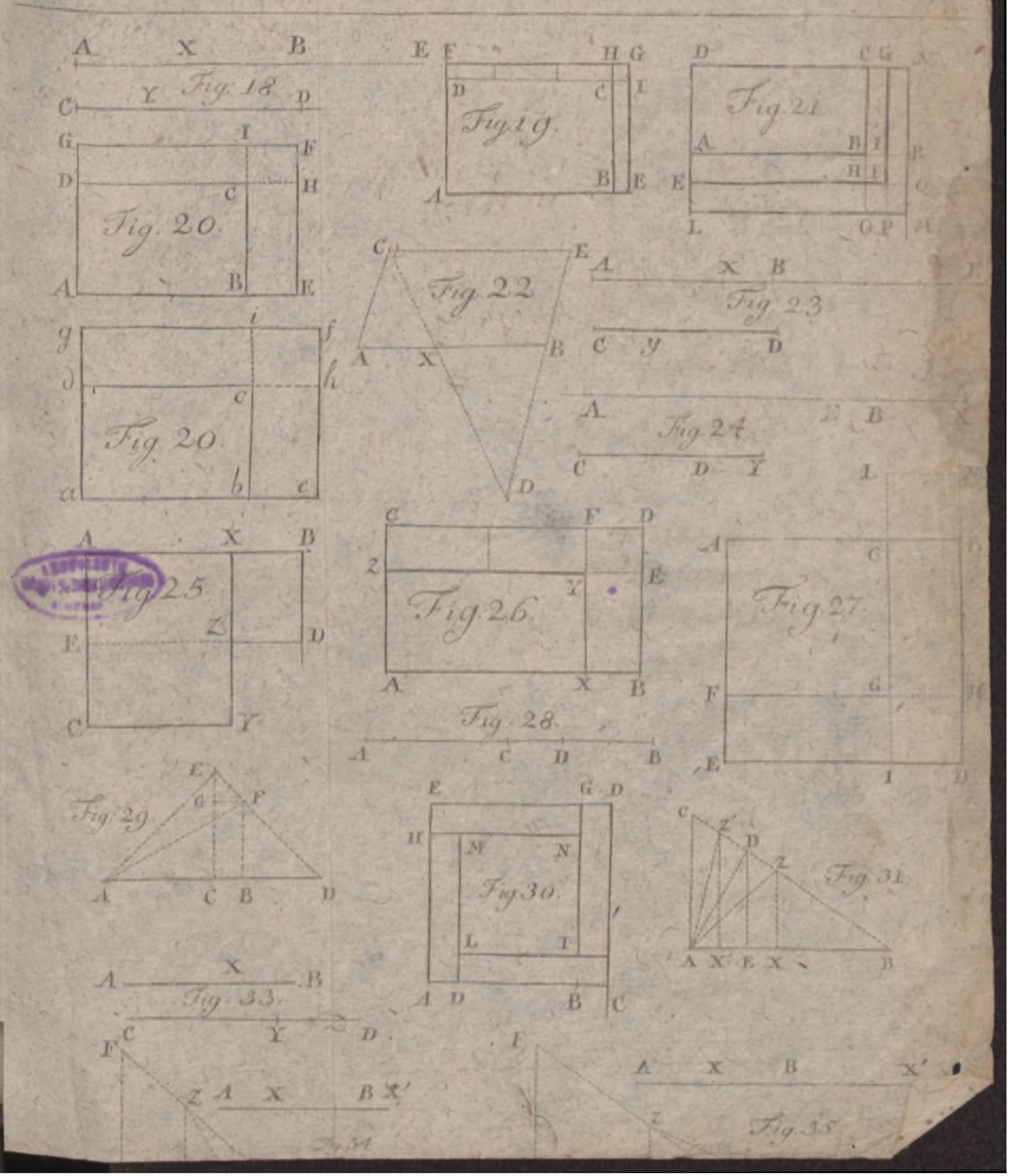
Fig. 18
Fig. 19
Fig. 20
Fig. 20
Fig. 21
Fig. 22
Fig. 23
Fig. 24
Fig. 25
Fig. 26
Fig. 27
Fig. 28
Fig. 29
Fig. 30
Fig. 31
Fig. 33
