ALGEBRA

PRZEZ

G.—H. NIEWĘGŁOWSKIEGO

PROFESSORA MATEMATYKI W PARYŻU

CZĘŚĆ PIERWSZA

Zawierająca algebrę elementarną

Cena fr. 12.

PARYŻ

NAKŁADEM WŁAŚCICIELA BIBLIOTEKI KÓRNICKIEJ

PRZEWODNICZĄCEGO W TOWARZYSTWACH

NAUKOWEJ POMOCY I NAUK ŚCISŁYCH W PARYŻU

1879

ALGEBRA

DZIEŁA MATEMATYCZNE
PROFESSORA G.-H. NIEWĘGŁOWSKIEGO

Arytmetyka. Kurs zupełny. Zawierający działania skrócone, teoryę przybliżeń, błędy samoiste i względne; noty dotyczące własności liczb; wiele rozwiązanych zagadnień i ćwiczenia.— Paryż 1866. Cena fr. 4.

Geometrya. Wydanie drugie, całkiem przerobione; obejmujące całą geometryę starożytnych, i metody geometryi nowoczesnej; a mianowicie: teoryę poprzecznych, biegunowych, oś pierwiastną, koło styczne do trzech kół; podział jednokreślny, inwolucyę; przecięcia stożkowe, jednokładność figur, płaszczyznę pierwiastną i biegunową; sferę styczną do czterch sfer; maximum figur; zasady perspektywy; wiedzę o helicy i stożkowej sferycznej; przekształcenia przez promień wodzący odwrotny, etc. In-8 z figurami w tekscie. — Paryż 1869 r. Cena fr. 8.

Trygonometrya *prostolinijna i sferyczna, z teoryą ilości urojonych.* Zastosowania do geometryi i do algebry. In-8, Paryż, 1870 r. Cena fr. 4 cent. 50.

Mechanika rozumowa. Dwa tomy in-8.—Paryż, 1873-1876. Cena fr. 25.

Algebra. Część pierwsza, *algebra elementarna.* In-8. Paryż, 1879. Cena fr. 12.

PARYŻ. — DRUKARNIA POLSKA A. REIFFA, 9, PLACE DU COLLÈGE DE FRANCE.

SPIS RZECZY

ROZDZIAŁ I. Wiadomości wstępne i określenia.

ROZDZIAŁ II. Rachunek algebryczny.

ROZDZIAŁ IV. ZAGADNIENIA PIERWSZEGO STOPNIA.

ROZDZIAŁ V. O WYZNACZNIKACH.

ROZDZIAŁ VI. RÓWNANIA DRUGIEGO STOPNIA.

ROZDZIAŁ VII. Zagadnienia drugiego stopnia.

ROZDZIAŁ VIII. Maximum i minimum niektórych algebrycznych wyrażeń.

ROZDZIAŁ IX. Postępnie i logarytmy.

ROZDZIAŁ X. Kombinacye i dwumian.

Cztery noty.

ALGEBRA

ROZDZIAŁ PIERWSZY

WIADOMOŚCI WSTĘPNE I OKREŚLENIA

1. W rozwiązywaniu zagadnień, aby ułatwić rozumowanie, przedstawia się ilości *niewiadome*, te których się szuka, ostatniemi literami $x, y, z,$... alfabetu; a dla zogólnienia wyników oznacza się pierwszemi literami $a, b, c,$... ilości *wiadome*, jakiemi są liczby wyrażające rozmaite wielkości *dane*.

Umiejętność ogólnych własności ilości, i działań na ilościach przedstawionych literami, stanowi część matematyki która się nazywa ALGEBRĄ.

2. W algebrze znak $+$, który się wymawia *więcej*, położony przed ilością wskazuje dodawanie; a znak —, który się wymawia *mniej*, położony także przed ilością, wyraża jej odciąganie. I tak, jeśli chcemy dodać ilość b do ilości a, piszemy $a+b$; a jeśli chcemy odciągnąć b od a, piszemy $a-b$.

3. Używa się znaku $\times$ albo poprostu jednego tylko punktu, na wskazanie mnożenia. I tak, pisząc $a\times b$ albo prościej $a.b$, wyrażamy że ilość a ma być pomnożona przez b.

Gdy czynniki są oznaczone każdy jedną literą, odrzuca się znaki mnożenia, i pisze się wieloczyn stawiając litery jedną przy drugiej. Tym sposobem abc znaczy że ilość a jest pomnożona przez b, i potem wieloczyn ab pomnożony przez c. Ale, jeśli czynniki są liczbami, ostatniego uproszczenia użyć nie można; bo ono wyrażałoby wcale co innego niż wieloczyn. Gdyby na przykład chciano wskazać mnożenie liczby 3 przez 6, pisząc 36 wyrażonoby liczbę *trzydzieści sześć*, zamiast wieloczynu 3×6.

Gdy się mnoży ilość *literalną* przez czynnik liczebny, stawia się go przed tą ilością; i tak, wieloczyny $a\times8$, $ab\times\frac{3}{5}$ piszą się $8a$, $\frac{3}{5}ab$. Czynniki liczebne, jako 8 i $\frac{3}{5}$, stojące przed ilościami literalnemi a i ab, nazywają się *spółczynnikami*. Nie pisze się nigdy spółczynnika 1 przed literą, ale on jest zawsze domyślny.

Spółczynnikami mogą być także ilości literalne; jakoż, w wieloczynie ax można uważać a za spółczynnik ilości niewiadomej x która gra główną rolę.

4. Wskazuje się dzielenie pisząc dzielnik pod dzielną i przegradzając je poziomą linijką; i tak, $\frac{a}{b}$ znaczy a podzielone przez b. Wymawia się ten iloraz mówiąc, przez skrócenie, a na b. Czasem wyraża się także dzielenie pisząc $a{:}b$.

5. Jako w arytmetyce tak i w algebrze wieloczyn czynników równych jednej ilości nazywa się potęgą tej ilości. I tak, aa albo krócej a^2 jest 2ga potęgą albo *kwadratem* ilości a; aaa albo a^3 jest 3cią potęgą albo *sześcianem* tej ilości; $aaaa$ albo a^4 jest 4tą potęgą ilości a; etc. Liczby, 2, 3, 4,... położone na prawej stronie litery a i nieco ponad nią, wyrażające ile razy ilość a jest wzięta jako czynnik, nazywają się *wykładnikami* jej potęgi. Czyta się naprzykład a^4 mówiąc *a wykładnik cztery*, *a* potęga cztery, albo poprostu *a cztery* (*). Ilość wyrażona literą bez wykładnika jest uważana za *pierwszą potęgę*; i tak, a jest pierwszą potęgą ilości a.

Sama jedna litera jako a znaczy $+1a^1$.

(*) Ta notacya wykładników, która się już znajduje w dziele autora Estienne de la Roche. pod tytułem *Arithmétique et Géométrie*, Lyon 1510, została później upowszechniona przez Deskarta.

Nie trzeba mieszać spółczynnika z wykładnikiem. Kiedy się pisze $3a$, liczba 3 jest spółczynnikiem i wskazuje summę trzech liczb równych a, to jest $3a = a + a + a$; a kiedy się pisze a^3, liczba 3 jest wykładnikiem, i pokazuje wieloczyn trzech liczb równych a, to jest $a^3 = a.a.a.$

6. Wyrażenie $\sqrt[n]{a}$ przedstawia pierwiastek n^{ty} ilości a. To wyrażenie nazywa się *pierwiastnikiem*, i liczba n, zwana *wskazem*, oznacza do jakiej potęgi trzeba podnieść pierwiastnik aby wydać a. Pierwiastnik kwadratowy pisze się poprostu $\sqrt{a}$, z domyślnym wskazem 2.

7. Znak $=$ wyraża równość. Pisząc $a = b$ wskazujemy że ilość a jest równa ilości b, i mówimy a równa się b. Wyrażenie $a > b$ oznacza że ilość a jest większa od ilości b; przeciwnie $a < b$ wskazuje że ilość a jest mniejsza od ilości b. Otwartość znaku jest obrócona ku większej z dwóch ilości.

8. Nazywa się *wyrażeniem algebrycznem* zbiór ilości przedstawionych literami i połączonych między sobą znakami różnych działań; jako $a^3 + bc - \sqrt{ab}$, $\frac{a^3}{b} + x^2$.

Każda ilość oddzielona od innych znakiem $+$ albo $-$ nazywa się *wyrazem*. I tak, w wyrażeniu $a - \frac{3ab}{m} + 2\sqrt{cd}$ są trzy wyrazy, to jest a, $\frac{-3ab}{m}$, i $+2\sqrt{cd}$.

Wyrażenie algebryczne mające tylko jeden wyraz nazwano *jednomianem*, a wyrażenie złożone z dwóch, trzech,... albo z wielu wyrazów nazwano *dwumianem, trójmianem* albo ogólnie *wielomianem*. I tak, a^3b^2c, $\frac{5}{4}a^2$ są jednomianami, $a + b$, $a^2 - b^2$ dwumianami, $ax^2 + bx + c$ jest trójmianem, a zaś $m - n + p + q - 10$ wielomianem. Trzeba uważać że w jednomianie czynniki niewiadome x, y,... piszą się ostatnie; i tak, pisze się ax, $abxy$,... a nie xa, $xyab$.

Zwyczajnie zaczyna się wyrażenie algebryczne od wyrazu mającego znak $+$ domyślny; i tak, zamiast $-a+b-c$ trzeba pisać $b-a-c$; chyba że jest wyraźna potrzeba pisania wyrazów w porządku alfabetycznym, co później zobaczymy.

Nazywa się *stopniem* jednomianu summa wykładników jego liter. I tak, jednomian $3a^2bx^3$ jest szóstego stopnia; ale ten jednomian jest tylko trzeciego stopnia względem x, drugiego względem a, i pierwszego względem b.

Stopniem wielomianu jest summa wykładników wzięta w wyrazie w którym jest największa. I tak, $4x^2+5x^2y^2+6y$ jest wielomianem 4go stopnia; ale tylko 2go względem x albo względem y. Trójmian x^3+px+q jest trzeciego stopnia.

Wielomian którego wszystkie wyrazy mają ten sam stopień nazywa się *jednorodnym*. I tak, $a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$ jest wielomianem jednorodnym czwartego stopnia; wielomian $Ax^2+2Bxy+Cy^2$ jest jednorodny drugiego stopnia.

Wielomian, który się nie zmienia wzajemną przemianą każdych dwóch liter, nazywa się *symetrycznym*. I tak. $2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4$ jest wielomianem symetrycznym.

Dwa wyrazy nazywają się *podobnemi* gdy się nie różnią tylko samemi spółczynnikami albo znakiem; i tak, w wielomianie $3ab^2+d^2\sqrt{ac}+3a^2b-8ab^2$ wyrazy $+3ab^2$ i $-8ab^2$ są podobne; wyrazy $3ab^2$ i $3a^2b$ są niepodobne.

Wyrażenie algebryczne jest *stosunkowe* gdy nie zawiera pierwiastników; takiemi są wyrażenia $3a-b$, $a+\frac{2}{3}bc-\frac{1}{2}$, $m-\frac{p}{q}+\frac{1}{2}n$.

Wyrażeniem *całkowitem* jest to które będąc stosunkowe nie ma żadnego mianownika, jako $2a^2b-8x^3+12$. Wyrażenie $\frac{px}{q}-ab$ jest ułamkowe.

Mówi się w szczególności że wielomian jest *całkowity wzglę-*

dem pewnej litery, kiedy ta litera nie znajduje się pod pierwiastnikiem ani wchodzi do żadnego mianownika; takim jest na przykład trójmian $Ax^2 + Bx + C$ całkowity względem x, w którym spółczynniki A, B, C mogą być jakiekolwiek, liczebne albo literalne, całkowite, ułamkowe i nawet niespółmierne.

Zwykle mówi się, przez skrócenie, że wielomian jest całkowity, z domyślnem zastrzeżeniem że on jest całkowity względem swoich liter, a może mieć spółczynniki liczebne ułamkowe.

9. Gdy się mówi że dwa wyrażenia algebryczne są *równe*, rozumie się przez to że za litery podstawiono takie liczby żeby pierwsze wyrażenie nabyło tej samej wartości co drugie.

Dwa wyrażenia algebryczne równe przedzielone znakiem $=$ stanowią *równość;* jako na przykład

$$a - b + c = m.$$

Równość do której wchodzi przynajmniej jedna litera przedstawiająca ilość niewiadomą nazywa się *równaniem.* I tak,

$$5x - 6 = 9 + 2x, \qquad Ax^2 + Bxy + Cy^2 = F$$

są równaniami, pierwsze o jednej niewiadomej, drugie o dwóch niewiadomych. Wyrażenia które tworzą równanie są jego *stronami;* to które stoi na lewo jest *pierwszą stroną,* a to które stoi na prawo jest *drugą.*

Nazywa się *tosamością* równość między ilościami algebrycznemi, która istnieje jakiekolwiek są wartości nadane literom. I tak

$$a = a, \quad (a + x)^2 = a^2 + 2ax + x^2, \quad (a + b)(a - b) = a^2 - b^2,$$

są tosamościami.

KORZYŚCI ALGEBRYCZNYCH NOTACYJ.

10. Powiedzieliśmy na wstępie że użycie liter ułatwia rozumowanie i zogólnia wyniki. Usprawiedliwimy teraz to podwójne twierdzenie, rozwiązując następujące zagadnienie :

Rozdzielić liczbę 540 na trzy części takie, żeby pierwsza przewyższała drugą o 20, a trzecia była połową summy dwóch pierwszych.

Według zadania, pierwsza część, mająca przewyżkę 20 nad drugą, czyni z nią summę równą podwójnej części drugiej więcej 20; a że trzecia część powinna być połową tej summy, więc ona jest połową podwójnej części drugiej więcej połową przewyżki, czyli jest równa drugiej części więcej 10. Ztąd wynika że liczba 540, składając się z trzech szukanych części, zawiera trzy razy część drugą więcej 20 i więcej 10; albo, co wychodzi na jedno, różnica 540 — 30 czyli 510 jest równa potrójnej części drugiej. Jeśli więc podzielimy 510 przez 3, iloraz 170 będzie wyrażał żądaną część drugą. Zatem pierwsza część jest 170 + 20 czyli 190, a trzecia 170 + 10 czyli 180. Tak postępując znajdujemy trzy liczby 190, 170, 180, które rozwiązują zagadnienie. Ale rozumowanie jest nieco zawile, i wymaga pewnego natężenia umysłu.

11. Rozwiążmy to samo zagadnienie, biorąc część drugą za niewiadomę którą przedstawimy literą x, i wskazując działania za pomocą ugodnych znaków. Tym sposobem trzy szukane części wyrażają się zaraz jako następuje :

druga przez x,

pierwsza przez $x + 20$,

trzecia przez $\dfrac{x + x + 20}{2}$, to jest przez $x + 10$;

summa trzech części jest $x + x + 20 + x + 10$ czyli $3x + 30$.

Owoż ta summa powinna być równa liczbie 540; mamy więc równanie

$$3x + 30 = 540,$$

które widocznie pokazuje że wieloczyn $3x$ jest różnicą liczb 540 i 30; co daje

$$3x = 540 - 30 = 510.$$

Więc, dzieląc przez 3 obie strony, $3x$ i 510, znajdujemy wartość niewiadomej

$$x = \frac{510}{3} = 170.$$

Znając część drugą łatwo z niej wywieśdź dwie inne.

12. Weźmy jeszcze drugi przykład.

Znaleźć dwie liczby których summa czyni 15 *a różnica* 9.

Summa 15 dwóch liczb szukanych, mniejszej i większej, zawiera oczywiście dwa razy liczbę mniejszą więcej różnicę 9. Jeśli więc odciągniemy 9 od 15, reszta 6 będzie równa podwójnej liczbie mniejszej. Ztąd wynika że szukana liczba mniejsza jest połową liczby 6, czyli 3; liczba większa jest 3 więcej 9, czyli 12. Liczby 3 i 12 zadość czynią zagadnieniu.

Ten sposób rozumowania stanowi tak zwaną *metodę syntetyczną* na której stoi Arytmetyka, a która gra przeważną rolę w Geometryi.

13. Szukajmy teraz rozwiązania tego samego zagadnienia przez algebrę.

Jeśli oznaczymy mniejszą liczbę przez x,
większa wyrazi się przez $x + 9$,
i ich summa będzie $2x + 9$.

Owoż ta summa powinna czynić 15; mamy więc równanie

$$2x + 9 = 15.$$

albo, co to samo

$$2x = 15 - 9 = 6$$

Więc, dzieląc przez 2 obie strony równania, znajdujemy mniejszą liczbę

$$x = \frac{6}{2} = 3.$$

Wiedząc że mniejsza liczba jest 3, dodajemy do niej różnicę 9 i mamy liczbę większą 12. Wyniki zgodne z otrzymanemi wyżej.

Ten drugi sposób rozumowania nazywa się *metodą analityczną* (*). Jako widzimy, ta metoda polega na przekształceniach wyrażeń algebrycznych, idąc od zawiłego aż do najprostszego, które jest szukanem rozwiązaniem.

Z tej przyczyny, zogólniając rzeczy, można powiedzieć że *Algebra jest umiejętnością przekształceń.*

Dwa powyższe przykłady dowodzą niezaprzeczalnie że użycie ogólnych znaków, i litery x na wyrażenie niewiadomej, uproszcza rozumowanie, wyzwalając je od mnóstwa wyrazów, i tym sposobem ułatwia rozwiązywanie zagadnień.

14. Jest jeszcze inna, bardzo ważna, korzyść wynikająca z użycia liter. Gdy liczby są małe, zastępować je literami nie ma wielkiego pożytku. Ale te liczby przeinaczają się w rachunku, nie zostawiając nawet śladu po którymby można było poznać jakim one sposobem weszły do wyników. Ztąd pochodzi że, zmieniając te liczby w zagadnieniu, trzeba na nowo rozpoczynać wszystkie rozumowania i rachunki, aby znaleźć wartość tej samej niewiadomej, tylko z innemi danemi

---

(*) Metodą analityczną szuka się prawdy niewiadomej ; metodą syntetyczną dowodzi się prawdy wysłowionej.

liczbami. Zaradza się tej niedogodności, kładąc litery zamiast liczb danych, i wskazując działania. Wyjaśni to wszystko najlepiej ostatnie zagadnienie, tak zogólnione:

Znaleźć dwie liczby których summą jest a *i różnicą* b.

Jeśli oznaczymy mniejszą z dwóch liczb przez x,
większa wyrazi się przez $x + b$,
i ich summa będzie $2x + b$.

Owoż znamy wartość tej summy, która jest daną liczbą a; mamy więc równanie

$$2x + b = a.$$

Bez żadnej trudności widzimy że $2x$ jest różnicą liczb a i b; co daje

$$2x = a - b.$$

Ztąd, biorąc połowę każdej strony równania, wywodzimy wartość liczby mniejszej

$$(1) \qquad x = \frac{a-b}{2}.$$

Mając liczbę mniejszą $\frac{a-b}{2}$, dodajemy do niej różnicę b, i znajdujemy liczbę większą $\frac{a-b}{2} + b$, albo, co to samo, $\frac{a-b}{2} + \frac{2b}{2}$; równe ostatecznie $\frac{a+b}{2}$.

Wyznaczone tym sposobem dwie liczby, mniejsza $\frac{a-b}{2}$ i większa $\frac{a+b}{2}$ rozwiązują zagadnienie. Jakoż, dając im kształty $\frac{a}{2} - \frac{b}{2}$ i $\frac{a}{2} + \frac{b}{2}$, widzimy zaraz że ich summa jest $\frac{a}{2} + \frac{a}{2}$ czyli a; ale mniejszej brakuje $\frac{b}{2}$ żeby się równała ilości $\frac{a}{2}$, a większa ma przewyżkę $\frac{b}{2}$ nad $\frac{a}{2}$; więc różnicą tych dwóch liczb jest $\frac{b}{2} + \frac{b}{2}$ czyli b.

Formuła. Wyrażenie (1), które jasno pokazuje jakie trzeba wykonać działania na danych liczbach a i b, aby otrzymać wartość niewiadomej, nazywa się *formułą*. Ta formuła zawiera rozwiązanie wszystkich zagadnień jednego wysłowienia, które się różnią samemi tylko liczebnemi wartościami danych ilości.

Jeśli nazwiemy x' liczbę większą, jej formułą będzie

(2) $$x' = \frac{a+b}{2}.$$

Można wprost otrzymać drugą formułę. Jakoż, oznaczyliśmy liczbę większą przez x'; zatem mniejsza wyrazi się przez $x' - b$, i summa obydwóch będzie $x' + x' - b$ czyli $2x' - b$. Ale ta summa powinna się równać danej liczbie a; mamy więc równanie

$$2x' - b = a.$$

Zkąd

$$2x' = a + b,$$

i nakoniec

$$x' = \frac{a+b}{2}.$$

Z formuł (1) i (2) wynika prawidło:

Mając daną summę i różnicę dwóch ilości, otrzymuje się większą biorąc połowę summy dwóch danych, a mniejszą biorąc połowę ich różnicy.

15. Użytek formuł jest niewątpliwy. Za pomocą nich zogólniają się zadania; a co jeszcze ważniejsze, wyjawiają się

między twierdzeniami związki, któreby uszły niepostrzeżone, gdyby przestawano na ich wysłowieniu językiem zwyczajnym.

I tak, formuła

$$s = vt,$$

dająca przestrzeń s przebieżoną przez punkt materyalny, ruchem jednostajnym z prędkością v i w czasie t, może brać dwa nowe kształty

$$v = \frac{s}{t} \quad \text{i} \quad t = \frac{s}{v},$$

z których każdy przedstawia twierdzenie. Więc pierwsza formuła wyobraża trzy różne twierdzenia. GALILEUSZ, nie posługując się formułami, dowodził osobno każdego z tych trzech twierdzeń, i poświęcił na to *cztery* stronice w swojem dziele (*).

W arytmetyce, nazywając p procent od kapitału a na stopę r, przez czas t, jest formuła

$$p = art,$$

z której się wywodzą trzy następujące

$$a = \frac{p}{rt}, \quad r = \frac{p}{at}, \quad t = \frac{p}{ar}.$$

Tym sposobem cztery zagadnienia rozwiązują się zarazem.

ILOŚCI ODJEMNE

16. Do rachunków algebrycznych wchodzą ilości poprzedzone znakiem —, takie jako $-a$, $-ab$, -3,.. które mianowano *ilościami odjemnemi*. Żeby dobrze rozumieć zkąd pochodzą i co wyrażają tego rodzaju ilości, weźmy dwa proste zadania :

(*) *Opere di* GALILEO GALILEI, *nobili florentino academico linceo, ... primario filosofo. e matematico del serenissimo* GRANDO DUCO DI TOSCANA, *3 vol. in-4°.* IN FIRENZE, 1718.

Pewna osoba miała 10 franków i wydała 4 franki; ile jej zostało?

Odciągając 4 od 10 odpowiedamy że jest reszta 6 franków.

Gdyby zapytano: *Osoba posiada 4 franki, a potrzebuje wydać 10 franków; ile jej brakuje?* Odciągając zawsze 4 od 10 odpowiedzielibyśmy że jest brak 6 franków.

W obydwóch przypadkach to samo odciąganie; a jego wynik raz się nazywa *resztą* drugi raz *brakiem*. Otóż, żeby być logicznym, i jednej rzeczy nie nadawać dwóch nazwisk, mianowano brak *resztą odjemną*, kładąc przed nią znak —, to jest pisząc — 6; a dla przeciwieństwa, właściwą resztę nazwano *resztą dodatną*, nie dając jej żadnego znaku, albo poprzedzając ją znakiem + jeśli trzeba dla odróżnienia, to jest pisząc + 6.

Więc przez określenie, nazywa się *ilością odjemną* ta ilość przed którą stoi znak —, jako $-a$; *dodatną* ta która nie ma żadnego znaku, albo która jest poprzedzona znakiem +, jako $+a$. Taki jest początek ilości *odjemnych i dodatnych.*

Mnogie są przykłady użytku ilości odjemnych w rozmaitych gałęziach umiejętności matematycznych. I tak, uważając ruch punktu materyalnego na pewnej linii, i obierając jeden z jej punktów za początek odległości, mówi się że punkt materyalny przebiega odległość *dodatną* albo *odjemną*, według jak się porusza w jedną stronę albo w stronę przeciwną względem tego początku. W trygonometryi łuki i linie trygonometryczne są dodatne i odjemne; w geometryi stosunki odcinkowe są dodatne i odjemne. Ale nie trzeba myśleć żeby ilości odjemne były koniecznie przeciwne dodatnym. Nie szukając daleko i przestając na prostym przykładzie, powiemy że jeden i ten sam kierunek przedstawia sieczną trygonometryczną dodatną albo odjemną, według łuku.

Żeby mieć jasne wyobrażenie o wartości algebrycznej ilości odjemnych, weźmy różnicę $a-b$, i przypuszczając ilość a

stateczną, nadawajmy ilości b wartości rosnące od zera aż do a. Będziemy najpierwiej mieli ilości *dodatne* i malejące od a do zera; potem, zwiększając ciągle b, otrzymamy ilości *odjemne*, mające wartości liczebne tem większe im będzie większe b.

Owóż, dlatego że wartości odjemne przychodzą po wartościach dodatnych ciągle malejących, uważa się je naturalnie za malejące, i tem mniejsze im są większe ich wartości samoiste. Wedle takiej ugody, -5 jest mniejsze od -3, -2 mniejsze od 1, etc. (*), Mówią nawet pospolicie, chociaż nie bardzo dokładnie, że ilości odjemne są mniejsze od zera, a ilości dodatne większe od zera. Ale trzeba wiedzieć że ten sposób mówienia jest tylko symboliczny. Albowiem, gdy się mówi że ilość a jest mniejsza od zera, i gdy się pisze $a < 0$, nie wyraża się nic innego tylko to że ilość a jest odjemna; nie zaś że ona jest mniej niż nic; coby nie miało żadnego sensu. Pisząc przeciwnie $a > 0$, oznacza się przez to że ilość a jest dodatna.

Wyrażenia symboliczne

$$a > 0 \quad \text{i} \quad a < 0$$

są poprostu dwoma sposobami któremi algebra przedstawia dwie *jakości* ilości a (dodatną i odjemną), nie jej wielkość samoistą albo względną.

(*) Może się zdawać dziwnem dlaczego naprzykład -2 ma być mniejsze od -1? To wypływa wprost z nierówności oczywistej $1 < 2$. Jakoż, będzie później dowiedzione że w nierównościach, jako w równaniach, można przenieść jakikolwiek wyraz z jednej strony na drugą, zmieniając tylko jego znak. Zatem z nierówności $1 < 2$ wynika $-2 < -1$, i także $1 - 2 < 0$ albo $-1 < 0$. Są to następstwa algebrycznych zadań, potrzebne do ich zogólnienia.

ROZDZIAŁ II

RACHUNEK ALGEBRYCZNY

W algebrze jako w arytmetyce są *cztery fundamentalne działania :* dodawanie, odciąganie, mnożenie i dzielenie. Ale działania na ilościach literalnych różnią się od działań na liczbach, w tem że są, i rzeczywiście inaczej być nie mogą, tylko przekształceniem wyrażeń algebrycznych, wynikających z ich wskazania, na inne prostsze. Prawidła według których wykonywają się te przekształcenia stanowią rachunek algebryczny.

DODAWANIE

17. Dodawanie jednomianów. W algebrze *dodawać* jednąlitość do drugiej jestto ją położyć z jej znakiem po tej drugiej. Według tego określenia, dodaje się jednomiany pisząc je wciąż jeden po drugim, *ze znakiem właściwym każdemu.*

I tak, jeśli chcemy dodawać jednomiany a, $-b$, $+4ab$, $+3a$, $-5b$, $-6ab$, piszemy

$$a - b + 4ab + 3a - 5b - 6ab.$$

Widzimy przede wszystkiem że w algebrze dodawanie nie znaczy koniecznie powiększania jako w arytmetyce. Jeśli się dodaje ilość dodatną, jest istotne powiększenie; ale jeśli się dodaje ilość odjemną, to przeciwnie, jest zmniejszenie, bo dodać -2 znaczy rzeczywiście odjąć 2. Dlatego właśnie wynik dodawania algebrycznego nazywa się *summą algebryczną,* dla odróżnienia od summy arytmetycznej która jest zbiorem samoistych wartości liczb danych; gdy tymczasem summa algebryczna jest tylko wskazanem połączeniem wartości ilości algebrycznych.

Wartość summy algebrycznej nie zależy od porządku w jakim idą jej wyrazy, ale tylko od wartości liczebnej nadanej literom tych wyrazów. I w samej rzeczy, summa algebryczna jest, ze swojego określenia, wskazaniem dodawań i odciągań ilości. Owóż, dodawać pojedynczo ilości poprzedzone znakiem + jest to samo co dodać odrazu ich summę, a odciągać pojedynczo ilości poprzedzone znakiem — wychodzi na jedno co odciągnąć odrazu ich summę; więc wartość summy algebrycznej jest równa summie ilości poprzedzonych znakiem więcej, zmniejszonej summą ilości poprzedzonych znakiem —.

Ztąd wynika ważne następstwo : *Summa algebryczna nie zmienia swojej wartości gdy się przemienia porządek jej wyrazów.*

18. Na mocy tego co poprzedza; napisana wyżej summa algebryczna daje się uprościć. Jakoż, pisząc najpierwej wyrazy dodatne a potem wyrazy odjemne, będzie

$$a + 3a + 4ab - 6ab - b - 2b.$$

Ale, łącząc wyrazy podobne, mamy

$$a + 3a = 4a,$$

$$4ab - 6ab = 4ab - 4ab - 2ab = -2ab,$$

$$-b - 2b = -3b;$$

więc otrzymana summa przywodzi się ostatecznie do

$$4a - 2ab - 3b.$$

To uproszczenie nazywa się *redukcyą.*

Pojmuje się łatwo że summa algebryczna może być dodatna, odjemna albo zero; to zależy od wartości nadanej literom. I tak, w powyższej summie,

jeśli weźmiemy $a = 2$, $b = 1$, jej wartość będzie $+1$.
jeśli weźmiemy $a = 3$, $b = 2$, wartość będzie -6,
jeśli weźmiemy $a = 1$, $b = \frac{4}{5}$, wartość będzie 0.

19. Każdy wielomian może być uważany jako summa algebryczna jednomianów. *Więc się nie zmienia wartości wielomianu przemieniając porządek jego wyrazów.*

Opierając się na tej własności, *porządkuje się* wielomiany; to jest, uprościwszy wielomian, pisze się go według potęg malejących albo rosnących jednej litery. Jako naprzykład

$$a^6 - 6ba^5 + 15b^2a^4 - 20b^3a^3 + 15b^4a^2 - 6b^5a + b^6;$$

$$2x^3 - 4x^2 + 5x - 3,$$

$$-3 + 5x - 4x^2 + 2x^3.$$

Pierwszy wielomian jest uporządkowany względem potęg malejących ilości a, i względem potęg rosnących ilości b; drugi względem potęg malejących ilości x, trzeci względem potęg rosnących tej ilości. Wkrótce pokaże się użytek tego porządkowania w mnożeniu i w dzieleniu wielomianów.

Gdy wielomian, mający tylko dwie litery, jest jednorodny, jeśli go uporządkowano względem potęg malejących jednej z dwóch liter, to on będzie temsamem uporządkowany względem potęg rosnących drugiej; albowiem, ponieważ summa wykładników tych dwóch liter jest ta sama we wszystkich wyrazach, jeśli wykładniki jednej maleją, to wykładniki drugiej muszą rosnąć tym samym sposobem. I tak, pierwszy wielomian jest jednorodny; będąc uporządkowany względem potęg malejących litery a, został temsamem uporządkowany względem potęg rosnących litery b.

20. Dodawanie wielomianów. Jeśli do wielomianu $a + b - c$ trzeba dodać wielomian $m - n - p + q$, kładzie się ten ostatni w nawiasy, i wyraża się dodawanie pisząc

$$a + b - c + (m - n - p + q).$$

Przypuśćmy najpierwej że wartość drugiego wielomianu jest dodatna, i oznaczmy ją przez w; będziemy mieli summę

$$a + b - c + w.$$

Owoż, w tej summie jednomianów, można przemienić porządek wyrazów, i napisać

$$w + a + b - c;$$

teraz wolno zamiast w położyć wielomian $m - n - p + q$, co daje

$$m - n - p + q + a + b - c.$$

Więc, przenosząc na ostatnie miejsce wyrazy pochodzące z w, znajdujemy

$$a + b - c + m - n - p + q.$$

Jeśli wartość wielomianu $m - n - p + q$ jest odjemna $- w$, kładąc wszędzie $- w$ zamiast w, i powtarzając powyższe rozumowanie, otrzyma się ten sam wynik. Albowiem, w poprzedzających przekształceniach, wyrazy obydwóch wielomianów są napisane jeden po drugim, każdy ze swoim znakiem; i oczywiście wszystko się tak samo uskuteczni, jakiekolwiek będą wielomiany do dodawania.

Ztąd, zogólniając dodawanie wielomianów w liczbie jakiejkolwiek, wynika

Prawidło: *Aby dodawać wielomiany, dość je napisać jeden po drugim, zachowując znaki wszystkich wyrazów.*

To znaczy, innemi słowy, że dodawać wielomian jestto dodawać jego wyrazy jako jednomiany.

Stosując prawidło dodawania ilukolwiek wielomianów, trzeba zarazem redukować wyrazy podobne. Dla ułatwienia redukcyi, porządkuje się zwykle wielomiany względem spólnej litery, pisząc je *kolumnami* i dodając te kolumny, jako następujący wzór pokazuje

$$\text{WIELOMIANY DO DODAWANIA}\left\{\begin{array}{l} 12a^3 - \frac{5}{6}a^2b + 4ab^2 + 4ab - \frac{1}{2}, \\ -10a^3 + \frac{2}{3}a^2b - 5ab^2 \qquad\quad + 6c + \frac{3}{4}, \\ \qquad\qquad\;\; a^2b + 6ab^2 - ab - 7c - \frac{1}{6} \end{array}\right.$$

$$\text{SUMMA} \quad 2a^3 + \frac{5}{6}a^2b + 5ab^2 + 3ab - c + \frac{1}{12}.$$

ODCIĄGANIE

21. Odciąganie jest działaniem odwrotnem dodawania; zatem prawidło odciągania wynika poprostu z określenia : *Od jednej ilości odciągnąć drugą, jestto znaleźć trzecią taką, żeby dodając do niej drugą można było wydać pierwszą.*

1°. ODCIĄGANIE JEDNOMIANÓW. Od ilości jakiejkolwiek A odciągajmy najpierwej ilość dodatną $+ b$. Na mocy powyższego określenia, reszta będzie $A - b$; dlatego że dodając do niej $+ b$, otrzymujemy A. To się wyraża pisząc

$$(1) \qquad A - (+b) = A - b.$$

Jeśli od A trzeba odciągać ilość odjemną $- b$, widzimy łatwo że, na mocy tego samego określenia, reszta będzie $A + b$; albowiem, dodając do niej $- b$ znajdujemy $+$ A. Co się wyraża pisząc

$$(2) \qquad A - (-b) = A + b.$$

Więc, żeby od ilości jakiejkolwiek odciągnąć ilość jakąkolwiek, trzeba najpierwej zmienić znak ostatniej i potem dodać ją do pierwszej.

2° ODCIĄGANIE WIELOMIANÓW. Stosując do wielomianów ogólne określenie odciągania, przychodzimy do prawidła :

Aby od jednego wielomianu odciągnąć drugi, dość po wyrazach pierwszego napisać wszystkie wyrazy drugiego ze znakami zmienionemi.

Jakoż, jeśli do wyniku dodamy drugi wielomian, co się uskutecznia pisząc każdy jego wyraz ze znakiem jaki ma, ponieważ te wszystkie wyrazy już były dodane ze znakami przeciwnemi do pierwszego wielomianu, to wychodzi na jedno co dodać odrazu do tego wielomianu summę wyrazów które się niszczą między sobą; więc po redukcyi zostają same tylko wyrazy pierwszego wielomianu. Co dowodzi wysłowionego prawidła.

Z tego wszystkiego wynika że, odciągać wielomian jestto odciągać jego wyrazy jako jednomiany.

PRZYKŁAD ODCIĄGANIA.

ODCIĄGNĄĆ OD....	$5ax^3 - 8abx - a^3 + 4bc$
WIELOMIAN....	$4ax^3 + 7abx - 9a^3 + 5bc$
RESZTA PRZED REDUKCYĄ	$5ax^3 - 8abx - a^3 + 4bc$ $-4ax^3 - 7abx + 9a^3 - 5bc$
RESZTA ZREDUKOWANA	$ax^3 - 15abx + 8a^3 - bc$

Ćwiczenia

1. Trzej gracze zasiadają do gry, pierwszy ma a franków, drugi b franków, trzeci c franków ; zgadzają się na to że prze-

grywający podwoi stawkę dwóch drugich graczy. Po trzech partyach zdarza się że, po kolei, pierwszy, drugi i trzeci gracz przegrał, każdy jedną partyę; jakież summy posiadali ci trzej gracze?

Odpowiedź: 1szy $4a-4b-4c$, 2gi $6b-2a-2c$, 3ci $7c-a-b$.

.II Dwa naczynia mające objętości v i v' są pełne, jedno wina drugie wody. Napełniono w tych dwóch naczyniach zarazem, dwa inne naczynia równej objętości u; poczem, wlano do v to co było wzięte z v', i naodwrot. Znaleźć, po trzech takich działaniach, ile jest wina i wody w każdem z dwóch naczyń.

MNOŻENIE

22. MNOŻENIE JEDNOMIANÓW. Wiadomo z arytmetyki że:

Wieloczyn czynników nie zmienia wartości gdy się przemienia porządek tych czynników.

Mnożyć liczbę przez wieloczyn czynników jest to samo co wykonać mnożenia po sobie idące przez te czynniki.

Te dwie zasady dowiedzione w arytmetyce dla liczb jakichkolwiek, całkowitych albo ułamkowych i nawet niespółmiernych, są ogólne; stosują się więc do ilości wyrażonych literami. Na nich opierają się następujące prawidła mnożenia jednomianów.

1° PRAWIDŁO LITER. Wskazuje się wieloczyn ilości przedstawionych literami, pisząc te litery jedną po drugiej w porządku alfabetycznym i bez żadnego znaku mnożenia, jakośmy już powiedzieli (nro 3). I tak, wieloczyn ilości b, a, c wyraża się, na mocy pierwszej zasady, przez abc. Tak samo wieloczyn z mnożenia c^2d^3 przez ab^4 pisze się $ab^4c^2d^3$.

2° PRAWIDŁO SPÓŁCZYNNIKÓW. W mnożeniu ilości literalnych mających spółczynniki liczebne, wykonywa się wieloczyn tych spółczynników i kładzie się go przed wieloczynem liter. Jakoż, na mocy obydwóch zasad, mamy

$$3bc \times 4a^2d = 3.4.a^2bcd = 12a^2bcd.$$

3° PRAWIDŁO WYKŁADNIKÓW. Wyraża się wieloczyn potęg ilości przedstawionych tą samą literą, pisząc raz tylko tę literę i dając jej za wykładnik summę wszystkich wykładników.

I tak, niech będzie do mnożenia a^2 przez a^3. Wedle określenia potęg, mamy

$$a^2 \times a^3 = a.a \times a.a.a;$$

to znaczy że jest do mnożenia wieloczyn *dwóch* czynników przez wieloczyn *trzech* czynników. Zatem, na mocy drugiej zasady, będzie

$$aaaaa = a^5 = a^{2+3}.$$

Tak samo $$a \times a^3 = a^4.$$

Więc ogólnie $$a^m.a^n.a^p = a^{m+n+p}.$$

Ztąd wynika że, chcąc podnieść potęgę a^n do potęgi p, trzeba pomnożyć wykładnik n przez p.

Albowiem $$(a^n)^p = a^n.a^n.a^n\ldots = a^{n+n+n+\cdots} = a^{np}.$$

Stosując wszystkie trzy prawidła, znajdujemy że wieloczyn jednomianów $4b^2cd^5e$ i $3a^4b^3c^6d^3$ wyraża się przez

$$4b^2cd^5e.3a^4b^3c^6d^3 = 12a^4b^5c^7d^8e.$$

POTĘGA m^{ta} JEDNOMIANU. Żeby podnieść jednomian do potęgi m^{tej}, trzeba podnieść wszystkie jego czynniki do tej potęgi, to jest pomnożyć wykładnik każdego czynnika przez wykładnik potęgi. Bo

$$(3a^nb^pc)^m = 3a^nb^pc.3a^nb^pc.3a^mb^nc\ldots = 3^ma^{mn}b^{mp}c^m.$$

MNOŻENIE WIELOMIANÓW.

23. MNOŻENIE WIELOMIANU PRZEZ JEDNOMIAN. Niech będzie wielomian jakikolwiek $a + b - c$ do mnożenia przez jakąkolwiek liczbę m. Wskazuje się to mnożenie biorąc wielomian w nawiasy i pisząc $(a + b - c)\, m$.

Trzeba rozróżnić liczbę m całkowitą i ułamkową. Jeśli m jest liczbą całkowitą, mnożenie wielomianu $a + b - c$ przez m jest istotnem dodawaniem m wielomianów równych danemu. Zatem wynik działania składa się z każdego wyrazu wziętego m razy. Co daje

$$(1) \qquad (a + b - c)\, m = am + bm - cm.$$

Jeśli m jest ułamkiem $\frac{p}{n}$ mającym oba wyrazy całkowite, szukany wieloczyn wyraża się przez $(a + b - c)\frac{p}{n}$. Owóż, mnożyć przez ułamek $\frac{p}{n}$ jestto wziąć p razy n^{ta} część mnożnej; więc, żeby pomnożyć wielomian $a + b - c$ przez ułamek $\frac{p}{n}$, trzeba znaleźć n^{ta} część tego wielomianu i pomnożyć ją przez p. Ta n^{ta} część łatwo się wyznacza; albowiem na mocy (1) jest oczywiście

$$\left(\frac{a}{n} + \frac{b}{n} - \frac{c}{n}\right) n = a + b - c,$$

zkąd wynika $\quad (a + b - c)\,\frac{1}{n} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n} - \frac{c}{n}.$

Więc, mnożąc przez p znalezioną $n^{tą}$ część wielomianu, będzie

$$(a + b - c)\frac{p}{n} = a\frac{p}{n} + b\frac{p}{n} - c\frac{p}{n};$$

wieloczyn tego samego kształtu co (1), ponieważ $m = \frac{p}{n}$.

Nakoniec, jeśli m jest liczbą niespółmierną, za pomocą wiadomej metody granic otrzymuje się taki sam wynik. Więc, jakikolwiek jest jednomian dodatny m, mamy zawsze

$$(a + b - c)\,m = am + bm - cm.$$

Ztąd PRAWIDŁO : *Mnoży się wielomian przez jednomian dodatny, mnożąc osobno każdy wyraz i zachowując jego znak.*

24. MNOŻENIE JEDNOMIANU PRZEZ WIELOMIAN. Niech będzie jakakolwiek liczba m do mnożenia przez wielomian $a + b - c$. Przypuszczamy wyraźnie że wielomian $a + b - c$ jest dodatny, to jest że wartość summy $a + b$ przewyższa wartość ilości c; inaczej mnożenie nie miałoby żadnego sensu. W tem założeniu, nazywając w wartość wielomianu, mamy

$$m\,(a + b - c) = mw = wm = (a + b - c)\,m.$$

Ale, na mocy już okazanego prawidła,

$$(a + b - c)\,m = am + bm - cm = ma + mb - mc;$$

więc

$$m\,(a + b - c) = ma + mb - mc.$$

Co dowodzi że się mnoży jednomian dodatny przez wielomian dodatny, mnożąc ten jednomian przez każdy wyraz wielomianu i zachowując znaki.

UWAGA. Równość

$$am + bm - cm = (a + b - c)\,m$$

pokazuje że, gdy wyrazy wielomianu $am + bm - cm$ mają spólny czynnik m, można go im odjąć i pomnożyć przez niego pozostały wielomian $a + b - c$ wzięty w nawiasy. To działanie, zwane *rozkładaniem na czynniki*, jest wielce użyteczne.

25. MNOŻENIE WIELOMIANÓW MIĘDZY SOBĄ. Niech będzie wielomian $a + b - c$ do mnożenia przez wielomian $m - n + p - q$. Przypuszczając obydwa wielomiany dodatne, i oznaczając przez w wartość pierwszego, będzie na mocy tego co po-

przedza,

$$(a+b-c)(m-n+p-q)=w(m-n+p-q)=wm-wn+wp-wq.$$

Jeśli więc podstawimy najpierwej wielomian $a+b-c$ za ilość w która jest jego wartością, i potem wykonamy mnożenia, znajdziemy

$$\begin{aligned}(a+b-c)(m-n+p-q) &= (a+b-c)m-(a+b-c)n \\ &\quad +(a+b-c)p-(a+b-c)q \\ &= (am+bm-cm)-(an+bn-cn)+(ap+bp-cp) \\ &\quad -(aq+bq-cq).\end{aligned}$$

Dwa ostatnie wyniki jasno pokazują że się mnoży jeden wielomian przez drugi, mnożąc całą mnożnę przez każdy wyraz mnożnika, i kładąc przed cząstkowym wieloczynem znak wyrazu mnożącego.

Nakoniec, wykonywając wskazane dodawania i odciągania wieloczynów w nawiasach, otrzymujemy

$$\begin{aligned}&(a+b-c)(m-n+p-q) \\ &= am+bm-cm-an-bn+cn \\ &\quad +ap+bp-cp-aq-bq+cq.\end{aligned}$$

Widzimy teraz że wieloczyn dwóch zadanych wielomianów jest summą algebryczną wieloczynów cząstkowych, pochodzących z mnożenia wszystkich wyrazów mnożnej przez każdy wyraz mnożnika; zachowując wszystkie znaki mnożnej gdy wyraz mnożący ma znak $+$, a zmieniając wszystkie znaki gdy ten wyraz ma znak $-$. Poczem, uważając wyrazy mnożnej i mnożnika jako jednomiany które je składają, spostrzegamy łatwo że znaki wieloczynów cząstkowych tworzą się według następującej ustawy : dwa wyrazy mające te same znaki dają wieloczyn ze znakiem $+$; a dwa wyrazy mające znaki przeciwne dają wieloczyn ze znakiem $-$. Na tem polega ta ustawa, zwana prawidłem znaków które się tak symbolicznie wyraża:

$+$ przez $+$ daje $+$

$-$ przez $+$ daje $-$

$+$ przez $-$ daje $-$

$-$ przez $-$ daje $+$

Z tego wszystkiego wynika OGÓLNE PRAWIDŁO: *Aby pomnożyć jeden wielomian przez drugi, mnoży się wszystkie wyrazy pierwszego przez każdy wyraz drugiego, i daje się wieloczynom cząstkowym znak $+$ albo $-$, według jak pochodzą z dwóch wyrazów mających te same znaki albo znaki przeciwne.*

26. Jedynie dla ułatwienia uproszczeń, porządkuje się wielomiany do mnożenia. Przykład najlepiej pokaże jak trzeba urządzać działanie.

$$
\begin{array}{ll}
\text{MNOŻNA....} & 4a^3 - 5a^2b - 7ab^2 \\
\text{MNOŻNIK....} & -3a^2 + 8ab + b^2 \\
\hline
\text{WIELOCZYNY CZĄSTKOWE} & \left\{\begin{array}{l} -12a^5 + 15a^4b + 21a^3b^2 \\ \qquad +32a^4b - 40a^3b^2 - 56a^2b^3 \\ \qquad\qquad + 4a^3b^2 - 5a^2b^3 - 7ab^4 \end{array}\right. \\
\hline
\text{WIELOCZYN....} & -12a^5 + 47a^4b - 15a^3b^2 - 61a^2b^3 - 7ab^4
\end{array}
$$

Otrzymuje się pierwszą linię wieloczynów cząstkowych, mnożąc każdy wyraz mnożnej przez pierwszy wyraz $-3a^2$ mnożnika. To działanie, według prawideł mnożenia jednomianów i na mocy prawidła znaków, daje wieloczyny:

$$4a^3 \times -3a^2 = -12a^5, \qquad -5a^2b \times -3a^2 = +15a^4b,$$
$$-7ab^2 \times -3a^2 = +21a^3b^2.$$

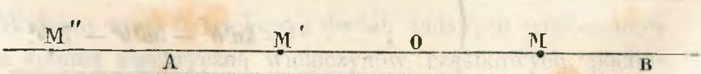
Tak samo, mnożąc wszystkie wyrazy mnożnej osobno przez drugi wyraz $+8ab$ mnożnika i osobno przez trzeci wyraz $+b^2$, otrzymuje się dwie inne linie wieloczynów cząstkowych, które nie potrzebują już żadnego objaśnienia.

Nakoniec, redukując wyrazy podobne wieloczynu, to jest uważając że $+15a^4b + 3a^4b = 47a^4b$,
$+21a^3b^2 - 40a^3b^2 + 4a^3b^2 = -15a^3b^2 - 56a^2b^3 - 5a^2b^3$
$= -61a^2b^3$, znajdujemy powyższy uproszczony wieloczyn.

ZOGÓLNIENIE PRAWIDŁA ZNAKÓW

27. Prawidło znaków, które się objawia samo w mnożeniu wieloczynów dodatnych, nie daje się dowodzić dla ilości osobnych sposobem samoistym; dlatego że nie można *a priori* określić co znaczy mnożyć przez ilość odjemną. Ale to prawidło nie jest dowolną ugodą, ani zależy od wartości wielomianów. Jest ono konieczną ustawą znaków mnożenia ilości algebrycznych, którą się sprawdza rozwiązując następujące zadanie.

ZAGADNIENIE. *Punkt materyalny* M *porusza się jednostajnie na linii prostej* AB; *znaleźć formułę która daje, w chwili jakiej-kolwiek, jego położenie na tej linii.*



Położenie punktu ruchomego M na linii AB jest oczywiście wyznaczone, w danej chwili, kiedy wiadomo w jakiej się on znajduje odległości od punktu stałego A tej linii, i z której strony. Niech będzie O położenie punktu M w czasie teraźniejszym; jego położenie w czasie przyszłym albo przeszłym będzie z jednej albo z drugiej strony tego punktu, według jak się ruch odbywa w kierunku od A do B albo w kierunku wprost przeciwnym od B do A. Nazywając v prędkość stateczną z jaką się punkt M porusza, t czas liczony od chwili jego przejścia przez O, i biorąc $AO = a$; mamy do uważania cztery oddzielne przypadki.

1° Gdy punkt ruchomy M idzie od A do B, to widocznie, po upływie pewnego czasu znajduje się na prawej stronie punktu O w położeniu M. Wtedy jego odległość od punktu A, obranego za początek, wyraża się przez

$$AM = AO + OM.$$

Owóż, punkt M porusza się jednostajnie z prędkością v; to znaczy że przebiega w jedności czasu, na przykład w jednej sekundzie, drogę v; zatem przez czas t przebiegnie drogę vt. Jeśli więc, dla rozróżnienia, oznaczymy przez v' (*) prędkość w kierunkn AB, a przez v'' prędkość w kierunku przeciwnym BA; przez t' czas przyszły, a przez t'' czas przeszły; droga OM przebieżona z prędkością v' i w czasie t', wyrazi się przez $v't'$; jeśli do tego jeszcze nazwiemy x_1 odległość AM, będziemy mieli

$$(1) \qquad x_1 = a + v't'.$$

2° Po tem co poprzedza, łatwo widzimy że punkt ruchomy idący od B do A, w stronę przeciwną dopiero co uważanej, po czasie t' będzie miał położenie M', i jego odległość AM' przedstawi się przez

$$AM' = AO - M'O.$$

W tym przypadku droga OM', którą punkt ruchomy przebiega z prędkością v'' w czasie t', wyraża się przez $v''t'$.

(*) Gdy w zadaniu pewne ilości są przedstawione literami, wyraża się zwykle ilości podobne temi samemi literami, ale z akcentami albo z liczebnemi *wskazami*. I tak,

pisze się a', a'', a''',... $a^{(n)}$, i mówi się a pierwsze, a drugie,... a n-te

pisze się a_1, a_2, a_3,... a_n, i mówi się a wskaz 1, a wskaz 2,... a wskaz n

Więc, nazywając x_2 odległość AM', będzie

$$(2) \qquad x_2 = a - v''t'.$$

3° Szukajmy teraz jakie miał położenie punkt ruchomy w czasie przeszłym. Oczywiście ten punkt, jeśli się porusza w kierunku AB (od A do B), nim doszedł do O musiał się znajdować w położeniu M' którego odległość AM' od A wyznacza się przez

$$AM' = AO - M'O.$$

Owóż, do przebieżenia drogi M'O z prędkością v', trzeba czasu t'' takiego żeby było $M'O = v't''$. Więc, nazywając x_3 odległość AM', mamy

$$(3) \qquad x_3 = a - v't''.$$

4° Nakoniec, gdy punkt ruchomy przenosi się od B do A, nim dosięgnął do O zajmował oczywiście położenie M, wyznaczone przez

$$AM = AO + OM,$$

i potrzebował jeszcze pewnego czasu t'' do przebieżenia drogi MO z prędkością v''. Zatem ta droga wyraża się przez $MO = v''t''$. Jeśli więc nazwiemy x_4 odległość AM, będziemy mieli

$$(4) \qquad x_4 = a + v''t''.$$

Znajdujemy tedy cztery formuły, które dają położenie punktu ruchomego na linii prostej, według epoki czasu i według kierunku ruchu. Zobaczmy czy te cztery formuły nie mogą się zawrzeć w jednej.

Owóż, zamiast nazywać v' i v'' dwie prędkości kierunków przeciwnych jakie punkt ruchomy brać może, idąc w jedną stronę albo w stronę przeciwną, możemy przedstawić prędkość ruchu jedną literą v, byleśmy uważali ilość v za *dodatną* gdy się ruch odbywa w pewną stronę, a za *odjemną* gdy ma miejsce w stronę wprost przeciwną. Podobnie można wyrażać czas przyszły i przeszły jedną literą t, byle uważano wartość dodatną ilości t jako przyszłość, a wartość odjemną jako przeszłość względnie do teraźniejszości. Wprowadzając z taką ugodą, ilości odjemne i dodatne do rachunku, potrafimy zlać cztery powyższe formuły w jedną ogólną, za pomocą prawidła znaków.

Aby to jasno wykazać, rozbierzmy szczegółowo każdą ze czterech formuł.

W formule (1) prędkość $v = + v'$ a czas $t = + t'$; obie wartości są dodatne, i formuła daje ich wieloczyn dodatny $+ v't'$. Więc $+ v' \times + t' = + v't'$. Co jest zgodne z prawidłem znaków (nro 25).

W formule (2) prędkość v jest odjemna $v = - v''$, czas t jest dodatny $t = + t'$; a ponieważ w tej formule wieloczyn $v''t'$ ma przed sobą znak $-$, to pokazuje że jest $- v'' \times + t' = - v''t'$. Co właśnie daje prawidło znaków, i co zresztą można otrzymać a priori.

W formule (3) prędkość v jest dodatna $v = + v'$, ale czas jest odjemny $t = - t''$, a że wieloczyn jest poprzedzony znakiem $-$, to dowodzi że jest $v' \times - t'' = - v''t'$. Co także sprawdza prawidło znaków.

Nareszcie, w formule (4) prędkość i czas są ilościami odjemnemi, $v = - v''$ i $t = - t''$, a ich wieloczyn $v''t''$ ma znak $+$; to dowodem że jest $- v'' \times - t'' = + v''t''$. Co się zgadza całkowicie z prawidłem znaków.

Dwa ostatnie wyniki na wielką zasługują uwagę. One nietylko sprawdzają prawidło znaków, ale jeszcze, co najważniejsze, wyjawiają znaczenie mnożenia przez ilość odjemną, którego a priori, jakośmy już powiedzieli, dać nie można dlatego że takie mnożenie nie przedstawia samoiście logicznego sensu. Wiemy teraz jak tę rzecz rozumieć należy. Na mocy dwóch ostatnich wyników, *mnożyć ilość jakąkolwiek przez ilość odjemną znaczy że trzeba mnożyć przez tę ilość jak gdyby była dodatna, i potem zmienić znak wieloczynu.*

Mamy więc, w mnożeniu ilości algebrycznych jakichkolwiek prawidło znaków które się tak ogólnie wysłowia :

Dwie ilości obie dodatne albo obie odjemne dają wieloczyn dodatny, a dwie ilości jedna dodatna druga odjemna dają wieloczyn odjemny.

To ustaliwszy, widzimy łatwo że, za pomocą ilości dodatnych i odjemnych, zachowując prawidło znaków, można objąć cztery powyższe formuły w jednej ogólnej

$$x = a + vt.$$

28. Jest jeszcze więcej. Uważaliśmy dotąd ruch jednostajny punktu M na linii prostej AB, odbywający się tylko między jej dwoma punktami A i B. Przypuśćmy teraz że punkt ruchomy bierze położenie M″, na lewej stronie punktu A obranego za początek; i szukajmy czemu się równa odległość AM″ wyrażona przez ilości a, v, t. Mamy widocznie

$$AM'' = OM'' - AM''.$$

Owoż, żeby wiedzieć czemu się równa OM″, trzeba rozróżnić dwa możebne kierunki ruchu. 1° Gdy punkt ruchomy bieży z prędkością v'' w kierunku BA, to naturalnie po upływie pewnego czasu t' zajmuje położenie M″; co daje $OM'' = v''t'$. Więc, nazywając x_5 odległość AM″, będzie

$$x_5 = v''t' - a. \tag{5}$$

2° Gdy punkt szukany posuwa się z prędkością v' w kierunku AB, to w czasie przeszłym t'' nim doszedł do O miał położenie M″ takie, żeby było OM″ $= v't''$. Więc, nazywając x_6 odległość AM″ odpowiedającą temu ruchowi, mamy

$$(6) \qquad x_6 = v't'' - a$$

Formuły (5) i (6) wywodzą się z formuły ogólnej. Jakoż możemy je pisać

$$-x_5 = a - v''t' \quad \text{i} \quad -x_6 = a - v't'';$$

albo, uważając że v' i t' są wartościami dodatnemi prędkości v i czasu t, a zaś v'' i t'' ich wartościami odjemnemi, na mocy tego co poprzedza mamy ogólniej

$$-x_5 = a + vt \quad \text{i} \quad -x_6 = a + vt.$$

Jeśli się więc zgodzimy na to, że wartość dodatna odległości przedstawionej literą x powinna być poniesiona na prawą stronę punktu początkowego A, a wartość odjemna na jego lewą stronę, wtenczas odległości $-x_5$ i $-x_6$ wyrażą się ogólnie przez x.

Więc formuła $\qquad x = a + vt,$

przedstawiająca wszystkie okoliczności ruchu punktu na linii AB, rozwiązuje zupełnie zagadnienie.

Tym sposobem pojmuje się dobrze jak użycie ilości odjemnych i dodatnych zogólniając uproszcza matematyczne wyrażenia.

29. Możemy teraz mnożyć między sobą wielomiany jakiekolwiek, nie troszcząc się bynajmniej o ich wartości, nie szukając aby wiedzieć czy są dodatne albo odjemne; dość tylko uważać te wielomiany jakoby były złożone z jednomianów, i wykonać mnożenie summ algebrycznych tak jako summ arytmetycznych; to jest, mnożyć każdy wyraz mnożnej przez każdy wyraz mnożnika, zachowując prawidło znaków w każdym

wieloczynie cząstkowym, i potem wziąć summę algebryczną tych wieloczynów. A ponieważ oczywiście wieloczyny cząstkowe są zawsze te same w jakimkolwiek porządku wykonano mnożenie jednego wielomianu przez drugi, ztąd wynika

Twierdzenie : *Wieloczyn dwóch wielomianów nie zmienia wartości gdy się przemienia porządek jego czynników.*

Otrzymuje się wieloczyn kilku wielomianów mnożąc pierwszy przez drugi, a wynik przez trzeci, i tak dalej.

Ostatnie twierdzenie rozciąga się łatwo do wieloczynu ilukolwiek wielomianów.

30. Opierając się na wyłożonej teoryi mnożenia, nie trudno dowieśdź kilku często używanych twierdzeń. I tak :

Mnożyć wieloczyn przez — 1 albo zmienić jego znaki jest jedno i to samo.

Bo, na mocy prawidła znaków, mnożenie przez —1 daje

$$(a+b-c)\times -1 = -a-b+c.$$

Wieloczyn zmienia znak gdy się przemienia znak jednego z jego czynników.

Jest albowiem oczywiście

$$-(A-B)C = -AC+BC = (B-A)C$$

A, B, C oznaczają jakiekolwiek jednomiany albo wielomiany.

Wieloczyn jest dodatny albo odjemny, według jak liczba jego czynników odjemnych jest parzysta albo nieparzysta.

Jakoż, wieloczyn czynników dodatnych jest dodatny, i każdy dwojan czynników odjemnych daje wieloczyn dodatny; więc wieloczyn wszystkich czynników będzie dodatny jeśli liczba czynników odjemnych jest parzysta, a będzie odjemny jeśli ta liczba jest nieparzysta.

Ztąd wynika że :

Potęgi parzyste ilości odjemnej są dodatne, a potęgi nieparzyste są odjemne.

Zresztą, można tego wprost dowieśdź; mamy albowiem

$$(-a)^{2n} = \left\{(-a)^2\right\}^n = (+a^2)^n = +a^{2n};$$

$$(-a)^{2n+1} = (-a)^{2n} \times -a = +a^{2n} \times -a = -a^{2n+1}.$$

Więc, biorąc $a = 1$, będzie

$$(-1)^{2n} = +1, \quad (-1)^{2n+1} = -1.$$

A zatem, jeśli wieloczyn n czynników A, B, C,... L ma być dodatny albo odjemny, według jak n jest liczbą parzystą albo nieparzystą, wyraża się go pisząc

$$(-1)^n \mathrm{ABC} \ldots \mathrm{L}.$$

31. Wykonamy jeszcze następujące mnożenia, które prowadzą do trzech ważnych twierdzeń:

$$\begin{array}{rrr}
a+b & a-b & a+b \\
a+b & a-b & a-b \\
\hline
a^2+ab & a^2-ab & a^2+ab \\
+ab+b^2 & -ab+b^2 & -ab-b^2 \\
\hline
a^2+2ab+b^2, & a^2-2ab+b^2, & a^2-b^2.
\end{array}$$

Pierwsze mnożenie daje kwadrat dwumianu $a+b$; a ponieważ litery a i b przedstawiają takie ilości jakie się mieć podoba, ztąd wnosimy że *kwadrat summy dwóch ilości zawiera kwadrat pierwszej, więcej podwójny wieloczyn pierwszej przez drugą, więcej kwadrat drugiej.*

Drugie mnożenie pokazuje że *kwadrat różnicy dwóch ilości równa się summie kwadratów tych ilości, mniej podwójnym ich wieloczynem.*

Trzeba tu uważać że, ponieważ kwadrat ilości dodatnej albo odjemnej jest ilością dodatną, musi być zawsze

$$a^2+b^2 > 2ab \quad \text{albo} \quad a^2+b^2 = 2ab.$$

Nakoniec, trzecie mnożenie dowodzi że *wieloczyn summy dwóch ilości przez ich różnicę jest równy różnicy kwadratów tych ilości.*

I NAWZAJEM, *różnica dwóch kwadratów jest równa wieloczynowi summy i różnicy ich pierwiastków kwadratowych.*

Za pomocą tych twierdzeń można często skracać rachunki. I tak, niech będzie do wykonania wieloczyn

$$(3a^4 + 5a^3b + 2ab^3 - 4b^4)(3a^4 + 5a^3b - 2ab^3 + 4b^4).$$

Pierwszy czynnik jest summą dwóch ilości

$$3a^4 + 5a^3b \quad \text{i} \quad 2ab^3 - 4b^4,$$

drugi ich różnicą; więc, na mocy trzeciego twierdzenia, szukany wieloczyn jest różnicą kwadratów tej summy i różnicy. Owoż, można pisać odrazu oba kwadraty, stosując pierwsze i drugie twierdzenie; mamy więc natychmiast żądany wieloczyn

$$9a^8 + 30a^7b + 25a^6b^2 - 4a^2b^6 + 16\,ab^7 - 16b^8.$$

Zastosujmy także powyższe twierdzenia do następującego wieloczynu, który wykonywając znajdujemy :

$$(\sqrt{12} - \sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{12} - \sqrt{3} - \sqrt{2}) = (\sqrt{12} - \sqrt{3})^2 - 2$$
$$= 12 - 2\sqrt{12.3} + 3 - 2 = 12 - 2.6 + 3 - 2 = 1.$$

Ten przykład pokazuje ważność prawidła znaków. Bez tego prawidła, trzebaby wykonać najpierwej wskazane dodawania i odciągania, które tu są niemożebne, i dopiero potem uskutecznić mnożenie; gdy tymczasem za pomocą prawidła znaków, wykonywa się natychmiast mnożenie, a odsyła się dodawania i odciągania aż na koniec. Co jest właśnie w duchu algebrycznych działań. W naszym przykładzie niemożebne dodawania i odciągania zniknęły; i co godne uwagi, chociaż nie możemy mieć dokładnej wartości czynników, otrzymujemy jednak dokładną wartość wieloczynu.

Na zastosowanie wzajemnicy trzeciego twierdzenia, szukajmy czy nie można rozłożyć na czynniki wielomianu

$$x^2 + 4cx + 4c^2 - 9a^2 + 6\,ab - b^2.$$

Widzimy zaraz że pierwsze trzy wyrazy tworzą kwadrat $(x + 2c)^2$, a drugie trzy, wzięte ze znakami przeciwnemi, czynią kwadrat $(3a - b)^2$. Zatem powyższy wielomian jest równy różnicy kwadratów $(x + 2c)^2 - (3a - b)^2$ która, na mocy wzajemnicy trzeciego twierdzrnia, jest równa wieloczynowi $(x + 2c + 3a - b)(x + 2c - 3a + b)$. Mamy więc

$$x^2+4cx+4c^2-9a^2+6ab-b^2=(x+2c+3a-b)(x+2c-3a+b).$$

Dobrze będzie znać jeszcze następujące przekształcenie

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=\left(\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\right)=ab.$$

Ta tosamość dowodzi że *wieloczyn dwóch liczb jakichkolwiek* a *i* b *jest równy przewyżce kwadratu połowy ich summy nad kwadratem połowy różnicy.*

32. *Kwadrat wielomianu równa się summie kwadratów ze wszystkich wyrazów powiększonej podwójnemi wieloczynami.*

Wiadoma formuła

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

pokazuje że twierdzenie jest prawdziwe dla dwumianu.

Wykonywając mnożenie, znajdujemy łatwo

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc;$$

co także sprawdza ustawę tworzenia się kwadratu trójmianu.

Żeby dowieśdź ogólności tej ustawy, trzeba okazać że, jeśli ona stosuje się do wielomianu mającego n wyrazów, to będzie prawdziwa dla wielomianu mającego $n + 1$ wyrazów.

Weźmy dwa po sobie idące wielomiany

$$a+b+c+..+k \quad \text{i} \quad a+b+c+..k+l$$

mające pierwszy n wyrazów, drugi $n+1$. Formuła dwumianu daje

$$(a+b+c+..+k+l)^2 = \{(a+b+c+...+k)+l\}^2$$
$$= (a+b+c+..+k)^2+l^2+2(a+b+c+...+k)\,l.$$

Owoż kwadrat $(a+b+c+..+k)^2$ zawiera kwadraty wszystkich n wzrazów a, b, c,.. k, i ich podwójne wieloczyny; jeśli więc przydamy do nich kwadrat l^2 i podwójne wieloczyny z a, b, c,... k przez l, będziemy mieli kwadraty wszystkich $n+1$ wyrazów a, b, c,... k, l, i ich podwójne wieloczyny. Ztąd wynika że, jeśli ustawa tworzenia się kwadratu jest prawdziwa dla wielomianu mającego n wyrazów, to będzie prawdziwa dla wielomianu mającego $n+1$ wyrazów. Aliści ta ustawa sprawdza się w dwumianie; więc się sprawdza w trójmianie, i temsamem w czworomianie, etc. Zatem stosuje się do wielomianu jakiejkolwiek liczby wyrazów.

Powyższe rozumowanie jest ogólne, i ma jeszcze miejsce gdy niektóre z ilości a, b, c.. są odjemne; byle tylko zachowano prawidło znaków w summie algebrycznej wieloczynów.

Pisze się niekiedy kwadrat wielomianu w kształcie symbolicznym

$$(a+b+c+..k)^2 = \Sigma a^2 + 2\Sigma ab.$$

Litera Σ wskazuje że trzeba brać summę wyrazów podobnych do tego przed którym jest postawiona, zachowując prawidło znaków.

Rozumując podobnie, znalezionoby że sześcian wielomianu wyraża się symboliczną formułą

$$(a+b+c+d+...k)^3 = \Sigma a^3 + 3\Sigma a^2 b + 6\Sigma abc.$$

Ale ta rzecz będzie później, na swojem miejscu, ogólnie wyłożona.

MNOŻENIE PORZĄDKOWANE.

33. Kiedy tylko można porządkować wielomiany według potęg malejących albo rosnących jednej litery, a szczególniej względem x, y,... trzeba to zawsze czynić; bo wynikająca ztąd symetrya rachunków ułatwia uproszczenia; zwłaszcza w mnożeniu wielomianów które zaraz wykonamy. Przy tej sposobności, uzupełniając rzecz już wyłożoną, powiemy jak się porządkuje wielomian, gdy ta sama potęga litery *porządkującej* wchodzi do kilku wyrazów. I tak, jeśli trzeba porządkować wielomian

$$ax^3 - x^3 + ax - 2a^2x^2 - bx^3 + b^2x^2 + a^3,$$

względem potęg malejących litery x, uważamy że x^3 jest czynnikiem w trzech wyrazach ax^3, $-x^3$, $+bx^3$; bierzemy więc x^3 za czynnik, i zamiast $ax^3 - bx^3 - x^3$, piszemy $(a-b-1)x^3$. Tak samo rozkładajac na czynniki dwumian $-2a^2x^2 + b^2x^2$, mamy $(-2a^2 + b^2)x^2$ albo $-(2a^2 - b^2)x^2$. Uporządkowany tym sposobem wielomian bierze kształt

$$(a-b-1)x^3 - (2a^2 - b^2)x^2 + ax + a^3.$$

Niech będą teraz do mnożenia dwa wielomiany

$$ax^3 + (a^2 - ab + b^2)x^2 + (a-b)x + a^2 - 3$$

$$2x^2 + (a+b)x - a^2 - 2.$$

Te oba wielomiany są uporządkowane według potęg malejących litery x; ale spółczynniki zamiast być liczbami są wielomianami z a i b, które właśnie wikłają działania. Aby ułatwić mnożenie i redukcyę, pisze się kolumnami spółczynniki litery porządkującej x; poczem mnoży się wszystkie wyrazy mnożnej przez każdy wyraz mnożnika, wykonywając wieloczyny spółczynników wielomiennych według prawideł mnożenia wielomianów; nakoniec w każdej kolumnie dodaje się i redukuje otrzymane wyniki. Szczegóły działań wzór następujący wydatnie pokazuje.

MNOŻNA	$ax^3 + a^2$ $- ab$ $+ b^2$	$x^2 + a$ $-b$	$x + a^2$ $+3$		
MNOŻNIK	$2x^2 + a$ $+ b$	$x - a^2$ $- 2$			
WIELOCZYN CZĄSTKOWY PRZEZ $2x^2$	$2ax^5 + 2a^2$ $-2ab$ $+2b^2$	$x^4 + 2a$ $-2b$	$x^3 + 2a^2$ -6	x^2	
WIELOCZYN CZĄSTKOWY PRZEZ $(a+b)x$	$+a^3$ $+ab$	$+a^2$ $+b^3$	$+a^2$ $-b^2$	$+a^3$ $+a^2b$ $+3a$ $+3b$	x
WIELOCZYN CZĄSTKOWY PRZEZ $-a^2-2$		$-a^3$ $-2a$	$-a^4$ $+a^3b$ $-a^2b^2$ $-2a^2$ $+2ab$ $-2b^2$	$-a^3$ $+a^2b$ $-2a$ $+2b$	$-a^4$ $-a^2$ -6
WIELOCZYN CAŁY UPROSZCZONY	$2ax^5 + 3a^2$ $-ab$ $+2b^2$	$x^4 - 2b$ $+b^3$	$x^3 - a^4$ $+a^3b$ $-a^2b^2$ $+a^2$ $+2ab$ $-3b^2$ -6	$x^2 + 2a^2b$ $+a$ $+5b$	$x - a$ $-a^2$ -6

Mnożenie porządkowane pokazuje że stopień wieloczynu względem litery porządkującej jest równy summie stopni czynników. W rozwiniętym przykładzie, mnożna jest *trzeciego* stopnia względem x, mnożnik *drugiego* stopnia; ich wieloczyn jest stopnia *piątego*.

Uwaga. W mnożeniu zwyczajnem wielomianów bierze się zwykle za mnożnik wielomian mający mniej wyrazów; ale w mnożeniu porządkowanem najdogodniej będzie wziąć za mnożnę wielomian mający wszystkie potęgi litery porządkującej, według wykładników malejących; bo wtedy wieloczyny cząstkowe szykują się regularnie kolumnami. Dodajemy atoli że, w mnożeniu wielomianów litera porządkująca i samo porządkowanie według jej potęg malejących albo rosnących są rzeczą obojętną; jakimkolwiek sposobem uskuteczniono działanie, otrzymuje się zawsze ten sam wieloczyn.

34. Liczba wyrazów wieloczynu dwóch wielomianów. Otrzymuje się wieloczyn dwóch wielomianów, mnożąc każdy wyraz pierwszego przez każdy wyraz drugiego; więc, jeśli nie ma żadnej redukcyi, liczba wyrazów wieloczynu jest oczywiście równa wieloczynowi liczb które oznaczają ile jest wyrazów w każdym z tych wielomianów.

I tak w mnożeniu

$$(a+b-c)(m-n-p+q)$$

$$=am+bm-cm-an-bn+cn-ap-bp+cp+aq+bq-cq$$

mnożna składa się z 3ch wyrazów, mnożnik z 4ch; ponieważ nie ma redukcyi, liczba wyrazów wieloczynu jest $3.4=12$.

Uważajmy teraz że, w mnożeniu uporządkowanem względem potęg malejących jednej litery, naprzykład względem x w przykładzie poprzedzającego numeru, litera porządkująca ma największy wykładnik w pierwszem wyrazie mnożnej i w pierwszym wyrazie mnożnika; więc, w wieloczynie tych dwóch wyrazów, wykładnik litery x, będąc summą dwóch największych wykładników, będzie największym ze wszystkich jakie ta litera mieć może w różnych wyrazach całego wieloczynu. To pokazuje oczywiście że wieloczyn pierwszego wyrazu mnożnej przez pierwszy mnożnika jest wyrazem niezredukownym wieloczynu dwóch wielomianów. Takie samo rozumowanie dowodzi że wieloczyn ostatniego wyrazu mnożnej przez ostatni mnożnika jest także wyrazem niezredukownym. Ztąd wynika że, jakiekolwiek mogą być redukcye, wieloczyn dwóch wielomianów nie ma nigdy mniej niż *dwa* wyrazy. Aby dać tego przykład, dość wykonać wieloczyn

$$(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)(a+b)=a^5+b^5.$$

Więc, jeśli oznaczymy przez m i n liczby wyrazów mnożnej i mnożnika, będziemy mieli twierdzenie:

Wieloczyn dwóch wielomianów ma *najwięcej* mn wyrazów, a *najmniej* 2.

35. Gdy dwa wielomiany mają kilka liter spólnych, wtedy zdarza się najczęściej że wieloczyn zawiera więcej niż dwa wyrazy niezredukowne. I tak, w przykładzie n^ru^ 33 dwa wielomiany mają trzy litery spólne x, a, b; porządkując względem każdej z nich i przestając na wyrazach z największemi wykładnikami, widzimy zaraz że wieloczyny $2ax^3$, $-a^4$ i $-a^4x^2$, $+b^3x^3$ są wyrazami niezredukownemi. Ale nie trzeba zapominać że jeden i ten sam wyraz wieloczynu, zawierający kilka liter, może być względnie do każdej z nich wyrazem niezredukownym. I w samej rzeczy, wieloczyn $(ax+by)(ax-by)=a^2x^2-b^2y^2$ zawiera cztery litery a ma tylko dwa wyrazy.

Z tego co poprzedza wynika ważny wniosek:

Wieloczyn algebryczny zawiera wszystkie litery swoich czynników.

Jakoż, jeśli są redukcye w wieloczynie, to zostają zawsze wyrazy niezredukowne ze wszystkiemi spólnemi literami czynników; a jeśli nie ma redukcyj, to temsamem wieloczyn zawiera wszystkie litery swoich czynników.

Nakoniec, wynika z określenia wielomianów jednorodnych, i na mocy prawideł mnożenia, że

Wieloczyn dwóch wielomianów jednorodnych jest wielomianem jednorodnym którego stopień jest summa ich stopni. I nawzajem.

Ta własność jest bardzo użyteczna w rachunku, bo służy do sprawdzania wyników działań z wyrażeniami jednorodnemi

ĆWICZENIA

Sprawdzić tosamości

1. $$1+x^4=(1+x^2+x\sqrt{2})(1+x^2-x\sqrt{2}),$$

2. $$1+x^6=(1+x^2)(1+x^2+x\sqrt{3})(1+2^2-x\sqrt{3}).$$

3. $$(a+b+c)(ab+ac+bc)-abc=(a+b)(a+c)(b+c),$$

4. $$(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)=aa'+bb')^2+(ab'-ba')^2$$
$$=(aa'-bb')^2+(ab'+ba')^2,$$

5. $$(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)-(aa'+bb'+cc')^2$$
$$=(ab'-ba')+(ac'-ca')^2+(bc'-cb')^2.$$

6. Dowieśdź że, jakakolwiek jest liczba iłości, wyrażenie

$$(a^2+b^2+c^2+\ldots+l^2)(a'^2+b'^2+c'^2+\ldots+l'^2)$$
$$-(aa'+bb'+cc'+\ldots ll')^2$$

jest zawsze summą kwadratów,

7. Dowieśdź że $(a^2+b^2+c^2+d^2)(a'^2+b'^2+c'^2+d'^2)$
$$=(aa'+bb'+cc'+dd')^2+(ab'-ba'+cd'-dc')^2$$
$$+(ac'-ca'+db'-bd')^2+(ad'-da'+bc'-cb')^2.$$

Zkąd TWIERDZENIE EULERA: *Wieloczyn summy czterech kwadratów przez summę czterech kwadratów jest summą czterech kwadratów.*

8. Jakiekolwiek są iłości x, y, z, dowieśdź że one zawsze dają tosamość

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy).$$

Ta znamienita tosamość służy do rozwiązywania równania stopnia 3go $x^3+px+q=0$.

9. Jeśli x^2+2ay^2 jest kwadratem, wtedy x^2+ay^2 jest summą dwóch kwadratów.

10. dowieśdź że, jeśli jest $a^2+b^2=1$, czyniąc $2ab=\mathrm{A}$ i $a^2-b^2=\mathrm{B}$,

będzie $$\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2=1.$$

11. Gdy dwa wielomiany są całkowite względem spólnej litery, nazywając m, n i m', n' największe i najmniejsze wykładniki tej litery w obydwóch wielomianach, dowieśdź że wieloczyn tych dwóch wielomianów nie może mieć więcej niż $m-m'+n-n'+1$ wyrazów.

Jakiekolwiek są ilości x, y, z, u, dowieśdź że istnieją zawsze dwie nierówności

$$12.\quad \begin{cases} x^2+y^2+z^2>yz+zx+xy, \\ 3(x^2+y^2+z^2+u^2)>2(xy+xz+xu+yz+yu+2u). \end{cases}$$

13. $xyz>(y+z-x)(x+z-y)(x+y-z)$. x, y, z są dodatne.

DZIELENIE.

Dzielenie jest działaniem odwrotnem mnożenia; zatem prawidła dzielenia algebrycznego wynikają z ogólnego określenia : *Dzielić jedną ilość przez drugą jestto szukać trzeciej, któraby pomnożona przez drugą wydała pierwszą.*

36. Dzielenie jednomianów całkowitych. Niech będzie do dzielenia $36a^7b^2c^3d^5$ przez $9a^4bc^3$; to dzielenie wyraża się w kształcie ułamka

$$\frac{36a^7b^2c^3d^5}{9a^4bc^3},$$

którego licznikiem jest dzielna i mianownikiem dzielnik.

Na mocy określenia, iloraz powinien być taki, żeby pomnożony przez dzielnik $9a^4bc_3$ wydał dzielnę $36a^7b^2c^3d^5$; a ponieważ wielomian pomnożony przez jednomian nie może dawać jednomianu, szukany iloraz jest jednomianem, który się otrzyma za pomocą samych prawideł mnożenia.

Jakoż, według tych prawideł, spółczynnik 36 dzielnej musi być wieloczynem spółczynników dzielnika i ilorazu; więc dzieląc 36 przez 9, znajdujemy spółczynnik 4 ilorazu. Następnie, wykładnik 7 litery a w dzielnej musi być summą wykładników tej samej litery dzielnika i ilorazu; więc różnica 7 — 4 czyli 3 jest wykładnikiem litery a w ilorazie. Tak samo wykładnik litery b w ilorazie jest 2 — 1 czyli 1. Poczem uważamy że litera c, mająca ten sam wykładnik w dzielnej i w dzielniku, nie może się znajdować w ilorazie; bo, gdyby do niego wchodziła nawet z wykładnikiem 1, miałaby w dzielnej wykładnik $3+1$; ona zaś ma tylko wykładnik 3 w dzielnej. Nakoniec, litera d wejdzie do iloraza ze swoim wykładnikiem 5; albowiem, nie będąc w dzielniku, gdyby nie wchodziła do ilorazu z wykładnikiem 5, nie byłaby w dzielnej z tym wykładnikiem. Więc żądany iloraz jest

$$\frac{36a^7b^2c^3d^5}{9a^4bc^3}=4a^3bd^5.$$

Ztego rozumowania wyprowadzamy następujące prawidło dzielenia jednomianów.

Dzieli się spółczynnik dzielnej przez spółczynnik dzielnika, i otrzymuje się spółczynnik ilorazu; gdy litera spólna dwom jednomianom ma wykładnik większy w dzielnej niż w dzielniku, pisze się ją w ilorazie z wykładnikiem równym różnicy tych dwóch wykładników; a gdy ta litera ma w dzielnej i dzielniku ten sam wykładnik, wtedy nie pisze się jej w ilorazie; nakoniec, gdy jaka litera w dzielnej nie znajduje się w dzielniku, to się ją pisze w ilorazie z wykładnikiem jaki ma w dzielnej.

Więc, aby jeden jednomian całkowity był podzielny przez drugi, trzeba i dość jest żeby dzielna zawierała wszystkie litery dzielnika z wykładnikami przynajmniej równemi.

I tak, jednomian $\frac{9}{16}a^5b^4cd$ jest podzielny przez $\frac{3}{8}a^2b^3c$;

bo, wykonywając dzielenie, znajdujemy

$$\frac{9.8}{16.3}\cdot\frac{a^5b^4cd}{a^2b^3c}=\frac{3}{2}a^3bd$$

iloraz algebrycznie całkowity.

Przeciwnie, jednomian $12a^2b$ nie jest podzielny przez jednomian $4a^3c^2d$ który zawiera literę a z wykładnikiem większym niż w dzielnej, i litery c i d obce dzielnej; bo oczywiście nie ma żadnego jednomianu całkowitego któryby, pomnożony przez ten dzielnik, mógł wydać dzielnę. Wtym razie dzielenie daje iloraz ułamkowy $\frac{3a^2b}{a^3c^2d}$, który się nazywa ułamkiem algebrycznym.

37. Prawidło znaków ilorazu. Z prawidła znaków mnożenia łatwo się wywodzi prawidło znaków dzielenia jednomianów jakichkolwiek. Albowiem, oznaczając przez a i b dzielnę i dzielnik, mamy oczywiście

$$\frac{+a}{+b}=+\frac{a}{b},$$

$$\frac{-a}{+b}=-\frac{a}{b},$$

$$\frac{+a}{-b}=-\frac{a}{b},$$

$$\frac{-a}{-b}=+\frac{a}{b}.$$

To pokazuje że iloraz ma znak $+$, gdy dzielna i dzielnik mają te same znaki; a znak $-$, gdy dzielna i dzielnik są ze znakami przeciwnemi.

Więc w dzieleniu jednomianów prawidło znaków jest to samo co w mnożeniu.

Wykładnik zero, wykładnik odjemny

38. Niech będzie do dzielenia potęga a^m przez potęgę a^n,

dwie potęgi tej samej ilości a; według prawidła wykładników otrzymujemy iloraz

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n},$$

z wyraźnym warunkiem że wykładnik $m > n$. Owoż, jeśli przypuścimy $m = n$, będzie

$$\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0;$$

wynik symboliczny, który sam przez się nic nie wyraża; albowiem, na mocy określenia wykładników, potęga a^0 znaczyłaby że trzeba wziąć ilość a *zero* razy jako czynnik, co nie przedstawia żadnego sensu. W tem wszystkiem nie ma nic dziwnego. Otrzymaliśmy iloraz osobliwy a^0, dlatego żeśmy zastosowali prawidło wykładników do przypadku dla którego ono nie było dane. Ale, ponieważ symbol a^0 pochodzi z dzielenia w którem dzielnik jest równy dzielnej, i temsamem iloraz zawsze równy jedności; naturalnie można uważać wyrażenie osobliwe a^0, jako równowarte jedności, jakakolwiek jest wartość litery a. Więc, wedle tej ugody, *wszelka ilość mająca wykładnik zero, będzie zawsze uważana jako znacząca* 1.

I tak, $\quad 2^0 = 1, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1;$ etc.

Przypuśćmy teraz $m < n$, i weźmy $n = m + p$; iloraz przedstawi się w nowym kształcie symbolicznym

$$\frac{a^m}{a^{m+p}} = a^{m-(m+p)} = a^{-p},$$

który nie pokazuje wyraźnego znaczenia. Ale można wprost znaleźć iloraz; dość tylko nazwać q jego wartość, co zaraz daje tosamość

$$a^m = qa^{m+p},$$

zkąd, dzieląc obie strony przez a^m, wywodzimy

$$1 = qa^p.$$

Więc

$$q = \frac{1}{a^p} \quad \text{czyli} \quad \frac{a^m}{a^{m+p}} = \frac{1}{a^p}.$$

To mając, ponieważ potęga odjemna a^{-p} jest wynikiem dzielenia dającego iloraz $\frac{1}{a^p}$, możemy oczywiście uważać wyrażenie osobliwe a^{-p} jako równowarte ilości $\frac{1}{a^p}$, i położyć

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}.$$

Na mocy tej ugody, *wszelka ilość mająca wykładnik odjemny równa się ułamkowi, którego licznikiem jest jedność a mianownikiem ta sama ilość tylko z wykładnikiem dodatnym.*

Stosownie do tych tłumaczeń, oznaczając przez m i n dwie liczby całkowite i dodatne, mamy ogólnie

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

39. Użycie wykładnika 0 jest bardzo użyteczne w algebrze. Za jego pomocą można, porządkując wielomian względem litery x, na przykład, zachować tę literę z wykładnikiem 0 w wyrazie do którego nie wchodzi, i pisać

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots \quad A_{m-1} x + A_m x^0.$$

Tym sposobem widzimy zaraz że wielomian *zupełny* stopnia m^{go} na x, to jest mający wszystkie potęgi tej litery od m aż do 0, zawiera $m+1$ wyrazów.

I tak na przykład, wielomian

$$ax^3 + (a^2 - ab + b^2)x^2 + (a - b)x + (a^2 - 3)x^0,$$

trzeciego stopnia na x, ma *cztery* wyrazy względem x.

Wykładnik odjemny może także służyć do porządkowania wielomianów dając im kształt całkowity. I tak, wielomian

$$ax^3 + bx^2 + cx + d + \frac{e}{x} + \frac{f}{x^2},$$

uporządkowany względem potęg malejących litery x, bierze kształt wielomianu całkowitego

$$ax^3 + bx^2 + cx + dx^0 + ex^{-1} + fx^{-2}.$$

Uwaga. Podzielność w algebrze nie jest to samo co w arytmetyce. W algebrze potęga a^3 jest podzielna przez a, jakąkolwiek nadanoby wartość literze a: iloraz $\frac{a^3}{a} = a$ jest *algebrycznie całkowity*, przeciwnie iloraz $\frac{a}{a^3} = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$ *jest ułamkowy.*

W arytmetyce rzeczy dzieją się inaczej. Potęga 2^3 naprzykład jest podzielna przez 2. Ale potęga $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ nie jest podzielna przez $\frac{1}{2}$, a przeciwnie $\frac{1}{2}$ jest podzielne przez $\left(\frac{1}{2}\right)^3$; bo iloraz $\left(\frac{1}{2}\right)^3 : \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ jest ułamkiem, a zaś iloraz $\frac{1}{2} : \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 4$ jest liczbą całkowitą.

41. Dzielenie wielomianu przez jednomian. Iloraz całkowity z podzielenia wielomianu przez jednomian, jeśli istnieje, jest oczywiście wielomianem, którego każdy wyraz pomnożony przez ten jednomian wydaje odpowiedający wyraz dzielnej. Więc, żeby wykonać dzielenie wielomianu całkowitego przez jednomian całkowity, trzeba podzielić każdy wyraz dzielnej przez dzielnik, według prawidła dzielenia jednomianów. Jeśli dzielenia cząstkowe są możebne, iloraz będzie całkowity; jeśli nie, to będzie ułamkowy.

Przykłady. 1° Niech będzie do dzielenia wielomian

$12a^8b^6 - 24a^7b^4 + 18a^3b^5$ przez $6a^3b^4$;

wyznaczając cząstkowe ilorazy, znajdujemy

$$\frac{12a^8b^6 - 24a^7b^4 + 18a^3b^5}{6a^3b^4} = a^5b^2 - 4a^4 + 3b.$$

2° Tak samo otrzymuje się iloraz

$$\frac{15a^5b^8 + 16a^4b^7 - 24a^6b^5}{12a^4b^5} = \frac{5}{4}ab^3 + \frac{4}{3}b^2 - 2a^2.$$

Oba ilorazy są *algebrycznie całkowite*, chociaż drugi nie jest samoiście całkowity.

3° Wielomian $8a^3 - 6a^4b^2 + 5a^6b^4$ nie jest podzielny przez jednomian $4a^5b$; bo żaden z dwóch pierwszych wyrazów dzielnej nie jest podzielny przez dzielnik. Szukany iloraz jest ułamkiem algebrycznym

$$\frac{8a^3 - 6a^4b^2 + 5a^6b^3}{4a^5b}.$$

42. Jednomian nie jest nigdy podzielny przez wielomian; bo wieloczyn wielomianu przez jednomian albo przez wielomian jest zawsze wielomianem (n^ra^ 23 i 34). Zatem iloraz z podzielenia jednomianu ax^2 przez dwumian $ax + b$ wyraża się ułamkowo przez

$$\frac{ax^2}{ax + b}.$$

DZIELENIE WIELOMIANÓW.

43. Wedle ogólnego określenia, dzielić jeden wielomian przez drugi jestto szukać trzeciego wielomianu, któryby pomnożony przez drugi wydał pierwszy. Jeśli szukany wielomian istnieje, wtedy dzielna, będąc wieloczynem dzielnika i ilorazu, jest summą wieloczynów cząstkowych z mnożenia wszystkich wyrazów ilorazu przez każdy wyraz dzielnika. Ale cząstkowe wieloczyny mogą się redukować. Owoż wiemy że, w mnożeniu

dwóch wielomianów, wyrazy mające największe wykładniki w obydwóch względem jednej z liter spólnych, dają wieloczyn cząstkowy który, mając największy wykładnik względem tej litery, jest wyrazem niezredukownym całego wieloczynu (nro 34). Ztąd wynika że wyraz dzielnej, mający największy wykładnik względem jednej litery, spólnej dzielnikowi i dzielnej, jest wieloczynem dwóch wyrazów które, względem tej litery, mają największy wykładnik w ilorazie i dzielniku. Więc jeśli podzielimy wyraz dzielnej przez wyraz dzielnika, oba wzięte z największemi wykładnikami względem spólnej litery, jesteśmy pewni że iloraz cząstkowy, wyznaczony według prawideł dzielenia jednomianów, będzie jednym z wyrazów szukanego ilorazu, i będzie miał największy wykładnik względem uważanej litery. Żeby ułatwić działanie, porządkujemy dzielnę i dzielnik według potęg malejących litery spólnej.

Co uczyniwszy, dzielimy pierwszy wyraz dzielnej przez pierwszy dzielnika, i znajdujemy pierwszy wyraz ilorazu. Jeśli teraz pomnożymy dzielnik przez znaleziony wyraz i odciągniemy wieloczyn od dzielnej, otrzymamy resztę która będzie wieloczynem dzielnika przez wszystkie inne wyrazy ilorazu. Porządkując tę resztę, która będzie nową dzielną, i rozumując jako wyżej, widzimy łatwo że jej pierwszy wyraz jest wieloczynem pierwszego wyrazu dzielnika przez drugi wyraz ilorazu uporządkowanego tak samo jak dzielna i dzielnik. Więc, dzieląc pierwszy wyraz pierwszej reszty przez pierwszy wyraz dzielnika, znajdziemy drugi wyraz ilorazu. Przez ostatni znaleziony wyraz mnożymy dzielnik, odciągamy wieloczyn od pierwszej reszty, i otrzymujemy drugą resztę która, uporządkowana, będzie trzecią dzielną. Więc znowu dzielimy jej pierwszy wyraz przez pierwszy wyraz dzielnika, i znajdujemy trzeci wyraz ilorazu. I tak dalej postępując, wyznaczymy wszystkie wyrazy ilorazu; a przychodząc do reszty zero, będziemy wiedzieli że dany wielomian jest wieloczynem drugiego wielomianu przez znaleziony trzeci.

Wielce jest ważną rzeczą uważać że poprzedzające rozumowania zostają wszystkie te same jeśli, zamiast porządkować dzielnę i dzielnik według potęg malejących spólnej litery, porządkowano je według potęg rosnących tej litery; i, jakakolwiek ona jest, iloraz będzie zawsze ten sam, kiedy jeden z dwóch danych wielomianów jest wieloczynem drugiego przez trzeci szukany.

Ztąd wywodzimy następujące prawidło dzielenia wielomianów.

Prawidło. *Aby podzielić jeden wielomian przez drugi, porządkuje się obydwa względem potęg malejących albo rosnących tej samej litery; poczem, dzieli się pierwszy wyraz dzielnej przez pierwszy wyraz dzielnika, co daje pierwszy wyraz ilorazu; mnoży się dzielnik przez ten znaleziony wyraz i odciąga się wieloczyn od dzielnej; porządkuje się resztę jeśli tzzeba, i dzieli się jej pierwszy wyraz przez pierwszy wyraz dzielnika, co daje drugi wyraz ilorazu; mnoży się dzielnik przez ten drugi wyraz ilorazu i odciąga się wieloczyn od pierwszej reszty; i znowu się dzieli pierwszy wyraz drugiej reszty, zawsze uporządkowanej, przez pierwszy wyraz dzielnika, co daje trzeci wyraz ilorazu. Tym sposobem ciągnie się dalej rachunek, aż do ostatniego wyrazu ilorazu.*

Następujący przykład wyjaśni co jeszcze zostaje wątpliwego, i pokaże jak się urządza rachunek dzielenia.

$$
\begin{array}{l|l}
\text{DZIELNA} & \text{DZIELNIK} \\
10x^5-43ax^4+4a^2x^3+8a^3x^2-22a^4x+3a^5 & 5x^2-4ax+3a^2 \\
\hline
-10x^5+8ax^4-6a^2x^3 & \text{ILORAZ} \\
\quad -35ax^4-2a^2x^3+8a^3x^2 & 2x^3-7ax^2-6a^2x+a^3 \\
\quad +35ax^4-28a^2x^3+21a^3x^2 & \\
\qquad -30a^2x^3+29a^3x^2-22a^4x & \\
\qquad +30a^2x^3-24a^3x^2+18a^4x & \\
\qquad\qquad +5a^3x^2-4a^4x+3a^5 & \\
\qquad\qquad -5a^3x^2+4a^4x-3a^5 & \\
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Uporządkowawszy dwa wielomiany według potęg malejących litery x, mamy pewność że wyraz $10x^5$ dzielnej jest wieloczynem wyrazu $5x^2$ dzielnika przez pierwszy wyraz ilorazu tak samo uporządkowanego; zatem, dzieląc $10x^5$ przez $5x^2$ według prawideł dzielenia jednomianów, znajdujemy pierwszy wyraz $2x^3$ ilorazu. Znając ten wyraz, mnożymy przezeń dzielnik i odciągamy wieloczyn od dzielnej. Ale, żeby odrazu wykonać dwa działania, piszemy zaraz pod dzielną wyrazy wieloczynu ze znakami zmienionemi; poczem, redukując i porządkując, otrzymujemy pierwszą resztę.

Dzielimy teraz pierwszy wyraz $-35ax^4$ tej reszty przez $5x^2$, i mamy drugi wyraz $-7ax^2$ ilorazu. Mnożymy znowu dzielnik przez drugi znaleziony wyraz, piszemy wieloczyny cząstkowe, zmieniając ich znaki, pod pierwszą resztą, i redukując otrzymujemy drugą resztę.

W tej reszcie pierwszy wyraz jest $-30a^2x^3$, dzieląc go przez $5x^2$ wyznaczamy trzeci wyraz $-6a^2x$ ilorazu. Mnożymy dzielnik przez trzeci znaleziony wyraz, i, odciągając wieloczyn od drugiej reszty, otrzymujemy trzecią resztę.

Nakoniec, dzielimy pierwszy wyraz $+5a^3x^2$ trzeciej reszty przez $5x^2$, i znajdujemy czwarty wyraz $+a^3$ ilorazu. Szukamy czwartej reszty takim samym sposobem jako poprzedzających, i widzimy że ona jest zero. Więc działanie skończone, i iloraz jest $2x^3-7ax^2-6a^2x+a^3$.

Działanie wyłożonego dzielenia pokazuje że stopień ilorazu jest różnicą stopni dzielnej i dzielnika względem litery porządkującej. A jeśli dzielna i dzielnik są wielomianami jednorodnemi, iloraz jest także wielomianem jednorodnym stopnia równego różnicy ich stopni. — W rozwiniętym przykładzie oba wielomiany są jednorodne, dzielna *piątego* stopnia dzielnik *drugiego;* iloraz jest wielomianem jednorodnym stopnia *trzeciego.*

Drugi przykład. Dzielenie uporządkowane według potęg rosnących litery x.

$$
\begin{array}{l|l}
32 - 4x + 3x^2 + 18x^3 - x^4 - 12x^5 + 10x^6 & 8 - 7x + 6x^2 - 5x^3 \\
\hline
-32 + 28x - 24x^2 + 20x^3 & 4 + 3x - 2x^3 \\
\hline
\quad + 24x - 21x^2 + 2x^3 - x^4 & \\
\quad - 24x + 21x^2 - 18x^3 + 15x^4 & \\
\hline
\qquad\qquad - 16x^3 + 14x^4 - 12x^5 + 10x^6 & \\
\qquad\qquad + 16x^3 - 14x^4 + 12x^5 - 10x^6 & \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

44. Gdy wielomian stanowiący dzielnę nie jest zupełny, wtedy, dla zachowania foremności rachunku, trzeba pisać całą dzielnę w pierwszej reszcie, i w następujących dopóki są przerwy. Oto wzór rachunku

$$
\begin{array}{l|l}
2x^6 - 3ax^5 + 18a^3x^3 - 15a^5x + 52a^6 & x^4 - 2a^2x^2 + 6a^3x + 13a^4 \\
\hline
-2x^6 + 4a^2x^4 - 12a^3x^3 - 26a^4x^2 & 2x^2 - 3ax + 4a^2 \\
\hline
\quad - 3ax^5 + 4a^2x^4 + 6a^3x^3 - 26a^4x^2 - 15a^5x + 52a^6 & \\
\quad + 3ax^5 \qquad\quad - 6a^3x^3 + 18a^4x^2 + 39a^5x & \\
\hline
\qquad\quad + 4a^2x^4 \qquad\quad - 8a^4x^2 + 24a^5x + 52a^6 & \\
\qquad\quad - 4a^2x^4 \qquad\quad + 8a^4x^2 - 24a^5x - 52a^6 & \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Weźmy jeszcze drugi przykład który nie potrzebuje już żadnego objaśnienia.

$$
\begin{array}{l|l}
12a^5 + 13a^4b + 15a^2b^3 + 6ab^4 - 40b^5 & 4a^3 + 7a^2b - 2ab^2 - 8b^3 \\
\hline
-12a^3 - 21a^4b + 6a^3b^2 + 24a^2b^3 & 3a^2 - 2ab + 5b^2 \\
\hline
\quad - 8a^4b + 6a^3b^2 + 39a^2b^3 + 6ab^4 - 40b^5 & \\
\quad + 8a^4b + 14a^3b^2 - 4a^2b^3 - 16ab^4 & \\
\hline
\qquad\quad + 20a^3b^2 + 35a^2b^3 - 10ab^4 - 40b^5 & \\
\qquad\quad - 20a^3b^2 - 35a^2b^3 + 10ab^4 + 40b^5 & \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Wyznaczywszy pierwszy wyraz $2x^2$ ilorazu, mnożywszy dzielnik przez $2x^2$, i piszemy wyrazy wieloczynu, zmieniając ich znaki, pod dzielną w porządku w jakim się przedstawiają; ale potem, redukując porządkujemy resztę. Dzielimy pierwszy az $-3ax^5$ pierwszej reszty przez x^4, i znajdujemy drugi wyraz $-3ax$ ilorazu; mnożymy dzielnik przez $-3ax$, i piszemy wieloczyny cząstkowe, zmieniając ich znaki, pod pierwszą resztą, a zostawiając miejsce puste na wyraz czwartej potęgi x której brakuje. Po redukcyi, piszemy drugą resztę w której zostawiamy także miejsce puste na brakujący wyraz trzeciej potęgi x. Nakoniec, wyznaczamy ostatni wyraz $4a^2$ ilorazu, przez który mnożąc dzielnik i zarazem odciągając wieloczyny cząstkowe od drugiej reszty, znajdujemy zero na ostatnią resztę.

45. Zdarza się często że spółczynniki litery porządkującej, w pierwszych wyrazach dzielnika i dzielnych cząstkowych zamiast być jednomianami jako w przykładach poprzedzających, są wielomianami. Wtedy dzielenie jest mniej więcej zawiłe, ale się zawsze wykonywa według tych samych prawideł; z tą tylko różnicą że trzeba dzielić osobno, spółczynnik wielomienny pierwszego wyrazu każdej dzielnej cząstkowej przez spółczynnik pierwszego wyrazu dzielnika.

Najlepiej całą rzecz wykaże przykład : Podzielić

$$\begin{array}{r|r|r|r|r}
2a^2 & x^4+3a^3 & x^3+2a^4 & x^2-a^4b & x\quad -a^6 \\
+3ab & +a^2b & -a^3b & +2a^3b^2 & +2a^3b^3 \\
+b^2 & -ab^2 & -b^4 & +ab^4 & -b^6 \\
 & & & -2b^5 &
\end{array}$$

przez

$$\begin{array}{r|r|r}
a & x^2+a^2 & x+a^3 \\
+b & -b^2 & -b^3.
\end{array}$$

Dzielenie tych dwóch wielomianów, uporządkowanych kolumnami, odbywa się według następującego wzoru.

$$
\begin{array}{r|lr|lr|lr|lr}
2a^2 & x^4 & +3a^3 & x^3 & +2a^4 & x^2 & -a^4b & x & -a^6 \\
+3ab & & +a^2b & & -a^3b & & +2a^3b^2 & & +2a^3b^3 \\
+b^2 & & -ab^2 & & -b^4 & & +ab^4 & & -b^6 \\
 & & & & & & -2b^5 & & \\
 & & -2a^3 & x^3 & -2a^4 & x^2 & & & \\
 & & +2ab & & -a^3b & & & & \\
 & & -a^2b & & +2ab^3 & & & & \\
 & & +b^3 & & +b^4 & & & & \\ \cline{3-7}
 & & +a^3 & x^3 & -2a^3b & x^2 & -a^4b & x & \\
 & & +b^3 & & +2ab^3 & & +2a^3b^2 & & \\
 & & & & & & +ab^4 & & \\
 & & & & & & -2b^5 & & \\
 & & & & -a^4 & x^2 & -a^5 & x & \\
 & & & & +a^2b^2 & & +a^2b^3 & & \\
 & & & & +a^3b & & +a^4b & & \\
 & & & & -ab^3 & & -ab^4 & & \\
 & & & & -a^2b^2 & & -a^3b^2 & & \\
 & & & & +b^4 & & +b^5 & & \\ \cline{5-9}
 & & & & -a^4 & x^2 & -a^5 & x & -a^6 \\
 & & & & -a^3b & & +a^3b^2 & & +2a^3b^3 \\
 & & & & +ab^3 & & +a^2b^3 & & -b^6 \\
 & & & & +b^4 & & -b^5 & & \\
 & & & & & & +a^5 & x & +a^6 \\
 & & & & & & -a^3b^2 & & -a^3b^3 \\
 & & & & & & -a^2b^3 & & -a^3b^3 \\
 & & & & & & +b^5 & & +b^6 \\ \cline{7-9}
 & & & & & & 0 & & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|lr|lr}
a & x^2 & +a^2 & x & +a^3 \\
+b & & -b^2 & & -b^3 \\ \hline
2a & x^2 & +a^2 & x & -a^3 \\
+b & & -ab & & +b^3 \\
 & & +b^2 & &
\end{array}
$$

1sze dzielenie cząstkowe

$$
\begin{array}{r|l}
2a^2+3ab+b^2 & a+b \\ \cline{2-2}
-2a^2-2ab & 2a+b \\ \cline{1-1}
+ab+b^2 & \\
-ab-b^2 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

2gie dzielenie cząstkowe

$$\begin{array}{l|l} a^3+b^3 & a+b \\ \cline{2-2} -a^3-a^2b & a^2-ab+b^2 \\ \hline \quad -a^2b+b^3 & \\ \quad +a^2b^2+ab^2 & \\ \hline \quad\quad +ab^2+b^3 & \\ \quad\quad -ab^2-b^3 & \\ \hline \quad\quad\quad 0 & \end{array}$$

3cie dzielenie cząstkowe

$$\begin{array}{l|l} -a^4-a^3b+ab^3+b^4 & a+b \\ \cline{2-2} +a^4+a^3b & -a^3+b^3 \\ \hline \quad +ab^3+b^4 & \\ \quad -ab^3-b^4 & \\ \hline \quad\quad 0 & \end{array}$$

W powyższym wzorze nie pisano wieloczynów z pierwszego wyrazu dzielnika przez ilorazy dzieleń cząstkowych; bo naprzód wiadomo że te wieloczyny niszczą pierwszy wyraz dzielnej i pierwsze wyrazy reszt cząstkowych. Nadto, nie spuszczano wszystkich wyrazów dzielnej do każdej cząstkowej reszty, ale je brano w miarę potrzeby. Nie ma konieczności powtarzania wyrazów które nie wchodzą do cząstkowego rachunku, a z niepotrzebnego przepisywania wielu liczb, liter i znaków mogą wynikać błędy.

46. Warunki możebności dzielenia wielomianów całkowitych. Mając dane dwa wielomiany, całkowite uporządkowane według potęg malejących albo rosnących litery x naprzykład,

żeby jeden był wieloczynem drugiego, trzeba najpierwej żeby pierwszy wyraz dzielnej był podzielny przez pierwszy wyraz dzielnika i ostatni wyraz dzielnej przez ostatni dzielnika. Ale ten warunek konieczny nie wystarcza. Trzeba jeszcze żeby pierwszy wyraz każdej cząstkowej dzielnej był podzielny przez pierwszy wyraz dzielnika; i nakoniec żeby przyszło do reszty zero. Co dopiero jest dostateczne. Jeśli któremukolwiek z tych warunków nie staje się zadość, dzielenie względem litery porządkującej nie może się dokonać w kształcie całkowitym, to jest nie istnieje iloraz algebrycznie całkowity.

I tak, weźmy bardzo prosty przykład. Podzielić wielomian.

$$x^5 - 16x^3 + 6x^2 - 96$$

przez

$$x^3 - 4x^2.$$

Oba wielomiany są już uporządkowane według potęg malejących litery x. Wykonywając dzielenie, otrzymujemy

$$\begin{array}{l|l} x^5-16x^3+6x^2-96 & x^3-4x^2 \\ \cline{2-2} -x^5+4x^4 & x^2+4x \\ \cline{1-1} \quad +4x^4-16x^3+6x^2-96 & \\ \quad -4x^4+16x^3 & \\ \cline{1-1} \qquad\qquad +6x^2-96 & \end{array}$$

Przyszedłszy do drugiej reszty, widzimy że jej pierwszy wyraz $6x^2$ nie jest podzielny przez pierwszy wyraz x^3 dzielnika; więc dzielenie musi się zatrzymać na tej reszcie. Co dowodzi że szukany iloraz całkowity nie istnieje.

Jeśli dzielna i dzielnik mają kilka liter spólnych, wtedy możebność ilorazu algebrycznie całkowitego wymaga żeby, względem każdej z tych liter wziętych za porządkujące, wyrazy skrajne dzielnej, to jest pierwszy i ostatni z porządku, były podzielne przez odpowiedające wyrazy skrajne dzielnika.

Niech będzie wielomian

$$abx^4 - a^2bx^3 + b^3x^3 + a^4x^2 + a^3b^2x - a^2b^3x + a^4b^2$$

do podzielenia przez

$$abx^2 - a^2bx + a^4.$$

Widzimy zaraz że względem x, wyrazy skrajne abx^4 i a^4b^2 są podzielne przez odpowiedające skrajne abx^2 i a^4 dzielnika. I tak samo względem litery b. Ale, względem litery a, wyraz skrajny $b^3x^3a^0$ dzielnej nie jest podzielny przez odpowiedający skrajny bx^2a dzielnika. Więc, jeśli dzielenie może się dokonać, iloraz względem x będzie zawierał ułamek z mianownikiem a. Co pokażemy w teoryi ułamków algebrycznych.

47. W dzieleniu możebnem, dzieląc wprost ostatni wyraz dzielnej przez ostatni wyraz dzielnika, otrzymuje się ostatni wyraz ilorazu; znajomość a priori tego wyrazu może posłużyć do rozpoznania niemożebności dzielenia. Jakoż, jeśli rachunek nie prowadzi do ostatniego wyrazu, takiego jaki się wprost otrzymuje, albo jeśli go daje taki sam ale jeszcze z następującą resztą, dzielenie jest niemożebne.

I tak, niech będzie do dzielenia

$$4x^3 - 3x^2 + 8x + 5$$

przez

$$x^2 - 2x + 6.$$

Ostatni wyraz 5 dzielnej, podzielony przez ostatni wyraz 6 dzielnika, daje ułamek $\frac{5}{6}$ na ostatni wyraz ilorazu. Owoż spółczynnik pierwszego wyrazu x^2 dzielnika, będąc jednością, nie wprowadzi żadnego ułamka do rachunku; zatem nie będzie można nigdy dojść do ostatniego wyrazu ułamkowego. Więc dzielenie jest niemożebne.

Gdyby chciano wiedzieć czy wielomian $x^8 + x^7$ jest podzielny przez $x^5 + x$, dość byłoby uważać że dzielenie jest niemożebne, dlatego że iloraz dokładny, który powinien być uporządkowany według potęg malejących litery x, miałby pierwszy wyraz x^3 a ostatni x^6.

Podzielić $$2x^9 - 8x^8 - 5x^7 + 21x^3$$

przez $$x^5 - 4x^4 + 3;$$

oba wielomiany uporządkowane według potęg malejących litery x.

Wykonywając działanie

$$\begin{array}{l|l} 2x^9 - 8x^8 - 5x^7 + 21x^3 & x^5 - 4x^4 + 3 \\ \hline -2x^9 + 8x^8 - 6x^4 & 2x^4 - 5x^2 \ldots \\ \hline \quad -5x^7 - 6x^4 + 21x^3 & \end{array}$$

znajdujemy pierwsze wyrazy ilorazu w porządku potęg malejących litery x. Owoż, rachunek nie prowadzi do ostatniego wyrazu, bo zaraz po wyrazie $2x^4$ daje wyraz $-5x^2$, stopnia już mniejszego niż wprost otrzymany ostatni wyraz $+7x^3$; więc dzielenie jest niemożebne.

Weźmy teraz do dzielenia

$$4 - 6x + 8x^2 - 7x^3 + 5x^4$$

przez $$2 - 3x + x^3;$$

oba wielomiany uporządkowane według potęg rosnących litery x.

Wykonywając dzielenie

$$\begin{array}{l|l} 4 - 6x + 8x^2 - 7x^3 + 5x^4 & 2 - 3x^3 + x^3 \\ \hline -4 + 6x - 2x^3 & 2 + 4x^2 \ldots \\ \hline \quad + 8x^2 - 9x^3 + 5x^4 & \end{array}$$

znajdujemy pierwsze wyrazy ilorazu w porządku potęg rosnących litery x. Owoż po wyrazie 2 rachunek wprowadza zaraz $4x^2$, wyraz stopnia już wyższego niż wprost otrzymany $+5x$ który powinien być ostatnim ilorazu. Więc dzielenie jest niemożebne.

Podzielmy jeszcze

$$15x^6 - x^5 + 8x^3$$

przez $\quad 5x^2 + 3x + 4.$

Wykonywając działanie, mamy

$$\begin{array}{r|l} 15x^6 - x^5 + 8x^3 & 5x^2 + 3x + 4 \\ \hline -15x^6 - 9x^5 - 12x^4 & 3x^4 - 2x^3 \\ \hline -10x^5 - 12x^4 + 8x^3 & \end{array}$$

Nie potrzebujemy iść dalej; bo rachunek daje wyraz $-x^3$, a wprost otrzymamy ostatni wyraz ilorazu powinien być $+2x^3$. Te dwa wyrazy, równego stopnia na x, nie są jednakowe; więc dzielenie jest niemożebne.

Żeby wyczerpać ten przedmiot, weźmy jeszcze następujące dzielenie uporządkowane według potęg malejących x

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - x + 1 & x^2 - 3x + 1 \\ \hline -2x^3 + 6x^2 - 2x & 2x + 6 \\ \hline +6x^2 - 3x + 1. & \end{array}$$

Ponieważ rachunek daje $+6$ na ostatni wyraz ilorazu, a ten ostatni wprost otrzymany powinien być $+1$, dzielenie jest niemożebne.

Biorąc na nowo ten sam przykład dzielenia, tylko uporządkowanego według potęg rosnących x, będzie

$$\begin{array}{r|l} 1 - x + 2x^3 & 1 - 3x + x^2 \\ \cline{2-2} -1 + 3x - x^2 & 1 + 2x \\ \cline{1-1} +2x - x^2 + 2x^3 & \\ -2x + 6x^2 + 2x^3 & \\ \cline{1-1} +5x^2 & \end{array}$$

Znajdujemy w ilorazie wyraz $+2x$, który jest wprawdzie równy wprost otrzymanemu ostatniemu, ale po nim jeszcze następuje reszta $5x^2$; więc dzielenie jest niemożebne.

48. Uwaga. Powiedzieliśmy w teoryi dzielenia że wszystkie rozumowania zostają te same jeśli, zamiast porządkować dzielnę i dzielnik według potęg malejących spólnej litery, uporządkowano je według potęg rosnących. Dwa ostatnie przykłady zdają się temu zaprzeczać; albowiem ani części całkowite ilorazów ani reszty nie są jednakowe. Ale ta sprzeczność znika, gdy przypomnimy że teorya przypuszcza dzielenie dokładne; a w dwóch rzeczonych przykładach dzielenia są niemożebne. Rzeczywiście w dzieleniu wykonalnem, jakośmy widzieli, porządkowanie jest rzeczą obojętną do otrzymania ilorazu. W dzieleniu niemożebnem wszystko się dzieje inaczej. Kiedy uporządkowano dzielnę i dzielnik według potęg malejących spólnej litery, dzielenie się zatrzymuje na reszcie stopnia mniejszego niż dzielnik względem tej litery; a kiedy uporządkowano według potęg rosnących, dzielenie może się ciągnąć bez końca. Ostatnie dzielenie wydatnie pokazuje tę okoliczność, ponieważ jego dzielnik, będąc jednością, dzieli zawsze pierwszy wyraz każdej reszty, i tym sposobem daje nieskończoną liczbę wyrazów całkowitych na iloraz.

Dla tych przyczyn porządkuje się zwykle dzielnę i dzielnik według potęg malejących spólnej litery.

49. Gdy dzielna zawiera literę która się nie znajduje w dzielniku, wtedy dzielnik, uważany jako spółczynnik potęgi zero

tej litery, jest względem niej jednomianem, i powinien dzielić spółczynniki wszystkich jej potęg w dzielnej. Przez co można się zapewnić o podzielności.

I tak, niech będzie do dzielenia

$$8a^2x^6 + 27a^2b^3x^3 - 4ab^5x^2 + 18b^8$$

przez $$4x^2 - 6bx + 9b^2.$$

Widzimy zaraz że dzielenie jest niemożebne, bo dzielnik nie mający litery a nie dzieli wyrazu $18b^8a^0$ dzielnej.

Jeśli dzielnik ma literę która nie należy do dzielnej, iloraz całkowity nie istnieje; bo gdyby istniał, dzielna będąc wieloczynem ilorazu i dzielnika, zawierałaby wszystkie litery obydwóch czynników (nº 35).

Nakoniec, gdy dzielna jest wielomianem jednorodnym a dzielnik wielomianem niejednorodnym, dzielenie jest oczywiście niemożebne.

50. Iloraz zupełny. Prawidło dzielenia wielomianów opiera się na założeniu że dzielna jest wieloczynem dzielnika przez niewiadomy wielomian zwany ilorazem. Ale, kiedy taki iloraz nie istnieje, co znaczy wtedy dzielenie algebryczne?

W arytmetyce, aby objąć w jednem określeniu przypadek dzielenia dokładnego liczb całkowitych, i ten w którym jest reszta, mówi się że *dzielić jedną liczbę przez drugą jestto szukać ile razy najwięcej pierwsza zawiera drugą.* W tem pojęciu, dzielić jedną liczbę całkowitą przez drugą jestto rozkładać dzielnę na największy wielownik dzielnika powiększony resztą mniejszą od dzielnika. Jeśli więc nazwiemy A, B, Q i R dzielnę, dzielnik, iloraz i resztę, będziemy mieli równość oczywistą.

$$A = BQ + R.$$

Gdy $R = 0$, liczba całkowita A jest podzielna przez B; wtedy Q wyraża *iloraz zupełny.*

Dzieląc przez B obie strony powyższej równości, otrzymujemy

$$\frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B}.$$

Ten wynik pokazuje że *iloraz zupełny* dzielenia dwóch liczb całkowitych, jednej przez drugą, składa się z liczby całkowitej i z ułamka mającego za licznik resztę a za mianownik dzielnik.

Zobaczmy teraz czy dzielenie algebryczne nie da się przywieść do podobnie ogólnego przekształcenia.

Owoż, biorąc dzielnę i dzielnik uporządkowane według potęg malejących litery x naprzykład, i wykonywając dzielenie stosownie do podanego prawidła, widzimy że, wpierwszym wyrazie reszty następującej, wykładnik litery x jest mniejszy niż w pierwszym wyrazie reszty poprzedzającej. Te wykładniki są całkowite i dodatne; więc musi koniecznie przyjść do reszty zero, albo do reszty stopnia mniejszego niż dzielnik względem x. W pierwszym przypadku dzielenie jest możebne; bo się właśnie kończy na reszcie zero. W drugim przypadku, pierwszy wyraz reszty mający literę x z wykładnikiem mniejszym niż pierwszy wyraz dzielnika, nie może być przez niego podzielony; więc dzielenie zatrzymuje się na tej ostatniej reszcie. Ale wtedy, dla otrzymania ostatniej reszty, odciągnięto już od dzielnej wszystkie cząstkowe wieloczyny dzielnika przez każdy ze znalezionych wyrazów ilorazu. Zatem reszta stopnia mniejszego na x niż dzielnik, jest różnicą dzielnej i wieloczynu dzielnika przez wielomian całkowity względem x. Jeśli więc oznaczymy przez R ostatnią resztę, i przez A, B, Q wielomiany : dzielnę, dzielnik, iloraz, będziemy mieli tosamość

$$R = A - BQ.$$

Zkąd

$$A = BQ + R; \tag{1}$$

przekształcenie ogólne, podobne do arytmetycznego.

To przekształcenie jest jedyne. Jakoż, gdyby istniało drugie

$$A = BQ' + R',$$

byłaby tosamość

$$BQ + R = BQ' + R';$$

której można dać postać

$$BQ - BQ' = R' - R$$

albo

$$B(Q - Q') = R' - R.$$

Ale, ponieważ ilorazy Q i Q' są całkowite względem x, wieloczyn $B(Q - Q')$ jest przynajmniej tego samego stopnia co dzielnik B; gdy tymczasem różnica $R' - R$ jest oczywiście stopnia mniejszego niż B. Zatem wielomiany $B(Q - Q')$ i $R' - R$, różnego stopnia na x, nie mogą stanowić tosamości, to jest nie mogą być równe na wszelką wartość podstawioną za x (*)

Więc nie ma dwóch przekształceń dzielnej przez dzielnik względem x.

Ztąd, na mocy tosamości (1), wnosimy że *dzielić jeden wielomian przez drugi jestto rozkładać dzielnę na wieloczyn z dziel-*

(*) Żeby nie zostawić żadnej wątpliwości, przypuśćmy że jest tosamość

$$Ax^2 + Bx + C = Mx + N.$$

Ponieważ ta równść powinna istnieć na wszelką wartość podstawioną za x, więc ma miejsce dla $x = 0$; co daje $C = N$.

Zatem

$$Ax^2 + Bx = Mx,$$

albo, dzieląc obie strony przez x które jest jakiekolwiek,

$$Ax + B = M.$$

Zkąd, czyniąc znowu $x = 0$, wynika $B = M$; i nakoniec

$$Ax = 0,$$

tosamość niemożebna. Więc dwa wielomiany różnego stopnia na x nie mogą stanowić tosamości.

nika przez wielomian najwyższego stopnia względem litery porządkującej, i na resztę stopnia mniejszego niż dzielnik.

Gdy $R = 0$, wielomian A jest podzielny przez wielomian B; wtedy Q wyraża iloraz zupełny.

Dzieląc przez B obie strony tosamości (1), otrzymujemy nową tosamość

$$\text{(2)} \qquad \frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B},$$

która pokazuje że *iloraz zupełny dzielenia dwóch wielomianów całkowitych względem* x, *jednego przez drugi, składu się z wielomianu całkowitego względem x i z ułamka algebrycznego mającego za licznik resztę a za mianownik dzielnik.* Wyrażenie zgodne co do kształtu z arytmetycznem.

Biorąc dzielenie dane w n° 46, mamy iloraz zupełny

$$\frac{x^5 - 16x^3 + 6x^2 - 96}{x^3 - 4x^2} = x^2 + 4x + \frac{6x^2 - 96}{x^3 - 4x^2}.$$

Gdybyśmy podzielili wielomian $x^3 - 6ax^2 + 8a^2x - a^3$ przez $x^2 - 3ax + a^2$ względem litery porządkującej x, otrzymalibyśmy iloraz zupełny

$$\frac{x^3 - 6ax^2 + 8a^2x - a^3}{x^2 - 3ax + a^2} = x - 3a + \frac{2a^3 - 2a^2x}{x^2 - 3ax + a^2}.$$

Względem litery porządkującej a iloraz zupełny wyraża się przez

$$\frac{-a^3 + 8a^2x - 6ax^2 + x^3}{a^2 - 3ax + x^2} = -a + 5x + \frac{20ax - 4x^3}{a^2 - 3ax + x^2}.$$

51. Uwaga. Mimo podobieństwa kształtu, dzielenie algebryczne różni się w gruncie od dzielenia arytmetycznego. Wtem ostatniem reszta jest zawsze mniejsza od dzielnika; w tamtem reszta powinna być stopnia mniejszego niż dzielnik, względem litery porządkującej; ale może mieć wartość jakąkolwiek do-

datną albo odjemną, ponieważ w algebrze otrzymane wyniki stosują się do wszelkich wartości nadanych literze porządkującej. W dzieleniu liczb całkowitych iloraz musi być liczbą całkowitą, gdy tymczasem w dzieleniu wielomianów całkowitych iloraz powinien być wielomianem, koniecznie całkowitym względem litery porządkującej, ale mogącym mieć spółczynniki ułamkowe.

Gdy dzielenie algebryczne jest możebne, wtedy, jeśli podstawiono wartości liczebne za litery, wartość dzielnej będzie naturalnie podzielna przez wartość dzielnika, i da iloraz równy wartości ilorazu algebrycznego. Ale, gdy dzielenie algebryczne zostawia resztę, wtenczas dzieląc wartość dzielnej przez wartość dzielnika, nie otrzymuje się zawsze wartości ilorazu algebrycznego na iloraz, ani wartości reszty algebrycznej na resztę. I tak, w dzieleniu nru 46, jeśli uczynimy $x = 5$ na przykład, reszta $6x^2 - 96$ weźmie wartość 54. a dzielnik $x^3 - 4x^2$ wartość 25. Co oczywiście nie może się stosować do dzielenia arytmetycznego. Ta uwaga i poprzedzająca nru 40 jasno pokazują że Algebra nie jest koniecznie zogólnieniem Arytmetyki.

PODZIELNOŚĆ PRZEZ $x - a$ WIELOMIANU CAŁKOWITEGO WZGLĘDEM x.

52. Niech będzie wielomian całkowity względem x, mający kształt ogólny

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \dots \quad + A_{m-1} x + A_m$$

w którym wykładniki m, $m - 1$, $m - 2$,... są liczbami całkowitemi dodatnemi, a spółczynniki A_0, A_1, A_2,.... A_m liczbami jakiemikolwiek, dodatnemi albo odjemnemi. Jeśli, nazywając X ten wielomian, podzielimy go przez dwumian $x - a$, na mocy tego co w ne 50 powiedziano, otrzymamy tosamość

$$X = (x - a)Q + R,$$

która ma miejsce na wszelką wartość daną ilości x. Wtej tosamości reszta R jest niezależna od x, dlatego że dzielnik $x - a$ jest stopnia pierwszego na x. Owoż, jeśli weźmiemy

$x = a$, czynnik $x - a$ stanie się zerem, a czynnik Q, będąc wielomianem całkowitym na x, stanie się wielomianem całkowitym na a; więc wtedy wieloczyn $(x - a)Q$ stanie się zerem, i będziemy mieli wartość

$$X_a = R;$$

gdzie X_a oznacza to czem się staje X po podstawieniu $x = a$. Ten wynik dowodzi że reszta R ma wartość równą tej którą bierze wielomian X gdy się w nim zastępuje x przez a. Co daje

$$R = A_0a^m + A_1a^{m-1} + A_2a^{m-2} + \dots \quad + A_{m-1}a + A_m.$$

Ztąd TWIERDZENIE. *Jeśli wielomian całkowity względem* x *staje się zerem dla* x = a, *to wtedy jest podzielny przez* x — a. *I nawzajem.*

To ważne twierdzenie będzie nam później bardzo użyteczne.

Dla znalezienia ustawy ilorazu z dzielenia wielomianu całkowitego względem x przez dwumian $x - a$, wykonywamy rachunek

$$\begin{array}{l|l}
A_0x^m + A_1x^{m-1} + \dots + A_{m-1}x + A_m & x - a \\
\hline
-A_0x^m + A_0ax^{m-1} & A_0x^{m-1} + \left.\begin{matrix} A_0a \\ + A_1 \end{matrix}\right| x^{m-2} \dots + \begin{matrix} A_0a^{m-1} \\ + A_1a^{m-2} \\ \dots \\ + A_{m-2}a \\ + A_{m-1} \end{matrix}
\end{array}$$

$$\left.\begin{matrix} + A_0a \\ + A_1 \end{matrix}\right| x^{m-1} + A_2 \,\Big|\, x^{m-2}$$

$$\left.\begin{matrix} - A_0a \\ - A_1 \end{matrix}\right| x^{m-1} \left.\begin{matrix} + A_0a^2 \\ + A_1a \end{matrix}\right| x^{m-2}$$

$$\left.\begin{matrix} + A_0a^2 \\ + A_1a \\ + A_2 \end{matrix}\right| x^{m-2} + A_3x^{m-3}$$

....

$$\left.\begin{matrix} + A_0a^{m-1} \\ + A_1a^{m-2} \\ + A_2a^{m-3} \\ \dots\dots \\ + A_{m-2}a \\ + A_{m-1} \end{matrix}\right| x$$

Dzieląc A_0x^m przez x mamy A_0x^{m-1} na pierwszy wyraz ilorazu. W pierwszej reszcie pierwszy wyraz jest $(A_0a+A_1)x^{m-1}$, dzielimy go przez x i otrzymujemy drugi wyraz $(A_0a+A_1)x^{m-2}$ ilorazu; poczem w drugiej reszcie pierwszy wyraz jest $(A_0a^2+A_1a+A_2)x^{m-2}$, dzielimy go przez x, i znajdujemy trzeci wyraz $(A_0a^2+A_1a+A_2)x^{m-3}$ ilozazu. I tak dalej postępując, wyznaczamy wszystkie wyrazy ilorazu.

Widzimy teraz łatwo że *otrzymawszy prostem dzieleniem pierwszy wyraz ilorazu, tworzy się każdy inny mnożąc przez* a *poprzedzający, który może być zerem, dodając do wieloczynu wyraz dzielnej który ma tę samą potęgę względem* x, *i dzieląc summę przez* x. Ztąd wynika że w ilorazie wyraz niezależny od x będzie $A_0a^{m-1}+A_1a^{m-2}+\ldots. A_{m-1}$. Jeśli pomnożymy dzielnik przez ten wyraz i odciągniemy wieloczyn od ostatniej cząstkowej dzielnej, części mające x zniszczą się i zostanie na resztę wielomian

$$A_0a^m+A_1a^{m-1}+A_2a^{m-2}+\ldots+A_{m-1}a+A_m,$$

który jest wynikiem z podstawienia ilości a za x w dzielnej. Co już wiadome.

Wszystko co było powiedziane w dzieleniu przez $x-a$ wielomianu całkowitego względem x, stosuje się do dzielenia przez $x+a$; dość tylko uważać że $x+a=x-(-a)$, i zastąpić wszędzie a przez $-a$.

Żeby to pokazać praktycznie, weźmy dwa przykłady liczebne.

Napisać odrazu iloraz z podzielenia przez x — 2 *wielomianu*

$$7x^5+6x^4-18x^3-44x^2-2x+10.$$

Stosując powyższą ustawę, mamy natychmiast szukany iloraz

$$7x^4+20x^3+22x^2-2.$$

Reszta $-2.2+10=6$ jest wynikiem z podstawienia liczby 2 za x w dzielnej.

Znaleźć wprost iloraz z podzielenia

$$2x^7+8x^6-5x^4+6x^3-x \qquad \text{przez } x+2.$$

Żądany iloraz jest

$$2x^6+4x^5-8x^4+11x^3-16x^2+32x-65.$$

Reszta $-65\times-2=130$ jest wynikiem z podstawienia liczby -2 za x w dzielnej.

Ten sposób znalezienia wyniku podstawień przez dzielenie jest użyteczny wtedy zwłaszcza gdy wielomian ma dużo wyrazów.

53. Następujące przykłady podzielności zasługują na szczególną uwagę:

Przykład I. *Podzielić* x^m-a^m przez $x-a$,

Podstawiając $x=a$ w dzielnej, znajdujemy resztę $R=a^m-a^m=0$. Zkąd wnosimy że *różnica tych samych potęg dwóch ilości jest podzielna przez różnicę ich pierwiastków.*

Wykonywając dzielenie, w założeniu że wykładnik m jest liczbą całkowitą i dodatną, będzie

$$\begin{array}{r|l} x^m-a^m & x-a \\ \hline 1^{\text{sza}} \text{ reszta } ax^{m-1}-a^m & x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}\ldots+a^{m-2}+a^{m-1} \\ 2^{\text{ga}} \text{ reszta } a^2x^{m-2}-a^m & \\ \ldots\ldots\ldots & \\ \ldots\ldots\ldots & \\ a^{m-1}x-a^m & \\ \text{ost. reszta } a^m-a^m=0. & \end{array}$$

Mamy więc iloraz zupełny

$$\frac{x^m-a^m}{x-a}=x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}+\ldots+a^{m-2}x+a^{m-1}.$$

Jako widzimy, iloraz zawiera m wyrazów, jest wielomianem jednorodnym stopnia $m-1$, i wielomianem symetrycznym względem x i a.

Można było, za pomocą wiadomej ustawy, otrzymać odrazu ten wynik, często potrzebny w algebrze, który pamiętać trzeba. Ale dobrze jest pokazać że sam rachunek dowodzi podzielności. Jakoż, wszystkie wyrazy ilorazu są dodatne i stopnia $m-1$, wykładnik litery x zmniejsza się jednością, zaś wykładnik litery a zwiększa się jednością; zatem przyjdzie koniecznie do wyrazu $+a^{m-1}$, który jest właśnie wprost otrzymanym ostatnim ilorazu: po nim idzie reszta $a^m-a^m=0$. Więc dzielenie się udaje, jakikolwiek jest wykładnik całkowity m, parzysty albo nieparzysty.

Przykład II. *Podzielić* x^m+a^m przez $x-a$,

Zastępując w dzielnej x przez a, znajdujemy resztę $R=a^m+a^m=2a^m$, która dowodzi że dzielenie jest niemożebne. Rachunek dzielenia doprowadziłby do tego samego wyniku.

Iloraz zupełny wyraża się przez

$$\frac{x^m+a^m}{x-a}=x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}\ldots+\ldots+a^{m-1}+\frac{2a^m}{x-a}.$$

Przykład III. *Podzielić* x^m-a^m przez $x+a$.

Czyniąc $x=-a$ w dzielnej, otrzymujemy resztę $R=(-a)^m-a^m$. Trzeba rozróżnić dwa wypadki, m parzyste albo nieparzyste. Jeśli m jest parzyste, wtedy $(-a)^m=a^m$; zatem $R=a^m-a^m=0$, i dzielenie może się wykonać. Przeciwnie, jeśli m jest nieparzyste; bo wtedy $(-a)^m=-a^m$, zatem $R=-a^m-a^m=-2a^m$, i dzielenie jest niemożebne. To wszystko sam rachunek jasno pokazuje.

1° m parzyste

$$\begin{array}{r|l} x^m - a^m & x+a \\ \hline \text{1sza reszta } -ax^{m-1} - a^m & x^{m-1} - ax^{m-2} + a^2x^{m-3} .. + a^{m-2}x - a^{m-1} \\ \text{2ga reszta } +a^2x^{m-2} - a^m & \\ \text{3cia reszta } -a^3x^{m-3} - a^m & \\ \dots\dots\dots & \\ -a^{m-1}x - a^m & \\ \text{ost. reszta } +a^m - a^m = 0. & \end{array}$$

Mamy zatem iloraz zupełny,

$$\frac{x^m - a^m}{x+a} = x^{m-1} - ax^{m-2} + a^2x^{m-3} - a^3x^{m-4} + \dots + a^{m-2}x - a^{m-1},$$

który można było napisać odrazu wedle już znanej ustawy. Jako widzimy, wyrazy ilorazu są naprzemian dodatne i odjemne; jest ich m, pierwszy dodatny, ostatni odjemny, i oba naprzód wiadome. Cały iloraz jest wielomianem symetrycznym i jednorodnym stopnia $m - 1$.

2° m nieparzyste.

Ponieważ dzielenie jest niemożebne, a wyrazy ilorazu są naprzemian dodatne i odjemne, ostatni wyraz ilorazu niezupełnego, mający wykładnik parzysty $m - 1$, będzie $+a^{m-1}$. Więc iloraz zupełny wyraża się przez

$$\frac{x^m - a^m}{x+a} = x^{m-1} - ax^{m-2} + a^2x^{m-3} - \dots + a^{m-1} - \frac{2a^m}{x+a}.$$

Przykład IV. *Podzielić* $x^m + a^m$ przez $x + a$.

Jeśli w dzielnej zamiast x położymy $-a$, otrzymamy resztę $R = (-a)^m + a^m$ [która, według jak m jest parzyste albo nieparzyste, będzie 0 albo $2a^m$. *Więc summa dwóch jednakowych potęg nieparzystych jest podzielna przez summę ich pierwiastków.*

Mamy zatem ilorazy zupełne,

$$m \text{ nieparzyste, } \frac{x^m+a^m}{x+a}=x^{m-1}-ax^{m-2}+a^2x^{m-3}-\ldots+a^{m-1}$$

$$m \text{ parzyste, } \frac{x^m+a^m}{x+a}=x^{m-1}-ax^{m-2}+\ldots,-a^{m-1}+\frac{2a^m}{x+a}.$$

54. Można teraz łatwo rozwiązać następujące zagadnienie

Jakie są dzielniki liczebne dwumianu x^m+a^n?

Jeśli wykładniki dodatne m i n mają spólny dzielnik p, będzie $m=\mu p$ i $n=\nu p$. Wtedy zadany dwumian wyraża się przez

$$(x^\mu)^p \pm (a^\nu)^p,$$

i kwestya przywodzi się do podzielności summy albo różnicy dwóch jednakowych potęg, dopiero co wyłożonej. Ale rozwiązanie ogólne zagadnienia do algebry wyższej należy.

55. Zakończymy podzielność wielomianów całkowitych względem x, następującem zadaniem które zogólnia twierdzenie n^ro 52, ale samo jest tylko jednym przypadkiem twierdzenia ogólniejszego.

Jeśli wielomian całkowity względem x *staje się zerem gdy w nim zastąpiono* x *przez liczby nierówne* a, b, c,... *to wtedy jest podzielny przez wieloczyn* (x — a)(x — b)(x — c)....

Jakoż, nazywając X dany wielomian i Q iloraz, oba całkowite względem x, mamy tosamość

$$X=(x-a)Q$$

która, jeśli zastąpimy x przez b, staje się

$$X_b=(b-a)Q_b.$$

X_b i Q_b oznaczają wyniki z podstawienia b za x w X i Q.

Ale z założenia jest $X_b=0$; zatem wieloczyn $(b-a)Q_b$ jest zerem; ponieważ zaś czynnik $b-a$ nie jest zerem, dlatego że liczby a i b są nierówne, musi być $Q_b=0$. Więc wielomian Q jest podzielny przez $x - b$; co daje

$$Q = (x - b)Q';$$

Q' jest wielomianem całkowitym względem x. Zatem

$$X = (x - a)(x - b)Q'.$$

Rozumując podobnie, jeśli uczynimy $x = c$ w ostatniej tosamości, znajdziemy

$Q' = (x - c)Q''$, i temsamem $X = (x - a)(x - b)(x - c)Q''$.

Więc

$$X = A(x - a)(x - b)(x - c)....$$

gdzie A przedstawia spółczynnik stateczny pierwszego wyrazu dzielnej X.

UŁAMKI ALGEBRYCZNE

56. Nazywa się *ułamkiem algebrycznym* wskazany iloraz dzielenia, czy ono może się wykonać czy nie może.

Wyrażenia $\frac{a}{b}$, $\frac{3a^4b^5}{9a^3b^2}$, $\frac{a^2 - b^2}{2a + b}$.

Są ułamkami algebrycznemi w których dzielna jest licznikiem, dzielnik mianownikiem. Ułamki algebryczne, mając wyrazy jakiekolwiek, różnią się istotnie od ułamków arytmetycznych których oba wyrazy są liczbami całkowitemi; ale ich własności i prawidła rachunku są te same.

Twierdzenie główne. *Nie zmienia się wartości ułamka algebrycznego, mnożąc albo dzieląc jego oba wyrazy przez tę samą ilość.*

Niech będzie ułamek $\frac{a}{b}$ (*). Ponieważ ułamek algebryczny jest, przez określenie, ilorazem z dzielenia licznika przez

(*) który się czyta przez skrócenie, mówiąc : a na b.

mianownik, ztąd wynika

$$a=\left(\frac{a}{b}\right)b.$$

Pomnóżmy obie strony tej tosamości przez m, będzie

$$am=\left(\frac{a}{b}\right)bm;$$

jeśli teraz podzielimy obie strony ostatniej tosamości przez bm, otrzymamy

$$\frac{am}{bm}=\frac{a}{b}.$$

Ten wynik dowodzi że, mnożąc przez m oba wyrazy ułamka $\frac{a}{b}$, otrzymuje się ułamek równy $\frac{am}{bm}$; i nawzajem, dzieląc przez m oba wyrazy ułamka $\frac{am}{bm}$, wywodzi się z niego ułamek mu równy $\frac{a}{b}$.

Wniosek I. *Nie przeinacza się ułamka zmieniając znaki obydwóch jego wyrazów*: bo to wychodzi na jedno co mnożyć te wyrazy przez -1. I tak,

$$\frac{b-a}{d-c}=\frac{a-b}{c-d}.$$

Wniosek II. *Przywodzi się ułamek do najprostszego kształtu, dzieląc jego oba wyrazy przez wszystkie czynniki spólne.* I tak,

$$\frac{12a^4b^7c^2}{8a^3b^5c^6}=\frac{3ab^2}{2c^4}.$$

Ułamek $\frac{6x^2-96}{x^3-4x^2}$ tak się uprościć może

$$\frac{6x^2-96}{x^3-4x^2}=\frac{6(x^2-16)}{x^2(x-4)}=\frac{6(x+4)(x-4)}{x^2(x-4)}=\frac{6}{x^2}(x+4).$$

Zatem iloraz zupełny rozwiniętego dzielenia w n^rze 46 wyraża się przez

$$\frac{x^5-16x^3+6x^2-96}{x^3-4x^2}=x^2+4x+\frac{6x^2-96}{x^3-4x^2}=(x+4)\left(x+\frac{6}{x^2}\right)$$

Niech będzie teraz ułamek

$$\frac{x^3-3x^2-4x+12}{2x^2-2x-12}$$

Spostrzegając że $x=3$ czyni zerem licznik i mianownik, wiemy zaraz że oba wyrazy ułamka są podzielne przez $x-3$. Wykonywając najpierwej dzielenie przez $x-3$, otrzymujemy ułamek prostszy; poczem dochodzimy już łatwo do najprostszego. Mamy tym sposobem

$$\frac{x^3-3x^2-4x+12}{2x^2-2x-12}=\frac{x^2-4}{2x+4}=\frac{(x+2)(x-2)}{2(x+2)}=\frac{x-2}{2}.$$

Niech będzie jeszcze do uproszczenia ułamek

$$\frac{x^5-ax^4+2a^2x^3+2a^3x^2+a^4x+3a^6}{x^5+a^6}.$$

Nabywszy pewnej wprawy do rachunku, nietrudno widzieć że licznik może się przekształcać jako następuje

$$\begin{aligned}
&x^5-ax^4+2a^2x^3+2a^3x^2+a^4x+3a^5\\
&=x(x^4+2a^2x^2+a^4)-a(x^4-a^2x^2-3a^4)\\
&=x(x^2+a^2)^2-a(x^4+a^2x^2-3a^2x^2-3a^4)\\
&=x(x^2+a^2)^2-a(x^2+a^3)(x^2-3a^2)\\
&=(x^2+a^2)(x^3-ax^2+a^2x+3a^3)
\end{aligned}$$

Co do mianownika, znajdujemy zaraz jego rozkład na dwa czynniki,

$$x^6+a^6=(x^2)^3+(a^2)^3=(x^2+a^2)(x^4-a^8x^2+a^4),$$

Więc

$$\frac{x^5 - ax^4 + 2a^2x^3 + 2a^3x^2 + a^4x - a^5}{x^6 + a^6} = \frac{x^3 - ax^2 + a^2x + 3a^3}{x^4 - a^2x^2 + a^4}.$$

Gdy oba wyrazy ułamka są wielomianami, szukać czynników spólnych jednomiennych, nie ma żadnej trudności; ale, do odkrycia czynników spólnych wielomiennych algebra elementarna tylko w rzadkich przypadkach wystarcza. W ogóle trzeba wtedy największego spólnego dzielnika wielomianów, który już do algebry wyższej należy.

SPROWADZANIE UŁAMKÓW DO JEDNAKOWEGO MIANOWNIKA.

57. Można sprowadzać ułamki do jednakowego mianownika, mnożąc oba wyrazy każdego z nich przez wieloczyn mianowników wszystkich innych. Ten sposób, prócz że jest zwykle mozolny, daje prawie zawsze spólny mianownik za wielki. Ogólnie, jako w arytmetyce, trzeba się najpierwej zapewnić czy dane ułamki są niezredukowne, i dopiero potem wyznaczyć ich najmniejszy wielownik, który będzie spólnym mianownikiem najprostszym możebnym. Ale w tych poszukiwaniach, bez znajomości największego spólnego dzielnika nie daleko zajść można. Musimy więc poprzestać na samych prostych przykładach.

Niech będą ułamki

$$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}, \frac{g}{h}.$$

Żeby je sprowadzić do jednakowego mianownika, mnożymy oba wyrazy każdego przez wieloczyn mianowników wszystkich innych; co daje

$$\frac{adfh}{bdfh}, \frac{bcfh}{bdfh}, \frac{bdeh}{bdfh}, \frac{bdfg}{bdfh}.$$

W tym szczególnym przypadku spólny mianownik $bdfh$ jest najprostszym możebnym; dlatego że dane ułamki są niezredukowne, i mają za mianowniki liczby pierwsze między sobą, których najmniejszym wielownikiem jest ich wieloczyn.

Weźmy na drugi przykład ułamki

$$\frac{3a}{4b^2(a^2-b^2)},\quad \frac{5b}{6a^2(a+b)^2},\quad \frac{7c}{8ab(a-b)^2},$$

które trzeba sprowadzić do jednakowego mianownika.

Widzimy zaraz że dane ułamki są niezredukowne, i łatwo odkrywamy że najmniejszym wielownikiem mianowników jest wieloczyn

$$24a^2b^2(a^3-b^2)^2$$

Dzielimy ten wieloczyn przez każdy z trzech mianowników, i otrzymujemy ilorazy

$$6a^2(a^2-b^2),\quad 4b^2(a-b)^2,\quad 3ab(a+b)^2;$$

poczem, mnożymy oba wyrazy każdego ułamka przez iloraz odpowiedający, i znajdujemy ułamki

$$\frac{18a^3(a^2-b^2)}{24a^2b^2(a^2-b^2)^2},\quad \frac{20b^3(a-b)^2}{24a^2b^2(a^2-b^2)^2},\quad \frac{21abc(a+b)^2}{24a^2b^2(a^2-b^2)^2},$$

które mają ten sam mianownik.

DODAWANIE I ODCIĄGANIE UŁAMKÓW.

58. Jako w arytmetyce tak i w algebrze, żeby można dodawać albo odciągać ułamki, trzeba je najpierwej sprowadzić do jednakowego mianownika.

Niech będą ułamki mające ten sam mianownik

$$\frac{a}{m},\quad \frac{b}{m},\quad \frac{c}{m}.$$

Jeśli chcemy je dodawać, piszemy summę

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{m}+\frac{c}{m},$$

i, na mocy prawidła dzielenia wielomianu przez jednomian (nr° 41), mamy

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{m}+\frac{c}{m}=\frac{a+b+c}{m}.$$

Jeśli chcemy odciągać ułamek $\frac{b}{m}$ od ułamka $\frac{a}{m}$, piszemy różnicę

$$\frac{a}{m}-\frac{b}{m},$$

i, wedle dzielenia wielomianu przez jednomian, mamy

$$\frac{a}{m}-\frac{b}{m}=\frac{a-b}{m}.$$

Ztąd PRAWIDŁO. Aby *dodawać albo odciągać ułamki, trzeba je sprowadzić do jednego mianownika, dodać albo odciągnąć liczniki i podzielić summę albo różnicę przez mianownik spólny.*

Na mocy tego prawidła, summa ułamków poprzednio uważanych (nr° 57)

$$\frac{3a}{4b^2(a^2-b^2)},\ \frac{5b}{6a^2(a+b)^2},\ \frac{7c}{8ab(a-b)^2},$$

jest

$$\frac{18a^3(a^2-b^2)+20b^3(a-b)^2+21abc(a+b)^2}{24a^2b^2(a^2-b^2)^2}$$

MNOŻENIE I DZIELENIE UŁAMKÓW.

59. Niech będą dwa ułamki $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ do mnożenia jeden przez

drugi, Wedle określenia ułamków algebrycznych, mamy tosamości

$$a = b\left(\frac{a}{b}\right).$$

$$c = d\left(\frac{c}{d}\right).$$

Mnożąc je stronami, otrzymujemy

$$ac = bd\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right);$$

zkąd wynika

$$\frac{ac}{bd} = \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right).$$

Więc

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Ztąd PRAWIDŁO. *Mnoży się ułamki jeden przez drugi, mnożąc licznik przez licznik i mianownik przez mianownik.*

Następstwo

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\ldots = \frac{a^m}{b^m}.$$

60. Niech będzie do dzielenia ułamek $\frac{a}{b}$ przez $\frac{c}{d}$. Na mocy określenia ułamków, mamy tosamości

$$a = b\left(\frac{a}{b}\right),$$

$$c = d\left(\frac{c}{d}\right).$$

Pomnożmy obie strony pierwszej tosamości przez d, drugiej przez b; będzie

$$ad = bd\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$bc = bd\left(\frac{c}{d}\right).$$

Dzieląc teraz dwie ostatnie tosamości stronami, otrzymujemy.

$$\frac{ad}{bc} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)}.$$

Więc

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c},$$

Zkąd PRAWIDŁO: *Dzieli się jeden ułamek przez drugi, mnożąc dzielnę przez ułamek dzielnik przewrócony.*

PRZYKŁAD. Pomnożyć albo podzielić $a + \frac{b}{c}$ przez $n - \frac{p}{q}$.

Łącząc najpierwej całość z ułamkiem, mamy

$$a + \frac{b}{c} = \frac{ac}{c} + \frac{b}{c} = \frac{ac+b}{c},$$

$$n - \frac{p}{q} = \frac{nq}{q} - \frac{p}{q} = \frac{nq-p}{q}.$$

Poczem otrzymujemy:
wieloczyn

$$\left(a+\frac{b}{c}\right)\left(n-\frac{p}{q}\right) = \frac{ac+b}{c} \times \frac{nq-p}{q} = \frac{(ac+b(nq-p)}{cq};$$

iloraz

$$\frac{a+\frac{b}{c}}{n-\frac{p}{q}} = \frac{\frac{ac+b}{c}}{\frac{nq-p}{q}} = \frac{ac+b}{c} \times \frac{q}{nq-p} = \frac{(ac+b)q}{(nq-p)c}.$$

61. Zajmiemy się teraz przykładem dzielenia n^{ru} 46, odesłanym aż do tego miejsca, z przyczyny ułamka który się znajduje w ilorazie. Chodzi o dzielenie wielomianu

$$abx^4-a^2bx^3+b^3x^3+a^4x^2+a^3b^2x-a^2b^3x+a^4b^2,$$

przez
$$abx^2-a^2bx+a^4.$$

Wykonywając wskazane dzielenie względem x, otrzymujemy

$$\begin{array}{l|l}
abx^4-(a^2b-b^3)x^3+a^4x^2+(a^3b^2-a^2b^3)x+a^4b^2 & abx^2-a^2bx+a^4 \\
\cline{2-2}
-abx^4+a^2bx^3-a^4x^2 & x^2+\frac{b^2}{a}x+b^2 \\
\cline{1-1}
\quad +b^3x^3+(a^2b^3-a^2b^3)x+a^4b^2 & \\
\quad -b^3x^3+ab^3x^2-a^3b^2x & \\
\cline{1-1}
\qquad +ab^3x^2-a^2b^3x+a^4b^2 & \\
\qquad -ab^3x^2+a^2b^3x-a^4b^2 & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Iloraz taki jaki naprzód przewidziano.

62. Nakoniec, dzielmy 1 przez $1+x$, i także przez $x+1$. Zatrzymując się na wyrazie rzędu parzystego $2k$, będziemy mieli ilorazy niezupełne:

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-\ldots\quad -x^{2k-1}+\ldots$$

$$\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}+\ldots\ldots-\frac{1}{x^{2k}}+\ldots$$

które, składając się z tak wielkiej liczby wyrazów jaka się podoba, różnią się całkiem od ilorazów skończonych algebrycznych.

Takie i jeszcze inne ciągi wyrazów, utworzonych wedle pewnej wyznaczonej ustawy, posunięte do nieskończoności nazywają się *szeregami*, które stanowią ważną gałęź wysokiej Matematyki.

O WYKŁADNIKACH ODJEMNYCH.

63. Widzieliśmy że wykładniki odjemne wchodzą do wyrażeń algebrycznych jako wyniki ogólnych działań; trzeba więc wiedzieć wedle jakich prawideł można ich użyć do rachunku. Otóż, rzecz godna uwagi, prawidła dla wykładników odjemnych są te same co dla wykładników dodatnych. Nietrudno tego dowieśdź.

Jakoż, w mnożeniu dwóch potęg tej samej ilości może być jeden wykładnik odjemny albo obydwa; mamy zatem

$$1^\circ,\quad a^m.a^{-n} = a^m \times \frac{1}{a^n} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

$$2^\circ,\quad a^{-m}.a^{-n} = \frac{1}{a^m} \times \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-m-n}.$$

Te dwa wyniki pokazują że w dwóch powyższych wieloczynach wykładnik ilości a jest summą wykładników czynników. Więc, jakiekolwiek są wykładniki, dodatne albo odjemne, wykładnik wieloczynu potęg tej samej ilości jest zawsze summą algebryczną wykładników czynników.

Jako następstwo, uważajmy jeszcze potęgi potęg z wykładnikami odjemnemi.

Jest widocznie

$$1^\circ,\quad (a^{-m})^n = \left(\frac{1}{a^m}\right)^n = \frac{1}{a^{mn}} = a^{-mn}.$$

$$2^\circ,\quad (a^m)^{-n} = \frac{1}{(a^m)^n} = \frac{1}{a^{mn}} = a^{-mn}.$$

$$3^\circ\quad (a^{-m})^{-n} = \frac{1}{(a^{-m})^n} = \frac{1}{a^{-mn}} = a^{mn}.$$

To wszystko zgadza się z prawidłem wykładników dodatnych.

Prawidło wykładników odjemnych w dzieleniu potęg jednej ilości, wywodzi się łatwo z prawideł mnożenia; ale można je wprost otrzymać. Mamy albowiem

$$a^{-m} : a^n = \frac{1}{a^m} : a^n = \frac{1}{a^m} \times \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-m-n}$$

$$a^m : a^{-n} : = a^m : \frac{1}{a^n} = a^m . a^n = a^{m+n} = a^{m-(-n)},$$

$$a^{-m} : a^{-n} = \frac{1}{a^m} : \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^m} \times a^n = \frac{a^n}{a^m} = a^{-m-(-n)}.$$

Więc, jakiekolwiek są wykładniki, dodatne albo odjemne, w dzieleniu dwóch potęg jednej ilości, otrzymuje się wykładnik ilorazu odciągając zawsze wykładnik dzielnika od wykładnika dzielnej,

64. Dzielenie wielomianów opiera się na własności że, jeśli dwa wielomiany i ich wieloczyn są uporządkowane według potęg malejących albo rosnących jednej litery, pierwszy wyraz wieloczynu jest wieloczynem pierwszych wyrazów obydwóch czynników, a ostatni wyraz jest wieloczynem ich ostatnich wyrazów. Owóż, ta własność istnieje oczywiście jakiekolwiek są wykładniki litery porządkującej, dodatne albo odjemne; więc teorya dzielenia wielomianów jest ogólna. Byle tylko, porządkując wielomiany według potęg malejących litery x naprzykład, pamiętano że wykładniki odjemne idą po potędze x^0, to jest po wyrazach nie zawierających x, i powinny być uważane jako tem mniejsze im większą mają wartość samoistą.

Weźmy PRZYKŁAD. Podzielić wielomian z wykładnikami odjemnemi

$$3x^3 - 7x - 8 - 15x^{-2} + 27x^{-3},$$

przez

$$x^2 + 2x - 3x^{-1}.$$

Ponieważ wielomiany są uporządkowane według potęg malejących litery x, ostatni wyraz ilorazu powinien być $-9x^{-2}$. A następnie reszta powinna być zero, jeśli dzielenie jest możebne. Wykonywając rachunek, mamy

$$\begin{array}{l|l}
3x^3-7x-8-15x^{-2}+27x^{-3} & x^2+2x-3x^{-1} \\
\underline{-3x^3-6x^2+9} & \overline{3x-6+5x^{-1}-9x^{-2}} \\
\quad -6x^2-7x+1-15x^{-2}+27x^{-3} & \\
\quad \underline{+6x^2+12x-18x^{-1}} & \\
\qquad +5x+1-18x^{-1}-15x^{-2}+27x^{-3} & \\
\qquad \underline{-5x-10+15x^{-2}} & \\
\qquad\quad -9-18x^{-1}+27x^{-3} & \\
\qquad\quad \underline{+9+18x^{-1}-27x^{-3}} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Rozwinęliśmy ten przykład dlatego jedynie aby pokazać jak można uskutecznić dzielenie z wykładnikami odjemnemi. Ale łatwo widzieć że rachunek z temi wykładnikami jest niewygodny i zwykle się go unika. Oto jakim sposobem otrzymuje się powyższy iloraz zupełny. Zmieniając dzielnę i dzielnik na ułamki, będzie

$$\frac{3x^6-7x^4-8x^3-15x+27}{x^3} : \frac{x^3+2x^2-3}{x} = \frac{3x^6-7x^4-8x^3-15x+27}{(x^3+2x^2-3)x^2}$$

Owóż, dzieląc najpierwej przez x^3+2x^2-3, mamy

$$\frac{3x^6-7x^4-8x^3-15x+27}{x^3+2x^2-3} = 3x^3-6x^2+5x-9\ ;$$

dzieląc potem przez x^2, znajdujemy iloraz szukany $x-6+\dfrac{5x-9}{x^2}$.

Wynik zgodny z otrzymanym wyżej, tylko w innym kształcie.

Można także wykonywać mnożenie porządkowane wielomianów z wykładnikami odjemnemi. Nie dajemy żadnego przykładu; bo sam przedmiot, już wyłożony, jest zanadto łatwy żeby, po tem co poprzedza, potrzebował jeszcze wyjaśnień.

NAJCZĘŚCIEJ POTRZEBNE TWIERDZENIA.

65. TWIERDZENIE I. *Gdy jest kilka ułamków równych, dodając same liczniki i same mianowniki tworzy się ułamek równy każdemu z zadanych.*

Niech będą ułamki równe $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''},..$; oznaczając przez q wartość każdego z nich, to jest czyniąc

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}=...=q,$$

mamy tosamości

$$a=bq, \quad a'=b'q, \quad a''=b''q,....$$

Jeśli je dodamy stronami, będzie

$$a+a'+a''+....=(b+b'+b''+....)q;$$

zkąd

$$\frac{a+a'+a''+...}{b+b'+b''+...}=q.$$

Więc

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}=...=\frac{a+a'+a''+....}{b+b'+b''+....}$$

Zamiast dodawać, można także odciągać liczniki i ich mianowniki; co daje

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}=...=\frac{a-a'-a''+a'''...}{b-b'-b''+b'''...}.$$

66. WNIOSEK. *Wciągu ułamków równych* $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}=....$ *mnożąc oba wyrazy każdego odpowiednio przez liczby jakiekolwiek m, m', m'',.., a potem dodając same liczniki i same mianowniki tworzy się ułamek równy każdemu z zadanych.*

Jakoż, mamy oczywiście

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}=\ldots=\frac{ma}{mb}=\frac{m'a'}{m'b''}=\frac{m''a''}{m''b''}=\ldots=\frac{ma+m'a'+m''a''+\ldots}{mb+m'b'+m''b''+\ldots}.$$

67. Twierdzenie II. *W ciągu ułamków równych, pierwiastek kwadratowy summy kwadratów z liczników, podzielony przez pierwiastek kwadratowy summy kwadratów z mianowników, tworzy ułamek równy każdemu z zadanych.*

Jakoż, kwadraty ułamków równych

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}=\ldots$$

są ułamkami równemi

$$\frac{a^2}{b^2}=\frac{a'^2}{b'^2}=\frac{a''^2}{b''^2}=\ldots$$

zkąd, na mocy poprzedzającego twierdzenia, wynika

$$\frac{a^2}{b^2}=\frac{a'^2}{b'^2}=\frac{a''^2}{b''^2}=\ldots=\frac{a^2+a'^2+a''^2+\ldots}{b^2+b'^2+b''^2+\ldots}.$$

Więc, wyciągając pierwiastek kwadratowy, otrzymujemy

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}=\ldots=\frac{\sqrt{a^2+a'^2+a''^2+\ldots}}{\sqrt{b^2+b'^2+b''^2+\ldots}}.$$

Ten wynik jest arcy użyteczną własnością ułamków.

I tak, gdyby zadano zagadnienie, *Znaleźć trzy ilości* x, y, z, *proporcyonalne do* a, b, c, *i takie żeby było* $x^2+y^2+z^2=1$; mielibyśmy zaraz

$$\frac{a}{x}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Zkąd

$$x=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\quad y=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\quad z=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Uwaga. Twierdzenie II może się zogólnić. Albowiem, rozumując jako wyżej, dowodzi się łatwo następujących tosamości :

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}=\ldots=\frac{\sqrt{ma^2+m'a'^2+m''a''^2+\ldots}}{\sqrt{mb^2+m'b'^2+m''b''^2+\ldots}}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}=\ldots=\frac{\sqrt[n]{ma^n+m'a'^n+m''a''^n+\ldots}}{\sqrt[n]{mb^u+m'b'^n+m''b''^n+\ldots}}.$$

68. Twierdzenie III. *Pierwiastek n^{ty} wieloczynu n ułamków równych jest równy każdemu z nich.*

Niech będzie n ułamków równych,

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}=\ldots$$

Biorąc wieloczyn tych wszystkich ułamków, mamy

$$\frac{aa'a''\ldots}{bb'b''\ldots}=\frac{a^n}{b^n};$$

zkąd, wyciągając pierwiastek n^{ty}, otrzymujemy

$$\sqrt[n]{\frac{aa'a''\ldots}{bb'b''\ldots}}=\frac{a}{b}.$$

Więc

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}=\ldots=\sqrt[n]{\frac{aa'a''\ldots}{bb'b''\ldots}}.$$

Na zastosowanie tego twierdzenia rozwiążmy zagadnienie: *Znaleźć trzy ilości x, y, z, proporcyonalne do a, b, c i takie, żeby ich wieloczyn xyz był równy sześcianowi k^3.*

Mamy zaraz

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{k}{\sqrt[3]{abc}};$$

Zkąd

$$x=\frac{ak}{\sqrt[3]{abc}},\quad y=\frac{bk}{\sqrt[3]{abc}},\quad z=\frac{ck}{\sqrt[3]{abc}}.$$

Uwaga. Zamieniając równości wieloczynów

$$ab=a'b'=a''b''=\ldots$$

na równości ilorazów

$$\frac{a}{\frac{1}{b}}=\frac{a'}{\frac{1}{b'}}=\frac{a''}{\frac{1}{b''}}=\ldots$$

można do nich zastosować poprzedzająca twierdzenia.

69 Ponieważ stosunek dwóch wielkości jest ilorazem liczb które je mierzą, a równość dwóch stosunków nazywa się *proporcyą*, własności stosunków i proporcyj są szczególnemi przypadkami własności ułamków algebrycznych. Nie potrzebujemy ich powtarzać (*); dowiedziemy tylko następującej:

W ciągu stosunków równych $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}=\ldots$ *liczniki i mianowniki są proporcyonalne do summ albo do różnic tych liczników z ich mianownikami.*

Jakoż, weźmy naprzykład proporcyę

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}.$$

Przemieniwszy wyrazy średnie nawzajem, będzie

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{a+b'}{a'+b'};$$

(*) Czytelnik znajdzie teoryę stosunków i proporcyj, wyłożoną z dostatecznemi szczegółami, w naszej Arytmetyce.

zkąd

$$\frac{a}{a+b}=\frac{a'}{a'+b'}, \quad \text{i} \quad \frac{b}{a+b}=\frac{b'}{a'+b'}.$$

Jest tak samo

$$\frac{a}{a+b}=\frac{a''}{a''+b''} \quad \text{i} \quad \frac{b}{a+b}=\frac{b''}{a''+b''}; \quad \text{etc.}$$

Więc

$$(1) \quad \begin{cases} \dfrac{a}{a+b}=\dfrac{a'}{a'+b'}=\dfrac{a''}{a''+b''}=\ldots \\ \dfrac{b}{a+b}=\dfrac{b'}{a'+b'}=\dfrac{b''}{a''+b''}=\ldots \end{cases}$$

Dowodzi się podobnie że

$$(2) \quad \begin{cases} \dfrac{a}{a-b}=\dfrac{a'}{a'-b'}=\dfrac{a''}{a''-b''}=\ldots \\ \dfrac{b}{a-b}=\dfrac{b'}{a'-b'}=\dfrac{b''}{a'-b''}=\ldots \end{cases}$$

Z dwóch równości (1) i (2), dzieląc je stronami, wywodzimy trzecią

$$(3) \quad \frac{a+b}{a-b}=\frac{a'+b'}{a'-b'}+\frac{a''+b''}{a''-b''}=\ldots$$

Zakończymy ten numer dwoma twierdzeniami *o średniej arytmetycznej* $\frac{a+b}{2}$ *i średniej geometrycznej* $\sqrt{ab}$ dwóch liczb *a i b*.

Średnia arytmetyczna dwóch liczb jest większa od ich średniej arytmetycznej.

Trzeba dowieść że

$$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$$

albo, co wychodzi na jedno, że

$$a+b-2\sqrt{ab}>0.$$

Owoż, ta nierówność może wziąć kształt

$$(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2-2\sqrt{a}.\sqrt{b}>0,$$

który pokazuje że powinno być

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2>0.$$

Więc, jeśli liczby a i b są nierówne, ostatniemu warunkowi staje się zawsze zadość, a temsamem i pierwszemu. Co było do dowodzenia.

Różnica między średnią arytmetyczną i średnią geometryczną dwóch liczb jest mniejsza od kwadratu różnicy tych liczb, podzielonego przez OSIEM *razy mniejszą z dwóch liczb.*

Mamy

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2};$$

zkąd, mnożąc oba wyrazy ułamka przez $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$, wynika

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{(a-b)^2}{2(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}.$$

Więc, przypuszczając $a>b$, jeśli zastąpimy a przez b w mianowniku ostatniego ułamka, będzie

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}<\frac{(a-b)^2}{8b}.$$

70. TWIERDZENIE IV. *Gdy jest kilku ułamków nierównych, dodając same liczniki i same mianowniki, tworzy się ułamek zawarty między największym i najmniejszym z tych ułamków.*

Niech będą naprzykład cztery ułamki dane w porządku ich wielkości

$$\frac{a}{b} > \frac{a'}{b'} > \frac{a''}{b''} > \frac{a'''}{b'''}.$$

Dla skrócenia uczyńmy $\frac{a}{b} = q$ i $\frac{a'''}{b'''} = r$; będzie

$$bq = a > br,$$
$$b'q > a' > b'r,$$
$$b''q > a'' > b''r,$$
$$b'''q > a''' = b'''r;$$

zkąd, dodając stronami, wywodzimy zarazem dwie nierówności

$$(b+b'+b''+b''')q > a+a'+a''+a''' > (b+b'+b''+b''')r.$$

Więc

$$(1) \qquad \frac{a}{b} > \frac{a+a'+a''+a'''}{b+b'+b''+b'''} > \frac{a'''}{b'''}.$$

Dowodzenie nie wymaga żeby ułamki, o których mowa, były dodatne, i stosuje się do ułamków jakichkolwiek, tak dobrze dodatnych jako odjemnych; byle tylko te ostatnie były brane z mianownikami dodatnemi. Nadto, niektóre z ułamków mogą być równe. Więc, uważając ułamki z tak rozległą doniosłością, mamy twierdzenie

Twierdzenie ogólne. *Jakiekolwiek są ułamki równe i nierówne, dodatne albo odjemne z mianownikami dodatnemi, summa algebryczna liczników podzielona przez summę arytmetyczną mianowników tworzy zawsze ułamek zawarty między największym i najmniejszym z tych ułamków*

Twierdenie I jest szczególnym przypadkiem tego ogólnego twierdzenia.

PRZYKŁAD. Niech będą ułamki $\frac{5}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{4}$, Biorąc je wszystkie z mianownikami dodatnemi mamy

$$\frac{5-2-1}{2+3+4}=\frac{2}{9}$$

Tak otrzymany ułamek $\frac{2}{9}$, będąc mniejszy od największego $\frac{5}{2}$ ale większy od najmniejszego $-\frac{2}{3}$, sprawdza twierdzenie wysłowione wyżej.

Gdyby wzięte te same ułamki odjemne z licznikami dodatnemi a z mianownikami odjemnemi, znalezionoby

$$\frac{5+2+1}{2-3-4}=-\frac{8}{5}.$$

Ułamek $-\frac{8}{5}$ jest mniejszy od najmniejszego $-\frac{2}{3}$; więc twierdzenie nie jest prawdziwe gdy mianowniki są odjemne.

SREDNIA ARYTMETYCZNA I ŚREDNIA GEOMETRYCZNA n ILOŚCI.

71. OKREŚLENIE. $\frac{a+b+c+\ldots l}{n}$, summa n ilości jakichkolwiek dodatnych albo odjemnych, podzielona przez ich liczbę n, nazywa się *średnią* tych ilości.

TWIERDZENIE. *Średnia jakichkolwiek ilości jest zawarte między największą i najmniejszą z pomiędzy nich.*

To twierdzenie jest oczywistem następstwem poprzedzającego; dość tylko wziąć $b=b'=b''=.=1$. Ale dowiedziemy go wprost. Niech będą n jakiekolwiek ilości, dodatne albo odjemne, dane w porządku ich wielkości algebrycznych:

$$a>b>c>\ldots>l.$$

Mamy oczywiście

$$a=a>l,$$
$$a>b>l,$$
$$a>c>l,$$
$$\ldots\ldots$$
$$a>l=l;$$

zkąd, dodając stronami, otrzymujemy zarazem dwie nierówności

$$na>a+b+c+\ldots+l>nl.$$

Więc

$$a>\frac{a+b+c+\ldots+l}{n}>l.$$

Kiedy wszystkie n ilości $a, b, c \ldots l$ są dodatne, wtedy $\frac{a+b+c+\ldots+l}{n}$ nazywa się ich *średnią arytmetyczną.*

Więc *średnia arytmetyczna n ilości jest zawarta między największą i najmniejszą z pomiędzy nich.*

Określenie. $\sqrt[n]{abc\ldots l}$, pierwiastek n^{ty} wieloczynu n ilości dodatnych $a, b, c \ldots l$ nazywa się ich *średnią geometryczną.*

Twierdzenie. *Średnia geometryczna n ilości jest zawarta między największą i najmniejszą z pomiędzy nich.*

Niech będą n ilości dane w porządku ich wielkości samoistych

$$a>b>c>\ldots>l.$$

Mamy

$$a = a > l,$$
$$a > b > l,$$
$$a > c > l,$$
$$\ldots\ldots$$
$$a > l = l;$$

zkąd. mnożąc stronami, otrzymujemy

$$a^n > abc \ldots l > l^n.$$

Więc

$$a > \sqrt[n]{abc \ldots l} > l.$$

Twierdzenie III jest szczególnym przypadkiem obecnego.

Dowiedziemy w rozdziale *maximum* i *minimum* że średnia geometryczna n ilości jest mniejsza od ich średniej arytmetycznej.

O ILOŚCIACH NIESKOŃCZENIE WIELKICH.

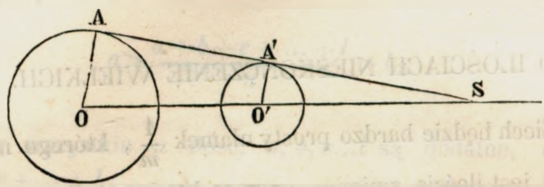
72. Niech będzie bardzo prosty ułamek $\frac{1}{m}$, którego mianownik m jest ilością zmienną mogącą brać wszelką wartość. Jeśli za m podstawimy liczby coraz mniejsze, jako 0.1, 0.01, 0.001,..., wartości ułamka będą coraz większe, wyrażone liczbami 10, 100, 1000... To dowodzi że, gdy mianownik m staje się niezmiernie małym, ułamek $\frac{1}{m}$ staje się niezmiernie wielkim, i może przewyższać wszelką wielkość skoro m jest niemal zerem. Więc, jeśli za m położymy 0, granicę wszelkiej małości, ułamek symboliczny $\frac{1}{0}$ będzie przedstawiał wartość większą od wszelkiej naznaczonej wielkości, czyli jako się mówi, będzie *ilością nieskończenie wielką*. Tę ilość wyraża się znakiem ∞, co daje

$$\frac{1}{0} = \infty.$$

Tak zwane ilości nieskończenie wielkie nie są właściwie ilościami; bo się nazywa *ilością wszystko co zwiększyć albo zmniejszyć można*, a oczywiście ilości nieskończenie wielkie nie mogą się zwiększać ani zmniejszać żadnem przydaniem ani odjęciem jakiejkolwiek ilości. Z tej przyczyny ilości nieskończenie wielkie powinny być uważane jako granice ilości zmiennych tak wielkich jak się podoba.

73. Żeby jeszcze jaśniej pokazać jak trzeba rozumieć ilości nieskończenie wielkie, weźmiemy następujące zagadnienie geometryi.

Mając dane dwa koła O i O′, *znaleźć punkt* S *w którym spólna styczna zewnętrzna* AA′ *spotyka linię środków* OO′.



Spostrzegamy zaraz że trójkąty podobne SAO i SA′O′ dają proporcyę

$$\frac{OS}{O'S}=\frac{OA}{O'A'}.$$

Nazwijmy x niewiadomą odległość OS, i dla skrócenia, żeby mieć dogodną formułę, oznaczmy przez a daną odległość OO′ środków dwóch kół mających promienie R i R′; będzie

$$\frac{x}{x-a}=\frac{R}{R'} \quad \text{albo} \quad \frac{x}{R}=\frac{x-a}{R'}=\frac{a}{R-R'};$$

Zkąd

$$x=\frac{aR}{R-R'}.$$

W założeniu $R > R'$, formuła wyznacza położenie punktu S na stronie koła mniejszego O', i dowodzi że odległość OS jest tem większa im różnica $R - R'$ jest mniejsza, albo że punkt S znajduje się tem dalej od środka O koła większego im się mniej te dwa koła różnią między sobą. Owóż jeśli $R - R' = 0$, formuła daje

$$\frac{aR}{0} = \infty ;$$

co pokazuje że punkt S jest nieskończenie daleko od punktu O.

Ta wartość tłumaczona geometrycznie, oznacza że styczna spólna zewnętrzna AA' nie spotyka linii środków OO'. Ale wtedy dwa koła są równe, i styczna zewnętrzna AA' jest równoległa do linii środków. Więc, uważając wartość x nieskończenie wielką jako rozwiązanie algebryczne zagadnienia w przypadku dwóch kół równych, mamy formułę ogólną która daje rozwiązanie zupełne zagadnienia stycznej zewnętrznej do dwóch kół jakichkolwiek.

Widzimy teraz jak algebra, zastosowana do geometryi, przedstawia, za pomocą ilości nieskończenie wielkiej, równoległość dwóch linij prostych, wyrażając, swoim językiem, że *to są dwie proste które się spotykają w nieskończoności.* Co właśnie znaczy że one leżą na jednej płaszczyznie nie spotykają się, jakkolwiek daleko są przedłużone, czyli że są równoległe według określenia geometrycznego.

74. Ilości nieskończenie wielkie, jako ilości algebryczne, mogą być dodatne albo odjemne. I tak, niech będzie ułamek

$$\frac{k}{x - a} .$$

Dla utkwienia myśli przypuszczamy że licznik k i ilość a są dodatne. Jeśli za x podstawimy $a + \varepsilon$, oznaczając przez ε ilość dodatną bardzo mało różną od zera, ułamek weźmie wartość

$$\frac{k}{+\varepsilon},$$

która będzie dodatna, i tem większa im ε będzie bliższe zera. Więc, gdy ε stanie się zerem, wtedy wartość ułamka stanie się ilością nieskończenie wielką dodatną, którą się wyraża pisząc

$$gr.\frac{k}{+\varepsilon}=+\frac{k}{0}=+\infty.$$

Pojmuje się łatwo że, podstawiając $x=a-\varepsilon$ i potem czyniąc $\varepsilon=0$, otrzymuje się ilość nieskończenie wielką odjemną

$$gr.\frac{k}{-\varepsilon}=-\frac{k}{0}=-\infty.$$

Weźmy na drugi przykład ułamek mający mianownik zmienny ale zawsze dodatny,

$$\frac{k}{(x-a)^2}.$$

Jakąkolwiek podstawimy wartość za x, mniejszą albo większą od a, biorąc $x=a\mp\varepsilon$ i potem czyniąc $\varepsilon=0$, znajdziemy zawsze ilość nieskończenie wielką tego samego znaku co k. W przypuszczeniu $k>0$ będzie

$$gr.\frac{k}{(\mp\varepsilon)^2}=gr.\frac{k}{\varepsilon^2}=\infty.$$

75. Po tem co poprzedza, nietrudno widzieć że, gdy licznik ułamka $\frac{k}{m}$ zostaje stateczny a mianownik rosnąc staje się ilością nieskończenie wielką, ten ułamek dąży do zera które jest jego granicą; co daje

$$\frac{k}{\infty}=0.$$

Wyrażając rzeczy z potrzebną ścisłością, trzeba niekiedy uważać zero dodatne i zero odjemne, według jak jest granicą ilości nieskończenie malejących, dodatnych albo odjemnych. Tym sposobem jest ogólnie

$$\frac{k^2}{+0}=+\infty \quad \text{i} \quad \frac{k^2}{-0}=-\infty\,.$$

Takie zero nazywają niektórzy *zerem względnem*, a to które oznacza nicość *zerem samoistem*.

SYMBOLE $\frac{0}{0}$, $0\times\infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$.

76. Niech będzie ułamek $\frac{a-b}{c-d}$. Wartość tego ułamka zależy od wartości nadanych literom a, b, c, d, które przedstawiają ilości jakiekolwiek. Owoż, jeśli przypuścimy $a=b$ i $c=d$, ułamek weźmie kształt symboliczny $\frac{0}{0}$. Co znaczy taki osobliwy iloraz w którym dzielna i dzielnik są zerami? Aby odpowiedzieć na pytanie, trzeba przede wszystkiem uważać że dzielna i dzielnik nie są tu zerami samoistemi; one są dane pierwotnie jako wyrażenia algebryczne mogące nabywać rozmaitych wartości, które dopiero przez uczynione założenia stają się zerami. To ustaliwszy, nazwijmy x wartość ilorazu $\frac{a-b}{c-d}$, będziemy mieli tosamość

$$(c-d)x=a-b.$$

Czyniąc zarazem $c=d$ i $a=b$, widzimy oczywiście że, jakakolwiek skończona ilość będzie położona za x, zawsze się stanie zadość powyższej równości.

Ztąd wnosimy że iloraz $\frac{a-b}{c-d}$, w podwójnem założeniu $a-b=0$ i $c-d=0$ które mu daje kształt symboliczny $\frac{0}{0}$, ma *wartość niewyznaczoną*.

Ale dodajemy zaraz że, kiedy dzielna i dzielnik stają się zerami przez jedno i to samo założenie, iloraz symboliczny $\frac{0}{0}$, wyraża pozornie tylko wartość niewyznaczoną. Na dowodzenie tego weźmy ułamek

$$\frac{x^2-a^2}{ax-a^2}.$$

Jeśli za x położymy a, to podstawienie da ułamkowi kształt symboliczny $\frac{0}{0}$; jednakże wartość tego ułamka dla $x=a$ jest zupełnie wyznaczona. I w samej rzeczy, wiemy że licznik $x^2-a^2=(x+a)(x-a)$, mianownik $ax-a^2=a(x-a)$; co przekształca dany ułamek na wieloczyn dwóch innych

$$\frac{x^2-a^2}{ax-a^2}=\frac{x-a}{a}\cdot\frac{x-a}{x-a}.$$

Owoż, jakąkolwiek wartość podstawimy za x, ułamek $\frac{x-a}{x-a}$, w którym licznik równa się mianownikowi, wyraża zawsze jedność; mamy więc dwa ułamki równowarte

$$\frac{x^2-a^2}{ax-a^2}=\frac{x+a}{a}$$

na wszelką wartość dla x, i temsamem dla $x=a$. Zatem, podstawiając $x=a$, będzie

$$gr.\ \frac{x^2-a^2}{ax-a^2}=\frac{a+a}{a}=2;$$

wartość wyznaczona, chociaż się przedstawia w kształcie niewyznaczonym $\frac{0}{0}$. Przyczyną tego pozornego niewyznaczenia jest czynnik $x-a$, spólny obydwom wyrazom ułamka, który stając się zerem nadaje mu kształt symboliczny $\frac{0}{0}$. Po odjęciu tego czynnika, wartość ułamka wydatnie się ukazuje.

Symbol $\frac{0}{0}$ może przedstawiać także wartości wyznaczone 0 albo ∞. I tak, biorąc ułamek

$$\frac{(x-a)^2}{x^2-a^2},$$

wydzimy że podstawienie $x=a$ daje mu kształt $\frac{0}{0}$; co dowodzi obecności spólnego czynnika $x-a$. Dzieląc najpierwej przez ten czynnik oba wyrazy ułamka, i czyniąc potem $x=a$, znajdujemy

$$gr.\frac{(x-a)^2}{x^2-a^2}=gr.\frac{x-a}{a+a}=\frac{0}{2a}=0.$$

Więc prawdziwa wartość ułamka $\frac{(x-a)^2}{x^2-a^2}$ dla $x=a$ jest 0.

Weźmy teraz ułamek

$$\frac{x^3+a^3}{(x+a)^2}.$$

Podstawienie $x=-a$ daje ułamkowi kształt $\frac{0}{0}$; dzielimy więc oba wyrazy przez $x+a$, poczem, czyniąc $x=-a$, otrzymujemy

$$gr.\frac{x^3+a^3}{(x+a)^2}=gr.\frac{x^2-ax+a^2}{x+a}=\frac{a^2}{0}=\infty.$$

Prawdziwa wartość uważanego ułamka jest ilością nieskończenie wielką, dodatną albo odjemną według jak x dążąc do $-a$ daje $gr.(x+a)=+0$ albo $gr.(x+a)=-0$.

Z tego wszystkiego wynika że, gdy są dwa oddzielne założenia, jedno które przywodzi dzielnę do zera, drugie które czyn dzielnik zerem, wtedy symbol $\frac{0}{0}$ przedstawia wartość istotnie niewyznaczoną. Kiedy zaś jedno i to samo założenie przywodzi zarazem dzielnę i dzielnik do zera, wtenczas symbol $\frac{0}{0}$ przedstawia w ogóle wartość wyznaczoną, która może być ilością skończoną, albo zerem, albo nawet ilością nieskończenie wielką.

Więc ogólnie $\frac{0}{0}$ nie wyraża *niewyznaczenia*, ale jest tylko *symbolem niewyznaczenia*.

Poszukiwanie prawdziwej wartości symbolu $\frac{0}{0}$ jest jednem z ważnych zadań wyższej matematyki. W algebrze, żeby znaleźć prawdziwą wartość ilorazu symbolicznego $\frac{0}{0}$, pochodzącego z podstawienia jednej i tej samej wartości $x=a$ naprzykład, dość jest, wiedząc że w tym przypadku dzielnik i dzielna mają spólny czynnik $x-a$, odjąć im najpierwej ten czynnik przez dzielenie, i dopiero potem w ilorazach uczynić $x=a$; co daje zwykle prawdziwą wartość ilorazu $\frac{0}{0}$. Ale jeśli, po tem podstawieniu, iloraz przedstawia się znowu w kształcie łudzącym $\frac{0}{0}$, to dowodem że dzielna i dzielnik mają jeszcze spólny czynnik $x-a$, przez który trzeba je najpierwej podzielić, i potem podstawić $x=a$. I tak dalej.

Aby to wszystko objaśnić rachunkiem, szukajmy prawdziwej wartości ilorazu

$$\frac{x^4-2a^2x^2+a^4}{x^3-ax^2-a^2x+a^3} \quad \text{dla} \quad x=a.$$

Widząc że dzielnik i dzielna stają się zerami przez podstawienie $x=a$, wiemy że mają spólny czynnik $x-a$; dzielimy więc przez $x-a$ dzielnę i dzielnik; i, na mocy ustawy ilorazu danej w n° 52, piszemy odrazu wynik

$$\frac{x^3+ax^2-a^2x-a^3}{x^2-a^2},$$

Podstawiamy $x=a$ i otrzymujemy jeszcze $\frac{0}{0}$; więc znowu dzielimy oba wyrazy ułamka przez $x-a$, i znajdujemy

$$\frac{x^2+2ax+a^2}{x+a}=\frac{(x+a)^2}{x+a}=x+a.$$

Teraz podstawienie $x=a$ daje $2a$; więc prawdziwa wartość zadanego ilorazu na $x=a$ jest $2a$. Można było odrazu przyjść do tego wyniku; bo nietrudno spostrzedz że

$$\frac{x^4-2a^2x^2+a^4}{x^3-ax^2-a^2x+a^3}=\frac{(x^2-a^2)^2}{(x-a)(x^2-a^2)}=\frac{x^2-a^2}{x-a}=x+a; \text{ etc.}$$

77. Przykład. *Znaleźć prawdziwą wartość ułamka*

$$\frac{x^4-6x^3+54x-81}{2x^3-9x^2+27} \quad \textit{na } x=3.$$

Zamiast zastępować x przez 3 w liczniku i mianowniku, łatwiej jest dzielić oba wyrazy przez $x-a$; reszty będą wynikami podstawień, i ich iloraz wyrazi wartość zadanego ułamka. Wykonywając dzielenia według już wiadomego prawidła, otrzymujemy natychmiast ilorazy tworzące ułamek

$$\frac{x^3-3x^2-9x+27}{2x^2-3x-9}.$$

równowarty pierwszemu.

Ale, podstawienie $x=3$, nadaje drugiemu ułamkowi kształt $\frac{0}{0}$; to dowodzi że oba jego wyrazy są podzielne przez $x-3$.

Dzielimy więc wyrazy drugiego ułamka przez $x-a$, i znajdujemy trzeci ułamek

$$\frac{x^2-9}{2x+3},$$

który ma wartość pierwszego. Owoż, przez podstawienie $x=3$ ostatni ułamek staje się

$$\frac{0}{9},$$

więc na $x=3$, prawdziwa wartość zadanego ułamka jest 0.

78. Iloraz osobliwy $\frac{0}{0}$ nie jest jedynym symbolem niewyznaczenia. Jakoż, nazywając A dzielnę i B dzielnik, mamy przekształcenia

$$\frac{A}{B}=\frac{A}{1}\times\frac{1}{B}=\frac{\frac{1}{B}}{\frac{1}{A}}.$$

które, gdy A i B stają się zerami, dają

$$\frac{0}{0}=0\times\infty=\frac{\infty}{\infty}.$$

Te równości dowodzą że wyrażenia $0\times\infty$ i $\frac{\infty}{\infty}$ przedstawiają zupełnie to samo co $\frac{0}{0}$; więc one są także symbolami niewyznaczenia.

Zwracamy baczność czytelnika ma symbol $0\times\infty$. Oczywiście, aby wieloczyn był zerem, *trzeba* żeby jeden przynajmniej z jego czynników stał się zerem. Ale ten warunek *konieczny* nie jest *dostateczny;* właśnie z przyczyny wieloczynu $0\times\infty$, który, chociaż ma czynnik zero, nie jest dlatego samego zerem. To się łatwo tłumaczy; albowiem, w miarę jak jeden czynnik maleje aż do zera, drugi może rosnąć nieskończenie i tak żeby wieloczyn zostawał stateczny. Biorąc na przykład wieloczyn $x \times \frac{1}{x} = \frac{x}{x}$, widzimy że on jest zawsze równy jedności, dla wszelkiej wartości x, i tymsamem dla $x=0$.

Więc, żeby wieloczyn był zerem, trzeba żeby jeden przynajmniej z jego czynników stał się zerem w pewnem założeniu, a żaden inny nie stawał się ilością nieskończenie wielką w tem samem założeniu. Te dwa warunki są konieczne i dostateczne.

Nakoniec, spotyka się w algebrze wyrażenie $\infty - \infty$, które jest także symbolem niewyznaczenia. Niech będzie na przykład summa złożona z dwóch ułamków

$$\frac{2}{x^2-1} + \frac{1}{x+1}.$$

Jeśli przypuścimy że x, ciągle mniejsze od -1, staje się -1, ta summa algebryczna weźmie kształt różnicy symbolicznej

$$\frac{2}{0} - \frac{1}{0} \quad \text{czyli} \quad \infty - \infty.$$

Dla znalezienia prawdziwej wartości, sprowadźmy do najmniejszego mianownika dwa powyższe ułamki, i dodajmy, będzie

$$\frac{x+1}{x^2-1} \quad \text{albo} \quad \frac{1}{x-1}.$$

Więc dla $x = -1 - \varepsilon$ gdy $\varepsilon = 0$, otrzymujemy

$$gr. \left(\frac{2}{x^2-1} + \frac{1}{x+1}\right) = gr. \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{2}.$$

Są jeszcze innego kształtu symbole niewyznaczenia; ale poszukiwanie prawdziwej wartości tych i podobnych im wyrażeń osobliwych nie może być przedmiotem algebry elementarnej,

79. Nietrudno teraz rozwiązać następujące zadania:

I. *Znaleźć wartość dla x która czyni zerem ułamek*

$$\frac{x-2}{x^2-1},$$

Ułamek jest zerem gdy jego licznik staje się zerem a mianownik zostaje różny od zera, albo gdy mianownik staje się ilością nieskończenie wielką a licznik zostaje ilością skończoną. Owoż wartość $x=2$ czyni licznik zerem a nie czyni mianownika zerem; więc ta wartość czyni ułamek zerem.

Nadto, mianownik staje się nieskończenie wielkim przez $x=+\infty$ i przez $x=-\infty$; ale te dwie wartości, czyniąc także licznik nieskończenie wielkim, dają ułamkowi kształt niewyznaczony $\frac{\infty}{\infty}$. Aby usunąć to pozorne niewyznaczenie, dość jest przekształcić ułamek na inny któregoby licznik nie stawał się już nieskończenie wielkim. W tym celu dzielimy oba wyrazy ułamka przez x, i otrzymujemy

$$\frac{1-\frac{2}{x}}{x-\frac{1}{x}}.$$

To mając, widzimy że podstawienia $x=+\infty$ i $x=-\infty$ czynią zerami $\frac{2}{x}$ i $\frac{1}{x}$; przez co ułamek staje się $\frac{1}{+\infty}$ albo $\frac{1}{-\infty}$, to jest w obydwóch razach staje się zerem. Więc wartości $x=+\infty$ i $x=-\infty$ czynią ułamek zerem. Z tego wszystkiego wnosimy że podstawienia $x=2$, $x=+\infty$ i $x=-\infty$ rozwiązują całkiem zagadnienie.

II. *Jaka jest prawdziwa wartość ułamka* $\dfrac{Ax^2+Bx+C}{A'x^2+B'x+C'}$ dla $x=\infty$?

Podstawienie $x=\infty$ daje ułamkowi kształt osobliwy $\frac{\infty}{\infty}$. Aby znaleźć prawdziwą wartość, dość jest podzielić oba wyrazy ułamka przez x^2; co go przywodzi do kształtu

$$\frac{A+\dfrac{B}{x}+\dfrac{C}{x^2}}{A'+\dfrac{B'}{x}+\dfrac{C'}{x^2}},$$

w którym widzimy łatwo że, dla $x=+\infty$ i dla $x=-\infty$, ułamek staje się $\frac{A}{A'}$.

Więc $\frac{A}{A'}$ jest jego prawdziwą wartością.

III. *Znaleźć prawdziwą wartość ułamka* $\dfrac{x^2-x}{x^3+x^2}$ dla $x=0$.

Po odjęciu spólnego czynnika x, mamy

$$\frac{x^2-x}{x^3+x^2}=\frac{x-1}{(x+1)x}.$$

Więc, jeśli x maleje aż do zera, będzie

$$gr.\frac{x^2-x}{x^3+x^2}=\frac{-1}{(+1)(+0)}=-\infty;$$

jeśli przeciwnie x rośnie dążąc do zera, wtedy będzie

$$gr.\frac{x^2-x}{x^3+x^2}=\frac{-1}{(+1)(-0)}=+\infty.$$

ĆWICZENIA.

I. Dowieśdź że

$$nx^{n+1}-(n+1)x^n+1$$

jest podzielne przez $(x-1)^2$; jakkolwiek jest liczba całkowita n.

II. Dowieśdź że

$$x^{2m}+x^{2m-2}+x^{2m-4}+\ldots+x^2+1$$

jest podzielne przez $x^m+x^{m-1}+x^{m-2}+\ldots x+1$.

III. Dowieśdź że

$$(a+b+c)^m-a^m-b^m-c^m$$

jest podzielne przez $(a+b)(a+c)(b+c)$, jeśli m jest nieparzyste.

IV. Dowieśdź że wieloczyn

$$(x^m-1)(x^{m-1}-1)(x^{m-2}-1)\ldots(x^{m-n+1}-1)$$

jest podzielny przez $(x-1)(x^2-1)(x^3-1)\ldots(x^n-1)$, gdy $m>n$.

V. Dowieśdź że summa

$$x^qy^r+y^qz^r+z^qx^r-x^ry^q-y^rz^q-z^rx^q$$

jest podzielna przez wieloczyn $(x-y)(y-z)(z-x)$.

VI. Jakie powinny być liczby całkowite n i p, żeby ciąg

$$1+x+x^2+x^3+\ldots x^{np-n}$$

był podzielny przez ciąg $1+x+x^2+\ldots x^{n-1}$.

Odpowiedź : $n-1$ powinno być wielownikiem liczby p.

VII. Dowieśdź że

$$x^{np} - a^{np}$$

jest podzielne przez $x^n - a^n$ i przez $x^p - a^p$.

VIII. Znaleźć prawdziwą wartość ułamka

$$\frac{x^4 + ax^3 - 3a^2x^2 - a^3x + 2a^4}{x^4 - ax^3 - 13a^2x^2 + 25a^3x - 12a^4},$$

na $x = a$.

Odpowiedź : $-\frac{3}{5}$.

IX. Rozłożyć na czynniki

$$ax^4 - 2ax^3 + (a-3)x^2 + 6x - 3.$$

Odpowiedź : $(x\sqrt{a} + \sqrt{3})(x\sqrt{a} - \sqrt{3})(x-1)^2$.

X. Sprawdzić

$$x^5 - 3x^3 + 9x - \frac{27x+1}{x^3+3} = \frac{x^7 - 1}{x^3+3}.$$

XI. Sprawdzić

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)(x+a)} + \frac{1}{(b-a)(b-c)(x+b)}$$

$$+ \frac{1}{(c-a)(c-b)(x+c)} = \frac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)}.$$

XII. Sprawdzić

$$\frac{y^2z^2}{b^2c^2} + \frac{(y^2-b^2)(z^2-b^2)}{b^2(b^2-c^2)} + \frac{(y^2-c^2)(z^2-c^2)}{c^2(c^2-b^2)} = 1.$$

XIII. Sprawdzić proporcyę

$$\left(\frac{1}{a+b} - \frac{1}{a+2b}\right) : \left(\frac{1}{a+2b} - \frac{1}{a+3b}\right) = \frac{1}{a+b} : \frac{1}{a+3b}.$$

VIV. Sprawdzić

$$\frac{\left(2+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\left(\frac{a+b}{2b}-\frac{a-b}{2a}\right)}{\left(2-\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)\left(\frac{a}{b-a}+\frac{b}{a+b}\right)}=\frac{(a+b)^3}{2ab(a-b)}.$$

XV. Uprościć ułamki

$$\frac{6x^2-96}{x^3+4x^2},\quad \frac{1-a^2}{(1+ax)^2-(a+x)^2}$$

odpowiedź : $\frac{6(x-4)}{x^2}$, $\frac{1}{1-x^2}$.

XVI. Uprościć

$$\frac{x^9-a^2x^7+a^4x^5-a^6x^3+a^8x}{x^{10}+a^{10}},$$

Odpowiedź : $\frac{x}{x^2+a^2}$.

XVII. Dodać ułamki

$$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)},\quad \frac{b^3}{(b-a)(b-c)},\quad \frac{c^3}{(c-a)(c-b)}.$$

Odpowiedź : $a+b+c$.

XVIII. Dodać

$$\frac{a^4}{(a-b)(a-c)(a-d)},\quad \frac{b^4}{(b-a)(b-c)(b-d)},$$

$$\frac{c^4}{c-a)(c-b)(c-d)},\quad \frac{d^4}{(d-a)(d-b)(d-c)}.$$

Odpowiedź : $a+b+c+d$.

XIX. Dodać

$$\frac{x^2z^2}{b^2b^2},\quad \frac{b^2(b^2-c^2)(y^2-b^2)}{(x^2-b^2)(z^2-b^2)y^2},\quad \frac{x^2-c^2)(z^2-c^2)y^2}{c^2(b^2-c^2)(c^2-y^2)}.$$

Odpowiedź : $\frac{y^2-x^2)(y^2-z^2)}{(y^2-b^2)(y^2-c^2)}$.

XX. Dodać

$$\frac{a+b}{ab}(a^2+b^2+c^2),\ \frac{b+c}{bc}(b^2+c^2-a^2),\ \frac{a+c}{ac}(a^2+c^2-b^2).$$

Odpowiedź: $2(a+b+c)$.

XXI. Zredukować

$$\frac{x^{3n}}{x^n-1}-\frac{x^{2n}}{x^n+1}-\frac{1}{x^n-1}+\frac{1}{x^n+1}.$$

Odpowiedź: $x^{2n}+2$.

XXII. Jeśli dzielna i dzielnik, wielomiany całkowite względem x, są pomnożone albo podzielone przez wielomian całkowity na x, dowieśdź że iloraz względem x nie zmieni się, ale reszta będzie pomnożona albo podzielona przez ten wielomian.

XXIII. Dowieśdź że kwadrat z *wielomianu* zawiera przynajmniej cztery wyrazy niezredukowne.

XXIV. Jeśli, podstawiając $x=0$ i $x=1$ w wielomianie na x mającym spółczynniki całkowite, otrzymuje się na wartość dwie liczby nieparzyste, żadna liczba całkowita podstawiona za x nie może przywieśdź tego wielomianu do zera.

XXV. Jeśli

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'},$$

dowieśdź że wtedy

$$\sqrt{aa'}+\sqrt{bb'}+\sqrt{cc'}=\sqrt{(a+b+c)(a'+b'+c')}$$

DZIAŁANIA NA PIERWIASTNIKACH ARYTMETYCZNYCH.

80. Potęga n^{ta} ilości a, wyrażona przez a^n, ma tylko jedną wartość; przeciwnie pierwiastek n^{ty} ilości a, wskazany przez $\sqrt[n]{a}$, może mieć wiele wartości. I tak, $\sqrt{4}$ naprzykład ma dwie wartości $+2$ i -2; bo każda z tych dwóch liczb podniesiona do kwadratu daje 4.

Będzie dowiedzione w *Algebrze wyższej* która stanowi drugą część niniejszego dzieła, że, jakakolwiek jest ilość a, pierwiastnik $\sqrt[n]{a}$ wskazu n ma n wartości różnych, albo, jako mówią, *n wyznaczeń* oddzielnych. Gdy ilość a jest dodatna, ten pierwiastnik ma oczywiście jedną wartość dodatną, i tylko jedną; bo dwie liczby dodatne nierówne nie mogą wydać tej samej potęgi n^{tej}. Ta jedyna wartość dodatna pierwiastnika wskazu n, która jest jego wartością liczebną czyli samoistą, nazywa się *wartością arytmetyczną;* a wszystkie n wyznaczenia (wartości) tego pierwiastnika nazywają się *wartościami algebrycznemi*. Dlatego też pierwiastniki w których się uważa samą jedną wartość arytmetyczną nazwano *pierwiastnikami arytmetycznemi*, a pierwiastniki uważane ogólnie ze wszystkiemi wartościami mianowano *pierwiastnikami algebrycznemi*. W tem co następuje będziemy się zajmowali samemi tylko pierwiastnikami arytmetycznemi.

81. Twierdzenie. *Nie zmienia się wartości pierwiastnika arytmetycznego mnożąc jego wskaz przez liczbę całkowitą, i podnosząc do potęgi oznaczonej tą liczbą, ilość umieszczoną pod znakiem* $\sqrt{}$

Jakoż, samo określenie pierwiastnika daje

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.$$

Podnieśmy obie strony tej tosamości do potęgi m^{tej}, będzie

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^{mn}=a^m;$$

zkąd, wyciągając pierwiastek stopnia mn, otrzymujemy

$$\sqrt[n]{a}=\sqrt[mn]{a^m}$$

Ten wynik dowodzi zarazem że, jeśli wskaz pierwiastnika jest podzielny przez liczbę całkowitą m, i ilość pod znakiem pierwiastkowym jest doskonałą potęgą $m^{tą}$, można podzielić wskaz i wykładnik przez m; i będzie

$$\sqrt[mn]{a^m}=\sqrt[n]{a}.$$

Ostatnia własność służy do uproszczenia pierwiastników. I tak,

$$\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m},$$

$$\sqrt[n]{a^{np}}=a^{\frac{np}{n}}=a^p.$$

$$\sqrt[12]{125a^6}=\sqrt[4]{5a^2}, \qquad \sqrt[8]{16a^{12}}=\sqrt{2a^3}.$$

Gdy wskaz pierwiastknika i wykładnik potęgi są równe, te dwa wskazane działania się niszczą, to jest

$$\sqrt[n]{a^n}=a.$$

82. Sprowadzenie pierwiastników do jednego wskazu. Można sprowadzić dane pierwiastniki do tego samego wskazu, mnożąc wskaz i wykładnik ilości każdego z nich przez wieloczyn wskazów wszystkich innych pierwiastników. Ale lepiej jest, do tego sprowadzenia, użyć najmniejszego wielownika wskazów, takim samym sposobem jakim się przywodzi ułamki do najmniejszego mianownika.

Niech będą naprzykład pierwiastniki

$$\sqrt[9]{8a^6},\quad \sqrt[6]{a^5},\quad \sqrt[8]{9a^{12}},\quad \sqrt{a^3}\,:$$

Trzeba przede wszystkiem uprościć te pierwiastniki. Co daje

$$\sqrt[3]{2a^2},\quad \sqrt[6]{a^5},\quad \sqrt[4]{3a^6},\quad \sqrt{a^3}\,,$$

Owoż, najmniejszym wielownikiem wskazów 3, 6, 4, 2, jest 12; więc pierwiastniki przywiedzione do najmniejszego spólnego wskazu są :

$$\sqrt[12]{16a^8},\quad \sqrt[12]{a^{10}},\quad \sqrt[12]{27a^{18}},\quad \sqrt[12]{a^{18}}\,.$$

Chcąc wiedzieć który z dwóch pierwiastników $\sqrt[3]{6}$ i $\sqrt[4]{11}$ jest większy, sprowadzamy je do jednego wskazu, i znajdujemy $\sqrt[12]{1296}$ i $\sqrt[12]{1331}$. Ztąd wnosimy że $\sqrt[4]{11} > \sqrt[3]{6}$.

83. *Dwa pierwiastniki arytmetyczne są równowarte, gdy ich wskazy są proporcyonalne do wykładników ilości umieszczonych pod znakami pierwiastkowemi.*

Jakoż, niech będą dwa pierwiastniki

$$\sqrt[n]{a^m} \quad \text{i} \quad \sqrt[n']{a^{m'}}\,;$$

sprowadziwszy je do tego samege wskazu, mamy

$$\sqrt[nn']{a^{mn'}} \quad \text{i} \quad \sqrt[nn']{a^{nm'}}\,.$$

Więc, żeby te dwa pierwiastniki były równowarte, trzeba i dosyć jest żeby było

$$a^{mn'} = a^{nm'}\,;$$

co wymaga

$$mn' = nm'\,,$$

albo

$$\frac{n}{m}=\frac{n'}{m'}.$$

84. Mnożenie i dzielenie pierwiastników. Trzeba rozróżnić dwa przypadki, według jak pierwiastniki mają ten sam wskaz albo wskazy różne.

1° *Gdy pierwiastniki mają ten sam wskaz n, ich wieloczyn jest równy pierwiastkowi n^{temu} wieloczynu ilości umieszczonych pod znakami pierwiastkowemi.*

Jakoż, niech będzie wieloczyn $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$ dwóch pierwiastników wskazu n. Ponieważ a i b nie są potęgami n^{temi} doskonałemi, oznaczmy przez α i β przybliżone pierwiastki n^{te} tych dwóch ilości; będziemy mieli

$$\sqrt[n]{\alpha^n}\sqrt[n]{\beta^n}=\alpha\beta=\sqrt[n]{\alpha^n\beta^n}.$$

Owóż, ta równość istnieje ciągle, jakkowiek mało potęgi α^n i β^n różnią się od ilości a i b, które są ich odpowiedającemi granicami; więc granice obydwóch stron równości są te same (*).

Co daje :

$$gr.\sqrt[n]{\alpha^n}\sqrt[n]{\beta^n}=gr.\sqrt[n]{\alpha^n\beta^n};$$

więc

$$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}.$$

Zatem ogólnie

$$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}\cdots=\sqrt[n]{abc\cdots}$$

Nawzajem, *pierwiastek n^{ty} wieloczynu ilości dodatnych jest równy wieloczynowi pierwiastków n^{tych} jego czynników.*

(*) Zobacz notę *o metodzie granic*, na końcu tomu.

I tak,

$$\sqrt[n]{abcd}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}\sqrt[n]{d}=\sqrt[n]{abc}\sqrt[n]{d}=\sqrt[n]{ab}\sqrt[n]{cd}=\ldots$$

Wynika ztąd ważne następstwo. Jeśli jeden z czynników wieloczynu pod pierwiastnikiem wskazu n jest doskonałą potęgą $n^{tą}$, można go wyprowadzić z pod tego pierwiastnika, wyciągając pierwiastek n^{ty}. I nawzajem, można wprowadzić pod pierwiastnik wskazu n czynnik stojący zewnątrz, podnosząc go do potęgi n^{tej}.

I tak,

$$\sqrt[n]{a^{kn}b}=a^k\sqrt[n]{b}, \quad \text{i} \quad a^k\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^{kn}b}.$$

Przykład I. Mamy zatem

$$\sqrt{3}\times\sqrt{12}=\sqrt{3.12}=\sqrt{36}=6.$$

$$\sqrt[3]{120}=\sqrt[3]{8.15}=2\sqrt[3]{15}.$$

$$\sqrt[8]{16a^{12}}=\sqrt[8]{a^8.16a^4}=a\sqrt[8]{16a^4}=a\sqrt{2a}.$$

Przykład II. Uprościć pierwiastnik $\sqrt{a^2b}$, wiedząc że a jest ilością odjemną.

Ponieważ a jest ilością odjemną, $-a$ będzie ilością dodatną; mamy więc

$$\sqrt{a^2b}=\sqrt{(-a)^2b}=-a\sqrt{b}.$$

Na mocy tego co poprzedza, otrzymuje się łatwo następujące uproszczenie

$$\frac{a^2-b^2}{11ab}\sqrt{\frac{242a^3b^3}{9a^2-18ab+9b^2}}=\frac{1}{3}(a-b)\sqrt{2ab}.$$

Rozumując jako w mnożeniu pierwiastników, dowodzi się podobnie że

Gdy pierwiastniki mają ten sam wskaz n, ich iloraz jest równy pierwiastkowi n^{temu} ilorazu ilości umieszczonych pod znakami pierwiastkowemi.

To jest

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Naprzykład

$$\frac{\sqrt{40}}{\sqrt{75}}=\sqrt{\frac{40}{75}}=\sqrt{\frac{8}{25}}=\frac{2}{5}\sqrt{2}.$$

2° Gdy dwa pierwiastniki ze wskazami nierównemi mają być mnożone albo dzielone jeden przez drugi, trzeba je najpierwej sprowadzić do spólnego wskazu i dopiero potem wykonać mnożenie albo dzielenie, według prawideł wyżej podanych.

I tak,

$$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[p]{b}=\sqrt[np]{a^p}\,.\,\sqrt[np]{b^n}=\sqrt[np]{a^pb^n}.$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[p]{b}}=\frac{\sqrt[np]{a^p}}{\sqrt[np]{a^p}}=\sqrt[np]{\frac{a^p}{b^n}}.$$

85. Uwaga. Mając brać summę albo różnicę dwóch pierwiastników, trzeba najpierwej sprowadzić je do najmniejszego wskazu, aby, jeśli są *podobne*, wykonać redukcyę. Niech będą naprzykład dwa pierwiastniki:

$$\sqrt[6]{512a^{15}b^6}\quad \text{i}\quad \sqrt[4]{324a^6b^8}.$$

Uproszczając je, otrzymujemy

$$\sqrt[6]{512a^{15}b^6}=\sqrt{8a^5b^2}=2a^2b\sqrt{2a},$$

$$\sqrt[4]{324a^6b^8}=\sqrt{18a^3b^4}=3ab^2\sqrt{2a}.$$

To pokazuje że dwa zadane pierwiastniki są podobne, to jest mają ten sam wskaz i tę samą ilość pod znakiem pierwiastkowym. Więc ich summa, przywiedziona do najprostrzego kształtu, jest

$$\sqrt[6]{512a^{15}b^6}+\sqrt[4]{324a^6b^8}=(2a+3b)ab\sqrt{2a}.$$

86. Potęgi i pierwiastki danego pierwiastnika. *Aby podnieść pierwiastnik do pewnej potęgi, dość jest podnieść do tej potęgi ilość umieszczoną pod znakiem pierwiastkowym.*

Jakoż, prawidło mnożenia pierwiastników (1°), daje

$$(\sqrt[n]{a^m})^p=\sqrt[n]{a^m}.\sqrt[n]{a^m}.\sqrt[n]{a^m}\ldots=\sqrt[n]{a^m.a^m.a^m\ldots}=\sqrt[n]{a^{mp}}.$$

Jeśli wskaz pierwiastnika jest podzielny przez wykładnik potęgi, to trzeba go dzielić.