Fig. 34
Fig. 35

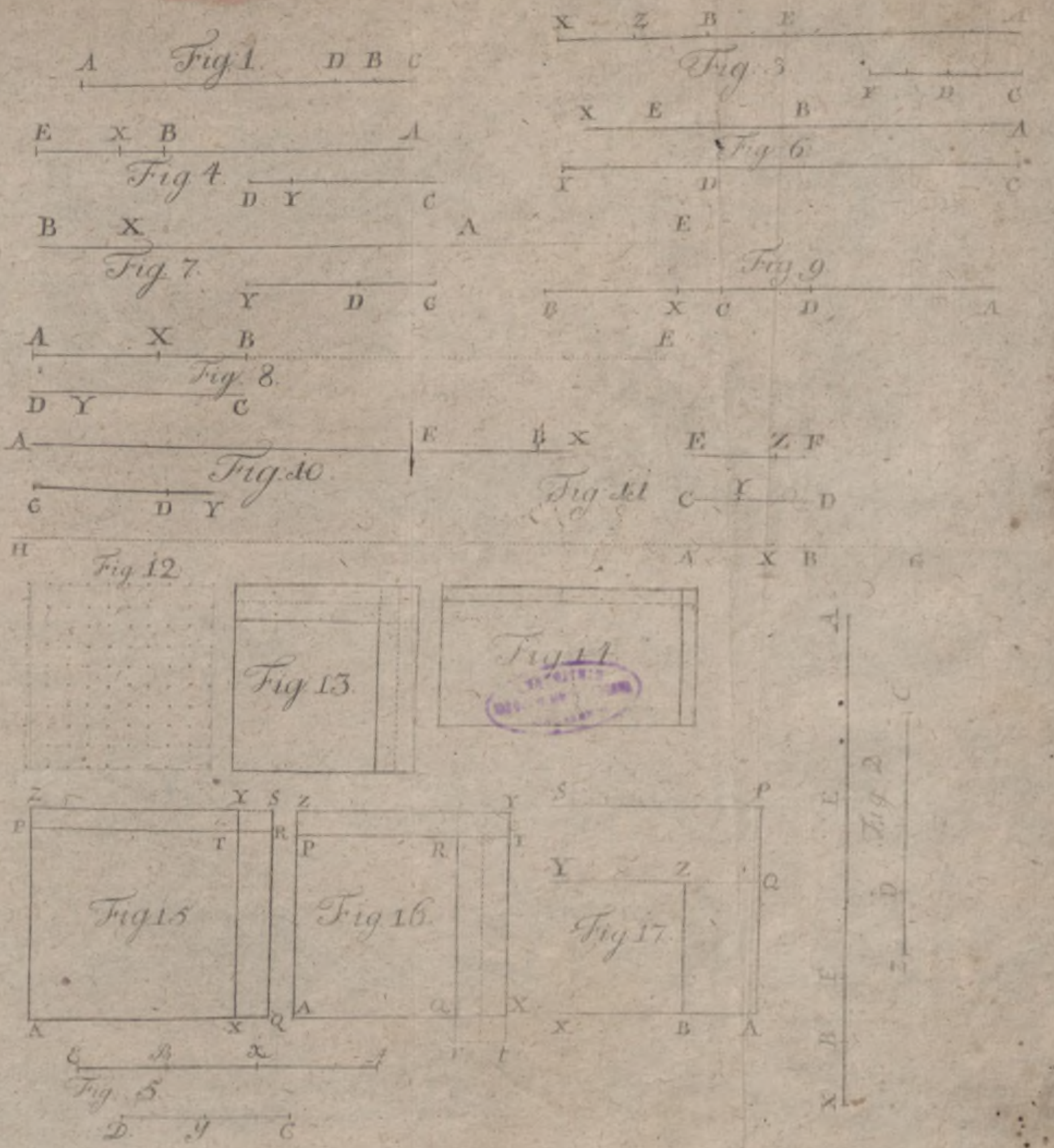
Fig 1.
Fig 2
Fig 3
Fig 4
Fig 5
Fig 6
Fig 7
Fig 8
Fig 9
Fig 10
Fig 11
Fig 12
Fig 13
Fig 14
Fig 15
Fig 16
Fig 17