I tak, $$(\sqrt[np]{a^m})^p=\sqrt[n]{a^m}.$$

Albowiem $$(\sqrt[np]{a^m})^p=\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}.$$

Jeśli wskaz pierwiastnika i wykładnik potęgi mają spólny czynnik, to trzeba go odjąć, i potem dokonać działania.

I tak, $$(\sqrt[np]{a})^{mp}=\sqrt[n]{a^m}.$$

Bo $$(\sqrt[np]{a})^{mp}=\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}.$$

Aby wyciągnąć pierwiastek n^{ty} *z pierwiastnika, mnoży się przez n wskaz tego pierwiastnika.*

To jest

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[mn]{a}.$$

Jakoż, przez określenie mamy

$$\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}\right)^{nm}=a;$$

więc, wyciągając z obydwóch stron pierwiastek stopnia *mn*, otrzymujemy

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[mn]{a}.$$

Jeśli wykładnik ilości umieszczonej pod znakiem pierwiastkowym jest podzielny przez stopień pierwiastku do wyciągania, to trzeba go podzielić.

I tak,

$$\sqrt[p]{\sqrt[n]{a^{mp}}}=\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}.$$

Wynika z powyższego twierdzenia że można przemienić porządek wyciągania pierwiastków z danej ilości; mamy albowiem

$$\sqrt[p]{\sqrt[n]{a^m}}=\sqrt[np]{a^m}=\sqrt[n]{\sqrt[p]{a^m}}.$$

Uwaga. Z dwóch ostatnich twierdzeń można łatwo wyprowadzić twierdzenie n° 81.

87. Zastosowania. Jest często potrzeba przekształcenia ułamka mającego mianownik niestosunkowy na ułamek z mianownikiem stosunkowym. Wskażemy kilka przykładów w których to przekształcenie nie przedstawia wielkiej trudności.

Niech będzie ułamek

$$\frac{b}{\sqrt[n]{a^m}}.$$

W założeniu że pierwiastnik jest uproszczony, czyli że $n>m$, mnożymy oba wyrazy ułamka przez $\sqrt[n]{a^{n-m}}$; co zaraz daje

$$\frac{b\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^m . a^{n-m}}}=\frac{b\sqrt[n]{a^{n-m}}}{a}.$$

Uważajmy ułamki których mianowniki zawierają same tylko pierwiastniki kwadratowe; i niech będzie najpierwej

$$\frac{L}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

Przypuszczając $a > b$, pomnóżmy oba wyrazy przez $\sqrt{a}-\sqrt{b}$; otrzymamy

$$\frac{L}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{L(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}.$$

Podobnie się przekształca ułamek

$$\frac{L}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{L(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}.$$

Weźmy na drugi przykład, ułamek którego mianownik ma trzy pierwiastniki kwadratowe

$$\frac{L}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}.$$

Jeśli pomnożymy oba wyrazy przez $\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}$, znajdziemy

$$\frac{L}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{L(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-c}=\frac{L(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})}{a+b-c+2\sqrt{ab}}.$$

To mając, aby się pozbyć piewiastnika $\sqrt{ab}$, pomnóżmy oba wyrazy ostatniego ułamka przez $a+b-c-2\sqrt{ab}$; będzie ostatecznie

$$\frac{L}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{L\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)\left(a+b-c-2\sqrt{ab}\right)}{(a+b-c)^2-4ab}.$$

Takim samym sposobem przekształca się ułamek, którego mianownik składa się z części stosunkowej i z dwóch pierwiastników kwadratowych.

$$\frac{L}{a+\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{L(a+\sqrt{b}-\sqrt{c})}{a^2+b-c-2a\sqrt{b}}$$

$$=\frac{L\left(a+\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)\left(a^2+b-c-2a\sqrt{b}\right)}{(a^2+b-c)^2-4a^2b}.$$

Można jeszcze łatwo przekształcić ułamek

$$\frac{L}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}},$$

którego mianownik zawiera cztery pierwiastniki kwadratowe, na ułamek z mianownikiem stosunkowym; dość tylko pomnożyć oba wyrazy przez $\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}-\sqrt{d}$. Co daje

$$\frac{L}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}}=\frac{L(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}-\sqrt{d})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{c}+\sqrt{d})^2}$$

$$=\frac{L\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}-\sqrt{d}\right)}{a+b-c-d+2\sqrt{ab}-2\sqrt{cd}}.$$

Otrzymamy ułamek, mający postać ostatniego przekształconego ułamka, nie przedstawia już żadnej trudności.

Nakoniec weźmy ułamek

$$\frac{L}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}+\sqrt{e}},$$

którego mianownik ma pięć wyrazów, i wszystkie są pierwiastnikami kwadratowemi; ale jeden z nich mógłby być ilością stosunkową. Dla otrzymania mianownika stosunkowego, dość pomnożyć oba wyrazy ułamka przez $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}-\sqrt{e}$. Wykonamy tylko rachunek mianownika, aby pokazać możebność przekształcenia.

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}+\sqrt{e})(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}-\sqrt{e})$$
$$=a+b+c+d-e+2\sqrt{ab}+2(\sqrt{a}+\sqrt{b})\sqrt{c}+2(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})\sqrt{d}.$$

Jeśli teraz pomnożymy oba wyrazy nowego ułamka przez

$$a+b+c+d-e+2\sqrt{ab}+2(\sqrt{a}+\sqrt{b})\sqrt{c}-2(\sqrt{a}+\sqrt{b}+c)\sqrt{d},$$

otrzymamy ułamek kształtu

$$\frac{N}{S+A\sqrt{bc}+B\sqrt{ac}+C\sqrt{ab}},$$

w którym S, A, B, C, są ilościami stosunkowemi. Ostatni ułamek, na mocy tego co poprzedza łatwo się przekształca na inny mający mianownik stosunkowy. Jako widzimy, teorycznie przekształcenie jest możebne, ale praktycznie rachunek bardzo mozolny.

88. Gdy mianownik ułamka jest *różnicą* dwóch pierwiastników tego samego wskazu n, nie trudno przekształcić go na stosunkowy. Jakoż, niech będzie ułamek

$$\frac{L}{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}};$$

połóżmy $\sqrt[n]{a}=\alpha$ i $\sqrt[n]{b}=\beta$, zkąd $a=\alpha^n$ i $b=\beta^n$; poczem, pomnóżmy oba wyrazy ułamka przez rozwinięty iloraz $\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$; będziemy mieli

$$\frac{L}{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}}=\frac{L(\alpha^{n-1}+\beta\alpha^{n-2}+\ldots\beta^{n-1})}{(\alpha-\beta)(\alpha^{n-1}+\beta\alpha^{n-2}+\ldots\beta^{n-1})}$$
$$=\frac{L(\alpha^{n-1}+\beta\alpha^{n-2}+\ldots\beta^{n-1})}{\alpha^n-\beta^n}.$$

Więc, zastępując α i β przez ich wartości, otrzymujemy

$$\frac{L}{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}}=\frac{L(\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{ba^{n-2}}+\ldots+\sqrt[n]{b^{n-1}})}{a-b}.$$

Można jeszcze łatwo uczynić stosunkowym mianownik ułamka, gdy ten mianownik jest *summą* dwóch pierwiastników tego samego wskazu *n ale nieparzystego*; dość tylko pomnożyć licznik i mianownik przez rozwinięty iloraz $\frac{a+b}{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}$. Co daje

$$\frac{L}{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}=\frac{L(\sqrt[n]{a^{n-1}}-\sqrt[n]{ba^{n-2}}+\ldots+\sqrt[n]{b^{n-1}})}{a+b}.$$

WYKŁADNIKI UŁAMKOWE.

89. Wiemy że chcąc podnieść ilość a^m do potęgi n^{tej}, trzeba pomnożyć jej wykładnik m przez n; i będzie

$$(a^m)^n=a^{mn}.$$

Nawzajem, aby wyciągnąć pierwiastek n^{ty} z ilości a^{mn} która jest doskonałą potęgą $n^{tą}$, dość podzielić jej wykładnik mn przez n; i będzie

$$\sqrt[n]{a^{mn}}=a^{\frac{mn}{n}}=a^m.$$

Co się zgadza z prawidłem pierwiastników (nº 86).

Gdy wykładnik potęgi nie jest podzielny przez wskaz pierwiastku, to prawidło już się nie stosuje; ale można jeszcze i w tym przypadku przedstawiać pierwiastek przez potęgę ułamkową $a^{\frac{m}{n}}$, biorąc ją w tem samem znaczeniu co wyżej; byle było dowiedzione że

$$a^{\frac{mp}{np}}=a^{\frac{m}{n}}.$$

Owoż tu równość istnieje, jakiekolwiek są wykładniki ułamkowe równe; bo ona znaczy to samo co

$$\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}.$$

Więc jest zawsze

$$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}.$$

Użycie wykładników ułamkowych będzie niewątpliwie zogólnieniem notacyi, jeśli dobrze określono co przez symbol $a^{\frac{m}{n}}$ rozumieć należy. Otóż, na mocy ostatniej równości, symbol $a^{\frac{m}{n}}$ wyraża ugodnie że trzeba podnieść ilość a do potęgi m^{tej} i z tej potęgi wyciągnąć pierwiastek n^{ty}.

Wykładnik ułamkowy posiada bardzo cenną własność, za pomocą której notacya wyciągania pierwiastków przywodzi się do podnoszenia do potęg, $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$; co jest zogólnieniem arcy użytecznem w zastosowaniach. Ten nowy symbol ma wyższość nad pierwiastnikiem, w tem że nie wprowadza nowych prawideł do rachunku. Albowiem, jako zaraz zobaczymy, wykładniki ułamkowe są poddane tym samym prawidłom co wykładniki całkowite.

I tak, niech będą

$$a^{\frac{m}{n}} \text{ i } a^{\frac{p}{q}},$$

dwie potęgi ułamkowe tej samej ilości, w których jeden z mianowników n albo q może być jednością. Mamy ogólnie:

1° Wieloczyn $a^{\frac{m}{n}}.a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[n]{a^m}.\sqrt[q]{a^p}=\sqrt[nq]{a^{mq}}.\sqrt[nq]{a^{np}}=\sqrt[nq]{a^{mq+np}}$

$$=a^{\frac{mq+np}{nq}}=a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}.$$

2°. Iloraz $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[q]{a^p}} = \frac{\sqrt[nq]{a^{mq}}}{\sqrt[nq]{a^{np}}} = \sqrt[nq]{\frac{a^{mq}}{a^{np}}} = \sqrt[nq]{a^{mq-np}}$

$$= a^{\frac{mq-np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}.$$

3. Potęga z potęgi. $\left[a^{\frac{m}{n}}\right]^p = (\sqrt[n]{a^m})^p = \sqrt[n]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{n}}$.

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(\sqrt[n]{a^m})^p} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{mp}}} = \sqrt[np]{a^{mp}}$$

$$= a^{\frac{mp}{nq}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}}.$$

Te trzy główne wyniki dostatecznie dowodzą tosamości prawideł wykładników ułamkowych z całkowitemi.

90 Zastosowanie. — *Znaleźć prawdziwą wartość ułamka*

$$\frac{a^3+b^3}{a\sqrt[3]{a}-b\sqrt[3]{b}} \quad \text{gdy} \quad a+b=0.$$

Rozkładając na czynniki licznik i mianownik, można dać ułamkowi kształt wieloczynu

$$\frac{a+b}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}} \cdot \frac{a^2-ab+b^2}{\left(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)},$$

w którym sam jeden czynnik $\frac{a+b}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}$ bierze kształt $\frac{0}{0}$ gdy $a+b=0$. Owóż łatwo widzimy że mianownik tego czynnika dzieli licznik, i daje iloraz

$$\frac{a+b}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}} = a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}};$$

mamy więc

$$\frac{a^2+b^3}{a\sqrt[3]{a}-b\sqrt[3]{b}}=\frac{\left(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)(a^2-ab+b^2)}{\left(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)}.$$

Jeśli teraz uczynimy $b=-a$, znajdziemy żądaną prawdziwą wartość

$$gr.\frac{a^3+b^3}{a\sqrt[3]{a}-b\sqrt[3]{b}}=\frac{3a^{\frac{2}{3}}.3a}{2a^{\frac{1}{3}}.2a^{\frac{2}{3}}}=\frac{9}{5}a^{\frac{5}{3}}.$$

Więc, gdy $a+b=0$, zadany ułamek bierze wartość wyznaczoną $\frac{9}{4}a\sqrt[3]{a^2}$.

WYKŁADNIKI UŁAMKOWE ODJEMNE.

91. Dla zogólnienia formuły (n[ro] 38)

$$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n},$$

widząc że potęga odjemna a^{-m} jest wynikiem dzielenia dającego iloraz $\frac{1}{a^m}$, mogliśmy ugodnie uważać wyrażenie osobliwe a^{-m} jako równowarte ilorazowi $\frac{1}{a^m}$. Możemy więc teraz zogólnić tę ugodę, i położyć

$$a^{-m}=\frac{1}{a^m},$$

jakikolwiek jest wykładnik m, całkowity albo ułamkowy, dodatny albo odjemny.

Ale powinniśmy dowieśdź że prawidła dla rachunku wykładników dodatnych, całkowitych albo ułamkowych, stosują się do wykładników odjemnych. Co właśnie uczynimy, biorąc tylko trzy następujące przypadki ogólne :

$$1^\circ \quad a^{-\frac{m}{n}} \cdot a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} \cdot \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}} = a^{-\frac{m}{n}+\left(-\frac{p}{q}\right)}.$$

$$2^\circ. \quad a^{-\frac{m}{n}} : a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} : \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}} = \frac{a^{\frac{p}{q}}}{a^{\frac{m}{n}}} = a^{-\frac{m}{n}-\left(-\frac{p}{q}\right)}.$$

$$3^\circ. \quad \left(a^{-\frac{m}{n}}\right)^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{\left(a^{-\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}}} = \frac{1}{\frac{1}{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}}}} = \frac{1}{\frac{1}{a^{\frac{mp}{nq}}}} = a^{\frac{mp}{nq}}$$

$$= a^{\left(-\frac{m}{n}\right)\cdot\left(-\frac{p}{q}\right)}.$$

RÓŻNE ZASTOSOWANIA RACHUNKU.

92. *Uprościć ułamek*

$$\frac{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}{a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2+2abc}.$$

Zmieniając znak licznika widzimy łatwo przekształcenie (nº 32)

$$a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2=(a^2-b^2-c^2)^2-4b^2c^2$$

$$=(a^2-b^2-c^2+2bc)(a^2-b^2-c^2-2bc)=\{a^2-(b-c)^2\}\{a^2-(b+c)^2\}$$

$$=(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)(a-b-c).$$

Co do mianownika, aby go łatwo rozłożyć na czynniki dość jest uporządkować według a; co zaraz daje

$$(b+c)a^2+(b^2+c^2+2bc)a+bc(b+c)$$

$$=(b+c)(a^2+ab+ac+bc)=(b+c)(a+b)(a+c).$$

Więc ułamek uproszczony wyraża się przez

$$\frac{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{(a+b)(a+c)(b+c)}.$$

93. *Uprościć ułamek*

$$\frac{n^3-3n+(n^2-1)\sqrt{n^2-4}-2}{n^3-3n+(n^2-1)\sqrt{n^2-4}+2}.$$

Dajemy najpierwej temu ułamkowi kształt następujący

$$\frac{n^3-3n-2+(n+1)(n-1)\sqrt{(n+2)(n-2)}}{n^3-3n+2+(n+1)(n-1)\sqrt{(n+2)(n-1)}}.$$

Teraz widzimy łatwo że podstawienie $n=-1$ przywodzi trójmian n^3-3n-2 do zera; więc ten trójmian jest podzielny przez $n+1$ (nº 52); wykonywając dzielenie, znajdujemy

$$n^3-3n-2=(n+1)(n^2-n-2).$$

Ale czynnik n^2-n-2 staje się także zerem dla $n=-1$; dzielimy go przez $n+1$, i mamy

$$n^2-n-2=(n+1)(n-2).$$

Zatem

$$n^3-3n-2=(n+1)^2(n-2).$$

Rozumując tak samo, spostrzegamy że trójmian n^3-3n+2 jest podzielny przez $(n-1)^2$, i otrzymujemy

$$n^3-3n+2=(n-1)(n^2+n-2)=(n-1)^2(n+2).$$

Przez wprowadzenie tego rozkładu na czynniki, dany ułamek przekształca się jako następuje

$$\frac{(n+1)^2(n-2)+(n+1)(n-1)\sqrt{(n+2)(n-2)}}{(n-1)^2(n+2)+(n+1)(n-1)\sqrt{(n+2)(n-2)}}$$

$$=\frac{(n+1)\sqrt{n-2}}{(n-1)\sqrt{n+2}}\cdot\frac{(n+1)\sqrt{n-2}+(n-1)\sqrt{n+2}}{(n-1)\sqrt{n+2}+(n+1)\sqrt{n-2}}=\frac{(n+1)\sqrt{n-2}}{(n-1)\sqrt{n+2}}.$$

94. *Uprościć wyrażenie*

$$\frac{a^2b^2c^2}{(a-d)(b-d)(c-d)}+\frac{a^2b^2d^2}{(a-c)(b-c)(d-c)}+\frac{a^2c^2d^2}{(a-b)(c-b)(d-b)}$$

$$+\frac{b^2c^2d^2}{(b-a)(c-a)(d-a)}.$$

Dodając dwa pierwsze ułamki, mamy

$$\frac{a^2b^2}{c-d}\cdot\frac{c^4-(a+b)c^3+abc^2-d^4+(a+b)d^3-abd^2}{(a-d)(b-d)(a-c)(b-c)}.$$

Nietrudno spostrzedz że licznik drugiego ułamka zawiera czynnik $c-d$. Jakoż, ten licznik można pisać

$$c^4-d^4-(a+b)(c^3-d^3)+ab(c^2-d^2)$$

$$=(c-d)\{(c^2+d^2)(c+d)-(a+b)(c^2+cd+d^2)+ab(c+d)\}.$$

Zatem summa dwóch pierwszych ułamków równa się

$$a^2b^2.\frac{(c^2+d^2)(c+d)-(a+b)(c^2+cd+d^2)+ab(c+d)}{(a-d)(b-d)(a-c)(b-c)}.$$

Uważając sam licznik ułamka, widzimy że bierze przekształcenia :

$$ab(c+d)-cd(a+b)-(c^2+d^2)(a+b-c-d)$$
$$=ac(b-d)+bd(a-c)-(c^2+d^2)(a+b-c-d)$$
$$=(b-d)(ac-c^2-d^2)+(a-c)(bd-c^2-d^2)$$
$$=(b-d)(a-c)c-(b-d)d^2+(a-c)(b-d)d-(a-c)c^2.$$

Więc teraz summa dwóch pierwszych ułamków wyraża się przez

$$\frac{a^2b^2(a-c)(b-d)(c+d)-a^2b^2c^2(a-c)-a^2b^2d^2(b-d)}{(a-d)(b-d)(a-c)(b-c)}.$$

Ztąd, przemieniając nawzajem litery a i c, b i d, wywodzimy zaraz summę dwóch ostatnich ułamków,

$$\frac{c^2d^2(a-c)(b-d)(a+b)+c^2d^2a^2(a-c)+c^2d^2b^2(b-d)}{(a-d)(b-d)(a-c)(b-c)}.$$

Owoż, w pierwszej i drugiej summie liczników mamy

$$-a^2b^2c^2(a-c)+c^2d^2a^2(a-c)=-a^2c^2(a-c)(b-d)(b+d),$$

$$-a^2b^2d^2(b-d)+c^2b^2d^2(b-d)=-b^2d^2(b-d)(a-c)(a+c);$$

więc, znosząc spólne czynniki $a-c$ i $b-d$, znajdujmy summę czterech danych ułamków, wyznaczoną przez ułamek

$$\frac{a^2b^2(c+d)-a^2c^2(b+d)+c^2d^2(a+b)-b^2d^2(a+c)}{(a-d)(b-c)},$$

którego licznik przekształca się na

$$bc(a^2b-a^2c+cd^2-bd^2)+ad(ab^2-ac^2+c^2d-b^2d)$$

$$=bc(b-c)(a-d)(a+d)+ad(a-d)(b-c)(b+c).$$

Jeśli nakoniec odejmiemy czynniki $a-d$ i $b-c$, spólne licznikowi i mianownikowi, otrzymamy

$$bc(a+d)+ad(b+c).$$

Więc zadane wyrażenie przywodzi się do

$$abc+abd+acd+bcd.$$

95. Zagadnienie I. *Znaleźć warunki żeby ułamek* $\dfrac{\mathrm{A}x^2+\mathrm{B}x+\mathrm{C}}{\mathrm{A}'x^2+\mathrm{B}'x+\mathrm{C}'}$ *miał wartość stateczną, jakiekolwiek jest* x.

Ponieważ wartość ułamka jest niezależna od x, znajdziemy ją czyniąc $x=0$; co daje $\frac{C}{C'}$. Mamy więc równości

$$\frac{Ax^2+Bx+C}{A'x^2+B'x+C'}=\frac{C}{C'}=\frac{Ax^2+Bx}{A'x^2+B'x}=\frac{Ax+B}{A'x+B'};$$

zkąd, czyniąc $x=0$, wywodzimy

$$\frac{C}{C'}=\frac{B}{B'}.$$

Będzie zatem

$$\frac{Ax+B}{A'x+B'}=\frac{B}{B'}=\frac{Ax}{A'x}=\frac{A}{A'}.$$

Więc szukane warunki są

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}.$$

96. Zagadnienie II. *Wiedząc że* $\frac{r}{a}=\frac{r'}{a'}$, *dowieśdź równości*

$$(r+r')(a-a')=ar-a'r'.$$

Z założonej równości

$$\frac{r}{a}=\frac{r'}{a'}$$

wynika

$$\frac{r+r'}{a+a'}=\frac{ar-a'r'}{a^2-a'^2}.$$

Owoż, ostatnia równość jest to samo co

$$\frac{(r+r')(a-a')}{a^2-a'^2}=\frac{ar-a'r'}{a^2-a'^2};$$

więc

$$(r+r')(a-a')=ar-a'r'.$$

97. Zagadnienie III. *Wiedząc że* $\frac{r}{h}=\frac{r'}{h'}$, *dowieśdź równości* $(r^2+r'^2+rr')(h-h')=r^2h-r'^2h'$.

Podnieśmy do kwadratu obie strony równości

$$\frac{r}{h}=\frac{r'}{h'},$$

będziemy mieli

$$\frac{r^2}{h^2}=\frac{r'^2}{h'^2}=\frac{rr'}{hh'}=\frac{r^2+r'^2+rr'}{h^2+h'^2+hh'}=\frac{r^2h-r'^2h'}{h^3-h'^3}.$$

Ostatnią równość można pisać

$$\frac{(r^2+r'^2+rr')(h-h')}{(h^2+hh'+h'^2)(h-h')}=\frac{r^2h-r'^2h'}{h^3-h'^3};$$

a że mianowniki są równe, więc

$$(r^2+r'^2+rr')(h-h')=r^2h-r'^2h'.$$

98. Zagadnienie IV. *Znaleźć, na $x=1$, prawdziwą wartość ułamka*

$$\frac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt[3]{x^4-1}}{\sqrt[6]{x^3-3x+2}}.$$

Ponieważ wielomiany pod pierwiastnikami stają się zerami przez podstawienie $x=1$, te wielomiany są podzielne przez $x-1$ (n° 52). Za pomocą tej podzielności i sprowadzenia pierwiastników do spólnego wskazu, możemy uczynić wydatnym czynnik który, stając się zerem, daje ułamkowi kształt niewyznaczony $\frac{0}{0}$. Wykonywając wskazane działania, otrzymujemy

$$\frac{\sqrt[6]{(x-1)^3(x+1)^3}+\sqrt[6]{(x-1)^2(x^3+x^2+x+1)^2}}{\sqrt[6]{(x-1)^2(x+2)}}.$$

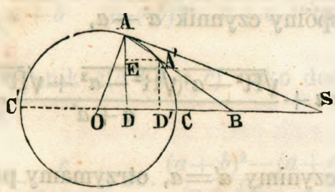
Widzimy teraz że spólnym czynnikiem licznika i mianownika jest $\sqrt[6]{(x-1)^2}$ czyli $\sqrt[3]{x-1}$, odejmując go mamy

$$\frac{\sqrt[6]{(x-1)(x+1)^3}+\sqrt[6]{(x^3+x^2+x+1)^2}}{\sqrt[6]{x+2}}.$$

Więc, podstawiając $x=1$, znajdujemy prawdziwą wartość ułamka, która jest

$$\frac{\sqrt[6]{4^2}}{\sqrt[6]{3}}=\sqrt[6]{\frac{16}{3}}.$$

99. Zagadnienie V. *Przez punkta* A, A′ *okręgu koła* O, *poprowadzono sieczną* AA′ *która przecina w punkcie* B *przedłużoną średnicę* CC′. *Znając promień koła* OA$=$R, *odcięte* OD$=a$ *i* OD′$=a'$ *punktów* A *i* A′, *wyrachować odległość* OB, *i znaleźć jej wartość gdy punkt* A′ *schodzi się z punktem sąsiednim stałym* A.



Oznaczmy przez x niewiadomą odległość OB, i poprowadźmy prostę A′E równoległą do średnicy CC′.

Trójkąty podobne ABD, AA′E dają

$$\frac{\text{DB}}{\text{AD}}=\frac{\text{EA}'}{\text{AE}},$$

albo

$$\frac{x-a}{\sqrt{\text{R}^2-a^2}}=\frac{a'-a}{\sqrt{\text{R}^2-a^2}-\sqrt{\text{R}^2-a'^2}};$$

zkąd

1) $$x=a+\frac{(a'-a)\sqrt{\text{R}^2-a^2}}{\sqrt{\text{R}^2-a^2}-\sqrt{\text{R}^2-a'^2}}.$$

Owoż, im bardziej punkt A' zbliża się do punktu stałego A, tem mniej odcięta a' różni się od odciętej a; tak że różnica $a'-a$ staje się zerem gdy punkt A' pada w A. Ale wtedy wartość x przedstawia się w kształcie niewyznaczonym

$$x=a+\frac{0}{0}.$$

Jednakże ta wartość niewiadomej x jest wyznaczona; bo, kiedy punkt A' schodzi się z punktem A, sieczna AA' staje się styczną koła w punkcie A. Aby usunąć to pozorne niewyznaczenie, pomnóżmy oba wyrazy ułamka (1) przez summę $\sqrt{R^2-a^2}+\sqrt{R^2-a'^2}$, będziemy mieli

$$x=a+\frac{(a'-a)\sqrt{R^2-a^2}(\sqrt{R^2-a^2}+\sqrt{R^2-a'^2})}{a'^2-a^2},$$

albo, znosząc spólny czynnik $a'-a$,

$$x=a+\frac{\sqrt{R^2-a^2}(\sqrt{R^2-a^2}+\sqrt{R^2-a'^2})}{a+a'}.$$

Jeśli teraz uczynimy $a'=a$, otrzymamy prawdziwą wartość

$$x=a+\frac{R^2-a^2}{a}=\frac{R^2}{a},$$

Można łatwo sprawdzić ten wynik. Jakoż, styczna AS w punkcie A koła jest prostopadła do promienia OA; zatem trójkąt prostokątny AOS daje

$$OS=\frac{\overline{OA}^2}{OD};$$

co jest właśnie znalezioną wartością niewiadomej x.

100. Zagadnienie VI. — *Pod jakiemi warunkami mogą być*

równe trzy wyrażenia algebryczne

$$ab.\frac{(a+b)^2-c^2}{(a+b)^2},\quad ac.\frac{(a+c)^2-b^2}{(a+c)^2},\quad bc.\frac{(b+c)^2-a^2}{(b+c)^2},$$

w *których ilości a, b, c, są dodatne.*

Szukając najpierwej warunku równości dwóch pierwszych wyrażeń, piszemy że ich różnica jest zero

$$ab.\frac{(a+b)^2-c^2}{(a+b)^2}-ac.\frac{(a+c)^2-b^2}{(a+c)^2}=0.$$

Ta różnica może wziąć kształt

$$ab\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{(a+b)^2}-ac\frac{(a+c+b)(a+c-b)}{(a+c)^2}$$

$$=a(a+b+c)\left(\frac{b}{a+b}-\frac{bc}{(a+b)^2}-\frac{c}{a+c}+\frac{bc}{(a+c)^2}\right)=0;$$

zkąd, odrzucając czynnik $a(a+b+c)$ jako dodatny różny od zera, otrzymujemy

$$\frac{b}{a+b}-\frac{c}{a+c}+bc.\frac{(a+b)^2-(a+c)^2}{(a+b)^2(a+c)^2}$$

$$=\frac{a(b-c)}{(a+b)(a+c)}+\frac{bc(2a+b+c)(b-c)}{(a+b)^2(a+c)^2}=0;$$

nakoniec, odrzucając dzielnik $(a+b)(a+c)$ jako różny od zera, będzie

$$(b-c)\left[a+\frac{bc(2a+b+c)}{(a+b)(a+c)}\right]=0.$$

Owóż, czynnik w klamrach nie może stać się zerem; więc, żeby dwa uważane wyrażenia były równe, powinno być

$$b-c=0,\quad \text{albo}\quad b=c.$$

Ztąd wnosimy że warunki równości trzech zadanych wyrażeń algebrycznych są

$$a=b=c \text{ (*)}$$

101. Zagadnienie VII.—*Znaleźć prawdziwą wartość wyrażenia*

$$\sqrt{m^2x^2+2px+q}-mx,$$

które, na $x=\infty$, *bierze kształt* $\infty-\infty$.

Możemy przemieścić trudność, zamieniając ten kształt symboliczny na inny.

Jakoż, jeśli pomnożymy i podzielimy dane wyrażenie przez jego sprzężone $\sqrt{m^2x^2+2px+q}+mx$, otrzymamy iloraz

$$\frac{m^2x^2+2px+q-m^2x^2}{\sqrt{m^2x^2+2px+q}+mx}=\frac{2px+q}{\sqrt{m^2x^2+2px+q}+mx},$$

który, na $x=\infty$, przedstawia się w kształcie $\frac{\infty}{\infty}$. Teraz, żeby znieść pozorne niewyznaczenie, dzielimy najpierwej licznik i mianownik przez x, co daje

$$\frac{2p+\frac{q}{x}}{\sqrt{m^2+\frac{2p}{x}+\frac{q}{x^2}}+m};$$

poczem, podstawiając $x=\infty$, znajdujemy prawdziwą wartość $\frac{p}{m}$.

(*) Pierwiastki kwadratowe trzech zadanych wyrażeń przedstawiają dwójsieczne kątów trójkąta mającego boki a, b, c. Więc tylko w trójkącie równobocznym trzy dwójsieczne są równe.

102. Twierdzenie. *Dowieśdź że*

$$(x^3+1)^{\frac{1}{3}}-x,$$

dąży do zera gdy x rośnie aż do ∞.

Dane wyrażenie, dla $x=\infty$, staje się $\infty-\infty$; przekształcamy je na wieloczyn, i mamy

$$x\left\{\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}}-1\right\}.$$

Podstawienie $x=\infty$ daje jeszcze kształt łudzący $\infty\times 0$; ale, jeśli położymy

$$1+\frac{1}{x^3}=z^3,\quad \text{zkąd}\quad x=\frac{1}{\sqrt[3]{z^3-1}},$$

wieloczyn zamieni się na iloraz

$$\frac{z-1}{\sqrt[3]{z^3-1}}=\sqrt[3]{\frac{(z-1)^3}{z^3-1}}=\sqrt[3]{\frac{(z-1)^2}{z^2+z+1}}.$$

Czyniąc teraz w ostatnim wyniku $z=1$, co odpowieda podstawieniu $x=\infty$, znajdujemy zero jako granicę wartośc zadanego wyrażenia.

ĆWICZENIA

Sprawdzić następujące równości :

I. $$\frac{1}{a+\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{1}{a-\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{2a}{x^2},$$

II. $$\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}}-\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{a+\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{4a\sqrt{a^2-b^2}}{b^2},$$

III. $$\frac{x}{\sqrt{a+x}}-\frac{2x^2}{\sqrt{(a+x)^3}}+\frac{x^3}{\sqrt{(a+x)^5}}=\frac{a^2x}{\sqrt{(a+x)^5}},$$

IV. $$\frac{x}{a}\cdot\frac{\sqrt{x^4-a^4}}{x^2-a^2}\sqrt{\frac{1-\frac{a^2}{x^2}}{1+\frac{x^2}{a^2}}}=1.$$

V. $$\sqrt{7\pm\sqrt{33}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{11}\pm\sqrt{3}).$$

Znaki wyższe razem i niższe razem.

VI. $$\sqrt{2x^2+6\pm8\sqrt{x^2-1}}=\sqrt{2}\,(\sqrt{x^2-1}\pm2).$$

VII. $$\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}+\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=2x^2.$$

VIII. $$\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}=\sqrt{a+\sqrt{b}}.$$

IX. $$\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}+\sqrt{\frac{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}},$$

X. $$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}-\sqrt{\frac{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}.$$

XI. Sprawdzić że wyrażenie

$$x^3+3x+2,$$

staje się razem przez podstawienie wartości

$$x=(\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{3}}-(\sqrt{2}-1)^{-\frac{1}{3}}.$$

XII. Sprawdzić że ogólnie równaniu 3° stopnia

$$x^3+px+q=0,$$

staje się zadość przez wartość

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

XIII. Czem się staje wyrażenie

$$\frac{1-ax}{1+ax}\sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}},$$

przez podstawienie

$$x=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2a}{b}-1}\,?$$

Odpowiedź : $+1$ albo -1.

XIV. Czem się stają wyrażenia

$$2(uv-\sqrt{u^2-1}\sqrt{v^2-1}) \quad \text{i} \quad 2(uv+\sqrt{u^2-1}\sqrt{v^2-1}),$$

przez podstawienia

$$2u=x+\frac{1}{x}, \qquad 2v=y+\frac{1}{y}\,?$$

Odpowiedź : pierwsze staje się $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$, drugie $xy+\frac{1}{xy}$.

XV. Podzielić

$$a\sqrt[4]{a}-b\sqrt[4]{b} \quad \text{przez} \quad \sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}.$$

Dość jest zamienić wskazy na wykładniki, wykonać dzielenie i powrócić do pierwiastników; co daje łatwo iloraz

$$a+\sqrt[4]{a^3b}+\sqrt[4]{a^2b^2}+\sqrt[4]{ab^3}+b.$$

XVI. Podzielić

$$a^3\sqrt[5]{a^3}+b^3\sqrt[5]{b^3} \quad \text{przez} \quad a\sqrt[5]{a}+b\sqrt[5]{b}.$$

Iloraz jest

$$a^2\sqrt[5]{a^2}-ab\sqrt[5]{ab}+b^2\sqrt[5]{b^2}.$$

XVII. Podzielić

$$a^2\sqrt[3]{a}+2a^2\sqrt{b}+ab\sqrt[3]{a^2}-ab\sqrt[3]{a}-2ab\sqrt[6]{a^2b^3}-ab^2,$$

przez

$$a+3\sqrt[6]{a^4b^3}+3b\sqrt[3]{a}+b.$$

Iloraz jest

$$a(\sqrt[3]{a}-\sqrt{b}).$$

XVIII. Uprościć

$$\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}-\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}},$$

Odpowiedź : $4x\sqrt{x^2-1}.$

XIX. Uprościć wyrażenie

$$\sqrt{a^2+\sqrt[3]{a^4b^2}}+\sqrt{b^2+\sqrt[3]{a^2b^4}}.$$

Odpowiedź : $\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{2}{3}}.$

XX. Uprościć

$$\frac{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2y^2}-2\sqrt[3]{x^3y}}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{xy^3}-\sqrt[3]{x^3y}-\sqrt[3]{y^4}}.$$

Odpowiedź : $\dfrac{x-\sqrt[3]{x^2y}}{x+y}.$

XXI. Uprościć wyrażenie

$$(\sqrt{3}+1)\sqrt[3]{9-5\sqrt{3}}-(\sqrt{3}-1)\sqrt[3]{9+5\sqrt{3}}.$$

Odpowiedź : 0.

XXII. Uprościć wyrażenie

$$\frac{\sqrt[12]{a^{10}b^{9}}-\sqrt[10]{a^{7}}\sqrt[6]{b^{5}}-\frac{3}{2}a\sqrt[4]{b^{3}}+\frac{3}{2}ab\sqrt[30]{a^{-4}b^{-5}}}{\sqrt{ab}-\frac{3}{2}\sqrt[6]{a^{4}b^{3}}}.$$

Odpowiedź : $\sqrt[3]{a^3}\sqrt[4]{b}-\sqrt[3]{b}.$

XXIII. Przekształcić ułamek

$$\frac{13}{\sqrt[3]{36}+2\sqrt[3]{2}},$$

na równowarty mający mianownik stosukowy

Odpowiedź : $\frac{1}{2}(3\sqrt[3]{6}-2\sqrt[3]{9}+2\sqrt[3]{4}).$

XXIV Znaleźć na $x=-1$. prawdziwą wartość wyrażenia

$$\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x^2-1}}{\sqrt[3]{x^3+1}}.$$

Dość jest, zamieniając wskazy na wykładniki, uwydatnić $x+1$; podzielić licznik i mianownik przez ich spólny czynnik i potem uczynić $x=-1$; co da prawdziwą wartość $-\sqrt[3]{\frac{2}{3}}.$

XXV. Znaleźć na $x=1$, prawdziwą wartość wyrażenia

$$\frac{\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt[3]{(2x^3-x-1)^2}}{\sqrt[4]{x^5-2x^4+x^3+x^2-2x+1}}.$$

Odpowiedź : $\sqrt[4]{\frac{9}{2}}.$

XXVI. Znaleźć, na $x=1$, prawdziwą wąrtość ułamka

$$\frac{\sqrt{x^2-2x+2}-\sqrt{x^2-3x+3}}{\sqrt{x^2-4x+4}-\sqrt{x^2-5x+5}}.$$

Dość pomnożyć i podzielić licznik przez summę jego pierwiastników, pomnożyć i podzielić także mianownik przez summę pierwiastników które go składają; potem znieść spólny czynnik który będzie $x-1$, i na koniec uczynić $x=1$; co da prawdziwą wartość 1.

XXVII. Znaleźć prawdziwą wartość wieloczynu

$$\sqrt[6]{(x-a)^2}\sqrt[3]{\frac{a^2x^2}{x^2-a^2}},$$

który się przedstawia, na $x=a$, w kształcie symbolicznym $0\times\infty$.

Odpowiedź : $\dfrac{a}{\sqrt[3]{2}}$.

XXVIII. Znaleźć, na $x=\infty$, prawdziwą wartość wyrażenia

$$x-\frac{x}{1+\frac{1}{x}}.$$

Odpowiedź : 1

XXIX. Jakie są warunki żeby wartość ułamka

$$\frac{Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F}{A'x^2+B'xy+C'y^2+D'x+E'y+F'},$$

była niezależna od x i y?

Odpowiedź : trzeba żeby było

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}=\frac{D}{D'}=\frac{E}{E'}=\frac{F}{F'}.$$

ROZDZIAŁ III

RÓWNANIA PIERWSZEGO STOPNIA

OGÓLNE ZASADY RÓWNAŃ

103. Wiemy już (n° 9) że *równaniem* nazywa się równość do której wchodzi jedna litera albo kilka liter wyrażających ilości niewiadome. I tak, równości

$$3x-8=10,\quad \frac{2x+3}{x+2}=\frac{x}{5},\quad ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0,$$

są równaniami; pierwsze i drugie równanie o jednej niewiadomej x, trzecie o dwóch niewiadomych x i y.

Równość sama przez się oczywista nazywa się *tosamością*, jako

$$3+5=8,\quad a+b=b+a.$$

Ogólnie jest tosamością równość między ilościami algebrycznemi, która istnieje jakiekolwiek wartości są nadane literom. I tak, równości

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2,\qquad x^6+y^6=(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4),$$

są tosamościami; bo istnieją niezależnie od wartości nadawanych literom.

W każdej proporcyi

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$

wieloczyn wyrazów skrajnych jest równy wieloczynowi średnich. Wyraża się tę własność pisząc równość

$$ad = bc,$$

w której litery a, b, c, d, mogą mieć rozmaite wartości, byle tylko stosunki $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ zostawały równe. Ale, jeśli czwarty wyraz d proporcyi jest niewiadomy, oznaczając go literą wydatną x, znajduje się jego wartość za pomocą *równania*

$$ax = bc,$$

które daje

$$x = \frac{bc}{a}.$$

Wartość niewiadomej x jest *wyznaczona* przez ilości wiadome a, b, c. Jeśli tę wartość położymy zamiast x w ostatniem równaniu, będzie *tosamość*

$$a.\frac{bc}{a} = bc.$$

104. Pierwiastki równania. — Wartości *czyniące zadość* równaniu, to jest wszystkie te które podstawione za jego niewiadome czynią *tosamie* równemi obie strony, nazywają się *pierwiastkami* tego równania.

Rozwiązać równanie jestto znaleźć wszystkie jego pierwiastki, które dlatego mianowano *rozwiązaniami* równania.

Równania równowarte. — Mówi się że dwa równania są *równowarte*, gdy mają te same pierwiastki.

Przekształcenia równań na inne równowarte opierają się na dwóch następujących zasadach.

105. Pierwsza zasada. — *Można przenieść jakikolwiek wyraz z jednej strony równania na drugą, zmieniając tylko znak tego wyrazu.*

Niech będzie naprzykład równanie

$$(1) \qquad ax + b = c - dx.$$

Mówić że dwa wyrażenia $ax + b$ i $c - dx$ są równe (nº 9), jest to samo co powiedzieć że między niemi nie ma żadnej różnicy, albo, używając języka algebrycznego, że różnica tych dwóch wyrażeń jest równa zeru. Mamy więc

$$(ax + b) - (c - dx) = 0,$$

albo, wykonywając odciąganie,

$$(2) \qquad ax + b - c + dx = 0.$$

Owoż, ostatnie równanie może wziąć kształt różnicy

$$(ax + dx) - (c - b) = 0;$$

a ponieważ różnica dwóch wyrażeń w nawiasach jest równa zeru, te dwa wyrażenia są równe; otrzymujemy więc równanie

$$(3) \qquad ax + dx = c - b,$$

które pokazuje że wyraz $+b$ równania (1) przeszedł z pierwszej strony na drugą, zmieniając tylko swój znak $+$ na $-$; i tak samo wyraz $-dx$ przeszedł z drugiej strony na pierwszą zmieniając tylko swój znak $-$ na $+$. Co dowodzi wysłowionej zasady (*).

106. Wniosek I. — *Każde równanie może się przywieść do zera.* Można albowiem, na mocy dowiedzionej zasady, przenieść wszystkie wyrazy z drugiej strony równania na pierwszą; zostaje więc zero na drugiej stronie.

(*) Zobacz notę na końcu tomu.

I tak, równanie

$$ax^2 = -bx - c,$$

jest to samo co

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Z resztą, wyżej użyte rozumowanie, które dało równanie (2), wprost tego dowodzi.

107. Wniosek II. — *Można przemienić znaki wszystkich wyrazów równania.* Bo to wychodzi na jedno co przenieść wszystkie wyrazy pierwszej strony na drugą, i wszystkie wyrazy drugiej strony na pierwszą; a potem wziąć drugą stronę za pierwszą i nawzajem.

I tak, równanie

$$4x - 7x = 3 - 18,$$

jest równowarte równaniu

$$7x - 4x = 18 - 3.$$

108. Druga zasada. — *Można pomnożyć obie strony równania przez jedną ilość, byle tylko ta ilość nie stawała się ani zerem ani nieskończenie wielką.*

Przedstawmy ogólnie przez A i B dwie strony jakiegokolwiek równania, przez m ilość której wartość nie staje się ani 0 ani ∞. Trzeba dowieśdź że, wyjąwszy te dwie wartości dla m które nie są liczbami, we wszystkich innych dwa równania

$$(1) \qquad \mathrm{A} = \mathrm{B},$$

$$(2) \qquad m\mathrm{A} = m\mathrm{B},$$

są równowarte; albo co wychodzi na jedno, że równania

$$\mathrm{A} - \mathrm{B} = 0,$$

i

$$m(\mathrm{A} - \mathrm{B}) = 0,$$

mają te same rozwiązania.

Uważajmy najpierwej że wszystkie wartości które, podstawione za niewiadome, sprawdzają równanie $A-B=0$, czynią zerem czynnik $A-B$ wieloczynu $m(A-B)$; więc czynią zerem ten wieloczyn, i temsamem sprawdzają równanie

$$m(A-B)=0,$$

jeśli nie nadają czynnikowi m wartości ∞ (nº 78).

Owoż, wieloczyn $m(A-B)$ nie może być zerem, tylko wtedy kiedy jeden przynajmniej z jego dwóch czynników staje się zerem; więc, jeśli wartości, które sprawdzają równanie $m(A-B)=0$, nie czynią zerem pierwszego czynnika m, to muszą czynić zerem drugi czynnik $A-B$, to jest sprawdzać równanie

$$A-B=0.$$

Wynika z tego wszystkiego że wolno mnożyć obie strony równania przez ilość m jeśli jest *stateczna;* a ogólnie przez wszelką ilość m, byle tylko nie nabywała wartości 0 ani ∞. Z tem podwójnem zastrzeżeniem, równania

$$A=B,$$

i

$$mA=mB,$$

są równowarte, to jest mają te same rozwiązania i mogą się zastępować jedno przez drugie.

109. Uwaga. — Jeśli ilość m, przez którą się mnoży równanie, może stać się 0 albo ∞, dwa równania

$$(1) \qquad A-B=0,$$

$$(2) \qquad m(A-B)=0,$$

mogą nie być równowarte.

Jakoż,

1°. Gdy czynnik m może stać się *zerem*, wtedy równanie

$$m(A-B)=0,$$

może zawierać nietylko pierwiastki równania

$$A-B=0,$$

ale jeszcze pierwiastki równania

$$m=0;$$

te zaś ostatnie mogą nie czynić zerem wyrażenia $A-B$, to jest nie sprawdzać równania pierwotnego.

W tym przypadku mówi się że równanie (2) jest ogólniejsze od równania (1), i pierwiastki równania $m=0$ nazywają się *rozwiązaniami obcemi*, które zostały wprowadzone do równania wynikowego mnożeniem przez m.

2°. Gdy mnożnik m może stać się *ilością nieskończenie wielką*, wtedy, jeśli pierwiastek równania zadanego

$$A-B=0,$$

czyni zerem jeden czynnik $A-B$ i nieskończenie wielkim drugi czynnik m wieloczynu $m(A-B)$, to może nie czynić zerem tego wieloczynu, to jest może nie sprawdzać równania wynikowego

$$m(A-B)=0.$$

W tym przypadku równanie wynikowe nie ma wszystkich rozwiązań równania pierwotnego, i nie może go zastępować bez straty rozwiązań.

Przykład I, Niech będzie równanie

$$2x-4=3x-6.$$

Jeśli pomnożymy obie strony przez $x-1$, otrzymamy nowe równanie

$$(2x-4)(x-1)=(3x-6)(x-1),$$

które będzie miało rozwiązanie obce. Jakoż, wartość $x=2$, która zadość czyni pierwszemu równaniu, sprawdza drugie, bo przywodzi do zera obie jego strony. Ale drugiemu równaniu staje się zadość przez $x=1$, a ta wartość nie sprawdza pierwszego. Więc mnożenie przez $x-1$ wprowadziło rozwiązanie obce.

Przykład II. Weźmy teraz równanie

$$x^2+12=7x,$$

któremu zadość czynią wartości $x=3$ i $x=4$. Jeśli podzielimy obie strony przez $x-3$, albo, co to samo, jeśli pomnożymy obie strony przez $m=\frac{1}{x-3}$, będzie

$$\frac{x^2+12}{x-3}=\frac{7x}{x-3},$$

albo

$$\frac{x^2-7x+12}{x-3}=0.$$

W ostatniem równaniu, ponieważ trójmian $x^2-7x+12$ staje się zerem dla $x=3$ i $x=4$, to on jest równy wieloczynowi $(x-3)(x-4)$ (n° 55); co daje

$$\frac{(x-3)(x-4)}{x-3}=0.$$

Ztąd, znosząc spólny czynnik $x-3$, otrzymujemy równanie wynikowe

$$x-4=0.$$

które nie jest równowarte pierwotnemu. Albowiem równanie zadane ma pierwiastki 3 i 4, gdy tymczasem równanie wynikowe ma oczywiście tylko jeden pierwiastek 4. Więc dzieląc przez $x-3$, czyli mnożąc przez $\frac{1}{x-3}$, stracono rozwiązanie $x=3$.

Nakoniec, gdyby podzielono przez x obie strony równania

$$ax=bx,$$

straconoby jedyne rozwiązanie

$$x=0;$$

a gdyby pomnożono przez x obie strony równania

$$\frac{1}{x}=0,$$

straconoby także jedyne rozwiązania $x=+\infty$ i $x=-\infty$.

Te i poprzedzające przykłady jasno pokazują jakim sposobem wprowadzają się rozwiązania obce, i jak się tracą rozwiązania prawdziwe. Ale nie trzeba mniemać żeby każde mnożenie, przez ilość która może stać się 0, wprowadzało koniecznie rozwiązania obce; ani żeby każde dzielenie przez taką ilość, to jest mnożenie przez czynnik który może stać się ∞, musiało wytrącać rozwiązanie prawdziwe.

Jakoż, niech będzie równanie

$$(1) \qquad \frac{x}{2-x}=1.$$

To wyrażenie pokazuje że dzielna x powinna być równa dzielnikowi $2-x$, ponieważ iloraz jest jednością; więc ono znaczy to samo co równanie

$$(2) \qquad x=2-x, \quad \text{albo} \quad 2x=2,$$

a ostatnie ma oczywiste rozwiązanie $x=1$, i tylko to jedno.

Owóż, jeśli pomnożymy przez $2-x$ obie strony równania (1), otrzymamy równanie (2); więc mnożąc przez ilość $2-x$, która staje się 0 na $x=2$, nie wprowadziliśmy rozwiązania obcego.

Jeśli zaś podzielimy przez x obie strony równania (1), otrzymamy innego kształtu równanie

$$\frac{1}{2-x}=\frac{1}{x},$$

które oczywiście wychodzi na jedno co równanie (2); więc dzieląc przez ilość x, która może stać się zerem, nie straciliśmy prawdziwego rozwiązania.

W następujących paragrafach pokażemy jak rozpoznać czy równanie przekształcone jest równowarte pierwotnemu.

110. Zniesienie mianowników. — Za pomocą drugiej zasady, można przekształcić równanie z wyrazami ułamkowemi na inne którego wszystkie wyrazy są całkowite. Sposób którym się otrzymuje to przekształcenie nazywa się *zniesieniem* (albo wypędzeniem) *mianowników*.

Niech będzie najpierwej równanie w którem mianowniki ułamków nie zawierają ilości niewiadomych, jako następujące

$$3x+\frac{5x}{4}-\frac{7}{6}=\frac{x}{2}+9-\frac{24}{9}.$$

Aby się pozbyć mianowników, dość jest sprowadzić wszystkie wyrazy do jednakowego mianownika i znieść ten mianownik; to wychodzi na jedno co pomnożyć obie strony równania przez wielownik wszystkich mianowników. Ale, chcąc mieć odrazu równanie najprostsze możebne, i wykonać najmniej rachunków, trzeba się najpierwej zapewnić czy wszystkie ułamki są niezredukowne; a dopiero potem wziąć najmniejszy wielownik mianowników, podzielić go przez mianownik każdego ułamka i przez iloraz pomnożyć odpowiedający licznik, a przez cały wielownik pomnożyć każdy wyraz całkowity. Działając tym sposobem, spostrzegamy że ułamek $\frac{24}{9}$ przywodzi się do $\frac{8}{3}$; poczem widzimy że najmniejszym wielownikiem mianowników jest liczba 12. Mnożymy więc $3x$ przez 12, $5x$ przez 3, -7 przez 2, x przez 6, 9 przez 12, -8 przez 4; i otrzymujemy natychmiast równanie

$$36x+15x-14=6x+108-32,$$

które ma wszystkie wyrazy całkowite i jest równowarte zadanemu równaniu.

111. Weźmy na drugi przykład równanie literalne

$$\frac{x}{a+b}+\frac{x-a}{a^2-b^2}+\frac{b}{b-a}=\frac{a}{b}-\frac{b}{a}+cx.$$

Najmniejszym wielownikiem mianowników jest $ab(a^2-b^2)$; więc, działając jako wyżej powiedziano, odejmujemy mianowniki ułamków, mnożąc tylko ich liczniki przez odpowiedające ilorazy $ab(a-b)$, ab, $-ab(a+b)$, $a(a^2-b^2)$, $b(a^2-b^2)$, a mnożymy wyraz całkowity cx przez cały wielownik $ab(a^2-b^2)$. Tym sposobem dane równanie z ułamkami przekształca się na równowarte całkowite

$$ab(a-b)x+ab(x-a)-ab^2(a+b)$$

$$=a^2(a^2-b^2)-b^2(a^2-b^2)+abc(a^2-b^2)x.$$

112. Gdy w równaniu znajdują się wyrazy ułamkowe, których mianowniki, zawierające ilości niewiadome, mogą stać się 0 albo ∞, wtedy trzeba najpierwej przywieść to równanie do zera, sprowadzić wszystkie wyrazy do najmniejszego mianownika i dodać. Otrzyma się tym sposobem równanie, nie-

wątpliwie równowarte pierwotnemu, w kształcie ułamka równego zeru, i kwestya przywiedzie się do już wiadomej (nº 79). To mając, nietrudno wiedzieć za pomocą uwagi nº 109, czy, po zniesieniu mianownika, równanie wynikowe całkowite zostanie równowarte. Jakoż, jeśli otrzymany ułamek jest *niezredukowny*, jego licznik zrównany do zera da równanie bez rozwiązań obcych. A jeśli, do tego jeszcze, wartości które czynią mianownik nieskończenie wielkim, nie czynią ułamka zerem, to one nie sprawdzają równania pierwotnego; nie będzie więc rozwiązań straconych po odrzuceniu mianownika. Pod temi dwoma warunkami równanie wynikowe całkowite jest równowarte pierwotnemu.

Następujące przykłady najlepiej to wszystko w szczególności wyjaśnią.

Przykład I, Niech będzie równanie

$$\frac{1}{x}+\frac{3}{x(x-2)}=\frac{6}{x^2-4}.$$

Przenosimy wszystkie wyrazy na pierwszą stronę i sprowadzamy je do najmniejszego mianownika, którym jest $x(x^2-4)$; poczem dodając, otrzymujemy

$$\frac{x^2-4+3(x+2)-6x}{x(x^2-4)}=0,$$

albo

$$\frac{x^2-3x+2}{x(x^2-4)}=0.$$

Owoż, z trzech wartości $x=0$, $x=2$, $x=-2$, które czynią mianownik zerem, sama jedna wartość $x=2$ przywodzi licznik do zera; dzielimy więc licznik i mianownik przez $x-2$, i otrzymujemy ułamek niezredukowany

$$\frac{x-1}{x(x+2)}=0.$$

Temu równaniu, które jest równowarte pierwotnemu, staje się zadość przez wartości $x=2$, $x=+\infty$ i $x=-\infty$; więc, biorąc równanie wynikowe całkowite

$$x-1=0,$$

zamiast pierwotnego z wyrazami ułamkowemi, nie wprowadzonoby rozwiązania obcego, ale straconoby rozwiązania $x=+\infty$ i $x=-\infty$ które zadość czynią równaniu pierwotnemu.

Przykład II. Niech będzie, na drugi przykład, następujące równanie

$$1+\frac{2}{x+1}=\frac{x}{x-1}.$$

Przenosząc wszystkie wyrazy na pierwszą stronę, sprowadzając je do najmniejszego mianownika, którym jest wieloczyn $(x+1)(x-1)$, i dodając, otrzymujemy

$$\frac{x^2-1+2(x-1)-x(x+1)}{x^2-1}=0,$$

albo

$$\frac{x-3}{x^2-1}=0.$$

równanie z pewnością równowarte zadanemu.

Ponieważ ułamek jest niezredukowny, gdyby, znosząc mianownik, wzięto równanie wynikowe całkowite

$$x-3=0$$

zamiast pierwotnego, nie wprowadzonoby rozwiązań obcych, to oczywiste; ale, bez wątpienia, straconoby rozwiązania $x=+\infty$ i $x=-\infty$ które, czyniąc zadość powyższemu równaniu, mogłyby dopełniać warunków zagadnienia wyrażonego równaniem pierwotnem.

Przykład III. Weźmy równanie literalne

$$\frac{x}{x+a}+\frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}=\frac{x}{x-a}.$$

Sprowadzając do najmniejszego mianownika wszystkie wyrazy przeniesione na pierwszą stronę, i dodając, otrzymujemy, w kształcie ułamka, równanie

$$\frac{x(x-a)+x^2+a^2-x(x+a)}{x^2-a^2}=0,$$

albo

$$\frac{(x-a)^2}{x^2-a^2}=0.$$

Owoż z dwóch wartości $x=a$ i $x=-a$, które czynią mianownik zerem, sama tylko wartość $x=a$ przywodzi licznik do zera; dzielimy więc licznik i mianownik przez $x-a$, i mamy ułamek niezredukowny

$$\frac{x-a}{x+a}=0.$$

Uważamy teraz że ostatnie równanie, zawsze równowarte pierwotnemu, nie przyjmuje rozwiązania $x=-a$ które czyni zerem mianownik; ani rozwiązań $x=\pm\infty$, bo licznik nie jest stopnia mniejszego niż mianownik. Ztąd wnosimy że można znieść mianownik, i wziąć równanie całkowite

$$x-a=0,$$

jako niewątpliwie równowarte zadanemu, i które daje oczywiste rozwiązanie $x=a$. Tym sposobem jesteśmy pewni że wartość $x=a$ sprawdza równanie zadane, chociaż mu daje kształt symboliczny $\infty=\infty$.

Uwaga 1°. Rozwiązania obce, pochodzące ze znoszenia mianowników zmiennych, są wartościami które przywodzą te mianowniki do 0 albo do ∞; ale rzeczone wartości mogą być także rozwiązaniami prawdziwemi, co właśnie ostatni przykład dobrze uwydatnia. Jakoż, wartość $x=a$, czyniąca zerem mianowniki x^2-a^2 i $x-a$, nietylko nie jest rozwiązaniem obcem, ale owszem stanowi jedyne rozwiązanie równania.

2°. Chcąc wiedzieć czy równanie, z wyrazami ułamkowemi których mianowniki zawierają ilości niewiadome, da się przekształcić na całkowite równowarte, najlepiej jest zamienić je na ułamek niezredukowny równy zeru, i dopiero z tego ułamka sądzić o możebności przekształcenia. Owoż, sprowadzając wszystkie wyrazy do najmniejszego mianownika, można, chociaż nie zawsze, otrzymać odrazu ułamek niezredukowny, jako pokazują powyższe przykłady; gdy tymczasem, sprowadzając do mianownika nie najmniejszego możebnego, otrzymuje się oczywiście zawsze ułamek zredukowny, który potem uprościć trzeba aby się pozbyć rozwiązań obcych; co zwykle rachunek utrudza.

Przykład IV. Niech będzie nakoniec równanie

$$x+\frac{3}{x-2}+\frac{13}{x+3}+\frac{28x-8}{(x+3)(x^2-4)}=\frac{27}{(x-2)(x+3)}+6.$$

Sprowadzamy wszystkie wyrazy do najmniejszego mianownika, którym jest $(x+3)(x^2-4)$, i przenosimy je na pierwszą stronę; poczem, dodając i redukując, otrzymujemy równanie równowarte

$$\frac{x^4-3x^3-6x^2+28x-24}{(x+3)(x^2-4)}=0.$$

Żeby wiedzieć czy to równanie ułamkowe może być zastąpione przez równanie całkowite, trzeba się zapewnić czy znaleziony ułamek jest niezrdukowny. Owoż, uproszcza się ułamek dzieląc oba jego wyrazy przez czynniki spólne, a temi czynnikami w naszym przykładzie mogą tylko być $x+3$, $x-2$, i $x+2$; probujemy więc pierwszego czynnika $x+3$ dzieląc przez niego licznik, i znajdujemy iloraz dokładny

$$x^3-6x^2+12x-8.$$

Zatem, odejmując czynnik $x+3$, mamy ułamek prostszy i równanie równowarte

$$\frac{x^3-6x^2+12x-8}{x^2-4}=0.$$

Tak samo probujemy drugiego czynnika $x-2$, dzieląc przez niego ostatni licznik; znajdujemy jeszcze iloraz dokładny, i mamy nowy ułamek który daje równanie, zawsze równowarte,

$$\frac{x^2-4x+4}{x+2}=0,\quad \text{albo}\quad \frac{(x-2)^2}{x+2}=0.$$

Ostatni ułamek jest oczywiście niezredukowny; a ponieważ jego licznik jest stopnia wyższego niż mianownik, ztąd wnosimy że, równając licznik do zera, otrzymane równanie całkowite

$$(x-2)^2=0,$$

nie ma rozwiązań obcych ani rozwiązań straconych. Działając takim sposobem, wiemy z pewnością że wartość $x=2$, która sprawdza ostatnie równanie, jest rozwiązaniem pierwotnego; chociaż mu daje kształt symboliczny, czyniąc nieskończenie wielkiemi obie jego strony.

113. Podnosząc obie strony równania do tej samej potęgi, wprowadza się w ogóle rozwiązania obce.

I tak. weźmy jakiekolwiek równanie

$$(1)\qquad A=B;$$

jeśli podniesiemy obie strony do kwadratu, będzie

$$(2)\qquad A^2=B^2.$$

Widzimy łatwo że każde rozwiązanie pierwszego równania jest rozwiązaniem drugiego. Ale równanie (2), wyrażając różnicę dwóch kwadratów

$$A^2 - B^2 = 0,$$

przekształca się na wieloczyn dwóch czynników

$$(A + B)(A - B) = 0,$$

z których każdy może być zerem. Więc drugie równanie, zawierając dwa równania,

$$\text{zadane } A - B = 0 \quad \text{i obce } A + B = 0,$$

ma zarazem ich rozwiązania, i temsamem jest ogólniejsze od pierwszego.

Jako przykład, niech będzie bardzo proste równanie

$$x = 2.$$

Podnosząc obie strony do kwadratu, mamy

$$x^2 = 4.$$

Owoż, ostatnie równanie sprawdza się oczywiście przez podstawienie za x tak dobrze wartości dodatnej $+2$, jako też odjemnej -2; ale wartość odjemna nie czyni zadość równaniu pierwotnemu. Więc podnoszeniem do kwadratu wprowadzono rozwiązanie obce $x = -2$.

Niech będzie teraz ogólnie

$$A^m = B^m.$$

To równanie, mogąc wziąć kształt różnicy dwóch tych samych potęg

$$A^m - B^m = 0,$$

wyraża się przez wieloczyn dwóch czynników

$$(A - B)(A^{m-1} + BA^{m-2} + B^2A^{m-3} + \ldots + B^{m-1}) = 0,$$

z których każdy może być zerem. Więc ono ma, nietylko rozwiązania danego równania (1) które czynią zerem pierwszy czynnik, ale jeszcze rozwiązania które czynią zerem drugi czynnik; te zaś ostatnie są w ogóle rozwiązaniami obcemi.

Jeśli więc, z konieczności rachunku, podniesiono obie strony równania do tej samej potęgi, trzeba, rozwiązawszy równanie wynikowe, sprawdzić znalezione pierwiastki, odrzucając jako obce te które nie czynią zadość danemu równaniu.

Niech będzie naprzykład równanie

$$(1) \qquad 2 - \sqrt{2 - x} = x.$$

Aby się pozbyć pierwiastnika, odosobniamy go i podnosimy obie strony do kwadratu; co daje

$$2 - x = (x - 2)^2,$$

albo

$$(x - 2)(x - 1) = 0.$$

Ostatniemu równaniu staje się zadość przez $x = 1$ i przez $x = 2$. Obie wartości sprawdzają równanie (1); więc są jego rozwiązaniami. W tym przykładzie podnoszenie do kwadratu nie wprowadziło żadnego rozwiązania obcego.

Ale, gdyby wzięto równanie

$$(2) \qquad 2 + \sqrt{2 - x} = x;$$

pozbywając się pierwiastnika sposobem użytym wyżej, otrzymanoby ten sam wynik

$$(x - 2)(x - 1) = 0;$$

bo kwadrat z pierwiastnika $\sqrt{2 - x}$, poprzedzonego znakiem $+$

albo —, jest zawsze ten sam $2-x$. Teraz samo jedno tylko rozwiązanie $x=2$ sprawdza równanie (2); więc drugie rozwiązanie $x=1$ powinno być odrzucone jako obce.

Niech będzie nakoniec równanie

$$(3) \qquad x+2\sqrt{x-1}=0.$$

Odosobniając pierwiastnik i podnosząc obie strony do kwadratu, znajdujemy

$$4x-4=x^2;$$

zkąd

$$(x-2)^2=0.$$

Równanie wynikowe ma oczywiste rozwiązanie $x=+2$, ale ono nie sprawdza równania pierwotnego (3). Więc równanie (3) jest niemożebne. Co widoczne *a priori*.

114. Równania algebryczne i przestępne. Równanie może zawierać jedną niewiadomę albo kilka; są równania o jednej niewiadomej x, któreśmy dopiero co rozbierali; są inne o dwóch niewiadomych x i y, a jeszcze inne o trzech niewiadomych x, y, z; i tak dalej.

Nazwano *algebrycznemi* równania których niewiadome są połączone z ilościami wiadomemi za pomocą *sześciu* pierwszych działań: dodawania, odciągania, mnożenia, dzielenia, podnoszenia do potęg i wyciągania pierwiastków; wszystkie inne równania mianowano *przestępnemi*.

I tak,

$$A_0x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\ldots A_m=0, \quad y=\sqrt{ax},$$

$$\frac{mx^2+ny^2}{px+qy}=a,$$

są równaniami algebrycznemi; a zaś $a^x=y$, $\log y=x$, $\sin x=a$, w których niewiadoma jest wykładnikiem, albo się znajduje pod znakiem logarytmu, pod znakiem linii trygonometrycznej, są równaniami przestępnemi.

115 *Stopień równania.* Gdy równanie algebryczne jest *całkowite względem swoich niewiadomych*, nazywa się jego *stopniem* summa wykładników tych niewiadomych, wzięta w wyrazie w którym jest największa.

I tak,

$$3x - \frac{5}{6}x = \frac{1}{2}, \qquad ax + by + c = 0,$$

są rownaniami pierwszego stopnia, pierwsze o jednej niewiadomej x, drugie o dwóch niewiadomych x i y.

$$axy + bx + cy + d = 0,$$

jest równaniem drugiego stopnia o dwóch niewiadomych x, i y,

ROZWIĄZYWANIE RÓWNAŃ PIERWSZEGO STOPNIA O JEDNEJ NIEWIADOMEJ.

116. Za pomocą dopiero co wyłożonych zasad, łatwo się rozwiązuje równanie pierwszego stopnia o jednej niewiadomej; jako zaraz zobaczymy.

Przykład I. Niech będzie do rozwiązywania następujące równanie

$$(1) \qquad 4x + \frac{3x}{2} - 12 - \frac{1}{6} = 9 + \frac{1}{2} - \frac{2x}{3} + \frac{3x}{4}.$$

Ponieważ mianowniki są liczbami, możemy je znieść mnożąc równanie przez ich wielownik jakikolwiek, a najlepiej przez najmniejszy wielownik. Widząc, na samo spojrzenie, że najmniejszym wielownikiem wszystkich mianowników jest 12, mnożymy każdy wyraz całkowity przez 12, a licznik każdego wyrazu ułamkowego przez iloraz z podzielenia wielownika 12 przez odpowiedający mianownik; tym sposobem otrzymujemy odrazu równanie całkowite równowarte zadanemu

$$48x+18x-144-2=108+6-8x+9x;$$

albo, redukując wyrazy podobne na każdej stronie,

$$(2) \qquad 66x-146=114+x.$$

Przenosimy potem na pierwszą stronę wszystkie wyrazy zawierające niewiadomę x, a te które jej nie zawierają na drugą, i mamy

$$66x-x=114+146,$$

albo, wykonywając uproszczenie,

$$(3) \qquad 65x=260.$$

Nakoniec, dzielimy obie strony przez spółczynnik 65 niewiadomej x, i otrzymujemy równanie, zawsze równowarte zadanemu (1),

$$(4) \qquad x=\frac{260}{65}=4.$$

Owoż, ostatnie równanie staje się tosamością, jeśli za x podstawimy 4; a oczywiście żadna inna wartość podstawiona za x nie czyni zadość temu równaniu. Więc równanie (1) rozwiązuje się przez wartość $x=4$, i nie ma innego rozwiązania.

Ale trzeba zawsze sprawdzać znalezione rozwiązanie, aby nabyć, jeśli nie pewności, to przynajmniej prawdopodobności że rachunek jest dobrze wykonany. Zastępując x przez 4 w zadanem równaniu, widzimy że obie strony stają się

$$4.4+\frac{3.4}{2}-12-\frac{1}{6}=9+\frac{1}{2}-\frac{2.4}{3}+\frac{3.4}{4},$$

albo

$$10-\frac{1}{6}=9+\frac{5}{6}.$$

Ostatnia równość jest tosamością; to dowodem że wartość $x=4$ rozwiązuje dane równanie.

Przykład II. Niech będzie teraz równanie zawilsze

$$\frac{51}{34}+6x+\frac{12x}{16}-8x+2=12x-10+\frac{5x}{6}-5x-\frac{4x}{12}-\frac{2x}{8}.$$

Przede wszystkiem trzeba uprościć każdą stronę równania, aby uniknąć długich a mozolnych rachunków, które wystawiają na błędy. Uskuteczniając na każdej stronie uproszczenia które się jednym rzutem oka spostrzega, znajdujemy

$$\frac{3}{2}-2x+\frac{3x}{4}+2=7x-10+\frac{5x}{6}-\frac{x}{3}-\frac{x}{4}.$$

Poczem, przenosimy wszystkie wyrazy zawierające x na tę stronę na której ich summa będzie dodatna, a piszemy na innej stronie wyrazy niezależne od x. W naszym przykładzie trzeba przenieść wyrazy niewiadome na drugą stronę, i wziąć ją za pierwszą; co daje

$$7x+\frac{5x}{6}-\frac{x}{3}-\frac{x}{4}-\frac{3x}{4}+2x=\frac{3}{2}+2+10.$$

albo, redukując z grubszego,

$$8x+\frac{5x}{6}-\frac{x}{3}=13+\frac{1}{2}.$$

Znosimy potem mianowniki mnożąc wszystkie wyrazy przez 6, i otrzymujemy równanie całkowite

$$48x+5x-2x=78+3,$$

albo

$$51x=81;$$

które jest równowarte pierwotnemu, dlatego że mnożnik 6 est liczbą.

Nakoniec, dzielimy obie strony przez 51 i znajdujemy rozwiązanie

$$x=\frac{81}{51}=\frac{27}{17}=1\frac{10}{17}.$$

Przykład III. Niech będzie jeszcze inne równanie

$$6x-\frac{7}{8}+\frac{3x}{4}-20=4+10x+\frac{x}{2}+\frac{1}{8}.$$

Przenosimy wyrazy niewiadome na drugą stronę a wiadome na pierwszą, i bierzemy drugą stronę za pierwszą; co daje

$$10x+\frac{x}{2}-6x-\frac{3x}{4}=-20-4-\frac{7}{8}-\frac{1}{8}.$$

albo

$$4x+\frac{x}{2}-\frac{3x}{4}=-25.$$

Znosimy mianowniki mnożąc wszystkie wyrazy przez 4, i mamy równanie całkowite równowarte

$$16x+2x-3x=-100,$$

albo

$$15x=-100,$$

zkąd

$$x=-\frac{20}{3}.$$

Rozwiązanie danego równania jest liczbą ułamkową odjemną $-\frac{20}{3}$.

Przykład IV. Niech będzie naostatek równanie literalne

$$a^2x+3a^2b+b^2x-a^3=3ab^2+2abx-b^3.$$

Przenosząc wyrazy mające x na pierwszą stronę a wszystkie inne na drugą, otrzymujemy

$$a^2x+b^2x-2abx=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3;$$

poczem, biorąc x za czynnik, i uważając że spółczynnik tej niewiadomej jest kwadratem dwumianu $a-b$, a zaś druga strona sześcianem tego dwumianu, mamy

$$(a-b)^2x=(a-b)^3.$$

Nakoniec, dzieląc obie strony przez $(a-b)^2$, znajdujemy rozwiązanie

$$x=\frac{(a-b)^3}{(a-b)^2}=a-b.$$

Sprawdzenie. Znaleziona wartość niewiadomej x dopóty nie powinna być uważana za prawdziwą, dopóki nie będzie widocznie okazane że położona zamiast x przywodzi dane równanie do tosamości. Stawiamy więc $a-b$ na miejscu x w danem równaniu, i otrzymujemy mające się sprawdzić równości:

$$a^2(a-b)+3a^2b+b^2(a-b)-a^3=3ab^2+2ab(a-b)-b^3,$$

$$a^3-a^2b+3a^2b+ab^2-b^3-a^3=3ab^2+2a^2b-2ab^2-b^3,$$

$$2a^2b+ab^2-b^3=2a^2b+ab^2-b^3.$$

Ostatnia równość jest tosamością; ztąd wnosimy, z niejaką pewnością, że wartość $a-b$ jest rozwiązaniem zadanego równania.

117. Z wszystkiego co poprzedza wyprowadzamy następujące prawidło rozwiązywania równań pierwszego stopnia, o jednej niewiadomej.

Prawidło. *Aby rozwiązać równanie pierwszego stopnia o jednej niewiadomej* x, *trzeba*, 1° *przenieść na pierwszą stronę wszystkie wyrazy zawierające* x, *a na drugą wszystkie inne, i uprościć obie strony;* 2° *znieść mianowniki jeśli są ilościami stałecznemi, i zredukować wyrazy podobne zbierając je w jeden wyraz;* 3° *podzielić przez spółczynnik niewiadomej* x *wyraz od niej niezależny; otrzymany iloraz będzie pierwiastkiem zadanego równania.*

118. Stosując to prawidło można łatwo rozwiązać następujące równania.

Przykład I. Niech będzie równanie

$$2+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=3-\frac{3x}{4}+\frac{5x}{6}.$$

Po zniesieniu mianowników mnożeniem przez 12, i po przeniesieniu wyrazów niewiadomych na pierwszą stronę a wiadomych na drugą, równanie bierze kształt całkowity

$$6x+4x+9x-10x=36-24,$$

albo

$$9x=12;$$

zkąd

$$x=\frac{12}{9}=\frac{4}{3}.$$

Więc rozwiązaniem równania jest wartość wyznaczona

$$x=\frac{4}{3}.$$

PRZYKŁAD II. Niech będzie

$$\frac{4x}{3}+\frac{1}{2}+4=\frac{x}{2}+5+\frac{1}{3}-\frac{5}{6}.$$

To równanie przekształca się, mnożeniem przez 6, na całkowite

$$8x+3+24=3x+30+2-5;$$

zkąd

$$5x=0.$$

Więc $x=0$ jest rozwiązaniem zadanego równania.

PRZYKŁAD III. Niech będzie równanie

$$3-\frac{x}{6}+\frac{2x}{3}-x=5-x+\frac{x}{2}.$$

Znosząc mianownik, i przenosząc wyrazy niewiadome na jedną stronę a wiadome na drugą, otrzymujemy

$$4x-x-6x+6x-3x=30-18,$$

albo

$$0=12.$$

Ten wynik pokazuje że równanie zadane jest niemożebne.

PRZYKŁAD IV. Niech będzie nakoniec równanie

$$\frac{4x}{5}-\frac{8x}{15}-x+10+\frac{1}{2}=11-\frac{13x}{30}-\frac{3x}{10}-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}.$$

Przenosząc wyrazy niewiadome na pierwszą stronę a wiadome na drugą, i mnożąc każdy z nich przez 30, najmniejszy wielownik mianowników, przekształcamy równanie na całkowite równowarte

$$24x-16x-30x+13x+9x=330-10-5-300-15;$$

ztąd, po redukcyi, otrzymujemy

$$0=0.$$

Ten wynik dowodzi że wszelka liczba podstawiona za x sprawdza zadane równanie; więc wartość niewiadomej x jest *niewyznaczona*.

RÓWNANIA KTÓRE SIĘ PRZYWODZĄ DO PIERWSZEGO STOPNIA.

119. Są równania ktorych rozwiązywanie przywodzi się, za pomocą pewnych przekształceń, do rozwiązywania równań pierwszego stopnia. Damy kilka przykładów, na pokazanie jak w podobnych przypadkach postępować trzeba.

Przykład I. Niech będzie równanie

$$(1) \qquad \frac{x+1}{x-1}+\frac{x-1}{x+1}=\frac{x^4+3}{x^2-1}.$$

Przywodząc to równanie do zera, i sprowadzając wyrazy do najmniejszego mianownika x^2-1, otrzymujemy równanie równowarte

$$\frac{x^4-2x^2+1}{x^2-1}=0,$$

albo

$$\frac{(x^2-1)^2}{x^2-1}=0.$$

zkąd, odejmując spólny czynnik x^2-1, wynika

$$x^2-1=0,$$

albo

$$(2) \qquad (x-1)(x+1)=0.$$

Ostatnie równanie zawiera dwa równania pierwszego stopnia,

$$x-1=0 \quad \text{i} \quad x+1=0,$$

które dają dwa rozwiązania $x=+1$ i $x=-1$ równania (1). Dwie znalezione wartości $+1$ i -1 dla x czynią zerami mianowniki zadanego równania: mimo tego jesteśmy pewni że one, będąc dwoma jedynemi rozwiązaniami równania równowartego (2), temsamem obie sprawdzają równanie (1), i są jego dwoma jedynemi rozwiązaniami, chociaż mu dają kształt symboliczny $\infty=\infty$.

Przykład II. Niech będzie równanie

$$\frac{a}{1+2x}+\frac{a}{1-2x}=2b.$$

Sprowadzając do jednego mianownika, i przywodząc równanie do zera, będzie

$$\frac{b(1-4x^2)-a}{(1+2x)(1-2x)}=0.$$

Owoż, licznik tego ułamka nie staje się zerem, przez podstawienia $x=\frac{1}{2}$ i $x=-\frac{1}{2}$ które czynią zerami mianowniki, a jest tego samego stopnia co jego mianownik; więc, znosząc mianowniki, nie wprowadzamy rozwiązań obcych i nie tracimy żadnego rozwiązania. Co dowodzi że równanie całkowite

$$b(1-4x^2)-a=0,$$

albo

$$4bx^2+a-b=0,$$

jest równowarte zadanemu.

Dając ostatniemu równaniu kształt wieloczynu

$$(2x\sqrt{b}-\sqrt{b-a})(2x\sqrt{b}+\sqrt{b-a})=0,$$

widzimy że zawiera dwa równania pierwszego stopnia

$$2x\sqrt{b}-\sqrt{b-a}=0 \quad \text{i} \quad 2x\sqrt{b}+\sqrt{b-a}=0.$$

Rozwiązując te równania, znajdujemy dla x dwie wartości

$$x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b-a}{b}}, \quad \text{i} \quad x=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b-a}{b}},$$

które są dwoma rozwiązaniami zadanego równania.

W tem wszystkiem przypuszczamy b dodatne i większe od a.

Przykład III. Weźmy równanie niestosunkowe

$$(1) \qquad \sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{1-x}}=1.$$

Żeby znieść jeden z pierwiastników trzeba go odosobnić. W tym celu piszemy równanie jako następuje

$$\sqrt{x-\sqrt{1-x}}=1-\sqrt{x}.$$

Jeśli teraz podniesiemy obie strony do kwadratu, pierwszy pierwiastnik zniknie, i będziemy mieli

$$x-\sqrt{1-x}=1-2\sqrt{x}+x,$$

albo, uproszczając,

$$(2) \qquad -\sqrt{1-x}=1-2\sqrt{x}.$$

Podnosząc znowu do kwadratu, otrzymujemy

$$1-x=1-4\sqrt{x}+4x,$$

albo

$$4\sqrt{x}=5x.$$

Podnosimy jeszcze do kwadratu, i znajdujemy nakoniec równanie stosunkowe

$$(3) \qquad 16x = 25x^2,$$

które może wziąć kształt wieloczynu

$$x(25x - 16) = 0.$$

Ztąd, równając do zera każdy z dwóch czynników, wywodzimy dwie wartości dla x

$$x = 0 \quad \text{i} \quad x = \frac{16}{25}.$$

Ale trzeba je sprawdzić podstawieniem w zadanem równaniu, żeby się dowiedzieć czy one są istotnie jego rozwiązaniami.

Widząc że $x = 0$ nie sprawdza równania (1), odrzucamy to rozwiązanie jako obce, wprowadzone podnoszeniem do kwadratu. Podstawiamy wartość $x = \frac{16}{25}$, i mamy najpierwej

$$\sqrt{\frac{16}{25}} + \sqrt{\frac{16}{25} - \sqrt{1 - \frac{16}{25}}} = 1,$$

potem

$$\frac{4}{5} + \sqrt{\frac{16}{25} - \frac{3}{5}} = 1,$$

naostatek przychodzimy do tosamości

$$\frac{4}{5} + \frac{1}{5} = 1.$$

Więc $x = \frac{16}{25}$ jest jedynem rozwiązaniem równania (1).

Gdybyśmy wzięli równanie

$$(4) \qquad \sqrt{x} + \sqrt{x + \sqrt{1 - x}} = 1,$$

otrzymalibyśmy te same wartości $x=0$ i $x=\frac{16}{25}$; ale z tą różnicą że one obie są rozwiązaniami obecnego równania.

Jakoż, znosząc najpierwej pierwiastek zawilszy, jako wyżej, znajdujemy równanie

$$(5)\qquad \sqrt{1-x}=1-2\sqrt{x},$$

które się różni od równania (2) samym tylko znakiem pierwszej strony. Ztąd wnosimy że równania wynikowe, wyprowadzone z obydwóch przez podnoszenie do kwadratu, są zupełnie te same; mają więc te same rozwiązania. A ponieważ $x=0$ zadość czyni równaniu wynikowemu (3) a nie sprawdza równania (2), to dowodzi że ta wartość jest rozwiązaniem obcem dla równania (1), wprowadzonem przez podnoszenie do kwadratu obydwóch stron równania (2). Ale $x=0$ jest jednem z dwóch rozwiązań równania (4).

Nareszcie, gdyby szukano rozwiązań równania

$$(6)\qquad \sqrt{x}-\sqrt{x-\sqrt{1-x}}=1,$$

pozbywając się pierwiastników, otrzymanoby oczywiście to samo równanie wynikowe (3), które daje

$$x=0 \quad \text{i} \quad x=\frac{16}{25}.$$

Owóż, żadna z tych wartości nie rozwiązuje równania (6); więc to równanie jest niemożebne. Co łatwo widzieć *a priori*.

Przykład III. Niech będzie jeszcze równanie niestosunkowe

$$(1)\qquad \sqrt[3]{a+x}=\sqrt[3]{a-x}+\sqrt[6]{a^2-x^2}.$$

Odosobniając pierwiastnik najwyższego wskazu, będzie

$$(2)\qquad \sqrt[6]{a^2-x^2}=\sqrt[3]{a+x}-\sqrt[3]{a-x};$$

Zkąd, podnosząc obie strony do sześcianu, wynika

$$\sqrt{a^2-x^2}=a+x-3\sqrt[3]{(a+x)^2}\sqrt[3]{a-x}+3\sqrt[3]{a+x}\sqrt[3]{(a-x)^2}-a+x$$

albo

$$\sqrt{a^2-x^2}=2x-3\sqrt[3]{a^2-x^2}\left(\sqrt[3]{a+x}-\sqrt[3]{a-x}\right).$$

To równanie, na mocy (2), staje się

$$\sqrt{a^2-x^2}=2x-3\sqrt[3]{a^2-x^2}\sqrt[6]{a^2-x^2},$$

albo

$$\sqrt{a^2-x^2}=2x-3\sqrt{a^2-x^2};$$

mamy więc

$$(3)\qquad 2\sqrt{a^2-x^2}=x.$$

Podnosimy znowu obie strony do kwadratu, i otrzymujemy

$$4a^2-4x^2=x^2,$$

albo

$$(4)\qquad 5x^2-4a^2=0.$$

Pierwsza strona jest różnicą kwadratów, i bierze kształt wieloczynu

$$(x\sqrt{5}-2a)(x\sqrt{5}+2a)=0,$$

który pokazuje że ostatnie równanie zawiera dwa równania pierwszego stopnia

$$x\sqrt{5}-2a=0 \quad \text{i} \quad x\sqrt{5}+2a=0.$$

Rozwiązując te równania, znajdujemy dla x dwie wartości

$$x=+\frac{2a}{\sqrt{5}} \quad \text{i} \quad x=-\frac{2a}{\sqrt{5}},$$

które trzeba sprawdzić podstawieniem w równaniu zadanem.

Podstawienie wartości $\frac{2a}{\sqrt{5}}$ w równaniu (1), powinno dać

$$\sqrt[3]{\frac{a\sqrt{5}+2a}{\sqrt{5}}}=\sqrt[3]{\frac{a\sqrt{5}-2a}{\sqrt{5}}}+\sqrt[6]{\frac{a^2}{5}}.$$

zatem, dzieląc obie strony przez $\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{5}}}$, powinno być

$$\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=1.$$

Aby dowieśdź że ta różnica jest równa y nazwijmy z jej wartość, to jest połóżmy

$$\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=z.$$

Jeśli podniesiemy obie strony do sześcianu będzie,

$$4-3z\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}\,\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=z^3,$$

albo

$$z^3+3z-4=0.$$

Oczywiście $z=1$ sprawdza to równanie, mamy zatem

$$(z-1)(z^2+z+1)=0.$$

Owoż czynnik z^2+z+1, jako równy $\left(z+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$, nie może stać się zerem; musi więc być

$$z-1=0, \quad \text{czyli} \quad \sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=1.$$

Co było do okazania.

Druga wartość $x=-\frac{2a}{\sqrt{5}}$ nie sprawdza równania (3), nie może więc czynić zadość równaniu zadanemu. Jest ona rozwiązaniem obcem, wprowadzonem oczywiście przez podnoszenie do kwadratu obydwóch stron równania (3).

Ztąd łatwo wnieść można, że wartość odjemna $x=-\frac{2a}{\sqrt{5}}$

rozwiązuje równanie

$$\sqrt[6]{a^2-x^2}=\sqrt[3]{a-x}-\sqrt[3]{a+x};$$

a przeciwnie wartość dodatna $x=\frac{2a}{\sqrt{5}}$ jest jego rozwiązaniem obcem.

Aby pokazać użyteczność równań w rozwiązywaniu zagadnień, damy teraz kilka przykładów.

120. Zagadnienie I. *Do pewnej sadzawki woda wpływa jednostajnie dwoma kanałami; i wiadomo że, gdyby płynęła samym tylko pierwszym kanałem, napełniłaby sadzawkę w 6ciu dniach, a gdyby płynęła samym tylko drugim, toby ją napełniła w 3 dniach. U tej sadzawki jest upust który ją może wypróżnić w 2 dniach. Przypuszczając połowę upustu otwartą, w jakim czasie woda płynąca obydwoma kanałami napełniłaby sadzawkę?*

Gdyby wiedziano ile trzeba czasu do napełnienia sadzawki wodą, sprawdzonoby zagadnienie, obliczając ilość wody która przez ten czas wpłynęła dwoma kanałami do sadzawki, i ilość wody która z niej wypłynęła otwartą połową upustu; różnica tych dwóch ilości wody powinna być równa objętości sadzawki, to jest równa ilości wody która ją napełnia. Otóż, można wskazać tę równość; dość tylko, oznaczając czas niewiadomy jedną literą, wyrazić, algebrycznym rachunkiem tak dobrze ilości niewiadomych jako wiadomych, wszystkie dane warunki zagadnienia, jak gdyby je sprawdzić chciano. Tym sposobem przemieszczając trudność, przywodzi się rozwiązywanie zagadnienia do rozwiązywania równania.

I w samej rzeczy, nazwijmy x czas niewiadomy. Ponieważ woda płynąca pierwszym kanałem napełniłaby sama jedna sadzawkę w dniach 6ciu, to oczywiście w jednym dniu napełni jedną 6tą część sadzawki; co się wyraża ułamkiem $\frac{1}{6}$, przedstawiając objętość sadzawki przez 1. Zatem w x dniach ta sama woda napełni część sadzawki wyrażoną wieloczynem $\frac{1}{6}.x$

czyli $\frac{x}{6}$. Rozumując podobnie, widzimy że, w tym samym czasie x, woda płynąca drugim kanałem napełnia część sadzawki wyrażoną przez $\frac{x}{3}$. Ale także w czasie x wypływa z sadzawki, otwartą *połową* upustu, ilość wody wyrażona przez $\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{2}$. Ztąd wnosimy że, na końcu czasu x, ilość wody pozostałej w sadzawce jest

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{3}-\frac{x}{4}.$$

Owoż, według zagadnienia ta ilość wody powinna napełniać sadzawkę, to jest czynić 1; więc, mając dwa wyrażenia tej samej wartości, otrzymujemy równanie

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{3}-\frac{x}{4}=1,$$

które przedstawia wszystkie warunki zagadnienia.

Zostaje teraz do znalezienia wartość dla x, którą się wyznaczy rozwiązując równanie pierwszego stopnia o jednej niewiadomej x. Co już umiemy.

Stosując wiadome prawidło (117), znosimy najpierwej mianowniki mnożąc przez ich najmniejszy wielownik 12, i mamy równanie całkowite

$$2x+4x-3x=12,$$

albo

$$3x=12;$$

zkąd, dzieląc przez spółczynnik 3 niewiadomej x, wywodzimy wartość

$$x=4.$$

Więc, żeby sadzawka była pełna wody, trzeba dni **4.**

Ale ta odpowiedź dopóty nie powinna być uważana za dokładną, dopóki niebędzie sprawdzone że dopełnia wszystkich warunków zagadnienia. Owoż, woda płynąca pierwszym kanałem napełnia w 4 dniach $\frac{4}{6}$ sadzawki; płynąca drugim kanałem napełniłaby w 4 dniach $\frac{4}{3}$ sadzawki; ale w tym samym czasie wypływa przez upust $\frac{4}{4}$ sadzawki. Zostaje więc w sadzawce na końcu 4go dnia ilość wody $\frac{4}{6}+\frac{4}{3}-\frac{4}{4}$, która właśnie czyni 1, to jest sadzawkę pełną. Co dowodzi że zagadnienie jest dobrze rozwiązane.

121. Zagadnienie II. *Znaleźć eskont rozumowy biletu* 540 fr. *płatnego po* 3 *miesiącach, na stopę procentu* 5 *od* 100 *rocznie.*

Eskontem rozumowym (potrąceniem) biletu jest procent prosty od jego rzeczywistej wartości. Oznaczmy przez x ten eskont; osoba mająca bilet odbierze za niego $540-x$, a trzeba żeby ta summa umieszczona przez 3 miesiące, na 5 od sta rocznie, przyniosła procent x. Owoż 100 fr., dając 5 fr. rocznego procentu, przynoszą po 3 miesiącach $5f.\frac{3}{12}$ czyli $\frac{5f}{4}$; zatem 1 fr, przynosi w tym samym czasie $\frac{5f}{400}$, a summa $540-x$ przyniesie procent $\frac{5f}{400}.(540-x)$ który, według warunków zagadnienia, powinien czynić x. Mamy więc równanie

$$\frac{5}{400}(540-x)=x,$$

albo, znosząc mianownik,

$$540-x=80x.$$

Rozwiązując to równanie pierwszego stopnia na x, znajdujemy eskont

$$x = \frac{540}{81} = 6{,}666\ldots$$

Więc, po odtrąceniu eskontu $5^f{,}666$ od summy 540 f. osoba mająca bilet odbierze $533^f{,}33$.

122. Zagadnienie III. *Pewna osoba płaci biletem handlowym* 600 fr., *płatnym za* 6 *miesięcy. Jaka summa stoi na tym bilecie?*

Eskont handlowy jest procentem prostym od summy napisanej na bilecie, zwykle po 5 od sta rocznie. I tak, bilet handlowy wystawiony na 105 f., płatny za rok daje eskont handlowy $5^f{,}25$.

To wiedząc, oznaczmy przez x niewiadomą summę biletu. Każda jedność tej summy (frank. złoty,...) przynosi po roku procent $\frac{5}{100}$, a po 6 miesiącach procent $\frac{5}{100}\cdot\frac{6}{12}$. Zatem summa x, płatna za 6 miesięcy, daje eskont handlowy $\frac{5}{100}\cdot\frac{6}{12}x$. Ten eskont odciągnięty od x powinien czynić różnicę $x-\frac{5}{100}\cdot\frac{6}{12}x$ równą wypłaconej summie 600 f. Mamy więc równanie

$$x-\frac{5}{100}\cdot\frac{6}{12}x = 600,$$

albo

$$x-\frac{x}{40} = 600.$$

Znosząc mianownik i redukując, otrzymujemy równanie całkowite pierwszego stopnia

$$39x = 24000;$$

zkąd

$$x = \frac{24000}{39} = 615,38...$$

Więc na bilecie musiała być napisana summa okrągła $615^f,40$.

123. Zagadnienie IV. *Pewien winiarz ma dwa gatunki wina, litr pierwszego kosztuje 2f,90 a drugiego 3f,10. Chciałby utworzyć 20 litrów mieszaniny po 3f. litr; ile litrów każdego z dwóch gatunków wina wziąć powinien?*

Nazwijmy x liczbę litrów wina które z pierwszego gatunku wziąć trzeba; liczba litrów z drugiego gatunku będzie $20-x$. Ponieważ litr pierwszego wina kosztuje $2f,60$, x litrów tego wina będą kosztowały $(3f,60)x$; tak samo, $20-x$ litrów drugiego wina po $3^f,10$ będą kosztowały $(3f,10)(20-x)$. A mieszanina tych dwóch win, 20 litrów po 3 fr., kosztuje $3^f \times 20$ czyli 60 f. Mamy więc równanie

$$(2,60)x+(3,10)(20-x)=60,$$

albo

$$26x+31(20-x)=600.$$

Rozwiązując to równanie pierwszego stopnia na x, otrzymujemy

$$(31-26)x=620-600,$$

albo

$$5x=20;$$

zkąd

$$x=4.$$

Więc winiarz, mieszając 4 litry pierwszego wina z 16 litrami drugiego, będzie miał 20 litrów po 3 f.

FORMUŁA OGÓLNA ROZWIĄZYWANIA RÓWNANIA PIERWSZEGO STOPNIA O JEDNEJ NIEWIADOMEJ.

124. Równanie pierwszego stopnia o jednej niewiadomej może tylko mieć dwa gatunki wyrazów, to jest wyrazy zawierające tę niewiadomę, i wyrazy które jej nie zawierają. Zatem wszelkie równanie, pierwszego stopnia względem niewiadomej x, przywodzi się do kształtu

$$(1) \qquad Ax = B;$$

dość tylko przenieść wszystkie wyrazy mające x na pierwszą stronę, a wszystkie inne na drugą, i potem zebrać je w jeden wyraz na każdej stronie.

Spółczynniki A i B są albo liczbami, albo wielomianami mogącemi nawet zawierać niewiadome różne od x. W pierwszym razie, równanie (1) jest *równaniem liczebnem*, mającem tylko jedną niewiadomę x pierwszego stopnia; w drugim, jest *równaniem literalnem* pierwszego stopnia względem x, ale które może zawierać inne niewiadome nawet stopnia wyższego.

125. Dyskussya formuły ogólnej (1). Trzy przypadki zdarzać się mogą w formule ogólnej (1): może być A różne od zera a B jakiekolwiek; $A=0$ ale B różne od zera; A i B oba zerami. Rozbierzemy je w szczególności.

1° Gdy spółczynnik A jest różny od zera, wtedy, jakiekolwiek jest B, można podzielić obie strony równania (1) przez A, i otrzymać równanie równowarte

$$(2) \qquad x = \frac{B}{A}.$$

Owoż, równanie (2) staje się tosamością przez podstawienie wartości $\frac{B}{A}$ za x, i ta wartość dla x jest jedyna. Więc, *gdy* A $\gtrless 0$, *równanie pierwszego stopnia o jednej niewiadomej ma zawsze jeden pierwiastek, i tylko jeden.*

Ten pierwiastek, wyznaczony przez formułę (2), może być *zerem*; co się właśnie zdarza kiedy jest $B=0$ i $A \gtrless 0$.

2° $A=0$, $B \gtrless 0$. Trzeba rozróżnić spółczynnik A liczebny od spółczynnika A literalnego. Gdy spółczynnik *liczebny* A jest zerem, nie można dzielić przez A obydwóch stron równania (1), i z niego wyprowadzić formuły (2), która wtedy nie ma żadnego znaczenia. W tym przypadku równanie (1) jest niemożebne. Jakoż, żadna liczba położona za x nie przywiedzie tego równania do tosamości; bo wieloczyn Ax, stanowiący pierwszą stronę, w którym czynnik A jest zerem (samoistem), a czynnik x liczbą jakąkolwiek choćby bardzo wielką, jest zawsze zerem (nº 78), gdy tymczasem druga strona jest ilością B różną od zera. Przykłady liczebne nᵘ 118 jasno to pokazują.

Ale, gdy spółczynnik *literalny* A, nie będąc zerem, dąży ciągle do zera, równania

$$Ax=B \quad \text{i} \quad x=\frac{B}{A},$$

są równowarte; a ponieważ są niemi ciągle jakkolwiek blisko ilość A dochodzi do zera, więc są jeszcze równowarte, gdy A staje się zerem (zerem względnem, ilością nieskończenie małą). Wtedy $\frac{B}{A}$ wyraża symbolicznie tak zwaną ilość nieskończenie wielką. W tym przypadku mówi się że równanie (1) ma pierwiastek nieskończenie wielki. Przykład nº 73 dostatecznie to tłumaczy i usprawiedliwia.

3° $A=0$ i $B=0$. Wtedy, jeśli równanie (1) jest liczebne i staje się $0.x=0$, to oczywiście można mu uczynić zadość kładąc za x liczbę jakąkolwiek. W tym przypadku mówi się że wartość dla x jest *niewyznaczona*. Daliśmy już tego przykład, i dajemy jeszcze inny w ćwiczeniach. Gdyby wzięto formułę (2), co nie wolno bo równania (1) i (2) nie są równowarte w obecnem założeniu, toby się ona przedstawiła w kształcie $\frac{0}{0}$, który jest symbolem niewyznaczenia.

Jeśli ilości A i B są literalne i dążą obie zarazem do zera, wtenczas równanie (2) jest równowarte równaniu (1), ale daje dla x wartość wyrażoną symbolicznie $\frac{B}{A}=\frac{0}{0}$. Aby wiedzieć co przedstawia ten iloraz osobliwy, trzeba się uciec do sposobu podanego w n° 76; zkąd wynika że: gdy A i B dążą do zera na mocy dwóch oddzielnych założeń, wartość $\frac{B}{A}$ jest istotnie niewyznaczona; gdy zaś ilości A i B stają się zerami obie przez jedno i to samo założenie, to dowodzi w ogóle obecności spólnego czynnika, po odjęciu którego wartość $\frac{B}{A}$ będzie ilością wyznaczoną, a może być nawet 0 albo ∞. Przykłady dane w numerach 76 i 77 dostatecznie to wyjaśniają.

ĆWICZENIA

I. Rozwiązać równanie

$$4-2x+\frac{5}{12}+\frac{2x}{3}=20+\frac{1}{4}+3x-\frac{x}{6}.$$

Odpowiedź: $x=-3{,}8$.

II. Rozwiązać

$$x-\frac{4}{400}-\frac{7x}{15}=\frac{14x}{40}-\frac{5}{2700}+\frac{16x}{90}.$$

Odpowiedź: $x=\frac{22}{15}$.

III. Rozwiązać

$$\frac{x}{2}-10+\frac{x}{3}=1+\frac{5x}{6}.$$

Odpowiedź : równanie niemożebne.

IV. Rozwiązać

$$5-\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{4}{5}=6-\frac{5x}{6}+\frac{2x}{3}-\frac{1}{5}.$$

Odpowiedź : równanie istnieje na wszelką wartość dla x.

V. Rozwiązać

$$\frac{3abc}{a+b}+\frac{(2a+b)b^2x}{a(a+b)^2}+\frac{a^2b^2}{(a+b)^3}=3cx+\frac{bx}{a}.$$

Odpowiedź : $x=\frac{ab}{a+b}$; przypuszczając $a \gtrless 0$, $a+b \gtrless 0$,

$$3c(a+b)^2+ab \gtrless 0.$$

VI Rozwiązać.

$$\frac{ax}{2a-b}-\frac{ax}{b(a+b)}+\frac{bx}{2a(a-b)}-\frac{5ab}{2a+b}$$
$$=\frac{5b(2a-b)}{a^2-b^2}-\frac{bx}{2a(a+b)}-\frac{ax}{b(a-b)}.$$

Odpowiedź : $x=\frac{5b(2a-b)}{2a-b}$.

VII. Rozwiązać

$$\frac{x}{x+1}+\frac{2}{x^2-1}=\frac{1}{x-1}.$$

Odpowiedź : $x=1$.

VIII. Rozwiązać

$$\frac{x^2}{x+1}+\frac{x^2}{x-1}=\frac{x^3-8}{x^2-1}.$$

Odpowiedź : $x=-2$.

IX. Rozwiązać

$$\frac{x}{x+1}+\frac{2}{x^2-1}=\frac{x}{x-1}.$$

Odpowiedź : $x=+\infty$ i $x=-\infty$.

X. Rozwiązać

$$\frac{7x^n}{x+1}+\frac{3x^n+6x^{n+2}}{x^2-1}=\frac{6x^{n+1}}{x-1}.$$

Odpowiedź : $x=0$ i $x=4$.

XI. Rozwiązać

$$\frac{ax}{x-a}+\frac{bx}{x+a}=\frac{a^3}{x^2-a^2}+a+b.$$

Odpowiedź : $x=\frac{ab}{b-a}$, $x=+\infty$ i $x=-\infty$.

XII. Rozwiążąć

$$\frac{ax-b^2}{\sqrt{ax}+b}+b=\frac{\sqrt{ax}+c}{2}.$$

Odpowiedź : $x=\frac{c^2}{a}$; przypuszczając a, b, c, dodatne.

XIII. Rozwiązać

$$\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\sqrt{b}.$$

Odpowiedź : $x=\frac{2a\sqrt{b}}{1+b}$.

XIV. Rozwiązać

$$2x+2\sqrt{a^2+x^2}=\frac{5a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

Odpowiedź: $x=\frac{3}{4}a$; $x=-\frac{3a}{4}$ jest rozwiązaniem obcem

XV. Rozwiązać

$$\frac{1-ax}{1+ax}\sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}}+1=0.$$

Odpowiedź: $x=+\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2a}{b}-1}$ i $x=-\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2a}{b}-1}$,

jeśli $a>b$.

XVI. Rozwiązać

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{x}}=4.$$

Odpowiedź: $x=2$.

XVII. Rozwiązać

$$\sqrt[6]{a^2-x^2}=\sqrt[3]{a+x}+\sqrt[3]{a-x},$$

Odpowiedź: równanie niemożebne.

XVIII. Rozwiązać

$$\frac{\sqrt[n]{a+x}}{a}+\frac{\sqrt[n]{a+x}}{x}=\frac{\sqrt[n]{x}}{b}.$$

Odpowiedź: $x=\sqrt[n+1]{\frac{a^n}{b^n}}-1$.

XIX. Rozwiązać

$$\sqrt{1-a}\sqrt[4]{\frac{1+x}{1-x}}+\sqrt{1+a}\sqrt[4]{\frac{1-x}{1+x}}=2\sqrt[4]{1-a^2}.$$

Odpowiedź: $x=a$.

XX. Rozwiązać

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}.$$

Odpowiedź: odosobniając pierwiastnik $\sqrt{x-\sqrt{x}}$, znajduje się łatwo $x=0$ i $x=\frac{25}{16}$.

XXI. Rozwiązać

$$\sqrt{a-x}+2\sqrt{a+x}=\sqrt{a-x+\sqrt{ax+x^2}}.$$

Odpowiedź: $x=-a$; $x=0$ i $x=\frac{64a}{1025}$ są rozwiązaniami obcemi.

ZASADY OGÓLNE DOTYCZĄCE RÓWNAŃ JEDNOCZESNYCH.

126. Gdy kilka równań o kilku niewiadomych mają być sprawdzone zarazem przez jedne i te same wartości niewiadomych, mówi się wtedy że te równania są *jednoczesne*, i ich ogół nazywa się *układem równań*.

Rozwiązać układ równań jestto znaleźć wszystkie układy wartości które, położone na miejscu niewiadomych, zamieniają równania na tosamości. Każdy układ takich wartości jest *rozwiązaniem* układu równań.

Układy równowarte. Dwa układy jednakowej liczby równań, zawierające te same niewiadome, nazywają się *równowartemi* gdy mają te same rozwiązania. Układy równowarte, i oczywiście tylko takie, mogą się zastępować jeden przez drugi.

127. Twierdzenie. *Można zastąpić którekolwiek z równań danego układu przez summę, albo różnicę, utworzoną z tego równania i z jednego albo kilku innych równań układu.*

I tak, układy

$$(1)\quad \begin{cases} A=0 \\ B=0 \\ C=0 \\ D=0 \end{cases} \qquad (2)\quad \begin{cases} A=0 \\ A+B-D=0 \\ C=0 \\ D=0 \end{cases}$$

są równowarte.

Jakoż, wszystkie rozwiązania układu (1), czyniąc tosamie zerem każde z jego równań, temsamem czynią zadość równaniu

$$A+B-D=0;$$

więc sprawdzają układ (2).

Nawzajem, wszystkie rozwiązania układu (2) czynią tosamie zerami A, C, D, i $A+B-D$, muszą zatem czynić zadość równaniu

$$B=0;$$

więc sprawdzają układ (1).

Uwaga. Przed dodawaniem albo odciąganiem równań układu, można je mnożyć albo dzielić przez czynnik stateczny; co nie zmienia ich rozwiązań (nº 108). Ta uwaga będzie miała wkrótce swoje zastosowanie

128. Twierdzenie II. *Gdy jedno z równań układu jest rozwiązane względem jednej niewiadomej, można zastąpić tę niewiadomę podstawiając wyrażenie jej wartości w innych równaniach układu.*

Niech będzie układ jakichkolwiek równań jednoczesnych

$$(1)\quad \begin{cases} A=0, \\ B=0, \\ C=0. \end{cases}$$

Przypuśćmy że równanie A, naprzykład, zostało przekształcone na równowarte

$$x = \alpha,$$

w którem α przedstawia wyrażenie algebryczne niezawierające niewiadowej x, ale mogące zawierać inne niewiadome. Jeśli podstawiemy za x jego wartość α w wyrażeniach B i C, oznaczając przez B′ i C′ kształt jaki one biorą po tem podstawieniu, będziemy mieli drugi układ

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \alpha, \\ B' &= 0, \\ C' &= 0, \end{aligned} \right.$$

równowarty pierwszemu.

I w samej rzeczy, ponieważ rozwiązanie układu (1) czyni tosamie równemi x i α, można zastąpić x przez α we wszystkich innych równaniach tego układu. Ale tak otrzymaue wyniki stanowią właśnie układ (2); więc rozwiązania pierwszego układu sprawdzają drugi. Nawzajem, ponieważ wszelkie rozwiązanie układu (2) czyni α tosamie równem niewiadomej x, wolno zastąpić α przez x we wszystkich innych równaniach tego układu; przez co właśnie układ (2) staje się układem (1). Więc te dwa układy są równowarte.

129. Rugowanie. Gdy w układzie równań podstawia się za niewiadomę x jej wyrażenie α we wszystkich innych równaniach, ta niewiadoma znika z rownań przekształconych; mówi się wtedy ze jest *wyrugowana*. Więc, wyrugować jedną niewiadomę między m równaniami, jest to przekształcić ich układ na inny równowarty, w którym $m-1$ równań nie zawierają tej niewiadomej.

ROZWIĄZYWANIE RÓWNAŃ JEDNOCZESNYCH PIERWSZEGO STOPNIA.

UKŁAD DWÓCH RÓWNAŃ O DWÓCH NIEWIADOMYCH.

130. Równanie pierwszego stopnia o dwóch niewiadomych x i y, może tylko zawierać trzy gatunki wyrazów; 1° wyrazy pierwszego stopnia na x, 2° wyrazy pierwszego stopnia na y, i 3° wyrazy niezałeżne od x i y. Jeśli więc, po zniesieniu mianowników, przeniesiono wyrazy niewiadome na pierwszą stronę, a wiadome na drugą, i zebrano wyrazy podobne w jeden wyraz, równanie weźmie kształt

$$ax+by=c,$$

w którym a, b, c oznaczają ogólnie liczby jakiekolwiek, dodatne, odjemne i nawet zero; ale mogą być także ilościami literalnemi i zmiennemi.

Jedno równanie o dwóch niewiadomych nie jest dostateczne do ich wyznaczenia. I tak, niech będzie naprzykład równanie

$$3x-4y=5;$$

rozwiązując je względem x jak gdyby y było ilością wiadomą, to jest dając mu kształt

$$x=\frac{5+4y}{3},$$

widzimy łatwo że, każdej wartości dowolnie wziętej dla y, odpowieda wartość x. Więc rozwiązania jednego równania o dwóch niewiadomych są *niewyznaczone;* trzeba jeszcze drugiego równania. W ogóle trzeba tyle równań ile jest niewiadomych do wyznaczenia.

Niech będzie teraz układ dwóch równań, z których jedno zawiera tylko jedną niewiadomę a drugie ma dwie niewiadome; jako naprzykład

$$(1)\qquad 17x = 85,$$

$$(2)\qquad 15y + 8y = 123.$$

Pierwsze równanie, o jednej niewiadomej x, daje zaraz jej wartość

$$x = \frac{85}{17} = 5.$$

Podstawiając tę wartość w drugiem równaniu, przekształcamy je na równowarte

$$75 + 8y = 123,$$

które, zawierając samą jedną niewiadomę y, wyznacza jej wartość

$$y = \frac{123 - 75}{8} = 6.$$

Znalezione wartości $x = 5$, $y = 6$, są oczywiście rozwiązaniem równań danego układu; i to rozwiązanie jest jedyne. Jakoż, nie może być drugiego rozwiązania; bo równanie (1) wyznacza tylko jedną wartość $x = 5$ (n° 125); a równanie (2), dla tej wartości, podstawionej za x, może dać tylko jedną odpowiedającą wartość $y = 6$.

131. Gdy każde z dwóch równań układu zawiera dwie niewiadome, wtedy, żeby znaleźć rozwiązani, trzeba, rugując jedną z dwóch niewiadomych, przekształcić układ na inny równowarty w którymby jedno z równań miało tylko jedną niewiadomę. Tak działając, przywodzi się rozwiązywanie dwóch równań jednoczesnych o dwóch niewiadomych do rozwiązywania równania o jednej niewiadomej.

132. Są rozmaite metody rugowania, wskażemy główne i w zastosowaniu najdogodniejsze.

RUGOWANIE PRZEZ PODSTAWIENIE. Niech będą dwa równania

$$(1)\quad \begin{cases} 3x - 4y = 5, \\ 7x + 6y = 73. \end{cases}$$

Pierwszemu równaniu można dać kształt

$$x = \frac{5+4y}{3},$$

który się otrzymuje przenosząc wyraz $-4y$ na drugą stronę, i potem dzieląc obie strony przez spółczynnik 3 niewiadomej x. To wychodzi na jedno co *rozwiązać równanie względem* x, jak gdyby y było wiadome. Tym sposobem układ (1) zamienia się na następujący równowarty

$$(2)\quad \begin{cases} x = \dfrac{5+4y}{3}, \\ 7x + 6y = 73. \end{cases}$$

Zastępując teraz x przez $\dfrac{5+4y}{3}$ w drugiem równaniu, otrzymujemy, na mocy twierdzenia II, układ równowarty

$$(3)\quad \begin{cases} x = \dfrac{5+4y}{3}, \\ \dfrac{7(5+4y)}{3} + 6y = 73. \end{cases}$$

Owoż, drugie równanie tego układu zawiera tylko jedną niewiadomę y; możemy więc, rozwiązując je, znaleźć wartość tej niewiadomej. Wykonywamy rachunek stosownie do wiadomego prawidła, i otrzymujemy

$$35 + 28y + 18y = 219,$$

albo

$$46y=184,$$

zkąd

$$y=4.$$

Podstawiamy za y jego wartość 4 w pierwszem równaniu układu (3), i mamy

$$x=\frac{5+16}{3}=7.$$

Znalezione wartości $x=7$ i $y=4$ tworzą jedyne rozwiązanie układu (3); więc dany układ (1), równowarty układowi

$$x=7,$$

$$y=4,$$

ma jedno rozwiązanie $x=7$, $y=4$; i tylko to jedno.

133. Metoda rugowania przez podstawienie prowadzi do następującego *prawidła rozwiązywania* układu dwóch równań pierwszego stopnia o dwóch niewiadomych: *Rozwiązuje się jedno z równań względem jednej niewiadomej, jak gdyby druga była wiadoma, i podstawia się jej wartość w drugiem równaniu; tym sposobem pierwsza niewiadoma zostaje wyrugowana, i otrzymuje się równanie pierwszego stopnia względem drugiej niewiadomej. Rozwiązując to równanie, znajduje się wartość drugiej niewiadomej; podstawia się ją w równaniu poprzedzającem i to ostatnie daje wartość pierwszej niewiadomej.*

W zastosowaniu metody rugowania przez podstawienie, trzeba korzystać ze wszystkich okoliczności które mogą uprościć rachunek; jako pokazują następujące przykłady.

Przykład I. Rozwiązać układ dwóch równań

$$10x+7y=177,$$

$$8x-y=69.$$

Ponieważ spółczynnik niewiadomej y w drugiem równaniu jest liczebnie 1, wyciągmy z tego równania wartość dla y, i mamy

$$y=8x-69.$$

Poczem, zastępując y przez $8x-69$ w pierwszem równaniu, otrzymujemy równanie całkowite

$$10x+7(8x-69)=177,$$

z którego wywodzimy

$$10x+56x-483=177.$$

$$66x=660,$$

$$x=10.$$

Podstawiamy znalezioną wartość $x=10$ w równaniu

$$y=8x-69,$$

i otrzymujemy

$$y=80-69=11.$$

Więc zadany układ dwóch równań ma rozwiązanie

$$x=10, \quad y=11.$$

Ale trzeba sprawdzić te wartości. Owoż, podstawiając je w równaniach zadanego układu, otrzymujemy tosamości

$$100+77=177,$$

$$80-11=69;$$

mamy więc zapewnienie że znalezione rozwiązanie dwóch równań jest prawdziwe.

Przykład II. Rozwiązać równania

$$15x+36y=327,$$

$$18y-24x=6.$$

Spostrzegamy na samo spojrzenie że pierwsze równanie może się uprościć przez 3, a drugie przez 6; wykonywamy te uproszczenia i piszemy równania w porządku liter,

$$5x+12y=109,$$

$$-4x+3y=1.$$

Teraz, widząc że spółczynnik 3, niewiadomej y w drugiem równaniu, jest dzielnikiem spółczynnika 12, tej niewiadomej w pierwszem równaniu, wyciągamy wartość dla y z drugiego równania które daje

$$y=\frac{1+4x}{3};$$

podstawiamy tę wartość w pierwszem równaniu, i otrzymujemy

$$5x+12.\frac{1+4x}{3}=109.$$

Zamiast wypędzać mianownik 3, dzielimy przez niego czynnik podzielny 12, i przez iloraz 4 mnożymy licznik $1+4x$; co uskuteczniwszy, mamy równanie całkowitej

$$5x+4+16x=109,$$

zkąd

$$x=5.$$

Zastępujemy x przez 5 w równaniu

$$y=\frac{1+4x}{3},$$

i znajdujemy

$$y=\frac{1+20}{3}=7.$$

Więc dany układ równań ma rozwiązanie

$$x=5.\quad y=7.$$

PRZYKŁAD III. Rozwiązać równania

$$51x-16y=22,$$
$$68x+\ 9y=90.$$

Widząc że spółczynniki 51 i 68 niewiadomej x mają największy spólny dzielnik 17, rozwiązujemy względem x pierwsze równanie jak gdyby y było wiadome, i mamy

$$x=\frac{22+16y}{51};$$

podstawieniem tego wyrażenia w drugiem równaniu rugujemy x, i otrzymujemy równanie o jednej niewiadomej y

$$68.\frac{22+16y}{51}+9y=90.$$

Uproszczamy ułamek $\frac{68}{51}$ dzieląc jego wyrazy przez 17, co daje

$$4.\frac{22+16y}{3}+9y=90;$$

ztąd wywodzimy następnie

$$88+64y+27y=270,$$
$$y=2.$$

Znając wartość $y=2$, podstawiamy ją w równaniu

$$x=\frac{22+16y}{51};$$

i znajdujemy

$$x=\frac{54}{51}=\frac{18}{17}.$$

Więc szukane rozwiązanie jest

$$x=\frac{18}{17},\quad y=2.$$

134. Rugowanie przez dodawanie albo odciąganie. Weźmy równanie już rozwiązane

$$(1)\qquad \begin{aligned} 3x-4y&=5,\\ 7x+6y&=73, \end{aligned}$$

i szukajmy jak wyrugować jedną z niewiadomych, aby przywieśdź rozwiązywanie układu dwóch równań do rozwiązywania innego układu, mającego także dwa równania, ale jedno z nich o jednej tylko niewiadomej. Gdyby spółczynniki jednej niewiadomej w dwóch równaniach były równe, dodając albo odciągając stronami równania, wyrugowanoby tę niewiadomę, i otrzymanoby równanie o jednej niewiadomej któreby zastąpiło jedną z równań układu. Owoż, można zawsze uczynić równemi spółczynniki jednej niewiadomej w dwóch równaniach; dość tylko pomnożyć obie strony każdego z równań przez spółczynnik tej niewiadomej w drugiem. I tak, chcąc wyrugować x, mnożymy pierwsze równanie przez 7 a drugie przez 3; co daje układ równowarty

$$(2)\qquad \begin{aligned} 21x-28y&=35,\\ 21x+18y&=219. \end{aligned}$$

Teraz, ponieważ spółczynniki niewiadomej x są równe i mają te same znaki, odciągamy stronami jedno równanie od drugiego, i tym sposobem rugując ową niewiadomę otrzymujemy równanie

$$18y + 28y = 219 - 35,$$

albo

$$46y = 184,$$

które wzięte z jednem równaniem układu (2) albo lepiej układu (1), będzie tworzyło układ równowarty zadanemu. Więc, biorąc

$$(3)\quad \begin{aligned} 3x - 4y &= 5, \\ 46y &= 184, \end{aligned}$$

mamy układ równowarty układowi (1), w którym drugie równanie jest o jednej tylko niewiadomej.

Rozwiązując drugie równanie, znajdujemy

$$y = 4;$$

podstawiamy tę wartość w pierwszem równaniu, i otrzymujemy

$$3x - 16 = 5,$$

zkąd

$$x = 7.$$

Zamiast wywodzić wartość dla x z podstwienia wartości y, można jej szukać, i często prościej, tą samą metodą jaką znaleziono wartość dla y. Wyniki będą oczywiście te same, bo układ dwóch równań oddzielnych pierwszego stopnia ma tylko jedno rozwiązanie.

Jako sprawdzenie szukajmy wprost wartości dla x, rugując y dopiero co wyłożoną metodą. Owoż, żeby uczynić równemi spółczynniki niewiadomej y, którą mamy wyrugować, dość jest pomnożyć pierwsze równanie układu (1) przez 3 a drugie przez 2; co daje układ równowarty

$$(4)\qquad \begin{aligned} 9x - 12y &= 15, \\ 14x + 12y &= 146. \end{aligned}$$

A że teraz spółczynniki niewiadomej y są równe i znaków przeciwnych, aby wyrugować y trzeba dodać dwa równania stronami; tym sposobem otrzymuje się równanie wynikowe

$$(5)\qquad 9x + 14x = 15 + 146,$$

albo

$$23x = 161.$$

Ostatnie równanie, wzięte na przykład z pierwszem równaniem (1), tworzy układ

$$(6)\qquad \begin{aligned} 3x - 4y &= 5, \\ 23x &= 161, \end{aligned}$$

równowarty zadanemu.

Rozwiązując drugie równanie układu (6), znajdujemy szukaną wartość

$$x = 7.$$

Drugi sposób otrzymania wartości dla x nastręcza uwagę z której dobrze jest korzystać. Gdy spółczynniki niewiadomej, która ma być rugowana, nie są liczbami pierwszemi między sobą, można o wiele skrócić rachunek sprowadzając do najmniejszego spólnego spółczynnika. To sprowadzenie uskutecznia się takim samym sposobem jakim się przywodzą ułamki niezredukowne do najmniejszego mianownika. Trzeba wziąć najmniejszy wielownik dwóch spółczynników rzeczonej niewiadomej, podzielić go przez każdy z nich osobno, i przez iloraz pomnożyć obie strony równania odpowiedającego spółczynnikowi. Tak właśnie działając otrzymaliśmy układ (4).

135. Metoda rugowania przez dodawanie albo odciąganie, bardzo prosta i w rachunku najdogodniejsza, zależy na tem, że, uczyniwszy równemi spółczynniki niewiadomej do wyrugowania, dodaje się albo odciąga równania stronami, według jak te spółczynniki mają znaki przeciwne albo jednakowe; ztąd wynika równanie które daje wartość drugiej niewiadomej. Ta metoda ma wyższość nad innemi, bo nie wprowadza mianowników i pozwala wykonywać dwa działania zarazem; za pomocą niej można bardzo łatwo, nie pisząc równań (4) pochodzących z mnożenia, otrzymać odrazu równanie wynikowe (5). Następujące przykłady wydatnie pokazują te korzyści.

Przykład I. Rozwiązać układ równań

$$15x - 16y = 105,$$

$$12x + 16y = 111.$$

Ponieważ spółczynniki niewiadomej y są równe i znaków przeciwnych, dodajemy równania stronami, i tym sposobem rugując y, otrzymujemy odrazu równanie pierwszego stopnia względem x

$$27x = 216,$$

które daje

$$x = 8.$$

Podstawiając tę wartość w drugiem równaniu, znajdujemy

$$96 + 16y = 111;$$

zkąd

$$y = \frac{15}{16}.$$

Więc zadany układ dwóch równań ma rozwiązanie

$$x=8,\quad y=\frac{15}{16}.$$

Te wartości podstawione w pierwszem równaniu, przywodzą je do tosamości

$$120-15=105,$$

która potwierdza dokładność rozwiązania

Przykład II. Rozwiązać równania

$$12x+25y=298,$$

$$15x-8y=-20$$

Widząc że spółczynniki 12 i 15, niewiadomej x nie są liczbami pierwszemi między sobą, aby wyrugować tę niewiadomę, szukamy najmniejszego wielownika jej spółczynników, i znajdujemy zaraz że nim jest 60. Owoż 60, podzielone osobno przez 12 i przez 15, daje ilorazy 5 i 4; mnożymy więc pierwsze równanie przez 5 a drugie przez 4, i zarazem odciągamy stronami tak pomnożone równania; przez co rugujemy x i otrzymujemy odrazu równanie wynikowe

$$125y+32y=1490+80,$$

albo

$$157y=1570;$$

zkąd

$$y=10.$$

Podstawiamy tę wartość w drugiem równaniu zadanego układu, i znajdujemy

$$15x-80=-20,$$

zkąd

$$x=4.$$

Więc rozwiązanie zadanych równań jest

$$x=4, \qquad y=10.$$

PRZYKŁAD III. Rozwiązać równania

$$402x-258y=29,$$

$$178x+114y=165,$$

Ten układ można zastąpić prostszym. Jakoż, jeśli chcemy wyrugować y, dodajemy równania stronami i otrzymujemy

$$580x-144y=194,$$

albo, dzieląc przez 2,

$$290x-72y=97;$$

więc, biorąc ostatnie równanie zamiast pierwszego, mamy układ równowarty prostszy

$$290x-72y=97,$$

$$178x+114y=165.$$

Uważamy teraz że $72=6.12$ i $114=6.19$; zatem mnożymy pierwsze równanie ostatniego układu przez 19 a drugie przez 12, dodajemy stronami i przychodzimy do równania wynikowego

$$5510x+2136x=1843+1980,$$

albo

$$7646x=3823;$$

zkąd

$$x=\frac{1}{2}.$$

Poczem, kładziemy tę wartość za x w drugiem równaniu, i znajdujemy

$$89+114y=165,$$

$$y=\frac{76}{114}=\frac{2}{3}.$$

Wiec rozwiązanie danego układu jest

$$x=\frac{1}{2}, \quad y=\frac{2}{3}.$$

136. Rugowanie przez porównanie. Metoda rugowania przez porównanie zależy na tem że się porównywa dwa wyrażenia wartości tej samej niewiadomej, wywiedzione z dwóch różnych równań. Następujący przykład dostatecznie to wykaże.

Niech będą dwa równania jednoczesne

$$24x+25y=516,$$

$$15y-16x=36.$$

Rozwiązując każde z nich względem y, otrzymujemy układ równowarty

$$y=\frac{516-24x}{25},$$

$$y=\frac{36+16x}{15}.$$

Owoż, te dwa wyrażenia wartości niewiadomej y powinny być równe, ponieważ równania są jednoczesne; mamy więc równanie

$$\frac{516-24x}{25}=\frac{36+16x}{15},$$

które zawiera tylko jedną niewiadomę x; druga niewiadoma y została tym sposobem wyrugowana.

Biorąc ostatnie równanie, które można uprościć, z jednem z równań danych na przykład z drugiem, otrzymujemy układ równowarty

$$\frac{129-6x}{5}=\frac{9+4x}{3},$$

$$15y-16x=36.$$

Rozwiązujemy pierwsze z tych równań, i znajdujemy

$$387-18x=45+20x,$$

$$x=\frac{387-45}{38}=9.$$

Poczem, podstawiając tę wartość w drugiem równaniu, otrzymujemy

$$15y-144=36;$$

zkąd

$$y=\frac{180}{15}=12.$$

Więc rozwiązanie zadanych równań jest

$$x=9, \qquad y=12.$$

Ta metoda jest rzadko użyteczna, bo wymaga dwóch rozwiązań.

137. Są jeszcze inne metody rugowania. Wskażemy jedną z najważniejszych, na łatwym przykładzie który da o niej dostateczne wyobrażenie

Niech będą dwa równania

$$2x+3y=7,$$

$$5x-4y=6.$$

Odosobniając wyrazy zawierające x, możemy dać tym równaniom kształt następujący :

$$-2x = 3y - 7,$$

$$-5x = -4y - 6.$$

Jeśli teraz podzielimy stronami pierwsze równanie przez drugie, wyrugujemy x, i będzie

$$\frac{2}{5} = \frac{3y - 7}{-4y - 6},$$

albo

$$5(3y - 7) + 2(4y + 6) = 0.$$

Otóż metoda *rugowania przez dzielenie.*

Jako widzimy, ostatnie równanie jest poprostu równaniem wynikowem, które się otrzymuje rugując x przez odciąganie. Co pokazuje że w równaniach pierwszego stopnia, metoda rugowania przez dzielenie niczem się nie różni od metody rugowania przez dodawanie albo odciąganie. Ale, jako zobaczymy w równaniach stopni wyższych, ta metoda, nie potrzebująca *żadnego rozwiązywania*, stosuje się ogólnie tam gdzie ani jednej z trzech poprzednio wyłożonych metod użyć nie można. Dlategośmy o niej słów kilka na tem miejscu powiedzieli.

138. Metody rugowania, któreśmy wyłożyli, służą do przekształcenia układu dwóch równań pierwszego stopnia o dwóch niewiadomych, na układ równowarty w którym jedno z dwóch równań zawiera tylko jedną niewiadomę. Powyższe przykłady, potwierdzając to cośmy już powiedzieli, pokazują jakim sposobem rozwiązywanie dwóch równań jednoczesnych przywodzi się do rozwiązywania równania o jednej niewiadomej. W ogóle to równanie wynikowe ma jedno tylko rozwiązanie; ztąd wnosimy że układ dwóch równań pierwszego stopnia o dwóch niewiadomych ma ogólnie tylko jedno rozwiązanie.

Mówimy *ogólnie*, bo się może zdarzać że równanie wynikowe nie ma żadnego rozwiązania, albo ma ich liczbę nieograniczoną (n° 125). W pierwszym przypadku dwa zadane równania nie mają żadnego rozwiązania, w drugim przypadku rozwiązania tych równań są niewyznaczone. Co jeszcze lepiej wyjaśnią dwa następujące przykłady.

Przykład I. Niech będzie układ dwóch równań

$$(1) \quad \begin{cases} 5x - 3y = 7, \\ 20x - 12y = 29. \end{cases}$$

Aby znaleźć rozwiązanie tego układu, trzeba najpierwej wyrugować jedną z dwóch niewiadomych. Dla wyrugowania x dość jest pomnożyć pierwsze równanie przez 4 i odciągnąć stronami od drugiego. Wykonywając mnożenie, mamy układ równowarty

$$(2) \quad \begin{cases} 20x - 12y = 28, \\ 20x - 12y = 29. \end{cases}$$

Ale, odciągając stronami, otrzymujemy równanie niemożebne

$$0.y = 1.$$

Ta niemożebność równania wynikowego jest dowodem że dwa zadane równania liczebne nie mogą istnieć jednocześnie. I w samej rzeczy, układ tych równań jest równowarty następującemu

$$(3) \quad \begin{cases} 5x - 3y = 7, \\ 0.y = 1; \end{cases}$$

a ostatni pokazuje że nie ma żadnej wartości liczebnej dla x

i żadnej dla y, któreby położone zamiast tych niewiadomych sprawdzały zarazem oba równania. Układ (2) wyraźniej to jeszcze oznajmia; albowiem, jakiekolwiek liczby podstawionoby za x i y w jego równaniach, pierwsze strony będą zawsze równe między sobą, gdy tymczasem drugie strony zostają nierówne. Wyraża się tę okoliczność mówiąc że dwa zadane równania są *niezgodne* albo *sprzeczne*.

Przykład II. Weźmy dwa równania

$$(1)\qquad \begin{aligned} 8x+7y&=12, \\ 40x+35y&=60. \end{aligned}$$

Żeby wyrugować x, mnożemy pierwsze równanie przez 5, i mamy układ równowarty

$$(2)\qquad \begin{aligned} 40x+35y&=60, \\ 40x+35y&=60; \end{aligned}$$

odciągamy stronami i otrzymujemy tosamość

$$0=0,$$

która dowodzi że dwa zadane równania nie są oddzielne. I w samej rzeczy, drugie równanie układu (1) jest następstwem pierwszego równania, wywodzi się z niego mnożeniem przez 5. Więc te dwa równania stanowią tylko jedno równanie o dwóch niewiadomych; dlatego właśnie rozwiązania układu (1) są niewyznaczone (n° 125).

ROZWIĄZYWANIE UKŁADU TRZECH RÓWNAŃ PIERWSZEGO STOPNIA O TRZECH NIEWIADOMYCH.

139. Opierając się na tem co poprzedza, łatwo się pojmuje że, aby rozwiązać układ trzech równań pierwszego stopnia

o trzech niewiadomych, trzeba najpierwej wyrugować jedną z tych niewiadomych między jednem któremkolwiek z trzech równań i każdem z dwóch pozostałych, a potem wyrugować jedną z dwóch niewiadomych między dwoma równaniami zawierającemi ostatnie niewiadome. Tak działając przywodzi się rozwiązywanie układu trzech równań piewszego stopnia o trzech niewiadomych, do rozwiązywania układu równowartego, w którym jedno równanie zawiera wszystkie niewiadome, drugie ma ich zwykle dwie a trzecie tylko jedną. Rozwiązawszy ostatnie równanie, podstawia się znalezioną wartość niewiadomej w drugiem równaniu; przez co to drugie staje się równaniem o jednej tylko niewiadomej; wyznaczywszy wartość tej niewiadomej, podstawia się otrzymane wartości dwóch niewiadomych w pierwszem równaniu, które da wartość trzeciej niewiadomej. Znalezione wartości trzech niewiadomych stanowią rozwiązanie zadanego układu trzech równań. To rozwiązanie jest jedyne, dlatego że równania ostatniego układu, rozwiązywane następnie jedno po drugiem, zawierają każde tylko jedną niewiadomę i wyznaczają jedyną jej wartość.

Przykład I. Niech będzie do rozwiązywania układ trzech równań

$$(1) \quad \begin{cases} 4x - 3y + 2z = 7, \\ 5x + 2y - z = 13, \\ 8x - 7y + 3z = 2. \end{cases}$$

Trzeba rugować najpierwej tę niewiadomę która ma najprostsze spółczynniki w trzech równaniach, i użyć tej metody rugowania która się będzie zdawała wymagać najmniej rachunku. Stosując się do tego przepisu, i widząc że niewiadoma z, mająca najmniejsze spółczynniki w trzech równaniach, daje się najłatwiej rugować metodą przez dodawanie i odciąganie, bierzemy drugie równanie w którem z ma spółczynnik -1, i między tem równaniem a każdem z dwóch innych rugujemy z.

Dla wyrugowania niewiadomej z między drugiem i pierwszem równaniem, mnożymy drugie przez 2 i dodajemy stronami do pierwszego; wykonywając oba działania zarazem otrzymujemy

$$10x+4x+4y-3y=26+7,$$

albo

$$14x+y=33.$$

Poczem, rugujemy z między drugiem i trzeciem równaniem; mnożąc drugie przez 3 i dodając stronami do trzeciego, otrzymujemy

$$15x+8x+6y-7y=39+2,$$

albo

$$23x-y=41.$$

Co daje drugi układ równowarty pierwszemu,

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} 5x+2y-z&=13,\\ 14x+y&=33,\\ 23x-y&=41.\end{aligned}\right.$$

Owoż, w ostatnim układzie znajduje się układ dwóch równań o dwóch niewiadomych x i y

$$14x+y=33,$$

$$23x-y=41,$$

który już rozwiązywać umiemy. Ale, żeby nie odstępować od ogólnego prawidła, rugujemy tylko y; dodając stronami te dwa równania, otrzymujemy bezpośrednio równanie o jednej niewiadomej x

$$37x=74.$$

Mamy więc ostateczny układ równowarty

$$(3)\qquad \begin{cases} 5x+2y-z=13, \\ 14x+y=33, \\ 37x=74, \end{cases}$$

w którym pierwsze równanie zawiera wszystkie trzy niewiadome x, y, z; drugie ma dwie niewiadome x i y; trzecie jest o jednej niewiadomej x.

Rozwiązujemy ostatnie równanie, i znajdujemy

$$x=2.$$

Podstawiamy tę wartość w drugiem równaniu, które się staje

$$28+y=33;$$

zkąd wywodzimy

$$y=5.$$

Nakoniec, podstawiamy wartości $x=2$ i $y=5$ w pierwszem równaniu, i mamy

$$10+10-z=13;$$

zkąd

$$z=7.$$

Więc zadany układ jest równowarty układowi

$$x=2,$$

$$y=5,$$

$$z=7,$$

który stanowi jego rozwiązanie jedyne.

Ale trzeba je sprawdzić podstawieniem w równaniach zadanego układu. Wykonywając to sprawdzenie, znajdujemy tosamości

$$8-15+14=7$$

$$10+10-7=13,$$

$$16-35+21=2,$$

które potwierdzają dokładność rozwiązania.

Przykład II. Niech będzie jeszcze inny układ trzech równań

$$(1)\quad \begin{cases} 5x-12y+13z=52, \\ 10x+8y-3z=64, \\ 6y-4x+7z=76. \end{cases}$$

Stosując metodę rugowania przez podstawienie, z trzeciego równania wyciągamy wartość dla y, jak gdyby wartości x i y były wiadome; i mamy

$$y=\frac{76+4x-7z}{6}.$$

Poczem, podstawiając to wyrażenie wartości y w dwóch pierwszych równaniach, otrzymujemy układ równowarty zadanemu,

$$5x-12.\frac{76+4x-7z}{6}+13z=52,$$

$$10x+8.\frac{76+4x-7z}{6}-3z=64,$$

$$y=\frac{76+4x-7z}{6};$$

albo uproszczając,

$$(2)\qquad \begin{cases} 9z - x = 68, \\ 37z - 46x = 112, \\ y = \dfrac{76 + 4x - 7z}{6}. \end{cases}$$

W ostatnim układzie są dwa równania pierwszego stopnia, o tych samych niewiadomych x i z,

$$9z - x = 68,$$

$$37z - 46x = 112,$$

które możemy zaraz rozwiązać. Aby wyrugować x, z pierwszego równania wyciągamy

$$x = 9z - 68,$$

i podstawiamy to wyrażenie w drugiem równaniu; co daje równanie pierwszego stopnia o jednej niewiadomej z,

$$37z - 46(9z - 68) = 112,$$

albo

$$377z = 3016;$$

zkąd

$$z = 8.$$

Podstawiając tę wartość w poprzedzającem równaniu, znajdujemy

$$x = 72 - 68 = 4.$$

Nakoniec podstawiamy znalezione wartości $x = 4$ i $z = 8$ w trzeciem równaniu układu (2), i otrzymujemy

$$y = 6.$$

Więc zadany układ (1) ma rozwiązanie

$$x=4, \quad y=6, \quad z=8.$$

Przykład III. Weźmy teraz układ trzech równań literalnych

$$x+ay+a^2z+a^3=0,$$

$$x+by+b^2z+b^3=0,$$

$$x+cy+c^2z+c^3=0.$$

Ponieważ x ma spółczynnik $+1$ w trzech równaniach, rugujemy tę niewiadomę odciągając pierwsze równanie od każdego z dwóch innych, i otrzymujemy układ równowarty

$$x+ay+a^2z+a^3=0,$$

$$(b-a)y+(b^2-a^2)z+b^3-a^3=0,$$

$$(c-a)y+(c^2-a^2)z+c^3-a^3=0.$$

Owoż, dwa ostatnie równania mogą się uprościć, bo pierwsze jest podzielne przez $b-a$, drugie przez $c-a$. Odejmując te czynniki, mamy układ dwóch równań

$$y+(b+a)z+b^2+ab+a^2=0,$$

$$y+(c+a)z+c^2+ac+a^2=0,$$

który się łatwo rozwiązuje. Dość tylko odciągnąć stronami pierwsze równanie od drugiego, co zaraz daje

$$(c-b)z+c^2-b^2+a(c-b)=0,$$

albo

$$z+c+b+a=0;$$

zkąd

$$z=-a-b-c.$$

A zatem

$$y=(a+b)(a+b+c)-a^2-ab-b^2=ab+ac+bc.$$

Nakoniec, podstawiamy znalezione wartości y i z w pierwszem równaniu, i otrzymujemy

$$x+a(ab+ac+bc)-a^2(a+b+c)+a^3=0,$$

zkąd

$$x=-abc.$$

Więc rozwiązanie trzech zadanych równań jest

$$x=-abc,\qquad y=ab+ac+bc,\qquad z=-a-b-c.$$

140. Powyższe przykłady dobrze pokazują że rozwiązywanie trzech równań pierwszego stopnia, o trzech niewiadomych, przywodzi się do rozwiązywania układu dwóch równań pierwszego stopnia o dwóch niewiadomych. Owoż, ostatni układ ma ogólnie tylko jedno rozwiązanie; ztąd wnieśliśmy że zadany układ trzech równań ma, także ogólnie, jedno tylko rozwiązanie. Ale może się zdarzyć, jakośmy już widzieli, że dwa równania pierwszego stopnia, o dwóch niewiadomych, są niezgodne albo mają rozwiązanie niewyznaczone; wtedy, trzy równania zadanego układu które do nich prowadzą, w pierwszym przypadku są niezgodne i nie mają rozwiązania; w drugim przypadku, można wziąć dowolnie jedną z niewiadomych, zkąd wyniknie odpowiedająca wartość dla drugiej niewiadomej, i następnie wartość odpowiedająca dla trzeciej. A co więcej jeszcze, może się nawet zdarzyć że dwa równania, do których się przywodzi rozwiązywanie trzech równań zadanego układu, są tosamościami; wtedy trzy zadane równania stanowią tylko jedno równanie o trzech niewiadomych. W tym przypadku istnieje podwójne niewyznaczenie, to jest można wziąć dla *dwóch* którychkolwiek niewiadomych wartości całkiem dowolne, zkąd wyniknie dla trzeciej niewiadomej wartość

odpowiedająca wyrażona przez wartości dane dwom innym.

Przykład I. Niech będą trzy równania

$$3x-4y+5z=10,$$

$$6x+5y-7z=8,$$

$$9x+y-2z=20.$$

Rugując y między trzeciem równaniem i każdem z dwóch pierwszych, przez dodawanie i odciąganie, otrzymujemy układ równowarty

$$9x+y-2z=20,$$

$$39x-3z=90,$$

$$39x-3z=92.$$

Owoż, w tym układzie dwa ostatnie równania są niezgodne; więc trzy zadane równania, nie mogąc być jednoczesne, nie mają żadnego rozwiązania.

Przykład II. Niech będą równania

$$2x-8y-3z=6,$$

$$4x-11y+7z=18.$$

$$2x-3y+10z=12.$$

Rugując x między pierwszem równaniem i każdem z dwóch innych, otrzymujemy

$$5y+13z=6,$$

$$5y+13z=6.$$

Ponieważ te dwa równania stanowią tylko jedno równanie, zadany układ trzech równań o trzech niewiadomych przywodzi się do dwóch równań oddzielnych z trzema niewiadomemi,

$$2x-8y-3z=6,$$

$$5y+13z=6.$$

Można więc wziąć dowolnie wartość dla jednej z trzech niewiadomych. Dając naprzykład niewiadomej z wartość szczególną, wynikną ztąd dla x i y odpowiedające wartości wyrażone przez

$$y=\frac{6-13z}{5},$$

$$x=\frac{6+8y+3z}{2}.$$

Przykład III. Niech będą równania

$$3x-4y+5z=9.$$

$$12x-16y+6z=8,$$

$$20y-15x+7z=19.$$

Jeśli wyrugujemy x między pierwszem równaniem i każdem z dwóch innych, otrzymamy

$$14z=28,$$

$$32z=64.$$

Te dwa równania są równowarte równaniu

$$z=2.$$

Więc trzy zadane równania przywodzą się do dwóch

$$3x-4y+5z=9,$$

$$z=2;$$

albo, co to samo, do dwóch równań

$$3x-4y=4,$$

$$z=2.$$

Niewiadome x i y są niewyznaczone, ale z ma wartość wyznaczoną.

Przykład IV. Niech będą równania

$$2x-3y+4z=5,$$

$$6x-9y+12z=15,$$

$$10x-15y+20z=25.$$

Z pierwszego równania wyciągamy

$$x=\frac{5+3y-4z}{2},$$

i podstawiając to wyrażenie zamiast x w dwóch innych równaniach, otrzymujemy dwie tosamości

$$0.y+0.z=0,$$

$$0.y+0.z=0.$$

Ztąd wnosimy że dany układ trzech równań przywodzi się do jedynego równania

$$2x-3y+3z=5.$$

Można więc wziąć dowolnie wartości dla *dwóch* niewiadomych. Jeśli damy na przykład niewiadomym y i z wartości szczególne, odpowiedająca wartość dla x będzie wyrażona przez

$$x=\frac{5+3y-4z}{2}.$$

ROZWIĄZYWANIE JAKIEJKOLWIEK LICZBY RÓWNAŃ PIERWSZEGO STOPNIA Z RÓWNĄ LICZBĄ NIEWIADOMYCH.

141. Sposób, którym się rozwiązuje układ trzech równań pierwszego stopnia o trzech niewiadomych, może się zogólnić i dać rozwiązanie układu n równań jednoczesnych pierwszego stopnia mających n niewiadomych, według następującego prawidła :

Prawidło ogólne. *Aby rozwiązać układ ilukolwiek równań pierwszego stopnia z równą liczbą niewiadomych, ruguje się najpierwej jedną niewiadomę między jednem z równań i każdem z pozostałych, co daje nowe równania mające jedną niewiadomę mniej*; *poczem, ruguje się także jedną niewiadomę między jednem z nowych równań i każdem z pozostałych, co daje jeszcze inne równania mające dwie niewiadome mniej. I tak dalej, zmniejszając liczbę niewiadomych, dochodzi się do równania o jednej tylko niewiadomej. Rozwiązuje się ostatnie równanie, a po niem następnie wszystkie poprzedzające aż do pierwszego.*

Tym sposobem rozwiązywanie n równań jednoczesnych, mających n niewiadomych, przywodzi się do rozwiązywania $n-1$ równań mających $n-1$ niewiadomych; a rozwiązywanie tych ostatnich przywodzi się podobnie do rozwiązywania $n-2$ równań mających $n-2$ niewiadomych; i tak następnie, aż do jednego równania zawierającego tylko jedną niewiadomę.

To pokazuje że zadany układ jest równowarty układowi w którym, ostatnie równanie zawiera jedną tylko niewiadomę, przedostatnie zawiera tę niewiadomę i drugą, poprzedzające zawiera te dwie niewiadome i trzecią; nakoniec pierwsze równanie zawiera wszystkie niewiadome. Można więc, zaczynając od ostatniego, rozwiązać jedno po drugiem te wszystkie równania; bo one, przez kolejne podstawienie znalezionych wartości niewiadomych, będą zawsze pierwszego stopnia o jednej niewiadomej którą wyznaczą. Ztąd wynika że układ n równań zawierających n niewiadomych ma ogólnie jedno tylko rozwiązanie, czyli jako się mówi, jest wyznaczony.

Przykład I. Niech będą cztery równania pierwszego stopnia o czterech niewiadomych,

$$(1)\quad \begin{cases} 5x+8y+2z-7u=20, \\ 2x-5y-3z+4u=19, \\ 4y-3x-6z+2u=16, \\ 4x+6y+7z-8u=1. \end{cases}$$

Stosując metodę rugowania przez podstawienie, wyciągamy z drugiego równania wartość dla x, jak gdyby y, z, u były wiadome, i podstawiamy ją w trzech pozostałych równaniach. Przekształcamy tym sposobem układ zadanych równań na inny równowarty

$$x=\frac{19+5y+3z-4u}{2},$$

$$\frac{5}{2}(19+5y+3z-4u)+8y+2z-7u=20,$$

$$4y-\frac{3}{2}(19+5y+3z-4u)-6z+2u=16,$$

$$2(19+5y+3z-4u)+6y+7z-8u=1.$$

albo

$$(2)\quad \begin{cases} x=\dfrac{19+5y+3z-4u}{2}, \\ 41y+19z-34u=-55, \\ 7y+21z-16u=-89, \\ 16y+13z-16u=-37. \end{cases}$$

W drugim układzie trzy ostatnie równania zawierają tylko trzy niewiadome; między niemi rugujemy u, wyciągając jego wyrażenie z ostatniego równania, i podstawiając w dwóch poprzedzających. Po uproszczeniu otrzymujemy nowy układ równowarty

$$(3)\quad \begin{cases} x=\dfrac{19+5y+3z-4u}{2}, \\ u=\dfrac{37+16y+13z}{16}, \\ 56y-69z=189, \\ 9y-8z=52. \end{cases}$$

W układzie (3) dwa ostatnie równania zawierają tylko dwie niewiadome y i z. Zamiast rugować zaraz jedną z tych niewiadomych, można najpierwej uprościć rachunek, mnożąc ostatnie równanie przez 6 i odciągając stronami od poprzedzającego; co daje równanie prostsze

$$2y-21z=-123,$$

które weźmiemy zamiast trzeciego. Z tego równania wyciągając dla y wyrażenie

$$y=\frac{21z-123}{2},$$

podstawiamy je w czwartem równaniu układu (3); po uproszczeniu dochodzimy do ostatecznego przekształcenia układu (1),

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{19+5y+3z-4u}{2}, \\ u &= \frac{37+16y+13z}{16}, \\ y &= \frac{21z-123}{2}, \\ z &= 7. \end{aligned}\right.$$

Teraz, idąc do góry, podstawiamy znalezioną wartość $z=7$ w prsedostatniem równaniu, i otrzymujemy

$$y=12.$$

poczem, podstawiamy dwie wartości $y=12$, $z=7$ w drugiem równaniu, i mamy

$$u=20;$$

nakoniec, podstawiamy trzy znalezione wartości $y=12$, $z=7$, $u=20$ w pierwszem równaniu, i otrzymujemy

$$x=10.$$

Więc cztery zadanie równania mają rozwiązanie

$$x=10,\quad y=12,\quad z=7,\quad u=20,$$

które jest jedyne.

Przykład II. Niech będzie jeszcze układ czterech równań

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} 3x+4y+5z-6u &= 2, \\ 6x+7y-10z+3u &= 2, \\ 8x+9y-2z-2u &= 12, \\ 4x+5y+6z+4u &= 48. \end{aligned}\right.$$

Rugujemy najpierwej u metodą przez dodawanie i odciąganie, kombinując trzecie równanie z pierwszem a potem z drugiem. Co daje

$$24x-3x+27y-4y-6z-5z=36-2,$$

$$24x+12x+27y+14y-6z-20z=36+4,$$

$$16x+4x+18y+5y-4z+6z=24+48,$$

albo

$$(2)\qquad \begin{cases} 21x+23y-11z=34, \\ 36x+41y-26z=40, \\ 20x+23y+2z=72. \end{cases}$$

W układzie (2) rugujemy z tą samą metodą, kombinując ostatnie równanie z pierwszem a potem z drugiem. Po uproszczeniu otrzymujemy

$$(3)\qquad \begin{cases} 262x+299y=860, \\ 74x+85y=244. \end{cases}$$

W układzie (3) rugujemy x, i znajdujemy równanie o jednej niewiadomej

$$72y=144.$$

Więc układ równowarty zadanemu jest następujący

$$8x+9y-2z-2u=12,$$

$$20x+23y+2z+72,$$

$$74x+85y=244,$$

$$72y=144.$$

Ostatnie równanie daje $y=2$. Podstawiając tę wartość w przedostatniem równaniu mamy

$$74x+170=244,$$

zkąd

$$x=1.$$

Podstawiamy dwie znalezione wartości $x=1$, $y=2$ w drugiem równaniu które, stając się

$$20+46+2z=72,$$

daje

$$z=3.$$

Nareszcie podstawiamy trzy znalezione wartości $x=1$, $y=2$, $z=3$ w pierwszem równaniu, i otrzymujemy

$$8+18-6-2u=12\ ;$$

zkąd

$$u=4.$$

Więc cztery zadane równania mają jedyne rozwiązanie

$$x=1,\quad y=2,\quad z=3,\quad u=4.$$

ROZMAITE UPROSZCZENIA W RUGOWANIU.

142. W wielu przypadkach można znacznie skrócić rachunek stosując przezornie metody rugowania; wtedy zwłaszcza gdy każde z równań układu nie zawiera wszystkich jego niewiadomych, albo gdy te niewiadome przedstawiają się z pewną symetryą.

Nie jest rzeczą obojętną rugować tę albo ową niewiadomę; bo od trafnego wyboru rugowania zależy prostota rachunku. Zwykle ruguje się najpierwej te niewiadome które wchodzą do najmniej równań, aby przyjść prędzej do równań z temi samemi niewiadomemi; ale, jeśli jedna z niewiadomych wchodzi tylko do jednego równania, trzeba zachować to równanie do jej wyznaczenia, i zająć się rozwiązywaniem układu wszystkich innych równań.

Przykład I. Niech będzie układ czterech równań pierwszego stopnia, o czterech niewiadomych które nie wchodzą zarazem wszystkie do każdego.

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} 2x-5z+4u&=7,\\ 6z-y-3u&=3,\\ 4y-7x&=10,\\ 6z-5x&=20.\end{aligned}\right.$$

Rugujemy najpierwej niewiadomę u która wchodzi tylko do dwóch pierwszych równań, i otrzymujemy układ równowarty

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} 6z-y-3u&=3,\\ 6x-4y+9z&=33,\\ 4y-7x&=10,\\ 6z-5x&=20.\end{aligned}\right.$$

Jeśli teraz wyrugujemy y między drugiem równaniem i trzeciem, otrzymamy układ równowarty, w którym będą dwa równania o tych samych dwóch niewiadomych x i z. Aby łatwo uskutecznić to rugowanie, dość jest dodać stronami dwa rzeczone równania; i będzie

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} 6z-y-3u&=3,\\ 4y-7x&=10,\\ 9z-x&=43,\\ 6z-5x&=20.\end{aligned}\right.$$

Nakoniec, odciągając stronami ostatnie równanie od poprzedzającego pomnożonego przez 5, rugujemy x i otrzymujemy układ równowarty który się zaraz rozwiązuje.

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} 6z-y-3u&=3,\\ 4y-7x&=10,\\ 9z-x&=43,\\ 39z&=195.\end{aligned}\right.$$

Ostatnie równanie daje $z=5$; podstawiamy znalezioną wartość w przedostatniem równaniu i mamy $x=2$; ta wartość podstawiona w drugiem równaniu daje $y=6$; nareszcie podstawiamy dwie znalezione wartości $y=6$, $z=5$ w pierwszem równaniu, i otrzymujemy $u=7$.

Więc rozwiązaniem zadanego układu są wartości

$$x=2,\quad y=6,\quad z=5,\quad u=7.$$

Przykład II. Niech będzie układ pięciu równań

$$\begin{aligned} 2x-3z+u&=3,\\ 3y+2z-t&=17,\\ 4z-y-2u&=4,\\ 5y-8u+2t&=6,\\ z+2u&=7.\end{aligned}$$

W zadanym przykładzie samo jedno pierwsze równanie zawiera x; dlatego zostawiamy je na koniec, i szukamy rozwiązania układu czterech innych równań, zaczynając od rugowania niewiadomej t która wchodzi do dwóch tylko równań. W tym celu mnożymy drugie równanie przez 2, dodajemy stronami do czwartego, i zaraz otrzymujemy układ trzech równań o trzech tych samych niewiadomych

$$4z-y-2u=4,$$

$$11y+4z-8u=40,$$

$$z+2u=7.$$

Rugując potem y, mamy

$$8z-5u=14,$$

$$z+2u=7.$$

Nareszcie rugujemy z, i znajdujemy równanie o jednej niewiadomej

$$21u=42,$$

które daje

$$u=2.$$

Takim sposobem zadany układ pięciu równań przekształca się na równowarty następujący

$$2x-3z+u=3,$$

$$3y+2z-t=17,$$

$$4z-y-2u=4,$$

$$z+2u=7,$$

$$u=2.$$

Znając u, z przedostatniego równania wyciągamy $z=3$; poczem, idąc do góry, znajdujemy następnie $y=4$ i $t=1$; nakoniec pierwsze równanie daje $x=5$.

Więc rozwiązanie zadanych równań jest

$$x=5, \quad y=4, \quad z=3, \quad u=2, \quad t=1.$$

Przykład III. Rozwiązać trzy równania

$$3y-3x+2z=11,$$

$$2x-2y+z=2,$$

$$6y-7z=8.$$

Ponieważ x nie wchodzi do ostatniego równania, rugujemy tę niewiadomę; mnożąc pierwsze równanie przez 2 a drugie przez 3 i dodając stronami, otrzymujemy

$$7z=28,$$

równanie o jednej niewiadomej z; niewiadome x i y wyrugowały się obie zarazem.

Z ostatniego równania wyciągamy

$$z=4,$$

i podstawiając tę wartość w trzeciem równaniu, znajdujemy

$$y=6.$$

Nakoniec, podstawiając wartości $y=6$ i $z=4$ w drugiem równaniu, otrzymujemy

$$x=5.$$

Można sprawdzić trzy znalezione wartości podstawieniem w równaniu pierwszem.

Przykład IV. Rozwiązać trzy równania

$$2x+5y-6z=1,$$

$$x-4y+3z=2,$$

$$4x-3y=5.$$

Ostatnie równanie nie zawiera z; rugując tę niewiadomę, otrzymujemy

$$4x-3y=5.$$

Ten wynik dowodzi że ostatnie z trzech zadanych równań jest następstwem dwóch pierwszych. Więc dany układ, przywodząc się do dwóch tylko równań oddzielnych z trzema niewiadomemi

$$x-4y+3z=2,$$
$$4x-3y=5,$$

jest niewyznaczony. Żeby dobrze wiedzieć jak trzeba rozumieć to niewyznaczenie, wyrugujmy y, będziemy mieli związek między x i z,

$$13x-9z=14.$$

Owoż dwa ostatnie równania, wyrażone w kształtach wydatnych dla y i z

$$y=\frac{4x-5}{3},$$

$$z=\frac{13x-14}{9},$$

pokazują że, biorąc dowolnie wartość dla niewiadomej x, otrzymuje się odpowiedające wartości dla y i z; więc w układzie trzech zadanych równań, niewyznaczenie ściąga się w szczególności do jednej niewiadomej, tak że, dając jej tylko wartości dowolne, otrzymuje się wartości odpowiedające dwóch innych.

Przykład V. Rozwiązać równania

$$2y-x+4z=1,$$
$$3x-6y-8z=1,$$
$$x-2y=3.$$

Rugując z otrzymujemy właśnie ostatnie równanie układu,

$$x-2y=3.$$

To dowodem że trzy zadane równania nie są oddzielne, ponieważ ostatnie wynika z dwóch pierwszych. Więc dany układ, przywodząc się do dwóch równań z trzema niewiadomemi

$$3x-6y-8z=2,$$
$$x-2y=3,$$

jest niewyznaczony. Ale trzeba się zapewnić czy wszystkie niewiadome są niewyznaczone. A ponieważ rugując x albo y znajdujemy zawsze to samo równanie

$$4z=4,$$

które dąje $z=1$, ztąd wnosimy że niewiadoma z ma wartość wyznaczoną 1, a zaś niewiadome x i y, związane jednem tylko równaniem

$$x-2y=3,$$

zostają niewyznaczone.

Przykład VI. Rozwiązać cztery równania

$$2x-3y=2,$$
$$5y+4z-9u=3,$$
$$6z-7u=9,$$
$$8u-3x=12.$$

Nietrudno widzieć że, rugując x i z, otrzymuje się zaraz dwa równania o dwóch niewiadomych y i u,

$$16u-9y=30,$$
$$13u-15y=9.$$

Rugujemy teraz y, mnożąc pierwsze równanie przez 5 a drugie przez 3 i odciągając stronami; co daje

$$41u=123,$$

zkąd

$$u=3.$$

Poczem znajdujemy następnie $x=4$, $y=2$, $z=5$.

Przykład VII. Rozwiązać pięć równań

$$x+2y=5,$$

$$y+3z=11,$$

$$z+4u=19,$$

$$u+5t=29,$$

$$t+6x=11.$$

Rugując y otrzymujemy

(1) $$6z-x=17.$$

Aby przyjść do równania zawierającego te same niewiadome x i z, rugujemy u i mamy najpierwej

$$20t-z=97;$$

poczem, między tem równaniem i ostatniem zadanem, rugujemy t, i znajdujemy żądane równanie

(2) $$120x+z=123.$$

Jeśli teraz między równaniami (1) i (2) wyrugujemy z, otrzymamy

$$721x=721;$$

zkąd

$$x=1.$$

Znając x wyciągamy z równań zadanych, jedną po drugiej, wartości innych niewiadomych, i mamy rozwiązanie danego układu,

$$x=1, \quad y=2, \quad z=3, \quad u=4, \quad t=5.$$

Przykład VIII. Rozwiązać równania

$$\begin{aligned} x+y+z+u&=a, \\ y+z+u+t&=b, \\ z+u+t+x&=c, \\ u+t+x+y&=d, \\ t+x+y+z&=e. \end{aligned}$$

Wszystkie niewiadome wchodzą jednakowym sposobem; jeśli więc dodamy równania stronami, oznaczając przez s summę $a+b+c+d+e$ drugich stron, i uważając że każda z pięciu niewiadomych wchodzi cztery razy do tej summy, będziemy mieli

$$4(x+y+z+u+t)=s,$$

albo

$$x+y+z+u+t=\frac{s}{4}.$$

Znając summę pięciu niewiadomych, i summę każdych czterech daną przez powyższe równania, aby otrzymać wartości tych niewiadomych, dość jest odciągnąć stronami każde równanie od ostatniego znalezionego; co daje

$$t=\frac{s}{4}-a, \quad x=\frac{s}{4}-b, \quad y=\frac{s}{4}-c, \quad z=\frac{s}{4}-d, \quad u=\frac{s}{4}-e.$$

Przykład IX. Rozwiązać cztery równania

$$\begin{aligned} x+y+z+u+1&=0, \\ x+ay+bz+cu+d&=0, \\ x+a^2y+b^2z+c^2u+d^2&=0, \\ x+a^3y+b^3z+c^3u+d^3&=0. \end{aligned}$$

Odciągając stronami pierwsze równanie od drugiego, drugie od trzeciego i trzecie od czwartego, rugujemy x i otrzymujemy układ trzech równań o trzech niewiadomych y, z, u,

$$(a-1)y+(b-1)z+(c-1)u+d-1=0,$$
$$a(a-1)y+b(b-1)z+c(c-1)u+d(d-1)=0,$$
$$a^2(a-1)y+b^2(b-1)z+c^2(c-1)u+d^2(d-1)=0.$$

Mnożymy teraz pierwsze równanie przez a i odciągamy od drugiego, mnożymy tak samo drugie równanie przez a i odciągamy od trzeciego; co daje trzeci układ zawierający dwa równania o dwóch niewiadomych z i u,

$$(b-1)(b-a)z+(c-1)(c-a)u+(d-1)(d-a)=0,$$
$$b(b-1)(b-a)z+c(c-1)(c-a)u+d(d-1)(d-a)=0.$$

Nakoniec rugujemy z, mnożąc pierwsze równanie ostatniego układu przez b i odciągając od drugiego; co daje

$$(c-1)(c-a)(c-b)u+(d-1)(d-a)(d-b)=0,$$

zkąd

$$u=-\frac{(d-1)(d-a)(d-b)}{(c-1)(c-a)(c-b)},$$

Podstawiając wartość u w jednem z dwóch równań ostatniego układu, znalezionoby wartość dla z; a następnie, podstawiając wartości u i z w jednem z trzech równań przedostatniego układu, znalezionoby wartość dla y; nakoniec przez podstawienie wartości u, z, y w jednem z równań zadanych, znalezionoby wartość dla x.

Ale, korzystając z symetryi równań, można z wartości znalezionej dla jednej niewiadomej wyprowadzić wartości dla wszystkich innych, bez żadnego rachunku, prostą przemianą liter. Oto jakim wielce użytecznym sposobem. Uważamy że, przemieniając nawzajem niewiadome z i u, i także nawzajem ich spółczynniki b i c, nie przeinaczamy równań; więc, żeby z wartości u wyprowadzić wartość dla z, dość jest oczywiście przemienić w formule spółczynnik c na b i nawzajem. Tak samo z wartości u wywodzi się wartość dla y, wzajemną przemianą spółczynników c i a; nakoniec wartość dla x otrzymuje się wzajemną przemianą spółczynników c i 1.

Mamy więc odrazu

$$z=-\frac{(d-1)(d-a)(d-c)}{(b-1)(b-a)(b-c)},$$

$$y=-\frac{(d-1)(d-b)(d-c)}{(a-1)(a-b)(a-c)},$$

$$x=-\frac{(d-a)(d-b)(d-c)}{(1-a)(1-b)(1-c)}.$$

Przykład X. Rozwiązać trzy równania

$$\frac{x^m}{a^{m+n}}=\frac{y^m}{b^{m+n}}=\frac{z^m}{c^{m+n}},$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^m+\left(\frac{y}{b}\right)^m+\left(\frac{z}{c}\right)^m=1.$$

Ten układ jest równowarty następującemu

$$\frac{\left(\frac{x}{a}\right)^m}{a^n}=\frac{\left(\frac{y}{b}\right)^m}{b^n}=\frac{\left(\frac{z}{c}\right)^m}{c^n}=\frac{1}{a^n+b^n+c^n};$$

zkąd

$$x=a\sqrt[m]{\frac{a^n}{a^n+b^n+c^n}},$$

$$y=b\sqrt[m]{\frac{b^n}{a^n+b^n+c^n}},$$

$$z=c\sqrt[m]{\frac{c^n}{a^n+b^n+c^n}}.$$

PRZYKŁAD XI. Rozwiązać równania szczególnego kształtu

$$\frac{x^2}{\rho^2}+\frac{y^2}{\rho^2-b^2}+\frac{z^2}{\rho^2-c^2}=1,$$

$$(1)\qquad \frac{x^2}{\mu^2}+\frac{y^2}{\mu^2-b^2}+\frac{z^2}{\mu^2-c^2}=1,$$

$$\frac{x^2}{\nu^2}+\frac{y^2}{\nu^2-b^2}+\frac{z^2}{\nu^2-c^2}=1.$$

Dla symetryi rachunku bierzemy następujące równania

$$\frac{x^2}{\rho^2-a^2}+\frac{y^2}{\rho^2-b^2}+\frac{z^2}{\rho^2-c^2}=1,$$

$$(2)\qquad \frac{x^2}{\mu^2-a^2}+\frac{y^2}{\mu^2-c^2}+\frac{z^3}{\mu^2-c}=1,$$

$$\frac{x^2}{\nu^2-a^2}+\frac{y^2}{\nu^2-b^2}+\frac{z^2}{\nu^2-c^2}=1.$$

Rugujemy x^2 między dwoma pierwszemi równaniami, znosząc mianowniki ρ^2-a^2, μ^2-a^2, i odciągając stronami; co daje

$$y^2\left(\frac{\rho^2-a^2}{\rho^2-b^2}-\frac{\mu^2-a^2}{\mu^2-b^2}\right)+z^2\left(\frac{\rho^2-a^2}{\rho^2-c^2}-\frac{\mu^2-a^2}{\mu^2-c^2}\right)=\rho^2-\mu^2,$$

albo

$$(3)\qquad \frac{(a^2-b^2)y^2}{(\rho^2-b^2)(\mu^2-b^2)}+\frac{(a^2-c^2)z^2}{(\rho^2-c^2)(\mu^2-c^2)}=1.$$

Rugując podobnie x^2 między pierwszem równaniem i trzeciem, znajdujemy

$$(4)\qquad \frac{(a^2-b^2)y^2}{(\rho^2-b^2)(\nu^2-b^2)}+\frac{(a^2-c^2)z^2}{(\rho^2-c^2)(\nu^2-c^2)}=1.$$

Poczem rugując y^2 między równaniami (3), (4), i otrzymujemy

$$\frac{(a^2-c^2)(b^2-c^2)z^2}{(\rho^2-a^2)(\mu^2-b^2)(\nu^2-c^2)}=1.$$

Zkąd

$$z^2=\frac{(\rho^2-a^2)(\mu^2-b^2)(\nu^2-c^2)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}.$$

Z tej wartości wzajemną przemianą liter z i x, c i a; z i y, c i b, wywodzimy

$$x^2=\frac{(\rho^2-a^2)(\mu^2-a^2)(\nu^2-a^2)}{(a^2-c^2)(a^2-b^2)},\qquad y^2=\frac{(\rho^2-b^2)(\mu^2-b^2)(\nu^2-b^2)}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)}.$$

Czyniąc teraz $a^2=0$, mamy rozwiązanie równań (1)

$$x^2=\frac{\rho^2\mu^2\nu^2}{b^2c^2},\qquad y^2=\frac{(\rho^2-b^2)(\mu^2-b^2)(\nu^2-b^2)}{b^2(b^2-c^2)},$$

$$z^2=\frac{(\rho^2-c^2)(\mu^2-c^2)(\nu^2-c^2)}{c^2(c^2-b^2)},$$

Binet rozwiązuje sposobem eleganckim równania (1). Bierze wyrażenie ogólne

$$\frac{x^2}{t}+\frac{y^2}{t-b^2}+\frac{z^2}{t-c^2}-1,$$

i, sprowadzając do spólnego mianownika, otrzymuje tosamość względem t,

$$\frac{x^2}{t}+\frac{y^2}{t-b^2}+\frac{z^2}{t-c^2}-1=-\frac{t^3+\mathrm{A}t^2+\mathrm{B}t+\mathrm{C}}{t(t-b^2)(t-c^2)},$$

w której nie ma potrzeby obliczać spółczynników A, B, C.

Owoż na mocy równań (1), pierwsza strona ostatniej równości staje się zerem dla $t=\rho^2$, $t=\mu^2$, $t=\nu^2$; więc wielomian $t^3+\mathrm{A}t^2+\mathrm{B}t+\mathrm{C}$, stając się zerem dla tych samych wartości t, musi być wieloczynem czynników $t-\rho^2$, $t-\mu^2$, $t-\nu^2$ (nº 55); co daje

$$\frac{x^2}{t}+\frac{y^2}{t-\mu}+\frac{z^6}{t-\nu^2}-1=-\frac{(t-\rho^2)(t-\mu^2)(t-\nu^2)}{t(t-b^2)(t-c^2)}.$$

Znosząc teraz mianownik t i czyniąc potem $t=0$, otrzymuje się

$$x^2=\frac{\rho^2\mu^2\nu^2}{b^2c^2}.$$

Tak samo, znosząc po kolei mianowniki $t-b^2$, $t-c^2$ i czyniąc odpowiednio $t=b^2$, $t=c^2$, otrzyma się

$$y^2=\frac{(\rho^2-b^2)(\mu^2-b^2)(\nu^2-b^2)}{b^2(b^2-c^2)},\quad z^2=\frac{(\rho^2-c^2)(\mu^2-c^2)(\nu^2-c^2)}{c^2(c^2-b^2)}.$$

Przykład XII. Rozwiązać układ trzech równań

$$\frac{b}{z}+\frac{c}{y}=a,$$

$$\frac{c}{x}+\frac{a}{z}=b,$$

$$\frac{a}{y}+\frac{b}{x}=c.$$

Mnożąc pierwsze równanie przez a, drugie przez b, trzecie przez c, dodając stronami dwa ostatnie i odciągając pierwsze, będzie

$$\frac{2bc}{x}=b^2+c^2-a^2,$$

zkąd

$$x=\frac{2bc}{b^2+c^2-a^2}.$$

Uważając że równania się nie zmieniają gdy się przemienia x i y, a i b, albo x i z, a i c, z wartości dla x wywodzą się wartości dla y i z

$$y=\frac{2ac}{a^2+c^2-b^2},\quad z=\frac{2ab}{a^2+b^2-c^2}.$$

Przykład XIII. Rozwiązać równania

$$\frac{xy}{ay+bx}=\frac{1}{c},\quad \frac{xz}{az+cx}=\frac{1}{b},\quad \frac{yz}{bz+cy}=\frac{1}{a}.$$

Weźmy odwrotności, będziemy mieli

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=c,$$

$$\frac{a}{x}+\frac{c}{z}=b,$$

$$\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=a.$$

Dodajemy teraz stronami wszystkie równania, i, czyniąc

$$a+b+c=2s,$$

znajdujemy

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=s;$$

zkąd, odciągając stronami każde z trzech poprzedzających równań, wynika

$$\frac{c}{z}=s-c,\quad \frac{b}{y}=s-b,\quad \frac{a}{x}=s-a.$$

Więc, biorąc odwrotności, otrzymujemy rozwiązanie

$$x=\frac{a}{s-a},\quad y=\frac{b}{s-b},\quad z=\frac{c}{s-c}.$$

Przykład XIV. Rozwiązać równania

$$ax^3=by^3=cz^3$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{d},$$

i wyrachować $ax^2+by^2+cz^2$.

Pierwsze równania na mocy ostatniego mogą wziąć kształt

$$\frac{a^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{x}}=\frac{b^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{y}}=\frac{c^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{z}}=\frac{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{d}};$$

zkąd się wywodzą wartości niewiadomych,

$$x=\frac{d\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{3}}},\qquad y=\frac{d\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}}\right)}{b^{\frac{1}{3}}},$$

$$z=\frac{d\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}}\right)}{c^{\frac{1}{3}}}.$$

Mamy następnie

$$ax^2=d^2\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}}\right)^2 a^{\frac{1}{3}},$$

$$by^2=d^2\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}}\right) b^{\frac{1}{3}},$$

$$cz^2=d^2\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}}\right)^2 c^{\frac{1}{3}},$$

więc

$$ax^2+by^2+cz^2=d^2\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}}\right)^3.$$

Przykład XV. Wyznaczyć spółczynniki a, b, c, tak żeby dwa następujące układy równań

$$\begin{aligned} ax+by-cz&=1, \\ ax-by+cz&=3, \\ by-ax+cz&=5, \end{aligned}\qquad \text{i}\qquad \begin{aligned} x+y-z&=2, \\ x-y+z&=4, \\ y-x+z&=6, \end{aligned}$$

były sprawdzone przez te same wartości niewiadomych x, y, z

Rozwiązujemy drugi układ, i znajdujemy wartości

$$x=3,\quad y=4,\quad z=5,$$

które, podstawione w pierwszym układzie, dają równania

$$3a+4b-5c=1,$$

$$3a-4b+5c=3,$$

$$4b-3a+5c=5.$$

Jeśli rozwiążemy te ostatnie, otrzymamy szukane wartości spółczynników a, b, c. Owoż, dodając stronami dwa pierwsze równania, znajdujemy

$$a=\frac{2}{3};$$

dodając pierwsze równanie do trzeciego, mamy

$$b=\frac{3}{4};$$

nakoniec, dodając drugie równanie do trzeciego, będzie

$$c=\frac{4}{5}.$$

Podstawiamy te wartości w pierwszym układzie, i znajdujemy równania

$$40x+45y-48z=60,$$

$$40x-45y+48z=180,$$

$$45x-40y+48z=300,$$

które, z równaniami

$$x+y-z=2,$$

$$x-y+z=4.$$

$$y-x+z=6,$$

mają spólne rozwiązanie

$$x=3,\quad y=4,\quad z=5.$$

Przykład XVI. Rozwiązać równania

$$\frac{xyzu}{y+z+u}=a,\quad \frac{xyzu}{x+z+u}=b,\quad \frac{xyzu}{x+y+u}=c,$$

$$\frac{xyzu}{x+y+z}=d.$$

Te równania mogą wziąć kształt

$$\frac{y+z+u}{\frac{1}{a}}=\frac{x+z+u}{\frac{1}{b}}=\frac{x+y+u}{\frac{1}{c}}=\frac{x+y+z}{\frac{1}{d}}=xyzu,$$

zkąd wynika

$$\frac{3x}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}-\frac{2}{a}}=\frac{3y}{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}-\frac{2}{b}}=\frac{3z}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{d}-\frac{2}{c}}$$

$$=\frac{3u}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{2}{d}}=xyzu.$$

Uczyńmy

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{3}{s},$$

będzie

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}-\frac{2}{a}=3\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{a}\right),$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}-\frac{2}{b}=3\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{b}\right),$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{d}-\frac{2}{c}=3\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{c}\right),$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{d}=3\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{d}\right);$$

zatem

$$\frac{x}{\frac{1}{s}-\frac{1}{a}}=\frac{y}{\frac{1}{s}-\frac{1}{b}}=\frac{z}{\frac{1}{s}-\frac{1}{c}}=\frac{u}{\frac{1}{s}-\frac{1}{d}}=xyzu.$$

Owoż, wieloczyn czterech stosunków równa się

$$\frac{xyzu}{\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{d}\right)}=x^4y^4z^4u^4,$$

co daje

$$xyzu=\sqrt[3]{\frac{1}{\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{d}\right)}};$$

mamy więc

$$x=\sqrt[3]{\frac{\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{a}\right)^2}{\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{d}\right)}},$$

$$y=\sqrt[3]{\frac{\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{b}\right)^2}{\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{d}\right)\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{a}\right)}},$$

$$z=\sqrt[3]{\frac{\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{c}\right)^2}{\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{d}\right)}},$$

$$u=\sqrt[3]{\frac{\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{d}\right)^2}{\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{c}\right)}}.$$

Przykład XVII. Znaleźć warunki pod jakiemi pięć następujących równań sprawdzają się przez te same wartości niewiadomych x, y, z; albo co to samo, wyrugować x, y, z, między pięcioma równaniami

$$\frac{A}{1+x^2}=\frac{A'}{1+y^2}=\frac{A''}{1+z^2}=\frac{B}{yz}=\frac{B'}{xz}=\frac{B''}{xy}.$$

Biorąc odwrotności, mamy

$$\frac{1+x^2}{A}=\frac{1+y^2}{A'}=\frac{1+z^2}{A''}=\frac{yz}{B}=\frac{xz}{B'}=\frac{xy}{B''}.$$

Owoż, ostatnie trzy stosunki dają

$$Bx = B'y = B''z;$$

zkąd

$$\frac{yz}{B} = \frac{x^2}{\frac{B'B''}{B}}, \quad \frac{xz}{B'} = \frac{y^2}{\frac{B''B}{B'}}, \quad \frac{xy}{B''} = \frac{z^2}{\frac{BB'}{B}}.$$

Podstawiając te wartości, otrzymujemy

$$\frac{1+x^2}{A} = \frac{1+y^2}{A'} = \frac{1+z^2}{A''} = \frac{x^2}{\frac{B'B''}{B}} = \frac{y^2}{\frac{B''B}{B'}} = \frac{z^2}{\frac{BB'}{B''}}.$$

Jeśli teraz odciągniemy wyrazami czwarty stosunek od pierwszego, piąty od drugiego i szósty od trzeciego, będzie

$$\frac{1}{A - \frac{B'B''}{B}} = \frac{1}{A' - \frac{B''B}{B'}} = \frac{1}{A'' - \frac{BB'}{B''}};$$

więc

$$A - \frac{B'B''}{B} = A' - \frac{B''B}{B'} = A'' - \frac{BB'}{B''}.$$

143. Metoda Bezuta (*Bezout*). Można rozwiązywać równania pierwszego stopnia sposobem podanym przez *Bezuta*, czyli tak zwaną *metodą mnożników*, która w różnych przypadkach jest użyteczna, szczególniej teorycznie.

Niech będzie n równań mających n niewiadomych,

$$(1) \quad \begin{cases} ax + by + cz + \ldots + ht = k, \\ a_1x + b_1y + c_1z + \ldots + h_1t = k_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z + \ldots + h_2t = k_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-1}x + b_{n-1}y + c_{n-1}z + \ldots + h_{n-1}t = k_{n-1}. \end{cases}$$

Wyjąwszy pierwsze, pomnóżmy te równania przez liczby niewyznaczone $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_{n-1}$, i dodajmy wszystkie stronami, będzie

$$
(2) \quad \left.\begin{array}{l}
(a+a_1\lambda_1+a_2\lambda_2+\ldots+a_{n-1}\lambda_{n-1})x \\
(b+b_1\lambda_1+b_2\lambda_2+\ldots+b_{n-1}\lambda_{n-1})y \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(h+h_1\lambda_1+h_2\lambda_2+\ldots+h_{n-1}\lambda_{n-1})t
\end{array}\right\} = k+k_1\lambda_1+k_2\lambda_2+\ldots + k_{n-1}\lambda_{n-1}.
$$

To równanie może zastąpić jedno z równań zadanego układu, jakiekolwiek są mnożniki $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{n-1}$. Ale, co jest ważniejsze, i co właśnie stanowi metodę rozwiązywania równań pierwszego stopnia, można wyznaczyć mnożniki λ tak, żeby w równaniu (2) spółczynniki wszystkich niewiadomych oprócz jednej, x naprzykład, były zerami, to jest żeby $n-1$ równaniom

$$
(3) \quad \left\{\begin{array}{l}
b+b_1\lambda_1+b_2\lambda_2+\ldots+b_{n-1}\lambda_{n-1}=0, \\
c+c_1\lambda_1+c_2\lambda_2+\ldots+c_{n-1}\lambda_{n-1}=0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
h+h_1\lambda_1+h_2\lambda_2+\ldots+h_{n-1}\lambda_{n-1}=0,
\end{array}\right.
$$

stawało się zadość. Trzeba tylko rozwiązać $n-1$ równań mających $n-1$ niewiadomych. Przez podstawienie znalezionych wartości dla $\lambda, \lambda_2, \lambda_3 \ldots \lambda_{n-1}$, równanie (2) będzie zawierało samą jedną niewiadomą x, i, przywiedzione do kształtu

$$(a+a_1\lambda_1+a_2\lambda_2+\ldots+a_{n-1}\lambda_{n-1})x=k+k_1\lambda_1+\ldots+k_{n-1}\lambda_{n-1}$$

wyznaczy jej wartość

$$x=\frac{k+k_1\lambda_1+k_2\lambda_2+\ldots+k_{n-1}\lambda_{n-1}}{a+a_1\lambda_1+a_2\lambda_2+\ldots+a_{n-1}\lambda_{n-1}}.$$

Metodą *Bezuta*, jako widzimy, otrzymuje się wprost wartość którejkolwiek z niewiadomych, nie potrzebując rugować innych. A co więcej jeszcze, ta sama metoda służy do wyznaczenia wszystkich niewiadomych; dość tylko wykonać dla każdej z nich działanie jakiem znaleziono x. I tak, jeśli chcemy otrzymać wartość y, trzeba zrównać do zera spółczynniki $n-1$ innych niewiadomych, rozwiązać $n-1$ równań, i ztąd wynikające nowe wartości dla mnożników $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{n-1}$ podstawić w równaniu (2), ktore, stając się równaniem o jednej niewiadomej y, wyznaczy jej wartość.

Znalezione tym sposobem wartości dla $x, y, z, \ldots t$ sprawdzają zadane równania (1). Albowiem równanie (2) powinno istnieć jakiekolwiek są liczby $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ldots \lambda_{n-1}$; wolno więc wybrać je tak żeby czyniły zerami spółczynniki niewiadomych, oprócz jednej. Owoż, za każdym razem otrzymuje się równanie o jednej niewiadomej, które może zastąpić jedno z równań układu (1); więc te wszystkie równania o jednej niewiadomej, stanowiące układ równowarty zadanemu, dają jego rozwiązanie.

Metodą mnożników rozwiązuje się n równań pierwszego stopnia mających n niewiadomych; byle umiano rozwiązać układ zawierający $n-1$ równań i $n-1$ niewiadomych. Aliści umiemy rozwiązywać jedno równanie o jednej niewiadomej; możemy więc, podług tej metody, rozwiązać układ dwóch równań o dwóch niewiadomych; a zatem układ trzech równań o trzech niewiadomych; i tak następnie; ilekolwiek jest równań z tą samą liczbą niewiadomych,

Przykład. Za pomocą wyłożonej metody rozwiążemy trzy następujące równania

$$3x-6y+5z=12,$$

$$(1)\qquad 8x+4y-7z=10,$$

$$5x-2y-z=4.$$

Mnożymy drugie równanie przez λ, trzecie przez λ', i potem, dodając stronami wszystkie trzy, mamy równanie

$$(2)\qquad (3+8\lambda+5\lambda')x+(-6+4\lambda-2\lambda')y,$$

$$+(5-7\lambda-\lambda')z=12+10\lambda+4\lambda'.$$

Aby teraz otrzymać wartość x, trzeba zrównać do zera spółczynniki niewiadomych y i z; co daje

$$-6+4\lambda-2\lambda'=0,$$

$$5-7\lambda-\lambda'=0,$$

albo

$$2\lambda-\lambda'=3,$$

$$7\lambda+\lambda'=5.$$

Rozwiązując te dwa równania, znajdujemy wartości

$$\lambda=\frac{8}{9} \quad \text{i} \quad \lambda'=-\frac{11}{9},$$

które, podstawione w równaniu (2), przywodzą je do

$$\left(3+8.\frac{8}{9}-5.\frac{11}{9}\right)x=12+10.\frac{8}{9}-4.\frac{11}{9};$$

zkąd

$$x=4.$$

Dla otrzymania wartości y, równamy do zera spółczynniki niewiadomych x i z w równaniu (2); co daje

$$3+8\lambda+5\lambda'=0,$$

$$5-7\lambda-\lambda'=0.$$

Rozwiązujemy te dwa równania, i znajdujemy dla λ i λ' nowe wartości

$$\lambda=\frac{28}{27}, \quad \lambda'=-\frac{61}{27},$$

które podstawione w równaniu (2) przywodzą je do

$$\left(-6+4.\frac{28}{27}+2.\frac{61}{27}\right)x=12+10.\frac{28}{27}-4.\frac{61}{27};$$

zkąd

$$y=5.$$

Bierzemy nareszcie dwa równania

$$3+8\lambda+5\lambda'=0,$$

$$-3+2\lambda-\lambda'=0,$$

które dają

$$\lambda=\frac{2}{3}, \quad \lambda'=-\frac{5}{3}.$$

Przez podstawienie tych wartości, równanie (2) staje się

$$\left(5-\frac{14}{3}+\frac{5}{3}\right)z=12+\frac{20}{3}-\frac{20}{3},$$

zkąd wyciągamy

$$z=6.$$

Ta jednostajność rachunku do znajdowania wartości każdej niewiadomej, wprost i niezależnie od innych, dowodzi że metoda *mnożników niewyznaczonych* jest ogólna, i wystarcza sama sobie. Ale, chociaż zawsze elegancka, rzadko jest praktycznie dogodniejsza od innych.

144. Zastosujemy jeszcze metodę *Bezuta* do rozwiązywania dwóch równań pierwszego stopnia o dwóch niewiadomych,

$$(1)\qquad \begin{aligned} 4x-9y&=13, \\ 6x+15y&=29. \end{aligned}$$

Mnożąc drugie równanie przez λ i potem dodając stronami do pierwszego, będzie

$$(2)\qquad (4+6\lambda)x+(-9+15\lambda)y=13+29\lambda.$$

Aby otrzymać wartość niewiadomej x, równamy do zera spółczynnik niewiadomej y; co daje

$$-9+15\lambda=0,$$

zkąd

$$\lambda=\frac{3}{5}.$$

Podstawiając tę wartość w równaniu (2), będzie

$$\left(4+6.\frac{3}{5}\right)x=13+29.\frac{3}{5},$$

albo

$$(3)\qquad (4.5+6.3)x=13.5+29.3;$$

ztąd

$$x=4.$$

Dla znalezienia wartości y, równamy do zera spółczynnik niewiadomej x i mamy

$$4+6\lambda=0;$$

zkąd

$$\lambda=-\frac{2}{3}.$$

Ta wartość, podstawiona w równaniu (2), przywodzi je do

$$\left(-9-15.\frac{2}{3}\right)x=13-29.\frac{2}{3},$$

albo

$$(4)\qquad (9.3+15.2)x=29.2-13.3;$$

zkąd

$$y=\frac{1}{3}.$$

Równania (3) i (4) są te same które się otrzymuje rugując y albo x przez dodawanie albo odciąganie. To pokazuje że, w rozwiązywaniu dwóch równań pierwszego stopnia, metoda rugowania przez dodawanie albo odciąganie, i ztąd wynikające rozwiązanie, jest prostym przypadkiem metody mnożników.

PRZYPADKI W KTÓRYCH LICZBA NIEWIADOMYCH NIE JEST RÓWNA LICZBIE RÓWNAŃ.

145. Przypadek w którym jest więcej równań niż niewiadomych. Niech będą naprzyład trzy równania o dwóch niewiadomych

$$3x+4y=18,$$
$$5x-2y=4,$$
$$6x+y=3.$$

Rozwiązując dwa którekolwiek z trzech równań, otrzymamy wartości dla x i y. Ale, żeby te wartości były rozwiązaniem całego układu, trzeba jeszcze żeby czyniły zadość trzeciemu równaniu. Jeśli dopełniają tego warunku, wtedy trzecie równanie jest następstwem dwóch innych, i układ trzech równań przywodzi się do dwóch tylko równań oddzielnych; a jeśli przeciwnie, znalezione wartości x i y nie sprawdzają trzeciego równania, to wtenczas zadany układ trzech równań jest niemożebny.

W powyższym przykładzie, rozwiązując dwa pierwsze równania, otrzymujemy

$$x=2 \quad \text{i} \quad y=3.$$

Te wartości nie czynią zadość ostatniemu równaniu, więc trzy zadane równania nie mogą istnieć jednocześnie.

Gdyby było

$$3x+4y=18,$$

$$5x-2y=4,$$

$$14x-9y=1,$$

ponieważ rozwiązanie $x=2$, $y=3$, dwóch pierwszych równań, sprawdza trzecie, ztąd wnieślibyśmy że to trzecie równanie nie jest oddzielne i musi wynikać z dwóch pierwszych. W samej rzeczy, można je otrzymać mnożąc pierwsze równanie przez 17 a drugie przez 83, odciągając pierwsze od drugiego i dzieląc wynik przez 26. Więc ten układ zawiera tylko dwa równania oddzielne, i ma rozwiązanie $x=2$, $y=3$.

Wogóle, gdy jest $n+p$ równań a tylko n niewiadomych, wtedy, rozwiązując n którychkolwiek z tych równań, otrzymuje się wartości które same jedne mogą sprawdzić układ; ale trzeba żeby, podstawione w p równaniach pozostałych, zadość im czyniły; jeśli nie, układ będzie niemożebny.

Gdy spółczynniki niewiadomych, albo tylko niektóre z nich, są oznaczone literami których wartość nie jest dana, wtedy znalezione wartości niewiadomych, podstawione w p równaniach pozostałych, wyrażają p warunków którym spółczynniki literalne zadość czynić powinny. Dlatego te ostatnie równania między spółczynnikami literalnemi nazywają się *równaniami warunkowemi*.

I tak, niech będą cztery równania, między dwiema niewiadomemi x i y, zawierające ilości niewyznaczone a i b,

$$x+y=a,$$
$$x-y=b,$$
$$2x-3y=a-2b,$$
$$4x+5y=2a-b+6.$$

Z dwóch pierwszych równań wyciągamy

$$x=\frac{a+b}{2}, \qquad y=\frac{a-b}{2},$$

i podstawiamy te wartości w dwóch ostatnich równaniach; co daje dwa równania warunkowe

$$a-3b=0,$$
$$5a-3b=12.$$

Ztąd

$$a=3, \qquad b=1.$$

Te wartości dla a i b wyrażają warunki pod jakiemi cztery zadane równania są zgodne. Przez ich podstawienie zadany układ staje się

$$x+y=3,$$
$$x-y=1,$$
$$2x-3y=1,$$
$$4x+5y=13;$$

i wartości

$$x=2, \quad y=1,$$

które rozwiązują dwa pierwsze równania, czynią zadość dwom ostatnim. Ztąd wnosimy że w powyższym układzie tylko dwa równania są oddzielne, a dwa inne z nich się wywodzą.

146. Uwaga. Można nie znając wartości niewiadomych x i y, zapewnić się czy jedno z równań układu jest następstwem innych. I tak, mając dane trzy równania

$$x+y=3,$$

$$x-y=1,$$

$$4x+5y=13,$$

żeby wiedzieć czy, na przykład, trzecie wywodzi się z dwóch innych, i jakim sposobem, dość jest pomnożyć pierwsze przez λ, drugie przez λ', i szukać rozwiązania trzech następujących równań, o dwóch niewiadomych λ, λ',

$$\lambda+\lambda'=4,$$

$$\lambda-\lambda'=5,$$

$$3\lambda+\lambda'=13.$$

Owoż, dwa pierwsze z tych równań dają wartości

$$\lambda=\frac{9}{2}, \quad \text{i} \quad \lambda'=-\frac{1}{2},$$

które sprawdzają trzecie równanie.

To dowodzi że mnożąc przez 9 pierwsze równanie danego układu, odciągając stronami drugie i dzieląc wynik przez 2, otrzymuje się trzecie równanie. Więc każde z trzech równań tego układu jest następstwem dwóch innych.

147. W przykładzie któryśmy obszernie rozwinęli, były dwa równania warunkowe zawierające dwa spółczynniki literalne; dlatego wartość każdego spółczynnika została wyznaczona; chociaż, jako wiemy, w przypadkach szczególnych mogłoby się stać inaczej. Gdy jest więcej spółczynników niewyznaczonych niż równań warunkowych, wtedy można rozporządzić dowolnie niektóremi z tych spółczynników; ale gdy jest przeciwnie, mniej spółczynników niewyznaczonych niż równań warunkowych, te równania są wogóle niezgodne, i temsamem równania zadane.

Niech będą teraz cztery równania o dwóch niewiadomych x i y, z trzema spółczynnikami niewyznaczonemi a, b, c.

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} ay-x=1, \\ bx-y=2, \\ 3y-5x=c, \\ 3ay+cx=3. \end{array} \right.$$

Dwa pierwsze równania dają

$$x=\frac{2a+1}{ab-1}, \qquad y=\frac{b+2}{ab-1}.$$

Podstawiając te wartości w dwóch ostatnich równaniach, rugujemy x, y, i otrzymujemy dwa równania warunkowe z trzema niewyznaczonemi a, b, c

$$3(b+2)-5(2a+1)=c(ab-1),$$

$$3a(b+2)+c(2a+1)=3(ab-1).$$

Owoż, ostatnie równanie, biorąc kształt wieloczynu

$$(2a+1)(c+3)=0,$$

rozkłada się na dwa równania

$$c+3=0 \quad \text{i} \quad 2a+1=0.$$

Mamy więc dwa układy równań warunkowych

$$(2) \quad \begin{cases} c+3=0, \\ 3(b+2)-5(2a+1)-c(ab-1)=0, \end{cases}$$

i

$$(3) \quad \begin{cases} 2a+1=0, \\ 3(b+2)-5(2a+1)-c(ab-1)=0. \end{cases}$$

Pierwszy z dwóch układów daje

$$c=-3,$$

$$b=\frac{2(5a+1)}{3(a+1)}.$$

Spółczynnik c ma wartość wyznaczoną. Ale spółczynniki a i b, związane jednem tylko równaniem zostają niewyznaczone; można więc dać wartość dowolną jednemu z nich.

Jeśli weźmiemy naprzykład $a=1$, będziemy mieli

$$a=1,$$
$$b=2,$$
$$c=-3.$$

Przez podstawienie tych trzech wartości, równania (1) stają się

$$y-x=1,$$
$$2x-y=2,$$
$$3y-5x=-3,$$
$$3y-3x=3.$$

Ostatnie równanie jest oczywiście to samo co pierwsze; a rozwiązując na przykład dwa pierwsze równania, znajdujemy wartości

$$x=3, \qquad y=4,$$

które sprawdzają trzecie. Więc te trzy równania są zgodne, i stanowią układ dwóch tylko równań oddzielnych.

Nadając inne wartości spółczynnikowi a, otrzyma się inne zgodne równania, mające inne rozwiązania.

Uważajmy teraz układ (3), który bierze kształt

$$2a+1=0,$$
$$(b+2)(c+6)=0.$$

Ponieważ drugie równanie rozkłada się na dwa, mamy dwa układy równań warunkowych

$$(4) \qquad \begin{cases} 2a+1=0, \\ c+6=0. \end{cases}$$

$$(5) \qquad \begin{cases} 2a+1=0, \\ b+2=0. \end{cases}$$

Pierwszy układ daje

$$a=-\frac{1}{2} \quad \text{i} \quad c=-6.$$

Podstawiając te wartości w równaniach (1), otrzymujemy

$$(6) \qquad \begin{cases} y+2x=-2, \\ bx-y=2, \\ 3y-5x=-6, \\ -3y-6x=3. \end{cases}$$

Ostatnie równanie jest to samo co pierwsze. Owoż, rozwiązując pierwsze równanie z trzeciem, znajdujemy wartości

$$x=0 \quad \text{i} \quad y=-2,$$

które zadość czynią drugiemu równaniu, jakiekolwiek jest b; więc równania (6) są zgodne niezależnie od wartości spółczynnika b.

Nakoniec układ (5) dostarcza

$$a=-\frac{1}{2} \quad \text{i} \quad b=-2.$$

Przez podstawienie tych wartości zadane równania (1) stają się

$$(7) \qquad \left\{\begin{array}{l} y+2x=-2, \\ 2x+y=-2, \\ 3y-5x=c, \\ 3y-2cx=-6. \end{array}\right.$$

Dwa pierwsze równania są te same, a pierwsze z trzeciem mają rozwiązanie

$$x=-\frac{c+6}{11} \quad \text{i} \quad y=\frac{2c-10}{11}.$$

Podstawiając te wartości w czwartem równaniu, otrzymujemy równanie warunkowe

$$c^2+9c+18=0,$$

któremu powinno stać się zadość, żeby układ (7) był możebny. To równanie drugiego stopnia, które wkrótce będziemy umieli rozwiązywać, ma dwa pierwiastki

$$c=-3 \quad \text{i} \quad c=-6.$$

Przez podstawienie pierwszego pierwiastku $c=-3$, czwarte równanie ztosamia się z pierwszem, i układ (7) przywodzi się do dwóch równań

$$y+2x=-2,$$
$$3y-5x=-3,$$

które się rozwiązują przez

$$x=-\frac{3}{11},\quad y=-\frac{16}{11}.$$

A jeśli podstawimy drugi pierwiastek $c=-6$, będziemy mieli trzy równania

$$y+2x=-2,$$
$$3y-5x=-6,$$
$$y+4x=-2,$$

które są różnego kształtu ale zgodne, mające rozwiązanie

$$x=0,\quad y=-2.$$

148. Przypadek w którym jest więcej niewiadomych niż równań. Niech będą dwa równania o trzech niewiadomych x, y, z,

$$2x-5y+z=10,$$
$$4x+3y-z=12.$$

Uważając jedną z niewiadomych, na przykład z, jako ilość wiadomą, można rozwiązać układ tych dwóch równań i otrzymać wartości x i y wyrażone przez z, to jest znaleźć formuły za pomocą których będą wiadome wartości x i y skoro z będzie dane. Jakoż, rozwiązując te równania względem x i y, otrzymujemy dwie formuły

$$x=\frac{z+45}{13},$$

$$y=\frac{3z-8}{13}.$$

które przedstawiają wartości niewiadomych x i y, tak że, na każdą wartość wziętą dowolnie dla z, dają odpowiedającą wartość dla x i y. Więc układ dwóch równań o trzech niewiadomych ma nieograniczoną liczbę rozwiązań, czyli jako się mówi, jest *niewyznaczony*.

Zogólniając to wszystko widzimy że, jeśli jest n równań i $n+p$ niewiadomych, można, rozwiązując te równania, otrzymać n formuł które wyrażają wartości n niewiadomych, przez p pozostałych niewiadomych mających wartości dowolne.

I tak, niech będzie układ

$$3x-4y+5z-6u-t=2,$$

$$x+2y-3z+u+2t=3.$$

Rozwiązując względem x i y, znajdujemy dwie formuły

$$x=\frac{8+z+4u-3t}{5},$$

$$y=\frac{7+14z-9u-7t}{10}.$$

Jeśli weźmiemy *dowolnie* $z=2$, $u=5$, $t=0$, będziemy mieli

$$x=6, \qquad y=-2.$$

ĆWICZENIA

I. Rozwiązać równania

$$px+qy=2xy.$$

$$\frac{p}{x}-\frac{q}{y}=1.$$

Odpowiedź : trzeba podzielić pierwsze równanie przez xy, i wziąć $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ za niewiadome.

Otrzyma się łatwo $x=\frac{p^2+q^2}{p+2q}$, $y=\frac{p^2-q^2}{2p-q}$. Sprawdzić to rozwiązanie.

II. Rozwiązać równania

$$\frac{y}{15}-\frac{3x}{10}+\frac{4}{9}=\frac{y}{10}-\frac{x}{12},$$

$$2x-2\frac{2}{3}=\frac{x}{12}-\frac{y}{15}+1\frac{1}{10}.$$

Odpowiedź : $x=2$, $y=-1$.

III. Rozwiązać równania

$$\frac{3x}{10}-\frac{2y}{15}=\frac{5}{6}-\frac{3y-4x+7}{5},$$

$$\frac{x}{2}+\frac{x-y}{15}-\frac{3y}{20}-1=\frac{x}{6}-\frac{y-1}{3}+\frac{1}{10}.$$

Odpowiedź : $x=3$, $y=2$.

IV. Rozwiązać równania

$$\frac{3y-1}{4}=\frac{6z}{5}-\frac{x}{2}+\frac{9}{5},$$

$$\frac{5x}{4}+\frac{4z}{3}=y+\frac{5}{6},$$

$$\frac{3x+1}{7}-\frac{z}{14}+\frac{1}{6}=\frac{2z}{21}+\frac{y}{3}.$$

Odpowiedź : $x=2,\quad y=3,\quad z=1.$

V. Rozwiązać równania

$$x+2y-3z=5,$$

$$4x-5y+6z=32,$$

$$7y-4z=22.$$

Odpowiedź : $x=8,\quad y=6,\quad z=5.$

VI. Rozwiązać równania

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{3}{z}=4,$$

$$\frac{1}{x}-\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=4,$$

$$\frac{2}{y}-\frac{1}{x}+\frac{3}{z}=8.$$

Odpowiedź : $x=\frac{1}{4},\quad y=\frac{1}{3},\quad z=\frac{1}{2}.$

VII. Rozwiązać równania

$$x-ay+a^2z=a^3,$$

$$x-by+b^2z=b^3,$$

$$x-cy+c^2z=c^3.$$

Odpowiedź : $x=abc,\quad y=ab+ac+bc,\quad z=a+b+c.$

VIII. Rozwiązać równania

$$ax+b(y+z-u)=a^2+3b^2,$$

$$ay+b(z+u-x)=2ab,$$

$$az+b(u+x-y)=a^2+3ab-2b^2,$$

$$au+b(x+y-z)=a^2-ab.$$

Odpowiedź : wyrachować summę niewiadomych z której się łatwo wywodzą wartości $x=a,\quad y=b,\quad z=a+b,\quad u=a-b.$

IX. Rozwiązać równania

$$a^4+a^3x+a^2y+az+u=0,$$

$$b^4+b^3x+b^2y+bz+u=0,$$

$$c^4+c^3x+c^2y+cz+u=0,$$

$$d^4+d^3x+d^2y+dz+u=0.$$

Odpowiedź :

$$x=-(a+b+c+d),$$
$$y=ab+ac+ad+bc+bd+cd,$$
$$z=-(abc+abd+acd+bcd),$$
$$u=abcd.$$

X. Rozwiązać równania

$$x+ay+a^2z+a^3u+a^4=0,$$

$$x+by+b^2z+b^3u+b^4=0,$$

$$x+cy+c^2z+c^3u+c^4=0,$$

$$x+dy+d^2z+d^3u+d^4=0.$$

Odpowiedź:

$$u=-(a+b+c+d),$$

$$z=ab+ac+ad+bc+bd+cd,$$

$$y=-(abc+abd+acd+bcd),$$

$$x=abcd.$$

XI. Rozwiązać cztery równania

$$x+2y+3z+4u=a,$$

$$y+2z+3u+4x=b,$$

$$z+2u+3x+4y=c,$$

$$u+2x+3y+4z=d.$$

Odpowiedź: czyniąc $a+b+c+d=s$, będzie

$$x=\frac{s}{8}-\frac{a-b}{4},\quad y=\frac{s}{8}-\frac{b-c}{4},\quad z=\frac{s}{8}-\frac{c-d}{4},$$

$$u=\frac{s}{8}-\frac{d-a}{4}.$$

XII. Rozwiązać równania

$$x-2y+z-3u=1,$$

$$7y-2x-4z+12u=4,$$

$$3x+y-3z+u=9,$$

$$2z-x-y+7u=6.$$

Odpowiedź: $x=5$, $y=2$, $z=3$, $u=1$.

XIII. Rozwiązać równania

$$x+5(y+z+u)=1,$$
$$2y+5(z+u+x)=2,$$
$$3z+5(u+x+y)=3,$$
$$4u+5(x+y+z)=4.$$

Odpowiedź : $x=\frac{68}{113}$, $y=\frac{53}{113}$, $z=\frac{23}{113}$, $u=-\frac{67}{113}$.

XIV. Rozwiązać równania

$$2x+3y=4,$$
$$2y+3z=4,$$
$$2z+3u=4,$$
$$2u+3x=4.$$

Odpowiedź : $x=y=z=u=\frac{4}{5}$.

XV. Rozwiązać równania

$$7u-11z=79,$$
$$3u+14x=57,$$
$$10y-3x=11,$$
$$2x-11z=50.$$

Odpowiedź : $x=3$, $y=2$, $z=-4$, $u=5$.

XVI. Rozwiązać równania

$$x+5z=29,$$
$$3y-2x+u=5,$$
$$4u-3z=13,$$
$$9x-7y-2u=8.$$

Odpowiedź : $x=4$, $y=2$, $z=5$, $u=7$.

XVII. Rozwiązać pięć równań

$$\begin{aligned} 2x+3y-4z&=-7,\\ 2y+3z-4u&=15,\\ 2z+3u-4t&=2,\\ 2u+3t-4x&=14,\\ 2t+3x-4y&=1. \end{aligned}$$

Odpowiedź : $x=3,\quad y=5,\quad z=7,\quad u=4,\quad t=6.$

XVIII. Rozwiązać równania

$$\begin{aligned} 2x+3(y+z+t+u)&=48,\\ 2y+3(z+t+u+x)&=44,\\ 2z+3(t+u+x+y)&=42,\\ 2t+3(u+x+y+z)&=40,\\ 2u+3(x+y+z+t)&=41. \end{aligned}$$

Odpowiedź : $x=2,\quad y=1,\quad z=3,\quad t=5,\quad u=4.$

XIX. Rozwiązać równania

$$\begin{aligned} x+y+z+t&=e,\\ u+x+y+z&=d,\\ t+u+x+y&=c,\\ z+t+u+x&=b,\\ y+z+t+u&=a, \end{aligned}$$

Odpowiedź: nazywając s summę drugich stron tych równań, będzie

$$x=\frac{s}{5}-a,\quad y=\frac{s}{5}-b,\quad z=\frac{s}{5}-c,\quad t=\frac{s}{5}-d,\quad u=\frac{s}{5}-e.$$

XX. Rozwiązać równania

$$ay+bx=c,$$

$$cx+az=b,$$

$$bz+cy=a,$$

Odpowiedź : $x=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $y=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$,

$$z=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

XXI. Rozwiązać równania

$$\frac{x}{a-\alpha}+\frac{y}{b-\alpha}+\frac{z}{c-\alpha}=1,$$

$$\frac{x}{a-\beta}+\frac{y}{b-\beta}+\frac{z}{c-\beta}=1,$$

$$\frac{x}{a-\gamma}+\frac{y}{b-\gamma}+\frac{z}{c-\gamma}=1.$$

Odpowiedź : sposobem podanym przez *Bineta* (stronica 232) otrzymuje się odrazu rozwiązanie

$$x=\frac{(a-\alpha)(a-\beta)(a-\gamma)}{(a-b)(a-c)},\quad y=\frac{(b-\alpha)(b-\beta)(b-\gamma)}{(b-a)(b-c)}$$

$$z=\frac{(c-\alpha)(c-\beta)(c-\gamma)}{(c-a)(c-b)}.$$

XXII. Rozwiązać równania

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=11,$$

$$\frac{3}{x}-\frac{4}{y}+\frac{5}{z}=16,$$

$$\frac{5}{x}+\frac{6}{y}-\frac{2}{z}=2.$$

Odpowiedź: Biorąc ilości $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$ za niewiadome posiłkowe, otrzymuje się łatwo ich wartości; zkąd $x=1$, $y=2$, $z=\frac{1}{3}$.

XXIII. Rozwiązać równania

$$y+z+u-x=a,$$
$$z+u+x-y=b,$$
$$u+x+y-z=c,$$
$$x+y+z-u=d.$$

Odpowiedź: $x=\frac{b+c+d-a}{4}$, $y=\frac{a+c+d-b}{4}$,

$$z=\frac{a+b+d-c}{4},\quad u=\frac{a+b+c-d}{4}.$$

XXIV. Rozwiązać równania

$$4x-3z=10,$$
$$2y-5u=5,$$
$$z+3t=19,$$
$$3x+y=13,$$
$$2y-3u=11.$$

Odpowiedź: $x=1$, $y=10$, $z=-2$, $u=3$, $t=7$.

XXV. Rozwiązać równania

$$3x-4y+3z-6u+3t=11,$$
$$3x-5y+2z-4u=11,$$
$$10y-3z+3u-2t=2,$$
$$5z+4u+2t-2x=3,$$
$$6u-3t+4x-2y=6.$$

Odpowiedź : $x=2,\quad y=1,\quad z=3,\quad u=-1,\quad t=-2$

XXVI. Rozwiązać równania

$$\sqrt{y}-\sqrt{20-x}=\sqrt{y-x},$$

$$3\sqrt{20-x}=2\sqrt{y-x}.$$

Odpowiedź : $x=16,\quad y=25.$

XXVII. Rozwiązać równania

$$x-y+z=0,$$

$$(a+b)x-(a+c)y+(b+c)z=0,$$

$$abx-acy+bcz=1.$$

Odpowiedź : $x=\frac{1}{(a-c)(b-c)},\quad y=\frac{1}{(a-b)(b-c)},$

$$z=\frac{1}{(a-b)(a-c)}.$$

XXVIII. Rozwiązać układ czterech równań

$$x+2y-3z+4u=5,$$

$$2x+y+4z-2u=3,$$

$$3x-y+2z+5u=10,$$

$$5x+7y-5z+10u=20.$$

Odpowiedź: ten układ jest niemożebny. Mnożąc pierwsze równanie przez 3 i dodając stronami do drugiego, otrzymuje się pierwszą stronę czwartego, ale drugie strony są nierówne; więc ostatnie równanie układu jest niezgodne z dwoma pierwszemi.

XXIX. Rozwiązać układ równań

$$2x-3y-4z+6u=9,$$

$$3x+4y+5z=8,$$

$$5x-3y+5z+6u=-3,$$

$$y-z=5.$$

Odpowiedź: Układ niewyznaczony; ma rozwiązanie

$$x=-4-3z, \quad y=5+z, \quad u=\frac{32+7z}{6},$$

w którem niewiadoma z zostaje dowolna. Dodając stronami dwa pierwsze równania, odciągając trzecie i dzieląc wynik przez 4, otrzymuje się czwarte równanie. Więc układ ma tylko *trzy* równania oddzielne zawierające *cztery* niewiadome.

XXX. Rozwiązać układ pięciu równań

$$2x-3y+4z-5u+6t=7,$$

$$y-z+3u=5,$$

$$2y-3z+2u-6t=4,$$

$$2x-y+z-3u=11,$$

$$2x+2y-3z+2u-6t=20.$$

Odpowiedź: układ niewyznaczony. Ma rozwiązanie

$$x=8, \quad y=11-7u-6t, \quad z=6-4u-6t,$$

w którem niewiadoma x jest wyznaczona; dwie inne niewiadome y i z, naprzykład, są wyrażone przez wartości niewiadomych u i t które zostają całkiem dowolne.

XXXI. Rozwiązać równania

$$3x-4y+5z-2u=9,$$

$$6x-2y+3z-4u=1,$$

$$7z-6y=17,$$

$$9x-6y+8z-6u=10.$$

Odpowiedź: $x=\frac{6u-z-7}{9}$, $y=\frac{7z-17}{6}$.

XXXII. Znaleźć cztery liczby, znając przewyżki a, b, c, d summy każdych trzech nad czwartą.

Odpowiedź: czyniąc $a+b+c+d=s$, będzie

$$x=\frac{s}{4}-\frac{a}{2},\quad y=\frac{s}{4}-\frac{b}{2},\quad z=\frac{s}{4}-\frac{c}{2},\quad u=\frac{s}{4}-\frac{d}{2}.$$

XXXIII. Rozwiązać równania

$$y+z=ayz,$$

$$z+x=bzx,$$

$$x+y=cxy.$$

Odpowiedź: biorąc za niewiadome $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$, otrzymuje się łatwo ich wartości; zkąd

$$x=\frac{2}{b+c-a},\quad y=\frac{2}{a+c-b},\quad z=\frac{2}{a+b-c}.$$

XXXIV. Rozwiązać równania

$$\sqrt{30xy} - 3\sqrt{10xz} + 30\sqrt{3yz} = 180,$$

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{6} = \frac{z}{2} = \frac{u}{3} = 1.$$

Odpowiedź : posługując się twierdzeniem n^{ru} 68 łatwo się znajduje

$$x=5, \quad y=6, \quad z=2, \quad u=3.$$

XXXV. Wyznaczyć spółczynniki a, b, c tak, żeby cztery równania o dwóch niewiadomych x, y

$$ax+2y=-1,$$

$$x-by=2,$$

$$2x+3y=c,$$

$$2ax+cy=-2,$$

były zgodne.

Odpowiedź : $a=-\frac{1}{2}$, $c=4$, b jakiekolwiek; albo $b=-\frac{3}{2}$, $c=4$ i a przyzwoicie dowolne.

XXXVI. Utworzyć równanie o dwóch niewiadomych

$$y=ax+b,$$

któreby miało dwa rozwiązania

$$x=2, \quad y=1, \quad \text{i} \quad x=35, \quad y=100.$$

Odpowiedź : $y=3x-5$.

XXXVII. Pod jakim warunkiem te same wartości niewiadomych x, y, z zadość czynią czterem równaniom

$$x = az + p,$$

$$y = bz + q,$$

$$x = a'z + p',$$

$$y = b'z + q';$$

i jakie są te wartości?

Odpowiedź: Równanie warunkowe jest

$$\frac{p' - p}{a - a'} = \frac{q - q'}{b - b'};$$

wartości są

$$z = \frac{p' - p}{a - a'}, \quad x = \frac{ap' - pa'}{a - a'}, \quad y = \frac{bq' - qb'}{b - b'}.$$

XXXVIII. Dowieśdź że cztery następujące równania, o trzech niewiadomych x, y, z,

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \lambda\left(1 + \frac{y}{b}\right),$$

$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{y}{b}\right),$$

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \mu\left(1 - \frac{y}{b}\right),$$

$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \frac{1}{\mu}\left(1 + \frac{y}{b}\right),$$

są zgodne, i znaleźć ich rozwiązanie.

Odpowiedź : jakiekolwiek są liczby λ i μ, układ ma zawsze rozwiązanie

$$x=\frac{a(\lambda\mu+1)}{\lambda+\mu}, \quad y=\frac{b(\mu-\lambda)}{\lambda+\mu}, \quad z=\frac{c(\lambda\mu-1)}{\lambda+\mu}.$$

XXXIX. Dowieśdź że następujące cztery równania o trzech niewiadomych x, y, z

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\lambda\left(1+\frac{y}{b}\right),$$

$$\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{y}{b}\right),$$

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\lambda'\left(1+\frac{y}{b}\right),$$

$$\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\frac{1}{\lambda'}\left(1-\frac{y}{b}\right),$$

są sprzeczne gdy liczby λ i λ' są nierówne, a tworzą układ niewyznaczony gdy λ i λ' są równe.

XL. Wyrugować x, y, z między czterema równaniami

$$\frac{x^{m+n}}{a^m}=\frac{y^{m+n}}{b^m}=\frac{z^{m+n}}{c^m},$$

$$\left(\frac{a}{x}\right)^m+\left(\frac{b}{y}\right)^m+\left(\frac{c}{z}\right)^m=1,$$

$$x^n+y^n+z^n=d^n.$$

Odpowiedź : $a^{\frac{mn}{m+n}}+b^{\frac{mn}{m+n}}+c^{\frac{mn}{m+n}}=d^{\frac{mn}{m+n}}$.

ROZWIĄZYWANIE DWÓCH RÓWNAŃ OGÓLNYCH PIERWSZEGO STOPNIA, O DWÓCH NIEWIADOMYCH.

149. Formuły ogólne. Wiemy że równanie pierwszego stopnia o dwóch niewiadomych x i y może się zawsze sprowadzić do kształtu

$$ax + by = c,$$

w którym a, b, c są ilościami niezależnemi od x i y.

Niech będzie więc układ dwóch takich równań

$$(1) \qquad \begin{aligned} ax + by &= c, \\ a'x + b'y &= c', \end{aligned}$$

Aby go rozwiązać, trzeba wyrugować jedną z dwóch niewiadomych, za pomocą którejkolwiek z wyłożonych metod. Rugując x przez podstawienie, z pierwszego równania wyciągamy

$$x = \frac{c - by}{a},$$

i kładziemy to wyrażenie zamiast x w drugiem równaniu; co daje

$$a'\left(\frac{c - by}{a}\right) + b'y = c',$$

albo

$$(ab' - ba')y = ac' - ca'.$$

Przekształcamy tym sposobem pierwszy układ na drugi równowarty

$$(2) \qquad \begin{aligned} x &= \frac{c - by}{a}, \\ (ab' - ba')y &= ac' - ca'. \end{aligned}$$

Owoż, w układzie (2) drugie równanie, mające tylko jedną niewiadomę y, wyznacza jej wartość

$$y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'},$$

która podstawiona w pierwszem równaniu, daje wartość x

$$x = \frac{c - b.\dfrac{ac' - ca'}{ab' - ba'}}{a} = \frac{cab' - cba' - bac' + bca'}{a(ab' - ba')},$$

albo, redukując,

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}.$$

Mamy więc trzeci układ

$$(3) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{cb' - bc'}{ab' - ba'}, \\[2ex] y = \dfrac{ac' - ca'}{ab' - ba'}, \end{cases}$$

który jest równowarty pierwszemu i daje jego rozwiązanie.

Ostatni układ stanowi formuły ogólne rozwiązywania dwóch równań pierwszego stopnia o dwóch niewiadomych; a nietrudno sprawdzić że te formuły zadość czynią równaniom.

150. Skład formuł ogólnych jest łatwy do zatrzymania w pamięci. Jakoż, wartości niewiadomych x i y wyrażają się przez dwa ułamki, mające spólny mianownik

$$ab' - ba';$$

który się tworzy pisząc przemiany ab i ba dwóch spółczynników a i b, przedzielając je znakiem —, i kładąc kreskę na ostatniej literze tych przemian. Aby mieć licznik każdej z dwóch wartości x i y, dość jest zastąpić w mianowniku

$ab' - ba'$ oba spółczynniki szukanej niewiadomej, przez wyrazy wiadome które jej odpowiedają w dwóch równaniach. I tak, dla wartości x zastępuje się a i a' odpowiednio przez c i c', co daje $cb' - bc'$; dla wartości y zastępuje się b i b' odpowiednio przez c i c', co daje $ac' - ca'$.

Można otrzymać wartości niewiadomych x i y innym sposobem, dogodniejszym w zastosowaniu. Uważając że te wartości wyrażają się przez następujące stosunki

$$\frac{x}{cb' - bc'} = \frac{y}{ac' - ca'} = \frac{1}{ab' - ba'},$$

piszemy w liniach poziomych najpierwej x, y, 1, a pod niemi spółczynniki a, b, c i a', b', c' dwóch równań; co wszystko razem tworzy kwadrat arytmetyczny

$$\begin{array}{ccc} x & y & 1 \\ a & b & c \\ a' & b' & c', \end{array}$$

z którego się łatwo wywodzą mianowniki trzech powyższych stosunków. Jakoż, na samo spojrzenie widać że mianownik $ab' - ba'$ ostatniego stosunku, czyli spólny mianownik wartości x i y, jest w kwadracie $abb'a'$ różnicą przekątnych ab' i ba', zaczynając od wierzchołków górnych a i b.

Żeby teraz otrzymać mianownik $cb' - bc'$ pierwszego stosunku, czyli licznik wartości x, trzeba w kwadracie $abb'a'$ zastąpić bok aa' przez cc' i wziąć różnicę przekątnych cb', bc', zaczynając od wierzchołka lewego którym będzie litera c leżąca w a, i idąc zawsze z góry na dół. Tak samo, żeby znaleźć mianownik $ac' - ca'$ drugiego stosunku, czyli licznik wartości y, dość jest zastąpić w kwadracie $abb'a'$ bok bb' przez cc' i wziąć różnicę przekątnych ac', ca'.

Obliczywszy trzy powyższe mianowniki, otrzymuje się natychmiast wartości niewiadomych x i y.

Dla pokazania szybkości rachunku, rozwiążemy dwa następujące równania

$$3x - 4y = 2,$$

$$4x + 3y = 36.$$

Uważając na samych równaniach kwadraty arytmetyczne, i biorąc różnice ich przekątnych jako trzeba, znajdujemy zaraz stosunki

$$\frac{x}{2.3+4.36} = \frac{y}{3.36-2.4} = \frac{1}{3.3+4.4},$$

albo

$$\frac{x}{150} = \frac{y}{100} = \frac{1}{25};$$

zkąd

$$x = \frac{150}{25} = 6, \quad y = \frac{100}{25} = 4.$$

Rozwiążemy jeszcze tym samym sposobem dwa ogólne równania

$$Ax + By + C = 0,$$

$$A'x + B'y + C' = 0.$$

Stosując ostatnie prawidło, trzeba uważać że tutaj wyrazy wiadome C i C' powinny być wzięte ze znakiem —; co daje

$$x = \frac{-(CB' - BC')}{AB' - BA'} = \frac{BC' - CB'}{AB - BA'},$$

$$y = \frac{-(AC' - CA')}{AB' - BA'} = \frac{CA' - AC'}{AB' - BA'}.$$

151. Formuły ogólne mogą się wywieśdź jedna z drugiej

I w samej rzeczy, jeśli w danych równaniach

$$ax + by = c,$$

$$a'x + b'y = c',$$

przemieniono x na y i nawzajem y na x, a na b i b na a, a' na b' i b' na a', utworzą się równania

$$by + ax = c,$$

$$b'y + a'x = c',$$

które się nie różnią od pierwszych, chyba tylko samym porządkiem wyrazów. Więc, jeśli z pierwszych równań wywiedziono dla x, wedle wskazanego wyżej prawidła, wartość

$$x = \frac{cb' - bc}{ab' - ba'},$$

stosując to samo prawidło do ostatnich równań, otrzyma się wartość dla y; i ta wartość powinna się wywodzić z wartości dla x wzajemną przemianą spółczynników a i b, a' i b'. Owoż, wedle rzeczonego prawidła, znajdujemy

$$y = \frac{ca' - ac'}{ba' - ab'},$$

albo

$$y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'};$$

co jest właśnie wartością y otrzymaną wyżej.

DYSKUSSYA FORMUŁ OGÓLNYCH ROZWIĄZYWANIA DWÓCH RÓWNAŃ PIERWSZEGO STOPNIA O DWÓCH NIEWIADOMYCH.

152. Otrzymano formuły ogólne przypuszczając najpierwej że spółczynnik a jest różny od zera, i potem jeszcze że dwumian $ab' - ba'$ jest różny od zera. Ale pierwszy warunek zawiera się w ostatnim; bo, jeśli $ab' - ba'$ nie jest zerem, dwa spółczynniki tej samej niewiadomej muszą być różne od zera; wtedy, rozwiązując jedno z równań względem niewiadomej mającej spółczynnik różny od zera, i podstawiając wyrażenie jej wartości w drugiem równaniu, przekształca się układ (1) na układ (2), i następnie na układ (3). Więc, *kiedy dwumian* $ab' - ba'$ *nie jest zerem, równania* (1) *mają rozwiązanie jedyne i wyznaczone przez formuły ogólne* (3).

153. Dwumian $ab' - ba' = 0$. Trzeba uważać najpierwej główny przypadek w którym dwumian $ab' - ba'$ jest zerem, ale żaden z czterech spółczynników a, b, a', b' nie jest zerem; a potem roztrząsnąć szczególne przypadki w których dwumian jest zerem dlatego że niektóre z tych spółczynników są zerami.

Gdy dwumian $ab' - ba'$ jest zerem ale spółczynniki a, b, a', b' są różne od zera, wtedy liczniki wartości niewiadomych x i y są oba różne od zera albo oba zerami.

Uważajmy najpierwej że, na mocy uczynionych założeń, równość $ab' - ba' = 0$ jest to samo co proporcya

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b},$$

która pokazuje że, w obecnym przypadku, *spółczynniki niewiadomych w dwóch równaniach są proporcyonalne.*

To ustaliwszy, z proporcyi wyciągamy

$$a' = \frac{ab'}{b};$$

podstawiając tę wartość w liczniku $ac' - ca'$, mamy

$$ac' - ca' = ac' - \frac{cab'}{b},$$

albo

$$ac' - ca' = -\frac{a}{b}(cb' - bc').$$

Ostatnia równość dowodzi właśnie że liczniki $cb' - bc'$ i $ac' - ca'$ są oba różne od zera albo oba razem są zerami.

Ztąd wynika że, w przypadku którym się zajmujemy, wartości niewiadomych x i y, dane przez formuły (3), przedstawiają się obie zarazem w kształcie $\frac{m}{0}$ albo obie w kształcie $\frac{0}{0}$. Żeby wiedzieć co znaczą te symboliczne kształty, trzeba się udać do równań (1), i podstawić w nich wartość $a' = \frac{ab'}{b}$.

To podstawienie daje

$$ax + by = c,$$

$$\frac{ab'}{b}x + b'y = c',$$

albo

$$ax + by = c,$$

$$ax + by = \frac{bc'}{b'}.$$

Owoż, ostatnie równania mają pierwsze strony te same, zatem, żeby były zgodne, powinny mieć drugie strony równe. Co wymaga

$$\frac{c'}{c} = \frac{b'}{b} = \frac{a'}{a}.$$

Więc, *jeśli spółczynniki niewiadomych, w dwóch równaniach pierwszego stopnia o dwóch niewiadomych, są proporcyonalne między sobą a nieproporcyonalne do ilości wiadomych, te równania są niezgodne*; to jest nie ma żadnych ilości skończonych któreby, położone zamiast niewiadomych, przywodziły równania do tosamości.

Ale trzeba uważać że, w tym przypadku, nic nie przeszkadza żeby tak zwane ilości nieskończenie wielkie były jedynem rozwiązaniem zadanych równań. Jakoż, wartości x i y będąc granicami wyrażeń $\frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}$, $\frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}$ gdy $ab' - ba' = 0$, biorą znaki przeciwne albo te same, według jak stosunek $\frac{a}{b}$ jest dodatny albo odjemny. Zatem, podstawione w równaniu (1), dają pierwszym stronom kształt symboliczny $\infty - \infty$, którego wartość może być wyznaczona (n° 78), i równa ilości c w pierwszem równaniu, a ilości c' w drugiem. Nie ma więc wtedy między równaniami (1) sprzeczności samoistej, jest tylko sprzeczność względna do wartości skończonych dla x i y.

Jeśli spółczynniki niewiadomych w dwóch równaniach, proporcyonalne między sobą, są proporcyonalne do ilości wiadomych, wtenczas te równania wchodzą jedno w drugie, i, stanowiąc jedno tylko równanie o dwóch niewiadomych, mają rozwiązania niewyznaczone.

Z tego i poprzedzającego przypadku, wynika że: kiedy żaden z czterech spółczynników niewiadomych x i y w obydwóch równaniach *nie jest zerem*, wartości tych niewiadomych są obie wyznaczone, albo obie razem nieskończenie wielkie, albo jeszcze obie niewyznaczone.

154. Rzeczy mają się wcale inaczej, gdy spółczynniki niewiadomych równe zerom czynią zerem dwumian $ab' - ba'$. Co teraz pokażemy, roztrząsając następujące przypadki szczególne.

1° Gdy dwa spłczynniki jednej niewiadomej w obydwóch równaniach są zerami, naprzykład

$$a=0 \quad \text{i} \quad a'=0, \quad \text{ale} \quad cb'-bc' \gtrless 0.$$

formuły ogólne przedstawiają wartości niewiadomych w kształtach symbolicznych

$$x=\frac{m}{0}, \quad y=\frac{0}{0}.$$

Żeby odkryć prawdziwą wartość drugiego symbolu, trzeba wiedzieć czy spółczynniki a i a' stają zerami w skutek dwóch oddzielnych założeń czy też w skutek jednego tylko. Owoż, jeśli ilości a i a' stały się zerami niezależnie jedna od drugiej wartość niewiadomej y jest całkiem niewyznaczona. Wtedy równania (1) są niezgodne; to jest nie ma żadnej wyznaczonej wartości dla x któraby razem z wartością wziętą dla y, czyniła im zadość. Albowiem, dla wszelkiej *skończonej* wartości x te równania stając się

$$by=c,$$

$$b'y=c',$$

wymagają żeby było

$$y=\frac{c}{b}=\frac{c'}{b'};$$

co się sprzeciwia założeniu $cb'-bc' \gtrless 0$.

Ale, jeśli ilości a i a' stają się zerami na mocy tego samego założenia, są naprzykład w stosunku statecznym $\frac{a'}{a}=k$ wtenczas, czyniąc $a=h$ i podstawiając wartość $a'=kh$ w dwóch ogólnych formułach, będzie, gdy $h=0$,

$$x = \text{gr}.\ \frac{cb' - bc'}{(b' - kb)h} = \infty.$$

$$y = \text{gr}.\ \frac{(c' - kc)h}{(b' - kb)h} = \frac{c' - kc}{b' - kb}.$$

Wartość x zostaje nieskończenie wielka jako przedtem, ale wartość y jest całkiem wyznaczona.

Przez podstawienie wartości $y = \dfrac{c' - kc}{b' - kb}$ i $a = h$, $a' = kh$, równania (1) biorą kształt jednakowy

$$hx + \frac{bc' - cb'}{b' - kb} = 0,$$

$$khx + k.\ \frac{bc' - cb'}{b' - kb} = 0,$$

i dają oba tę samą wartość dla x, która staje się $x = \infty$ gdy $h = 0$ (n° 125). Więc, w tym drugim szczególnym przypadku, wartości

$$x = \infty \quad \text{i} \quad y = \frac{c' - kc}{b' - kb},$$

są jedynem rozwiązaniem układu (1).

Jeśli jest zarazem

$$a = 0, \quad a' = 0 \quad \text{i} \quad cb' - bc' = 0,$$

wtedy w obydwóch przypadkach y ma wartość wyznaczoną $y = \dfrac{c}{b}$; ale x zostaje niewyznaczone. To stanowi niewyznaczenie cząstkowe.

2° Gdy spółczynniki dwóch niewiadomych w jednem równaniu są zerami, na przykład

$$a'=0 \quad \text{i} \quad b'=0,$$

formuły ogólne dają

$$x=-\frac{bc'}{0}, \quad y=\frac{ac'}{0}.$$

Wtedy, jeśli c' nie jest zerem, obie formuły przedstawiają się w kształcie $\frac{m}{0}$; a jeśli $c'=0$, obie formuły biorą kształt $\frac{0}{0}$.

W tych założeniach, przypuszczając wartości skończone niewiadomych x i y, równania stają się

$$ax+by=c,$$
$$0=c'.$$

Więc w pierwszym przypadku równania są niezgodne, ponieważ drugie jest niemożebne; w drugim przypadku istnieje tylko jedno równanie, ponieważ drugie jest tosamością. Zatem kształty symboliczne $\frac{m}{0}$ i $\frac{0}{0}$, pod któremi się przedstawiają formuły ogólne, oznaczają tu pierwszy *niemożebność*, drugi *niewyznaczenie*,

3° Rozpatrzmy teraz szczególny przypadek w którym trzy spółczynniki niewiadomych są zerami, na przykład

$$a=0, \quad b=0, \quad a'=0.$$

Wtedy formuły ogólne dają

$$x=\frac{cb'}{0}, \quad y=\frac{0}{0}.$$

a równania stają się

$$0 = c,$$

$$b'y = c'.$$

Więc, jeśli c nie jest zerem, pierwsze równanie jest niemożebne i układ nie ma żadnego rozwiązania. A jeśli jest $c=0$, obie formuły biorą kształt $\frac{0}{0}$; wtenczas pierwsze równanie jest tosamością, drugie wyznacza $y = \frac{c'}{b'}$; ale wartość x zostaje niewyznaczona, co stanowi niewyznaczenie cząstkowe.

4° Nakoniec, jeśli wszystkie cztery spółczynniki niewiadomych są zerami

$$a=0, \quad b=0, \quad a'=0, \quad b'=0,$$

formuły dają

$$x=\frac{0}{0}, \quad y=\frac{0}{0};$$

ale równania stają się

$$0 = c,$$

$$0 = c'.$$

Jest niemożebność układu, chociaż obie formuły przedstawiają się przez symbol niewyznaczenia.

Zbierając treść całej dyskussyi dwóch równań pierwszego stopnia o dwóch niewiadomych, widzimy że: 1° Gdy mianownik $ab' - ba'$ nie jest zerem, układ dwóch równań ma rozwiązanie jedyne i wyznaczone przez formuły ogólne. 2° Gdy $ab' - ba' = 0$, ale żaden z czterech spółczynników niewiadomych x, y nie jest zerem, układ może mieć rozwiązanie jedyne i wyznaczone przez formuły ogólne, albo nie mieć żadnego w wartościach skończonych, albo mieć liczbę nieograniczoną rozwiązań. 3° Gdy niektóre spółczynniki równe zerom czynią mianownik $ab' - ba'$ zerem, wtedy układ dwóch równań nie ma rozwiązania wyznaczonego w wartościach skończonych, i jest albo niemożebny, albo niewyznaczony, a może być nawet cząstkowo niewyznaczony.

155. Przypadek w którym c i c' są zerami. Gdy wyrazy wiadome c i c', to jest niezależne od x i y, są zerami, formuły ogólne dają wartościom niewiadomych kształt jednakowy

$$x = \frac{0}{ab' - ba'}, \quad y = \frac{0}{ab' - ba'}.$$

Jeśli więc dwumian $ab' - ba'$ nie jest zerem, będzie

$$x = 0 \quad \text{i} \quad y = 0;$$

ale, jeśli jest $ab' - ba' = 0$, wtedy formuły ogólne stają się,

$$x = \frac{0}{0}, \quad y = \frac{0}{0}.$$

Żeby wiedzieć co oznaczają te symbole niewyznaczenia, trzeba się udać do równań.

Owoż, te równania w uczynionem założeniu są

$$ax + by = 0,$$

$$a'x + b'y = 0,$$

albo

$$x = -\frac{b}{a}y,$$

$$x = -\frac{b'}{a'}y.$$

Więc, jeśli $\frac{b}{a}$ i $\frac{b'}{a'}$ nie są równe, to jest jeśli nie ma $ab' - ba' = 0$, jedynem rozwiązaniem układu dwóch równań są wartości

$$x = 0 \quad \text{i} \quad y = 0.$$

Ale, jeśli $\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}$, co daje $ab' - ba' = 0$, wtedy dwa zadane równania schodzą się w jedno i wartości x i y są obie niewyznaczone. Dobrze jest uważać że w tym ostatnim przypadku stosunek niewiadomych jest wyznaczony; mamy albowiem

$$\frac{x}{y} = -\frac{b}{a} = -\frac{b'}{a'}.$$

Do tego przypadku liczy się następujący szczegół.

Gdy drugie strony c, c' są w stosunku k z odpowiedającemi spółczynnikami jednej niewiadomej, ta niewiadoma jest równa stosunkowi k, a druga jest zerem; albo obie niewiadome są niewyznaczone.

Jakoż niech będą dwa równania

$$ax + by = kb,$$
$$a'x + b'y = kb'.$$

Dając im kształt

$$ax + b(y - k) = 0,$$
$$a'x + b'(y - k) = 0,$$

widzimy zaraz że $x = 0$ i $y = k$ zadość czynią równaniom.

Jeśli

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b},$$

układ jest niewyznaczony; ale $\frac{x}{y - k} = -\frac{b}{a}$.

ROZWIĄZYWANIE TRZECH RÓWNAŃ OGÓLNYCH O TRZECH NIEWIADOMYCH.

156. Formuły ogólne. Równanie pierwszego stopnia o trzech niewiadomych x, y, z może zawierać tylko cztery gatunki wyrazów, to jest wyrazy na x, wyrazy na y, wyrazy na z, i wyrazy całkiem wiadome czyli niezależne od trzech niewiadomych. Można więc zawsze przywieśdź je do kształtu

$$ax + by + cz = d.$$

Niech będzie układ trzech takich równań

$$(1) \qquad \begin{aligned} ax + by + cz &= d, \\ a'x + b'y + c'z &= d', \\ a''x + b''y + c''z &= d''. \end{aligned}$$

Do rozwiązywania tych trzech równań użyjemy metody Bezuta. Mnożąc pierwsze równanie przez λ, drugie przez λ', i dodając stronami wszystkie trzy, znajdujemy

$$(2) \quad (a\lambda + a'\lambda' + a'')x + (b\lambda + b'\lambda' + b'')y + (c\lambda + c'\lambda' + c'')z = d\lambda + d'\lambda' + d''.$$

Aby otrzymać wartość niewiadomej x, kładziemy

$$(\lambda) \qquad \begin{aligned} b\lambda + b'\lambda' + b'' &= 0, \\ c\lambda + c'\lambda' + c'' &= 0; \end{aligned}$$

zkąd wyciągamy

$$\lambda = \frac{b'c'' - c'b''}{bc' - cb'}, \qquad \lambda' = \frac{b''c - c''b}{bc' - cb'}.$$

Podstawiamy te wartości w równaniu (2), i mamy

$$x = \frac{d(b'c'' - c'b'') + d'(b''c - c''b) + d''(bc' - cb')}{a(b'c'' - c'b'') + a'(b''c - c''b) + a''(bc' - cb')},$$

albo, rozwijając rachunki,

$$x=\frac{db'c''-dc'b''+cd'b''-bd'c''+bc'd''-cb'd''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''}.$$

Działając podobnie otrzymanoby wartości dla x i z. Ale, jako już wiemy, można je łatwo wywieśdź z wartości x, dla y przemieniając x, a, a' a'' odpowiednio na y, b, b', b'', i nawzajem; a dla z przemieniając x, a, a', a'' odpowiednio na z, c, c', c'', i nawzajem. Co daje trzeci układ

$$
(3)\qquad
\begin{aligned}
x&=\frac{db'c''-dc'b''+cd'b''-bd'c''+bc'd''-cb'd''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''},\\
y&=\frac{ad'c''-ac'd''+ca'd''-da'c''+dc'a''-cd'a''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''},\\
z&=\frac{ab'd''-ad'b''+da'b''-ba'd''+bd'a''-db'a''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''},
\end{aligned}
$$

który jest rozwiązaniem zadanego (1).

Układ (3) stanowi ogólne formuły rozwiązywania trzech równań pierwszego stopnia o trzech niewiadomych. Można łatwo sprawdzić że wartości niewiadomych x, y, z, wyrażone ogólnemi formułami zadość czynią układowi (1). Ale sprawdzenie samo nie dowodzi ich dokładności, bo przypuszcza istnienie wszystkich wyrazów, i spólny mianownik różny od zera.

Owoż, formuły ogólne zostały otrzymane w założeniu że równania (λ) są zgodne; trzeba więc przede wszystkiem usunąć wątpliwość możebności wyznaczenia mnożników λ i λ'.

Jeśli $bc'-cb'=0$, to można wziąć równania

$$b\lambda+b''\lambda'+b'=0,$$

$$c\lambda+c''\lambda'+c'=0,$$

albo następujące

$$b+b'\lambda+b''\lambda'=0,$$

$$c+c'\lambda+c''\lambda'=0,$$

do wyznaczenia tych mnożników. A gdyby było zarazem $bc''-cb''=0$ i $b'c''-c'b''=0$, wtenczas układ (λ) byłby niewyznaczony; co nie przeszkadza mieć wartości λ i λ'. Ztąd wynika że, jakiekolwiek są spółczynniki b, c, b', c', można, zawsze biorąc przyzwoite równania, znaleźć wartości skończone dla λ i λ', które prowadzą do wartości dla x. To samo stosuje się do wartości dla y i z. Więc formuły (3) istnieją, ale mogą przedstawiać wartości niewiadomych w kształcie $\frac{m}{0}$ albo $\frac{0}{0}$.

Dlatego właśnie potrzebna jest dyskussya tych formuł, którą na tem miejscu treściwie tylko dać możemy, wskazując najpierwej prawidło ich tworzenia.

157. Z samego spojrzenia na formuły ogólne (3) spostrzegamy że licznik wartości niewiadomej x tworzy się z mianownika, zastępując tylko spółczynniki a, a', a'', przez odpowiedające im drugie strony d, d' d''. Liczniki wartości niewiadomych y i z tworzą się podobnie. Zatem, żeby znać i zatrzymać w pamięci skład formuł ogólnych (3), dość jest umieć znaleźć ich spólny mianownik.

Dla utworzenia mianownika, bierze się dwie przemiany

$$ab-ba,$$

liter a i b, przedzielone znakiem $-$; w każdej z nich stawia się literę c na wszystkich miejscach, na końcu, we środku i na początku, kładąc znak $+$ przed pierwszą tak otrzymaną przemianą, znak $-$ przed drugą, znak $+$ przed trzecią; i tak dalej. Co daje

$$abc-acb+cab-bac+bca-cba.$$

Nakoniec, kładąc w każdym wyrazie jedną kreskę na drugiej literze i dwie na trzeciej, znajdujemy mianownik który oznaczamy przez D,

$$\mathrm{D}=ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''.$$

158. Dlatego że mianownik wyznacza liczniki wartości niewiadomych x, y, z, nazwano go *wyznacznikiem*. Można otrzymać wyznacznik względny do trzech niewiadomych, stosując inne prawidlo, dogodniejsze od powyższego. Dość jest napisać kwadrat arytmetyczny spółczynników ilości niewiadomych, i utworzyć z nich wszystkie przemiany trzech liter, następującym sposobem :

$$\begin{matrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c''. \end{matrix}$$

Zaczynając od litery a, nie trzeba nic brać z linii abc ani z kolumny $aa'a''$ które się przecinają w a, ale tylko wziąć różnicę $b'c' - c'b''$ przekątnych kwadratu $b'c'c''b''$, idąc z góry na dół najpierwej od wierzchołka lewego b' a potem od wierzchołka prawego c'; co daje dwie przemiany z ich znakami

$$a(b'c'' - c'b'').$$

Poczem, zaczynając od litery a', nie trzeba nic brać z linii $a'b'c'$ ani z kolumny $aa'a''$; ale tylko, uważając kwadrat $bcc''b''$ jak gdyby linia $b'c'$ nie istniała, wziąć różnicę $bc'' - cb''$ jego przekątnych; co daje dwie inne przemiany poprzedzone znakiem —,

$$-a'(bc'' - cb'') \quad \text{albo} \quad a'(cb'' - bc'').$$

Przychodząc nareszcie do litery a'', nie trzeba nic brać z linii $a''b''c''$ ani z kolumny $aa'a''$, ale tylko wziąć różnicę $bc' - cb'$ przekątnych kwadratu $bcc'b'$; co daje

$$a''(bc' - cb').$$

Mamy więc

$$D = a(b'c'' - c'b'') + a'(b''c - c''b) + a''(bc' - cb').$$

wynik zgodny z poprzedzającym.

159. Nietrudno widzieć że wyznacznik D może brać sześć następujących kształtów :

$$D = a(b'c'' - c'b'') + a'(b''c - c''b) + a''(bc' - cb'),$$

$$D = b(c'a'' - a'c'') + b'(c''a - ca'') + b''(ca' - ac'),$$

$$D = c(a'b'' - b'a'') + c'(a''b - b''a) + c''(ab' - ba'),$$

$$D = a(b'c'' - c'b'') + b(c'a'' - a'c'') + c(a'b'' - b'a'').$$

$$D = a'(b''c - c''b) + b'(c''a - a''c) + c'(a''b - b''a),$$

$$D = a''(bc' - cb') + b''(ca' - ac') + c''(ab' - ba').$$

Sposobem wyznacznika można odrazu otrzymać liczniki N_1, N_2, N_3 wartości niewiadomych x, y, z; dość tylko napisać następujący kwadrat

$$\begin{array}{cccc} x & y & z & 1 \\ a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'', \end{array}$$

i w nim zastąpić spółczynniki niewiadomej, której się szuka wartości, przez wyrazy wiadome d, d' d''.

I tak, żeby mieć licznik niewiadomej x, trzeba w kwadracie zastąpić kolumnę $a\ a'\ a''$ przez $d\ d'\ d''$, i wykonać rachunek wyznacznika. Co daje

$$N_1 = d(b'c'' - c'b'') + d'(b''c - c''b) + d''(bc' - cb').$$

Dla znalezienia licznika niewiadomej y, trzeba postawić kolumnę $dd'd''$ na miejscu kolumny $bb'b''$; i potem wykonać wyznacznik. Co daje

$$N_2 = a(d'c'' - c'd'') + a'(d''c - c''d) + a''(dc' - cd'),$$

albo

$$N_2 = d(c'a'' - a'c'') + d'(c''a - ca'') + d''(ca' - ac').$$

Nakoniec, otrzymuje się licznik niewiadomej z, tworząc wyznacznik jak gdyby kolumna $dd'd''$ zajmowała miejsce kolumny $cc'c''$; co daje

$$N_3 = a(b'd'' - d'b'') + a'(b''d - d''b) + a''(bd' - db'),$$

albo

$$N_3 = d(a'b'' - b'a'') + d'(a''. - ab'') + d''(ab' - ba').$$

Pokażemy w teoryi wyznacznika jakiemi działaniami dają się często uprościć te dość mozolne rachunki.

160. Dyskussya formuł (3). Dyskussya ogólnych formuł rozwiązywania trzech równań pierwszego stopnia, o trzech niewiadomych, przedstawia te same główne przypadki co w dwóch równaniach o dwóch niewiadomych. Ale jest bardziej zawiła z przyczyny wielości szczegółów, z których wskażemy tylko ważniejsze.

Iszy Przypadek. $D \gtrless 0$. Gdy spólny mianownik D wartości niewiadomych x, y, z nie jest zerem, układ trzech równań (1) ma rozwiązanie jedyne i wyznaczone przez ogólne formuły (3).

Jakoż, dlatego że D nie jest zerem, musi się znajdować w każdej linii i w każdej kolumnie przynajmniej jeden spółczynnik niewiadomych różny od zera. Więc, wybierając przyzwoicie mnożniki λ i λ', można z równania (2) wyprowadzić wartości dla x, y, z, które są właśnie wyrażone formułami (3).

IIgi Przypadek. $D = 0$. Gdy mianownik D jest zerem, i przynajmniej jeden z liczników N_1, N_2, N_3 jest różny od zera, równania (1) są niezgodne; ich układ nie ma żadnego rozwiązania.

Jakoż, przypuszczając że licznik N_1 naprzykład, nie jest zerem, przynajmniej jeden spółczynnik każdej linii i kolumny musi być różny od zera. Zatem równanie (2), użyte do wyznaczenia wartości x, y, z, daje

$$Dx = N_1 \quad Dy = N_2, \quad Dz = N_3.$$

A ponieważ $D=0$; i $N \gtrless 0$, równanie $Dx = N_1$ jest niemożebne; więc układ (1) jest niemożebny. Formuły (3) wyrażają tę niemożebność symbolem $\frac{m}{0}$, pod którym się ukazuje przynajmniej jedna z niewiadomych.

III^ci^ Przypadek. $D=0$ i liczniki równe zerom. Trzeba odróżnić następujące rzczególne przypadki.

1° Jeśli mianownik D i jeden z liczników, naprzykład N_1, są zerami, ale różnice $b'c''-c''b'$, $b''c-c''b$, $bc'-cb'$ które je składają nie są wszystkie zerami, wtedy jedno z równań (1) jest następstwem dwóch drugich.

Jakoż, równanie

$$N_1 = d(b'c''-c'b'') + d'(b''c-c''b) + d''(bc'-cb') = 0$$

dowodzi że, mnożąc pierwsze z równań (1) przez $b'c''-c'b''$, drugie przez $b''c-c''b$, otrzymuje się trzecie pomnożone przez $cb'-bc'$.

Więc układ trzech zadanych równań jest niewyznaczony.

Formuły (3) dają wartości wszystkich trzech niewiadomych w kształcie $\frac{0}{0}$; chociaż jedna z niewiadomych może być całkiem wyznaczona, jako w przykładzie III na stronicy 213.

2° Gdy spółczynniki niewiadomych jednej kolumny są proporcyonalne do odpowiedających spółczynników drugiej, równania (1) są niezgodne wszystkie trzy razem, ale zgodne po dwa.

Niech będą spółczynniki b, b', b'' proporcyonalne do a, a', a'';

co się wyraża przez równość stosunków

$$\frac{b}{a}=\frac{b'}{a'}=\frac{b''}{a''}=k,$$

które dają

$$ab'-ba'=0,\quad a''b-b''a=0,\quad a'b''-b'a''=0;$$

zatem

$$D=0 \quad \text{i} \quad N_3=0.$$

Przez podstawienie wartości społczynników b, b', b'', równania (1) biorą kształt

$$a(x+ky)+cz=d,$$

$$a'(x+ky)+c'z=d',$$

$$a''(x+ky)+c''z=d'',$$

i z dwóch pierwszych wynika

$$z=\frac{ad'-da'}{ac'-ca'},$$

$$x+ky=\frac{dc'-cd'}{ac'-ca'}.$$

Te wartości powinny sprawdzać trzecie równanie; co wymaga żeby było

$$a''(dc'-cd')+c''(ad'-dc')=d''(ac'-ca').$$

albo

$$d(c'a''-a'c'')+d'(c''a-a''c)+d''(ca'-a'c)=N_2=0.$$

Jeśli temu równaniu warunkowemu nie staje się zadość, równania (1) są niezgodne. A jeśli, przeciwnie, spółczynniki dopełniają warunku, nie czyniąc zerem żadnej różnicy; jedno z trzech równań jest następstwem dwóch innych. Układ tych równań jest niewyznaczony, ale jedna z niewiadomych ma wartość wyznaczoną.

3° Gdy spółczynniki niewiadomych jednej linii są proporcyonalne do odpowiedających spółczynników drugiej, równania (1) są ogólnie niezgodne.

Jakoż, niech będą równości stosunków

$$\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}=k,$$

które dają

$$ab'-ba'=0,\quad ca'-ac'=0,\quad bc'-cb'=0;\quad \text{zatem}\quad D=0.$$

Przez podstawienie wartości spółczynników a', b', c' równania (1) wyrażają się w kształcie

$$ax+by+cz=d,$$

$$k(ax+by+cz)=d',$$

$$ax''+b''y+c''z=d'',$$

który pokazuje że dwa pierwsze są niezgodne. Chyba że jest

$$d'=kd;$$

ale wtedy układ (1), przywiedziony do dwóch tylko równań o trzech niewiadomych, jest niewyznaczony. Więc, w założeniach o których mowa, równania (1) są niezgodne wszystkie trzy razem; dwa pierwsze są także niezgodne między sobą, ale każde z nich jest zgodne z trzeciem.

4° Gdy wszystkie różnice składające mianownik D i liczniki N_1, N_2, N_3 są zerami, co daje

$$D=0,\quad N_1=0,\quad N_2=0,\quad N_3=0,$$

wtedy równania (1) są ogólnie niezgodne wszystkie trzy razem i po dwa

Jakoż, jeśli jest

$$\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}=h \quad \text{i} \quad \frac{a''}{a}=\frac{b''}{b'}=\frac{c''}{c'}=k,$$

będzie

$$\frac{a''}{a'}=\frac{b''}{b'}=\frac{c''}{c'};$$

zkąd

$$ab'-ba'=0,\quad a''b-b''a=0,\quad a'b''-b'a''=0,\quad ca'-ac'=0,$$

$$c''a-a''c=0,\quad c'a''-a'c''=0,\quad bc'-cb'=0,\ldots$$

Zastępując w równaniach (1) spółczynniki a', b', c', a'', b'', c'' przez ich wartości, mamy

$$ax+by+cz=d,$$

$$h(ax+by+cz)=d',$$

$$k(ax+by+cz)=d''.$$

Wogóle te trzy równania nie są zgodne ani razem ani po dwa; chyba że jest

$$d'=hd \quad \text{i} \quad d''=kd.$$

Ale wtenczas układ (1), przywiedziony do jednego równania o trzech niewiadomych, jest całkiem niewyznaczony.

W tym ostatnim przypadku ogólne formuły (3) przedstawiają wartości niewiadomych w kształcie niewyznaczenia $\frac{0}{0}$, chociaż równania są niemożebne.

Żeby dyskussya była zupełna, trzebaby jeszcze uważać przypadki osobliwe w których spółczynniki niewiadomych są zerami. Te szczegóły znajdą się lepiej na innem miejscu.

161. Przypadek w którym $d=0$, $d'=0$, $d''=0$. Gdy drugie strony d, d', d'' są zerami, równania (1), nie zawierając wyrazów niezależnych od niewiadomych, stają się jednorodnemi (8), i przedstawiają związki jakie mają stosunki wszystkich niewiadomych do jednej z nich. Aby wyznaczyć te stosunki, dość jest znać tyle równań ile jest niewiadomych mniej jedną.

Jakoż, niech będą trzy równania

$$ax+by+cz=0,$$
$$a'x+b'y+c'z=0,$$
$$a''x+b''y+c''z=0.$$

Wyrażając stosuki niewiadomych x i y do z, możemy dać tym równaniom kształt następujący

$$a\frac{x}{z}+b\frac{y}{z}+c=0,$$
$$a'\frac{x}{y}+b'\frac{y}{z}+c'=0,$$
$$a''\frac{x}{y}+b''\frac{y}{z}+c''=0.$$

Mamy teraz trzy równania o dwóch tylko niewiadomych; musi więc być między ich spółczynnikami równanie warunkowe.

Owoż, dwa pierwsze równania wystarczają do wyznaczenia stosunków $\frac{x}{y}$ i $\frac{y}{z}$; rozwiązując je, otrzymujemy

$$\frac{x}{z}=\frac{bc'-cb'}{ab'-ba'},$$
$$\frac{y}{z}=\frac{ca'-ac'}{ab'-ba'}.$$

Te wartości powinny zadość czynić trzeciemu równaniu; jeśli je podstawimy, znajdziemy równanie warunkowe

$$\{a''(bc'-cb')+b''(ca'-ac)+c''(ab'-ba')\}z=0,$$

albo

$$Dz=0.$$

Więc, *jeśli D nie jest zerem, trzeba żeby było* z = 0, *i temsamem* x = 0, y = 0. Co jest właśnie rozwiązaniem trzech równań, w uczynionem założeniu.

Jeśli zaś D = 0, wtedy, jakiekolwiek jest z, równaniu warunkowemu staje się zadość; to dowodem że trzecie równanie układu jest następstwem dwóch innych. Więc, w drugiem założeniu *zadany układ jest niewyznaczony*; *ale to niewyznaczenie, wyrażone symbolem* $\frac{0}{0}$ *przez formuły ogólne, jest tylko względnem, ponieważ stosunki niewiadomych zostają wyznaczone.*

Do powyższego szczególnego przypadku liczy się następujący :

Gdy drugie strony trzech równań (1) *są w stosunku* k *z odpowiedającemi spółczynnikami jednej niewiadomej, ta niewiadoma równa się stosunkowi* k, *a dwie inne są zerami; albo wszystkie trzy są niewyznaczone*

Jakoż, przypuszczając na przykład

$$d=kc, \qquad d'=kc', \qquad d''=kc'',$$

otrzymujemy równania

$$ax+by+c(z-k)=0,$$

$$a'x+b'y+c'(z-k)=0,$$

$$a''x+b''y+c''(z-k)=0,$$

które mają oczywiste rozwiązanie

$$x=0, \quad y=0, \quad z=k.$$

Ale to rozwiązanie nie jest jedyne, jeśli D=0; bo wtedy jedno równanie wynika z kombinacyi dwóch drugich, i układ jest niewyznaczony.

Damy w rozdziale V, za pomocą wyznaczników, ogólną dyskussyę n równań pierwszego stopnia mających n niewiadomych.

OGÓLNE ZASADY NIERÓWNOŚCI.

162. Mówi się że jedna ilość jest większa albo mniejsza od drugiej, według jak trzeba przydać albo ująć ilość dodatną tej drugiej aby ją uczynić równą pierwszej.

Na mocy tego określenia pojmuje się łatwo dlaczego ilość -1 jest większa od -2; bo trzeba do -2 przydać $+1$ aby mieć -1.

Wyraża się że ilość a jest większa od ilości b, pisząc

$$a > b.$$

Podobnie, jeśli ilość c jest mniejsza od ilości d, wyraża się to pisząc

$$c < d.$$

Te dwie nierówności mają kierunki przeciwne. Owoż, jakiekolwiek są ilości a, b, c, d, dodatne albo odjemne, stateczne albo zmienne, można przedstawić dwie powyższe nierówności przez odpowiedające równości albo równania.

$$(1) \qquad a=b+\delta^2 \quad \text{i} \quad c=d-\delta'^2,$$

w których ilości δ^2 i δ'^2 są wyraźnie dodatne.

Z równań (1) wywodzą się dwa następujące

$$(2) \qquad a - b = \delta^2 \quad \text{i} \quad c - d = -\delta'^2,$$

które pokazują że różnica $a - b$ jest dodatna, a różnica $c - d$ odjemna.

Więc

nierówność $a > b$ jest to samo co $a - b > 0$,

$c < d$ to samo co $c - d < 0$.

To dowodzi twierdzenia które można wziąć za określenie nierówności. *Ilość* a *jest większa albo mniejsza od ilości* b, *gdy różnica* a — b *jest dodatna albo odjemna.*

Ztąd wynikają dwa następstwa, już nam wiadome :

1° *Ilość dodatna jest większa od ilości odjemnej.*

I tak,

$$1 > -2,$$

bo różnica $1 - (-2) = 1 + 2$ jest dodatna.

2° *Ilość odjemna jest tem mniejsza im jej wartość samoista jest większa.*

I tak,

$$-1 > -2,$$

bo różnica $-1 (-2) = -1 + 2$ jest dodatna.

Pisząc

$$2 > 0 \quad \text{i} \quad -2 < 0,$$

wyraża się poprostu że liczba $+2$ jest *dodatna*, albo że liczba -2 jest *odjemna*; nie zaś że $+2$ jest liczbą *większą od zera*, ani bynajmniej że -2 jest liczbą *mniejszą od zera, mniejszą niż nic!* Zero jest granicą coraz bardziej malejących wielkości, ale nie jest wielkością samoistą.

Ztąd wynika że, jeśli napisano ciąg liczb tak dodatnych jako odjemnych i między niemi zero, w następujący sposób:

$$-\infty, \ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots +\infty,$$

liczba jakakolwiek tego ciągu jest większa od poprzedzającej na lewo, ale mniejsza od następującej na prawo.

163. Nierówności mogą zawierać ilości niewiadome i mieć stopień tak jako równania. Przywodząc nierówności do równań, nietrudno ustalić główne zasady na których się one opierają, i potem wyprowadzić szczególne twierdzenia właściwe nierównościom.

Pierwsza zasada. *Można przenieść jakikolwiek wyraz z jednej strony nierówności na drugą, zmieniając tylko znak tego wyrazu.*

Niech będzie nierówność

$$A + B > C - D,$$

w której ilości A, B, C, D są jakiekolwiek, mogące zawierać niewiadome x, y, z,...

Przydając do drugiej strony ilość dodatną δ^2, mamy równanie

$$A + B = C - D + \delta^2;$$

zkąd wynika

$$A + D = C - B + \delta^2.$$

Więc

$$A + D > C - B.$$

Co było do dowodzenia.

W szczególności mamy oczywistą nierówność

$$1 < 2,$$

która się może przekształcić na następującą

$$-2 < -1,$$

albo jeszcze na

$$-1 < 0.$$

Te dwa wyniki usprawiedliwiają odsyłacz stronicy 13.

164. Druga zasada. *Można pomnożyć albo podzielić obie strony nierówności przez jedną ilość, byle była dodatną.*

Niech będzie nierówność

$$A > B,$$

albo, co wychodzi na jedno, równanie

$$A - B = \delta^2.$$

Mnożąc obie strony tego równania przez jakąkolwiek ilość m, otrzymujemy

$$m(A - B) = m\delta^2.$$

Owoż, jeśli mnożnik m jest ilością dodatną, druga strona $m\delta^2$ jest dodatna; więc

$$m(A - B) > 0,$$

i temsamem

$$mA > mB;$$

co dowodzi twierdzenia.

Jeśli przeciwnie, mnożnik m jest ilością odjemną, druga strona $m\delta^2$ będzie odjemna; zatem

$$m(A-B)<0,$$

zkąd

$$mA<mB.$$

Więc zmienia się kierunek nierówności gdy się mnoży obie jej strony przez ilość odjemną.

Mnożnik może mieć kształt $\frac{1}{m}$; co dowodzi przypadku dzielenia.

105. Wniosek. Zmieniając znaki wszystkich wyrazów nierówności, przemienia się jej kierunek, czyli, jako mówią, przewraca się tę nierówność.

I tak, niech będzie

$$3-1>5-4.$$

Jeśli przemieniono znaki wszystkich wyrazów nierówności, albo, co wychodzi na jedno, jeśli pomnożono obie strony przez -1, trzeba przewrócić nierówność i wziąć

$$-3+1<-5+4.$$

Albowiem w danej nierówności, przenosząc wszystkie wyrazy drugiej strony na pierwszą, i nawzajem wszystkie wyrazy pierwszej na drugą, mamy

$$-5+4>-3+1;$$

więc, biorąc drugą stronę za pierwszą, otrzymujemy

$$-3+1<-5+4.$$

Co było do okazania

Uwaga. Na mocy ostatniej zasady, można znieść mianowniki nierówności, gdy są wiadome ich znaki.

Nietrudno teraz wyłożyć twierdzenia właściwe nierównościom jednoczesnym.

166. Twierdzenie I. *Można dodawać stronami dwie nierówności tego samego kierunku.*

Niech będą dwie nierówności

$$a > b \quad \text{i} \quad c > d,$$

albo, co to samo,

$$a - b > 0,$$
$$c - d > 0.$$

Ztąd, dodając stronami, wynika

$$a + c - b - d > 0;$$

więc

$$a + c > b + d.$$

167. Twierdzenie II. *Można odciągać stronami nierówności kierunków przeciwnych; nierówność wynikowa będzie miała kierunek pierwszej.*

Niech będą dwie nierówności mające kierunki przeciwne

$$a > b \quad \text{i} \quad c < d.$$

one są to samo co następujące

$$a > b,$$
$$d > c.$$

Owoż ostatnie dają

$$a + d > b + c.$$

Więc

$$a - c > b - d.$$

Uwaga. Ponieważ nie można odciągać stronami jednej nierówności od drugiej gdy mają te same kierunki, układ

$$a > b,$$
$$c > d,$$

nie jest równowarty układowi

$$a > b,$$
$$a + c > b + d;$$

bo z drugiego układu nie można przejść do pierwszego.

168. Twierdzenie III. *Można mnożyć stronami dwie nierówności mające ten sam kierunek, gdy ich pierwsze strony są dodatne, i drugie także dodatne albo znaków przeciwnych.*

Niech będą dwie nierówności

$$a > b \quad \text{i} \quad c > d,$$

które można wyrazić przez równania

$$a - b = \delta^2,$$
$$c - d = \delta'^2.$$

Przypuszczając że pierwsza nierówność ma obie strony a i b dodatne, pomnożmy pierwsze równanie przez c, drugie przez b, i dodajmy stronami, będzie

$$ac - bd = c\delta^2 + b\delta'^2.$$

Ztąd, jeśli c jest także dodatne, d jakiekolwiek, wynika nierówność

$$ac - bd > 0.$$

Więc

$$ac > bd.$$

I tak, nierówności

$$5 > 4 \quad \text{i} \quad 6 > -10,$$

pomnożone stronami, dają nierówność w tym samym kierunku

$$30 > -40.$$

Uwaga. Jeśli dwie nierówności jednakowego kierunku mają obie strony odjemne, mnożąc je stronami, otrzymuje się nierówność kierunku przeciwnego.

I tak, niech będą dwie nierówności

$$a > b,$$

$$c > d,$$

w którym ilości a, b, c, d są odjemne. Zmieniając znaki, mamy

$$-a < -b,$$

$$-c < -d;$$

więc

$$ac > bd.$$

169. Twierdzenie IV. *Można dzielić stronami jedną przez drugą dwie nierówności kierunków przeciwnych, gdy ich obie strony są dodatne; nierówność wynikowa będzie miała kierunek pierwszej.*

Niech będą dwie nierówności kierunków przeciwnych, mające obie strony dotatne.

$$a > b \quad \text{i} \quad c < d.$$

albo, co to samo

$$a > b,$$
$$d > c.$$

Ponieważ obie strony są dodatne, można mnożyć, i będzie

$$ad > bc;$$

zkąd, dzieląc przez cd, wynika

$$\frac{a}{c} > \frac{b}{d}.$$

Uwaga. Jeśli dwie nierówności kierunków przeciwnych mają obie strony odjemne, dzieląc stronami pierwszą przez drugą, otrzymuje się nierówność kierunku drugiej.

Jakoż, niech będą dwie nierówności

$$-a > -b \quad \text{i} \quad -c < -d.$$

Zamieniając je na dodatne, mamy

$$a < b,$$
$$c > d.$$

Zkąd, dzieląc stronami, wynika

$$\frac{a}{c} < \frac{b}{d}.$$

170. Twierdzenie V. *Gdy obie strony nierówności są dodatne, można je podnieść do potęgi* m^{tej}.

Jakoż, niech będzie m nierówności mających obie strony dodatne i ten sam kierunek,

$$a > b \quad a' > b', \quad a'' > b'', \ldots$$

Mnożąc stronami, otrzymujemy

$$aa'a''\ldots > bb'b''\ldots;$$

więc, jeśli $a = a' = a'' = \ldots$ i $b = b' = b'' = \ldots$
będzie

$$a^m > b^m.$$

171. Twierdzenie VI. *Można zawsze podnieść do potęgi stopnia nieparzystego obie strony nierówności, jakiekolwiek są ich znaki.* Bo te strony, po wykonanem działaniu, zachowują swoje znaki, i przeto kierunek nierówności.

I tak,

z nierówności $2 > -5$ wynika $2^3 > -5^3$,

z nierówności $-4 > -6$ wynika $-4^5 > -6^5$.

Uwaga. Gdyby chciano podnosić obie strony nierówności jakiejkolwiek do potęgi *stopnia parzystego*, rzeczy mogłyby się mieć inaczej. Trzeba je więc rozróżnić.

1° *Gdy strony równości są odjemne, ta nierówność po podniesieniu do potęgi stopnia parzystego zmienia kierunek*; bo obie jej strony stają się dodatnemi.

I tak, niech będzie nierówność

$$-2 > -3;$$

zmieniając znaki, i przewracając tę nierówność, przekształcamy ją na dodatną

$$2 < 3.$$

Owoż ostatnia nierówność, podniesiona do potęgi *czwartej* naprzykład, daje

$$2^4 < 3^4,$$

albo, co to samo,

$$(-2)^4 < (-3)^4.$$

Ten wynik dowodzi założenia

2° *Gdy strony nierówności są ze znakami przeciwnemi, wtedy nie ma żadnego prawidła*; bo taka nierówność podniesiona do potęgi stopnia parzystego, może zachować albo zmienić swój kierunek, i może się nawet przekształcić na równość.

I tak,

$$5 > -3 \quad \text{daje} \quad 5^2 > (-3)^2$$

ale

$$5 > -6 \quad \text{daje} \quad 5^2 < (-6)^2,$$

$$5 > -5 \quad \text{daje} \quad 5^2 = (-5)^2.$$

172. Twierdzenie VII. *Można zawsze wyciągnąć pierwiastek wskazu nieparzystego z dwóch stron wszelkiej nierówności*; bo te pierwiastki, zachowując znak każdej strony, zachowują temsamem kierunek nierówności.

I tak

$$27 > 8 \quad \text{daje} \quad \sqrt[3]{27} > \sqrt[3]{8},$$

$$27 > -8 \quad \text{daje} \quad \sqrt[3]{27} > \sqrt[3]{-8},$$

$$-27 < -8 \quad \text{daje} \quad \sqrt[3]{-27} < \sqrt[3]{-8};$$

Ogólnie, jakiekolwiek są znaki dwóch ilości a i b, jeśli jest

$$a > b,$$

będzie także

$$\sqrt[2n+1]{a} > \sqrt[2n+1]{b}.$$

173. Wiadomo (n° 30) że potęgi stopnia nieparzystego ilości odjemnej są odjemne, a potęgi stopnia parzystego są dodatne.

Gdy się podnosi dwie ilości równe i znaków przeciwnych, $+a$ i $-a$, do potęgi $2m$, otrzymuje się ten sam wynik a^{2m}. Ztąd wnosimy że, jeśli trzeba wyciągać pierwiastek wskazu parzystego z pewnej ilości, ta ilość powinna być dodatna; ale jej pierwiastek może być tak dobrze dodatny jako odjemny. I tak, pierwiastek kwadratowy liczby 4 jest $+2$ albo -2; bo jeden i drugi, podniesiony do kwadratu, wydaje 4. Wyraża się ten dwojaki pierwiastek pisząc

$$\sqrt{4} = \pm 2.$$

To ustaliwszy, pojmuje się łatwo że, *gdy obie strony nierówności są dodatne, można z nich wyciągnąć pierwiastek* nty, *ale tylko dodatny.*

Jakoż, niech bedzie nierówność

$$a < b,$$

w której obie strony a i b są dodatne; wyciągając z nich pierwiastek jakiegokolwiek wskazu n, parzystego albo nieparzystego, będzie oczywiście

$$\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b},$$

byle tylko oba pierwiastniki były arytmetyczne.

Więc, jeśli niewiadomo naprzód czy wyciągnięty pierwiastek wskazu parzystego jest dodatny, trzeba rozróżniać wartość dadatną od odjemnej.

Weźmy naprzykład nierówność

$$(a-b)^2 < c^2,$$

w której a, b, c wyrażają boki trójkąta. Nie wiedząc naprzód czy różnica $a-b$ jest dodatna albo odjemna, rozróżniamy dwa przypadki :

1° Jeśli bok a jest większy od b, różnica $a-b$ będzie dodatna; wyciągamy pierwiastek kwadratowy z obydwóch stron nierówności, i znajdujemy

$$a-b<c.$$

2° Jeśli przeciwnie bok b jest większy od a, wtenczas różnica $b-a$ będzie dodatna; a ponieważ kwadrat różnicy $a-b$ albo $b-a$ jest ten sam, możemy napisać

$$(b-a)^2<c^2;$$

zkąd, wyciągając pierwiastek kwadratowy, otrzymujemy

$$b-a<c.$$

To pokazuje że bok c, rozwiązujący zadaną nierówność, powinien być większy od różnicy boków a i b.

ROZWIĄZYWANIE NIERÓWNOŚCI PIERWSZEGO STOPNIA O JEDNEJ NIEWIADOMEJ.

174. Nierówność pierwszego stopnia o jednej niewiadomej może się przywieśdź do kształtu

$$ax+b>a'x+b',$$

w którym a, b, a', b' oznaczają dane liczby dodatne albo odjemne. *Rozwiązuje się* tę nierówność jako równanie,

Stosując wiadome prawidło, mamy najpierwej

$$(a-a')x>b'-b.$$

Teraz trzeba rozróżnić dwa przypadki:

1° Jeśli różnica $a-a'$ jest dodatna, dzieląc obie strony przez $a-a'$, znajdujemy nierówność w tym samym kierunku co zadana,

$$x > \frac{b'-b}{a-a'}.$$

Ilość $\frac{b'-b}{a-a'}$ jest *granicą niższą* niewiadomej x; to znaczy że, dla sprawdzenia zadanej nierówności, trzeba nadawać niewiadomej x wszystkie wartości możebne większe od tej granicy.

2° Jeśli przeciwnie różnica $a-a'$ jest odjemna wtedy, dzieląc obie strony przez $a-a'$, trzeba zmienić kierunek nierówności; co daje

$$x < \frac{b'-b}{a-a'}.$$

W tym drugim przypadku ilość $\frac{b'-b}{a-a'}$ jest *granicą wyższą* niewiadomej x; to jest że można nadawać tej niewiadomej wszystkie wartości mniejsze od rzeczonej granicy.

Dobrze jest uważać że granica $\frac{b'-b}{a-a'}$ jest właśnie wartością niewiadomej x, którąby czyniła równemi obie strony nierówności.

Przykład I. Niech będzie nierówność

$$\frac{3}{4}x-\frac{1}{3}+5 < 2x-\frac{5x}{6}+\frac{1}{2}.$$

Ta nierówność przekształca się na następującą

$$9x-4+60 > 24x-10x+6,$$

albo

$$50 < 5x;$$

zkąd

$$x > 10.$$

Przykład II. Znaleźć granice między któremi trzeba zmieniać x, aby zadość uczynić nierówności

$$\frac{x}{x-1}+\frac{1}{2}>2+\frac{2}{x-1}.$$

Sprowadzając obie strony do spólnego mianownika, przekształcamy daną nierówność na prostszą równowartą

$$\frac{3x-1}{2(x-1)}>\frac{4x}{2(x-1)},$$

zkąd

$$\frac{x+1}{x-1}<0.$$

Owoż, ostatniej nierówności staje się zadość tylko przez wartości dla x większe od -1 ale mniejsze od $+1$, to jest, zawarte między -1 i $+1$; więc rozwiązaniem zadanej nierówności jest podwójna nierówność

$$-1<x<1.$$

Przykład III. Dowieśdź nierówności

$$a^2+b^2+c^2>ab+ac+bc.$$

Przenosząc wszystkie wyrazy na pierwszą stronę, będzie

$$a^2+b^2-ab-ac+b^2+c^2-bc>0.$$

Owoż, można rozłożyć na kwadraty, działając jako następuje:

$$\left(a-\frac{b+c}{2}\right)^2-\left(\frac{b+c}{2}\right)^2+b^2+c^2-bc>0,$$

albo

$$\left(a-\frac{b+c}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(b^2+c^2-2bc)>0;$$

więc

$$\left(a-\frac{b+c}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(b-c)^2>0.$$

Możemy dowieśdź inaczej. Jakoż, mamy

$$a^2+b^2>2ab,\quad b^2+c^2>2bc,\quad c^2+a^2>2ac;$$

zkąd, dodając stronami, wynika

$$a^2+b^2+c^2>ab+bc+ac.$$

Przykład IV. Dowieśdź nierówności

$$1.2.3\ldots n>\sqrt{n^n},$$

n znaczy liczbę całkowitą.

Jest oczywiście

$$\begin{gathered}1.n=n,\\ 2(n-1)>n,\\ 3(n-2)>n,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ (n-1).2>n,\\ n.1=n,\end{gathered}$$

zkąd, mnożąc stronami, wynika

$$1^2.2^2.3^2\ldots(n-1)^2n^2>n^n$$

Więc

$$1.2.3\ldots n>\sqrt{n^n}.$$

175. Zagadnienie. *Pasterz zapytany ile ma owiec, odpowieda: Jeśli od $\frac{2}{5}$ liczby moich owiec odejmiecie 7, zostanie więcej niż 4;*

a jeśli do $\frac{1}{3}$ *tej liczby dodacie jedność, summa będzie większa od przewyżki połowy liczby owiec nad 4. Ileż było owiec?*

Nazywając x liczbę owiec, i idąc za wysłowieniem zagadnienia, otrzymujemy zaraz dwie nierówności

$$\frac{2}{5}x - 7 > 4,$$

$$\frac{1}{3}x + 1 > \frac{x}{2} - 4;$$

które mogą wziąć kształt całkowity prostszy

$$2x - 35 > 20,$$

$$2x + 6 > 3x - 24.$$

Ponieważ wartość x powinna zadość czynić obydwom nierównościom, szukamy jej granic, i, rozwiązując te nierówności, znajdujemy

$$x > 27\frac{1}{2},$$

$$x < 30.$$

Owoż x, oznaczające liczbę owiec, może brać tylko wartości całkowite 28 i 29; więc te dwie liczby są dwoma rozwiązaniami zagadnienia. Co resztą nietrudno sprawdzić.

NIERÓWNOSCI PIERWSZEGO STOPNIA O KILKU NIEWIADOMYCH.

176. Niech będą dwie nierówności o dwóch niewiadomych

$$ax + by > c,$$

$$a'x + b'y > c'.$$

Trzeba rozróżnić dwa przypadki:

1° Jeśli spółczynniki a i a' jednej niewiadomej są dodatne, rozwiązując nierówność względem tej niewiadomej, otrzymuje się dwie granice niższe

$$x > \frac{c-by}{a},$$

$$x > \frac{c'-b'y}{a'}.$$

Wtedy można dać niewiadomej y wartość dowolną β, a niewiadomej x wszystkie wartości większe od największej z dwóch granic $\frac{c-b\beta}{a}$ i $\frac{c'-b'\beta}{a'}$.

2° Jeśli spółczynniki a i a' są odjemne, można jeszcze dać niewiadomej y wartorść dowolną β; wtenczas niewiadoma x weźmie wszystkie wartości mniejsze od najmniejszej z dwóch granic $\frac{c-b\beta}{a}$ i $\frac{c'-b'\beta}{a}$.

3° Nakoniec, jeśli a i a' są znaków przeciwnych, naprzykład $a>0$ i $a'<0$, będzie

$$x > \frac{c-by}{a} \quad \text{i} \quad x < \frac{c'-b'y}{a'};$$

co wymaga żeby było

$$\frac{c-by}{a} < \frac{c'-by}{a'},$$

albo

$$(ab'-ba')y < ac'-ca'.$$

Ztąd, według jak różnica $ab'-ba'$ jest dodatna albo odjemna, wynika dla y granica wyższa albo niższa. Wtenczas, nadając niewiadomej y przyzwoite wartości, otrzyma się dla x wartości zawarte między granicami odpowiedającemi tej niewiadomej.

Rozwiązując zadane nierówności względem y, można otrzymać podobne granice dla x.

Przykład. Niech będą dwie nierówności

$$x-4y>6,$$
$$2x+3y>8.$$

Uważając że można wyrugować y przez dodawanie dwóch nierówności, mnożymy pierwszą przez 3, drugą 4, i dodając stronami znajdujemy

$$11x>18+32;$$

zkąd wywodzimy dla x granicę niższą

$$x>\frac{50}{11}.$$

Kładąc w nierównościach za x ciąg wartości większych od $\frac{50}{11}$, otrzyma się dla y odpowiedające wartości.

ĆWICZENIA

I. Rozwiązać nierówność

$$\frac{1}{2}+\frac{x}{3}<\frac{2}{3}-\frac{x}{2}.$$

Odpowiedź : $x<\frac{1}{5}$.

II. Rozwiązać nierówność

$$\frac{x}{x+2}-1<\frac{x}{x-2}.$$

Odpowiedź: $x > 2$; albo $-2 < x < 0$.

III. Rozwiązać nierówność

$$\frac{2x}{x-1} + \frac{11}{3} > 6 + \frac{2}{x-1}.$$

Odpowiedź: nierówność niewyznaczona; wszelka wartość x czyni jej zadość.

IV. Rozwiązać nierówność

$$\frac{x+a}{\sqrt{a^2+x^2}} > \frac{x+b}{\sqrt{b^2+x^2}}.$$

Odpowiedź: W założeniu że liczby a, b są dodatne i $a > b$, wartość x powinna być dodatna i większa od $\sqrt{ab}$, albo odjemna i mniejsza od $-\sqrt{ab}$.

V. Rozwiązać nierówność

$$(a-b)^2 > (c-d)^2.$$

Odpowiedź: przypuszczając że a, b, c, d są dodatne, może być jedno z czterech rozwiązań

$$a-b > c-d, \quad a-b > d-c, \quad b-a > c-d, \quad b-a > d-c.$$

VI. Czy istnieje trójkąt którego boki a, b, c sprawdzają podwójną nierówność

$$(a+b)^2 > c^2 > (a-b)^2.$$

Odpowiedź: te boki zadość czynią nierównościom $c < a+b$. $b < a+c$, $a < b+c$; więc...

VII. Dowieśdź że

$$3(1+a^2+a^4) > (1+a+a^2)^2.$$

jakiekolwiek jest a.

VIII. Znaleźć wartości całkowite dla x i y które zadość czynią nierównościom

$$2y-x>0,\quad 1-2x-3y>0,\quad 7+4x+y>0.$$

Odpowiedź : $x=-1,\quad y=0.$

IX. Dowieśdź nierówności

$$(a+b)(a+c)(b+c)>8abc.$$

Odpowiedź : dość jest uważać że średnia arytmetyczna dwóch liczb jest większa od ich średniej geometrycznej.

X. Znaleźć warunki konieczne i dostateczne żeby nierówność

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F>0,$$

miała miejsce jakiekolwiek są x i y.

Odpowiedź : dość jest wyrazić pierwszą stronę przez summę kwadratów.

XI. Dowieśdź że, w każdej proporcyi, summa wyrazów największego i najmniejszego jest większa od summy dwóch innych.

XII. Dowieśdź że w trójkącie prostokątnym summa przeciwprostokątnej i wysokości odpowiedającej jest większa od pół obwodu.

XIII. Dowieśdź że w każdym trójkącie

$$h<\sqrt{p(p-a)}.$$

p znaczy półobwód, h wysokość odpowiedającą bokowi a.

ROZDZAŁ IV

ZAGADNIENIA ROZWIĄZUJĄCE SIĘ PRZEZ RÓWNANIA PIERWSZEGO STOPNIA

177. Zagadnienia które można rozwiązać przez równania pierwszego stopnia nazywają się czasem zagadnieniami pierszego stopnia.

Rozwiązywanie jakiegokolwiek zagadnienia zawiera trzy oddzielne części:

1° *Wprowadzenie w równanie*, to jest algebryczne wyrażenie związków jakie łączą ilości niewiadome z wiadomemi.

2° *Rozwiązywanie równań.*

3° *Dyskussya zagadnienia*, to jest roztrząsanie różnych przypadków, i poszukiwanie warunków którym zadość czynić powinny ilości dane, żeby zagadnienie było możebne.

Wprowadzenie zagadnienia w równanie. Nie ma wyraźnego prawidła za pomocą którego, odkrywając związki między ilościami danemi i szukanemi zagadnienia, możnaby je odrazu przedstawić równaniem. Ale samo wysłowienie zagadnienia, dostatecznie zgłębione, pokazuje jakich warunków te ilości wiadome i niewiadome dopełniać mają; wyrazić że ich dopełniają jestto właśnie znaleźć równanie zagadnienia. Ułatwia się poszukiwanie równań, idąc za następującem ogólnem przepisem:

Zobaczyć najpierwej jakie są ilości których wyznaczenie prowadzi do znajomości wszystkich innych szukanych, wziąć je za niewiadome zagadnienia, i oznaczyć ostatniemi literami x, y, z... *alfabetu. Potem, wskazać za pomocą algebrycznych znaków, na ilościach tak wiadomych jako niewiadomych, te same działania* *któreby wykonać trzeba było dla sprawdzenia wartości niewiadomych, gdyby je znaleziono.*

A dodajemy że, dopóty równanie zagadnienia nie będzie otrzymane, dopóki wszystkie ilości dane nie wejdą do rachunku, i dopóki wszystkie warunki wysłowione nie zostaną wyrażone algebrycznie.

Aby początkujący dobrze rozumieli cały użytek tego przepisu, niech go stosują do wielu przykładów; rozwiną tym sposobem przenikliwość umyslu która ostatecznie zastąpi wszelkie przepisy.

Nim się zajmiemy rozwiązywaniem zagadnień, które jest przdmiotem niniejszego rozdziału, zrobimy tu małą uwagę. Często zagadnienie, które na pierwsze spojrzenie przedstawia kilka niewiadomych, może się rozwiązać za pomocą mniejszej ich liczby, a niekiedy nawet za pomocą jednej tylko. Ta okoliczność jest ważna w tem że, im mniej wprowadzono niewiadomych tem mniej trzeba szukać równań do ich wyznaczenia. Ale są częste przypadki w których się łatwiej rozwiązuje za pomocą kilku niewiadomych, niż za pomocą jednej. Damy na to wszystko różne przykłady.

178. Zagadnienie I. *Matka ma lat* 56, *córka lat* 21; *za ile lat matka będzie dwa razy starsza od córki?*

Nazwijmy x szukaną liczbę lat.

Na końcu x lat, matka będzie miała liczbę lat wyrażoną przez

$$56+x,$$

a córka liczbę lat równą

$$21+x.$$

Owoż w tym czasie, wedle zagadnienia, wiek matki powinien być dwa razy większy od wieku córki; więc, jeśli pomnożymy wiek córki przez 2, będziemy mieli równanie

$$56+x=2(21+x),$$

albo

$$56+x=42+2x,$$

albo jeszcze

$$2x-x=56-42\ ;$$

zkąd

$$x=14.$$

Więc szukana liczba lat jest 14.

Sprawdzenie. Za lat 14 matka będzie miała 56 + 14 czyli 70 lat; córka będzie miała 21 + 14 czyli 35 lat. Liczba 70 jest istotnie dwa razy większa od 35; co dowodzi dokładności rozwiązania.

179. Zagadnienie II. *Ojciec z synem mają razem* 101 *lat. Za* 8 *lat ojciec będzie dwa razy starszy od syna. Ileż ma lat ojciec a ile syn?*

Jeśli oznaczymy wiek ojca przez x, wiek syna będzie $101-x$. Owoż, za lat 8 ojciec będzie miał lat

$$x+8,$$

a syn lat

$$101-x+8.$$

Ale, w tej epoce, ojciec będzie dwa razy starszy od syna; mamy więc równanie

$$x+8=2(101-x+8),$$

albo

$$x+8=218-2x,$$

albo jeszcze

$$3x=210\ ;$$

zkąd

$$x=70.$$

Ojciec ma lat 70, więc syn ma lat 101 - 70, to jest 31 lat.

SPRAWDZENIE. Wiek ojca i syna 70 lat i 31 lat, czynią summę 101 lat; po 8 latach ojciec będzie miał 78 lat a syn 39 lat. Liczba 78 jest dwa razy większa od 39; więc zagadnienie jest dobrze rozwiązane.

180 ZAGADNIENIE III. DIOFANTES, *autor najdawniejszego dzieła algebry jakie doszło aż do naszych czasów, przepędził w dzieciństwie* 6tą *część całego życia a w młodości* 12tą *część; potem się ożenił, przepędził w małżeństwie* 7mą *część życia, i jeszcze* 5 *lat, nim się doczekał syna którego przeżył* 4ma *latami, a który dosięgnął tylko połowy wieku ojca. Ile miał lat Diofantes gdy umarł?*

Nazwijmy x liczbę lat *Diofantesa.* Idąc za wysłowieniem zagadnienia, widzimy że Diofantes przepędził w dzieciństwie, w młodości i w małżeństwie, części życia które czynią summę

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5.$$

Poczem, mając syna, żyje razem z nim połowę swojego wieku to jest $\frac{x}{2}$ lat, i więcej jeszcze lat 4. Summa tych wszystkich części życia *Diofantesa* czyni jego cały wiek; mamy więc równanie

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x.$$

Znosimy mianowniki, mnożąc obie strony równania przez 84; co daje

$$14x+7x+12x+756+42x=84x,$$

albo

$$9x=756,$$

zkąd

$$x=84,$$

Więc Diofantes umarł mając lat 84.

Sprawdzenie jest za nadto łatwe, żebyśmy się nad niem zatrzymywali.

181. Zagadnienie IV. *Osoba miłosierna spotyka ubogich i chce im dać równą jałmużnę, ale widzi że, dając tym ubogim po 25 centymów, brakuje 10 centymów; daje wtedy 20 centymów każdemu i zostaje jej 25 centymów. Ileż miała pieniędzy i ilu było ubogich?*

Uważamy że, mając liczbę ubogich można zaraz wiedzieć ile było pieniędzy; dlatego bierzemy liczbę ubogich za niewiadomę i oznaczamy ją przez x.

Ponieważ, dając każdemu ubogiemu 25 centymów, brakuje 10 centymów, ztąd wnosimy że osoba miłosierna miała liczbę centymów wyrażoną przez

$$25x-10,$$

Ale dając tym ubogim po 20 centymów, zostaje jej 25 centymów; zatem osoba posiadała liczbę centymów wyrażoną przez

$$20x+25.$$

Znalezione dwa wyrażenia wartości tej samej liczby centymów są oczywiście równe; mamy więc równanie

$$25x-10=20x+25,$$

albo

$$5x=35;$$

zkąd

$$x=7.$$

Było tedy 7u ubogich, i osoba miłosierna miała liczbę centymów $20.7+25=165$, to jest posiadała 1 fr. 65 centymów.

Uwaga. Wybor niewiadomej nie jest obojętny. Jakoż, nazwijmy y liczbę centymów jaką posiadała osoba miłosierna. Ponieważ, dając 25 centymów każdemu ubogiemu brakuje 10 centymów, ztąd wynika że liczba ubogich jest

$$\frac{y+10}{25}.$$

Ale, dając po 20 centymów tym ubogim, zostaje 25 centymów; zatem liczba ubogich wyraża się przez

$$\frac{y-25}{20}.$$

Owoż, liczba ubogich jest zawsze ta sama, więc jej dwa wyrażenia muszą być równe; co daje

$$\frac{y+10}{25}=\frac{y-25}{20},$$

albo

$$\frac{y+10}{5}=\frac{y-25}{4},$$

albo jeszcze

$$4y+40=5y-125;$$

zkąd

$$y=165.$$

To jest osoba miłosierna miała 1 fr. 65 c. Wynik zgodny z poprzedzającym, ale znaleziony mniej prostym sposobem.

Możemy jeszcze rozwiązać zagadnienie biorąc dwie niewiadome. Oznaczmy przez x liczbę ubogich i przez y liczbę centymów. Tłumacząc wysłowienie zagadnienia językiem algebrycznym, znajdujemy łatwo dwa następujące równania

$$y=25x-10,$$

$$y=20x+25;$$

zkąd, rugując y, wyprowadzamy równanie wynikowe

$$25x-10=20x+25,$$

któreśmy wprost innym sposobem otrzymali.

182. Zagadnienie V. Pitagoras *zapytany ilu ma uczniów, odpowieda : połowa moich uczniów uczy się filozofii, trzecia część matematyki; reszta, która dopiero rozmyśla w milczeniu, razem z trzema przyjętymi na ostatku jest czwartą częścią liczby tych którzy się uczą filozofii i matematyki. Iluż było uczniów.*

Niech będzie x liczba uczniów *Pitagorasa*. Liczba uczniów którzy się uczą filozofii i matematyki czyni summę

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3} \text{ to jest } \frac{5x}{6}.$$

Zatem reszta uczniów wyraża się przez $\frac{x}{6}$. Owoż, ta reszta razem z 3ma uczniami nowo przyjętymi jest czwartą częścią liczby $\frac{5x}{6}$; mamy więc równanie

$$\frac{x}{6}+3=\frac{5x}{24},$$

albo

$$4x+72=5x;$$

zkąd

$$x=72.$$

Pitagoras miał 72 uczniów.

183. Zagadnienie VI. *Wieśniaczka przynosi jaja na targ, i sprzedaje pierwszej osobie połowę wszystkich jaj więcej połowę jednego; drugiej osobie połowę pozostałych jaj więcej połowę*

jednego; i tak następnie, nie tłukąc żadnego jaja, sprzedaje n^{tej} *osobie połowę pozostałych jaj więcej połowę jednego; i już nic niezostaje. Ileż wieśniaczka przyniosła jaj na targ?*

Niech będzie x liczba przyniesionych jaj. Wieśniaczka sprzedaje pierwszej osobie

$$\frac{x}{2}+\frac{1}{2};$$

zostaje więc jaj

$$x-\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right) \quad \text{albo} \quad \frac{x-1}{2}.$$

Sprzedaje drugiej osobie liczbę jaj wyrażoną przez

$$\frac{x-1}{4}+\frac{1}{2} \quad \text{albo} \quad \frac{x+1}{4};$$

zostaje jaj

$$\frac{x-1}{2}-\frac{x+1}{4} \quad \text{albo} \quad \frac{x-3}{4}.$$

Sprzedaje trzeciej osobie liczbę jaj

$$\frac{x-3}{8}+\frac{1}{2} \quad \text{albo} \quad \frac{x+1}{8};$$

więc jej zostaje

$$\frac{x-3}{4}-\frac{x+1}{8} \quad \text{albo} \quad \frac{x-7}{8}.$$

Ustawa reszt ukazuje się widocznie; te reszty są

$$\frac{x-2+1}{2},\quad \frac{x-2^2+1}{2^2},\quad \frac{x-2^3+1}{2^3},\ldots \frac{x-2^n+1}{2^n}.$$

Po n^{tej} sprzedaży zostaje wieśniaczce liczba jaj wyrażona przez $\frac{x-2^n+1}{2^n}$; a że wszystkie jaja były sprzedane, więc ta reszta jest zero; co daje równanie zagadnienia,

$$\frac{x-2^n+1}{2^n}=0,\quad \text{zkąd}\quad x=2^n-1.$$

Wieśniaczka przyniosła na targ 2^n-1 jaj i sprzedała je n osobom.

184. ZAGADNIENIE VII. *Rozdzielić* 124 *franki między trzy osoby tak, żeby działy* 1ej *i* 2ej *osoby były w stosunku* 5 : 6, *a działy* 2ej i 3ej *w stosunku* 4 : 3.

Nazywając x, y, z trzy działy, powinno być

$$\frac{x}{y}=\frac{5}{6}\quad \text{i}\quad \frac{y}{z}=\frac{4}{3}.$$

albo

$$\frac{x}{5}=\frac{y}{6}\quad \text{i}\quad \frac{y}{4}=\frac{z}{3}.$$

Owoż, można przekształcić te dwie proporcye na dwie inne mające spólny stosunek,

$$\frac{x}{10}=\frac{y}{12}\quad \text{i}\quad \frac{y}{12}=\frac{z}{9};$$

ztąd wynika ciąg stosunków równych

$$\frac{x}{10}=\frac{y}{12}=\frac{z}{9},$$

który daje (nº 65)

$$\frac{x}{10}=\frac{y}{12}=\frac{z}{9}=\frac{x+y+z}{10+12+9}=\frac{124}{31}=4.$$

Więc

$$x=40,\qquad y=48,\qquad z=36.$$

185. Zagadnienie VIII. *Rozdzielić 100 franków na trzy części odwrotnie proporcyonalne do liczb 2, 3, 6.*

Nazywając x, y, z trzy części, powinno być

$$\frac{x}{y}=\frac{3}{2} \quad \text{i} \quad \frac{y}{z}=\frac{6}{3}.$$

Te dwie proporcye zamieniają się na dwie równości

$$2x=3y \quad \text{i} \quad 3y=6z,$$

które dają ciąg stosunków równych

$$\frac{x}{\frac{1}{2}}=\frac{y}{\frac{1}{3}}=\frac{z}{\frac{1}{6}}.$$

Ważny wynik, który pokazuje że, *dzielić jakąkolwiek wielkość na części odwrotnie proporcyonalne do liczb danych, jesto ją dzielić na części proporcyonalne do odwrotności tych liczb.*

Jeśli teraz pomnożymy mianowniki ostatnich stosunków przez najmniejszy wielownik 6, liczb 2, 3, 6, będzie

$$\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}=\frac{x+y+z}{6}=\frac{100}{6}=\frac{50}{3};$$

więc

$$x=50, \quad y=\frac{100}{3}, \quad z=\frac{50}{3}.$$

186. Zagadnianie IX. *Dwie fontanny płyną jednostajnie do wodozbioru; pierwsza płynąc sama napełniłaby go w 4*ech *godzinach, druga płynąc także sama napełniłaby go w 6*ciu *godzinach. W jakim czasie obie fontanny płynące razem napełnią ten wodozbiór.*

Nazwijmy x czas, to jest liczbę godzin w jakiej te dwie fontanny płynące razem napełniają wodozbiór. Ponieważ pierwsza fontanna płynąca sama napełnia wodozbiór w 4ech godzinach, w jednej godzinie napełni $\frac{1}{4}$ wodozbioru; zatem w x godzinach napełni część tego wodozbioru wyrażoną przez $\frac{x}{4}$. Tak samo rozumując, widzimy że w czasie x druga fontanna płynąca sama napełnia $\frac{x}{6}$ wodozbioru. Więc obie fontanny płynące razem przez czas x wlewają do wodozbioru ilość wody wyrażoną przez summę

$$\frac{x}{4}+\frac{x}{6}.$$

Owoż, ta ilość wody powinna napełniać cały wodozbiór, którego objętość jest wzięta za jedność; mamy więc równanie

$$\frac{x}{4}+\frac{x}{6}=1.$$

Zkąd, znosząc mianowniki, wynika

$$3x+2x=12;$$

więc

$$x=\frac{12^g}{5}=2^g\frac{2}{5}=2^g\,24^m.$$

Trzeba tedy 2 godzin i 24 minut żeby dwie fontanny płynące razem napełniły wodozbiór.

187. Zagadnienie X. *Dwaj gońcy wyjeżdżają jednocześnie z dwóch miast odległych na 128 mil, pierwszy ujeżdża 20 mil na godzinę, drugi 12 mil. Przypuszczając że obaj gońcy jadą w jedną stronę, pierwszy za drugim, znaleźć jakie przebiegną drogi nim się spotkają.*

Zamiast brać przebieżone drogi za niewiadome, dogodniej będzie wziąć czas ich przebieżenia za niewiadomę; bo znając ten czas, łatwo z niego wywieśdź obie drogi. Nazwijmy x liczbę godzin w jakiej się dwaj gońcy spotykają. Pierwszy ujeżdżając 20 mil w jednej godzinie, ujedzie w x godzinach $20x$ mil; podobnie drugi, ujeżdżając 12 mil w jednej godzinie, ujedzie w x godzinach $12x$ mil. Owoż, żeby pierwszy goniec doścignął drugiego, trzeba żeby przebył odległość 128 mil która go oddziela od drugiego, i przebył jeszcze drogę którą ten drugi ujedzie w czasie x. Mamy więc równanie zagadnienia

$$20x = 128 + 12x;$$

zkąd

$$x = \frac{128}{8} = 16.$$

Więc pierwszy goniec spotka drugiego za godzin 16.

Przez ten czas pierwszy ujedzie mil 20×16 to jest 320 mil, drugi ujedzie mil 12×16 to jest 192 mil. Różnica dwóch przebieżonych dróg czyni istotnie 128 mil.

Uwaga. Jeśli dwaj gońcy jadą na spotkanie jeden drugiego, wtedy oczywiście równanie zagadnienia jest

$$20x + 12x = 128;$$

zkąd

$$x = \frac{128}{32} = 4.$$

Dwaj gońcy spotkają się za 4 godziny; pierwszy ujedzie mil 20×4 to jest 80 mil, drugi ujedzie mil 12×4 to jest 48 mil. Summa tych dwóch przebieżonych dróg czyni istotnie 128 mil.

188 Zagadnienie XI. *Gdy zegar pokazuje południe, wskazówka godzin i wskazówka minut są obie razem na jednym punkcie*

cyferblatu, oznaczonym liczbą XII. Pytanie za ile czasu i w jakim punkcie cyferblatu te dwie wskazówki znowu się spotkają.

Cyferblat jest podzielony na 60 części równych ; w każdej godzinie wskazówka minut przebiega wszystkie 60 podziałów a wskazówka godzin przebiega ich 5 tylko. To zagadnienie jest w gruncie zagadnieniem gońców jadących jeden za drugim. Biorąc za niewiadomę czas wyrażony w godzinach, i nazywając go x, widzimy łatwo że wskazówka minut, przebiegająca 60 podziałów na godzinę, przebiegnie $60x$ podziałów przez godzin x, a w tym samym czasie wskazówka godzin przebiegnie $5x$ podziałów. Owoż, wskazówka minut spotykając wskazówkę godzin, obiegła cały okrąg to jest 60 podziałów, i przebyła drogę którą przeszła wskazówka godzin to jest $5x$. Więc równanie zagadnienia jest

$$60x=60+5x,$$

albo

$$12x=12+x;$$

zkąd

$$x=\frac{12}{11}=1^g\,5^m\frac{5}{11}=1^g\,5^m\,27''\frac{3}{11}.$$

Ten wynik pokazuje że pierwsze spotkanie dwóch wskazówek ma miejsce o $1^g\,5^m\frac{5}{11}$. Drugie spotkanie będzie miało miejsce o $2^g\,10^m\frac{10}{11}$; trzecie o $3^g\,16^m\frac{4}{11}$; i t. d. Jedenaste i ostatnie spotkanie przypadnie o północy, po przeciągu godzin 12.

Uwaga. Spostrzegając że od południa do północy, to jest w przeciągu 12 godzin, jest tylko 11 spotkań, i one przypadają oczywiście w równych przedziałach czasu; można odrazu rozwiązać obecne zagadnienie. Jakoż, trzeba 12 godzin na 11 spotkań, więc na jedno spotkanie trzeba godzin $\frac{12}{11}$; co daje $1^g\,5^m\,\frac{5}{11}$. Wynik zgodny z poprzedzającym.

189. Zagadnienie XII. Hieron, *król Syrakuzy, chcąc ofiarować Jowiszowi złotą koronę, dał na jej zrobienie* 20 *funtów złota. Wykończona korona ważyła istotnie* 20 *funtów; ale król podejrzywając złotnika o ujęcie złota i zastąpienie go innem metalem, poradził się w tej mierze* Archimedesa. *Ten wielki matematyk odkrywszy fizyczną zasadę że* : Wszelkie ciało zanurzone w wodzie traci część swojego ciężaru równą ciężarowi wody wypchniętej (*). Użył tej zasady do sprawdzenia czy korona była rzeczywiście ze szczerego złota. Wiedząc że złoto traci w wodzie 0,052 swojego ciężaru, zanurzył koronę w wodzie i znalazł że jej ciężar był 18 funtów 12 uncyj to jest że korona straciła w wodzie 1 funt $\frac{1}{4}$ na 20 funtów, czyli 0,0625 swojego ciężaru. Ztąd wniósł że korona nie była z czystego złota; a ponieważ srebro łatwo się łączy ze złotem, sądził zatem że złotnik podstawił srebro za złoto. *Archimedes* zważył srebro w wodzie, i znalazł że ono traci 0,095 swojego ciężaru. Oparty na tych wiadomościach, wyznaczył ile było złota i ile srebra w koronie.

Przypuszczając że w połączeniu dwóch metalów nie ma zmiany objętości, rozwiązać to zagadnienie.

Oznaczmy przez x i y liczby funtów złota i srebra które składały koronę *Hierona*, będziemy mieli pierwsze równanie

$$x+y=20.$$

(*) *Archimedes* kąpiąc się znalazł rozwiązanie zagadnienia korony *Hierona*. Mówią że, uniesiony radością odkrycia, wyskoczył z kąpieli i, zapominając że był nagi, przebiegał ulice Syrakuzy wołając : znalazłem, znalazłem ! (εὕρηκα εὕρηκα).

Aby otrzymać drugie równanie, trzeba uważać że x funtów złota tracą w wodzie $0{,}052x$ swojego ciężaru, y funtów srebra tracą $0{,}095y$ swojego ciężaru, a zaś korona ważąca 20 funtów traci 1,25 tego ciężaru. Co daje drugie równanie

$$52x+95y=1250.$$

Rugując y mamy

$$43x=650\ ;$$

zkąd

$$x=15\frac{5}{43}.$$

Rugując x znajdujemy

$$43y=210;$$

zkąd

$$y=4\frac{38}{43}.$$

Było więc w koronie *Hierona* złota 15 funtów 1 uncya $\frac{37}{43}$, srebra 4 funty 14 uncyj $\frac{6}{43}$.

190. Zagadnienie XIII. *Sztaba ze srebra i miedzi waży w powietrzu* 540 *grammów, zanurzona w wodzie waży tylko* 485 *gr. Pytanie ile w niej srebra i ile miedzi? wiedząc że gęstość srebra jest* 10,47 *a gęstość miedzi* 8,78.

Nazywając x i y liczby grammów srebra i miedzi które składają sztabę, mamy zaraz jedno równanie

$$x+y=540.$$

Znajdziemy drugie równanie za pomocą zasady Archimedesa: *wszelkie ciało, zanurzone w jakimkolwiek płynie, traci ze swojego ciężaru tyle ile waży objętość wypchniętego płynu.*

Jakoż, sztaba tracąca w wodzie 55 grammów ciężaru wedle zagadnienia, ma objętość 55 centymetrów sześciennych; bo się nazywa grammem ciężar jednego centymetra sześciennego wody czystej mającej gęstość największą możebną; nadto, ponieważ ciężar ciała równa się wieloczynowi swojej objętości przez gęstość, albo dokładniej, przez ciężar gatunkowy (*), objętość ciężaru x srebra wyraża się przez $\frac{x}{10,47}$, i tak samo objętość ciężaru y miedzi jest $\frac{y}{8,78}$. Mamy więc drugie równanie

$$\frac{x}{10,47}+\frac{y}{8,78}=55,$$

albo, znosząc mianowniki,

$$878x+1047y=505596,3.$$

Rugując teraz y, między dwoma równaniami zagadnienia, otrzymujemy

$$169x=59783,7\ ;$$

zkąd

$$x=353,74\ldots$$

Rugując tak samo x, znajdujemy

$$169y=31476,3\ ;$$

zkąd

$$y=186,25\ldots$$

Więc sztaba zawiera $353^{gr},7$.. srebra, i $186^{gr},2$.. miedzi.

(*) Ciężar jedności objętości ciała nazywa się jego *ciężarem gatunkowym*.

191. Zagadnienie XIV. *Utworzono alliaż dwóch metalów, mających ciężary gatunkowe* ρ i ρ', *biorąc* p *grammów pierwszego i* p' *grammów drugiego. Znaleźć ciężar gatunkowy tego alliażu, wiedząc że jego objętość zmniejszyła się w stosunku* $\frac{1}{\delta}$ *na jedność.*

Jeśli nazwiemy x ciężar gatunkowy alliażu, jego objętość będzie

$$\frac{p+p'}{x}.$$

Owoż, objętości dwóch metalów są $\frac{p}{\rho}$ i $\frac{p'}{\rho'}$; zatem objętość alliażu, przypuszczając jej zmniejszenie, wyraża się przez

$$\left(\frac{p}{\rho}+\frac{p'}{\rho'}\right)\left(1-\frac{1}{\delta}\right);$$

co daje równanie

$$\frac{p+p'}{x}=\left(\frac{p}{\rho}+\frac{p'}{\rho'}\right)\left(1-\frac{1}{\delta}\right).$$

Więc

$$x=\frac{p+p'}{\left(\frac{p}{\rho}+\frac{p'}{\rho'}\right)\left(1-\frac{1}{\delta}\right)}.$$

Jeśli w połączeniu dwóch metalów nie ma zmniejszenia objętości, ciężar gatunkowy alliażu przedstawia się formułą

$$x=\frac{p+p'}{\frac{p}{\rho}+\frac{p'}{\rho'}},$$

która daje ciężary p i p'; gdy jest wiadoma ich summa $p+p'$, i ciężary gatunkowe x, ρ i ρ', jako w zagadnieniu korony *Hierona*.

192. Zagadnienie XVI. *Jest sztaba srebrna ważąca* 1025 *gr. i mająca tytuł* 0,86. *Ile do niej trzeba przydać drugiej sztaby, mającej tytuł* 0,95, *aby podnieść tytuł do* 0,90?

Wiadomo że tytułem sztaby złotej albo srebrnej jest ilość złota albo srebra zawarta w jednym grammie. Jeśli więc nazwiemy x liczbę grammów jaką trzeba przydać do pierwszej sztaby, tak utworzona sztaba będzie ważyła $1025+x$ grammów; a ponieważ każdy jej gramm ma zawierać 0,90 czystego srebra, ilość srebra nowej sztaby wyrazi się przez

$$0,90(1025+x).$$

Owoż, widzimy łatwo że pierwsza sztaba zawiera $0,86\times1025$ grammów srebra, a zaś x grammów wzięte z drugiej sztaby mają $0,95x$ grammów srebra; summa tych dwóch ilości

$$0,86\times1025+0,95x,$$

przedstawia także ilość srebra utworzonej sztaby.

Zatem, znając dwa wyrażenia tej samej ilości srebra, mamy równanie

$$0,90(1025+x)=0,86\times1025+0,95x.$$

Wykonywając mnożenia będzie

$$92250+90x=88150+95x,$$

albo

$$5x=4100;$$

zkąd

$$x=820^{\text{gr}}.$$

Sprawdzenie. Ponieważ pierwsza sztaba waży 1025^{gr}, i zawiera srebra $0{,}86\times 1025=881^{gr}{,}50$, a przydane do niej grammy 820 mają srebra $0{,}95\times 820=779^{gr}$, nowa sztaba waży $1025+820=1845^{gr}$ i zawiera srebra $881{,}50+779=1660^{gr}{,}50$; więc tytuł utworzonej sztaby jest

$$\frac{1660{,}50}{1845}=0{,}90.$$

193. Zagadnienie XVII. *Są trzy sztaby alliażu złota, srebra i miedzi. Pierwsza sztaba zawiera* 90^{gr} *złota,* 60^{gr} *srebra i* 120^{gr} *miedzi; w drugiej sztabie jest* 160^{gr} *złota,* 80^{gr} *srebra i* 40^{gr} *miedzi; w trzeciej się znajduje* 150^{gr} *złota,* 300^{gr} *srebra i* 250^{gr} *miedzi. Ile trzeba wziąć z każdej sztaby, aby utworzyć czwartą, zawierającą* 100^{gr} *każdego z trzech metalów?*

Nazwijmy x, y, z odpowiedające części trzech sztab jakie trzeba wziąć do utworzenia czwartej sztaby. Biorąc część pierwszej sztaby oznaczoną przez x bierzemy temsamem z jej 90ciu grammów złota część wyrażoną przez $90x$; podobnie bierzemy z drugiej sztaby część złota przedstawioną przez $60y$, i z trzeciej sztaby część złota równą $120z$. A ponieważ te trzy ilości złota powinny czynić 100 grammów, mamy równanie

$$90x+160y+120z=100.$$

Znajdujemy tak samo dwa inne równania dotyczące ilości srebra i miedzi,

$$60x+80y+300z=100,$$
$$120x+40y+250z=100.$$

Te trzy równania uproszczone są

$$9x+16y+15z=10,$$
$$(1)\qquad 6x+8y+30z=10,$$
$$12x+4y+25z=10.$$

Odciągając stronami drugie równanie od pierwszego i od trzeciego, mamy układ równowarty prostszy

$$
\begin{aligned}
&3x+4y+15z=5,\\
(2)\qquad &3x+8y-15z=0,\\
&6x-4y-5z=0.
\end{aligned}
$$

Owoż, rugując y między dwoma ostatniemi równaniami, znajdujemy

$$15x-25z=0,$$

albo

$$3x=5z;$$

a rugując także y między pierwszem i ostatniem równaniem, otrzymujemy

$$9x+10z=5.$$

Nakoniec, rugując z między dwoma równaniami o dwóch niewiadomych x i z, mamy

$$15x=5,$$

zkąd

$$x=\frac{1}{3},$$

i następnie

$$z=\frac{1}{5}.$$

Podstawienie wartości $x=\frac{1}{3}$ i $z=\frac{1}{5}$ w ostatniem równaniu (2), daje

$$y=\frac{1}{4}.$$

Więc trzeba wziąć $\frac{1}{3}$ część pierwszej sztaby, to jest 90^{gr} z 270^{gr} które ją składają; $\frac{1}{4}$ część drugiej sztaby to jest 70^{gr}, i $\frac{1}{5}$ część trzeciej sztaby to jest 140^{gr}.

194. ZAGADNIENIE XVIII. *Chart ściga lisa który ma* 60 *skoków przed nim. Lis robi* 3 *skoki podczas gdy chart robi tylko* 2; *ale* 3 *skoki charta wartają* 7 *lisich. Ileż chart musi zrobić skoków żeby dosięgnął lisa?*

Chart doścignie lisa gdy, goniąc za nim przebiegnie to co on przebiegł, i jeszcze odległość 60 skoków lisich która go oddziela. Nazwijmy x liczbę skoków jakie chart zrobi nim dosięgnie lisa. Ponieważ chart robi 2 skoki podczas gdy lis robi 3, gdy chart robi 1 skok lis robi $\frac{3}{2}$; zatem, gdy chart zrobi x skoków, lis zrobi $\frac{3x}{2}$. Ale skoki charta nie są równe skokom lisa; dla ich porównania, wyrazimy skoki charta biorąc za *jedność* skok lisa; dlatego że odległość 60 jest dana w skokach lisa. Owoż, 3 skoki charta wartają 7 skoków lisa; zatem 1 skok charta czyni $\frac{7}{3}$ skoku lisa, i następnie x skoków charta czynią $\frac{7x}{3}$ skoków lisa.

Ilość $\frac{7x}{3}$ przedstawia drogę jaką powinien chart przebiedz żeby dogonił lisa, a ta sama droga, wymierzona skokami lisa, wyraża się przez $\frac{3x}{2}+60$; mamy więc równanie

$$\frac{7x}{3}=\frac{3x}{2}+60.$$

albo

$$14x = 9x + 360;$$

zkąd

$$x = \frac{360}{5} = 72.$$

Chart doścignie lisa po 72 skokach.

195. Zagadnienie XIX. *Data wynalazku druku przez* Gutenberga *wyraża się liczbą mającą cztery cyfry. Summa tych czterech cyfer czyni* 14; *summa cyfer skrajnych jest równa summie cyfer średnich, cyfra jedności jest dwa razy większa od cyfry dziesiątków; wiadomo nadto że, jeśli do rzeczonej liczby przydano* 4905, *summa będzie liczbą utworzoną z tych samych cyfer ale w porządku odwrotnym. Jaka jest ta data?*

Oznaczmy przez x, y, z, u jedności, dziesiątki, sta i tysiące szukanej liczby. Jest cztery niewiadome, trzeba czterech równań do ich wyznaczenia. Idąc za wysłowieniem zagadnienia znajdujemy natychmiast trzy równania

$$x + y + z + u = 14,$$

$$x + u = y + z,$$

$$x = 2y.$$

Aby dojść do czwartego równania, trzeba najpierwej utworzyć szukaną liczbę, nadając każdej z czterech jej cyfer x, y, z, u wartość względną; co się waraża pisząc wielomian

$$1000u + 100z + 10y + x;$$

podobnie się tworzy liczbę z tych samych cyfer wziętych w porządku odwrotnym, pisząc

$$1000x + 100y + 10z + u.$$

Mamy więc czwarte równanie

$$1000u+100z+10y+x+4905=1000x+100y+10z+u,$$

albo

$$999(x-u)+90(y-z)=4905.$$

Owoż, układ trzech pierwszych równań jest równowarty następującemu

$$x+u=7,$$

$$y+z=7,$$

$$x=2y;$$

zkąd wywodzimy

$$x+u-7=0.$$

$$x+z-y-7=0;$$

jeśli więc dodamy dwa ostatnie wielomiany, wartości zero, pierwszy do pierwszego nawiasu czwartego równania, drugi do drugiego, nic się przez to nie zmieni, ale się wyruguje odrazu x, y, z, i będzie

$$999(2x-7)+90(x-7)=4905,$$

albo

$$2088x=12528;$$

zkąd

$$x=6.$$

Poczem otrzymuje się zaraz

$$y=3,\quad z=4,\quad u=1.$$

Więc data wynalazku druku jest 1436.

Można rozwiązać to zagadnienie za pomocą jednej tylko niewiadomej, ale rachunek jest nieco zawilszy. W tym przykładzie użycie kilku niewiadomych ułatwia rozumowanie i rozwiązywanie.

196. ZAGADNIENIE XX. *Znaleźć ułamek taki, żeby, przez dodanie liczby* m *do jego licznika, stał się* $\frac{a}{b}$; *a przez dodanie liczby* n *do jego mianownika, stał się* $\frac{c}{d}$.

Niech będzie $\frac{x}{y}$ ten ułamek, w którym liczby x i y są jakiekolwiek dodatne. Według warunku zagadnienia powinno być:

$$\frac{x+m}{y}=\frac{a}{b} \quad \text{i} \quad \frac{x}{y+n}=\frac{c}{d},$$

albo

$$bx-ay=-bm,$$
$$dx-cy=cn;$$

zkąd

$$x=\frac{c(an+bm)}{ad-bc},$$
$$y=\frac{b(cn+dm)}{ad-bc}.$$

Więc szukany ułamek jest

$$\frac{x}{y}=\frac{\frac{c(an+bm)}{ad-bc}}{\frac{b(cn+dm)}{ad-bc}}.$$

UWAGA. Nietrudno sprawdzić że ten ułamek, taki jaki jest, rozwiązuje zagadnienie. Ale, gdyby go zredukowano, biorąc

$$\frac{x}{y}=\frac{c(an+bm)}{b(cn+dm)},$$

nie mianoby koniecznie rozwiązania. I tak, weźmy przykład liczebny

$$\frac{x+1}{y}=\frac{3}{4},\quad \frac{x}{y+2}=\frac{5}{12}.$$

Z tych dwóch równań, otrzymuje się łatwo iloraz

$$\frac{x}{y}=\frac{\frac{25}{8}}{\frac{11}{2}},$$

który rozwiązuje zagadnienie. Ale, gdyby wzięto ułamek zredukowany $\frac{25}{44}$, nie mianoby rozwiązania.

197. Zagadnienie XXI. *Cztery osoby posiadają*: 1sza 30 fr., 2ga 20fr., 3cia 15fr., 4ta *nie ma nic. Przysłano im* 155fr., *z warunkiem rozdzielenia ich między sobą tak, żeby każda posiadała tę samą summę. Ileż każda dostanie?*

Niech będą x, y, z, u działy tych czterech osób. Powinno być

$$30+x=20+y=15+z=u.$$

$$x+y+z+u=155.$$

Z trzech pierwszych równań wynika

$$x+y+z+65=3u.$$

Odciągając stronami to równanie od czwartego, będzie

$$u-65=155-3u;$$

zkąd

$$u=55.$$

Przez podstawienie tej wartości w pierwszych równaniach, otrzymujemy

$$x=25, \quad y=35, \quad z=40, \quad u=55.$$

198. Zagadnienie XXII. *Trzej gracze zgadzają się na to że, po każdej partyi, przegrywający podwoi pieniądze dwóch innych; przegrywają każdy jedną partyę i przestają grę, mając każdy* 120fr. *Jakież były ich stawki?*

Nazwijmy x, y, z stawki trzech graczów. Przypuszczając że gracz x przegrał pierwszą partyę, gracz y drugą i gracz z trzecią;

stan majątku trzech graczów, po pierwszej partyi, jest

$$x-y-z, \qquad 2y, \qquad 2z;$$

po drugiej partyi

$$2x-2y-2z, \qquad 2y-(x-y-z)-2z, \qquad 4z;$$

albo

$$2x-2y-2z, \qquad 3y-x-z, \qquad 4z,$$

po trzeciej

$$4x-4y-4z, \qquad 6y-2x-2z, \qquad 7z-x-y.$$

Mamy więc równania

$$(1) \qquad \begin{aligned} 4x-4y-4z&=120,\\ 6y-2x-2z&=120,\\ 7z-x-y&=120. \end{aligned}$$

albo

$$(2) \qquad \begin{aligned} x-y-z&=30,\\ 3y-x-z&=60,\\ 7z-x-y&=120. \end{aligned}$$

Rugując x między pierwszem równaniem i każdem z dwóch inuych, otrzymujemy

$$y-z=45,$$
$$3z-y=75;$$

zkąd

$$z=60,$$
$$y=105.$$

Te wartości poniesione do pierwszego równania (2), dają

$$x=195.$$

199. Uważając że, przez cały ciąg gry, summa pieniędzy, jaką posiadają gracze, zostaje ta sama i równa summie stawek, widzimy naprzód że powinno być równanie

$$(3) \qquad x+y+z=360,$$

które się z resztą otrzymuje dodając stronami równania (1). Możemy więc zastąpić przez równanie (3) jedno z równań (1) albo (2).

Dodając stronami równanie (3) do każdego z równań (2), znajdujemy natychmiast wartości niewiadomych x, y, z.

Za pomocą ilości posiłkowej $x+y+z$, można rozwiązać poprzedzającą zagadnienie tak zogólnione:

n *graczów zgadzają się na to że, po każdej partyi przegrywający podwoi pieniądze wszystkich innych. Po* n *partyach, przegranych po kolei, kończy się gra, i każdy gracz odchodzi z odpowiedającą summą* a_1, a_2, a_3,...,a_n. *Jakie były stawki?*

Nazywając x_1, x_2, x_3,...x_n stawki n graczów, oznaczmy przez x_i stawkę gracza który przegrywa partyę rzędu i.

Po pierwszej partyi ten gracz posiada

$$2x_i;$$

po drugiej

$$2^2x_i;$$

po trzeciej

$$2^3x_i;$$

po partyi rzędu $i-1$

$$2^{i-1}x_i.$$

Wtedy, ponieważ cała summa pieniędzy będących w grze zostaje zawsze $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$, summa jaką posiadają scy inni gracze wyraża się przez

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n-2^{i-1}x_i;$$

w acz x_i, po przegranej partyi rzędu i, daje

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n-2^{i-1}x_i;$$

pozostaje mu, po przegranej partyi, summa

$$2^{i-1}x_i-(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n-2^{i-1}x_i),$$

albo

$$2^ix_i-(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n).$$

Potem gracz x_i podwaja swoje miano po każdej partyi aż do końca gry, to jest podwaja $n-i$ razy. Tym sposobem miano gracza x_i, pomnożone przez 2^{n-i}, wyrażają przez

$$2^nx_i-(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n)2^{n-i}.$$

Z tą summą gracz x_i odchodzi na końcu gry, mając a_i franków; co daje równanie

$$2^nx_i-(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n)2^{n-i}=a_i;$$

zkąd wynika formuła

$$x_i = \frac{a_i}{2^n} + \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{2^i}.$$

Czyniąc po kolei $i = 1, 2, 3, \ldots n$ otrzymuje się wartości wszystkich stawek.

200. Zagadnienie XXIII. *Ojciec rozkazuje testamentem żeby najstarsze z jego dzieci wzięło, z majątku który im zostawia, summę* a *więcej* $n^{\text{tą}}$ *część reszty; żeby* 2gie *wzięło, po odjęciu działu dziecka najstarszego, summę* 2a *więcej* $n^{\text{tą}}$ *część reszty; żeby* 3cie *wzięło, po odjęciu dwóch pierwszych działów, summę* 3a *więcej* $n^{\text{tą}}$ *część reszty; i tak dalej. Owoż zdarza się że wszytkie dzieci dostały równe działy, i majątek ojca zupełnie wyczerpany. Jaki jest majątek ojca, dział każdego dziecka i liczba dzieci?*

Gdyby majątek ojca był wiadomy, odejmując od niego summę a i biorąc $n^{\text{tą}}$ część reszty, otrzymanoby dział najstarszego dziecka, i temsamem dział każdego dziecka, ponieważ te działy są równe; poczem dzieląc majątek przez ten dział, znalezionoby liczbę dzieci. To pokazuje że prawdziwą niewiadomą zagadnienia jest majątek ojca.

Nazwijmy x ten majątek. Gdy najstarsze dziecko weźmie z majątku x summę a, zostanie $x-a$; zatem dział pierwszego dziecka wyraża się przez

$$a + \frac{x-a}{n}.$$

Reszta majątku, po odjęciu tego działu, jest

$$x - a - \frac{x-a}{n} \quad \text{albo} \quad \frac{(n-1)(x-a)}{n}.$$

Teraz, gdy drugie dziecko weźmie $2a$ z tej summy, zostanie

$$\frac{(n-1)(x-a)}{n} - 2a;$$

zatem dział drugiego dziecka wyraża się przez

$$2a+\frac{(n-1)(x-a)}{n^2}-\frac{2a}{n}.$$

Ale ten dział powinien być równy działowi pierwszego dziecka; mamy więc równanie

$$(1)\qquad a+\frac{x-a}{n}=2a+\frac{(n-1)(x-a)}{n^2}-\frac{2a}{n};$$

zkąd, odciągając najpierwej a po obydwóch stronach i znosząc potem mianowniki, otrzymujemy

$$(x-a)n=an^2+(n-1)(x-a)-2an,$$

albo, przenosząc wyraz niewiadomy z drugiej strony na pierwszą,

$$(x-a)(n-n+1)=an^2-2an.$$

Więc

$$x-a=an^2-2an,$$

albo

$$x=a(n-1)^2.$$

Majątek ojca jest $a(n-1)^2$.

Jest tu ważna uwaga do zrobienia. Wartość niewiadomej x została wywiedziona z równania (1), które przedstawia tylko równość dwóch pierwszych działów. Ale nic nie upoważnia do mniemania że wszystkie inne działy są równe między sobą; ponieważ one nie przyczyniają się w niczem do utworzenia równania (1). Trzeba więc *koniecznie* dowieśdź równości działów wedle warunków zagadnienia.

Ze sposobu którym równanie (1) zostało otrzymane, jesteśmy pewni że dział pierwszego dziecka jest równy działowi drugiego. Ale, żeby łatwiej odkryć ustawę tworzenia się wszystkich działów, wyrachujemy najpierwej dwa pierwsze.

Owóż, dział pierwszego dziecka jest

$$a+\frac{x-a}{n}=a+\frac{a(n-1)^2-a}{n}=\frac{a(n-1)n}{n}=a(n-1).$$

Odejmując ten dział od całego majątku $a(n-1)^2$, zostaje

$$a(n-1)^2-a(n-1)=a(n-1)(n-2);$$

zatem dzieł drugiego dziecka będzie

$$2a+\frac{a(n-1)(n-2)-2a}{n}=\frac{a(n-1)(n-2)+2a(n-1)}{n}$$

$$=\frac{a(n-1)(n-2+2)}{n}=a(n-1).$$

Dział drugi jest równy pierwszemu, jakośmy powiedzieli.

Przypuśćmy teraz że, wyrachowawszy liczbę k pierwszych działów, znaleziono je równe ilości $a(n-1)$, i szukajmy czy dział następującego dziecka jest także wyrażony tą samą ilością. Po odjęciu k działów od całego majątku, zostaje

$$a(n-1)^2-ka(n-1)=a(n-1)(n-1-k);$$

zatem następujący dział będzie

$$(k+1)a+\frac{a(n-1)(n-1-k)-(k+1)a}{n}$$

$$=\frac{a(n-1)(n-1-k)+a(k+1)(n-1)}{n}=a(n-1).$$

Ten wynik, do którego liczba k nie wchodzi, pokazuje że wszystkie działy są równe, niezależne od rzędu w którym są utworzone, i wyrażają się przez $a(n-1)$.

To ustaliwszy, jeśli podzielimy majątek ojca przez dział jednego z dzieci, będziemy mieli liczbę dzieci. Tą liczbą jest iloraz całkowity

$$\frac{a(n-1)^2}{a(n-1)}=n-1.$$

Więc majątek ojca jest $a(n-1)^2$, każde dziecko dostaje dział $a(n-1)$, liczba dzieci jest $n-1$.

201. Zagadnienie XXIV. *Jedna osoba umieściła swój kapitał na pewny procent; druga osoba, posiadająca* 15000 fr. *więcej niż pierwsza, umieściła swój na procent o* 1 *mniej od* 100, *i otrzymuje taki sam dochód; trzecia ma* 5000 fr. *mniej niż pierwsza, ale jej kapitał umieszczony na procent, o* 1 *więcej od* 100, *przynosi* 300 fr. *więcej. Pytanie jaki jest majątek każdej osoby i jaka stopa jego procentu?*

Jeśli nazwiemy x majątek pierwszej osoby, y stopę jego procentu, majątek drugiej osoby wyrazi się przez $x+15000$, a stopa jego procentu przez $y-1$; majątek trzeciej osoby będzie $x-5000$ i stopa jego procentu $y+1$.

Znając wyrażenia trzech majątków i stopę ich procentów, możemy algebrycznie znaleźć odpowiedające im dochody. I tak, ponieważ 100 fr. majątku x pierwszej osoby przynoszą procent y, 1 fr. tego majątku przynosi procent $\frac{y}{100}$; zatem majątek x daje dochód

$$\frac{xy}{100}.$$

Tak samo rozumując widzimy łatwo że majątek $x+15000$ drugiej osoby, umieszczony na $y-1$ od sta, przynosi dochód

$$\frac{(x+15000)(y-1)}{100}.$$

Podobnie majątek $x-5000$ trzeciej osoby, umieszczony na $y+1$ od sta, daje dochód

$$\frac{(x-5000)(y+1)}{100}.$$

Owoż wedle zagadnienia, dochód drugiej osoby jest taki sam co pierwszej, a dochód trzeciej przewyższa dochód pierwszej o 300 franków; więc są równania

$$\frac{(x+15000)(y-1)}{100}=\frac{xy}{100},$$

$$\frac{(x-5000)(y+1)}{100}=\frac{xy}{100}+300.$$

Znosząc mianowniki i redukując, przekształcamy te dwa równania na prostsze

$$15000y-x=15000,$$

$$x-5000y=35000.$$

Rugujemy teraz x dodając równania stronami, i mamy

$$10000y=50000,$$

zkąd

$$y=5.$$

Wartość $y=5$, podstawiona w pierwszem równaniu, daje

$$75000-x=15000,$$

zkąd

$$x=60000.$$

Więc pierwsza osoba posiada kapitał 60000 fr. umieszczony na 5%; druga ma kapitał 75000 umieszczony na 4%; trzeciej kapitał jest 55000 i przynosi 6%.

202. Niewiadome posiłkowe. Następujący przykład, wzięty z *Arytmetyki powszechnej* Newtona, pokazuje użytek niewiadomych posiłkowych.

Zagadnienie XXV. *Są trzy łąki, mające powierzchnie S, S', S'', na których trawa jest równej wysokości i rośnie jednostajnie. Pierwsza łąka wyżywiła* n *wołów przez* t *dni, druga* n' *wołów przez* t' *dni; pytanie ile trzecia łąka będzie mogła wyżywić wołów przez* t'' *dni?*

Nazwijmy x szukaną liczbę wołów, i oznaczmy przez h jednakową wysokość trawy trzech łąk w chwili wejścia wołów, przez v prędkość z jaką trawa ciągle rośnie tak przed przyjściem wołów jako po ich przybyciu. Ilości h i v są tu właśnie *niewiadomemi posiłkowemi*, które, chociaż się nie ukazują wydatnie w zagadnieniu, są potrzebne do jego rozwiązywania.

Na pierwszej łące trawa, na końcu t dni, dosięgałaby wysokości $h+vt$, gdyby jej nie zjadały woły; ponieważ przed ich wprowadzeniem trawa miała wysokość h, a jej przyrost przez t dni jest oczywiście vt. Zatem objętość trawy całej łąki wyraża się przez $S(h+vt)$. Owoż, tę ilość trawy n wołów zjadają w dniach t; więc jeden wół, w przypuszczeniu że wszystkie jedzą jednakowo, zjada na dzień ilość trawy

$$\frac{S(h+vt)}{nt}.$$

To samo rozumowanie dowodzi że na drugiej łące jeden wół zjada na dzień ilość trawy

$$\frac{S'(h+vt')}{n't'},$$

i że na trzeciej łące jeden wół zjada na dzień ilość trawy wyrażoną przez

$$\frac{S''(h+vt'')}{nt''}.$$

Te trzy wyrażenia, tej samej ilości trawy zjedzonej przez jednego wołu, powinny być równe; mamy więc równania zagadnienia

$$\frac{S(h+vt)}{nt}=\frac{S'(h+vt')}{n't'}=\frac{S''(h+vt'')}{xt''},$$

albo

$$\frac{h+vt}{\frac{nt}{S}}=\frac{h+vt'}{\frac{n't'}{S'}}=\frac{h+vt''}{\frac{xt''}{S''}}=\frac{v(t''-t)}{\frac{xt''}{S''}-\frac{nt}{S}}=\frac{v(t'-t)}{\frac{n't'}{S'}-\frac{nt}{S}}.$$

Zkąd, dzieląc przez v obie strony ostatniego równania i biorąc odwrotności, wywodzimy

$$\frac{St''x-S''nt}{S''(t''-t)}=\frac{Sn't'-S'nt}{S'(t'-t)},$$

albo, po zniesieniu mianowników,

$$SS't''(t'-t)x-S'S''nt(t'-t)=SS''n't'(t''-t)-S'S''nt(t''-t).$$

Więc

$$x=\frac{S''}{SS'}\cdot\frac{Sn't'(t''-t)+S\,nt(t'-t'')}{t''(t'-t)}.$$

Newton daje przykład liczebny tak wysłowiony :

Przykład. 12 *wołów pasą się trawą* $3\frac{1}{3}$ *morgów przez* 4 *tygodnie*; 21 *wołów pasą się trawą* 10$^{\text{ciu}}$ *morgów przez* 9 *tygodni. Pytanie ile trzeba będzie wołów do zjedzenia trawy* 24$^{\text{ch}}$ *morgów w* 18$^{\text{tu}}$ *tygodniach?* Odpowiedź 36.

Uwaga. Można zogólnić zagadnienie wołów Newtona.

Niech będą na trzech łąkach :

wysokości trawy	h, kh, lh;
prędkości wzrostu trawy	v, pv, qv;
apetyt wołów	1, α, β.

Wtedy

$$\frac{S(h+vt)}{nt}=\frac{S'(kh+pvt)}{\alpha n't'}=\frac{S''(lh+qvt'')}{\beta xt''};$$

zkąd

$$\frac{\frac{h}{v}+t}{\frac{nt}{S}}=\frac{\frac{h}{v}+\frac{p}{k}t'}{\frac{\alpha n't'}{kS'}}=\frac{\frac{h}{v}+\frac{q}{l}t''}{\frac{\beta xt''}{lS''}}=\frac{\frac{q}{l}t''-t}{\frac{\beta xt''}{lS''}-\frac{nt}{S}}=\frac{\frac{p}{k}t'-t}{\frac{n't'\alpha}{kS'}-\frac{nt}{S}}.$$

Ostatnie równanie da x.

ZAGADNIENIA NIEMOŻEBNE ALBO NIEWYZNACZONE.

Dwadzieścia pięć zagadnień któreśmy rozwiązali są *wyznaczone*, to jest mają jedno rozwiązanie i tylko jedno. Pokażemy teraz, w kilku przykładach, zagadnienia *niemożebne*, to jest nie mające żadnego rozwiązania, i zagadnienia *niewyznaczone*, to jest przyjmujące nieskończoną liczbę rozwiązań.

203. Zagadnienie XXVI. *Znaleźć liczbę którejby $\frac{3}{4}$ więcej $\frac{2}{5}$ czyniły tyle ile jej połowa i $\frac{13}{20}$ tej liczby powiększonej jednością.*

Nazywając x tę liczbę, mamy zaraz równanie zagadnienia

$$\frac{3x}{4}+\frac{2x}{5}=\frac{x}{2}+\frac{13}{20}(x+1,)$$

albo

$$15x+8x=10x+13x+13;$$

zkąd

$$0.x=13.$$

Owoż, żadna liczba położona za x nie może zadość czynić temu równaniu; więc zagadnienie jest *niemożebne*.

Ta niemożebność łatwo się uwydatnia na samem równaniu; dość tylko sprowadzić ułamki do spólnego mianownika; co daje

$$\frac{23x}{20}=\frac{23x}{20}+\frac{13}{20}.$$

Tym sposobem widać oczywiście że dwie strony równania są nierówne, i będą zawsze miały różnicę $\frac{13}{20}$ jakąkolwiek wartość położonoby na miejsu niewiadomej x.

204. Zagadnienie XXVII. *Znaleźć liczbę mającą trzy cyfry i taką, żeby summa cyfer czyniła* 20, *żeby pierwsza cyfra była cztery razy większa od trzeciej, i żeby dodając* 858 *do tej liczby otrzymano liczbę przewróconą.*

Jeśli nazwiemy x, y, z pierwszą, drugą i trzecią cyfrę, szukana liczba przedstawi się przez

$$100z+10y+x,$$

a liczba przewrócona wyrazi się przez

$$100x+10y+z.$$

Zatem równania zagadnienia są :

$$100z+10y+x+858=100x+10y+z,$$
$$x+y+z=20,$$
$$x=4z.$$

Pierwsze równanie może się uprościć, biorąc kształt

$$99(x-z)=858;$$

zkąd

$$x-z=\frac{858}{99}=\frac{26}{3}.$$

Ten wynik dowodzi że zagadnienie jest niemożebne, ponieważ różnica dwóch cyfer x i z byłaby ułamkowa i temsamem te cyfry. Ale niemożebność jest względna, dotycze tylko układu dzisiętnego. Zobaczmy więc czy w innym układzie liczenia istnieje liczba dopełniająca warunków zagadnienia.

Biorąc rzeczy ogólnie, oznaczmy przez b podstawę liczenia; szukana liczba będzie

$$b^2z+by+x,$$

a liczba przewrócona

$$b^2x+by+z.$$

Tym sposobem pierwsze równanie zagadnienia weźmie kształt ogólny

$$b^2z+by+x+858=b^2x+by+z,$$

albo

$$(b^2-1)(x-z)=858,$$

albo jeszcze

$$(b+1)(b-1)(x-z)=858.$$

Więc, żeby zagadnienie było możebne w układzie liczenia ktorego podstawą jest b, trzeba żeby oba czynniki $b+1$ i $b-1$ dzieliły liczbę 858. Stosując to do układu *dwunastnego*, widzimy że 11 i 13 dzielą 858; wykonywamy dzielenie, i mamy

$$x-z=6.$$

Poczem, podstawiając $x=4z$, znajdujemy

$$z=2 \quad \text{i} \quad x=8.$$

Te wartości, poniesione do drugiego z równań zagadnienia, dają

$$y=10.$$

Znając wszystkie trzy cyfry liczby, aby ją wyrazić w układzie dwunastnym, oznaczamy 10 przez α i 11 przez β; co daje szukaną liczbę

$$2\alpha 8.$$

Znaleziona liczba rozwiązuje zagadnienie; bo $2+\alpha+8=20$ i $8=4.2$, a dodając liczbę 858 wyrażoną przez $5\beta 6$ do $2\alpha 8$, otrzymuje się właśnie liczbę przewróconą $8\alpha 2$.

205. Zagadnienie XXVIII. *Znaleźć liczbę której* $\frac{3}{4}$ *więcej* $\frac{2}{3}$

jej przewyżki nad 3 *czynią tyle ile* $\frac{11}{12}$ *tej liczby powiększone połową jej przewyżki nad* 4.

Równanie zagadnienia jest

$$\frac{3}{4}x+\frac{2}{3}(x-3)=\frac{11}{12}x+\frac{x-4}{2}.$$

Zkąd, znosząc mianowniki, wynika

$$9x+8x-24=11x+6x-24,$$

albo

$$17x-24=17x-24.$$

Widzimy że wszelka liczba położona na miejscu x sprawdza to równanie, i temsamem zadość czyni warunkom zagadnienia; więc to zagadnienie jest zupełnie *niewyznaczone.*

206. Zagadnienie XXIX. *Czyś dużo ubił zwierza? pytano strzelca. On odpowieda : trzebaby dodać* 5 *sztuk do trzeciej części tych które ubiłem przeszłego roku, aby mieć połowę tego co ubiłem w tym roku; ale, jeśli od trzy razy wziętej ostatniej połowy odejmiecie* 5, *będziecie mieli akurat to co ubiłem przeszłego roku. Ileż strzelec ubił zwierzyny każdego roku?*

Nazywając x liczbę zwierzyny ubitej tego roku, y liczbę zwierzyny ubitej przeszłego roku, mamy

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}+5,$$

$$\frac{3x}{2}-5=y;$$

zkąd, znosząc mianowniki, wynika

$$3x-2y=30,$$

$$3x-2y=10.$$

Te dwa równania, oczywiście *niezgodne*, nie mają rozwiązania; więc dane zaganienie jest niemożebne.

Gdyby, zachowując pierwszą część zagadnienia, zamieniono w drugiej części liczbę 5 na 15, równania zagadnienia byłyby

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}+5,$$

$$\frac{3x}{2}-15=y.$$

Po zniesieniu mianowników, widzimy że dwa ostatnie równania przywodzą się do jedynego równania

$$3x-2y=30;$$

a ponieważ one są tłumaczeniem warunków zagadnienia, to dowodzi że owe warunki pozornie tylko są różne. Więc zadane zagadnienie, wyrażone jednem równaniem o dwóch niewiadomych, jest *niewyznaczone*, to jest można mu zadość uczynić nieskończoną liczbą wartości nadawanych dla x i y.

Ale to niewyznaczenie nie jest tak zupełne jak w poprzedzającem zagadnieniu, gdzie wartość niewiadomej jest *całkiem dowolna*. W obecnem zagadnieniu niewiadome, związane jednem równaniem, zależą jedna od drugiej tak, że dając wartość jednej wyznacza się temsamem wartość drugiej. Nadając pewną wartość niewiadomej x, na przykład, trzeba wziąć dla niewiadomej y odpowiedającą wartość, daną przez formułę

$$y=\frac{3x-30}{2}.$$

Owoż, ta wartość y, z natury zagadnienia, powinna być *dodatna i całkowita*; co wymaga żeby było $x>10$, i do tego jeszcze różnica $x-10$ musi być wielownikiem liczby 2, to jest $x=10+w^k2$. Trzeba więc brać $x=12, 14, 16,\ldots$; co daje $y=3, 6, 9,\ldots$

207. Zagadnienie XXX. *W pewnem towarzystwie, złożonem z 12 osób, zrobiono składkę na ubogich. Każdy mężczyzna dał 5 fr. każda kobieta 2 fr.; zebrana summa wynosiła 50 fr. Ile było mężczyzn a ile kobiet?*

Jeśli oznaczymy przez x i y liczby mężczyzn i kobiet, będziemy mieli równania zagadnienia

$$x+y=12,$$
$$5x+2y=50.$$

Rozwiązując te dwa równania, znajdujemy

$$x=8\frac{2}{3}, \quad y=3\frac{1}{3}.$$

Te wartości *ułamkowe* niewiadomych zadość czynią równaniom, i są ich jedynem rozwiązaniem. A ponieważ równania są algebrycznem wyrażeniem warunków zagadnienia, to zagadnienie nie może mieć innego rozwiązania. Owoż, natura zadanego zagadnienia wymaga żeby rozwiązanie było wyrażone *liczbami całkowitemi*, a znalezione liczby są *ułamkowe*; więc zagadnienie jest niemożebne.

208. Zagadnienie XXXI. *Są dwa naczynia równej wysokości pełne wody, pierwsze trzyma 36 litrów, drugie 20 litrów. U spodu każdego z nich jest przyprawiony kurek, przez który woda może wypływać regularnie. Przez kurek pierwszego naczynia wypływa 6 litrów wody na godzinę, przez kurek drugiego 4 litry. Otworzono razem oba kurki, w jakim czasie dwa naczynia będą zawierały tę samą ilość wody?*

Nazywając x szukaną liczbę godzin, mamy zaraz równanie

$$36-6x=20-4x;$$

zkąd

$$x=8.$$

Wartość dodatna 8 zadość czyni równaniu, ale nie rozwiązuje zagadnienia; albowiem oba naczynia wypróżniają się nim upłynie 8 godzin. Więc zagadnienie jest niemożebne.

209. Uwaga. W ogóle, jedne i te same równania mogą przedstawiać rozmaite zagadnienia ; nie ma więc nic dziwnego że ich rozwiązania nie stosują się koniecznie do szczególnych zagadnień, których natura nakłada niewiadomym warunki niewyrażone temi równaniami. I tak, ostatnie równanie może przedstawiać następujące ogólne zagadnienie :

Mając dany ułamek $\frac{36}{20}$, *znaleźć liczbę* x *taką, żeby odciągając* $6x$ *od licznika i* $4x$ *od mianownika otrzymano ułamek równy* 1.

Powinno być równanie

$$\frac{36-6x}{20-4x}=1.$$

Dla możebności zagadnienia trzeba tylko żeby wyrazy ułamka były oba dodatne albo oba odjemne; co wymaga żeby było $x<5$, albo $x>6$.

Owoż, równanie rozwiązane daje

$$x=8;$$

więc warunek jest dopełniony, i wartość 8 jest rozwiązaniem ostatniego zagadnienia.

ROZWIĄZANIA ODJEMNE ZAGADNIEŃ.

210. W równaniach rozwiązywania odjemne nie przedstawiają nic szczególniejszego od rozwiązań dodatnych; jedne i drugie, położone na miejscu niewiadomych, sprawdzają te

równania, przywodząc je do tosamości. W zagadnieniach rzeczy mają się inaczej; rozwiązania odjemne nie wyrażając żadnej wielkości, nie mogą nic przedstawiać, bez poprzedzającego tłumaczenia które określa ich znaczenie i doniosłość. Ten ważny przedmiot, żeby był dobrze i łatwo zrozumiany, powinien być wyłożony na przykładach. Zaczniemy od najprostszego i już znanego.

Matka ma lat 55, *córka lat* 21, *za ile lat matka* BĘDZIE *trzy razy starsza od córki?*

Nazywając x szukaną liczbę lat, mamy równanie

$$(1) \qquad 55+x=3(21+x),$$

albo

$$2x=55-63=-8;$$

zkąd

$$x=-4.$$

Ta wartość odjemna -4 niewiadomej x jest jedynem rozwiązaniem równania (1); ale, nie znacząc nic sama przez się, nie może rozwiązywać zagadnienia. Więc zagadnienie *takie jakie wysłowiono* jest niemożebne. I w samej rzeczy, stosunek wieku matki do wieku córki jest ułamkiem $\frac{55}{21}$ większym od 1, ale mniejszym od 3. Owóż wiadomo że, ułamek większy od jedności maleje gdy się powiększa jego oba wyrazy tą samą liczbą, a rośnie gdy się je zmniejsza tą liczbą; więc, jakikolwiek *upłynie* czas x, nie będzie nigdy równości

$$\frac{55+x}{21+x}=3.$$

To dowodzi że wiek matki, będąc obecnie mniejszy od potrójnego wieku córki, nie może *w przyszłości* stać się potrójnym tego wieku. Ale musiał nim już być *w przeszłości*. Aby się o tem zapewnić, szukajmy *ile upłynęło lat od epoki w której matka* BYŁA *trzy razy starsza od córki.*

Oznaczając przez x liczbę lat upłyniętych, widzimy że temu x lat, wiek matki był $55-x$, wiek córki $21-x$; a ponieważ wtedy matka miała trzy razy tyle lat ile córka, jest równanie

$$(2) \qquad 55-x=3(21-x),$$

które rozwiązane daje

$$x=4.$$

SPRAWDZENIE. Temu lat 4 wiek matki był $55-4$ czyli 51 lat, wiek córki $21-4$ czyli 17 lat; owoż liczba 51 jest równa *trzy* razy wziętej liczbie 17, więc rzeczywiście temu 4 lata matka była trzy razy starsza od córki.

211. Można otrzymać wprost równanie (2), i wedle niego zmodyfikować pierwsze wysłowienie zagadnienia. Rzecz bardzo prosta. Rozwiązanie odjemne $x=-4$, sprawdzając równanie (1) które przedstawia zagadnienie, pokazuje temsamem że, aby mieć równanie któremuby zadość czyniła ta sama wartość x ale wzięta dodatnie, trzeba tylko w równaniu (1) przemienić x na $-x$, to jest napisać

$$(2) \qquad 55-x=3(21-x).$$

Istotnie, wartość odjemna -4 zadość czyniąca równaniu (1) daje tosamość

$$55-4=3(21-4),$$

która wyraża akurat że wartość dodatna 4, położona zamiast x w równaniu (2), sprawdza to równanie.

Aby teraz przekształcić wysłowienie zagadnienia stosownie do równania (2), dość uważać czas *dodatny* jako *przyszłość* a czas *odjemny* jako *przeszłość*. Co właśnie daje drugie wysłowienie zagadnienia względne do przeszłości.

212. Powtarzając wyżej rozwinięte rozumowanie, dowodzi się łatwo następującego, ogólnego twierdzenia.

Gdy równanie algebryczne o jednej niewiadomej x *ma pierwiastek odjemny, ten pierwiastek wzięty dodatnie zadość czyni równaniu które się otrzymuje z pierwszego przemieniając* x *na* $-x$.

I tak, równanie $x^2+x-2=0$, ma pierwiastek odjemny -2, który wzięty *dodatnie* zadość czyni równaniu $x^2-x-2=0$. Nawzajem, pierwiastek dodatny $+1$ pierwszego równania, wzięty *odjemnie*, zadość czyni drugiemu równaniu.

213. Zagadnienie XXXI *Pewien zajmował robotnika w lecie przez* 13 *dni, a w zimie przez* 17 *dni; za każdy dzień zimowy płacił mu* 2 fr. *mniej niż za dzień letni. Pierwszą razą wytrącił robotnikowi* 22 fr. *za porobione szkody, drugą raza dał mu gratyfikacyę* 28 fr. *za gorliwość; a jednak każdą razą robotnik dostał tę samą summę. Jaka jest cena dnia letniego?*

Jeśli nazwiemy x cenę dnia letniego, cena dnia zimowego będzie $x-2$; zatem summa którą robotnik dostał pierwszą razą jest wyrażona przez $13x-22$, a summa którą odebrał drugą razą przez $17(x-2)+28$. Owoż wedle wysłowienia, te dwie summy powinny być te same; mamy więc równanie

$$(1) \qquad 13x-22=17(x-2)+28.$$

Zkąd wynika

$$13x-22=17x-34+28,$$

$$17x-13x=34-28-22,$$

$$4y=-16;$$

więc

$$x=-4.$$

Tym sposobem robotnik zarabiałby w lecie -4 fr. na dzień; co nie przedstawia żadnego sensu. Jednakże równauie (1), które jest wyrażeniem warunków zagadnienia, sprawdza się przez tę wartość odjemną $x=-4$, i nie ma innego rozwiązania. Ztąd wnieść należy że zagadnienie ze swojem wysłowieniem jest niemożebne.

. Ale, ponieważ wartość odjemna $x=-4$ zadość czyni równaniu (1), wartość dodatna $x=4$ sprawdza równanie otrzymane z pierwszego przez zamianę x na $-x$, to jest

$$-13x-22=17(-x-2)+28,$$

albo

$$(2) \qquad 13x+22=17(x+2)-28.$$

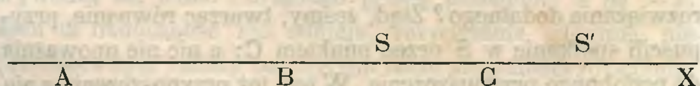
Owoż, na mocy ostatniego równania, żeby zagadnienie było możebne, widzimy że dość jest zmodyfikować jego wysłowienie tak, żeby cena dnia zimowego *przewyższała* o 2 franki cenę dnia letniego, i żeby summa zarobiona przez 13 dni letnich była *powiększona* o 22 franki, zamiast być zmniejszona; a przeciwnie, żeby summa zarobiona przez 17 dni zimowych uległa *zatrzymce* 22 franków, zamiast gratyfikacyi. Zatem nowe wysłowienie, nie zawierające żadnej niemożebności, powinno być następujące:

Pewien zajmował robotnika w lecie przez 13 *dni, a w zimie przez* 17; *za każdy dzień zimowy płacił mu* 2 *franki więcej niż za dzień letni. Pierwszą razą robotnik, za gorliwość, dostał gratyfikacyę* 22 fr.; *ale drugą razą, za wyrządzone szkody, wytrącono mu* 28 fr. *Każdą razą robotnik odebrał tę samą summę; pytanie ile zarabiał dziennie w lecie?*

Tak poprawione wysłowienie prowadzi do równania (2), któremu zadość czyni wartość dodatna $x=4$; więc ta wartość jest rozwiązaniem zagadnienia w sensie nowego wysłowienia.

Więc w ogóle, gdy natura zagadnienia wymaga rozwiązania dodatnego $x=a$, a jego wysłowienie prowadzi do równania które daje tylko wartość odjemną $x=-a$, to już dowodem że zagadnienie jest niemożebne. Wtedy, dla sprostowania wysłowienia, dość jest w równaniu zagadnienia przemienić x na $-x$, i, stosownie do zmiany znaków pewnych wyrazów, zmodyfikować znaczenie odpowiedających im ilości, zostawiając nienaruszoną ich wartość. To uczyniwszy, nie rozwiązując żadnego nowego równania, można być pewnym że rozwiązanie dodatne $x=a$ odpowieda sprostowanemu wysłowieniu. Cośmy właśnie widzieli w ostatniem przerobionem zagadnieniu.

214. ZAGADNIENIE XXXI. *Dwaj gońcy wyjeżdżają z dwóch punktów* A i B *drogi żelaznej* ABX, *i udają się w tym samym kierunku ku punktowi* C *leżącemu poza* B *względem* A. *Dane są odległości* AC$=180$ *mil*, BC$=80$ *mil, i wiadomo że prędkość gońca* A *jest* 18 *mil na godzinę a prędkość gońca* B 10 mil. *Pytanie w jakim punkcie drogi ci gońcy się spotkają?*



Przypuśćmy że spotkanie ma miejsce w punkcie S, i niech będzie CS$=x$. Drogi przebieżone przez dwóch gońców będą

$$AS=180-x, \qquad BS=80-x.$$

Ponieważ pierwszy przebiega 18 mil na godzinę a drugi 10 mil, liczby godzin, użyte przez nich do przebieżenia dróg AS i BS, wyrażają się przez

$$\frac{180-x}{18} \text{ i } \frac{80-x}{10},$$

Te dwa wyrażenia są równe, bo gońcy wyjechali w jednym czasie i spotkają się w tej samej chwili; mamy więc równanie zagadnienia

$$(1)\qquad \frac{180-x}{18}=\frac{80-x}{10}.$$

Zkąd, mnożąc obie strony przez 90, wynika

$$900-5x=720-9x,$$

albo

$$4x=-180;$$

więc

$$x=-45.$$

Znajdujemy wartość odjemną dla x; ale ztąd nie trzeba wnosić że zagadnienie jest niemożebne. Albowiem widać naprzód że goniec A, jadący za gońcem B i prędzej od niego, dopędzi go niezawodnie. Zkądże tedy pochodzi niemożebność rozwiązania dodatnego? Ztąd, żeśmy, tworząc równanie, przypuścili spotkanie w S przed punktem C; a nic nie upoważnia do podobnego przypuszczenia. W tem też przypuszczeniu a nie w wysłowieniu leży niedorzeczność którą wyjawia rozwiązanie odjemne.

Trzeba więc uczynić przypuszczenie przeciwne, to jest umieścić spotkanie w punkcie takim jako S′, poza punktem C. Wtedy, czyniąc CS′$=x$, będzie równanie

$$(2)\qquad \frac{180+x}{18}=\frac{80+x}{10}.$$

Nie ma potrzeby szukać nowego rozwiązania, bo je naprzód znamy. Jakoż, równanie (2) otrzymuje się oczywiście z równania (1), prostą przemianą x na $-x$; więc, ponieważ wartość odjemna $x=-45$ zadość czyni równaniu (1), wartość dodatna $x=45$ musi sprawdzać równanie (2). Wiemy tedy że spotkanie gońców ma rzeczywiście miejsce poza punktem C' w odległości 45 mil.

215. Ilości odjemne mogą być ugodnem rozwiązaniem zagadnień. I tak, w rachunkach handlowych, szukając ile jest zysku, jeśli znaleziono rozwiązanie odjemne, to dowodzi że wynikiem handlowego działania jest strata, a wielkością tej straty wartość samoista ilości odjemnej.

Na termometrze stopnie wyżej zera są uważane za *dodatne*, stopnie niżej zera za *odjemne*; jedne i drugie mogą być rozwiązaniem zagadnień fizycznych. Podobnie, szerokości geograficzne albo niebieskie są dodatne i odjemne; siły odpychające albo przyciągające są także dodatne albo odjemne, i rozwiązują zagadnienia astronomii albo mechaniki.

Ale tłumaczenie rozwiązań odjemnych o tyle tylko jest godziwe w zagadnieniach, o ile równania, w których ilość niewiadoma x może nabyć znaczenia przeciwnego pierwotnemu, albo ma być liczona w kierunku przeciwnym uważanemu, wywodzą się jedno z drugiego prostą przemianą x na $-x$. Jeśli ta okoliczność nie istnieje, rozwiązanie odjemne, nie przedstawiając żadneg osensu, nie może się tłumaczyć ogólnie, i jest tylko znakiem niemożebności zagadnienia. Dwa następujące przykłady jasno to wykazują.

216. Zagadnienie XXXII. *Mając dane* 6 *kamieni w linii prostej, z przedziałami na* 1 *metr, wyznaczyć na tej linii punkt* X *taki, żeby, przenosząc do niego wszystkie kamienie po jednemu, zrobiono* n *razy więcej drogi niż gdyby je przeniesiono do pierwszego kamienia. W obydwóch przypadkach wychodzi się od pierwszego kamienia.*

Przypuśćmy punkt X w odległości x od ostatniego kamienia na prawo. Przenieść po jednemu 5 kamieni do pierwszego kamienia, jest to samo co przebiedz drogę równą summie

$$2(1+2+3+4+5) \quad \text{albo} \quad 30\,;$$

aby przenieść po jednemu wszystkie 6 kamieni do punktu X, trzeba przebiedz drogę wyrażoną przez

$$5+x+2(4+x)+2(3+x)+2(2+x)+2(1+x)+2x.$$

Więc równanie zagadnienia jest

$$(1)\quad 30n=5+x+2(4+x)+2(3+x)+2(2+x)+2(1+x)+2x,$$

albo

$$30n=11x+25;$$

zkąd

$$x=\frac{5(6n-5)}{11}.$$

Gdy jest

$$6n<5 \quad \text{czyli} \quad n<\frac{5}{6},$$

niewiadoma x ma wartość *odjemną;* ale nie oznacza że wtedy punkt X znajduje się w kierunku przeciwnym uważanemu, to jest na lewo ostatniego kamienia. Jakoż, weźmy punkt X między drugim i trzecim kamieniem, na przykład; przenosząc do niego wszystkie kamienie, otrzymujemy równanie

$$(2)\quad 30n=5-x+2(4-x)+2(x-3)+2(x-2)+2(x-1)+2x,$$

które nie pochodzi z przemiany x na $-x$ w równaniu (1).

Więc znaleziona wartość odjemna odległości x wskazuje tu niemożebność zagadnienia.

Biorąc $n=\frac{5}{6}$, będzie $x=0$. To dowodzi że, zaczynając od pierwszego kamienia i przenosząc po jednemu wszystkie kamienie do ostatniego, przebiega się mniej drogi niż gdyby je przenoszono do pierwszego. Co widoczne a priori.

217. ZAGADNIENIE XXXIII. *Droga żelazna bierze* $0^f,12$ *za przewóz beczki towaru* (1000 *kilogrammów*) *na kilometr, i do tego jeszcze pobiera* $1^f,85$ *za ładowanie każdej beczki. Na jaką odległość można przewieźć* 100 *beczek za* 125 *franków?*

Niech będzie x liczba kilometrów odległości. Trzeba zapłacić za ładowanie 100 beczek

$$1,85 \times 100,$$

i, za przewóz tych beczek na x kilometrów,

$$0,12 \times 100 \times x.$$

Mamy więc równanie

$$1,85 \times 100 + 0,12 \times 100x = 125,$$

albo

$$185 + 12x = 125;$$

zkąd

$$x = -\frac{60}{12} = -5.$$

To rozwiązanie odjemne -5^{km} nie może mieć żadnego tłumaczenia; bo zmiana strony w kierunku przebieżonej odległości nie zmienia nic w cenie przewozu; *na prawo* albo *na lewo* punktu wyjścia, cena przewozu 100 beczek towaru na 5 kilometrów jest zupełnie ta sama. Więc, znaleziona odległość odjemna, któraby gdzieindziej mogła być wzięta w stronę przeciwną dodatnej, nie okazuje tu nic innego tylko niemożebność zagadnienia.

Zresztą, nietrudno wiedzieć naprzód że zagadnienie jest niemożebne; albowiem, za samo ładowanie 100 beczek trzeba już zapłacić

$$1,85 \times 100 = 185\text{fr.};$$

co przewyższa całą summę 125 fr. przeznaczoną na opłatę ładowania i przewozu towaru.

218. Weźmiemy teraz zagadnienie pierwszego stopnia o dwóch niewiadomych, w którem rozwiązania odjemne mogą się wytłumaczyć przemianą znaczenia niewiadomych.

Zagadnienie XXXIV. *Stągiew, objętości* v, *napełnia się w czasie* t, *przez* n *kurków wlewających każdy tę samą ilość wody, i przez deszcz który spada jednostajnie na dach mający powierzchnię* s. *Druga stągiew, objętości* v', *napełnia się, w czasie* t', *przez* n' *kurków podobnych poprzedzającym, i przez deszcz który spada, z tą samą prędkością stateczną co pierwszy, na dach mający powierzchnię* s'. *To wiedząc, znaleźć ilość* x *wody którą wlewa każdy kurek w jedności czasu, i ilość* y *wody deszczowej która spadła w jedności czasu na jedność powierzchni dachu.*

Ponieważ jeden kurek wlewa, w jedności czasu, ilość x wody, n kurków wleją przez czas t ilość wody ntx.

Podobnie, ilość wody deszczowej, spadłej na powierzchnię s dachu w czasie t, wyraża się przez sty.

Mamy więc pierwsze równanie dotyczące pierwszej stągwi,

$$ntx+sty=v.$$

Tak samo się otrzymuje drugie równanie, odpowiedające drugiej stągwi,

$$n't'x+s't'y=v'.$$

Te dwa równania wyznaczają niewiadome x i y.

Przypuśćmy że, rozwiązując powyższe równania, znaleziono dla x wartość dodatną α, a dla y wartość odjemną $-\beta$. Rozumując jako w n° 211, widzimy łatwo że wartości dodatne α i β zadość czynią równaniom

$$ntx - sty = v.$$

$$n't'x - s't'y = v'.$$

Ostatnie równania przedstawiają zagadnienie różne od zadanego w tem że, zamiast deszczu który napełnia stągwie, figuruje przyczyna odejmująca im ilość wody proporcyonalną do czasu i do powierzchni; jako naprzykład parowanie wody, które może tłumaczyć wartość odjemną niewiadomej y.

Gdyby, przeciwnie, znaleziono dla x wartość odjemną $-\alpha$, a dla y wartość dodatną β, wartości dodatne α i β czyniłyby zadość równaniom

$$sty - ntx = v,$$

$$s't'y - n't'x = v'.$$

Te ostatnie przedstawiają także zagadnienie różne od zadanego; zamiast kurków które wlewają wodę do stągwi, figurują tutaj, w równej liczbie, pewne przyczyny odejmujące, każda, ilość wody x w jedności czasu; jako naprzykład wydrążone otwory w stągwi, które mogą tłumaczyć wartość odjemną niewiadomej x, jeśli, ma się rozumieć, woda wypływa przez te otwory tak jako wypływała przez kurki.

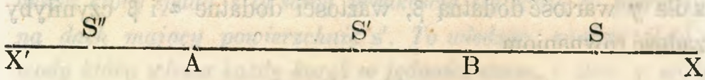
DYSKUSSYA ZAGADNIEŃ.

Nie potrzebujemy powtarzać tego cośmy o użytku ilości odjemnych powiedzieli na początku dzieła (n° 16 i 27); ale dodajemy? że, wprowadzając te ilości jako dane zagadnienia, zogólnia się równania odpowiedające różnym jego przypadkom, i niewątpliwie ułatwia się rozwiązywanie.

Następująca dyskussya, dwóch zagadnień które kończą obecny rozdział, wykaże to w całej obszerności.

219. Zagadnienie gońców. Rozwiązywanie i dyskussya ogólnego zagadnienia gońców rozwidnia zupełnie teoryę ilości odjemnych i przedstawia wyborny przykład różnych przypadków niemożebności i niewyznaczenia, jakie w zagadnieniach spotykać można.

Zagadnienie XXXV. *Dwaj gońcy jadą drogą* X'X *na której się znajdują od czasu nieokreślonego. Ale wiadomo że pierwszy goniec, mający prędkość* v, *przejeżdża przez punkt* A, h *godzin wprzód nim drugi, mający prędkość* v', *przybywa do* B; *znana jest odległość* AB$=$*d. Pytanie w jakim punkcie spotykają się ci dwaj gońcy?*



Aby rozwiązać tak ogólne zagadnienie, trzeba użyć formuły ruchu jednostajnego

$$x=a+vt,$$

którąśmy wyłożyli w n° 27. Na mocy tej formuły, biorąc punkt A za początek odległości x i czasu t, ruch pierwszego gońca wyrazi się w całej ogólności przez równanie

$$x=vt.$$

Potem, żeby mieć równanie ruchu drugiego gońca, trzeba uważać że, gdy pierwszy przybywa do A, drugi ma jeszcze do przejechania h godzin drogi do B, to jest trzeba mu przebiedz odległość $v'h$ która go oddziela od B; więc, gdy pierwszy goniec jest w A, drugi znajduje się w odległości $d-v'h$ od A. Co daje $a=d-v'h$. Zatem ruch drugiego gońca przedstawia się równaniem

$$x=d-v'h+v't.$$

Jeśli teraz wyrugujemy t, znajdziemy równanie zagadnienia

$$x = d - v'h + \frac{v'x}{v},$$

albo

$$(v - v')x = v(d - v'h).$$

Zkąd wynika

$$(1) \qquad x = \frac{v(d - v'h)}{v - v'},$$

i następnie

$$(2) \qquad t = \frac{d - v'h}{v - v'}.$$

Takie są dwie formuły ogólne, które dają punkt spotkania, i czas tego zdarzenia, dla dwóch gońców, jadących w jakiekolwiek strony kierunku drogi, i z prędkościami statecznemi jakiemikolwiek.

Dyskussya. Spotkanie dwóch gońców może przypadać w punkcie S na prawo punktu B, albo w punkcie S′ między A i B, albo jeszcze w punkcie S″ na lewo punktu A.

Odległość x tego spotkania od punktu A, wziętego za początek odległości i czasu, zależy oczywiście od wielkości liczb d, h, v, v' i od znaków prędkości v i v'. Trzeba więc odróżnić rozmaite przypadki, w których licznik i mianownik wartości x mogą mieć te same znaki albo znaki przeciwne, być oba różne od zera, albo tylko jeden, i nakoniec być oba zerami.

Iszy Przypadek. *Prędkości* v *i* v′ *dodatne. Gońcy jadą obydwa w stronę dodatną* X′X.

1° Przypuszczamy $v > v'$ i $d > v'h$. Wtedy wartość x jest *dodatna.* Owoż, gdy pierwszy goniec, mający prędkość v, przyjeżdża do A, drugi goniec nie dojechał jeszcze do B, i znajduje się między A i B ponieważ ma do przebieżenia odległość $v'h<d$; ale pierwszy jedzie prędzej niż drugi, więc go spotka na prawo punktu A. Co wyrażać powinna wartość dodatna odległości x, to jest $x=$AS, albo $x=$AS'.

Licząc czas od chwili w której pierwszy goniec przejeżdża przez A, widzimy że powyższe spotkanie następuje w czasie przyszłym. Ta okoliczność potwierdza formułę (2), która daje wartość dodatną czasowi t. Aby się dowiedzieć pod jakim warunkiem dwaj gońcy spotykają się między A i B, dość wyrazić że czas, w którym pierwszy z nich przebiega odległość AB, powinien być mniejszy od h godzin, to jest

$$\frac{d-v'h}{v-v'}<h;$$

zkąd

$$v>\frac{d}{h}.$$

2° $v<v'$ i $d<v'h$; co daje wartość x dodatną. Wtedy, gdy pierwszy goniec przejeżdża przez A, drugi znajduje się na lewo tego punktu, ponieważ $v'h>d$; ale drugi goniec jedzie prędzej niż pierwszy; więc jadąc za nim doścignie go na prawo punktu A. Co właśnie przedstawia wartość dodatna x.

Spotkanie będzie miało miejsce w punkcie S' między A i B jeśli $vh<d$.

3° $v>v'$ ale $d<v'h$, Wartość x jest *odjemna.* Aby wiedzieć co ona wyraża, uważajmy że w tem założeniu gdy pierwszy goniec przejeżdża przez A, drugi jest na lewo tego punktu, ponieważ $v'h>d$; a że jedzie powolniej od pierwszego który go już wyprzedza, spotkanie musiało mieć miejsce w S'' na lewo punktu A. To właśnie położenie punktu spotkania S'', na stronie przeciwnej tej którą wzięto za dodatną, wartość odjemna x przedstawiać powinna.

Spotkanie zdarza się w przeszłości; co zgodne z formułą (2) które daje dla t wartość odjemną.

4° $v < v'$ ale $d > v'h$. Wartość x jest odjemna. Owoż, gdy pierwszy goniec przejeżdża przez A, drugi jest na prawo tego punktu ponieważ $v'h < d$; więc drugi goniec, jadący prędzej od pierwszego i będąc już na przedzie, musiał go spotkać na lewo punktu A. Co właśnie przedstawia wartość odjemna x, i co także potwierdza wartość odjemna czasu t.

IIgi PRZYPADEK. *Prędkości* v i v' *odjemne. Gońcy jadą obydwa w stronę odjemną* XX'.

1° Założenie $v' < 0$ daje $d - v'h > 0$; zatem, jeśli $v < v'$, wartość x będzie dodatna i prędkość v liczebnie większa od v'. Owoż, gdy pierwszy goniec przejeżdża przez A, drugi znajduje się na prawo punktu B, ponieważ mu trzeba h godzin na przybycie do niego; ale pierwszy goniec jedzie prędzej od drugiego, i już go wyprzedził; więc musiał się z nim spotkać w S na prawo punktu B. Co usprawiedliwia wartość dodatną x.

2° $v' < v < o$; zatem $d - v'h > 0$ i wartość x jest odjemna. W tem przypuszczeniu drugi goniec jedzie prędzej od pierwszego. Owoż, gdy pierwszy przejeżdża przez A, drugi jest na prawo punktu B; więc spotkanie dwóch gońców przypada w S'' na lewo punktu A. Co się zgadza z wartością odjemną x i z wartością dodatną t.

IIIci PRZYPADEK. *Prędkości* v i v' *mają znaki przeciwne. Gońcy jadą w strony przeciwne.*

1° $v > 0$ ale $v' < 0$, co daje $d - v'h > 0$ i $v - v' > 0$; zatem wartość x jest dodatna. Owoż, gdy pierwszy goniec przejeżdża przez A, drugi jest na prawo punktu B; a że jadą na przeciw jeden drugiego, więc się spotykają na prawo punktu A, między A i B albo poza B, według jak jest $v'h > d$ albo $v'h < d$.

2° $v < 0$ ale $v' > 0$, co daje $v - v' < 0$; zatem wartość x będzie dodatna albo odjemna, według jak $d - v'h > 0$ albo $d - v'h < 0$. Rozumując jako wyżej, łatwo widzieć że w pierwszym razie gońcy się spotkają w S' między A i B, w drugim razie w S''.

Przypadki szczególne. Dotąd przypuszczaliśmy że $v - v'$ i $d - v'h$ są różne od zera; rozbierzemy teraz przypadki w których te różnice są zerami.

1° Jeśli $d - v'h = 0$, ale $v - v'$ różne od zera, formuły (1) i (2) dają $x = 0$, i $t = 0$. To pokazuje że spotkanie dwóch gońców przypada w punkcie A od którego się liczy odległość i czas. Wyniki łatwe do przewidzenia *a priori*; bo, w chwili gdy pierwszy goniec przejeżdża przez A, drugi znajduje się właśnie w tym punkcie, ponieważ $d = v'h$; ale, mając prędkości nierówne, ci gońcy zaraz się rozjeżdżają, i nie mogą się już spotykać w żadnym innym punkcie.

2° Jeśli $v = v'$ ale $d - v'h \gtrless 0$, formuły (1) i (2) dają

$x = \frac{v(d - v'h)}{0}$ i $t = \frac{d - v'h}{0}$; z tych symbolów niemożebności wartości skończonych wnieść trzeba że, *w obecnym szczególnym przypadku, dwaj gońcy nie spotykają się nigdy*. I w samej rzeczy, w chwili gdy pierwszy goniec przejeżdża przez A, drugi się tam nie znajduje ponieważ d nie jest równe $v'h$; a że oba jadą z równą prędkością, więc zostają zawsze w tej samej od siebie odległości.

3° Jeśli jest zarazem $v = v'$ i $d = v'h$, co oznacza że prędkość v' jest dodatna, obydwa gońcy jadą w stronę dodatną X'X;

wtedy formuły (1) i (2) dają wartości x i t w kształcie $x=\frac{0}{0}$ i $t=\frac{0}{0}$; który jest symbolem niewyznaczenia. Aby wiedzieć czy istotnie jest niewyznaczenie, dość uważać dwa powyższe przypuszczenia. Pierwsze $d=v'h$ dowodzi że dwaj gońcy są razem w punkcie A, drugie $v=v'$ pokazuje że jadą z tą samą prędkością; więc są zawsze razem.

Można by także dać znak ilości h, uważając ją za *dodatną* albo *odjemną*, według jak pierwszy goniec przejeżdża przez A, h godzin *przed przybyciem* albo *po przybyciu* drugiego gońca do B; ale ten szczegół nie przydaje nic ważnego do ogólności zadania. Co zasługuje na uwagę, i co dyskussya przypadków szczególnych wyświeca, to jest to że, wtedy nawet kiedy formuły istnieć przestają biorąc kształty symboliczne, można jeszcze wytłumaczyć symbole sposobem który daje prawdziwe rozwiązanie zagadnienia.

220. Zagadnienie XXXVI. *Z dwóch gatunków wina, które kosztują* a *i* b *litr, utworzyć* d *litrów mieszaniny po* c *litr.*

Nazywając x i y ilości dwóch win które trzeba zmieszać, mamy równania zagadnienia

$$x+y=d,$$

$$ax+by=cd;$$

zkąd

$$x=\frac{d(c-b)}{a-b},\quad y=\frac{d(a-c)}{a-b}.$$

Dyskussya. Z natury zagadnienia wszystkie cztery ilości a, b, c, d, są dodatne; i można przypuścić a większe od b, oznaczając przez a cenę wina droższego. Z tem zastrzeżeniem, jest tylko *pięć* różnych przypadków do roztrząsania.

1[szy] PRZYPADEK. *Cena* c *mieszaniny zawarta między cenami* a *i* b *dwóch danych win*, to jest $a > c > b$.

W tym przypadku, formuły wyznaczają dla x i y wartości dodatne; co dowodzi że zagadnienie ma rozwiązanie według swojego wysłowienia. Wynik wiadomy *a priori;* bo oczywiście, z dwóch win po cenach nierównych, można zawsze, biorąc przyzwoite części, utworzyć mieszaninę po cenie pośredniej.

II[gi] PRZYPADEK. *Cena* c *mieszaniny niezawarta między cenami* a *i* b *dwóch win.*

1° Jeśli $c > a > b$, formuły dają dla x wartość dodatną, ale dla y wartość odjemną; wtedy zagadnienie nie ma rozwiązania według swojego wysłowienia. Bo z dwóch win nie można utworzyć mieszaniny droższej od każdego z nich.

Aby wiedzieć co może znaczyć rozwiązanie odjemne dla y, zamieniamy y na $-y$ w równaniach zagadnienia, i otrzymujemy

$$x - y = d,$$

$$ax - by = cd,$$

albo, co wychodzi na jedno,

$$y + d = x,$$

$$by + cd = ax.$$

Pod tym kształtem widzimy łatwo że dwa ostatnie równania przedstawiają następujące zagadnienie:

Jaką ilość y *wina po cenie* b, *trzeba przydać do ilości* d *mieszaniny po cenie* c, *aby utworzyć ilość* x *nowej mieszaniny po cenie* a?

To drugie zagadnienie jest możebne, ponieważ cena a jest pośrednia między b *i* c.

2° Jeśli $a > b > c$, formuły dają dla x wartość odjemną, dla y wartość dodatną.

Ten paragraf nie różni się w gruncie od poprzedzającego, i tłumaczy się podobnie.

III^{ci} PRZYPADEK. *Cena* c *mieszaniny równa jednej z dwóch cen* a *albo* b.

1° Jeśli $a = c > b$, formuły dają

$$x = d, \quad y = 0.$$

Ten wynik oznajmia że szukana mieszanina powinna zawierać samo jedno wino ceny a. Co przez się widoczne, albowiem pierwsze z dwóch win danych ma już cenę żądanej mieszaniny.

2° Jeśli $a > b = c$, formuły dają

$$x = 0, \quad y = d.$$

Żądana mieszanina powinna zawierać samo jedno wino ceny b.

IV^{ty} PRZYPADEK. *Ceny* a i b *dwóch win równe, ale cena* c *mieszaniny od nich różna*, to jest $a = b \gtrless c$.

Formuły dają

$$x = \frac{m}{0}, \quad y = \frac{n}{0}.$$

Te dwa symbole oznaczają niemożebność zagadnienia. Oczywiście nie można, łącząc dwa wina równej ceny, otrzymać mieszaninę droższą albo tańszą niż te wina. Nie można nawet, przydając jedno z dwóch win do żądanej mieszaniny, otrzymać nową mieszaniną po cenie tych win.

V^{ty} PRZYPADEK. *Równe ceny dwóch win i mieszaniny*, to jest $a = b = c$.

Formuły dają

$$x=\frac{0}{0},\quad y=\frac{0}{0}.$$

Te dwa symbole oznaczają istotne niewyznaczenie; albowiem, dwa dane wina, mające cenę szukanej mieszaniny, w jakiejkolwiek proporcyi będą zmieszane, zachowają zawsze tę cenę. Więc zagadnienie jest niewyznaczone.

WYSŁOWIENIA ZAGADNIEŃ.

I. *W jakim układzie liczenia liczba* 36 *wyraża się przez* 44?

Odpowiedź : w ósemnym.

II. *Pewna osoba trzyma liczbony w obydwóch rękach; jeśli z prawej ręki przełoży jeden do lewej, to będzie tyle w jednej ręce ile w drugiej; a jeśli, przeciwnie, weźmie jeden liczbon z lewej ręki i włoży do prawej, to w ostatniej będzie dwa razy tyle. Ileż jest liczbonów w każdej ręce?*

Odpowiedź : w prawej 7, w lewej 5.

III. *Pewny kupiec ma dwa bilety, każdy* 3452 *fr. płatne za rok. Idzie do jednego bankiera który mu wytrąca za jeden bilet eskont rozumowy po* 6 *od sta. Idzie potem, z drugim biletem, do innego bankiera, który mu eskontuje handlowo, i daje tę samą summę co pierwszy. Jaka jest stopa eskontu handlowego?*

Odpowiedź : 5f,66 na mniej niż pół centyma.

IV. *Jaką liczbą trzeba powiększyć cztery liczby* a, b, c, d *żeby tworzyły proporcyę?*

Odpowiedź : $x=\frac{bc-ad}{a+d-b-c}$.

Jeśli cztery liczby już tworzą proporcyę, wtedy $x=0$; a jeśli $a+d=b+c$, zagadnienie niemożebne.

V. *Pan biorąc służącego obiecuje mu* 400 fr. *na rok i kapotę. Odprawia go po dziesięciu miesiącach, daje* 323 *fr. i zostawia mu kapotę. Ile była warta kapota?*

Odpowiedź : 62 fr.

VI. *Goniec, przebiegający* 21 *mil w* 2^{ch} *godzinach, wyjechał z Warszawy od* 4^{ch} *godzin, kiedy posłano za nim drugiego gońca który ujeżdża* 18 *mil na godzinę. W jakiej odległości ostatni dogoni pierwszego?*

Odpowiedź : 100 mil $\frac{4}{5}$ od Warszawy.

VII. *Woda marznąc powiększa się* JEDNĄ DZIESIĄTĄ *swojej objętości. Pytanie jakim ułamkiem swojej objętości massa lodu skurcza się, przechodząc do stanu ciekłego?*

Odpowiedź : $\frac{1}{12}$.

VIII. *Dwa miasta* A *i* B *są odległe od siebie na* 124 *kilometrów; węgiel ziemny w mieście* A *kosztuje* $2^f,20$ 100 kg. *a w mieście* B $2^f,50$; *koszta przewozu są* $0^f,05$ *za każde* 1000 *kilogrammów. Pytanie w jakim punkcie między dwoma miastami, węgiel przywieziony z jednego albo z drugiego miasta kosztuje to samo?*

Odpowiedź : W punkcie odległym od miasta A na 92 kilometry. W tym punkcie węgiel jest najdroższy.

IX. $\frac{2}{5}$ *upłyniętego dnia wartają* $\frac{1}{2}$ *tego co zostaje. Któraż jest godzina?*

Odpowiedź : $1^g\ 20^m$ po południu.

X. *Woda morska zawiera* $4\frac{1}{2}$ *na* 100 *soli. Ile trzeba wyparować wody z* 540 *kilogrammów wody morskiej, żeby pozostała mieszanina była* NASYCONA, *to jest zawierała* 27 *na* 100 *soli?*

Odpowiedź : 450 kilog.

XI. *Do pewnego stawu woda płynie jednostajnie dwoma strumieniami. Puszczono najpierwej jeden strumień, który napełnia ćwierć stawu, poczem puszczono drugi strumień; wtedy oba strumienie, płynące razem, dopełniają stawu, i potrzebują* 5 *kwadransów więcej niż trzeba było pierwszemu strumieniowi do napełnienia ćwierci stawu. Gdyby oba strumienie były puszczone odrazu, staw byłby się napełnił kwadransem wcześniej. W jakim czasie pierwszy strumień płynąc sam jeden napełniłby ten staw?*

Odpowiedź: w 4ch godzinach.

XII. *Pytano pasterza ile ma owiec? On odpowieda: mam tyle; ale, żebym jeszcze miał tyle, i połowę tyle i czwartą część tyle, i gdybym dodał mojego psa do tej liczby, miałbym wszystkiego* 100 *zwierząt. Ileż mam?*

Odpowiedź: 36 owiec.

XIII. *Ojciec zapytany o wiek syna, odpowieda: ja jestem* 3 *razy starszy od mojego syna, a temu lat* 10 *byłem* 5 *razy starszy. Ież ma lat syn?*

Odpowiedź: 20 lat.

XIV. *Dwaj przyjaciele wydali razem* 60 *fr. Brakuje pierwszemu, do zapłacenia sam tego wydatku,* $\frac{3}{4}$ *pieniędzy drugiego, a brakuje drugiemu* $\frac{2}{3}$ *pieniędzy drugiego. Ileż ma każdy z nich?*

Odpowiedź: pierwszy ma 30 fr. drugi 40 fr.

XV. *Muł i osieł niosą pewne ciężary. Osieł mówi do muła, gdybym wziął jeden centnar twojego ciężaru dźwigałbym dwa razy więcej niż ty; a ja, odpowieda muł, gdybym wziął jeden centnar twojego ciężaru, tobym dźwigał trzy razy więcej niż ty. Pytanie ile każdy niesie centnarów?*

Odpowiedź: Muł niesie 2 centnary $\frac{3}{5}$ a osieł 2 centnary $\frac{1}{5}$.

XVI. *Dwie ciecze mają gęstości* 1,3 i 0,7. *Ile trzeba wziąć litrów każdej, żeby otrzymać* 3 *litry mające gęstość* 0,9?

Odpowiedź: 1 i 2.

XVII. *Mając dane ciężary gatunkowe* a i b *dwóch metalów, ile trzeba wziąć kilogrammów każdego z nich, żeby otrzymać* p *kilogrammów alliażu mającego ciężar gatunkowy* c?

Odpowiedź: $x=\frac{ap(c-b)}{c(a-b)}$, $y=\frac{bp(a-c)}{c(a-b)}$.

XVIII. *Dwa naczynia, mające objętości* v i v', *zawierają mieszaninę wody i wina, jedno w stosunku* m : n, *drugie w stosunku* m' : n'. *Jaką objętość* x *trzeba dać dwóm innym naczyniom równym, żeby, napełniając je razem jedno w jednem z dwóch naczyń danych, drugie w drugiem, i wlewając na przemian do każdego to co w nich było wzięte, proporcya wody do wina stała się ta sama w obydwóch naczyniach?*

Odpowiedź: objętość x powinna zadość czynić równaniu $\frac{1}{x}=\frac{1}{v}+\frac{1}{v'}$.

Wynik niezależny od m, n, m', n'; dowieśdź tego *a priori*.

XIX. *Są dane dwie sztaby; pierwsza zawiera* a *grammów złota i* b *grammów srebra; druga zawiera* a' *grammów złota i* b' *grammów srebra. Ile trzeba wziąć grammów z pierwszej i z drugiej sztaby do utworzenia trzeciej, zawierającej* α *grammów złota i* β *grammów srebra?*

Odpowiedź: $x=\frac{(a+b)(\alpha b'-\beta a')}{ab'-ba'}$, $y=\frac{(a'+b')(a\beta-b\alpha)}{ab'-ba'}$.

Dyskussya: $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{\alpha}{\beta}$. Zagadnienie niewyznaczone.

XX. *Są dwie sztaby mające względem jednego metalu tytuły* a i a'; *ile trzeba wziąć grammów z pierwszej i z drugiej* *do utworzenia alliażu któryby ważył* n *grammów i miał tytuł* a″?

Odpowiedź : $x=\frac{n(a''-a')}{a-a'}$, $y=\frac{n(a-a'')}{a-a'}$.

XXI. *Bankier ma zapłacić* 540 *fr. sztukami pięciofrankowemi i dwudziestofrankowemi, tak żeby było* 60 *sztuk. Ile powinien wziąć każdego gatunku tych sztuk?*

Odpowiedź : 44 sztuki pięciofrankowe, i 16 sztuk dwudziestofrankowych.

XXII. *Pociąg drogi żelaznej, mającej prędkość v, wychodzi po drugim pociągu którego prędkość jest* v′; *wyrachowano opóźnienie tak żeby oba pociągi przybyły razem do miejsca przeznaczenia. Ale pierwszy pociąg musiał zwolnić swoją prędkość o połowę, gdy już przebył* $\frac{2}{3}$ *drogi. Tym sposobem dwa pociągi spotykają się na* a *mil przed końcem podróży. Jaka jest długość* x *całej drogi?*

Odpowiedź : $x=3a\left(2-\frac{v}{v'}\right)$.

XXIII. *Wskazówki godzin, minut i sekund są wszystkie trzy razem na cyfrze* XII *cyferblatu. Po jakim czasie wskazówka sekund będzie dwójsieczną kąta utworzonego przez dwie inne?*

Odpowiedź : gdy upłynie $60^s+\frac{780^s}{1427}$.

XXIV. *Rozdzielić* 616 *fr. między cztery osoby tak, żeby* 2ga *miała* $\frac{2}{3}$ *tego co dostanie pierwsza,* 3cia $\frac{4}{5}$ *działu* 2giej, 4ta $\frac{3}{4}$ *działu trzech pierwszych. Ile weźmie każda*

Opowiedź : 1sza 160 fr. 2ga $\frac{320^f}{3}$, 3cia $\frac{256^f}{3}$, 4ta 264 fr.

XXV. *Znaleźć trzy liczby tworzące proporcyę ciągłą, i takie żeby ich summa była* 19 *a summa ich kwadratów* 7 *razy od niej większa.*

Odpowiedź : 4, 6, 9.

XXVI. *Znaleźć liczbę mającą cztery cyfry, w której cyfra jedności jest równa przewyżce cyfry dziesiątków nad* 2, *cyfra dziesiątków jest równa różnicy cyfer set i tysięcy, cyfra set jest równa summie trzech innych cyfer; a gdyby od tej liczby odciągnięto* 4356, *otrzymanoby liczbę utworzoną z tych samych cyfer ale w porządku odwrotnym.*

Odpowiedź : 4620.

XXVII. *Znaleźć liczbę mającą trzy cyfry, których summa czyni* 17 ; *ta liczba powiększa się o* 270 *gdy przemieniono porządek dwóch pierwszych cyfer na lewo, a zmniejsza się o* 396 *gdy przemieniono porządek cyfer skrajnych.*

Odpowiedź : 692.

XXVIII. *Znaleźć pięć liczb czyniących summę* 37, *i takich żeby* 2ga *przewyższała* 4tą *szóstą częścią* 3ej ; *żeby* 3cia *była połową* 4tej ; *a czwarta różnicą* 2ej *i* 1ej ; *nakoniec żeby* 5ta *była piątą częścią* 2ej *i* 4ej *połączonych.*

Odpowiedź : pierwsza liczba jest 1, druga 13, trzecia 6, czwarta 12, piąta 5.

XXIX. *Pewna osoba ma wypłacić dwie summy, jedną* 1000 *fr. za* 50 *dni, drugą* 3000 *fr. za* 110 *dni. Chciałaby uiścić się jedną wypłatą całej summy* 4000 *fr. Za ile dni powinna wykonać wypłatę?*

Odpowiedź : za 96 dni.

XXX. *Pewien człowiek podjął się przenieść naczynia porcelanowe różnej wielkości, z warunkiem że zapłaci tyle za każde naczynie stłuczone ileby dostał gdyby je oddał w dobrym stanie.*

Dano mu najpierwej 2 *małe naczynia*, 4 *średnie i* 9 *wielkich; potłukł średnie, oddaje inne w całości, i odbiera* 28 *fr.*

Dano mu potem 7 *małych naczyń*, 3 *średnie i* 5 *wielkich; tą razą oddaje małe i średnie w dobrym stanie, ale tłucze wielkie, i dostaje tylko* 3 *fr.*

Nakoniec powierzono mu 9 *małych naczyń*, 10 *średnich i* 11 *wielkich: tłucze wszystkie ostatnie, i dostaje tylko* 4*fr.*

Jaka jest cena przeniesienia naczynia każdej wielkości?

Odpowiedź : 2 fr. za małe, 3 fr. za średnie, i 4 fr. za wielkie.

XXXI. *Trzy źródła wpływają do jednej sadzawki. Pierwsze z drugiem płynąc razem napełniłyby ją w* 12u *godzinach; pierwsze z trzeciem w* 15u *godzinach; drugie z trzeciem w* 20u *godzinach. W ilu godzinach te trzy źródła płynące razem napełniają sadzawkę?*

Odpowiedź : w 10u godzinach.

XXXII. *Do wykonania pewnej roboty*, A *potrzebuje* m *razy tyle czasu ile* B *i* C *połączeni*, B *potrzebuje* n *razy tyle czasu ile* A *i* C *zjednoczeni*, C *potrzebuje* x *razy tyle czasu ile* A *i* B *zjednoczeni. Wyznaczyć* x.

Odpowiedź : liczby m, n, x są związane równaniem

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{m+1}+\frac{1}{n+1}=1.$$

XXXIII. *Mając dane trzy ośródkowe* α, β, γ *trójkąta* (*linie które łączą wierzchołki ze środkami boków*), *wyrachować odpowiedające im boki* a, b, c.

Odpowiedź : $a=\frac{1}{3}\sqrt{8\beta^2+8\gamma^2-4\alpha^2}$.

XXXIV. *W trójkąt, mający podstawę* a *i wysokość* h, *wpisać prostokąt którego obwód* 2p *jest dany.*

Odpowiedź: Nazywając x i y boki prostokąta, będzie

$$x=\frac{a(p-h)}{a-h},\quad y=\frac{h(a-p)}{a-h}.\ \text{Możebność } h<p<a.$$

XXXV. *W trójkąt mający boki a, b, c, wpisać kwadrat.*

Odpowiedź: nazywając h wysokość odpowiedającą bokowi a, x, bok kwadratu który się opiera na tym boku, będzie

$$x=\frac{ah}{a+h}.$$

Dowieśdź że największy kwadrat wpisany w trójkąt opiera się na jego najmniejszym boku.

XXXVI. *Mając dany równoległościan prostokątny, z krawędziami* a, b, c, *znaleźć bok* x *sześcianu takiego, żeby powierzchnie tych dwóch figur były w tym samym stosunku co ich objętości.*

Odpowiedź: $$x=\frac{3abc}{ab+ac+bc}.$$

ROZDZIAŁ V (*)

O WYZNACZNIKACH

ROZWIĄZYWANIE OGÓGNE RÓWNAŃ LINIJNYCH.

221. W elementarnej części algebry dajemy tylko wiadomość o wyznacznikach, wykładając te ich własności których potrzebujemy do ogólnej dyskussyi n równań pierwszego stopnia mających n niewiadomych. W algebrze wyższej uzupełnimy teoryę wyznaczników, i wskażemy ich główne zastosowania.

Początek wyznaczników jest w rozwiązywaniu literalnych równań pierwszego stopnia. Powiedzieliśmy już że spólny mianownik wartości niewiadomych x, y, z... nazwano *wyznacznikiem*, dlatego że z niego wywodzą się liczniki tych wartości. Wyznaczniki jako mianowniki niewiadomych nie przedstawiają nic znamienitego, prócz prawidła ich tworzenia które podał praktycznie *Kramer* (**). Ale własności wyznaczników są niezależne od równań, i stanowią dziś ważną gałęź matematyki.

Żeby mieć ogólne określenie wyznaczników, i dać nawet same tylko zarysy ich teoryi, trzeba najpierwej powiedzieć kilka słów o notacyi i o nazwach powszechnie używanych, które ułatwiają wykład.

Niech będzie ciąg ilości

$$a, \quad b, \quad c, \quad d, \ldots$$

albo

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad a_4, \ldots$$

(*) Przy pierwszem czytaniu można opuścić cały rozdział V.

(**) Cramer, Matematyk genewski, 1750 r.

wyrażonych różnemi literami w porządku alfabetycznym, albo oznaczonych jedną tylko literą ze *wskazami* w porządku liczb naturalnych.

Jeśli, mając dany wieloczyn tych ilości ustawionych w porządku jakimkolwiek, porównywa się czynniki, po dwa, wszystkiemi sposobami możebnemi, wtedy każdy *dwojan* liter, nie idących w porządku alfabetycznym, albo których wskazy nie idą w porządku liczb naturalnych, tworzy to co nazwano *przestawieniem*.

I tak, wieloczyn $dcab$,

ma *pięć* przestawień $dc,\ da,\ db,\ ca,\ cb$;

wieloczyn $a_3a_2a_1a_4$,

zawiera *trzy* przestawienia $a_3a_2,\ a_3a_1,\ a_2a_1$.

Wieloczyny mające liczbę parzystą przestawień tworzą klassę parzystą albo *dodatną;* wieloczyny zawierające liczbę nieparzystą przestawień stanowią klassę nieparzystą albo *odjemną*. Ale, żeby te określenia były uzasadnione, należy dowieśdź następującego głównego zadania.

222. Zasada. *Wieloczyn czynników literalnych zmienia swoją klassę, gdy się w nim przemienia nawzajem dwie litery;* albo, co wychodzi na jedno, *dwa szyki liter, które się mogą wywieśdź jeden z drugiego wzajemną przemianą dwóch liter, należą do dwóch klass różnych.*

I tak, niech będą dwa układy

$$\mathrm{A}g\mathrm{B}k\mathrm{C} \quad \text{i} \quad \mathrm{A}k\mathrm{B}g\mathrm{C},$$

w których A, B, C oznaczają szyki nie zawierające liter g i k.

Ponieważ liczba przestawień, wynikających z porównania liter g i k z szykami A i C, jest ta sama w obydwóch układach, dość tylko uważać układy

$$gBk \quad \text{i} \quad kBg.$$

Oznaczając przez m i μ liczbę liter i przestawień w szyku B, przez α liczbę liter rzędu niższego od g i przez β liczbę liter rzędu wyższego od k, widzimy łatwo że liczba przestawień w układzie gBk jest

$$\alpha + \mu + \beta;$$

liczba przestawień w układzie kBg, licząc przestawienie kg, wyraża się przez

$$(m-\beta)+\mu+(m-\alpha)+1.$$

Owoż, summa tych dwóch liczb, równa

$$2(m+\mu)+1$$

jest liczbą nieparzystą; więc dwa układy gBk, kBg, i temsamem dwa układy zadane $AgBkC$, $AkBgC$ są różnej parzystości; to jest, jeśli jeden należy do klassy parzystej, drugi będzie należał do klassy nieparzystej. Zatem, wprowadzając znaki, mamy równanie

$$AgBkC = -AkBgC.$$

To wszystko stosuje się do przemiany wskazów albo kresek, i daje równania

$$a_2a_1a_3a_1 = -a_2a_1a_3a_4,$$

$$a''b'c'''d = -a''bc'''d'.$$

Ztąd wynika że szyk liter nie zmienia swojej klassy, gdy się w nim przemienia litery zachowując ich wskazy albo kreski.

I tak,

$$b_1d_2a_3c_4 = a_3b_1c_4d_2.$$

223. Mając dany szyk n liter, jeśli umieszczono pierwszą literę w ostatnim rzędzie, zachowując położenia wszystkich innych, mówi się że wykonano *przemianę kołową*.

Ta przemiana może się oczywiście otrzymać przez $n-1$ wzajemnych przestawień dwóch liter po sobie idących. Więc szyk n liter zmienia klassę albo jej nie zmienia w skutek przemiany kołowej, według jak $n-1$ będzie nieparzyste albo parzyste; albo co to samo, znak klassy będzie pomnożony przez $(-1)^{n-1}$.

224. Niech będą n^2 ilości kształtu $a_{i.k}$ ustawione w kwadrat

$$\begin{vmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} & a_{1.2} \ldots a_{1.k} \ldots a_{1.n} \\ a_{2.1} & a_{2.2} & a_{2.3} \ldots a_{2.k} \ldots a_{2.n} \\ a_{3.1} & a_{3.2} & a_{3.3} \ldots a_{3.k} \ldots a_{3.n} \\ \multicolumn{3}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ \multicolumn{3}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ a_{i.1} & a_{i.2} & a_{i.3} \ldots a_{i.k} \ldots a_{i.n} \\ \multicolumn{3}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ a_{n.1} & a_{n.2} & a_{n.3} \ldots a_{n.k} \ldots a_{n.n} \end{vmatrix}$$

Ilości położone na linii *poziomej*, jako $a_{1.1}\ a_{1.2}\ a_{1.3} \ldots a_{1.n}$, stanowią *linię*, a ilości ustawione w linii pionowej, jako $a_{1.1}\ a_{2.1}\ a_{3.1} \ldots a_{n.1}$, tworzą *kolumnę*. Pierwszy wskaz ilości $a_{i.k}$ oznacza rzęd linii, drugi wskaz rzęd kolumny, do których ta ilość należy. I tak, ilości $a_{i.1}\ a_{i.2}\ a_{i.3} \ldots a_{i.n}$ tworzą *linię* rzędu i, a zaś ilości $a_{1.k}\ a_{2.k}\ a_{3.k} \ldots a_{n.k}$ tworzą *kolumnę* rzędu k.

Każdy bok kwadratu ma n takich ilości, zatem cały kwadrat zawiera ich n^2.

225. Określenie wyznacznika. Nazywa się *wyznacznikiem* układu n^2 ilości uważanych, summa algebryczna wieloczynów tych ilości, wziętych po n wszystkiemi sposobami możebnemi;

ale tak, żeby w żadnym wieloczynie dwa czynniki nie należały nigdy oba do jednej linii, ani oba do jednej kolumny, i żeby wieloczyny były ze znakiem $+$ albo $-$, według jak mają liczbę parzystą albo nieparzystą przestawień.

Będzie dowiedzione później że liczba wyrazów wyznacznika równa się liczbie *przemian* $1.2.3...n$.

Wieloczyn n ilości $a_{1.1}\, a_{2.2}\, a_{3.3} \ldots a_{i.i} \ldots a_{n.n}$, leżących na przekątnej kwadratu która łączy pierwszą ilość z ostatnią, nazywa się *wyrazem głównym* wyznacznika. Ten wyraz, nie mający żadnego przestawienia, jest uważany za *dodatny*.

Przedstawia się zwykle wyznacznik w kształcie kwadratu, jego napisany wyżej; ale używają także notacyi *Jakobiego*

$$\sum \pm a_{1.1}\, a_{2.2}\, a_{3.3} \ldots a_{n.n}.$$

Pod literą summowania Σ położono podwójny znak $\pm$, dlatego że wyrazem głównym z którego się tworzą wszystkie inne może być wyraz dodatny albo odjemny.

Ponieważ każdy wyraz wyznacznika n^2 ilości jest wieloczynem n czynników jako pokazuje wyraz główny, mówi się że ten wyznacznik jest n^{tego} rzędu albo n^{tego} stopnia.

226. Ustawa tworzenia wyznacznika. Można dwojakim sposobem tworzyć wyznacznik z wyrazu głównego: raz przemieniając wszystkiemi sposobami możebnemi drugie wskazy i zostawiając pierwsze stałe, drugi raz przemieniając pierwsze wskazy a zostawiając drugie stałe, i zmieniając znak za każdą przemianą. To wszystko odnosi się także do liter i do kresek które mogą zastępować wskazy.

Stosując tę ustawę do wyznacznika rzędu 2go otrzymujemy

$$\begin{vmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} \\ a_{2.1} & a_{2.2} \end{vmatrix} = \sum a_{1.1}\, a_{2.2} = a_{1.1}\, a_{2.2} - a_{1.2}\, a_{2.1}.$$

Szukajmy teraz wyznacznika rzędu trzeciego, w którym litery oznaczają rzęd kolumn,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Głównym wyrazem wyznacznika jest $a_1 b_2 c_3$. Z tego wyrazu tworzą się, prostą przemianą dwóch wskazów, zaczynając na przykład od ostatniego, dwa następujące wyrazy $-a_1b_3c_2$, $+a_3b_1c_2$; poczem; przemieniając znowu ostatni wskaz z każdym poprzedzającym, otrzymujemy: $-a_3b_2c_1$ $+a_2b_3c_1$; na koniec, przemieniając jeszcze ostatni wskaz z poprzedzającemi, znajdujemy: $-a_2b_1c_3$ $+a_1b_2c_3$. Przychodzimy tym sposobem do pierwszego wyrazu z któregośmy wyszli; co może służyć za próbę dokładności działania.

Tak wyznaczone wyrazy są różne, i wszystkie jakie przemianą wskazów otrzymać można. One są oczywiście te same któreby znaleziono przemieniając nawzajem litery. Mamy więc

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3,$$

$$= a_1(b_2c_3 - c_2b_3) - a_2(b_1c_3 - c_1b_3) + a_3(b_1c_2 - c_1b_2).$$

Tak samo się otrzymuje wyznacznik w którym litery są kreskowane,

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} = A(B'C'' - C'B'') - A'(BC'' - CB'') + A''(BC' - CB').$$

227. Wynika z tego rozwinięcia wyznacznika że: 1° jest tyle wyrazów odjemnych ile dodatnych; 2° litery przedstawiające czynniki każdego wyrazu są różne między sobą, i różne są ich wskazy albo kreski; 3° każdy wyraz zawiera jeden czynnik i tylko jeden, należący do 1ej kolumny; jeden tylko czynnik należący do 2ej kolumny i t. d.; co zgodne z określeniem wyznacznika.

Więc, *jeśli pomnożono albo podzielono wszystkie ilości jednej kolumny przez ten sam czynnik, wyznacznik będzie pomnożony albo podzielony przez ten czynnik.*

To wszystko stosuje się także do linij.

Zatem, można dać albo odjąć czynnik wszystkim ilościom jednej kolumny albo jednej linii, byle tylko podzielono wyznacznik przez czynnik wprowadzony, albo pomnożono przez czynnik odjęty.

228. Wyznacznik jest *symetryczny* względem głównej przekątnej, gdy się składa z wyrazów symetrycznych względem tej linii, to jest gdy $a_{i.k}=a_{k\,i}$. Wtedy są uproszczenia.

I tak,

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix} = A(A'A''-B^2)-B''(A''B''-BB')+B'(BB''-A'B')$$

$$=AA'A''+2BB'B''-AB^2-A'B'^2-A''B''^2.$$

Tak samo

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ B & C & A \\ C & A & B \end{vmatrix} = 3ABC-A^3-B^3-C^3.$$

WŁASNOŚCI OGÓLNE WYZNACZNIKÓW.

229. Ustawa tworzenia wyznaczników, pokazuje że wyznacznik układu n^2 ilości uważanych jako pierwszego stopnia, jest wielomianem całkowitym i jednorodnym stopnia n. Z tej ustawy wynika twierdzenie oczywiste :

TWIERDZENIE I. *Wyznacznik się nie zmienia gdy jego linie stają się kolumnami i kolumny liniami.*

230. TWIERDZENIE II. *Wyznacznik zmienia znak nie zmieniając wartości liczebnej, gdy się przemieniają dwie linie między sobą, albo dwie kolumny między sobą.*

Chociaż to twierdzenie jest następstwem zasady przestawień (222), dowiedziemy go jeszcze wydatniej. Niech będzie wyznacznik

$$\begin{vmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} & a_{1.3} & a_{1.4} \\ a_{2.1} & a_{2.2} & a_{2.3} & a_{2.4} \\ a_{3.1} & a_{3.2} & a_{3.3} & a_{3.4} \\ a_{4.1} & a_{4.2} & a_{4.3} & a_{4.4} \end{vmatrix}$$

jego wyrazem głównym jest

$$a_{1.1}\ a_{2.2}\ a_{3.3}\ a_{4.4}.$$

Jeśli przemienimy nawzajem kolumny rzędu 2^{go} i 4^{go}, na przykład, nowym głównym będzie wyraz

$$a_{1.1}\ a_{2.4}\ a_{3.3}\ a_{4.2},$$

który ma znak przeciwny poprzedniemu, ponieważ się z niego wywodzi samem jednem przestawieniem dwóch drugich wskazów. Owoż, z każdego z tych dwóch wyrazów głównych można utworzyć wyznacznik; więc dwa wyznaczniki są równe i znaków przeciwnych. Co dowodzi twierdzenia.

Więc, przemieniając nawzajem dwie jakiekolwiek linie równoległe wyznacznika, mnoży się go przez -1.

Ztąd wynika że można przeprowadzić linię rzędu i na miejsce pierwszej, przechodząc kolejno przez $i-1$ linij, i mnożąc wyznacznik przez $(-1)^{i-1}$. Tak samo, aby postawić kolumnę rzędu k na miejscu pierwszej kolumny, trzeba pomnożyć wyznacznik przez $(-1)^{k-1}$.

Można więc zawsze przenieść na pierwsze miejsce ilość $a_{i,k}$, sprowadzając do pierwszych rzędów linię i kolumnę które się krzyżują na jej literze; byle tylko pomnożono wyznacznik przez $(-1)^{i-1+k-1}$ albo przez $(-1)^{i+k}$; ponieważ $(-1)^{i-1+k-1} = (-1)^{i+k}(-1)^2 = (-1)^{i+k}$.

Przeniesienie jakiejkolwiek ilości z głównej przekątnej na pierwsze miejsce nie zmienia znaku wyznacznika.

Niech będzie wyznacznik

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}.$$

Chcąc przenieść na pierwsze miejsce ilość b'', uważamy że ona się znajduje na 3ej linii i w 2ej kolumnie; mnożymy więc wyznacznik przez $(-1)^5 = -1$, i mamy

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b'' & a'' & c'' \\ b & a & c \\ b' & a' & c' \end{vmatrix}.$$

231. Twierdzenie III. *Wyznacznik mający dwie linie tosame, albo dwie kolumny tosame, jest tosamie zerem.*

Albowiem przemieniając nawzajem dwie linie tosame, albo dwie kolumny tosame, nie przeinaczamy figury wyznacznika, zmieniamy tylko jego znak. Zatem, nazywając Δ wartość liczebną dwóch wyznaczników, będzie

$$\Delta = -\Delta \quad \text{albo} \quad 2\Delta = 0, \quad \text{więc} \quad \Delta = 0.$$

Wniosek. *Wyznacznik, w którym wyrazy jakiejkolwiek linii są z odpowiedającemi wyrazami linii równoległej w stosunku statecznym, jest tosamie zerem.*

Bo, na mocy n^ru^ 227, będzie

$$\begin{vmatrix} a & \alpha a & c \\ a' & \alpha a' & c' \\ a'' & \alpha a'' & c'' \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a & a & c \\ a' & a' & c' \\ a'' & a'' & c'' \end{vmatrix} = 0.$$

232. Można porządkować wyznacznik według ilości składających jedną linię, albo jedną kolumnę. Jakoż, w każdym wyrazie wyznacznika jest jedna ilość, i tylko jedna, należąca do pierwszej linii; jest więc pewna liczba wyrazów w których figuruje ilość $a_{1.1}$. Bierzemy za czynnik tę ilość, nazywając $A_{1.1}$ iloraz który będzie jej spółczynnikiem. Tak samo, jest pewna liczba wyrazów w których figuruje ilość $a_{1.2}$ pierwszej linii, i te wyrazy są różne od poprzedzających; bierzemy ilość $a_{1.2}$ za czynnik, nazywając $A_{1.2}$ jej spółczynnik. Podobnie się postępuje z wszystkiemi innemi ilościami pierwszej linii.

Mamy więc

$$\Delta = A_{1.1}a_{1.1} + A_{1.2}a_{1.2} + A_{1.3}a_{1.3} + \ldots + A_{1.n}a_{1.n},$$

wyznacznik uporządkowany względem ilości składających pierwszą linię. Podobnym sposobem można go uporządkować względem ilości składających linię albo kolumnę rzędu jakiegokolwiek.

233. Wyznaczniki mniejsze. W uporządkowanym wyznaczniku rzędu n, spółczynniki ilości porządkujących są wyznacznikami rzędu $n-1$. Jakoż, uważajmy naprzykład spółczynnik $A_{i.k}$ ilości $a_{i.k}$, i wyobraźmy sobie że ta ilość stoi na pierwszem miejscu; co się otrzymuje mnożąc wyznacznik przez $(-1)^{i+k}$. Owoż, gdyby wszystkie litery składające linię i kolumnę, które się krzyżują na literze $a_{i.k}$, były zerami, prócz tej litery, wyznacznik przywiódłby się do jedynego wyrazu $A_{i.k}a_{i.k}$; a wiemy że żadna z tych liter nie wchodzi do $A_{i.k}$. Więc spółczynnik $A_{i.k}$ jest wyznacznikiem rzędu $n-1$, otrzymanym z wyznacznika rzędu n po zniesieniu linii i kolumny które się krzyżują na literze $a_{i.k}$; to jest, do jego utworzenia nie trzeba *nic brać z linii i nic z kolumny* do których należy ilość $a_{i.k}$. Ten *wyznacznik mniejszy* jest dodatny albo odjemny, według jak summa $i+k$, rzędów linii i kolumny, jest parzysta albo nieparzysta.

Na mocy tego prawidła znaków dla wyznaczników mniejszych, porządkując następujący wyznacznik względem ilości składających pierwszą kolumnę, mamy

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = a(b'c''-c'b'')+a'(cb''-bc'')+a''(bc'-cb').$$

co się zgadza z rozwojem danym w n^rze^ 226.

234. Twierdzenie IV. *Jeśli ilości składające jakąkolwiek linię są wszystkie zerami prócz jednej, wtedy wyznacznik jest wieloczynem tej ilości przez wyznacznik rzędu niższego jednością.*

Albowiem, porządkując wyznacznik według ilości składających pierwszą linię, będzie

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} b' & c' & d' \\ b'' & c'' & d'' \\ b''' & c''' & d''' \end{vmatrix}.$$

Mamy podobnie, porządkując według ilości 2giej kolumny,

$$\begin{vmatrix} a & 0 & c & d \\ a' & 0 & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & 0 & c''' & d''' \end{vmatrix} = -b'' \begin{vmatrix} a & c & d \\ a' & c' & d' \\ a''' & c''' & d''' \end{vmatrix}.$$

Więc, *jeśli wszystkie ilości leżące z jednej strony przekątnej są zerami, wyznacznik przywodzi się do swojego wyrazu głównego.*

Jakoż,

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ a' & b' & 0 & 0 \\ a'' & b'' & c'' & 0 \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} b' & 0 & 0 \\ b'' & c'' & 0 \\ b''' & c''' & d''' \end{vmatrix} = ab' \begin{vmatrix} c'' & 0 \\ c''' & d''' \end{vmatrix} = ab'c''d'''.$$

Nawzajem, *wynika z twierdzenia IV że wszelki wyznacznik może się przekształcić na wyznacznik stopnia wyższego, zawierający ilości dowolne.*

I tak,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ a' & b' & 0 \\ a'' & b'' & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ a' & b' & 0 & 0 \\ a'' & b'' & 1 & 0 \\ a''' & b''' & c''' & 1 \end{vmatrix} = \ldots\ldots$$

wprowadzone ilości a'', b'', a''', b''', c''', są zupełnie dowolne.

235. Twierdzenie V. *Jeśli w wyznaczniku, uporządkowanym według ilości składających jedną linię, zastąpiono ilości porządkujące przez odpowiedające ilości linii równoległej, ten wyznacznik staje się zerem.*

I tak,

$$A_{i.1}a_{k.1}+A_{i.2}a_{k.2}+A_{i.3}a_{k.3}+\ldots A_{i.n}a_{k.n}=0.$$

Bo to wyrażenie jest wyznacznikiem, w którym ilości linii rzędu i stały się równe ilościom linii równoleglej rzędu k.

Więc wyznacznik złożony z różnych liter staje się zerem, gdy zamieniono jedną literę na inną, ale zachowując wskaz.

236. Twierdzenie VI. *Jeśli rozłożono ilości jednej jakiejkolwiek linii na summę dwóch ilości, jako* $a_{i.k}=\alpha_{i.k}+\beta_{i.k}$, *wtedy wyznacznik rozkłada się na summę dwóch wyznaczników, które się otrzymuje zastępując ilość* $a_{i.k}$, *w jednym przez* $\alpha_{i.k}$ *w drugim przez* $\beta_{i.k}$.

Jakoż,

$$A_{i.1}a_{i.1}+A_{i.2}a_{i.2}+\ldots A_{i.k}(\alpha_{i.k}+\beta_{i.k})+\ldots+A_{i.n}a_{i.n}$$

$$=\left\{\begin{array}{l} A_{i.1}a_{i.1}+A_{i.2}a_{i.2}+\ldots A_{i.k}\alpha_{i.k}+\ldots+A_{i.n}a_{i.n} \\ +A_{i.1}a_{i.1}+A_{i.2}a_{i.2}+\ldots A_{i.k}\beta_{i.k}+\ldots+A_{i.n}a_{i.n} \end{array}\right.$$

więc

$$\left|\begin{array}{l} a_{1.1}a_{1.2}\ldots\alpha_{1.k}+\beta_{1.k}\ldots a_{1.n} \\ a_{2.1}a_{2.2}\ldots\alpha_{2.k}+\beta_{2.k}\ldots a_{2.n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n.1}a_{n.2}\ldots\alpha_{n.k}+\beta_{n.k}\ldots a_{n.n} \end{array}\right|$$

$$= \begin{vmatrix} a_{1.1} \dots \alpha_{1.k} \dots a_{1.n} \\ a_{2.1} \dots \alpha_{2.1} \dots a_{2.n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n.1} \dots \alpha_{n.k} \dots a_{n.n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1.1} \dots \beta_{1.k} \dots a_{1.n} \\ a_{2.1} \dots \beta_{2.k} \dots a_{n.2} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n.1} \dots \beta_{n.k} \dots a_{n.n} \end{vmatrix}.$$

NAWZAJEM, *gdy dwa wyznaczniki mają wszystkie linie spólne prócz jednej, można je zlać w jeden wyznacznik dodając tylko wyrazami dwie linie niespólne.*

Wynika jeszcze z tego twierdzenia że: gdy wyznacznik ma linie złożone z wielomianów, można, rozwinięciami po sobie idącemi, przekształcić go na inny w którym wszystkie linie będą złożone z jednomianów.

I tak,

$$\begin{vmatrix} a+\alpha, & b+\beta \\ a'+\alpha', & b'+\beta' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b+\beta \\ a' & b'+\beta' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha & b+\beta \\ \alpha' & b'+\beta' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & \beta \\ b' & \beta' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha & b \\ \alpha' & b' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}.$$

237. TWIERDZENIE VII. *Wyznacznik nie zmienia się, gdy ilościom jednej linii przydano albo odjęto odpowiedające ilości linij równoległych, pomnożonych jeśli chcemy.*

Bo to wychodzi na jedno co przydać albo odjąć danemu wyznacznikowi drugi wyznacznik, mający z nim wszystkie linie spólne, prócz jednej która jest proporcyonalna do linii równoległej; więc drugi wyznacznik będąc zerem nie zmienia wartości pierwszego.

Stosując twierdzenie, mamy oczywiście

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 7 & 1 \\ 9 & 1 & 11 & 1 \\ 13 & 1 & 15 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

238. Rachunek wyznacznika. Wyrachowanie wartości wyznacznika jest zwykle mozolne; najłatwiejszy sposób zależy na tem żeby przekształcić dany wyznacznik na inny rzędu niższego, a ten zamienić podobnie na inny rzędu jeszcze niższego, i tak dalej; aż się dojdzie do wyznacznika rzędu 2go który się wprost oblicza. Najczęściej wykonywa się przekształcenia przez dodawania albo odciągania linij równoległych, pomnożonych jeśli trzeba, w celu otrzymania wyznacznika w którym jedna linia ma zera za wszystkie wyrazy, prócz jednego. Tak działając, przywodzi się wartość wyznacznika do wieloczynu jednego wyrazu przez wyznacznik rzędu niższego. Jako pokazuje następujący przykład.

$$\begin{vmatrix} 3 & 13 & 17 & 4 \\ 6 & 28 & 33 & 8 \\ 10 & 40 & 54 & 13 \\ 8 & 37 & 46 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 13 & 17 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -5 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 7 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & -5 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -1 . \begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -1 . \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5,$$

Pomnożono pierwszą linię przez 2 i odciągnięto od drugiej, pomnożono jeszcze pierwszą linię przez 3 i odciągnięto od trzeciej i od czwartej; co dało pierwsze przekształcenie. Poczem, mnożąc czwartą linię przez 3 i dodając do pierwszej, następnie dodając tę czwartą linię do trzeciej, otrzymano drugie przekształcenie. Trzecie i czwarte przekształcenie jest przez się widoczne.

Bierzemy teraz drugi przykład, w którym przekształcenia są wydatne,

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & c & a \\ a+b+c & a & b \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & c & a \\ 1 & a & b \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)(bc-a^2-b^2+ac+ab-c^2).$$

Niech będzie jeszcze wyznacznik symetryczny

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}.$$

Dodając trzy ostatnie linie do pierwszej, będzie

$$\Delta = (a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}.$$

To pokazuje że wyznacznik jest podzielny przez $a+b+c+d$. Dodając dwie pierwsze linie i odciągając dwie ostatnie, widzimy podobnie że wyznacznik jest podzielny przez $a+b-c-d$.

Spostrzegamy tak samo że jest podzielny przez $a+c-b-d$ i przez $a+d-b-c$. Więc wyznacznik wyraża się przez wieloczyn tych czterech czynników, to jest

$$\Delta = k(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a+c-b-d)(a+d-b-c).$$

Aby wyznaczyć spółczynnik k, dość uważać że wieloczyn czterech czynników jest wielomianem jednorodnym stopnia 4^{go}, w którym wyraz największej potęgi względem a jest a^4; ale wyznacznik jest także wielomianem jednorodnym stopnia 4^{go}, bo jego wyrazem głównym jest a^4; więc stosunek wyznacznika Δ do wieloczynu czynników jest jednością, to test $k=1$.

Rozumując podobnie, łatwo się znajduje wartość

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} = -(x+y+z)(y+z-x)(x+z-y)(x+y-z).$$

Więc ten wyznacznik symetryczny, wzięty ze znakiem —, przedstawia szesnaście razy kwadrat powierzchni trójkąta mającego boki x, y, z.

Nakoniec szukajmy czemu się równa wyznacznik

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}.$$

Odciągając drugą linię od pierwszej, otrzymujemy

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a-b & a^2-b^2 & a^3-b^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}.$$

Ten wynik dowodzi że wyznacznik jest podzielny przez $a-b$. Odciągając inne linie jedną od drugiej, widzianoby że wyznacznik jest podzielny przez $a-c$, $a-d$, $b-c$, $b-d$, $c-d$. Zatem

$$\Delta=k(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d).$$

Owoż, wieloczyn czynników jest wielomianem jednorodnym 6^{go} stopnia; a ponieważ wyraz główny $a^0bc^2d^3$ jest także 6^{go} stopnia i ma spółczynnik $+1$, więc k, stosunek wyznacznika do wieloczynu, jest jednością. Co daje

$$\sum a^0bc^2d^3=(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d).$$

Mnożenie wyznaczników będzie wyłożone w algebrze wyższej; tam się dopiero ukaże doniosłość teoryi wyznaczników i użytek nowego rachunku. Na teraz, to cośmy o nich powiedzieli, wystarcza.

ROZWIĄZYWANIE OGÓLNYCH RÓWNAŃ PIERWSZEGO STOPNIA Z RÓWNĄ LICZBĄ NIEWIADOMYCH.

239. Niech będzie n równań pierwszego stopnia mających n niewiadomych,

$$(1)\qquad\begin{aligned}
&a_1x+b_1y+c_1z+\ldots+h_1t=k_1\\
&a_2x+b_2y+c_2z+\ldots+h_2t=k_2\\
&a_3x+b_3y+c_3z+\ldots+h_3t=k_3\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_nx+b_ny+c_nz+\ldots+h_nt=k_n.
\end{aligned}$$

Nazywając D wyznacznik układu spółczynników ilości nie wiadomych, mamy

$$D = A_1a_1 + A_2a_2 + A_3a_3 + \ldots + A_na_n,$$
$$= B_1b_1 + B_2b_2 + B_3b_3 + \ldots + B_nb_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$= H_1h_1 + H_2h_2 + \ldots\ldots + H_nh_n.$$

$A_1, A_2, \ldots A_n, B_1, B_2, \ldots B_n, \ldots H_1, \ldots H_n$ oznaczają wyznaczniki mniejsze, niezależne od liter których są spółczynnikami.

Owoż, jeśli pomnożymy pierwsze równanie (1) przez A_1, drugie przez $A_2, \ldots$ ostatnie przez A_n, otrzymamy równanie

$$\left.\begin{array}{l}(A_1a_1+A_2a_2+\ldots+A_na_n)x+(A_1b_1+A_2b_2 \\ +\ldots+A_nb_n)y+\ldots+(A_1h_1+A_2h_2+\ldots A_nh_n)\, t\end{array}\right\} = \begin{array}{l}A_1k_1+A_2k_2+ \\ \ldots+A_nk_n,\end{array}$$

w którem, na mocy twierdzienia V, jest

$$A_1b_1 + A_2b_2 + \ldots + A_nb_n = 0,$$
$$A_1c_1 + A_2c_2 + \ldots + A_nc_n = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_1h_1 + A_2h_2 + \ldots + A_nh_n = 0;$$

więc znalezione równanie przywodzi się do

$$(2) \qquad Dx = A_1k_1 + A_2k_2 + \ldots + A_nk_n.$$

Druga strona wyraża to czem się staje wyznacznik D, gdy w nim zastąpiono spółczynniki $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ niewiadomej x przez drugie strony $k_1, k_2, k_3, \ldots k_n$ danych równań; to jest:

$$A_1k_1 + A_2k_2 + A_3k_3 + \ldots + A_nk_n = \begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \ldots h_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \ldots h_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ k_n & b_n & c_n \ldots h_n \end{vmatrix}.$$

Z równania (2) wnosimy że wartości niewiadomych przedstawiają się przez następujące formuły ogólne

$$(3)\quad \begin{cases} x=\dfrac{A_1k_1+A_2k_2+A_3k_3+\ldots+A_nk_n}{D}=\dfrac{N_1}{D}. \\ y=\dfrac{B_1k_1+B_2k_2+B_3k_3+\ldots+B_nk_n}{D}=\dfrac{N_2}{D}. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ t=\dfrac{H_1k_1+H_2k_2+H_3k_3\ldots H_nk_n}{D}=\dfrac{N_n}{D}. \end{cases}$$

Te wartości położone na miejscu niewiadomych x, y, z,... sprawdzają równania (1) przywodząc je do tosamości. Aby tego dowieśdź, trzeba tylko okazać że jest tosamość

$$a_iN_1+b_iN_2+c_iN_3+\ldots+h_iN_n-k_iD=0.$$

Owoż, mamy wyznacznik oczywiście rowny zeru

$$\begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i \ldots. & h_i & k_i \\ a_1 & b_1 & c_1\ldots & h_1 & k_1 \\ a_2 & b_2 & c_2\ldots & h_2 & k_2 \\ . & . & . & . & . \\ a_i & b_i & c_i \ldots & h_i & k_i \\ . & . & . & . & . \\ a_n & b_n & c_n\ldots & h_n & k_n \end{vmatrix}=0,$$

który, uporządkowany według ilości składających pierwszą linię, daje

$$(-1)^{n-1}(a_iN_1+b_iN_2+c_iN_3+\ldots+h_iN_n)+(-1)^nk_iD=0,$$

albo

$$a_iN_1+b_iN_2+c_iN_3+\ldots+h_iN_n-k_iD=0.$$

Co jest właśnie żądaną tosamością.

Formuły (3) dają dla n niewiadomych wartości skończone i wyznaczone, kiedy tylko wyznacznik D nie jest zerem.

Ztąd OGÓLNE PRAWIDŁO : *Pierwiastki* n *równań pierwszego stopnia z równą liczbą niewiadomych wyrażają się przez ułamki, mające za spólny mianownik wyznacznik* D *spółczynników ilości niewiadomych, a za liczniki wyznaczniki otrzymane, zastępując w wyznaczniku* D *kolumnę spółczynników niewiadomej którą wyrachować chcemy, przez kolumnę drugich stron równań danych.*

240. Jeśli drugie strony zadanych równań są wszystkie zerami prócz jednej, k_i na przykład, będzie

$$x=\frac{A_ik_i}{D}.$$

Wtedy wartości niewiadomych $x, y, z, \ldots t$ są proporcyonalne do wyznaczników mniejszych A_i, $B_i, \ldots H_i$, i rózwiązania równań są dane przez proporcye

$$\frac{x}{A_i}=\frac{y}{B_i}=\frac{z}{C_i}=\ldots=\frac{k_i}{D}.$$

241. DYSKUSSYA. Formuły (3) zostały otrzymane w przypuszczeniu że wyznacznik D nie jest zerem, i że wyznaczniki mniejsze A_1, $A_2, \ldots B_1$, $B_2, \ldots H_1$, $H_2, \ldots$ nie są wszystkie zerami; trzeba więc rozpatrzyć różne przypadki.

1szy PRZYPADEK. $D \gtrless 0.$

Gdy wyznacznik D *nie jest zerem, układ równań* (1) *ma rozwiązanie jedyne i wyznaczone przez formuły ogólne* (3).

Albowiem, dlatego że D różni się od zera, musi być w każdej klassie wyznaczników mniejszych $A_1, A_2, \ldots A_n$; $B_1, B_2, \ldots B_n; \ldots H_1, H_2, \ldots H_n$, przynajmniej jeden różny od zera; można więc z równań (1) przejść do równań (2) i z nich wyprowadzić dla $x, y, z\ldots$ wartości które są właśnie wyrażone przez formuły ogólne (3).

II^{gi} Przypadek. $D=0$ i $N \gtrless 0$.

Gdy wyznacznik D *jest zerem, ale przynajmniej jeden z liczników, na przykład* N_1, *różni się od zera, równania* (1) *są niezgodne.*

Między równaniami (1) jest oczywiście układ $n-1$ równań mających nieskończoną liczbę rozwiązań, z których żadne może nie sprawdzać równania n^{tego}. Owoż, warunek

$$N_1 = A_1k_1 + A_2k_2 + A_3k_3 + \ldots A_nk_n \lessgtr 0.$$

dowodzi że jeden przynajmniej z wyznaczników mniejszych rzędu $n-1$, dajmy na to A_1, jest różny od zera; zatem, mnożąc równania (1) odpowiednio przez $A_1, A_2, \ldots A_n$, i dodając stronami, możemy otrzymać równanie

$$A_1(a_1x + b_1x + \ldots) + A_2(a_2x + b_2y + \ldots) + \ldots$$
$$= A_1k_1 + A_2k_2 + \ldots A_nk_n,$$

które, wraz z równaniami układu $n-1$, będzie stanowiło układ równowarty zadanemu.

Ale pierwsza strona tego równania przywodząca się do Dx jest zerem, druga jest różna od zera; więc ostatni układ jest niemożebny, czyli co to samo, zadane równania są niezgodne.

3^{ci} Przypadek $D=0$, $N_1=0$, $N_2=0, \ldots N_n=0$.

Gdy wyznacznik D *i wszystkie liczniki* $N_1, N_2, \ldots N_n$ *są zerami, układ równań* (1) *jest niewyznaczony albo niemożebny.*

Żeby wiedzieć czy jest *niewyznaczenie* albo *niemożebność*, trzeba uważać wyznaczniki mniejsze.

1° Jeśli wyznaczniki mniejsze rzędu $n-1$, na przykład $A_1, A_2, A_4 \ldots$ nie są wszystkie zerami, wtedy jedno z równań układu (1) jest następstwem innych.

Jakoż, w założeniu że $A_2, A_4, A_5 \ldots$ różnią się od zera, jeśli pomnożymy drugie równanie (1) przez A_2, czwarte przez A_4, piąte przez $A_5, \ldots$ i dodamy stronami, otrzymamy równanie

$$Dx = N_1,$$

które z innemi będzie stanowiło układ równowarty zadanemu.

Ale to równanie staje się to samością

$$0 = 0,$$

ponieważ $D = 0$, i $N_1 = 0$; więc równanie (1) nie są oddzielne. Co było do dowodzenia.

2° Gdy wyznaczniki mniejsze rzędu $n-1$ są wszystkie zerami, ten ważny przypadek wymaga szczegółowego rozbioru, który dajemy podług P^a^ Rouché (*), z objaśniającym dodatkiem.

Niech będzie n równań linijnych (*) mających n niewiado-

(*) Zobacz Comptes-rendus de l'Académie des sciences. *Discussion d'un système d'équations du premier degré*, par M. E. Rouché (1875 r.).

(*) Równania pierwszego stopnia nazywają się często *równaniami linijnemi*.

mych

$$(1)\quad \begin{cases} a_{1.1}x_1 + a_{1.2}x_2 + \ldots + a_{1.n}x_n = a_{1.0}, \\ a_{2.1}x_1 + a_{2.2}x_2 + \ldots + a_{2.n}x_n = a_{2.0}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n.1}x_1 + a_{n.2}x_2 + \ldots + a_{n.n}x_n = a_{n.0}. \end{cases}$$

Nazywając D wyznacznik tych równań, to jest wyznacznik układu spółczynników ilości niewiadomych, oznaczamy przez Δ wyznacznik wywiedziony z D przez odtrącenie p pierwszych linij i p pierwszych kolumn, to jest wyznacznik rzędu $n-p$

$$(2)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{p+1,\,p+1} \ldots a_{p+1,\,n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n,\,p+1} \ldots\ a_{n \cdot n} \end{vmatrix}$$

To ustaliwszy, mamy następujące twierdzenie:

Jeśli wyznacznik D *i wszystkie jego wyznaczniki mniejsze rzędu wyższego od* n — p *są zerami, i jeśli jeden przynajmniej z wyznaczników rzędu* n — p, *na przykład* Δ, *różni się od zera, układ* (1) *jest niemożebny; chyba że wyznacznik*

$$(3)\quad \begin{vmatrix} a_{i\cdot 0} & a_{i,p+1} \ldots a_{i\cdot n} \\ a_{p+1,0} & a_{p+1,\,p+1} \ldots a_{p+1\cdot n} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a_{n\cdot 0} & a_{n,p+1} \ldots a_{n\cdot n} \end{vmatrix} \text{ czyli } \begin{vmatrix} a_{i\cdot 0} & a_{i,p+1} \ldots a_{i\cdot n} \\ a_{p+1,0} & \\ \vdots & \Delta \\ a_{n\cdot 0} & \end{vmatrix},$$

jest zerem dla i = 1, 2, 3,...*p*. *Ale, jeśli temu warunkowi staje się zadość, układ* (1) *jest niewyznaczony; niewiadome* x_1, x_2,

$x_3, \ldots x_p$ *są dowolne, a następujące* $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots x_n$ *wyrażają się linijnie przez pierwsze albo są wyznaczone*

Jakoż, uważajmy wyznacznik

$$
(4) \quad \left| \begin{array}{c|c}
a_{i \cdot 1}x_1 + a_{i \cdot 2}\ x_2 + \ldots + a_{i \cdot n}x_n - a_{i \cdot 0} & a_{i \cdot p+1} \ldots a_{i \cdot n} \\
\cline{2-2}
a_{p+1,1}x_1 + a_{p+1,2}x_2 + \ldots a_{p+1 \cdot n}x_n - a_{p+1,0} & \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \Delta \\
a_{n \cdot 1}x_1 + a_{n \cdot 2}\ x_2 + \ldots + a_{n \cdot n}x_n - a_{n \cdot 0} &
\end{array} \right| ,
$$

w którym część oddzielona punktami wyraża Δ.

Ten wyznacznik jest summą wyznaczników które się z niego wywodzi stawiając na miejscu pierwszej kolumny każdą z jej $n+1$ składowych kolumn. Owoż, p pierwsze cząstkowe wyznaczniki są zerami, bo każdy jest wieloczynem jednej z ilości $x_1, x_2 \ldots x_n$ przez jeden z wyznaczników mniejszych rzędu $n-p+1$ należących do D; następujące $n-p$ cząstkowe wyznaczniki są także zerami, ponieważ każdy z nich zawiera dwie kolumny proporcyonalne, mające na przykład nagłówki $a_{i,p+1}x_{p+1}$ i $a_{i,p+1}$. Więc wyznacznik (4) przywodzi się do

$$
\left| \begin{array}{c|c}
-a_{i \cdot 0} & a_{i \cdot p+1} \ldots a_{i \cdot n} \\
\cline{2-2}
-a_{p+1 \cdot 0} & \\
\vdots & \Delta \\
-a_{n \cdot 0} &
\end{array} \right|
$$

to jest, wyznacznik (4) jest równy wyznacznikowi Δ, ze znakiem przeciwnym, powiększonemu jedną linią i jedną kolumną, które figurują u wierzchu i na lewo Δ.

Ale, dla wszystkich wartości $x_1, x_2, \ldots x_n$, które zadość czynią $n-p$ ostatnim równaniom (1), linie składające pierwszą kolumnę wyznacznika (4) są wszystkie zerami, prócz pierwszej; dla tych wartości wyznacznik (4) jest równy wieloczynowi

$$(a_{i.1}x_1+a_{i.2}x_2+\ldots+a_{n.}x_n-a_{i.0})\Delta.$$

Więc powinno być

$$-(a_{i.1}x_1+a_{i.2}x_2+\ldots+a_{i.n}x_n-a_{i.0})\Delta=\begin{vmatrix} a_{i.0} & a_{i.p+1} & \cdots & a_{i.n} \\ a_{p+1.0} & & & \\ \vdots & & \Delta & \\ a_{n.0} & & & \end{vmatrix}$$

To dowodzi że p pierwsze równania (1) są niezgodne z ostatniemi $n-p$; chyba że zapowiedziany wyznacznik (3) jest zerem dla

$$i=1,\ 2,\ 3,\ldots\ p.$$

A jeśli temu warunkowi staje się zadość, układ jest niewyznaczony.

Wtedy, uważając tylko ostatnie $n-p$ równania, i nadając p pierwszym niewiadomym x_1, x_2, x_3,...x_p *wartości dowolne*, będziemy mieli $n-p$ niewiadomych x_{p+1}, x_{p+2},...x_n, i $n-p$ równań których wyznacznikiem jest Δ, a wyrazami wiadomemi summy

$$a_{p+1.0}-a_{p+1.1}x_1-a_{p+1.2}x_2-\ldots-a_{p+1.p}x_p.$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$a_{n.0}-a_{n.1}x_1-a_{n.2}\qquad x_2-\ldots-a_{n.p}x_p.$$

Ponieważ wyznacznik Δ nie jest zerem, wartości niewiadomych x_{p+1}, x_{p+2},... x_n będą dane przez formyły ogólne, mające mianownik Δ z którego się wywiedzie ich liczniki, zastępując spółczynniki szukanej niewiadomej przez odpowiedające im powyższe summy. Jeśli rozłożono liczniki na $p+1$ ilości, niewiadoma x_{p+k}, na przykład, wyrazi się przez formułę

$$x_{p+k}=\frac{\Delta^{(0)}_{p+k}-x_1\Delta^{(1)}_{p+k}-x_2\Delta^{(2)}_{p+k}-\ldots-x_p\Delta^{(p)}_{p+k}}{\Delta},$$

w której wyrazy licznika znaczą że, w wyznaczniku Δ, trzeba zastąpić spółczynniki kolumny rzędu $p+k$ przez odpowiedające spółczynniki kolumn rzędu 0, 1, 2....p.

Przykład umieszczony w następującym numerze będzie zastosowaniem twierdzenia i formuł.

242. Chociaż powyższe twierdzenie jest ogólne, dyskussya równań linijnych nie byłaby jeszcze zupełna, gdybyśmy nie przydali dwóch szczególnych przypadków.

1° Jeśli spółczynniki niewiadomych jednego z równań układu są proporcyonalne do odpowiedającydh spółczynników drugiego, te dwa równania są niezgodne, i układ jest niemożebny, albo, mówiąc ściślej, nie ma rozwiązania w ilościach skończonych. Chyba że drugie strony tych równań mają się jako spółczynniki niewiadomych; ale wtedy jedno z dwóch równań jest następstwem drugiego. Co oczywiste.

2° *Jeśli równania linijne mają kolumny proporcyonalne, ich układ jest niemożebny albo częściowo niewyznaczony.*

Niech będą równania

$$(1)\quad\left\{\begin{array}{l}a_1x_1+b_1x_2+c_1x_3+d_1x_4+e_1x_5+f_1x_6+\ldots+h_1x_n=k_1,\\ a_2x_1+b_2x_2+c_2x_3+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+h_2x_n=k_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_nx_1+b_nx_2+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+h_nx_n=k_n,\end{array}\right.$$

w których przypuszczamy że kolumny spółczynników ilości niewiadomych są proporcyonalne, na przykład druga i trzecia proporcyonalne do pierwszej, czwarta proporcyonalna do trzeciej, to jest :

$$\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}=\ldots=\frac{b_n}{a_n}=q,\quad \frac{c_1}{a_1}=\frac{c_2}{a_2}=\ldots=\frac{c_n}{a_n}=q',$$

$$\frac{e_1}{d_1}=\frac{e_2}{d_2}=\ldots=\frac{e_n}{d_n}=r.$$

Przez podstawienie tych wartości, równania stają się

$$\begin{aligned}
&a_1(x_1+qx_2+q'x_3)+d_1(x_4+rx_5)+f_1x_6+\ldots+h_1x_n=k_1,\\
&a_2(x_1+qx_2+q'x_3)+d_2(x_4+rx_5)+f_2x_6+\ldots+h_2x_n=k_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_n(x_1+qx_2+q'x_3)+d_n(x_4+rx_5)+f_2x_6+\ldots+k_nx_n=k_n;
\end{aligned}$$

a jeśli położymy

$$x_1+qx_2+q'x_3=\xi,\qquad x_4+rx_5=\eta.$$

Otrzymamy

$$(2)\quad\left\{\begin{aligned}
&a_1\xi+d_1\eta+f_1x_6+\ldots+h_1x_n=k_1,\\
&a_2\xi+d_1\eta+f_2x_6+\ldots+h_2x_n=k_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_i\xi+d_p\eta+f_px_6+\ldots+q_px_n=k_p,\\
&a_q\xi+d_q\eta+f_qx_6+\ldots+h_qx_n=k_q,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_n\xi+d_n\eta+f_nx_6+\ldots+h_nx_n=k_n,
\end{aligned}\right.$$

układ n równań mający p niewiadomych ξ, η, x_6, $x_7\ldots x_n$.

Ten wynik pokazuje że w ogóle układ zadanych równań jest niemożebny; chyba że równaniom warunkowym staje się zadość (nr° 145). Żeby poznać warunki możebności, uważajmy układ p pierwszych równań (2) i przypuśćmy że jego wyznacznik, który nazwiemy Δ, jest różny od zera. Rozwiązanie tego układu będzie dane przez formuły ogólne

$$\xi = \frac{\Delta_a^{(k)}}{\Delta}, \quad \eta = \frac{\Delta_d^{(k)}}{\Delta}, \quad x_6 = \frac{\Delta_f^{(k)}}{\Delta}, \ldots x_n = \frac{\Delta_h^{(k)}}{\Delta};$$

w których $\Delta_a^{(k)}$ znaczy to czem się staje Δ gdy w niem zastąpiono $a_1, a_2, \ldots a_p$ przez $k_1, k_2, \ldots k_p$.

Znalezione wartości niewiadomych $\xi, \eta, \ldots x_p$ powinny sprawdzać pozostałe $n-p$ równania; co wymaga żeby było

$$a_q \Delta_a^{(k)} + d_q \Delta_d^{(k)} + f_q \Delta_f^{(k)} + \ldots + h_q \Delta_h^{(k)} - k_q \Delta = 0,$$

dla $q = n-p+1, \ n-p+2, \ldots n$.

Owoż, ten warunek wyraża poprostu wyznacznik

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \ldots . h_1 & k_1 \\ a_2 & d_2 \ldots . h_2 & k_2 \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ a_p & d_p \ldots . h_p & k_p \\ a_q & d_q \ldots . h_q & k_q \end{vmatrix} = 0,$$

który się tworzy przydając wyznacznikowi Δ rzędu p jedną linię na dole i jedną kolumnę na prawej stronie. Więc, żeby zadany układ równań (1), z kolumnami proporcyonalnemi, był możebny, trzeba najpierwej żeby wyznacznik równań (2) różnił się od zera, i do tego jeszcze żeby wyznacznik (3) był zerem dla wartości $q=n-p+1$, $n-p+2,\ldots n$. Ale, jeśli tym warunkom staje się zadość, rzeczony układ jest niewyznaczony, z tą osobliwością że jedne niewiadome, których jest tyle ile kolumn proporcyonalnych do innych, mają wartości całkiem dowolne; drugie są ich funkcyami, to jest za pomocą nich się wyrażają; wszystkie inne niewiadome są wyznaczone.

Stosując wyłożoną teoryę do następującego przykładu

$$\begin{aligned}
x-2y-5z+3u+4t&=15,\\
3x-6y+9u-10t&=16,\\
2x-4y+z+6u&=25,\\
7x-14y-z+21u-40t&=3,\\
3z+2t&=7,
\end{aligned}$$

albo rozwiązując wprost, łatwo się znajduje

$$x=12+2y-3u,\qquad z=1,\qquad t=2.$$

Z trzech niewiadomych x, y, z, u dwie są całkiem dowolne, trzecia jest ich funkcyą; ale niewiadome z i t są zupełnie wyznaczone.

243. Rozwiążemy jeszcze te same równania za pomocą formuł wskazanych na stronicy 448; aby jaśniej pokazać ich teoryczny użytek.

Widzimy najpierwej że wyznacznik pięciu danych równań i wyznaczniki rzędu 4^{go} są zerami. Z wyznaczników mniejszych 3^{go} rzędu, ostatni na przykład nie jest zerem; bierzemy go za Δ, i mamy

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 6 & 0\\ -1 & 21 & -40\\ 3 & 0 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 27 & -40\\ 3 & -18 & 2\end{vmatrix}=54-720=-666.$$

A ponieważ warunkowi (3) (stronica 445) staje się zadość, ztąd wnosimy że układ danych równań jest niewyznaczony, i że dwie pierwsze niewiadome x, y są dowolne.

To ustaliwszy, żeby znaleźć wartości trzech pozostałych niewiadomych z, u, t, trzeba wziąć trzy ostatnie równania i dać im kształt jak gdyby x i y były wiadome, to jest napisać

$$z+6u+0=25-2x+4y,$$

$$-z+21u-40t=3-7x+14y,$$

$$3z+0+2t=7.$$

Zkąd, wywodzimy zaraz dla z równanie

$$\Delta z=\begin{vmatrix} 25-2x+4y & 6 & 0 \\ 3-7x+14y & 21 & -40 \\ 7 & 0 & 2 \end{vmatrix},$$

albo, rozkładając wyznacznik na summę trzech cząstkowych wyznaczników,

$$\Delta z=\begin{vmatrix} 25 & 6 & 0 \\ 3 & 21 & -40 \\ 7 & 0 & 2 \end{vmatrix} - x\begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 7 & 21 & -40 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} + y\begin{vmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 14 & 21 & -40 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Ale dwa ostatnie wyznaczniki są zerami, bo mają kolumny proporcyonalne; wartość drugiego wyznacznika jest

$$\begin{vmatrix} 25 & 6 & 0 \\ 3 & 21 & -40 \\ 7 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 25 & 6 & 0 \\ 143 & 21 & 0 \\ 7 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2(525-858)=-666.$$

Więc

$$z=\frac{-666}{-666}=1.$$

Dla u będzie podobnie

$$\Delta u = \begin{vmatrix} 1 & 25 & 0 \\ -1 & 3 & -40 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 7 & -40 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & 14 & -40 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Owoż,

$$\begin{vmatrix} 1 & 25 & 0 \\ -1 & 3 & -40 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 25 & 0 \\ 59 & 143 & 0 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 2(143-1475) = -4.666.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 7 & -40 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 9 & -40 \\ 3 & -6 & 2 \end{vmatrix} = 18-240 = -222.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & 14 & -40 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 18 & -40 \\ 3 & -12 & 2 \end{vmatrix} = 36-480 = -444.$$

Więc

$$u = 4 - \frac{x}{3} + \frac{2y}{3}.$$

Nakoniec dla t mamy

$$\Delta t = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 25 \\ -1 & 21 & 3 \\ 3 & 0 & 7 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -1 & 21 & 7 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 \\ -1 & 21 & 14 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Drugi wyznacznik ma wartość

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 25 \\ -1 & 21 & 3 \\ 3 & 0 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 27 & 28 \\ -1 & 21 & 3 \\ 0 & 63 & 16 \end{vmatrix} = 9(48-196) = -9.148,$$

a dwa ostatnie wyznaczniki są oczywiście zerami.

Więc

$$t=\frac{-9.148}{-666}=2.$$

Znalezione wartości zgadzają się z poprzednio otrzymanemi. Bez wątpienia, metoda nie jest jedną z najprostszych; ale ogólna.

RÓWNANIA LINIJNE JEDNORODNE.

244. Niech będzie układ n równań linijnych mających n niewiadomych, w których drugie strony są zerami

$$(1)\quad \begin{cases} a_{1\cdot 1}x_1+a_{1\cdot 2}x_2+\ldots+a_{1\cdot i}x_i+\ldots+a_{1\cdot n}x_n=0, \\ a_{2\cdot 1}x_1+a_{2\cdot 2}x_2+\ldots+a_{2\cdot i}x_i+\ldots+a_{2\cdot n}x_n=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n\cdot 1}a_1+a_{n\cdot 2}x_2+\ldots+a_{n\cdot i}x_i+\ldots+a_{n\cdot n}=0. \end{cases}$$

Mnożąc pierwsze równanie przez $A_{1\cdot 1}$, drugie przez $A_{2\cdot 1}$,... ostatnie przez $A_{n\cdot 1}$ i dodając stronami, otrzymujemy

$$Dx_1=0.$$

Gdy wyznacznik D układu nie jest zerem, to równanie daje $x_1=0$; więc, jeśli równania (1) mają się rozwiązywać przez wartości ogólnie różne od zera, powinno być

$$D=0.$$

Ten warunek konieczny jest dostateczny. Jakoż, biorąc wyznacznik D w kształcie

$$D=A_{i\cdot 1}a_{i\cdot 1}+A_{i\cdot 2}a_{i\cdot 2}+\ldots+A_{i\cdot k}a_{i\cdot k}+\ldots+A_{i\cdot n}a_{i\cdot n}=0,$$

mamy n równań (nr° 135) :

$$
(2)\quad \left\{\begin{array}{l}
a_{1.1}A_{i.1}+a_{1.2}A_{i.2}+\ldots+a_{1.k}A_{i.k}+\ldots+a_{1.n}A_{i.n}=0,\\
a_{2.1}A_{i.1}+a_{2.2}A_{i.2}+\ldots+a_{2.k}A_{i.k}+\ldots+a_{2.n}A_{i.n}=0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_{i.1}A_{i.1}+a_{i.2}A_{i.2}+\ldots+a_{i.k}A_{i.k}+\ldots+a_{i.n}A_{i.n}=0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_{n.1}A_{i.1}+a_{n.2}A_{i.2}+\ldots+a_{n.k}A_{i.k}+\ldots+a_{n.n}A_{i.n}=0,
\end{array}\right.
$$

Równania (2) dowodzą że wartości $A_{i.1}$, $A_{i.2}$, $A_{i.3}\ldots A_{i.n}$, podstawione zamiast x_1, x_2, $x_3\ldots x_n$, sprawdzają równania (1); nadto, wartości $\lambda A_{i.1}$, $\lambda A_{i.2}$, $\lambda A_{i.3}\ldots\lambda A_{i.n}$ czynią im także zadość, jakiekolwiek jest λ; a zaś $i=1, 2, 3,\ldots n$.

Będzie zatem

$$\frac{x_1}{A_{i.1}}=\frac{x_2}{A_{i.2}}=\frac{x_3}{A_{i.3}}=\ldots=\frac{x_n}{A_{i.n}};$$

i tak samo, czyniąc na przykład $i=n$,

$$\frac{x_1}{A_{n.1}}=\frac{x_2}{A_{n.2}}=\frac{x_3}{A_{n.3}}=\ldots=\frac{x_n}{A_{n.n}}.$$

Więc ogólnie układ n równań linijnych jednorodnych, mających n niewiadomych, jest niewyznaczony; wartości niewiadomych, stanowiące ich rozwiązania, są proporcyonalne do wyznaczników mniejszych rzędu $n-1$, które odpowiedają spółczynnikom tych niewiadomych w jednem któremkolwiek z równań.

Ztąd, biorąc stosunki niewiadomych do jednej z nich, na przykład do x_n, otrzymujemy

$$(3)\qquad \frac{x_1}{x_n}=\frac{A_{i.1}}{A_{i.n}},\quad \frac{x_2}{x_n}=\frac{A_{i.2}}{A_{i.n}},\ldots\ \frac{x_{n-1}}{x_n}=\frac{A_{i.n-1}}{A_{i.n}}.$$

Te stosunki są w ogóle wyznaczone; albowiem, dzieląc równania (1) przez x_n, będziemy mieli n równań linijnych między $n-1$ niewiadomemi $\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots \frac{x_{n-1}}{x_n}$; owoż $n-1$ pierwszych równań wystarcza do wyznaczenia $n-1$ stosunków i daje ich wartości (3), które sprawdzają ostatnie równanie (1) podzielone przez x_n. Trzeba uważać że niektóre z wartości (3), zawsze wyznaczone, mogą być równe zerom, albo być nieskończenie wielkiemi, gdy pewne wyznaczniki mniejsze są zerami; co nie nadweręża dowodzenia.

245. Jeśli wszystkie wyznaczniki mniejsze, aż do rzędu $n-p$ wyłącznie, są zerami, w tym szczególnym przypadku trzeba się udać do równania warunkowego na stronicy 447, w którem cała pierwsza kolumna wyznacznika (3), staje się zerem; co czyni ten wyznacznik zerem. Wtedy niemożebność znika i zostaje tylko niewyznaczenie.

Więc, jakiekolwiek są wyznaczniki mniejsze, warunek konieczny $D=0$ jest dostateczny żeby równania linijne jednorodne były zgodne między sobą.

246. Z proporcyonalności niewiadomych $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ do wyznaczników rzędu $n-1$, wynika ciąg stosunków równych

$$\frac{A_{i\cdot 1}}{A_{n\cdot 1}} = \frac{A_{i\cdot 2}}{A_{\cdot n2}} = \ldots = \frac{A_{i\cdot n}}{A_{n\cdot 1}} = \ldots \frac{A_{i.n}}{A_{n\cdot n}}.$$

Zkąd TWIERDZENIE: *Gdy wyznacznik rzędu* n *jest zerem, jego wyznaczniki mniejsze rzędu* n — 1, *odpowiedające ilościom dwóch linij równoległych jakichkolwiek, są proporcyonalne między sobą.*

247 $n-1$ RÓWNAŃ LINIJNYCH JEDNORODNYCH I n NIEWIADOMYCH. Niech będą na przykład *trzy* równania linijne jednorodne z *czterema* niewiadomemi

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1u=0,$$
$$a_2x+b_2y+c_2z+d_2u=0,$$
$$a_3x+b_3y+c_3z+d_3u=0.$$

Przydajemy do nich czwarte równanie linijne jednorodne,

$$\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta u=0,$$

którego spółczynniki α, β, γ, δ są dowolne, tylko z warunkiem żeby wyznacznik całego układu czterech równań był zerem.

Jeśli nazwiemy A, B, C, D, wyznaczniki mniejsze odpowiedające spółczynnikom α, β, γ, δ, na mocy tego co poprzedza, będziemy mieli stosunki

$$\frac{x}{A}=\frac{y}{B}=\frac{z}{C}=\frac{u}{D}.$$

do których spółczynniki dowolne α, β, γ, δ nie wchodzą.

Więc, jakiekolwiek są α, β, γ, δ, układ trzech zadanych równań rozwiązuje się przez

$$x=A\lambda,\quad y=B\lambda,\quad z=C\lambda,\quad u=D\lambda;$$

gdzie λ jest ilością jakąkolwiek.

zkąd

$$\frac{x}{u}=\frac{A}{D},\quad \frac{y}{u}=\frac{B}{D},\quad \frac{z}{u}=\frac{C}{D},$$

wartości wyznaczone.

248. n RÓWNAŃ LINIJNYCH JEDNORODNYCH I $n-1$ NIEWIADOMYCH. Niech będą na przykład *cztery* równania linijne jednorodne z trzema niewiadomemi,

$$x-y+z=0,$$
$$2x+4y-7z=0,$$
$$3x-5y+6z=0,$$
$$9x+3y-8z=0.$$

Podobnego rodzaju układ jest zwykle niemożebny, jeśli wartości niewiadomych mają być różne od zera; chyba że jedno z równań wynika z kombinowania innych. Ale wtedy układ jest niewyznaczony, i takim właśnie jest zadany który ma rozwiązanie

$$x=\lambda, \quad y=3\lambda, \quad z=2\lambda.$$

Zkąd

$$\frac{x}{z}=\frac{1}{2}, \quad \frac{y}{z}=\frac{3}{2},$$

249. Warunek zgodności równań linijnych. Jeśli przypuścimy $x_n=1$, równania (1) staną się układem n równań linijnych między $n-1$ niewiadomemi. To pokazuje że zgodność n równań mających $n-1$ niewiadomych zależy na tem, żeby wyznacznik układu wszystkich spółczynników, licząc w to wyrazy wiadome, był zerem.

Na zastosowanie weźmy równania, uważane na stronicy 249,

$$x+y=3,$$

$$x-y=1,$$

$$4x+5y=13.$$

Pisząc wyznacznik układu wszystkich spółczynników, jakoby równań linijnych jednorodnych, znajdujemy

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 4 & 5 & -13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 9 & 5 & -18 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 18 \end{vmatrix} = 0.$$

Zkąd wnosimy że *trzy* zadane równania o *dwóch* niewiadomych są zgodne; zatem jedno z nich musi być następstwem dwóch innych. Żeby wiedzieć które, bierzemy wyznacznik uporządkowany na przykład według pierwszej kolumny, i mamy

$$1(18)+1(-2)+4(-4)=0,$$

albo

$$1(9)+1(-1)+4(-2)=0.$$

Otrzymany wynik dowodzi że, mnożąc pierwsze równanie przez 9 i odciągając od niego stronami drugie, otrzymuje się trzecie pomnożone przez 2.

Ten przykład wykazuje użyteczność i wyższość wyznaczników w tym rodzaju kwestyj.

250. Wynikowa równań. Warunek zgodności n równań linijnych między $n-1$ niewiadomemi wyraża się przez równanie $D=0$, które nie zawiera żadnej niewiadomej. Więc, żeby wyrugować n niewiadomych między $n+1$ równaniami linijnemi, dość jest zrównać do zera wyznacznik wszystkich spółczynników tych równań, licząc w to wyrazy wiadome które tworzą ich drugie strony.

I tak, jeśli chcemy wyrugować n niewiadomych $x, y, z, \ldots t$ między $n+1$ następującemi równaniami,

$$a_1x+b_1y+c_1z+\ldots.+h_1t=k_1,$$

$$a_2x+b_2y+c_2z+\ldots.+h_2t=k_2,$$

$$a_3x+\ldots\ldots\ldots.+h_3t=k_3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_nx+b_ny+c_nz+\ldots.+h_nt=k_n,$$

$$a_{n+1}x+b_{n+1}y+c_{n+1}z+\ldots.+h_{n+1}t=k_{n+1},$$

piszemy wyznacznik wszystkich spółczynników zrównany do zera, i mamy

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_2 \ldots . h_1 & k_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \ldots . h_2 & k_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \ldots . h_3 & k_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ a_n & b_n & c_n \ldots . h_n & k_n \\ a_{n+1} & b_{n+1} & c_{n+1} \ldots h_{n+1} & k_{n+1} \end{vmatrix} = 0.$$

Ta równość nazywa się *wynikową* równań zadanych.

Przykład. Znaleźć wynikowę równań

$$x = by + cz + du,$$
$$y = ax + cz + du,$$
$$z = ax + by + du,$$
$$u = ax + by + cz.$$

Żeby wyrugować cztery niewiadome x, y, z, u ze czterech równań linijnych jednorodnych, dość zrównać do zera wyznacznik ich spółczynników. Szukając wartości tego wyznacznika, mamy

$$\begin{vmatrix} -1 & b & c & d \\ a & -1 & c & d \\ a & b-1 & & d \\ a & b & c & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & b & c & d \\ a+1 & -b-1 & 0 & 0 \\ a+1 & 0 & -c-1 & 1 \\ a+1 & 0 & 0 & -d-1 \end{vmatrix}$$

$$= \left\{ \begin{matrix} (b+1)(c+1)(d+1) - b(a+1)(c+1)(d+1) \\ -c(b+1)(a+1)(d+1) - d(b+1)(c+1)(a+1) \end{matrix} \right\} = 0.$$

Więc wynikową zadanych równań jest

$$\frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} + \frac{d}{d+1} = \frac{1}{a+1},$$

albo symetryczniej

$$\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}+\frac{d}{d+1}=1.$$

Można inaczej znaleźć tę wynikowę.

Dodając stronami równania i czyniąc $x+y+z+u=s$, otrzymujemy

$$\frac{s}{3}=ax+by+cz+du.$$

Jeśli teraz odciągniemy stronami pierwsze równanie, będzie

$$\frac{s}{3}=(a+1)x;$$

ztąd wnosimy

$$\frac{\left(\frac{s}{3}\right)}{1}=\frac{ax}{\frac{a}{a+1}}=\frac{by}{\frac{b}{b+1}}=\frac{cz}{\frac{c}{c+1}}=\frac{du}{\frac{d}{d+1}}=$$

$$=\frac{ax+by+cz+du}{\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}+\frac{d}{d+1}}.$$

Owoż liczniki skrajne są równe, więc ich mianowniki dają szukaną wynikowę

$$\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}+\frac{d}{d+1}=1.$$

Zaiste sposób rugowania wykwintny, ale nieogólny; gdy tymczasem wyznaczniki stanowią w równaniach algebrycznych najogólniejszą metodę rugowania, jaką dzisiaj jest znana.

ROZDZIAŁ VI

RÓWNANIA DRUGIEGO STOPNIA

ROZWIĄZYWANIE RÓWNAŃ DRUGIEGO STOPNIA O JEDNEJ NIEWIADOMEJ.

251. Równanie o jednej niewiadomej x jest *drugiego stopnia* gdy, będąc całkowite względem x, zawiera kwadrat tej niewiadomej, a nie zamyka jej potęgi wyższej. Takie równanie może tylko mieć trzy gatunki wyrazów, to jest wyrazy zawierające kwadrat x^2, wyrazy z pierwszą potęgą x, i wyrazy niezależne od x. Zatem jeśli, po zniesieniu mianowników, przeniesiono wszystkie wyrazy na jedną stronę i zebrano w jeden wszystkie wyrazy na x^2, w jeden wszystkie wyrazy na x, i w jeden wszystkie niezależne od x, równanie weźmie kształt ogólny

$$ax^2+bx+c=0,$$

gdzie a, b, c, oznaczają dane liczby albo ilości algebryczne jakiekolwiek.

I tak, równanie

$$12x-\frac{5}{6}+\frac{x^2}{2}=1+\frac{13x}{3}+\frac{3x^2}{4}.$$

przekształca się na następujące

$$144x-10+6x^2=12+52x+9x^2,$$

$$9x^2-6x^2+52x-144x+12+10,$$

$$3x^2-92x+22=0.$$

Gdy jeden z dwóch spółczynników b albo c jest zerem, równanie drugiego stopnia bierze jeden z kształtów

$$ax^2+c=0, \quad ax^2+bx=0;$$

mówi się wtedy że jest *niezupełne*.

252. Rozwiązywanie równania $ax^2+c=0$. Zajmiemy się najpierwej przypadkiem szczególnym, w którym równanie drugiego stopnia jest *równaniem dwumiennem*

$$(1) \qquad ax^2+c=0.$$

Przypuszczając że spółczynnik a jest liczbą, dzielimy oba wyrazy przez a, i przenosząc wyraz wiadomy $\frac{c}{a}$ na drugą stronę, mamy

$$x^2=-\frac{c}{a},$$

albo

$$(2) \qquad x^2=\mathrm{A},$$

czyniąc, dla skrócenia, $\frac{c}{a}=\mathrm{A}$.

Ostatni kształt jasno pokazuje że rozwiązać równanie (2) jest to znaleźć dla x wszystkie wartości których kwadraty są równe ilości A.

Trzeba rozróżnić trzy przypadki, według jak jest $\mathrm{A}>0$, $\mathrm{A}=0$, $\mathrm{A}<0$.

1° Jeśli A *jest ilością dodatną*, można uważać tę ilość jako kwadrat z jej pierwiastku arytmetycznego który oznaczymy przez $\sqrt{\mathrm{A}}$. W tym przypadku widzimy zaraz że $+\sqrt{\mathrm{A}}$ i $-\sqrt{\mathrm{A}}$ są dwiema wartościami niewiadomej x, ponieważ kwadrat z jednej i z drugiej wydaje A. Wyraża się te dwie wartości przez skrócenie, pisząc

$$x = \pm\sqrt{A},$$

i mówiąc : x *równa się więcej albo mniej pierwiastkowi kwadratowemu z* A.

Ale trzeba dowieśdź że x nie ma innych wartości. Aby tego dokazać, dość jest uważać że równanie (2) może wziąć kształt

$$x^2 - A = x^2 - (\sqrt{A})^2 = 0,$$

albo, rozkładając różnicę kwadratów na czynniki,

$$(3) \qquad (x - \sqrt{A})(x + \sqrt{A}) = 0.$$

Owoż, wieloczyn nie może być zerem jeśli żaden z jego czynników nie staje się zerem, to jest : wartości niewiadomej x które zadość czynią równaniu (3) nie mogą być różne od $+\sqrt{A}$ i od $-\sqrt{A}$; więc to równanie ma dwa rozwiązania $x = \pm\sqrt{A}$, i tylko te dwa, które się nazywają jego pierwiastkami.

Ponieważ wszelki pierwiastek kwadratowy ilości A powinien zadość czynić równaniu (2), a to równanie ma tylko dwa rozwiązania, ztąd wynika że

Pierwiastek kwadratowy ilości dodatnej jakiejkolwiek ma dwie wartości równe i znaków przeciwnych, i nie ma innych.

2° Gdy $A = 0$, równanie (2) staje się

$$x^2 = 0;$$

co daje

$$x = \pm\sqrt{0} = 0.$$

Wtedy mówi się że równanie (2) ma dwa pierwiastki równe zeru.

3° Jeśli A *jest odjemne*, ponieważ nie istnieje żadna ilość, dodatna albo odjemna, którejby kwadrat był odjemny, równanie (2) nie ma rozwiązania. Jednakże mówi się wtedy że wartości pierwiastnika $\sqrt{A}$ są *urojone*, i że równanie (2) ma *dwa pierwiastki urojone.*

Więc, zogólniając rzeczy za pomocą wyrażeń urojonych, powiedamy : jakakolwiek jest ilość $\frac{-c}{a}$, dodatna albo odjemna i nawet zero, równanie dwumienne (1) ma zawsze dwa pierwiastki różne i znaków przeciwnych, rzeczywiste albo urojone, i nawet zero, wyznaczone przez jedną formułę

$$x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

253. Ważna uwaga. Mówiąc właściwie, *wartości urojone*, albo *wyrażenia urojone* nie są ilościami. Jednak, dlatego że wchodzą do algebrycznego rachunku i w nim konieczną grają rolę, zachowano im miano *ilości urojonych*, a dla przeciwieństwa nazwano *rzeczywistemi* ilości dodatne i odjemne.

Wszelki *pierwiastek kwadratowy urojony* może się wyrazić przez pierwiastnik $\sqrt{-1}$ ze spółczynnikiem rzeczywistym. Jakoż, niech będzie pierwiastnik urojony $\sqrt{-A}$, w którym ilość A jest dodatna. Nazywając a wartość piewiastnika arytmetycznego $\sqrt{A}$, możemy położyć

$$\sqrt{-A} = ay,$$

bylebyśmy wyznaczyli y tak żeby było

$$(ay)^2 = -A.$$

Owoż, dzieląc przez a^2, otrzymujemy

$$y^2 = -1,$$

zkąd

$$y = \pm\sqrt{-1};$$

więc

$$\sqrt{-A} = \pm a\sqrt{-1} = \pm\sqrt{A}\sqrt{-1}.$$

Tym sposobem pierwiastniki kwadratowe urojone przywodzą się do jedynego pierwiastnika $\sqrt{-1}$.

Często dla skrócenia przedstawia się symbol $\sqrt{-1}$ literą i. Oczywiście wolno wprowadzić do rachunku ugodną ilość $\sqrt{-1}$, albo literę i jak gdyby ona przedstawiała ilość rzeczywistą, ale z warunkiem zastąpienia wszędzie kwadratu i^2 przez -1.

254. Rozwiązywanie równania $ax^2 + bx = 0$. Gdy nie ma wyrazu niezależnego od x, równanie drugiego stopnia ma kształt

$$ax^2 + bx = 0,$$

wtedy można wziąć x za czynnik, i napisać

$$x(ax + b) = 0.$$

Owoż, żeby wieloczyn był zerem, trzeba żeby jeden przynajmniej z jego czynników był zerem, ten warunek jest dostateczny gdy czynniki są skończone (nº 78), co właśnie ma tutaj miejsce. Będziemy więc mieli wszystkie rozwiązania zadanego równania, kładąc

$$x = 0, \qquad ax + b = 0.$$

Te dwa równania pierwszego stopnia rozwiązują się przez

$$x = 0, \qquad x = -\frac{b}{a};$$

co dowodzi że uważane równanie ma dwa pierwiastki, z których jeden jest zawsze zerem.

255. Rozwiązywanie równania zupełnego $x^2+px+q=0$. Z równania ogólnego

$$ax^2+bx+c=0,$$

dzieląc wszystkie wyrazy przez a, wywodzimy

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0;$$

zkąd, jeśli dla skrócenia uczynimy $\frac{b}{a}=p$, $\frac{c}{a}=q$, wynika

$$x^2+px+q=0,$$

najprostsze, co do kształtu, równanie zupełne drugiego stopnia.

Aby je rozwiązać, przenosimy ilość wiadomą q na drugą stronę, i mamy

$$x^2+px=-q.$$

Owoż, nietrudno spostrzedz że dwa wyrazy, składające pierwszą stronę, mogą być uważane jako dwa pierwsze wyrazy kwadratu dwumianu $x+\frac{p}{2}$; bo x^2 jest kwadratem z x a zaś px jest podwójnym wieloczynem z x przez $\frac{p}{2}$; zresztą kwadrat dwumianu $x+\frac{p}{2}$ jest

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=x^2+px+\frac{p^2}{4}.$$

Brakuje więc pierwszej stronie tylko kwadratu $\frac{p^2}{4}$ żeby była kwadratem zupełnym dwumianu $x+\frac{p}{2}$. Ale można jej przydać i odjąć ten kwadrat $\frac{p^2}{4}$, bez naruszenia równania; co daje

$$x^2+px+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}=-q,$$

albo

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}-q.$$

Tym sposobem przyprowadzamy rozwiązywanie równania zupełnego do rozwiązywania równania dwumiennego, w którem niewiadoma jest $x+\frac{p}{2}$. Widzimy teraz że, jakakolwiek jest druga strona $\frac{p^2}{4}-q$, dodatna albo odjemna i nawet zero, ostatnie równanie ma dwa pierwiastki rzeczywiste albo urojone, dane przez

$$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Zkąd wynika formuła

$$(2) \qquad x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

które dowodzi że *równanie zupełne* $x^2+px+q=0$ *ma zawsze dwa pierwiastki rzeczywiste albo urojone, i nie ma innych.*

Możnaby przełożyć tę formułę na język zwyczajny, aby mieć prawidło rozwiązywania równań drugiego stopnia; ale łatwiej ją pamiętać wyrażoną znakami algebrycznemi. Zresztą jest inna dogodniejsza, która przedstawia to prawidło.

Trzeba uważać że formuła (2) rozwiązuje zupełnie równanie $x^2+px+q=0$; to jest daje wartości niwiadomej x takie jakie istnieją, rzeczywiste albo urojone, spółmierne albo niespółmierne, według jak ilość $\frac{p^2}{4}-q$ jest dodatna albo odjemna, kwadratem doskonałym albo niedoskonałym.

Dla zastosowania formuły (2) weźmiemy kilka przykładów.

I. Rozwiązać równanie

$$x^2+4x-5=0.$$

Stosując słowo w słowo formułę (2), znajdujemy natychmiast wartości niewiadomej x,

$$x=-2\pm\sqrt{4+5}=-2\pm3.$$

Więc, jeśli oznaczymy przez x' i x'' dwa pierwiastki równania, będzie

$$x'=-2+3=1, \quad x''=-2-3=-5,$$

II. Rozwiązać równanie

$$x+\frac{5}{x}=\frac{9}{2}.$$

Znosimy najpierwej mianownik x, i otrzymujemy

$$x^2+5=\frac{9x}{2};$$

poczem przywodzimy równanie do zera i mamy

$$x^2-\frac{9x}{2}+5=0.$$

Zkąd, stosując wiadomą formułę, wyciągamy wartości

$$x=\frac{9}{4}\pm\sqrt{\frac{81}{16}-5}=\frac{9}{4}\pm\sqrt{\frac{81-80}{16}}=\frac{9}{4}\pm\frac{1}{4},$$

albo

$$x=\frac{9\pm1}{4}.$$

Więc

$$x'=\frac{9+1}{4}=\frac{5}{2},\qquad x''=\frac{9-1}{4}=2.$$

III. Niech będzie równanie

$$x^2+6x+9=0.$$

Rozwiązując mamy

$$x=-3\pm\sqrt{9-9}=-3.$$

W tym przypadku dwie wartości dla x schodzą się w jedną, i równanie ma tylko jedno rozwiązanie

$$x=-3.$$

IV. Niech będzie równanie

$$4x^2-24x+61=0.$$

Dzielimy najpierwej wszystkie wyrazy przez spółczynnik 4 kwadratu x^2, co daje

$$x^2-6x+\frac{61}{4}=0;$$

poczem, rozwiązując znajdujemy

$$x=3\pm\sqrt{9-\frac{61}{4}}=3\pm\sqrt{-\frac{25}{4}},$$

albo

$$x=3\pm\frac{5}{2}\sqrt{-1}.$$

Pierwiastki równania są urojone.

256. Rozwiązywanie równania ogólnego $ax^2+bx+c=0$. Jeśli w formule

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

zastąpimy p przez $\frac{b}{a}$ i q przez $\frac{c}{a}$, otrzymamy

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}=\frac{-b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{4ac}{4a^2}},$$

albo

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Taka jest ogólna formuła do rozwiązywania równań drugiego stopnia, przyprowadzonych do kształtu całkowitego $ax^2+bx+c=0$.

Poprzedzająca formuła jest dogodna wtedy kiedy spółczynnik $a=1$ i spółczynnik b parzysty.

Dla łatwiejszego zastosowania, dobrze jest umieć na pamięć wysłowienie formuły ogólnej jako prawidło rachunku.

Prawidło. *Aby otrzymać pierwiastki równania drugiego stopnia, trzeba wziąć spółczynnik pierwszej potęgi* x *ze znakiem przeciwnym, przydać mu, z podwójnym znakiem* $\pm$, *pierwiastek kwadratowy z jego kwadratu mniej poczwórnym wieloczynem spółczynników skrajnych, i podzielić wynik przez podwójny spółczynnik kwadratu* x^2.

Można otrzymać formułę ogólną wprost z równania ogólnego

$$(1) \qquad ax^2+bx+c=0.$$

Jakoż, pomnóżmy wszystkie wyrazy tego równania przez $4a$, będzie

$$4a^2x^2+4abx+4ac=0,$$

albo

$$4a^2x^2+4abx=-4ac.$$

Widzimy łatwo że pierwszy wyraz $4a^2x^2$ jest kwadratem ilości $2ax$; drugi wyraz $4abx$ może być uważany jako podwójny wieloczyn z ilości $2ax$ przez b. Ztąd wnosimy że pierwsza strona składa się z dwóch pierwszych wyrazów kwadratu dwumianu $2ax+b$; albowiem ten kwadrat jest

$$(2ax+b)^2=4a^2x^2+4abx+b^2.$$

To pokazuje że niedostaje tylko wyrazu b^2 pierwszej stronie żeby była kwadratem doskonałym. Jeśli więc dodamy b^2 do obydwóch stron równania, będziemy mieli

$$4a^2x^2+4abx+b^2=b^2-4ac,$$

albo

$$(2) \qquad (2ax+b)^2=b^2-4ac.$$

Ostatnie równanie wskazuje że trzeba znaleźć ilość $2ax+b$ której kwadratem jest b^2-4ac; więc, na mocy tego co już wiadome (n[ro] 252), jakiekolwiek jest b^2-4ac, ilość $2ax+b$ ma ogólnie dwa pierwiastki, rzeczywiste albo urojone, które się wyrażają przez

$$ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac}.$$

Zkąd wynika ogólna formuła

$$(3) \qquad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

A ponieważ równanie (2) jest tylko przekształceniem równania (1), ztąd wynika że *równanie drugiego stopnia ma dwa pierwiastki rzeczywiste albo urojone*, i wyznaczone przez formułę (3).

Formuła ogólna przedstawia pierwiastki równania takie jakie są istotnie.

1° Jeśli b^2-4ac *jest dodatne*, pierwiastki są rzeczywiste i nierówne; spółmierne albo niespółmierne, według jak b^2-4ac jest kwadratem doskonałym albo niedoskonałym. Wtedy równanie ma dwa rozwiązania różne.

2° Jeśli $b^2-4ac=0$, dwa pierwiastki schodzą się w jeden, czyli, jako się mówi, są *równe;* wtedy równanie ma tylko jedno rozwiązanie.

3° Jeśli b^2-4ac *jest odjemne*, pierwiastki są urojone, i równanie nie ma żadnego rozwiązania.

Dodajemy jeszcze że, jakiekolwiek są pierwiastki, rzeczywiste albo urójone, ich wyrażenie przez formułę (3), podstawione zamiast x, przywodzi równanie do tosamości. I tak, biorąc naprzykład pierwszy pierwiastek, i podstawiając go za x w równaniu (1), będzie

$$a\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2+b\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)+c$$

$$=\frac{b^2}{4a}-\frac{b\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{b^2-4ac}{4a}-\frac{b^2}{2a}+\frac{b\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+c=0.$$

257. Nieźle jest także znać sposób otrzymania formuły (3) przez podstawienie ilości *niewyznaczonej*.

Połóżmy

$$x=y+\alpha,$$

i podstawmy tę wartość w równaniu (1); będzie

$$a(y+\alpha)^2+b(y+\alpha)+c=0,$$

$$ay^2+(2a\alpha+b)y+a\alpha^2+b\alpha+c=0.$$

Ponieważ α jest ilością niewyznaczoną, możemy nią rozporządzić tak żeby było

$$2a\alpha+b=0, \quad \text{zkąd} \quad \alpha=-\frac{b}{2a}.$$

Przez podstawienie wartości α, ostatnie równanie staje się równaniem dwumiennem

$$ay^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0;$$

zkąd wynika

$$y=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Więc

$$x=\alpha+y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

258. Gdy spółczynnik b jest parzysty, formuła ogólna może się trochę uprościć.

Jakoż, uczyńmy $\quad b=2b',\quad$ będzie

$$x=\frac{-2b'\pm\sqrt{4b'^2-4ac}}{2a};$$

Owoż,

$$\sqrt{4b'^2-4ac}=\sqrt{4(b'^2-ac)}=2\sqrt{b'^2-ac};$$

więc

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}. \tag{4}$$

Na zastosowanie ogólnych formuł weźmiemy kilka przykładów.

Przykład I. Rozwiązać równanie

$$5x^2+17x+6=0.$$

Stosując formułę (3) otrzymujemy

$$x=\frac{-17\pm\sqrt{17^2-4.5.6}}{2.5}=\frac{-17\pm\sqrt{289-120}}{10},$$

albo

$$x=\frac{-17\pm\sqrt{169}}{10}=\frac{-17\pm13}{10}.$$

Więc

$$x'=\frac{-17+3}{13}=-\frac{2}{5},\quad x''=\frac{-17-13}{10}=-3.$$

Przykład II. Niech będzie równanie

$$x^2+\frac{x}{24}+\frac{3}{16}=\frac{x+1}{2}.$$

Znosimy mianowniki, mnożąc przez ich najmniejszy wielownik 48; co daje

$$48x^2+2x+9=24x+24,$$

albo

$$48x^2-22x-15=0.$$

Stosując formułę (4), mamy

$$x=\frac{11\pm\sqrt{11^2+48.15}}{48}=\frac{11\pm\sqrt{841}}{48},$$

albo

$$x=\frac{11\pm29}{48};$$

więc

$$x'=\frac{5}{6},\quad x''=-\frac{3}{8}.$$

PRZYKŁAD III. Rozwiązać równanie

$$9x^2-12x+4=0.$$

Mamy zaraz

$$x=\frac{6\pm\sqrt{6^2-9.4}}{9}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}.$$

Pierwiastki równania są oba równe liczbie $\frac{2}{3}$.

PRZYKŁAD IV. Rozwiązać równanie

$$4x^2+8x+5=0,$$

znajdujemy

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{16-20}}{4}=\frac{-4\pm\sqrt{-4}}{4},$$

o

$$x=\frac{-4\pm2\sqrt{-1}}{4}=\frac{-2\pm\sqrt{-1}}{2}.$$

Pierwiastki są urojone

$$x'=-1+\frac{1}{2}i, \qquad x''=-1-\frac{1}{2}i.$$

PRZYKŁAD V. Niech będzie równanie literalne

$$\frac{14}{ab}-\frac{6x}{a}-x^2=\frac{8}{a^2}-\frac{4x}{b}+\frac{3}{b^2}.$$

Znosimy mianowniki, mnożąc przez ich najmniejszy wielownik a^2b^2; co daje

$$14ab-6ab^2x-a^2b^2x^2=8b^2-4a^2bx+3a^2,$$

albo

$$a^2b^2x^2+2ab(3b-2a)x+3a^2-14ab+8b^2=0;$$

zkąd

$$x=\frac{ab(2a-3b)\pm\sqrt{a^2b^2(2a-3b)^2-a^2b^2(3a^2-14ab+8b^2)}}{a^2b^2},$$

albo, wykonywając rachunek i redukując,

$$x=\frac{2a-3b\pm\sqrt{a^2+2ab+b^2}}{ab}=\frac{2a-3b\pm(a+b)}{ab};$$

więc

$$x'=\frac{2a-3b+a+b}{ab}=\frac{3a-2b}{ab},$$

$$x''=\frac{2a-3b-a-b}{ab}=\frac{a-4b}{ab}.$$

ROZKŁAD RÓWNANIA DRUGIEGO STOPNIA NA CZYNNIKI PIERWSZEGO STOPNIA.

259. 1° Uważajmy najpierwej równanie drugiego stopnia, mające kształt szczególny

$$x^2+px+q=0,$$

i nazwijmy x', x'' jego pierwiastki. Ponieważ wielomian x^2+px+q, całkowity względem x, staje się zerem dla $x=x'$, to, na mocy twierdzenia n^ru^ 52, jest podzielny przez dwumian $x-x'$. Zatem, wykonywając dzielenie, mamy tosamość

$$x^2+px+q=(x-x')(x+x'+p).$$

Owoż z założenia, pierwsza strona tosamości staje się zerem dla $x=x'$ i $x=x''$; druga jest oczywiście zerem dla $x=x'$ i dla $x=-x'-p$. Musi więc być

$$-x'-p=x''$$

Podstawiając tę wartość, otrzymujemy żądany rozkład

$$x^2+px+q=(x-x')(x-x'')=0.$$

Dowodzenie przypuszcza że pierwiastki x' i x'' są rzeczywiste; ale otrzymana tosamość jest ogólna, i sprawdza się przez wartości x', x'', tak dobrze rzeczywiste jako urojone; byle tylko w ruchunku algebrycznym zastąpiono wszędzie kwadrat z ugodnej ilości $\sqrt{-1}$ przez -1.

Więc, *jakiekolwiek mogą być pierwiastki* x' *i* x'' *równania* $x^2+px+q=0$, *jego pierwsza strona jest zawsze równa wieloczynowi dwóch czynników pierwszego stopnia* $x-x'$ *i* $x-x''$, *które są różnicami niewiadomej* x *i każdego osobno z tych pierwiastków.*

2°. Jeśli równanie drugiego stopnia ma kształt ogólny

$$ax^2+bx+c=0,$$

można je przywieśdź do poprzedzającego, biorąc spółczynnik a za czynnik; co daje

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=0,$$

albo

$$ax^2+bx+c=a(x^2+px+q)=0.$$

Ale

$$x^2+px+q=(x-x')(x-x''),$$

więc

$$ax^2+bx+c=a(x-x')(x-x'')=0.$$

ZWIĄZKI MIĘDZY PIERWIASTKAMI I SPÓŁCZYNNIKAMI RÓWNANIA 2go STOPNIA.

260. Twierdzenie. *Gdy równanie drugiego stopnia ma kształt*

$$x^2+px+q=0,$$

wtedy, 1° *Summa pierwiastków jest równa spółczynnikowi pierwszej potęgi* x, *wziętemu ze znakiem przeciwnym.*

2° *Wieloczyn pierwiastków jest równy wyrazowi niezależnemu od* x.

Jakoż, nazywając x' i x'' pierwiastki równania, mamy

$$x' = -\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

$$x'' = -\frac{1}{2}p - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q};$$

zkąd, dodając wynika

$$x' + x'' = -p;$$

mnożąc, będzie

$$x'x'' = \left(-\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)\left(-\frac{1}{2}p - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)$$

$$= \frac{p^2}{4} - \left(\frac{p^2}{4} - q\right),$$

albo

$$x'x'' = q.$$

261. Powyższe dowodzenie, chociaż proste i jasne, zostawia jednak do życzenia; bo, oparte na rozwiązywaniu, wystarcza tylko w części elementarnej, ale się nie może stosować do równań stopni wyższych. Następujące jest ogólne. Jakoż, nazywając x' i x'' pierwiastki równania

$$x^2 + px + q = 0,$$

mamy zawsze tosamość

$$x^2 + px + q = (x - x')(x - x''),$$

albo

$$x^2+px+q=x^2-(x'+x'')x+x'x''.$$

Ztąd wynika równość

$$-(x'+x'')x+x'x''=px+q,$$

która istnieje jakiekolwiek jest x.

Owoż, jeśli uczynimy $x=0$, będzie

$$x'x''=q;$$

więc

$$(x'+x'')x=-px,$$

i zatem

$$x'+x''=-p.$$

Uwaga Gdy równanie drugiego stopnia jest przywiedzione do kształtu całkowitego

$$ax^2+bx+c=0,$$

wtedy jest

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0;$$

więc

$$x'+x''=-\frac{b}{a},$$

$$x'x''=\frac{c}{a}.$$

Zkąd nawzajem wywodzimy

$$b=-a(x'+x''), \qquad c=ax'x''.$$

Więc, żeby pierwiastki były *równe i znaków przeciwnych*, trzeba i dość jest żeby było $\frac{b}{a}=0$.

Różnica pierwiastków wyraża się przez

$$x'-x''=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}=\pm2\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Te twierdzenia są ważne i mają liczne zastosowania.

I tak, 1° *chcąc utworzyć równanie mające za pierwiastki dwie ilości dane* x' i x'', dość jest napisać

$$x^2-(x'+x'')x+x'x''=0.$$

2°. *Znaleźć dwie ilości, znając ich summę* s *i wieloczyn* m.

Oczywiście te ilości są pierwiastkami równania

$$x^2-sx+m=0.$$

Zresztą, dając temu równaniu kształt

$$m=x(s-x),$$

widać *a priori* że, rozwiązać je, jestto znaleźć dwie liczby x i $s-x$, których wieloczynem jest m i summą $x+s-x$ ilość s.

262. Gdy wiadomo że pierwiastki równania drugiego stopnia są rzeczywiste, można rozpoznać ich znaki, za pomocą twierdzeń które dają summę i wieloczyn tych pierwiastków. Jakoż, znak wieloczynu $\frac{c}{a}$ oznajmia że pierwiastki mają te same znaki albo znaki przeciwne. W pierwszym przypadku znak summy $\frac{-b}{a}$ pokaże czy pierwiastki są oba dodatne albo oba odjemne; w drugim przypadku ten znak summy $\frac{-b}{a}$ będzie znakiem pierwiastku mającego większą wartość samoistą. I tak, weźmy dwa równania

$$6x^2+7x+2=0,$$
$$3x^2-4x-39=0.$$

Pierwiastki pierwszego są rzęczywiste, bo jest $7^2 > 4.6.2$; pierwiastki drugiego są także rzeczywiste, dlatego że spółczynniki skrajne 3 i -39 dają $-4ac = +4.3.39$. To ustaliwszy, widzimy że pierwiastki pierwszego równania mają te same znaki, ponieważ ich wieloczyn $+\frac{2}{6}$ jest dodatny; one są oba odjemne, bo ich summa $-\frac{7}{6}$ jest odjemna. W drugiem równaniu pierwiastki muszą mieć znaki przeciwne, dlatego że ich wieloczyn -13 jest odjemny; a ponieważ ich summa $\frac{4}{3}$ jest dodatna, pierwiastek dodatny jest większy od wartości samoistej odjemnego.

Uwaga. Trzeba się przede wszystkiem zapewnić o rzeczywistości pierwiastków równania drugiego stopnia, żeby rozpoznać ich znaki wiedząc znak ich wieloczynu i summy; Albowiem mylonoby się gdyby, mając na przykład równanie

$$x^2 - 6x + 13 = 0,$$

sądzono, ze znaków wieloczynu $+13$ i summy $+6$, że pierwiastki są odjemne. One są urojone, bo $3^2 < 13$.

DYSKUSSYA PIERWIASTKÓW RÓWNANIA

$$(1) \qquad ax^2 + bx + c = 0$$

263. Nie rozwiązując równania, można wiedzieć z samych spółczynników czy pierwiastki są rzeczywiste albo urojone, i jakie mają znaki.

Iszy Przypadek $b^2 - 4ac > 0$. Pierwiastki rzeczywiste i nierówne. Gdy spółczynniki skrajne a i c są znaków przeciwnych, wieloczyn $-4ac$ jest dodatny; zatem pierwiastnik $\sqrt{b^2 - 4ac}$ jest rzeczywisty i liczebnie większy od b. Wtedy pierwiastki równania są zawsze rzeczywiste i nierówne, i znaków przeciwnych; pierwiastek liczebnie większy ma znak przeciwny znakowi ilorazu $\frac{b}{a}$.

Gdy spółczynniki skrajne a i c mają te same znaki i wieloczyn $4ac$ jest mniejszy od b^2, pierwistnik $\sqrt{b^2-4ac}$ jest rzeczywisty i liczebnie mniejszy od b. Wtedy pierwiastki równania są rzeczywiste i nierówne, mają ten sam znak przeciwny znakowi ilorazu $\frac{b}{a}$.

II^gi^ PRZYPADEK $b^2-4ac=0$. PIERWIASTKI RZECZYWISTE I RÓWNE. Gdy spółczynniki skrajne mają te same znaki i wieloczyn $4ac$ jest równy kwadratowi b^2, pierwiastnik $\sqrt{b^2-4ac}=0$; wtedy dwa pierwiastki równania schodzą się w jeden, i stanowią tylko jedno rozwiązanie. Ale mówi się że te *pierwiastki są równe*, dla zachowania ogólności twierdzenia : *Równanie drugiego stopnia ma zawsze dwa pierwiastki.* Można to usprawiedliwić. Weźmy $b^2=4ac+\varepsilon^2$, przypuszczając ilość ε bardzo małą; będzie

$$x=\frac{-b\pm\varepsilon}{2a}.$$

Owoż, różnica pierwiastków $\frac{\varepsilon}{a}$ jest tem mniejsza im bardziej ε zbliża się do zera; więc, gdy $\varepsilon=0$, ta różnica znika i pierwiastki stają się równemi; *ich wartością spólną jest połowa ilorazu $\frac{b}{a}$ ze zmienionym znakiem.*

III^ci^ PRZYPADEK $b^2-4ac<0$. PIERWIASTKI UROJONE. Gdy spółczynniki skrajne mają te same znaki i wieloczyn $4ac$ jest większy od kwadratu b^2, pierwiastnik $\sqrt{b^2-4ac}$ nie przedstawia żadnej liczby dodatnej albo odjemnej, jest tak zwaną *ilością urojoną*. Wtedy równanie nie ma żadnego rozwiązania; ale, z przyczyny wartości urojonej pierwiastnika $\sqrt{b^2-4ac}$, wyrażonej symbolicznie przez $\sqrt{4ac-b^2}\sqrt{-1}$, mówi się że pierwiastki równania są urojone. Te pierwiastki przedstawiają się w dwóch jednakowych kształtach

$$x'=\frac{-b}{2a}+\frac{\sqrt{4ac-b^2}\sqrt{-1}}{2a},\quad x''=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{4ac-b^2}\sqrt{-1}}{2a},$$

które, jeśli uczynimy

$$\frac{-b}{2a}=\alpha \quad \text{i} \quad \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}=\beta, \quad \text{staną się}$$

$$x'=\alpha+\beta\sqrt{-1},\quad x''=\alpha-\beta\sqrt{-1}.$$

Takie dwa wyrażenia urojone nazywają się *sprzężonemi*.

264. Wszystkie trzy powyższe przypadki można okazać wydatnie na samem równaniu. Jakoż, mamy oczywiście

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$

$$=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right).$$

W drugim nawiasie, trzy pierwsze wyrazy składają kwadrat dwumianu $x+\frac{b}{2a}$, a dwa ostatnie mogą się zebrać w jeden $\frac{-b^2+4ac}{4a^2}$; będzie zatem

$$(a)\qquad a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right\}=0.$$

Owoż 1°, jeśli $b^2-4ac>0$, wyrażenie w klamrach jest różnicą kwadratów; bo ilość dodatna b^2-4ac może być uważana jako kwadrat ze swojego pierwiastku $\sqrt{b^2-4ac}$. Więc, *gdy równanie drugiego stopnia* $ax^2+bx+c=0$ *ma pierwiastki rzeczy-*

wiste i nierówne, jego pierwsza strona jest różnicą kwadratów, pomnożoną przez a.

2° Jeśli $b^2-4ac=0$, równanie staje się

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0;$$

jego pierwiastki są równe.

Więc, *gdy równanie ogólne drugiego stopnia ma pierwiastki równe, jego pierwsza strona jest kwadratem doskonałym, pomnożonym przez a.*

3° Jeśli $b^2-4ac<0$, równanie (a) staje się

$$a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\right)^2\right\}=0;$$

jego pierwiastki są urojone.

Więc, *gdy równanie ogólne drugiego stopnia ma pierwiastki urojone, jego pierwsza strona jest summą dwóch kwadratów, pomnożoną przez* a.

Ostatni kształt wyraźnie pokazuje dlaczego, w tym przypadku, równanie nie ma żadnego rozwiązania; bo, dla wszelkiej wartości rzeczywistej położonej za x, wyrażenie w klamrach złożone z dwóch kwadratów jest zawsze dodatne; więc pierwsza strona równania, będąc wieloczynem dwóch czynników różnych od zera, nie może nigdy stać się zerem. Co dowodzi niemożebności równania.

To wszystko stosuje się do równania zupełnego $x^2+px+q=0$; dość tylko uczynić wszędzie $a=1$.

265. Przypadek szczególny $a=0$. Dotąd uważaliśmy spółczynnik a różny od zera, i wszystkie formuły były otrzymane

w tem założeniu. Trzeba więc teraz rozpatrzyć czem się stają te formuły i jakie są pierwiastki równania $ax^2+bx+c=0$, gdy $a=0$.

1°, Nie ma do roztrząsania przypadku $a=0$ gdy ten spółczynnik jest liczbą, bo wtedy równanie przestaje być drugiego stopnia i przywodzi się do $bx+c=0$.

Ale, jeśli spółczynnik a jest ilością zmienną, która może stać się mniejszą od wszelkiej ilości naznaczonej, wtedy równanie $ax^2+bx+c=0$, nie przestając być drugiego stopnia gdy a dąży do zera swej granicy, ma zawsze dwa pierwiastki, jakkolwiek mało a różni się od zera; więc je posiada jeszcze gdy $a=0$.

Owoż, podstawiając $a=0$ w formułach

$$x'=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad x''=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

i przypuszczając b dodatne, znajdujemy

$$x'=\frac{-b+b}{0}=\frac{0}{0},\quad x''=\frac{-b-b}{0}=-\frac{b}{0},$$

dwa wyniki symboliczne. Pierwszy, chociaż ma kształt $\frac{0}{0}$, jest ilością wyznaczoną, jako zaraz okażemy; drugi wyraża niewątpliwie ilość nieskończenie wielką.

Uważajmy pierwszy pierwiastek

$$x'=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Gdy a dąży do zera, wtedy pierwiastnik $\sqrt{b^2-4ac}$ dąży do b, i temsamem licznik dąży do zera; to właśnie jest przyczyną że nie widać spólnego czynnika który, stając się zerem, sprawia kształt $\frac{0}{0}$. Ale można ominąć trudność za pomocą następującego, często użytecznego fortelu. Dość tylko pomnożyć oba wyrazy ułamka przez ilość sprzężoną z licznikiem, to jest przez $-b-\sqrt{b^2-4ac}$; co daje ułamek

$$x'=\frac{(-b+\sqrt{b^2-4ac})(-b-\sqrt{b^2-4ac})}{2a(-b-\sqrt{b^2-4ac})}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{2a(-b-\sqrt{b^2-4ac})}$$

$$=\frac{4ac}{2a(-b-\sqrt{b^2-4ac})},$$

którego licznik, będąc wieloczynem summy dwóch ilości $-b$ i $\sqrt{b^2-4ac}$ przez ich różnicę, równa się różnicy kwadratów tych ilości, to jest $b^2-(b^2-4ac)$ albo $4ac$. Ten sposób uwydatnia spólny czynnik a wyrazów ułamka, pokazując zkąd pochodzi $\frac{0}{0}$. Znosząc czynnik $2a$, otrzymujemy wartość

$$x'=\frac{2c}{-b-\sqrt{b^2-4ac}},$$

która istnieje jakkolwiek blisko a dochodzi zera. Więc, czyniąc $a=0$, znajdujemy prawidziwą wartość pierwiastku

$$x'=-\frac{c}{b}.$$

Otrzymaliśmy tę wartość w założeniu że b jest dodatne. Przypuszczając b odjemne i działając podobnie, znalezionoby oczywiście ten sam wynik, jako będący prawdziwą wartością pierwiastu który się przedstawia w kształcie $\frac{0}{0}$.

Wartość $x=-\frac{c}{b}$ sprawdza równanie $ax^2+bx+c=0$ w założeniu $a=0$; bo wtedy $0.\frac{c^2}{b^2}=0$, i równanie przywodzi się do tosamości $-\frac{bc}{b}+c=0$.

Podstawiając, w tem samem równaniu, za x wartość nieskończenie wielką drugiego pierwiastku, nie otrzymuje się oczywistej tosamości; bo nie widać czemu się równa wieloczyn symboliczny $0.\infty^2$. A jednak ta nieskończenie wielka wartość, gdy $a=0$, jest istotnie jednym z dwóch pierwiastków równania $ax^2+bx+c=0$. Żeby tego dowieśdź sposobem niezostawiającym żadnej wątpliwości, przekształcamy równanie (1) na inne, którego pierwiastki są *odwrotnościami* jego pierwiastków. W tym celu kładziemy

$$y=\frac{1}{x} \quad \text{zkąd} \quad x=\frac{1}{y},$$

i podstawiamy ostatnią wartość w równaniu (1); co daje

$$a\frac{1}{y^2}+b\frac{1}{y}+c=0,$$

albo

$$(2) \qquad cy^2+by+a=0.$$

Owoż, gdy a malejąc staje się zerem, równanie (2) staje się

$$cy^2+by=0,$$

albo

$$y(cy+b)=0;$$

zkąd

$$y=0, \quad y=-\frac{b}{c}.$$

Pierwszy pierwiastek odpowieda wartości $x=\frac{1}{0}$, drugi wartości $-\frac{c}{b}$; więc, gdy $a=0$, jeden z pierwiastków równania $ax^2+bx+c=0$ staje się nieskończenie wielkim i ma znak przeciwny znakowi ilorazu $\frac{b}{a}$, drugi zostaje ilością stateczną $-\frac{c}{b}$.

2°. $a=0$ i $b=0$. Jeśli spółczynniki zmienne a i b, dążąc oba razem do zera, stają się zerami, równanie (2) przywodzi się do

$$cy^2=0.$$

Oba pierwiastki ostatniego równania są zerami; więc, w założeniu $a=0$ i $b=0$, pierwiastki równania (1) są oba nieskończenie wielkie.

3° $a=0$ i $c=0$. Gdy spółczynniki skrajne a i c, oba zależące od tej samej ilości zmiennej, stają się zerami, wtedy jeden z pierwiastków równania (1) wyraża się przez $\frac{-b+b}{0}=\frac{0}{0}$, drugi przez $\frac{-b}{0}$. Rozumując jako w 1°, łatwo widzimy że pierwszy pierwiastek jest *zerem*, drugi ilością niekończenie wielką (*); co się zgadza z przypadkiem wyłożonym w numerze 254.

(*) Trygonometrya nastręcza wyborny przykład tego rodzaju pierwiastków. Wiadomo że, mając daną styczną łuku, żeby znaleźć styczną połowy tego łuku, trzeba rozwiązać równanie

$$\operatorname{tg}a \operatorname{tg}^2\frac{1}{2}a+2\operatorname{tg}\frac{1}{2}a-\operatorname{tg}a=0.$$

Owoż, gdy $\operatorname{tg}a=0$, łuk $a=0$, π, 2π,...; wtedy styczna połowy łuku a powinna być 0 albo ∞. Co właśnie daje przytoczone równanie.

Zobaczyć jeszcze notę na końcu tomu.

Nareszcie $b=0$ i $c=0$. Formuły dają

$$x'=0, \quad x''=0;$$

oba pierwiastki są zerami, i sprawdzają równanie (1), które w tem założeniu staje się

$$ax^2=0, \quad \text{zkąd} \quad x.x=0.$$

Dopiero po tej dyskussyi widzimy dlaczego równanie $ax^2+bx+c=0$ jest *ogólne*, a równanie $x^2+px+q=0$ tylko *zupełne*; bo pierwsze może mieć pierwiastki skończnone albo nieskończenie wielkie, gdy tymczasem drugie ze spółczynnikami skończonemi ma zawsze pierwiastki skończone.

ĆWICZENIA

I. Rozwiązać równanie

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}=\frac{1}{x-3}.$$

Odpowiedź : $x=3\pm\sqrt{2}$.

II. Rozwiązać równanie

$$\frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}=\frac{\sqrt{3}}{x^2}.$$

Odpowiedź : $x=\pm\frac{1}{2}$.

III. Rozwiązać równanie

$$\frac{ax+b}{x+a}+\frac{bx+a}{x+b}+a+b=0.$$

Odpowiedź : $x=\frac{-(a+b)\pm(a-b)\sqrt{-1}}{2}.$

IV. Rozwiązać równanie

$$\frac{a+x}{x-a}+\frac{x+b}{x-b}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}.$$

Odpowiedź : $x=\dfrac{(a+b)}{2(a-b)^2}\left(a^2+b^2\pm\sqrt{(a-b)^4+4a^2b^2}\right).$

V. Rozwiązać równanie

$$(a^2-b^2)x^2-2(a^2+b^2)x+a^2-b^2=0,$$

Odpowiedź : $x'=\dfrac{a-b}{a+b},\quad x''=\dfrac{a+b}{a-b}.$

VI. Rozwiązać równanie

$$\sqrt{5x+1}+\sqrt{7x-13}=12.$$

Odpowiedź : $x'=871,\quad x''=7.$

VII. Rozwiązać równanie

$$\frac{x+a}{x-a}+\frac{x+b}{x-b}+2\,\frac{a^2-6ab+b^2}{(a+b)(a-3b)}.$$

Odpowiedź : $x'=\dfrac{a-b}{2},\quad x''=-\dfrac{4ab^2}{a^2-4ab+b^2}.$

VIII. Rozwiązać równanie

$$\frac{x}{a^2-b^2}+\frac{1}{x}=\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(a+b)^2}.$$

Odpowiedź: $x'=(a+b)^2,\quad x''=(a-b)^2.$

IX. Rozwiązać równanie

$$\sqrt{a+x}+\sqrt{b+x}+\sqrt{c+x}=0.$$

Odpowiedź : $x=\dfrac{-(a+b+c)\pm2\sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc}}{3}$;

jakiekolwiek są znaki pierwiastników.

X. Rozwiązać równanie

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{6x-4}=\sqrt{x+1}.$$

Odpowiedź : $x'=1,\quad x''=\frac{5}{3}.$

XI. Rozwiązać równanie

$$\sqrt{5x+1}\pm\sqrt{2x+3}=\sqrt{12x+13}.$$

Odpowiedź : $x'=3,\quad x''=-\frac{23}{15}$. Pierwsza wartość sprawdza równanie, $\sqrt{5x+1}+\sqrt{2x+3}=\sqrt{12x+13}$; druga jest rozwiązaniem równania $\sqrt{5x+1}-\sqrt{2x+3}=\sqrt{12x+13}$, chociaż daje pierwiastniki urojone.

XII. Rozwiązać równanie

$$\sqrt[m]{(1+x)^2}-\sqrt[m]{(1-x)^2}=\sqrt[m]{1-x^2}.$$

Odpowiedź : Dzieląc równanie przez ostatni pierwiastnik, będzie

$$\sqrt[m]{\frac{1+x}{1-x}}-\sqrt[m]{\frac{1-x}{1+x}}=1;$$

poczem kładąc

$$\sqrt[m]{\frac{1+x}{1-x}}=z,\quad \text{mamy}$$

$$z-\frac{1}{z}=1,$$

zkąd $\quad z=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2};\quad$ więc $\quad x=\frac{z^m-1}{z^m+1}=\frac{(1\pm\sqrt{5})^m-2^m}{(1\pm\sqrt{5})^m+2^m}.$

XIII. Rozwiązać równanie

$$\frac{\sqrt{x^2+x+6}}{3}=\frac{20-\frac{4}{3}\sqrt{x^2+x+6}}{\sqrt{x^2+x+6}}.$$

Biorąc $\sqrt{x^2+x+6}$ za niewiadomę posiłkową, łatwo się znajduje

$$x'=5 \qquad x''=-6.$$

Otrzymuje się także

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{377}}{2},$$

ale te rozwiązania są obce; one zadość uczynią równaniu, jeśli w niem będzie dany znak — pierwiastnikowi.

XIV. Rozwiązać równanie

$$2x^2+3x-3+\sqrt{2x^2+3x+9}=30.$$

Odpowiedź: Biorąc $2x^2+3x$ za niewiadomę posiłkową, otrzymuje się wartości

$$x'=3, \quad x''=-\frac{9}{2}; \quad x=\frac{-3\pm\sqrt{329}}{4}.$$

Dwie ostatnie wartości stosują się do pierwiastnika wziętego ze znakiem —.

XV. Rozporządzić spółczynnikiem m w równaniu

$$2x^2+mx+12=0,$$

tak żeby pierwiastki miały różnicę ± 5.

Odpowiedź: $\quad m=\pm 14.$

XVI. Dobrać spółczynnik m w równaniu

$$3x^2+4x+m=0,$$

tak żeby pierwiastki były równe

Odpowiedź: $\quad m=\frac{4}{3}.$

XVII. Przekształcić równanie

$$x^2+px+q=0,$$

na inne mające pierwiastki k razy większe.

Odpowiedź : Trzeba uczynić $y=kx$, zkąd $x=\frac{y}{k}$; podstawiając tę wartość, otrzymuje się równanie żądane

$$y^2+kpx+k^2q=0.$$

XVIII. Znaleźć jaki powinien być związek między spółczynnikami p i q, żeby w równaniu

$$x^2+px+q+0,$$

jeden pierwiastek był kwadratem drugiego.

Odpowiedź : $p^3-3qp+q+q^2=0.$

XIX. Dowieśdź że, aby równania

$$ax^2+bx+c=0$$

$$a'x^2+b'x+c'=0,$$

miały te same pierwiastki, trzeba żeby było

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}.$$

XX. Dowieśdź że, aby równania

$$ax^2+bx+c=0,$$
$$a'x^2+b'x+c'=0,$$

miały jeden pierwiastek spólny, trzeba i dość jest żeby było

$$(ac'-ca')^2=(ab'-ba')(bc'-cb');$$

wtedy pierwiastek spólny jest

$$\frac{ca'-ac'}{ab'-ba'}.$$

XXI Dowieśdź że równanie

$$(x-a)^2-(1+\alpha^2)(x-b)(x-c)=0,$$

ma zawsze pierwiastki rzeczywiste jakiekolwiek jest α.

Żeby te pierwiastki były równe, powinno być

$$a=b=c.$$

XXII. Jeśli ułamek nieredukowny $\frac{m}{n}$ jest pierwiastkiem równania

$$ax^2+bx+c=0,$$

mającego spółczynniki a, b, c całkowite, dowieśdź że licznik m dzieli c, i mianownik n dzieli a.

XXIII. Dowieśdź że równanie

$$(b^2-4ac)x^2-2(2ac'+2ca'-bb')x+b'^2-4a'c'=0,$$

ma pierwiastki rzeczywiste, jeśli b^2-4ac jest ilością odjemną.

XXIV. Dowieśdź że równanie

$$(1+p^2+q^2)x^2-\{r(1+q^2)+t(1+p^2)-2pqs\}x+rt-s^2=0,$$

ma zawsze pierwiastki rzeczywiste, jakiekolwiek są p, q, r, s, t.

Dowieśdź jeszcze że, aby te pierwiastki były równe, trzeba i dość jest żeby rzeczone liczby dopełniały dwóch warunków

$$\frac{r}{1+p^2}=\frac{s}{pq}=\frac{t}{1+q^2}.$$

WŁASNOŚCI TRÓJMIANU DRUGIEGO STOPNIA.

266. Nazywa się *trójmianem drugiego stopnia* wyrażenie kształtu

$$ax^2+bx+c,$$

w którem spółczynniki a, b, c są liczbami *danemi* jakiemikolwiek, i niewiadoma x ilością *zmienną*, mogącą brać wszelkie możebne wartości od $-\infty$ do $+\infty$.

Pierwiastnikami trójmanu ax^2+bx+c są pierwiastki równania

$$ax^2+bx+c=0.$$

267. Rozkład trójmianu drugiego stopnia na czynniki pierwszego stopnia. — Niech będzie trójmian

$$ax^2+bx+c.$$

Mamy już wiadomą tosamość

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4ac}\right\},$$

albo

$$ax^2+bx+c=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2\right\};$$

a jeśli zamiast różnicy kwadratów $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$, $\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2$ położymy wieloczyn summy przez różnicę ich pierwiastków, otrzymamy

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x-\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right);$$

albo, co wychodzi na jedno,

$$ax^2+bx+c=a\left(x-\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right),$$

i ostatecznie

$$ax^2+bx+c=a(x-x')(x-x'');$$

oznaczając przez x' i x'' pierwiastki trójmianu ax^2+bx+c zrównanego do zera.

Więc, *żeby rozłożyć trójmian na czynniki pierwszego stopnia, trzeba wyznaczyć jego pierwiastki, odciągnąć każdy z nich od* x, *i pomnożyć wieloczyn różnic przez* a.

Uwaga. Rozkład trójmianu drugiego stopnia, na dwa czynniki pierwszego stopnia, daje nowy sposób rozwiązywania równania

$$ax^2+bx+c=0,$$

które teraz przedstawia się przez wieloczyn

$$a\left(x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right).$$

Jakoż, żeby wieloczyn był zerem, trzeba i dość jest żeby jeden z jego czynników stał się zerem, ale z warunkiem żeby żaden inny czynnik nie stawał się nieskończenie wielkim; więc, jeśli czynnik a zostaje stateczny, ponieważ dwa inne są ilościami skończonemi, musi być

$$x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=a \quad \text{albo} \quad x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=0.$$

Zkąd wynika dla x *dwie wartości, i tylko dwie,*

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{i} \quad x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

które się wyrażają jedną formułą

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Twierdzenie, na mocy którego zrównaliśmy czynniki do zera, przypuszcza że one są rzeczywiste; ale będzie później dowiedzione że się także stosuje do czynników urojonych; w ostatnim przypadku czynniki pierwszego stopnia, na które się rozkłada trójmian, powinny być uważane jako wyrażenia symboliczne.

Przykłady:

$$2x^2+5x-3=2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+3),$$

$$25x^2-30x+9=25\left(x-\frac{3}{5}\right)^2.$$

$$4x^2-12x+25=4\left(x-\frac{3}{2}-2\sqrt{-1}\right)\left(x-\frac{3}{2}+2\sqrt{-1}\right).$$

268. Znak trójmianu dla wartości szczególnej podstawionej za x. Gdy za x jest podstawiona jakakolwiek wartość, dodatna albo odjemna, wartość odpowiedająca trójmianu będzie dodatna albo odjemna albo nawet zero. Za pomocą następującego twierdzenia można wiedzieć znak wartości trójmianu, nie wykonywając podstawienia.

Twierdzenie. *Trójmian* ax^2+bx+c *bierze ogólnie znak pierwszego wyrazu, a zmienia go wtedy tylko kiedy ma pierwiastki rzeczywiste i nierówne, między któremi się mieści wartość podstawiona za* x.

Trzeba rozróżnić trzy przypadki, według jak pierwiastki trójmianu są rzeczywiste i nierówne, albo rzeczywiste i równe, albo urojone.

1° Uważajmy najpierwej przypadek w którym pierwiastki x' i x'' trójmianu są *rzeczywiste i nierówne*, będziemy mieli

$$ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x'').$$

Przypuszczając $x' < x''$ widzimy zaraz że, dla wszelkiej wartości x mniejszej od x', czynniki $x - x'$, $x - x''$ są oba odjemne; zatem ich wieloczyn jest dodatny. Co dowodzi że wartość trójmianu, wyrażona przez

$$a(x - x')(x - x''),$$

ma znak pierwszego spółczynnika a.

Tak samo, ponieważ dla wartości x większej od x'' oba czynniki $x - x'$, $x - x''$ są dodatne, ich wieloczyn jest dodatny, i wartość trójmianu, dana przez wieloczyn $a(x - x')(x - x'')$ ma znak pierwszego spółczynnika a.

Więc trójmian bierze znak pierwszego spółczynnika dla wszelkiej wartości x wziętej zewnątrz pierwiastków x' i x''. Ale, jeśli wartość nadana niewiadomej x jest zawarta między x' i x'', czynnik $x - x'$ jest dodatny, czynnik $x - x''$ odjemny; zatem wieloczyn $(x - x')(x - x'')$ jest odjemny, i wartość trójmianu wyrażona przez

$$a(x - x')(x - x''),$$

ma znak przeciwny znakowi pierwszego spółczynnika a.

2° Gdy pierwiastki trójmianu są *równe*, wtedy

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = a(x - x')^2;$$

co widocznie pokazuje że wszelka wartość podstawiona za x daje trójmianowi znak spółczynnika a. Dla $x = -\frac{b}{2a}$ trójmian jest zerem.

3° Nakoniec, uważając przypadek w którym pierwiastki trójmianu są *urojone*, mamy

$$ax^2+bx+c=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4ac}\right\}.$$

Owoż, jakiekolwiek jest x, ponieważ $b^2-4ac<0$, wyrażenie w klamrach, złożone z dwóch wyrazów dodatnych, jest summą dodatną; więc dla wszelkiej wartości x trójmian ma znak pierwszogo spółczynnika a.

W tym i w poprzedzającym przypadku nie ma żadnej wartości dla x, zawartej między pierwiastkami, dlatego trójmian ma znak pierwszego wyrazu.

269. Warunek konieczny i dostateczny żeby trójmian ax^2+bx+c był kwadratem doskonałym. Mamy tosamość

$$ax^2+bx+c=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right\},$$

która pokazuje że, jeśli b^2-4ac róźni się od zera, trójmian ax^2+bx+c jest summą albo różnicą kwadratów pomnożoną przez a; i tylko wtedy kiedy $b^2-4ac=0$ trójmian jest kwadratem pomnożonym przez a, to jest

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2.$$

Owoż, 1°, jeśli spółczynnik a jest dodatny, zastępując go przez $(\sqrt{a})^2$ będzie

$$ax^2+bx+c=(\sqrt{a})^2\left(x+\frac{b^2}{2a}\right)=\left(x\sqrt{a}+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2;$$

więc, gdy $b^2-4ac=0$ i $a>0$, trójmian ax^2+bx+c jest kwadratem dwumianu $x\sqrt{a}+\dfrac{b}{2\sqrt{a}}$.

2° Jeśli spółczynnik a jest odjemny, można go zastąpić przez $-(\sqrt{-a})^2$, wtedy będzie

$$ax^2+bx+c=-(\sqrt{-a})^2\left\{x-\frac{b}{2(\sqrt{-a})^2}\right\}^2$$

$$=-\left(x\sqrt{-a}-\frac{b}{2\sqrt{-a}}\right)^2;$$

więc, gdy $b^2-4ac=0$ i $a<0$, trójmian ax^2+bx+c jest kwadratem odjemnym dwumianu $x\sqrt{-a}-\dfrac{b}{2\sqrt{-a}}$.

Ale, za pomocą ilości urojonych, łatwo widzieć że ostatnie wyrażenie wchodzi do pierwszego. Jakoż, w założeniu $a<0$, jest $\sqrt{a}=i\sqrt{-a}$; zatem

$$ax^2+bx+c=-\left(x\sqrt{-a}-\frac{b}{2\sqrt{-a}}\right)^2=i^2\left(x\sqrt{-a}+\frac{b}{2i^2\sqrt{-a}}\right)^2$$

$$=\left(xi\sqrt{-a}+\frac{b}{2i\sqrt{-a}}\right)^2=\left(x\sqrt{a}+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2.$$

Więc, zogólniając, mamy ważne twierdzenie:

Żeby trójmian ax^2+bx+c *był kwadratem doskonałym, trzeba i dość jest żeby było*

$$b^2-4ac=0.$$

270. Zastosowvnia

Przykład I. *Między jakiemi granicami trzeba zmieniać wartości nadawane dla* x, *żeby trójmian* $2x^2+3x-5$ *był ciągle dodatny albo ciągle odjemny?*

Szukamy pierwiastków trójmianu, i znajdując je równe liczbom $-\dfrac{5}{2}$ i 1. Widzimy że trojmian zostaje dodatny, gdy się x zmienia od $-\infty$ do $-\frac{5}{2}$, i od 1 aż do $+\infty$; przeciwnie, trójmian zostaje odjemny gdy x zmienia się między $-\frac{5}{2}$ i 1.

Przykład II. *Czy trójmian $3x-2x^2-5$ może mieć wartość dodatną?*

Pierwiastki tego trójmianu są urojone; więc jego wartość, mająca zawsze znak pierwszego wyrazu $-2x^2$ który jest odjemny, nie może stać się dodatną dla żadnej wartości x.

Przykład III. *Przekształcić równanie którego pierwiastki mają te same znaki, na inne któregoby pierwiastki były ze znakami przeciwnemi.*

Niech będzie równanie, z pierwiastkami dodatnemi,

$$2x^2-60x+75=0.$$

Aby je zamienić na inne mające jeden pierwiastsk dodatny drugi odjemny, dość jest położyć

$$x=y+\alpha,$$

i podstawić w równaniu. Co daje

$$2(y^2+2\alpha y+\alpha^2)-60(y+\alpha)+75=0,$$

albo

$$2y^2+(4\alpha-60)y+2\alpha^2-60\alpha+75=0.$$

Trzeba teraz żeby było

$$2\alpha^2-60\alpha+75<0.$$

Tej nierówności zadość czyni każda wartość α, zawarta między pierwiastkami równania

$$2\alpha^2-60\alpha+75=0,$$

które jest to samo co zadane. Ale nie ma potrzeby znać dokładnie jego pierwiastków, aby mieć α. Jakoż,

$$\alpha = \frac{30 \pm \sqrt{750}}{2};$$

biorąc dla α

$$\frac{30-20}{2} = 5,$$

będziemy mieli wartość dostateczną; dlatego że, nazywając α' i α'' dwa pierwiastki, jest oczywiście

$$\alpha' < 5 < \alpha''.$$

Podstawiając $\alpha = 5$, otrzymujemy szukane równanie

$$2y^2 - 40y - 175 = 0.$$

A jeśli chcemy żeby pierwiastek liczebnie mniejszy był dodatny, zmieniamy y na $-y$, i mamy

$$2y^2 + 40y - 175 = 0.$$

271. Uwaga. Wynika z twierdzenia stronicy 498 że, jeśli dla dwóch wartości podstawionych za x, trójmian nabywa dwóch wartości ze znakami przeciwnemi, jego pierwiastki są rzeczywiste i nierówne, i jeden z nich mieści się między wartościami podstawionemi za x.

Niech będzie na przykład trójmian

$$2x^2 - 9x + 4.$$

Czyniąc $x=0$ i $x=1$, otrzymujemy dwa wyniki $+4$ i -3 mające znaki przeciwne. Ztąd, na mocy rzeczonego twierdzenia, wnosimy że pierwiastki trójmianu są rzeczywiste i nierówne. Owoż wartość $x=1$, dająca wynik odjemny -3, znaku przeciwnego znakowi pierwszego spółczynnika 2, jest zawarta między pierwiastkami trójmianu; druga wartość $x=0$, która daje wynik dodatny 4, musi być niższa od pierwiastku mniejszego albo przewyższać większy; ale ona jest mniejsza od *połowy summy* $\frac{9}{4}$ *dwóch pierwiastków*, więc jest mniejsza od pierwiastku mniejszego. To dowódzi że pierwiastek mniejszy jest zawarty między 0 i 1, a zaś większy przewyższa 1. W istocie te pierwiastki są $\frac{1}{2}$ i 4.

ZMIENNOŚĆ TRÓJMIANU GDY X ROŚNIE OD $-\infty$ DO $+\infty$.

272. Określenie. Gdy dwie ilości zmienne, to jest mogące brać rozmaite wartości, są związane z sobą tak, że zmieniając jedną zmienia się temsamem drugą, pierwsza nazywa się *zmienną niezależną* druga *zmienną zależną*, albo po prostu, pierwsza jest *zmienną* a druga jej *funkcyą*.

Oznaczając zmienną przez x jej funkcyę przez y, wyraża się to ogólnie pisząc

$$y=f(x).$$

Funkcya nazywa się *ciągłą* gdy jej wartości zmieniają się *sposobem ciągłym*, to jest przechodzą przez wszystkie stany pośrednie wielkości, które odpowiedają wartościom bez przerwy po sobie idącym zmiennej niezależnej.

273. Twierdzenie. *Trójmian* ax^2+bx+c, *jest funkcyą ciągłą zmiennej* x.

To znaczy że, jeśli dano zmiennej x jakąkolwiek wartość x_0, można zawsze jej nadać drugą wartość x_0+h, dostatecznie blizką pierwszej x_0, i taką żeby różnica między wartościami odpowiedającemi trójmianu była tak mała liczebnie jak się podoba.

Jakoż, nazywając y wartość trójmianu, k jej *przyrost*, dodatny albo odjemny, odpowiedający przyrostowi h zmiennej x, będzie

$$y=x_0^2+bx_0+c,$$

$$y+k=a(x_0+h)^2+b(x_0+h)+c.$$

zkąd, odciągając stronami, wynika

$$k = 2ahx_0 + ah^2 + bh,$$

albo

$$k = (2ax_0 + ah + b)h.$$

Ponieważ czynnik $2ax_0 + b + ah$ ma wartość skończoną, można zawsze wziąć przyrost h dostatecznie mały, żeby wartość samoista wieloczynu była tak mała jak się podoba; więc, gdy się x zmienia sposobem ciągłym, wartość y trójmianu zmienia się także sposobem ciągłym. Co się wyraża mówiąc że trójmian drugiego stopnia jest funkcyą ciągłą swojej zmiennej.

274. Wielkość i znak zmienności trójmianu. Aby łatwo wiedzieć wielkość i znak rozmaitych wartości jakie bierze trójmian $ax^2 + bx + c$, gdy x rośnie od $-\infty$ do $+\infty$, trzeba mu dać kształt następujący

$$y = ax^2 + bx + c = a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right\}.$$

Tym sposobem widzimy zaraz że trójmian zmienia się razem z kwadratem $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$, i jego znak zależy od znaków czynnika a i od ilości w klamrach.

Owoż, gdy x rośnie od $-\infty$ do $-\frac{b}{2a}$, kwadrat $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ maleje od $+\infty$ do zera; zatem ilość w klamrach maleje od $+\infty$ do $\frac{4ac - b^2}{4a^2}$. Gdy potem x rośnie od $-\frac{b}{2a}$ do $+\infty$, kwadrat $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ rośnie od zera do $+\infty$; zatem ilość w klamrach rośnie od $\frac{4ac - b^2}{4a^2}$ do $+\infty$.

Więc, jeśli czynnik a jest dodatny, wartość y trójmianu zmienia się tak jak ilość w klamrach, i dla $x=-\frac{b}{2a}$ przechodzi przez wartość najmniejszą możebną $\frac{4ac-b^2}{4a}$.

Jeśli zaś czynnik a jest odjemny, trójmian zmienia się przeciwnie ilości w klamrach, i dla $x=-\frac{b}{2a}$ przechodzi przez wartość największą możebną $\frac{4ac-b^2}{4a}$.

Trzeba uważać że trójmian y nabywa tej samej wartości, gdy zmienna x przechodzi przez watorści $-\frac{b}{2a}-h$ i $-\frac{b}{2a}+h$, równo odległe od $-\frac{b}{2a}$; albowiem dla tych wartości kwadrat $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ staje się h^2. To zarazem dowodzi że wartość $\frac{4ac-b^2}{4a}$ jest mniejsza albo większa od dwóch wartości sąsiednich, według jak a jest dodatne albo odjemne.

Nie szukając pierwiastków trójmianu, można naprzód wiedzieć znak jego wartości y, gdy x rośnie od $-\infty$ do $+\infty$.

Jakoż, jeśli $b^2-4ac<0$, wartość y ma znak spółczynnika a, jakakolwiek jest wartość x.

Jeśli $b^2-4ac=0$, wartość y ma także ten sam znak co spółczynnik a, ale staje się zerem dla wartości $x=-\frac{b}{2a}$, która jest *pierwiastkiem podwójnym* trójmianu.

Nakoniec, jeśli $b^2-4ac>0$, trójmian staje się zerem dla wartości $x=x'$ i $x=x''$ które są jego pierwiastkami. Wtenczas, przypuszczając najpierwej $a>0$, gdy x rośnie od $-\infty$ do x', wartość y jest dodatna i maleje od $+\infty$ do 0; potem, gdy x rośnie od x' do $-\frac{b}{2a}$, wartość y jest odjemna i maleje od 0 do $\frac{4ac-b^2}{4}$; następnie, gdy x rośnie od $-\frac{b}{2a}$ do x'', wartość y jest jeszcze odjemna, ale rośnieod $\frac{4ac-b^2}{4a}$ do 0; nareszcie, gdy x rośnie od x'' do ∞, wartość y jest dodatna i powiększa się od 0 aż do $+\infty$.

To wszystko bierze sens przeciwny jeśli $a<0$.

Ale, jakiekolwiek jest a, dodatne albo odjemne, w przypadku pierwiastków rzeczywistych i nierównych, gdy x rośnie od $-\infty$ do $+\infty$, trójmian zmienia dwa razy znak, przechodząc od $+$ do $-$ albo od $-$ do $+$, i staje się zerem za każdą razą.

Oto obraz zmienności trójmianu

$$a>0 \quad b^2-4ac>0$$

x	$-\infty$		x'		$-\frac{b}{2a}$		x''		$+\infty$
y	$+\infty$	dodatne	0	odjemne	$\frac{4ac-b^2}{4a}$	odjemne	0	dodatne	$+\infty$

$$a<0 \quad b^2-4ac>0.$$

x	$-\infty$		x'		$-\frac{b}{2a}$		x''		$+\infty$
y	$-\infty$	odjemne	0	dodatne	$\frac{4ac-b^2}{4a}$	dodatne	0	odjemne	$-\infty$.

PRZYKŁAD. *Dowieśdź że równanie*

$$(A-x)(B-x)-c^2=0,$$

ma zawsze pierwiastki rzeczywiste i nierówne.

Jeśli A=B twierdzenie jest dowiedzione, ponieważ wtedy pierwsza strona równania jest różnicą kwadratów. Przypuśćmy więc że A różni się od B i niech będzie A<B. Owoż, dla $x=-\infty$ pierwsza strona jest dodatna, a dla $x=A$ ta strona jest odjemna; więc równanie ma jeden z pierwiastków zawarty między $-\infty$ i A; Drugi jest zewnątrz. Żeby wiedzieć między jakiemi liczbami, uważamy że $x=B$ daje wynik odjemny, a $x=+\infty$ daje wynik dodatny; ztąd wnosimy że drugi pierwiastek mieści się między B i $+\infty$.

NIERÓWNOŚCI DRUGIEGO STOPNIA.

275. Nierówność jest drugiego stopnia względem x, gdy ma jeden z dwóch kształtów

$$Ax^2+Bx+C>0, \quad Ax^2+Bx+C<0;$$

gdzie A, B, C oznaczają dane liczby dodatne albo odjemne.

Rozwiązać tę nierówność jest to znaleźć granice między któremi powinna się zmieniać niewiadoma x, tak żeby ciągle danej nierówności stawało się zadość.

Przykład I. *Jakie są wartosci dla x które zadość czynią nierówności*

$$\frac{x}{4}+15>2x^2-\frac{9}{4}.$$

Przekształcamy tę nierówność na następujące:

$$x+60>8x^2-9,$$

$$8x^2-x-69<0.$$

Owoż, pierwiastki równania

$$8x^2-x-69=0,$$

są $-\frac{23}{8}$ i 3; więc, ponieważ spółczynnik kwadratu x^2 jest dodatny, trzeba żeby x było zawarte między $-\frac{23}{8}$ i 3, to jest żeby wartość dla x była większa od $-\frac{23}{8}$ ale mniejsza od 3.

Przykład II. *Jaki jest warunek żeby* 0 *mieściło się między pierwiastkami równania*

$$x(x-1)-p(p-1)-q(q-1)-2pq=0?$$

Trzeba żeby, czyniąc $x=0$, było

$$-p(p-1)-q(q-1)-2pq<0,$$

albo

$$p^2+q^2+2pq-p-q>0,$$

albo jeszcze

$$(p+q)(p+q-1)>0.$$

Tej nierówności można uczynić zadość dwoma sposobami, biorąc $p+q-1>0$, albo biorąc $p+q<0$.

Przykład III. *Jakich warunków powinny dopełniać spółczynniki wielomianu*

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F,$$

żeby jego wartość była zawsze dodatna, jakiekolwiek są x *i* y?

Uważając ten wielomian jako trójmian względem x, widzimy łatwo że pierwszym warunkiem jest żeby spółczynnik A był dodatny, a drugim żeby pierwiastki trójmianu względem x były urojone; co prowadzi do nierówności

$$(By+D)^2-A(Cy^2+2Ey+F)<0,$$

albo

$$(B^2-AC)y^2+2(BD-AE)y+D^2-AF<0.$$

Owoż, ostatni trójmian na y zostanie ciągle odjemny, jeśli jest
$B^2-AC<0$ i $(BD-AE)^2-(B^2-AC)(D^2-AF)<0$.
Więc szukane warunki są

$$A>0,\quad B^2-AC<0,$$
$$(BD-AE)^2-(B^2-AC)(D^2-AF)<0.$$

Z dwóch pierwszych wynika że musi być także $C>0$.

Można otrzymać odrazu te trzy warunki, rozkładając wielomianu na kwadraty, to jest dając mu kształt następujący

$$A\left\{\left(x+\frac{By+D}{A}\right)^2+\frac{AC-B^2}{A^2}\left(y+\frac{AE-BD}{AC-B^2}\right)^2\right.$$
$$\left.+\frac{1}{A^2}\left(AF-D^2-\frac{(AE-BD)^2}{AC-B^2}\right)\right\}.$$

Przykład IV. *Znaleźć między jakiemi granicami trzeba zmieniać x żeby zadość uczynić nierówności*

$$\frac{5x^2-8x+4}{7x^2-6x-1}<1.$$

Przywodząc do zera i przewracając nierówność, będzie

$$1-\frac{5x^2-8x+4}{7x^2-6x-1}>0,$$

poczem, dodając i redukując, otrzymujemy

$$\frac{2x^2+2x-5}{7x^2-6x-1}>0.$$

Aby wiedzieć jakie są wartości dla x które dają te same znaki licznikowi i mianownikowi, rozkładamy trójmiany na czynniki, i mamy

$$\frac{(2x+1-\sqrt{11})(2x+1+\sqrt{11})}{(x-1)(7x+1)}>0.$$

Widzimy teraz łatwo że licznik i mianownik będą oba razem dodatne dla wartości x większych od $\frac{\sqrt{11}-1}{2}$, i oba razem odjemne dla wartości x mniejszych od $\frac{-1-\sqrt{11}}{2}$; nadto, licznik i mianownik będą jeszcze oba odjemne, jeśli wartości dla x są zawarte między $-\frac{1}{7}$ i 1.

Więc, uczyni się zadość uważanej nierówności, zmieniając x między $\frac{\sqrt{11}-1}{2}$ i ∞, między $-\infty$ i $-\frac{1+\sqrt{11}}{2}$, nakoniec między $-\frac{1}{7}$ i 1.

RACHUNEK PIERWIASTKÓW RÓWNANIA $ax^2+bx+c=0$, GDY SPÓŁCZYNNIK a JEST BARDZO MAŁY.

276. Gdy spółczynnik a jest dość mały w porównaniu ze spółczynnikiem b, formuła ogólna

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

nie bardzo jest dogodna do obliczania pierwiastków ze znacznem przybliżeniem. Oto dla czego. Zwykle ilość b^2-4ac nie jest kwadratem doskonałym, zatem błąd popełniony na $\sqrt{b^2-4ac}$, będąc podzielony przez $2a$, wzrośnie tem więcej im ta liczba będzie ułamkiem mniejszym. I tak, jeśli $a=0{,}001$, chcąc mieć jeden z pierwiastków na mniej niż $\frac{1}{10^n}$, trzebaby wyrachować $\sqrt{b^2-4ac}$ z przybliżeniem $\frac{1}{10^n}\cdot\frac{1}{2(0{,}001)}$, to jest błąd pochodzący z wyciągania pierwiastku powinien być mniejszy od $\frac{1}{2.10^{n+3}}$. Można często uniknąć tej niedogodności, i otrzymać, na przykład pierwiastek mniejszy, z przybliżeniem dostatecznem, za pomocą tak zwanej *metody przybliżeń po sobie idących*. Znając pierwiastek minejszy, łatwo znaleźć większy; dość tylko odciągnąć już wyrachowany od wiadomej summy dwóch pierwiastków.

Pokazując zasadę metody przybliżeń po sobie idących, żeby zaraz wiedzieć z jakiem przybliżeniem otrzymuje się szukany pierwiastek, rozróżniamy dwa przypadki, według jak pierwiastki mają znaki przeciwne albo te same.

277. Pierwiastki ze znakami przeciwnemi. Można zawsze przypuścić że pierwiastek liczebnie mniejszy jest dodatny; bo, gdyby był odjemny, zamieniając x na $-x$ w danem równaniu przemienionoby znaki jego pierwiastków. W tem założeniu równanie ma kształt

$$(1) \qquad ax^2+bx-c=0,$$

w którym a, b, c są liczbami dodatnemi; i, nazywając x' pierwiastek dodatny będzie

$$x'=\frac{-b+\sqrt{b^2+4ac}}{2a}=\frac{2c}{b+\sqrt{b^2+4ac}}<\frac{c}{b}.$$

Owoż, dla wyrachowania tego pierwiastku, piszemy równanie (1) jako następuje

$$(2) \qquad x=\frac{c}{b}-\frac{ax^2}{b}.$$

pod tym kształtem widzimy że, zaniedbując wyraz $\frac{ax^2}{b}$, otrzymuje się pierwsze przybliżenie które oznaczamy przez x_1,

$$x_1=\frac{c}{b}.$$

Ta pierwsza przybliżona wartość pierwiastku x' jest za wielka, albo jako się mówi, jest *przez zbytek*; jeśli ją podstawimy za x w drugiej stronie równania (2), będziemy mieli drugie przybliżenie

$$x_2=\frac{c}{b}-\frac{ax_1^2}{b}.$$

Wartość x_2 jest za mała, czyli *przez niedostatek*, ponieważ $x_1>x'$; więc, podstawiając x_2 w drugiej stronie równania (2), znajdziemy trzecią wartość pierwiastku x' przybliżoną przez zbytek,

$$x_3=\frac{c}{b}-\frac{ax_2^2}{b}.$$

Czwarta przybliżona wartość będzie przez niedostatek

$$x_4=\frac{c}{b}-\frac{ax_3^2}{b}.$$

I tak dalej; podstawiając zawsze w drugiej stronie równania (2) ostatnią wyrachowaną wartość.

Ale, żeby tak wyznaczone wartości zbliżały się do prawdziwej, powinny być wszystkie dodatne. Bo, gdyby na przykład wartość x_2 była odjemna, toby się oddalała od pierwiastku x' więcej niż 0 i x_1, między któremi ten pierwiastek jest zawarty. Trzeba więc najpierwej żeby było

$$x_2=\frac{c}{b}-\frac{ax_1^2}{b}=\frac{c}{b}\left(1-\frac{ac}{b^2}\right)>0;$$

co wymaga

$$(3)\qquad \frac{ac}{b^2}<1.$$

Jeśli temu warunkowi staje się zadość, będzie

$$x_1<x_3>x',$$

dlatego że jest oczywiście

$$\frac{c}{b} > \frac{c}{b} - \frac{ax_2^2}{b} > \frac{c}{b} - \frac{ax'^2}{b};$$

będzie także

$$x_2 < x_4 < x',$$

dlatego że jest

$$\frac{c}{b} - \frac{ax_1{}^2}{b} < \frac{c}{b} - \frac{ax_3^2}{b} < \frac{c}{b} - \frac{ax'^2}{b}.$$

Tak postępując, widzimy że wartości wskazów nieparzystych są przybliżone do x' przez zbytek, i maleją

$$x_1 > x_3 > x_5 \ldots > x',$$

a wartości wskazów parzystych są przybliżone do x' przez niedostatek, i rosną

$$x_2 < x_4 < x_6 \ldots < x'.$$

Nietrudno teraz ocenić błąd wartości przybliżonej na której chcemy poprzestać. I tak, błąd popełniony na pierwszej wartości x_1, przybliżonej przez zbytek, jest

$$x_1 - x' = \frac{ax'^2}{b} < \frac{ac^2}{b^3}.$$

Błąd popełniony na drugiej wartości x_2, przybliżonej przez niedostatek, wyraża się przez

$$x' - x_2 = \left(\frac{c}{b} - \frac{ax'^2}{x}\right) - \left(\frac{c}{b} - \frac{ax_1{}^2}{b}\right) = \frac{a}{b}(x_1^2 - x'^2),$$

albo

$$x' - x_2 = \frac{a}{b}(x_1 + x')(x_1 - x').$$

Owoż,

$$x_1 = \frac{c}{b}, \quad x' < \frac{c}{b};$$

więc

$$x'-x_2<\frac{2ac}{b^2}(x_1-x').$$

Otrzymuje się następnie

$$x_3-x'<\frac{2ac}{b^2}(x'-x_2)$$

$$x'-x_4<\frac{2ac}{b^2}(x_3-x')$$

....

$$x_n-x'<\frac{2ac}{b^2}(x'-x_{n-1})$$

jeśli n jest nieparzyste.

Mnożąc stronami te n nierówności, będzie

$$x_n-x'<\frac{ac^2}{b^3}\left(\frac{2ac}{b^2}\right)^{n-1}$$

albo, uważając że $\frac{ac^2}{b^3}=\frac{2ac}{b^2}\cdot\frac{c}{2b}$, będzie ostatecznie

$$x_n-x'<\frac{c}{2b}\left(\frac{2ac}{b^2}\right)^n.$$

Gdy n jest parzyste, dowiedzie się podobnie że

$$x'-x_n<\frac{c}{2b}\left(\frac{2ac}{b^2}\right)^n.$$

Więc, jeśli $\frac{2ac}{b^2}<1$, będzie zawsze można wziąć n dostatecznie wielkie, żeby potęga $\left(\frac{2ac}{b^2}\right)^n$ była tak mała jak się podoba, i takie jeszcze żeby różnica między wartością przybliżoną x_n i prawdziwą x' była mniejsza od ilości naznaczonej. Ten warunek zawiera już pierwszy $\frac{ac}{b^2}<1$. Ale na tem nie dosyć. Żeby metoda była korzystna, trzeba żeby ilość $\frac{2ac}{b^2}$ była przyzwoicie małym ułamkiem; bo tylko wtedy wartości x_1, x_2, $x_3, \ldots x_n$ przybliżają się szybko do prawdziwej x'.

Przykład. *Znaleźć pierwiastek dodatny równania*

$$0{,}000003x^2+5x-100=0,$$

z dwunastoma dziesiętnemi.

Przede wszystkiem trzeba się zapewnić czy metoda ułatwia rachunek. Owoż, mamy

$$\frac{2ac}{b^2}=\frac{0{,}006}{25}<\frac{1}{4.10^4};$$

stosujemy więc metodę przybliżeń po sobie idących, i znajdujemy pierwszą wartość

$$x_1=20.$$

która jest przybliżona przez zbytek. Gdyby się na niej zatrzymano, błąd byłby mniejszy od

$$\frac{1}{4.10^4}\cdot\frac{100}{2.5}=\frac{1}{4.10^3}.$$

Druga wartość

$$x_2=20-\frac{0{,}000003}{5}.20^2=19{,}99976,$$

jest przybliżona przez niedostatek na mniej niż $\frac{1}{10^8}$.

Trzecia wartość

$$x_3=20-\frac{0{,}000003}{5}(19{,}99976)^2=19{,}9997600057599\ldots$$

jest przybliżona przez zbytek na mniej niż $\frac{1}{6.10^{12}}$.

Mamy więc pierwiastek dodatny x', wyrachowany z dwunastoma dziesiętnemi

$$x'=19{,}999760005759\ldots$$

Gdyby wyrachowano następującą wartość, cyfry spólne dwóch wartości zawierających prawdziwą pokazałyby ile znaleziono cyfer dokładnych.

Aby mieć drugi pierwiastek zadanego równania, uważamy że summa dwóch pierwiastków równa się liczbie

$$\frac{5}{0,000003}=\frac{5000000}{3},$$

od tej summy odciągamy wartość x', i otrzymujemy

$$x''=1666646,666906660906\ldots$$

278. Oba pierwiastki z temi samemi znakami. Gdy oba pierwiastki mają te same znaki, można je zawsze przypuścić dodatne; bo, gdyby były odjemne, zmieniając x na $-x$ w równaniu, przemienionoby znaki jego pierwiastków. Będziemy więc uważali równanie którego oba pierwiastki są dodatne. To równanie przedstawia się w kształcie

$$(1)\qquad ax^2-bx+c=0,$$

w którym a, b, c są liczbami dodatnemi; zatem, nazywając x' pierwiastek mniejszy, mamy

$$x'=\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{2c}{b+\sqrt{b^2-4ac}}.$$

Ostatnie wyrażenie pokazuje że pierwiastek x' jest zawarty między $\frac{c}{b}$ i $\frac{2c}{b}$.

Dla wyrachowania tego pierwiastku, dajemy równaniu (1) kształt formuły

$$(2)\qquad x=\frac{c}{b}+\frac{ax^2}{b}.$$

Owoż, jeśli zaniedbamy wyraz dodatny $\frac{ax^2}{b}$, pierwsza przybliżona wartość pierwiastku x', którą oznaczony przez x_1, będzie

$$x_1=\frac{c}{b}.$$

Ta wartość jest oczywiście przez niedostatek; zatem, podstawiając ją w drugiej stronie równania (2), otrzymujemy drugą przybliżoną wartość x_2 większą od x_1, ale także przez niedostatek,

$$x_2=\frac{c}{b}+\frac{ax_1^2}{b}.$$

Następnie, podstawiając x_2 w drugiej stronie równania (2), znajdujemy trzecią wartość x_3 większą od x_2, i przybliżoną przez niedostatek jako poprzedzające,

$$x_3=\frac{c}{b}+\frac{ax_2^2}{b}.$$

I tak dalej postępując, wyznaczamy ciąg wartości coraz większych, przybliżonych zawsze przez niedostatek do prawdziwej x', to jest

$$x_1<x_2<x_3\ldots<x'.$$

Szukajmy teraz jaki jest błąd, gdy się bierze jedną z wartości przybliżonych x_1, x_2, $x_3\ldots$ za dokładną x'.

Poprzestając na pierwszej wartości x_1, popełniamy błąd wyrażony przez

$$x'-x_1=\left(\frac{c}{b}+\frac{ax'^2}{b}\right)-\frac{c}{b}=\frac{ax'^2}{b};$$

a że $\qquad x'<\dfrac{2c}{b}, \qquad$ więc

$$x'-x_2<\frac{4ac}{b^2}\times\frac{c}{b}.$$

Żeby ocenić błąd popełniony na drugiej wartości x_2, uważajmy że

$$x'-x_2=\left(\frac{c}{b}+\frac{ax'^2}{b}\right)-\left(\frac{c}{b}+\frac{ax_1^{\,2}}{b}\right)=\frac{a}{b}(x'+x_1)(x'-x_1).$$

Ale $\quad x'<\frac{2c}{b},\quad x_1=\frac{c}{b},\quad$ więc

$$x'-x_2<\frac{3ac}{b^2}(x'-x_1),$$

albo

$$x'-x_2<\frac{3}{4}\times\frac{4ac}{b^2}(x'-x_1),$$

i tem bardziej

$$x'-x_2<\frac{4ac}{b}(x'-x\ ).$$

Trzecia przybliżona wartość x_3 różni się od prawdziwej x ilością

$$x'-x_3=\frac{a}{b}(x'+x_2)(x'-x_2);$$

a ponieważ $\quad x_2<x'<\frac{2c}{b},\quad$ będzie

$$x'-x_3<\frac{4ac}{b^2}(x'-x_2),$$

Tak samo

$$x'-x_4<\frac{4ac}{b^2}(x'-x_3),$$

....

....

$$x'-x_n<\frac{4ac}{b^2}(x'-x_{n-1}).$$

Więc, jeśli pomnożymy stronami wszystkie n nierówności, otrzymamy ogólnie

$$x'-x_n<\frac{c}{b}\left(\frac{4ac}{b}\right)^n.$$

Gdy $n>1$, ponieważ $x'-x_1<\frac{3}{4}\times\frac{4ac}{b^2}(x'-x_1)$ będzie

$$x'-x_n<\frac{3}{4}\times\frac{c}{b}\left(\frac{4ac}{b^2}\right)^n.$$

Owoż $\frac{4ac}{b^2}<1$, dlatego że pierwiastki są rzeczywiste z założenia; więc, biorąc n dostatecznie wielkie, można otrzymać wartość x_n z błędem mniejszym od ilości naprzód naznaczonej. Ale, żeby metoda przybliżeń po sobie idących była korzystna, trzeba żeby ułamek $\frac{4ac}{b^2}$ był należycie mały; bo tylko wtedy wartości $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ przybliżają się szybko do wartości szukanej x'.

Przykład. *Wyrachować pierwiastek mniejszy równania*

$$3x^2-9360x+200=0,$$

na mniej niż $\frac{1}{10^{10}}$.

Mamy najpierwej

$$\frac{4ac}{b^2}=\frac{4.3.200}{9360^2}<\frac{1}{3.10^4},$$

$$\frac{c}{b}=\frac{200}{9360}=0{,}0213675213675\ldots<\frac{3}{10^2};$$

więc

$$x'-x_1<\frac{1}{10^6}.$$

Ztąd wnosimy że wartość

$$x_1=0{,}0213675213675\ldots$$

jest przybliżona do prawdziwej x' przez niedostatek, na mniej niż jedność 6go rzędu dziesietnego.

Szukajmy następującej wartości x_2. Tą razą błąd przybliżenia jest

$$x'-x_2<\frac{3}{4}\times\frac{4ac}{b^2}(x'-x_1)<\frac{1}{4.10^{10}}.$$

Jeśli więc obliczymy $\frac{c}{b}$ i $\frac{ax_1^2}{b}$ na mniej niż $\frac{1}{10^{11}}$, różnica między prawdziwą wartością x' i przybliżoną x_2, będzie mniejsza od $\frac{1}{4.10^{10}}+\frac{2}{10^{11}}$; a tem bardziej mniejsza od $\frac{1}{2.10^{10}}$.

Owoż

$$\frac{c}{b}=0{,}02136752136\ldots$$

$$\frac{ax_1{}^2}{b}=0{,}00000001507\ldots$$

więc wartość pierwiastku x' jest

$$0{,}02136753743\ldots$$

przez niedostatek, na mniej niż $\frac{1}{2.10^{10}}$.

Ponieważ summa dwóch pierwiastków zadanego równania jest $\frac{9360}{3}=3120$, drugi pierwiastek ma wartość przybliżoną

$$3119{,}97863246257\ldots$$

na mniej niż $\frac{1}{10^{10}}$.

ĆWICZENIA

I. Znaleźć między jakiemi granicami trzeba zmieniać x, żeby jego wartości sprawdzały nierówność

$$\frac{4x^2-5x-1}{2x^2-5x+3}>1.$$

Odpowiedź: między $-\infty$ i $-\sqrt{2}$, między 1 i $\sqrt{2}$, i nadto między $\frac{3}{2}$ i $+\infty$.

II. Mędzy jakiemi granicami ma się zmieniać x, żeby zadość czyniło nierówności

$$\frac{2x^2-3x+1}{5x^2+6x-9}>1.$$

Odpowiedź: między $\frac{-9-\sqrt{201}}{6}$ i $\frac{-3-3\sqrt{6}}{5}$.

III. Jakie wartości dawać zmiennej x żeby było

$$\frac{5x^2-8x+3}{x^2+2x-3}<3.$$

Odpowiedź: $-3<x<6$, po odjęciu spólnego czynnika $x-1$.

IV. Jakie brać wartości dla x żeby sprawdzały podwójną nierówność

$$-1<\frac{x^2-2x+17}{5x^2+14x+8}<+1.$$

Odpowiedź: wartości dla x powinny być zawarte między $-\infty$ i $-\frac{9}{2}$ albo między $\frac{1}{2}$ i $+\infty$.

V. Jakich warunków powinno dopełniać α żeby $-\frac{1}{2}$ było zawarte między pierwiastkami równania

$$x(x+1)(\alpha^2+3\alpha+3)+\alpha^2=0.$$

Odpowiedź: Trzeba żeby wynik podstawienia $x=-\frac{1}{2}$ był odjemny; co daje $-\frac{1}{4}(\alpha^2+3\alpha+3)+\alpha^2<0$. Zkąd

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2}<\alpha<\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

VI. Rozwiązać równanie

$$3x^2-7640x+400=0.$$

na mniej niż $\frac{1}{10^9}$.

Odpowiedź: $x'=0,052357097$, $x''=2546,614309569....$

VII. Znaleźć pierwiastek dodatny równania

$$0,000007x^2+x-1=0$$

z dwunastoma dziesiętnemi.

Odpowiedź: 0,999993000147.

ROWNANIA PRZYWIEDNE DO DRUGIEGO STOPNIA.

RÓWNANIA DWUKWADRATOWE.

279. Równanie o jednej niewiadomej nazywa się *dwukwadratowem*, gdy zawiera tylko kwadrat i czwartą potęgę tej niewiadomej. Jego kształt ogólny jest

$$ax^4+bx^2+c=0.$$

Rozwiązywanie tego równania przywodzi się do rozwiązywania równania drugiego stopnia. Jakoż, czyniąc $x^2=y$ i podstawiając, otrzymujemy

$$ay^2+by+c=0;$$

zkąd

$$y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

A ponieważ x jest pierwiastkiem kwadratowym niewiadomej y, będzie

$$x = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}}.$$

To dowodzi że równanie czwartego stopnia dwukwadratowe ma cztery pierwiastki, równe po dwa i znaków przeciwnych.

280. Dyskussya. 1° Jeśli $b^2-4ac>0$, równanie na y ma pierwiastki rzeczywiste, oba dodatne albo oba odjemne, albo ze znakami przeciwnemi. W pierwszym przypadku cztery wartości dla x są rzeczywiste, w drugim te wartości są urojone, w trzecim dwie wartości są rzeczywiste i dwie urojone.

2° $b^2-4ac=0$. Równanie na y ma pierwiastki rzeczywiste i równe, dodatne albo odjemne według znaku ich summy $-\frac{b}{a}$; zatem wartości dla x są po dwie równe i znaków przeciwnych, w pierwszym przypadku rzeczywiste w drugim urojone.

3° $b^2-4ac<0$. Pierwiastki równania na y są urojone; zatem wszystkie cztery wartości dla x są urojone.

Przykład I. *Rozwiązać równanie*

$$3x^4-16x^2+16=0.$$

Mamy

$$y=\frac{8\pm\sqrt{64-48}}{3}=\frac{8\pm4}{3};$$

co daje

$$y'=\frac{4}{3} \quad \text{i} \quad y''=4.$$

Więc

$$x=\pm\frac{2}{3}\sqrt{3} \quad \text{i} \quad x=\pm2.$$

PRZYKŁAD II. *Rozwiązać równanie*

$$4x^4 - 12x^2 + 9 = 0.$$

Pierwiastki równania na y są równe oba liczbie $\frac{3}{2}$; więc dwie wartości dla x są $\frac{1}{2}\sqrt{6}$, a dwie inne $-\frac{1}{2}\sqrt{6}$.

PRZYKŁAD III. *Rozwiązać równanie*

$$5x^4 + 8x^2 + 3 = 0.$$

Obie wartości y są odjemne, $y = \frac{-4 \pm 1}{5}$; zkąd $y' = -\frac{3}{5}$, $y'' = -1$. Więc wartości dla x są wszystkie cztery urojone

$$x = \pm\frac{1}{5}\sqrt{5}\sqrt{-1}, \quad x = \pm\sqrt{-1}.$$

PRZYKŁAD IV. *Rozwiązać równanie*

$$4x^4 + 4x^2 - 15 = 0.$$

Wartości y mają znaki przeciwne, $y = \frac{-2 \pm 8}{4}$; zkąd $y' = \frac{3}{2}$, $y'' = -\frac{5}{2}$. Więc wartości x, po dwie równe i znaków przeciwnych, są dwie rzeczywiste i dwie urojone.

$$x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{6}, \quad x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{10}\sqrt{-1}.$$

PRZYKŁAD V. *Rozwiązać równanie*

$$x^4 + x^2 + 1 = 0.$$

Obie wartości y są urojone, $y = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}$; więc wszystkie cztery wartości x są urojone.

281. Można rozwiązać równanie dwukwadratowe innym

sposobem gdy $\frac{c}{a}>0$. Jakoż, uzupełniając kwadrat wyrazów skrajnych trójmianu, mamy

$$a\left(x^4+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}\right)=a\left\{\left(x^2+\sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2+x^2\left(\frac{b}{a}-2\sqrt{\frac{c}{a}}\right)\right\}=0;$$

zkąd wynika

$$x^2+\sqrt{\frac{c}{a}}=\pm x\sqrt{-\frac{b}{a}+2\sqrt{\frac{c}{a}}},$$

albo

$$x^2\mp x\sqrt{-\frac{b}{a}+2\sqrt{\frac{c}{a}}}+\sqrt{\frac{c}{a}}=0.$$

Rozwiązując to równanie drugiego stopnia, otrzymujemy

$$x=\pm\frac{1}{2}\left\{\sqrt{-\frac{b}{a}+2\sqrt{\frac{c}{a}}}\pm\sqrt{-\frac{b}{a}-2\sqrt{\frac{c}{a}}}\right\}.$$

To drugie wyrażenie pierwiastków równania dwukwadratowego, zawilsze od pierwszego, wtedy mianowicie jest użyteczne kiedy $\frac{c}{a}$ jest kwadratem doskonałym.

282. Uwaga. *Trójmian dwukwadratowy* ax^4+bx^2+c *może się zawsze rozłożyć na dwa czynniki rzeczywiste drugiego stopnia.*

Jakoż, 1° jeśli $b^2-4ac>0$, będzie

$$ax^4+bx^2+c=a\left\{\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right\};$$

więc

$$ax^4+bx^2+c=a\left(x^2+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x^2+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right).$$

Aby otrzymać ten wynik, trzeba zrównać trójmian do zera, i biorąc x^2 za niewiadomę, rozwiązać równanie; poczem, odciągnąć każdy z dwóch pierwiastków od x^2, i wyrazić wieloczyn dwóch różnic pomnożony przez spółczynnik a.

2° $b^2-4ac=0$. W tym szczególnym przypadku czynniki drugiego stopnia są równe, i trójmian dwukwadratowy jest kwadratem pomnożonym przez spółczynnik a, to jest

$$ax^4+bx^2+c=a\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)^2.$$

3° Jeśli $b^2-4ac<0$, będzie $\frac{c}{a}>0$ i $2\sqrt{\frac{c}{a}}>\frac{b}{a}$; wtedy

$$ax^4+bx^2+c=a\left\{\left(x^2+\sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2-x^2\left(2\sqrt{\frac{c}{a}}-\frac{b}{a}\right)\right\};$$

więc

$$ax^4+bx^2+c=$$

$$=a\left(x^2-x\sqrt{2\sqrt{\frac{c}{a}}-\frac{b}{a}}+\sqrt{\frac{c}{a}}\right)\left(x^2+x\sqrt{2\sqrt{\frac{c}{a}}-\frac{b}{a}}+\sqrt{\frac{c}{a}}\right).$$

Przykład. *Rozłożyć na czynniki drugiego stopnia trójmiany*

(1) $4x^4-25x^2+36$,

(2) x^4-x^2-6,

(3) x^4+5x^2+4.

Równając pierwszy trójman do zera i rozwiązując na x^2, otrzymujemy $x^2=\frac{25\pm 7}{8}$; zatem

$$4x^4-25x^2+36=4(x^2-4)\left(x^2-\frac{9}{4}\right);$$

zkąd

$$4x^4-25x^2+36=(x-2)(x+2)(2x-3)(2x+3).$$

Owoż, ostatni wieloczyn może się wyrazić przez każdy z trzech wieloczynów :

$$(x^2-4)(4x^2-9),\quad (2x^2-7x+6)(2x^2+7x+6),$$
$$(2x^2-x-6)(2x^2+x-6);$$

więc trójmian dwukwadratowy, mający wszystkie cztery pierwiastki rzeczywiste, może się rozłożyć trzema sposobami na dwa czynniki drugiego stopnia.

Trójmiany (2) i (3), mające pierwiastki rzeczywiste i urojone albo same urojone, rozkładają się tylko jednym sposobem na dwa czynniki drugiego stopnia, to jest dają wieloczyny

$$(x^2+2)(x^2-3) \quad \text{i} \quad (x^2+1)(x^2+4).$$

PRZEKSZTAŁCENIA WYRAŻEŃ $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$.

283. Rozwiązywanie równań dwukwadratowych prowadzi do wyrażeń kształtu $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$, w których są dwa pierwiastniki położone jeden na drugim. Chodzi o to żeby wiedzieć czy takie wyrażenia nie dadzą się przekształcić na prostsze, mające pierwiastniki pojedyncze. Owoż, podnosząc do kwadratu dwumian $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, otrzymujemy tosamość

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+b+2\sqrt{ab}=(a+b)+\sqrt{4ab}$$

której druga strona ma właśnie kształt $A+\sqrt{B}$; więc nawzajem

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}\,;$$

trzeba tylko znaleźć związki między a, b i A, B.

To wiedząc, szukajmy ogólnie pod jakiemi warunkami przekształcenie jest możebne, i połóżmy tosamość

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}\,,$$

w której A, B i x, y są ilościami spółmiernemi dodatnemi, ale B nie jest kwadratem doskonałym.

Przypuszczając pierwiastniki arytmetyczne, możemy podnieść do kwadratu obie strony tosamości; co daje

$$A+\sqrt{B}=x+y+2\sqrt{xy}.$$

W tej nowej tosamości pierwiastnik $2\sqrt{xy}$ jest ilością niespółmierną, równą pierwiastnikowi $\sqrt{B}$. Jakoż, odosobniając ilość $2\sqrt{xy}$ i podnosząc obie strony do kwadratu, otrzymujemy równość

$$4xy=(A-x-y)^2+2(A-x-y)\sqrt{B}+B,$$

która dowedzi że musi być $A-x-y=0$; bo inaczej pierwiastnik $\sqrt{B}$, z założeniu niespółmierny, byłby równy ilości spółmiernej; co niedorzeczne. Mamy więc dwie oddzielne równości

$$x+y=A, \quad \text{i} \quad 2\sqrt{xy}=\sqrt{B} \quad \text{albo} \quad 4xy=B.$$

Znając summę i wieloczyn dwóch ilości x i y, wiemy że one są pierwiastkami równania drugiego stopnia

$$u^2-Au+\frac{B}{4}=0;$$

zkąd wynika $$u=\frac{A\pm\sqrt{A^2-B}}{2}.$$

Zatem $$x=\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2} \quad \text{i} \quad y=\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}.$$

Ale żądane przekształcenie wymaga żeby wartości dla x i dla y były spółmierne; co się nie zdarza tylko wtedy kiedy różnica A^2-B jest kwadratem doskonałym. Przypuszczając że tak jest, uczyńmy $A^2-B=k^2$, i podstawmy ztąd wynikające wartości x i y w założonej tosamości, otrzymamy szukane przekształcenie

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+k}{2}}+\sqrt{\frac{A-k}{2}}.$$

Tym samym sposobem przekształca się wyrażenie $\sqrt{A-\sqrt{B}}$. Trzeba oczywiście położyć

$$\sqrt{A-\sqrt{B}}=\sqrt{x}-\sqrt{y},$$

aby, po podniesieniu obydwóch stron do kwadratu, części niespółmierne miały te same znaki. Będzie najpierwej

$$A-\sqrt{B}=x+y-2\sqrt{xy},$$

i potem

$$x+y=A, \quad 4xy=B.$$

Więc, działając jako wyżej, znajdujemy

$$\sqrt{A-\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+k}{2}}-\sqrt{\frac{A-k}{2}}.$$

284. Jeśli ilość A jest odjemna ale A^2-B kwadratem doskonałym, wtedy podwójny pierwiastnik $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$ jest urojony i może się przekształcić na prostszy. Jakoż, mamy

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{-A\mp\sqrt{B}}\sqrt{-1},$$

a ponieważ $-A>0$ i $A^2-B=k^2$, będzie

$$\sqrt{-A\mp\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{-A+k}{2}}\mp\sqrt{\frac{-A-k}{2}}.$$

Więc

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\left(\sqrt{\frac{-A+k}{2}}\mp\sqrt{\frac{-A-k}{2}}\right)\sqrt{-1},$$

albo

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A-k}{2}}\mp\sqrt{\frac{A+k}{2}}.$$

Stosując tę formułę do wyrażenia $\sqrt{-3+\sqrt{5}}$, znajdujemy przekształcenie

$$\sqrt{-3+\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{-3-2}{2}}-\sqrt{\frac{-3+2}{2}}=\sqrt{-\frac{5}{2}}-\sqrt{-\frac{1}{2}}.$$

albo

$$\sqrt{-3+\sqrt{5}}=\frac{1}{2}(\sqrt{10}-\sqrt{2})\sqrt{-1}.$$

285. Gdy ilość A^2-B nie jest kwadratem doskonałym, wartości x i y nie są spółmierne, i już nie dają prostego przekształcenia; mimo to jednak, otrzymuje się zawsze podwójną tosamość

$$\pm\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\pm\left(\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}\right),$$

w której A i B są wyraźnie ilościami dodatnemi i $A^2-B>0$; znaki $\pm$ odpowiedają sobie zewnątrz i wewnątrz dwóch stron tosamości.

286. Uwaga. Szukajmy pod jakiemi warunkami można przekształcić podwójny pierwiastnik kwadratowy urojony $\sqrt{A\pm\sqrt{-B}}$, na dwa pierwiastniki pojedyncze, i załóżmy że istnieje tosamość

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}\sqrt{-1}}=\sqrt{x}\pm\sqrt{y}\sqrt{-1},$$

w której wszystkie cztery ilości A,B,x,y są spółmierne, i wyraźnie dodatne.

Przez równość do której wchodzą ilości rzeczywiste i urojone, trzeba rozumieć że ilości rzeczywiste są równe między sobą, i ilości urojone także równe między sobą.

Przypuszczając pierwiastniki dodatne, możemy podnieść do kwadratu obie strony tosamości, i będzie

$$A\pm\sqrt{B}\sqrt{-1}=x-y\pm2\sqrt{xy}\sqrt{-1}.$$

Więc, na mocy określenia równości dwóch wyrażeń urojonych, powinno być

$$x=y=A \quad \text{i} \quad 4xy+B.$$

Te dwa równania można pisać jako następuje

$$x+(-y)=A, \quad x(-y)=-\frac{B}{4}.$$

Pod tym kształtem widzimy że niewiadome x i $-y$ są dwoma pierwiastkami równania drugiego stopnia

$$u^2-Au-\frac{B}{4}=0, \qquad \text{które daje} \qquad u=\frac{A\pm\sqrt{A^2+B}}{2}.$$

Będzie więc $\quad x=\dfrac{A+\sqrt{A^2+B}}{2}, \quad y=\dfrac{\sqrt{A^2+B}-a}{2}.$

Podstawiając te wartości, mamy szukane przekształcenie

$$\sqrt{A\pm\sqrt{-B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2+B}}{2}}\pm\sqrt{\frac{\sqrt{A^2+B}-A}{2}}\sqrt{-1},$$

które wtedy tylko jest istotnie proste kiedy summa A^2+B jest kwadratem doskonałym; ale zawsze dowodzi że pierwiastek kwadratowy z ilości kształtu $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ zachowuje ten sam kształt. Co jest ważnym wynikiem.

Ponieważ $A>0$ i $\sqrt{A^2+B}-A>0$, będzie ogólnie

$$\pm\sqrt{A\pm\sqrt{-B}}=\pm\left(\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2+B}}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2+B}}{2}}\right).$$

Ale, jeśli $A<0$, trzeba wziąć

$$\sqrt{A\pm\sqrt{-B}}=\sqrt{-A\mp\sqrt{-B}}\sqrt{-1}$$

$$=\left(\sqrt{\frac{-A+\sqrt{A^2+B}}{2}}\mp\sqrt{\frac{-A-\sqrt{A^2+B}}{2}}\right)\sqrt{-1}.$$

Więc wtedy

$$\sqrt{A\pm\sqrt{-B}}=\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2+B}}{2}}\pm\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2+B}}{2}}.$$

Otrzymuje się te dwie formuły tak jako dla podobnych wyrażeń rzeczywistych, ponieważ $A^2+B=A^2-(\sqrt{-B})^2$.

Jeśli $A=0$ i $B=1$, będzie

$$\sqrt{+\sqrt{-1}}=\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}(1+\sqrt{-1})$$

$$\sqrt{-\sqrt{-1}}=\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}(1-\sqrt{-1});$$

zkąd

$$\sqrt{+\sqrt{-1}}+\sqrt{-\sqrt{-1}}=\sqrt{2}.$$

Jest jeszcze ogólniej,

$$\sqrt{\pm k\sqrt{-1}}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{2k}(1\pm\sqrt{-1}).$$

Te wyniki mogą się wprost otrzymać, dość tylko uważać że

$$(1\pm\sqrt{-1})^2=\pm 2\sqrt{-1},$$

więc ogólnie

$$\sqrt{\pm k\sqrt{-1}}=\pm\sqrt{\frac{k}{2}(1\pm\sqrt{-1})^2}=\pm\sqrt{\frac{k}{2}}(1\pm\sqrt{-1}).$$

287. Z tego i z poprzedniego numeru wynika że, jakiekolwiek są dwie ilości A i B, dodatne albo odjemne, żeby podwójny pierwiastnik kwadratowy $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$, rzeczywisty albo urojony, mógł się przekształcić na dwa pojedyncze, trzeba i dość jest żeby różnica kwadratów $A^2-(\sqrt{B})^2$ była kwadratem doskonałym.

Stosując to do formuły

$$x=\pm\sqrt{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}},$$

która daje pierwiastki równania dwukwadratowego

$$ax^4+bx^2+c=0,$$

mamy

$$A=\frac{-b}{2a};\ B=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a};\ \text{zkąd}\ A^2-(\sqrt{B})^2=\frac{c}{a}.$$

Więc, żeby te pierwiastki wyrażały się przez summę dwóch pierwiastników pojedynczych, *warunkiem koniecznym i dostatecznym* jest żeby $\frac{c}{a}$ było kwadratem doskonałym. Jeśli temu warunkowi staje się zadość, będzie

$$x=\pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{-b}{a}+2\sqrt{\frac{c}{a}}}\pm\sqrt{\frac{-b}{a}-2\sqrt{\frac{c}{a}}}\right).$$

Co jest właśnie formułą już otrzymaną innym sposobem.

Rozwiązując za pomocą tej formuły równanie

$$x^4-14x^2+9=0,$$

znajdujemy

$$x=\pm\frac{1}{2}(\sqrt{14+2.3}\pm\sqrt{14-2.3})=\pm(\sqrt{5}\pm\sqrt{2}).$$

Rozwiązując podobnie równanie

$$x^4+8x^2+36=0,$$

otrzymujemy

$$x=\pm\frac{1}{2}(\sqrt{-8+12}\pm\sqrt{-8-12})=\pm(1\pm\sqrt{-5}).$$

288. Zastosowania.

I. *Przekształcić wyrażenie* $\sqrt{7+2\sqrt{6}}$.

Wprowadzając czynnik 2 pod pierwiastnik, dajemy wyrażeniu kształt $\sqrt{7+\sqrt{24}}$. A ponieważ $7^2-24=25$ jest kwadratem doskonałym, przekształcenie jest możebne i mamy

$$\sqrt{7+2\sqrt{6}}=\sqrt{\frac{7+5}{2}}+\sqrt{\frac{7-5}{2}}=\sqrt{6}+1.$$

II. *Przekształcić wyrażenie* $\sqrt{15-\sqrt{176}}$.

Mamy $225-176=49$; będzie więc

$$\sqrt{15-\sqrt{176}}=\sqrt{\frac{15+7}{2}}-\sqrt{\frac{15-7}{2}}=\sqrt{11}-2.$$

III. *Przekształcić wyrażenie* $\sqrt{2x^2+3+\sqrt{4x^2+5}}$.

Mamy $(2x^2+3)^2-(4x^2+5)=4x^4+8x^2+4=4(x^2+1)^2$; więc

$$\sqrt{2x^2+3+\sqrt{4x^2+5}}=\sqrt{\frac{4x^2+5}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(\sqrt{8x^2+10}+\sqrt{2}).$$

IV. *Przekształcić* $\sqrt{\dfrac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}}$.

Ponieważ $\left(\dfrac{-1}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\dfrac{-3}{4}}\right)^2=1$, będzie

$$\sqrt{\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}}=\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\mp\sqrt{-\frac{1}{4}}\right)\sqrt{-1}=\frac{1}{2}(\sqrt{-3}\pm1).$$

289. Można czasem przekształcić potrójny pierwiastnik kwadratowy $\sqrt{A+\sqrt{B+\sqrt{C}}}$ na podwójny. Aby dać przykład bez szukania formuły, uważajmy pierwiastnik $\sqrt{7+2\sqrt{9+\sqrt{3}}}$, i, działając sposobem wyżej podanym, przypuśćmy że istnieje tosamość

$$\sqrt{7+2\sqrt{9+\sqrt{3}}}=\sqrt{x}+\sqrt{y},$$

z której, przez podniesienie do kwadratu, wynikają dwa równania

$$x+y=7,\qquad xy=9+\sqrt{3}.$$

Niewiadome x i y są pierwiastkami równania

$$u^2-7u+9+\sqrt{3}=0,$$

które daje

$$u=\frac{7\pm\sqrt{13-4\sqrt{3}}}{2}.$$

Owoż, jako już wiadomo,

$$\sqrt{13-4\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{13+11}{2}}-\sqrt{\frac{13-11}{2}}=2\sqrt{3}-1;$$

zatem

$$x=\frac{7+2\sqrt{3}-1}{2}=3+\sqrt{3},$$

$$y=\frac{7-2\sqrt{3}+1}{2}=4-\sqrt{3}.$$

Otrzymujemy więc szukane przekształcenie

$$\sqrt{7+2\sqrt{9+\sqrt{3}}}=\sqrt{3+\sqrt{3}}+\sqrt{4-\sqrt{3}}.$$

RÓWNANIA WZAJEMNE 4go STOPNIA

290. Nazywa się *równaniem wzajemnem* równanie które się nie zmienia gdy w niem przemieniono x na $\frac{1}{x}$; zatem, jeśli ma pierwiastek a to ma temsamem *pierwiastek wzajemny* $\frac{1}{a}$. Takiem jest, naprzykład, równanie czwartego stopnia

$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0,$$

w którem wyrazy równo odległe od skrajnych mają spółczynniki równe; bo, przez zamianę x na $\frac{1}{x}$, to równanie staje się

$$\frac{a}{x^4}+\frac{b}{x^3}+\frac{c}{x^2}+\frac{b}{x}+a=0;$$

a ostatnie, jeśli je pomnożymy przez x i przewrócimy porządek wyrazów, jest to samo co zadane.

Rozwiązywanie równań wzajemnych 4go stopnia przywodzi się do rozwiązywania równania 2go stopnia. Jakoż, zbliżając, po dwa, wyrazy równo odległe od skrajnych, możemy dać powyższemu równaniu kształt

$$a(x^4+1)+bx(x^2+1)+cx^2=0,$$

albo, dzieląc przez x^2,

$$1)\qquad a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0.$$

Poczem, jeśli za niewiadomę weźmiemy summę $x+\frac{1}{x}$ dwóch pierwiastków wzajemnych, kładąc

$$2)\qquad x+\frac{1}{x}=y$$

i podnosząc do kwadratu, będzie

$$x^2+2+\frac{1}{x^2}=y^2,$$

zkąd

$$x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2.$$

Przez podstawienie tych wartości równanie (1) staje się

$$ay^2+by-2a+c=0.$$

To równanie wyznacza dwie wartości y' i y'', które, poniesione do równania (2), dostarczają dwóch równań

$$x+\frac{1}{x}=y' \quad \text{i} \quad x+\frac{1}{x}=y'',$$

albo

$$x^2-y'x+1=0,$$

$$x^2-y''x+1=0.$$

Każde z ostatnich równań daje dwie wartości dla x,

$$\frac{y'\pm\sqrt{y'^2-4}}{2} \quad \text{i} \quad \frac{y''\pm\sqrt{y''^2-4}}{2}.$$

Jeśli wartości y są rzeczywiste, wtedy, według jak obie przewyższają 2, albo tylko jedna, albo nawet żadna, wartości x są wszystkie cztery rzeczywiste, albo tylko dwie, albo żadna. A jeśli wartości y są urojone, wszystkie wartości x są także urojone.

Przykład I. *Rozwiązać równanie wzajemne*

$$6x^4+5x^3-38x^2+5x+6=0.$$

Piszemy je w kształcie

$$6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-38=0,$$

i kładziemy
$$x+\frac{1}{x}=y;$$

zkąd
$$x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2.$$

Podstawiając te wartości, mamy równanie na y

$$6y^2+5y-50=0,$$

które daje
$$y=\frac{-5\pm\sqrt{1225}}{12}=\frac{-5\pm35}{12};$$

zkąd

$$y'=\frac{5}{2},\quad y''=-\frac{10}{3}.$$

Wartości dla x, dane przez formułę

$$x=\frac{y\pm\sqrt{y^2-4}}{2},$$

są rzeczywiste: $2,\ \frac{1}{2},\ -3,\ -\frac{1}{3}$.

Przykład II. *Rozwiązać równanie wzajemne*

$$x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = 0.$$

Dajemy mu kształt

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 3 = 0,$$

i kładziemy $x + \frac{1}{x} = y$; zkąd $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$.

Podstawiając te wartości, otrzymujemy równanie na y

$$y^2 - 2y + 1 = 0,$$

które ma pierwiastek podwójny $y = 1$.

Będzie zatem równanie.

$$x^2 - x + 1 = 0,$$

którego pierwiastki urojone

$$\left(\frac{1 + \sqrt{-3}}{2}\right) \quad \text{i} \quad \left(\frac{1 - \sqrt{-3}}{2}\right)$$

są pierwiastkami podwójnemi zadanego równania.

Ztąd wynika że trójmian $x^2 - x + 1$ jest pierwiastkiem kwadratowym wielomianu

$$x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1.$$

Przykład III. *Rozwiązać równanie wzajemne*

$$10x^4 - 37x^3 + 50x^2 - 37x + 10 = 0.$$

Mamy

$$10\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 37\left(x + \frac{1}{x}\right) + 50 = 0,$$

$$x + \frac{1}{x} = y.$$

Będzie zatem

$$10y^2-37y+30=0;$$

zkąd

$$y'=\frac{6}{5},\quad y''=\frac{5}{2}.$$

Pierwiastkowi $\frac{5}{2}$ odpowiedają dla x dwie wartości rzeczywiste wzajemne 2 i $\frac{1}{2}$; tak samo, pierwiastkowi $\frac{6}{5}$ odpowiedają dwie wartości dla x także wzajemne, ale urojone

$$\frac{3+4\sqrt{-1}}{5} \text{ i } \frac{3-4\sqrt{-1}}{5}.$$

Przykład IV. *Rozwiązać równanie wzajemne*

$$x^4+x^3+x^2+x+1=0.$$

Dzieląc przez x^2, mamy

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)+1=0.$$

Podstawienie $x+\frac{1}{x}=y$ daje

$$y^2+y-1=0,$$

zkąd

$$y'=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\quad y''=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

Ponieważ kwadraty tych wartości są mniejsze od 4, wszystkie wartości dla x są urojone.

$$\frac{-1+\sqrt{5}\pm\sqrt{10+2\sqrt{5}}\sqrt{-1}}{4},\qquad \frac{-1-\sqrt{5}\pm\sqrt{10-2\sqrt{5}}\sqrt{-1}}{4},$$

PRZYKŁAD V. *Rozwiązać równanie wzajemne*

$$2x^4-3x^3+8x^2-3x+2=0.$$

Dając temu równaniu kształt

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-3\left(x+\frac{1}{x}\right)+8=0,$$

i potem podstawiając $x+\frac{1}{x}=y$, mamy równanie

$$2y^2-3y+4=0,$$

którego pierwiastki są urojone. Więc równanie zadane nie ma pierwiastków rzeczywistych.

291. Równania stopnia parzystego, których wyrazy równo odległe od skrajnych mają spółczynniki równe i znaków przeciwnych, są także równaniami wzajemnemi jeśli im brakuje wyrazu środkowego. Takiem jest, na przykład, równanie 6^{go} stopnia

$$ax^6+bx^5-cx^4+cx^2-bx-a=0.$$

Żeby się o tem przekonać, zamieńmy x na $\frac{1}{x}$, będzie

$$\frac{a}{x^6}+\frac{b}{x^5}-\frac{c}{x^4}+\frac{c}{x^2}-\frac{b}{x}-a=0;$$

zkąd, znosząc mianowniki, przewracając porządek wyrazów i zmieniając znaki, otrzymujemy zadane równanie; więc jego pierwiastki są wzajemne.

Aby rozwiązać to równanie, zbliżamy, po dwa, wyrazy równo odległe od skrajnych, i mamy

$$a(x^6-1)+bx(x^3-1)-cx^2(x^2-1)=0.$$

Pod tym kształtem widzimy łatwo że pierwsza strona równania jest podzielna przez x^2-1. Więc zadane równanie rozkłada się na dwa

$$x^2-1=0, \qquad ax^4+bx^3+(a+c)x^2+bx+a=0.$$

Pierwsze daje dwa pierwiastki ± 1; drugie jest równaniem wzajemnem 4^{go} stopnia, które już rozwiązywać umiemy.

292. Są jeszcze równania czwartego stopnia mające pierwiastki wzajemne ze znakami przeciwnemi, które się rozwiązują za pomocą równania drugiego stopnia. W tych równaniach wyrazy równo odległe od skrajnych mają spółczynniki równe, i do tego jeszcze wszystkie wyrazy stopnia parzystego, albo wszystkie stopnia nieparzystego, mają spółczynniki ze znakami przeciwnemi. Takiem jest, na przykład, równanie

$$ax^4+bx^3+cx^2-bx+a=0.$$

Jakoż, zamieniając x na $-\frac{1}{x}$, będzie

$$\frac{a}{x^4}-\frac{b}{x^3}+\frac{c}{x^2}+\frac{b}{x}+a=0,$$

zkąd, znosząc mianowniki i przewracając porządek wyrazów, wynika równanie zadane; co dowodzi że jego pierwiastki są wzajemne i znaków przeciwnych.

Aby rozwiązać to równanie, dajemy mu kształt

$$(1) \qquad a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x-\frac{1}{x}\right)+c=0,$$

i, biorąc summę $x-\frac{1}{x}$ pierwiastków za niewiadomę, kładziemy

$$(2) \qquad x-\frac{1}{x}=y,$$

zkąd, podnosząc do kwadratu wywodzimy

$$x^2+\frac{1}{x^2}=y^2+2.$$

Podstawiamy te wartości w równaniu (1), i otrzymujemy równanie

$$ay^2+by+2+c=0,$$

którego pierwiastki y' i y'', podstawione kolejno w równaniu (2), dadzą dla x cztery wartości rzeczywiste albo urojone, albo dwie rzeczywiste i dwie urojone.

Weźmy jeszcze równanie 6go stopnia

$$ax^6-bx^5+cx^4+cx^2+bx+a=0,$$

którego pierwiastki są wzajemne ze znakami przeciwnemi. Nie byłyby niemi, gdyby równanie miało wyraz środkowy. Co łatwo sprawdzić, zamieniając x na $-\frac{1}{x}$.

Żeby rozwiązać to równanie, dajemy mu najpierwej kształt

$$a(x^6+1)-bx(x^4-1)+cx^2(x^2+1)=0,$$

który wydatnie pokazuje że pierwsza strona jest podzielna przez x^2+1. Wykonawszy dzielenie, otrzymujemy dwa równania

$$x^2+1=0, \qquad ax^4-bx^3+(c-a)x^2+bx+a=0.$$

Pierwsze daje $x=\pm\sqrt{-1}$; drugie już znane, daje dwa dwojany pierwiastków wzajemnych ze znakami przeciwnemi. Więc zadane równanie ma sześć pierwiastków, z których dwa są zawsze urojone, a cztery inne rzeczywiste albo urojone po dwa.

Przykład. *Rozwiązać równanie 6go stopnia*

$$x^6-5x^5+5x^4+5x^2+5x+1=0.$$

Dając mu kształt

$$(x^6+1)-5x(x^4-1)+5x^2(x^2+1)=0,$$

widzimy że się rozkłada na dwa równania

$$x^2+1=0, \qquad x^4-5x^3+4x^2+5x+1=0.$$

Pierwsze daje dwa pierwiastki urojone $+\sqrt{-1}$ i $-\sqrt{-1}$.

Aby rozwiązać drugie, piszemy je w kształcie

$$x^2+\frac{1}{x^2}-5\left(x-\frac{1}{x}\right)+4=0,$$

kładziemy

$$x-\frac{1}{x}=y, \quad \text{zkąd} \quad x^2+\frac{1}{x^2}=y^2+2.$$

Mamy zatem

$$y^2-5y+6=0,$$

co daje

$$y=\frac{5\pm1}{2}; \quad \text{zkąd} \quad y'=2, \quad y''=3.$$

Te wartości, podstawione za y, dostarczają dwóch równań

$$x^2-2y-1=0,$$

$$x^2-3y-1=0,$$

które dają

$$x=1\pm\sqrt{2} \quad \text{i} \quad x=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}.$$

Otóż cztery wartości wzajemne i znaków przeciwnych

$$1+\sqrt{2} \quad \text{i} \quad \frac{-1}{1+\sqrt{2}}, \quad \frac{3+\sqrt{13}}{2} \quad \text{i} \quad \frac{-2}{3+\sqrt{13}}.$$

293. Równania stopnia nieparzystego, których wyrazy równo odległe od skrajnych mają spółczynniki równe z temi

samemi znakami, albo równe ze znakami przeciwnemi, rozkładają się na dwa równania; jedno ma za pierwiastek *jedność* dodatną albo odjemną, drugie jest wzajemne.

I tak, niech będzie równanie

$$2x^5-3x^4-5x^3+5x^2+3x-2=0.$$

Dając mu kształt

$$2(x^5-1)-3x(x^3-1)-5x^2(x-1)=0,$$

widzimy zaraz że się rozkłada na dwa równania

$$x-1=0,\qquad \begin{array}{r|r|r|l} 2x^4+2 & x^3+2 & x^2+2 & x+2=0 \\ -3 & -3 & -3 & \\ & -5 & & \end{array}$$

Pierwsze daje $x=1$; drugie jest równaniem wzajemnem. Aby rozwiązać ostatnie, piszemy je

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)-6=0;$$

poczem, kładziemy $x+\frac{1}{x}=y$, zkąd $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2.$

Podstawiamy te wartości, i otrzymujemy równanie na y

$$2y^2-y-10=0,$$

którego pierwiastki są: $y'=\frac{5}{2}$, $y''=-2$. Mamy zatem dwa równania

$$2x^2-5x+2=0,$$

$$x^2+2x+1=0,$$

które dają $x=\frac{5\pm3}{4}$ i $x=-1.$

Więc pierwiastki zadanego równania są:

$$1;\quad 2,\quad \frac{1}{2};\quad \text{i pierwiastek podwójny } -1.$$

Ściśle mówiąc tylko równania stopnia parzystego mogą być wzajemne; a w każdym razie tak nazwane równania stopnia nieparzystego do nich się przywodzą.

RÓWNANIA DWUMIENNE.

294. Nazywa się *równaniem dwumiennem* równanie o dwóch wyrazach mające kształt

$$(1)\qquad x^m - A = 0,$$

w którym A jest ilością wiadomą jakąkolwiek.

Oznaczmy przez a ilość której potęgą $m^{tą}$ jest A, i połóżmy

$$x = ay;$$

będzie

$$a^m y^m - a^m = 0;$$

zkąd, dzieląc przez a^m, wynika

$$(2)\qquad y^m - 1 = 0.$$

Pierwiastki równania (2) nazywają się *pierwiastkami* m^{tem} *jedności*. Więc, aby mieć wszystkie pierwiastki równania (1), dość jest pomnożyć *jeden z nich* a przez pierwiastki m^{te} jedności. Będzie później dowiedzione że równanie dwumienne stopnia m^{tego} ma m pierwiastków różnych (*).

(*) Ciekawy czytelnik znajdzie *rozwiązywanie równań dwumiennych* w naszej Trygonometryi.

W tej części algebry będziemy tylko uważali przypadki w których A jest liczbą, dodatną albo odjemną, i rozwiążemy niektóre równania dwumienne, przywiedzione do kształtu

$$x^m \mp 1 = 0.$$

295. Rozwiązania niektórych równań dwumiennych.

1° $m=2$. Równanie $x^2-1=0$,

ma dwa pierwiastki rzeczywiste

$$x = \pm 1.$$

Równanie $x^2+1=0$,

ma dwa pierwiastki urojone

$$x = \pm\sqrt{-1},$$

2° $m=3$. Równanie $x^3-1=0$,

jest podzielne przez $x-1$, i wyraża się przez wieloczyn

$$(x-1)(x^2+x+1)=0;$$

więc się rozkłada na dwa równania

$$x-1=0, \quad x^2+x+1=0,$$

które dają trzy wartości dla x

$$x=1, \quad x=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}.$$

Równanie $x^3+1=0$,

przywodzi się do poprzedzającego, gdy się w niem zmienia x na $-x$; więc się otrzymuje jego pierwiastki, zmieniając tylko znak pierwiastków równania poprzedzającego. Co daje

$$x=-1, \quad x=\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}.$$

3° $m=4$. Równanie $x^4-1=0$,

może wziąć kształt wieloczynu

$$(x^2-1)(x^2+1)=0\,;$$

więc się rozkłada na dwa już wiadome równania

$$x^2-1=0,\qquad x^2+1=0,$$

i jego pierwiastki są

$$x=\pm 1,\qquad x=\pm\sqrt{-1}.$$

Równanie $x^4+1=0$,

jest to samo co $x^4+2x^2+1-2x^2=0$,

albo $(x^2+1)^2-(x\sqrt{2})^2=0$;

więc się może wyrazić przez wieloczyn

$$(x^2+1+x\sqrt{2})(x^2+1-x\sqrt{3})=0,$$

i temsamem rozkłada się na dwa równania drugiego stopnia

$$x^2+x\sqrt{2}+1=0\quad \text{i}\quad x^2-x\sqrt{2}+1=0.$$

Owoż, drugie równanie wywodzi się z pierwszego przez zamianę x na $-x$; więc cztery pierwiastki zadanego równania są

$$x=\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}(1\pm\sqrt{-1}).$$

Można łatwo rozwiązać równanie $x^4+1=0$, uważając je jako wzajemne.

4° $m=5$. Równanie $x^5-1=0$,

może się wyrazić przez wieloczyn

$$(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=0,$$

więc się rozkłada na dwa równania

$$x-1=0,\qquad x^4+x^3+x^2+x+1=0.$$

Pierwsze daje $x=1$; drugie jest równaniem wzajemnem już rozwiązanem (n° 290), którego pierwiastki są

$$\frac{-1+\sqrt{5}\pm\sqrt{10+2\sqrt{5}}\sqrt{-1}}{4},\quad \frac{-1-\sqrt{5}\pm\sqrt{10-2\sqrt{5}}\sqrt{-1}}{4}.$$

Równanie $\qquad x^6+1=0,$

wywodzi się z poprzedzającego przez zamianę x na $-x$; więc jego pierwiastki są równe pierwiastkom tego równania, tylko ze znakami zmienionemi.

5° $m=6$. Równanie $\quad x^6-1=0,$

rozkłada się na dwa już rozwiązane równania

$$x^3-1=0,\qquad x^3+1=0;$$

więc jego pierwiastki są

$$x=\pm 1,\qquad x=\pm\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{-3}).$$

Równanie $\qquad x^6+1=0,$

staje się równaniem poprzedzającem, gdy w niem zastąpiono x przez $x\sqrt{-1}$; albowiem

$$(x\sqrt{-1})^6=x^6(\sqrt{-1})^6=x^6(\sqrt{-1})^4(\sqrt{-1})^2=-x^6.$$

więc jego pierwiastki równają się sześciu poprzedzającym pomnożonym przez $\sqrt{-1}$, to jest

$$x=\pm\sqrt{-1},\quad x=\pm\frac{1}{2}(\sqrt{3}\pm\sqrt{-1}).$$

6° $m=8$. Równanie $\quad x^8-1=0,$

rozkłada się na dwa już rozwiązane

$$x^4-1=0, \quad x^4+1=0:$$

więc jego pierwiastkami są następujące osiem

$$x=\pm 1, \quad x=\pm\sqrt{-1}, \quad x=\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}(1\pm\sqrt{-1}).$$

Równanie $\qquad x^8+1=0,$

jest to samo co

$$x^8+2x^4+1-2x^4=0,$$

albo

$$(x^4+1)^2-(x^2\sqrt{2})^2=0,$$

więc się rozkłada na dwa inne

$$x^4+x^2\sqrt{2}+1=0,$$

$$x^4-x^2\sqrt{2}+1=0.$$

Te równania dwukwadratowe dają osiem pierwiastków

$$x=\pm\sqrt{\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{-2}}{2}}=\pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\pm\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{-1}\right),$$

$$x=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{-2}}{2}}=\pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\pm\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{-1}\right).$$

Równanie dwumienne $x^8+1=0$ może się łatwo rozwiązać jako wzajemne. Mamy albowiem

$$x^4+\frac{1}{x^4}=0$$

Owoż, kładąc $x+\frac{1}{x}=y$ i podnosząc do kwadratu, będzie

$$x^2+2+\frac{1}{x^2}=y^2 \quad \text{albo} \quad x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2;$$

podnosząc jeszcze do kwadratu, otrzymujemy

$$x^4+\frac{1}{x^4}=y^4-4y^2+2=0.$$

Ostatnie równanie dwukwadratowe daje

$$y=\pm\sqrt{2\pm\sqrt{2}}.$$

Te wartości podstawione w równaniu $x+\frac{1}{x}=y$, dostarczają dwóch równań podwójnych

$$x^2\mp x\sqrt{2+\sqrt{2}}+1=0,\qquad x^2\mp x\sqrt{2-\sqrt{2}}+1=0;$$

zkąd wynika osiem rozwiązań

$$x=\pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\pm\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{-1}\right),$$

$$x=\pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\pm\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{-1}\right).$$

7° $m=10$. Równanie $x^{10}-1=0$, rozkłada się na dwa

$$x^5-1=0,\qquad x^5+1=0;$$

więc jego pierwiastki są już wiadome.

$$\pm 1;\quad \frac{1}{4}(-1+\sqrt{5}\pm\sqrt{10+2\sqrt{5}}\sqrt{-1}),$$

$$\frac{1}{4}(-1-\sqrt{5}\pm\sqrt{10-2\sqrt{5}}\sqrt{-1}),$$

$$\frac{1}{4}(1-\sqrt{5}\mp\sqrt{10+2\sqrt{5}}\sqrt{-1}),$$

$$\frac{1}{4}(1+\sqrt{5}\mp\sqrt{10-2\sqrt{5}}\sqrt{-1}).$$

Co do równania $\quad x^{10}+1=0;$

ponieważ $\sqrt{-1}$ jest jednym z jego pierwiastków, otrzymuej się wszystkie pierwiastki tego równania mnożąc przez $\sqrt{-1}$ pierwiastki dziesiąte jedności, to jest pierwiastki równania $x^{10}-1=0$.

8° Nakoniec $m=12$. Równanie $x^{12}-1=0$, rozkłada się na dwa równania

$$x^6-1=0, \quad x^6+1=0,$$

których już wiadome pierwiastki są jego pierwiastkami.

RÓWNANIA TRÓJMIENNE.

296. Nazywa się *równaniem trójmiennem* równanie o trzech wyrazach, mające kształt

$$ax^m+bx^n+c=0.$$

Gdy $m=2n$, rozwiązywanie tego równania przywodzi się do rozwiązywania równania drugiego stopnia i dwóch równań dwumiennych.

Jakoż, połóżmy

$$x^n=y;$$

równanie trójmienne

$$ax^{2n}+bx^n+c=0$$

stanie się

$$ay^2+by+c=0,$$

i da dwie wartości

$$y=y' \quad \text{i} \quad y=y''.$$

Te wartości podstawione kolejno za y, dostarczą dwóch równań

$$x^n=y' \quad \text{i} \quad x^n=y'',$$

których pierwiastki rozwiążą zadane równanie.

Przykład I. Niech będzie równanie

$$x^6 - 32x^3 + 192 = 0.$$

Kładąc najpierwej

$$x^3 = y,$$

otrzymujemy równanie

$$y^2 - 32y + 192 = 0,$$

które wyznacza

$$y = 16 \pm 8.$$

Mamy więc dwa równania dwumienne

$$x^3 = 24 \quad \text{i} \quad x^3 = 8.$$

Pierwsze daje $x = 2\sqrt[3]{3}$, drugie daje $x = 2$. Te dwie wartości arytmetyczne, pomnożone każda przez pierwiastki *sześcienne* jedności, to jest przez 1, $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, będą wartościami dla x. Więc pierwiastki zadanego równania są następujące sześć

$$2\sqrt[3]{3}, \quad (-1 \pm \sqrt{-3})\sqrt[3]{3}, \quad 2, \quad -1 \pm \sqrt{-3}.$$

Przykład II. *Rozwiązać równanie*

$$x^9 - 1 = 0.$$

Widzimy zaraz że

$$x^9 - 1 = (x^3 - 1)(x^6 + x^3 + 1) = 0.$$

Więc zadane równanie rozkłada się na dwa,

$$x^3 - 1 = 0 \quad \text{i} \quad x^6 + x^3 + 1 = 0.$$

Równanie dwumienne $x^3 - 1 = 0$, jako już wiemy, ma trzy pierwiastki

$$1, \quad \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}, \quad \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

Każdy z dwóch ostatnich jest kwadratem drugiego, tak że' oznaczając jeden z nich przez α, trzy pierwiastki sześcienne jedności wyrażają się przez

$$1,\quad \alpha,\quad \alpha^2.$$

Równanie trójmienne $x^6+x^3+1=0$ daje

$$x^3=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2},$$

to jest $x^3=\alpha$ i $x^3=\alpha^2$; zkąd $x=\sqrt[3]{\alpha}$ i $x=\sqrt[3]{\alpha^2}$.

Z tego wszystkiego wynika że zadane równanie ma dziewięć rozwiązań

$$1,\ \alpha,\ \alpha^2;\quad \sqrt[3]{\alpha},\ \alpha\sqrt[3]{\alpha},\ \alpha^2\sqrt[3]{\alpha};\quad \sqrt[3]{\alpha},\ \alpha\sqrt[3]{\alpha^2},\ \alpha^2\sqrt[3]{\alpha^2};$$

w których $\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}.$

Można tak samo rozwiązać równanie $x^9+1=0$. Ale, uważając że ono się wywodzi z poprzedzającego przez zamianę x na $-x$, widzimy że jego pierwiastkami są dziewięć powyższe wartości, wzięte ze znakiem $-$.

ĆWICZENIA

I. Rozwiązać równanie

$$(1+x)^{\frac{2}{3}}-(1-x)^{\frac{2}{3}}=(1-x^2)^{\frac{1}{3}}.$$

Odpowiedź : Podzielić przez $(1+x)^{\frac{2}{3}}$ i wziąć $\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{3}}$ za niewiadomę; znajdzie się $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Sprawdzić te wartości.

II. Rozwiązać równanie

$$(1+x)^{\frac{2}{5}}-(1-x)^{\frac{2}{5}}=(1-x^2)^{\frac{1}{5}}.$$

Odpowiedź : $x=\frac{(1\pm\sqrt{5})^5-2^5}{(1\pm\sqrt{5})^5+2^5}$.

III. Rozwiązać równanie

$$ax=(\sqrt{1+x}+1)(\sqrt{1}-x-1).$$

Odpowiedź : Kładąc $\sqrt{1+x}=y$, znajdzie się $x=0$ i $x=\frac{4a(1-a^2)}{(a^2+1)^2}$. Pierwsza wartość rozwiązuje dane równanie, druga rozwiązuje równanie $ax=(\sqrt{1+x}-1)\sqrt{(1-x}-1)$.

IV. Rozwiązać równanie

$$2x\sqrt[3]{x}-3x\sqrt[3]{\frac{1}{x}}=20.$$

Odpowiedź : Dość jest położyć $x=y^{\frac{2}{3}}$; poczem się znajdzie

$$x=\pm 8,\quad x=\pm\frac{5}{4}\sqrt{-10}.$$

V. Rozwiązać równanie

$$\frac{x^2}{x^2-a^2}+\frac{x^2}{x^2-b^2}-4=0,$$

i dowieśdź że jego pierwiastki są wszystkie rzeczywiste.

VI. Uprościć

$$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}.$$

Odpowiedź : $\sqrt{2}$.

VII. Rozwiązać równanie

$$x^5-2x^4+3x^3-3x^2+2x-1=0.$$

Odpowiedź : $x=1,\ x=\pm\sqrt{-1},\ x=\dfrac{1\pm\sqrt{-3}}{2}.$

VIII. Rozwiązać równanie

$$x^6+2x^5-9x^4-9x^2-2x+1=0,$$

Odpowiedź : pierwiastki są :

$$\pm\sqrt{-1};\ -2+\sqrt{5},\ \frac{-1}{-2+\sqrt{5}};\ 1+\sqrt{2},\ \frac{-1}{1+\sqrt{2}}.$$

IX. Rozwiązać równanie

$$(a+x)^{\frac{1}{4}}+(a-x)^{\frac{1}{4}}=b.$$

Odpowiedź: Podnosząc do kwadratu będzie $(a+x)^{\frac{1}{2}}+(a-x)^{\frac{1}{2}}$ $=b^2-2(a^2-x^2)^{\frac{1}{4}}$; poczem, podnosząc jeszcze do kwadratu, otrzyma się równanie $2(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}-4b^2(a^2-x^2)^{\frac{1}{4}}+b^4-2a=0$ które da wartość $(a^2-x^2)^{\frac{1}{4}}$; zkąd

$$x=\pm\sqrt{a^2-\left(b^2\pm\sqrt{a+\frac{b^4}{2}}\right)^4}.$$

X. Rozwiązać równanie

$$\frac{x}{a+x}+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+x}}=\frac{b}{a}.$$

Odpowiedź : Dając równaniu kształt $1-\dfrac{a}{a+x}+\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+x}}=\dfrac{b}{a}$ i czyniąc $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+x}}=y$, znajdzie się łatwo y i potem

$$x=\frac{a(a^2+2ab-b^2\pm a\sqrt{5a^2-4ab})}{2(a-b)^2}.$$

XI. Rozwiązać równanie

$$x^4-2x^3+x-132=0.$$

W przypadkach szczególnych można czasem łatwo rozwiązać równanie stopnia czwartego.

I tak, zadane równanie piszemy jako następuje

$$x^2(x^2-2x+1)-x^2+x-132=0,$$

$$x^2(x-1)^2-x(x-1)-132=0;$$

poczem, biorąc $x(x-1)$ za niewiadomę, znajdujemy $x=4$, $x=-3$, $x=\frac{1\pm\sqrt{-43}}{2}$.

XII. *Rozwiązać równanie*

$$64x^4+48x^3-80x^2-30x+25=0.$$

Przypatrując się bacznie, nietrudno odkryć że pierwsza strona równania jest różnicą kwadratów

$$(8x^2+3x-5)^2-9x^2=0;$$

zkąd wynika

$$(8x^2+6x-5)(8x^2-5)=0.$$

Więc

$$x=\frac{1}{2},\quad =-\frac{5}{4},\quad =\pm\frac{1}{4}\sqrt{10}\,.$$

XIII. Rozwiązać równanie

$$(x^2-8x+11)^2+(x-4)^2=25.$$

Czyniąc $x-4=y$, będzie

$$(y^2-5)^2+y^2-25=0,$$

albo

$$y^4-9y^2=0;$$

zkąd $x=4$ pierwiastek podwójny, i $x=7$, $x=1$,

XIV. Rozwiązać równanie

$$x^8-97x^4+1296=0.$$

Odpowiedź: $x=\pm 2$, $x=\pm 2\sqrt{-1}$, $x=\pm 3$, $x=\pm 3\sqrt{-1}$.

XV. Rozwiązać równanie

$$\frac{\sqrt[3]{(27a+8x)^2}}{15\sqrt[15]{x^{13}}}+\frac{8\sqrt[15]{x^2}}{3\sqrt[3]{27a+8x}}=\frac{8}{5\sqrt[5]{x}}.$$

Odpowiedź: $x=\dfrac{3a(3\pm\sqrt{21})}{32}$.

XVI. Utworzyć równanie dwukwadratowe mające pierwiastki 2, 3, -2, -3.

Odpowiedź: $(x-2)(x+2)(x-3)(x+3)=0$

albo, $x^4-13x^2+36=0.$

XVII. Rozwiązać równanie

$$x^5-2(a^2+b^2)x^3+(a^2-b^2)^2x=0.$$

Odpowiedź: $x=0$, $x=\pm(a+b)$, $x=\pm(a-b)$.

XVIII. Rozwiązać równanie

$$x^2+2(1-4\sqrt{-1})x+17=0.$$

Odpowiedź: $x=-1+4\sqrt{-1}\pm 2(1-\sqrt{-1})$, oba pierwiastki urojone

XIX. Rozwiązać równanie

$$x^2-2(2+\sqrt{-1})x+3+6\sqrt{-1}=0,$$

Odpowiedź: $x=3$, $x=1+2\sqrt{-1}$; jeden pierwiastek rzeczywisty drugi urojony. Wynik godny uwagi.

XX. Przekształcić $\sqrt{2R^2-\sqrt{4R^4-a^2R^2}}$.

Odpowiedź: $\sqrt{\dfrac{2R^2+aR}{2}}-\sqrt{\dfrac{2R^2-aR}{2}}$.

XXI. Przekształcić $\sqrt{8\pm2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$ i $\sqrt{8\pm2\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$.

Odpowiedź : $\sqrt{8\pm2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}=\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{5-\sqrt{5}}$,

$$\sqrt{8\pm2\sqrt{10-2\sqrt{5}}}=\sqrt{5+\sqrt{5}}\pm\sqrt{3-\sqrt{5}}.$$

XXII. Przekształcić $\sqrt{3+\sqrt{5+\sqrt{7}}}$.

Odpowiedź : $\frac{1}{2}\sqrt{6+\sqrt{14}-\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\sqrt{6-\sqrt{14}+\sqrt{2}}$.

XXIII. Dowieśdź że wyrażenie

$$\sqrt{\frac{-3+2\sqrt{-1}}{2}}+\sqrt{\frac{-3-2\sqrt{-1}}{2}},$$

przedstawia dwie wartości rzeczywiste i dwie urojone.

Odpowiedź : Trzeba wyprowadzić ilość $\sqrt{-1}$ z pod pierwiastników, przekształcając je za pomocą formuły ogólnej (nr° 286), która da $\pm\sqrt{-3\pm\sqrt{13}}$.

XXIV. Dowieśdź że każde równanie wzajemne 4^{go} stopnia może się przekształcić na równanie dwukwadratowe; i nawzajem.

Odpowiedź : Dość jest położyć $x=\frac{y+1}{y-1}$.

RÓWNANIA JEDNOCZESNE.

297. Układ dwóch równań pierwszego i drugiego stopnia o dwóch niewiadomych. Równanie drugiego stopnia o dwóch niewiadomych x i y, zawiera sześć gatunków wyrazów; to jest : wyrazy drugiego stopnia na x^2, xy, y^2; wyrazy pier-

wszego stopnia na x i y; wyrazy wiadome. Można więc zawsze przywieśdź równanie drugiego stopnia o dwóch niewiadomych x, y do kształtu

$$(1)\qquad Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0,$$

a równanie pierwszego stopnia, z temi samemi niewiadomemi, do kształtu

$$(2)\qquad ax+by+c=0.$$

Dla rozwiązania układu równań jednoczesnych (1) i (2), rugujemy jedną z niewiadomych, na przykład y. Wyciągając z równania (2) wartość y wyrażoną przez x,

$$y=-\frac{c+ax}{b},$$

i podstawiając w równaniu (1), mamy

$$(3)\qquad (Ab^2-Bab+Ca^2)x^2+(2Cac-Bbc+Db^2-Eab)x$$
$$+Cc^2-Ebc+Fb^2=0,$$

równanie drugiego stopnia na x, które wyznacza dwie wartości dla tej niewiadomej. Każda z nich położona za x w równaniu (2) da odpowiedającą wartość dla y.

Więc układ dwóch równań pierwszego i drugiego stopnia względem x i y ma dwa rozwiązania, rzeczywiste albo urojone.

Przykład. Niech będzie układ

$$7x^2-6xy+4y^2-5x+2y-1=0,$$
$$3x-2y-2=0.$$

Rugując y otrzymujemy równanie

$$7x^2-3x(3x-2)+(3x-2)^2-5x+3x-2-1=0,$$

albo

$$7x^2-8x+1=0,$$

które daje

$$x = \frac{4 \pm 3}{7} \quad \text{zkąd} \quad x' = 1, \quad x'' = \frac{1}{7}.$$

Tym wartościom, podstawionym w równaniu pierwszego stopnia, odpowiedają dla y wartości

$$y' = \frac{1}{2}, \quad y'' = -\frac{11}{14}.$$

Więc zadany układ ma dwa rozwiązania

$$(1) \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} x = \frac{1}{7} \\ y = -\frac{11}{14}. \end{cases}$$

298. Takim samym sposobem rozwiązuje się trzy równania o trzech niewiadomych, dwa pierwszego stopnia i jedno drugiego. I tak, niech będzie układ

$$20x^2 - 45y^2 + 10xy + 4yz - 3x + 12z - 60 = 0,$$
$$12x - 6y + 18z - 11 = 0,$$
$$4x + 3y + 2z - 9 = 0.$$

Rozwiązując na x i y dwa równania pierwszego stopnia, jak gdyby z było wiadome, znajdujemy

$$x = \frac{19 - 22z}{20},$$

$$y = \frac{16 + 12z}{15};$$

podstawiamy te wartości w pierwszem równaniu, i mamy

$$\frac{(29-22z)^2}{20} - \frac{(16+12z)^2}{5} + \frac{(29-22z)(8+6z)}{15}$$
$$+ \frac{8z(8+6z)}{15} - \frac{3(29-22z)}{20} + 12z - 60 = 0,$$

albo, po zredukowaniu,

$$306z^2+3635z+1741=0.$$

To równanie drugiego stopnia na z daje

$$z=\frac{-3635\pm\sqrt{13213225-2130984}}{612}=\frac{-3635\pm3329}{612};$$

zkąd $$z'=-\frac{1}{2} \quad \text{i} \quad z''=-\frac{1741}{153};$$

Podstawiając znalezione wartości dla z w równaniach które wyznaczają x i y w funkcyi z, otrzymujemy dwa układy rozwiązań

$$(1)\ \begin{cases} x=2 \\ y=\frac{2}{3} \\ z=-\frac{1}{2} \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} x=-\frac{38273}{20} \\ y=-\frac{20876}{15} \\ z=-\frac{1741}{153}. \end{cases}$$

Ogólnie, gdy jest n niewiadomych związanych przez $n-1$ równań pierwszego stopnia i przez jedno równanie drugiego stopnia, trzeba, za pomocą równań pierwszego stopnia wyrazić $n-1$ niewiadomych w funkcyi n^{tej} niewiadomej; potem, podstawić te wartości w równaniu drugiego stopnia które da dla n^{tej} niewiadomej dwie wartości; każdej z nich odpowiedają wartości wszystkich $n-1$ niewiadomych. Taki układ, mówiąc ogólnie, ma dwa rozwiązania i nie ma innych; jest więc wyznaczony.

299. Układ dwóch równań drugiego stopnia o dwóch niewiadomych. Rozwiązywanie równań jednoczesnych jest jedną z najzawilszych kwestyj algebry; bo zależy od rugowania niewiadomych, i od rozwiązywania równania wynikowego o jednej niewiadomej, które jest zwykle stopnia wyższego. Rozwią-

zywanie układu dwóch równań drugiego stopnia o dwóch niewiadomych wymaga rozwiązywania równania wynikowego czwartego stopnia, które w szczególnych tylko przypadkach metodami dotąd wyłożonemi rozwiązać się może.

Dla pokazania ogólnej metody, weźmy dwa równania zupełne drugiego stopnia

$$(1)\qquad Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0,$$

$$(2)\qquad A'x^2+B'xy+C'y^2+D'x+E'y+F'=0.$$

Możnaby wyrugować y, rozwiązując jedno z dwóch równań i podstawiając wartość tej niewiadomej w drugiem równaniu. Ale tym sposobem otrzymanoby równanie wynikowe uwikłane pierwiastnikiem, którego potem trudno się pozbyć bez zawiłego rachunku. Lepiej działać inaczej. W tym celu ruguje się najpierwej y^2, mnożąc pierwsze równanie przez C' drugie przez C, i odciągając jeden wynik od drugiego; co daje

$$(AC'-CA')x^2+(BC'-CB')xy+(DC'-CD')x+(EC'-CE')y$$
$$+FC'-CF'=0,$$

albo, oznaczając każdy spółczynnik małą literą, odpowiedającą wielkim w pierwszem równaniu, będzie

$$(3)\qquad ax^2+bxy+dx+ey+f=0.$$

To równanie, wzięte z jednem z danych stanowi układ równowarty zadanemu. Aby rozwiązać drugi układ (1), (3), z równania (3) wyciągamy wartość y w funkcyi x

$$y=-\frac{ax^2+dx+f}{bx+e},$$

i podstawiając ją w równaniu (1), otrzymujemy

$$Ax^2-\frac{Bx(ax^2+dx+f)}{bx+e}+\frac{C(ax^2+dx+f)^2}{(bx+e)^2}$$
$$+Dx-\frac{E(ax^2+dx+f)}{bx+e}+F=0.$$

Ostatnie równanie, jeśli w niem zniesiono mianowniki mnożąc obie strony przez $(bx+c)^2$, będzie w ogóle równaniem zupełnem czwartego stopnia, które rzadko prostym sposobem rozwiązać się daje. Ale się zdarza niekiedy że to równanie wynikowe jest dwukwadratowem albo wzajemnem; rozwiązując je otrzymuje się dla x cztery wartości, rzeczywiste albo urojone, i każdej z nich odpowieda dla y wartość wskazana przez równanie (3). Więc ogólnie układ dwóch równań drugiego stopnia o dwóch niewiadomych ma cztery rozwiązania.

Jako zastosowanie rozwiążemy następujący układ

$$(1)\qquad \begin{aligned} x^2+xy-y^2+x+y+3&=0,\\ 3x^2-6xy+3y^2-8x+3y-3&=0. \end{aligned}$$

Aby wyrugować y^2, mnożymy pierwsze równanie przez 3, i, dodając stronami do drugiego, znajdujemy

$$6x^2-3xy-5x+6y+6=0;$$

zkąd

$$(2)\qquad y=\frac{6x^2-5x+6}{3(x-2)}.$$

Podstawimy tę wartość w pierwszem równaniu, i mamy

$$x^2+\frac{x(6x^2-5x+6)}{3(x-2)}-\frac{(6x^2-5x+6)^2}{9(x-2)^2}+x$$
$$+\frac{6x^2-5x+6}{3(x-2)}+3=0,$$

albo, znosząc mianowniki,

$$9(x-2)^2(x^2+x+3)-(6x^2-5x+6)(3x^2-2x+12)=0.$$

Po uproszczeniu będzie

$$(3)\qquad 9x^4+73x^2-36=0.$$

Rozwiązując to równanie dwukwadratowe, otrzymujemy dla x cztery wartości

$$x=\pm\frac{1}{3}\sqrt{\frac{-73\pm5\sqrt{265}}{2}},$$

dwie rzeczywiste i dwie urojone. Każda z nich podstawiona w równaniu (3) da odpowiedającą wartość dla y. Więc układ (1) ma cztery rozwiązania, dwa rzeczywiste i dwa urojone.

ROZWIĄZYWANIE NIEKTÓRYCH PROSTYCH UKŁADÓW.

300. Często, zamiast stosować ogólną metodę, prościej jest użyć szczególnych sposobów, niejako fortelów, które dają łatwe i nieraz wykwintne rozwiązania. Następujące przykłady nauczą tych sposobów.

Przykład I. *Rozwiązać układ*

$$x+y=a$$

$$xy=b.$$

Wiemy już że wartości x i y są pierwiastkami równania

$$u^2-au+b=0,$$

które daje

$$u=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}.$$

Jeden z dwóch pierwiastków, obojętnie który, jest wartością dla x drugi wartością dla y. Co nie powinno dziwić, dlatego że równania są symetryczne, to jest nie zmieniają się gdy przemieniono x na y, i nawzajem. Więc zadany układ ma dwa rozwiązania :

$$\begin{cases} x=\dfrac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2}, \\ y=\dfrac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\dfrac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2}, \\ y=\dfrac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2}, \end{cases}$$

Ale, żeby te rozwiązania były rzeczywiste, trzeba i dość jest żeby było $a^2>4b$.

Rozwiązując ten sam układ za pomocą ogólnej metody, rugujemy jedną z niewiadomych, na przykład y, wyciągając z pierwszego równania jej wartość

$$y=a-x$$

i podstawiając w drugiem; co daje

$$ax-x^2=b \quad \text{albo} \quad x^2-ax+b=0.$$

To równanie względem x jest to samo co powyższe względem u; rozwiązując je, znajdujemy dla x dwie wartości

$$x=\frac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2} \quad \text{i} \quad x=\frac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2};$$

postawiamy każdą z nich w równaniu $y=a-x$, i otrzymujemy dla y dwie odpowiedające wartości

$$y=a-\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}=\frac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2},$$

$$y=a-\frac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2}=\frac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2}.$$

Wyniki zgodne z poprzedzającemi.

Można wyznaczyć wartość x i y, nie rozwiązując równania drugiego stopnia. Jakoż, znając summę a dwóch ilości x i y, gdybyśmy jeszcze znali ich różnicę, mielibyśmy zaraz każdą z nich. Nietrudno znaleźć różnicę $x—y$. Albowiem, wiedząc że

$$x+y=a,$$

$$xy=b,$$

jeśli podniesiemy do kwadratu obie strony pierwszego równania, i pomnożymy przez 4 obie strony drugiego, będzie

$$x^2+2xy+y^2=a^2$$
$$4xy=4b;$$

zkąd, odciągając stronami, wynika

$$x^2-2xy+y^2=a^2-4b,$$

albo

$$(x-y)^2=a^2-4b;$$

więc

$$x-y=\pm\sqrt{a^2-4b}.$$

Tak otrzymujemy układ dwóch równań

$$x+y=a$$

$$x-y=\pm\sqrt{a^2-4b},$$

z których, przez dodawanie i odciąganie stronami, wywodzimy szukane wartości

$$x=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}, \qquad y=\frac{a\mp\sqrt{a^2-4b}}{2}.$$

Ten sposób znalezienia wartości niewiadomych x i y, bez rozwiązywania równań które je zawierają, zasługuje na szczególną uwagę.

PRZYKŁAD II. *Niech będzie układ*

$$x-y=a$$
$$xy=b.$$

Dając tym równaniom kształt następujący

$$x+(-y)=a,$$
$$x(-y)=-b,$$

przywodzimy zadany układ do poprzedzającego. Ilości x i $-y$ są pierwiastkami równania

$$u^2-au-b=0, \quad \text{które daje}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}, \\ -y=\dfrac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x=\dfrac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}, \\ -y=\dfrac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}. \end{cases}$$

Więc zadany układ ma zawsze dwa rozwiązania rzeczywiste, jedno dodatne drugie odjemne,

$$\begin{cases} x=\dfrac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}, \\ y=\dfrac{-a+\sqrt{a^2+4b}}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x=\dfrac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}, \\ y=\dfrac{-a-\sqrt{a^2+4b}}{2}. \end{cases}$$

Można rozwiązać uważany układ szukając summy $x+y$; i t. d.

Przykład III. *Rozwiązać układ*

$$x+y=a,$$
$$x^2+y^2=b^2.$$

Podnosząc do kwadratu obie strony pierwszego równania, mamy

$$x^2+2xy+y^2=a^2;$$

a jeśli od tego równania odciągniemy stronami drugie równanie układu, otrzymamy

$$2xy=a^2-b^2.$$

Znając teraz summę a i wieloczyn $\dfrac{a^2-b^2}{2}$ niewiadomych x

i y, łatwo się znajduje dwa rozwiązania

$$\begin{cases} x=\dfrac{a+\sqrt{2b^2-a^2}}{2} \\ y=\dfrac{-a+\sqrt{2b^2-a^2}}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\dfrac{a-\sqrt{2b^2-a^2}}{2} \\ y=\dfrac{-a-\sqrt{2b^2-a^2}}{2}, \end{cases}$$

które są rzeczywiste jeśli $2b^2 \geqq a^2$.

Można znaleźć wykwitne rozwiązanie tego układu, szukając różnicy $x-y$; trzeba tylko uważać że

$$(x-y^2)=2(x^2+y^2)-(x+y)^2.$$

Więc $$(x-y)^2=2b^2-a^2,$$

zkąd $$x-y=\pm\sqrt{2b^2-a^2}; \quad \text{i t. d.}$$

Przykład IV. *Rozwiązać układ*

$$x-y=a,$$
$$x^2+y^2=b^2.$$

Ten układ przywodzi się do poprzedzającego, biorąc kształt

$$x^2+(-y)^2=b^2.$$
$$x+(-y)=a.$$

Ale dość uważać że jest

$$(x+y)^2=2(x^2+y^2)-(x-y)^2=2b^2-a^2; \quad \text{i t. d.}$$

aby mieć zaraz rozwiązania

$$\begin{cases} x=\dfrac{a+\sqrt{2b^2-a^2}}{2} \\ y=\dfrac{-a+\sqrt{2b^2-a^2}}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\dfrac{a-\sqrt{2b^2-a^2}}{2}, \\ y=\dfrac{-a-\sqrt{2b^2-a^2}}{2}, \end{cases}$$

Przykład. V. *Rozwiązać układ*

$$x+y=a$$
$$x^2-y^2=b.$$

Drugie równanie jest to samo co

$$(x+y)(x-y)=b;$$

zkąd, na mocy pierwszego wynika,

$$x-y=\frac{b}{a}.$$

Więc, znając summę a i różnicę $\frac{b}{a}$ dwóch niewiadomych x i y, mamy ich wartości

$$x=\frac{a^2+b}{2a},\quad y=\frac{a^2-b}{2a}.$$

Uwaga. Rozwiązuje się tak samo układ

$$x-y=a,\quad x^2-y^2=b.$$

Przykład. VI. *Rozwiązać układ*

$$x^2+y^2=a^2$$
$$xy=b.$$

Jeśli, pomnożywszy obie strony drugiego równania przez 2, dodamy je najpierwej do stron pierwszego a potem odciągniemy, otrzymamy układ równowarty

$$(x+y)^2=a^2+2b,$$
$$(x-y)^2=a^2-2b;$$

zkąd

$$x+y=\pm\sqrt{a^2+2b},$$
$$x-y=\pm\sqrt{a^2-2b}.$$

Więc, najpierwej dodając a potem odciągając stronami te podwójne równania, znajdujemy cztery rozwiązania układu

$$x=\pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+2b}\pm\sqrt{a^2-2b}\right),$$
$$y=\pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+2b}\mp\sqrt{a^2-2b}\right),$$

Te cztery odpowiedające sobie wartości dla x i y, są rzeczywiste jeśli $a^2-2b>0$, a przywodzą się do dwóch tylko gdy $a^2-2b=0$.

Rozwiążemy jeszcze zadany układ metodą ogólną, przez rugowanie. Z drugiego równania, wyciągamy wartość

$$y=\frac{b}{x},$$

i podstawiamy w pierwszem, co daje

$$x^2+\frac{b^2}{x^2}=a^2 \quad \text{albo} \quad x^4-a^2x^2+b^2=0\,.$$

Ostatnie równanie jest dwukwadratowe; rozwiązując je, otrzymujemy dla x cztery wartości

$$x=\pm\sqrt{\frac{a^2\pm\sqrt{a^4-4b^2}}{3}}.$$

Podstawiamy te wartości w równaniu $y=\frac{b}{x}$, i znajdujemy dla y cztery odpowiedające wartości

$$y=\frac{b}{\pm\sqrt{\frac{a^2\pm\sqrt{a^4-4b^2}}{2}}};$$

Ostatnia formuła może wziąć kształt pierwszej. Jakoż, mnożąc licznik i mianownik przez $\sqrt{\frac{a^2\mp\sqrt{a^4-4b^2}}{2}}$, mamy

$$y=\frac{b\sqrt{\frac{a^2\mp\sqrt{a^4-4b^2}}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{a^4}{4}-\frac{a^4-4b^2}{4}}}=\frac{b}{\pm\sqrt{b^2}}\sqrt{\frac{a^2\mp\sqrt{a^4-4b^2}}{2}}.$$

Jeśli $b>0$, będzie $\pm\sqrt{b^2}=\pm b$; jeśli preciwnie $b<0$, wtedy $\pm\sqrt{b^2}=\pm\sqrt{(-b)^2}=\mp b$. Więc cztery wartości dla

x i y, w których znaki sobie odpowiedają, są

$$b>0 \quad x=\pm\sqrt{\frac{a^2\pm\sqrt{a^4-4b^2}}{2}},\quad y=\pm\sqrt{\frac{a^2\mp\sqrt{a^4-4b^2}}{2}},$$

$$b<0 \quad x=\pm\sqrt{\frac{a^2\pm\sqrt{a^4-4b^2}}{2}},\quad y=\mp\sqrt{\frac{a^2\mp\sqrt{a^4-4b^2}}{2}},$$

Rozwiązania otrzymane metody ogólną nie mają kształtu tych któreśmy sposobem szczególnym znaleźli; ale nietrudno je przekształcić na pierwsze. Jakoż, do zastosowania formuły

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}},$$

mamy $\quad A=\frac{a^2}{2},\quad B=\frac{a^4}{4}-b^2,\quad A^2-B=b^2;\quad$ więc

$$x=\pm\sqrt{\frac{a^2\pm\sqrt{a^4-4b^2}}{2}}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{a^2+2b}\pm\frac{1}{2}\sqrt{a^2-2b},$$

Otrzymuje się odrazu ten wynik, rozwiązując równanie dwukwadratowe $x^4-a^2x^2+b^2=0$ sposobem wyłożonym w N° 281.

Przykład VII. *Rozwiązać układ*

$$x^2-y^2=a,$$
$$xy=b.$$

Rugujemy niewiadomę y, wyciągając z drugiego równania jej wartość

$$y=\frac{b}{x}$$

i podstawiając w pierwszem; co daje

$$x^4-ax^2-b^2=0.$$

Rozwiązując to równanie dwukwadratowe, znajdujemy dla

x cztery wartości

$$x = \pm\sqrt{\frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2}},$$

z których dwie są rzeczywiste i dwie urojone.

Wartości dla y są

$$y = \pm\frac{b}{\sqrt{\frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2}}} \quad \text{albo} \quad y = \mp\frac{b}{\sqrt{\frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2}}},$$

według jak b jest dodatne albo odjemne.

Wartości y mogą wziąć kształt wartości x; albowiem, mnożąc licznik i mianownik przez $\sqrt{\frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2}}$, będzie

$$\frac{b}{\sqrt{\frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2}}} = b\,\frac{\sqrt{\frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2}}}{\sqrt{b^2}}.$$

Więc, według jak b jest dodatne albo odjemne, cztery rozwiązania zadanego układu wyrażają się przez

$$b > 0 \quad x = \pm\sqrt{\frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2}}, \quad y = \pm\sqrt{\frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2}},$$

$$b < 0 \quad x = \pm\sqrt{\frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2}}, \quad y = \mp\sqrt{\frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2}}.$$

Uwaga. Można łatwo rozwiązać układ $x^2 - y^2 = a$, $xy = b$, zamieniając go na ogólniejszy $x^2 + (-y^2) = a$, $x^2(-y^2) = -b^2$.

Przykład VIII. *Rozwiązać układ*

$$x^3 + y^3 = a^3,$$

$$x + y = b.$$

Rugujemy y. Wyciągając z drugiego równania wartość

$$y=b-x,$$

i podstawiając w pierwszem, mamy równanie wynikowe

$$x^3+b^3-3b^2x+3bx^2-x^3=a^3,$$

albo

$$3bx^2-3b^2x+b^3-a^3=0.$$

To równanie, wzięte z drugiem, stanowi układ równowarty zadanemu, i ma dwa rozwiązania (*)

$$x=\frac{3b^2\pm\sqrt{12a^2b-3b^4}}{6b},$$

$$y=\frac{3b^2\mp\sqrt{12a^3b-3b^4}}{6b},$$

które są rzeczywiste jeśli $4a^3b-b^4\geqslant 0$.

Można inaczej rozwiązać powyższy układ. Podnosząc do sześcianu obie strony drugiego równania, będzie

$$x^3+3xy(x+y)+y^3=b^3,$$

albo

$$a^3+3bxy=b^3;$$

zkąd

$$xy=\frac{b^3-a^3}{3b}.$$

Znając summę b i wieloczyn $\frac{b^3-a^3}{3b}$ dwóch niewiadomych x i y, umiejemy już znaleźć ich wartości.

(*) Rozumując jako w równaniu drugiego stopnia (N° 265), widzimy że równanie wynikowe $0x^3+3bx^2-3b^3+b^3-a^3=0$ ma jeden pierwiastek nieskończenie wielki, dodatny albo odjemny; jeśli, ma się rozumieć, równanie $x^3+y^3=a^3$ pochodzi z ogólniejszego $Ax^3+By^3=a^3$, w którem spółczynniki zmienne A i B stały się równemi jedności.

Przykład IX. *Rozwiązać układ*

$$x^4+y^4=a^4,$$

$$x+y=b.$$

Podnosząc do kwadratu obie strony drugiego równania, mamy

$$x^2+y^2=b^2-2xy;$$

podnosząc jeszcze do kwadratu obie strony ostatniego równania, otrzymujemy

$$x^4+2x^2y^2+y^4=b^4-4b^2xy+4x^2y^2,$$

albo

$$2x^2y^2-4b^2xy+b^4-a^4=0.$$

Ostatnie równanie, które jest drugiego stopnia względem wieloczynu xy wziętego za niewiadomę, daje

$$xy=b^2\pm\frac{1}{2}\sqrt{2a^4+2b^4}\,.$$

Więc zadany układ przywodzi się do już rozwiązanego, w którym są dane summa i wieloczyn dwóch niewiadomych.

Uwaga. Rozwiązuje się podobnie układ $x^4+y^4=a^4$ $x-y=b$.

Przykład X. *Rozwiązać układ*

$$x^5+y^5=a^5$$

$$x+y=b.$$

Jeśli podzielimy stronami zadane równania, otrzymamy iloraz symetryczny

$$x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4=\frac{a^5}{b},$$

który bierze kształt

$$x^4+y^4-xy(x^2+y^2)+x^2y^2=\frac{a^5}{b}.$$

Owoż, podnosząc do kwadratu obie strony drugiego równania układu, znajdujemy

$$x^2+y^2=b^2-2xy;$$

podnosząc jeszcze do kwadratu obie strony ostatniego równania, będzie

$$x^4+2x^2y^2+y^4=b^4-4b^2xy+4x^2y^2,$$

zkąd

$$x^4+y^4=b^4-4b^2xy+2x^2y^2.$$

Więc, podstawiając wartości summ x^2+y^2 i x^4+y^4 w powyższym ilorazie, otrzymujemy, po uproszczeniu, równanie

$$5bx^2y^2-5b^2xy-a^5=0$$

które daje dla wieloczynu xy dwie wartości. Ztąd wnosimy że zadany układ ma cztery rozwiązania, rzeczywiste albo urojone, których wyszukanie już nie przedstawia żadnej trudności.

Przykład XI. *Rozwiązać układ*

$$x^3+y^3=a^3,$$

$$x^2y+xy^2=b^3.$$

Jeśli pomnożymy obie strony drugiego równania przez 3 i dodamy do stron pierwszego, będzie

$$(x+y)^3=a^3+3b^3;$$

zkąd

$$x+y=\sqrt[3]{a^3+3b^3}.$$

Owoż, drugie równanie układu może wziąć kształt

$$xy(x+y)=b^3;$$

mamy więc

$$xy=\frac{b^3}{\sqrt[3]{a^3+3b^3}}.$$

Tym sposobem zadany układ przywodzi się do już rozwiązanego.

Przykład XII. *Rozwiązać układ*

$$axy = x^2 - by^2,$$
$$x^3y^3 = x^2 + by^2.$$

Przez dodawanie i odciąganie stronami tych równań, otrzymujemy

$$xy(x^2y^2 + a) = 2x^2,$$
$$xy(x^2y^2 - a) = 2by^2;$$

zkąd, przez mnożenie stronami, wynika

$$x^4y^4 - a^2 = 4b,$$

i następnie

$$xy = \pm\sqrt[4]{a^2 + 4b}.$$

Podstawiając tę wartość w dwóch powyższych równaniach, znajdujemy

$$2x^2 = \pm\sqrt[4]{a^2 + 4b}\,(\sqrt{a^2 + 4b} + a),$$
$$2by^2 = \pm\sqrt[4]{a^2 + 4b}\,(\sqrt{a^2 + 4b} - a).$$

Więc zadany układ ma cztery rozwiązania

$$\left\{\begin{aligned} x &= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt[8]{a^2 + 4b}\sqrt{\sqrt{a^2 + 4b} + a}, \\ y &= \pm\frac{1}{\sqrt{2b}}\sqrt[8]{a^2 + 4b}\sqrt{\sqrt{a^2 + 4b} - a}, \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} x &= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt[8]{a^2 + 4b}\sqrt{\sqrt{a^2 + 4b} + a}\,\sqrt{-1}, \\ y &= \pm\frac{1}{\sqrt{2b}}\sqrt[8]{a^2 + 4b}\sqrt{\sqrt{a^2 + 4b} - a}\,\sqrt{-1}. \end{aligned}\right.$$

Jeśli $b > 0$, dwa pierwsze rozwiązania są rzeczywiste, dwa ostatnie urojone; jeśli $b<0$, trzeba rozróżnić przypadki. We wszystkich znaki wyższe idą razem i niższe razem.

PRZYKŁAD XIII. *Rozwiązać układ*

$$\sqrt{x^m}+\sqrt{x^my^m}+\sqrt{y^m}=a,$$

$$x^m+\sqrt{x^my^m}+y^m=b.$$

Z pierwszego równania, przenosząc $\sqrt{x^my^m}$ na drugą stronę i podnosząc obie strony do kwadratu, wywodzimy

$$x^m+2\sqrt{x^my^m}+y^m=a^2-2a\sqrt{x^my^m}+x^my^m;$$

to równanie za pomocą drugiego staje się

$$b=a^2-(2a+1)\sqrt{x^my^m}+x^my^m.$$

Owoż ostatnie, uważane jako równanie drugiego stopnia względem $\sqrt{x^my^m}$, daje

$$\sqrt{x^my^m}=\frac{2a+1\pm\sqrt{4a+4b+1}}{2};$$

dwie wartości, rzeczywiste albo urojone, wieloczynu $\sqrt{x^m}\sqrt{y^m}$. Podstawiając każdą z nich w pierwszem równaniu, otrzymuje się odpowiedające wartości summy $\sqrt{x^m}+\sqrt{y^m}$; poczem znajduje się łatwo $\sqrt{x^m}$ i $\sqrt{y^m}$, a następnie x i y.

Zadany układ może mieć cztery rozwiązania rzeczywiste, albo tylko dwa, a może nawet nie mieć żadnego rzeczywistego.

PRZYKŁAD XIV. *Rozwiązać układ*

$$(x+y)(xy+8)=4xy,$$

$$(x^2+y^2)(x^2y^2-64)=48x^2y^2.$$

Jeśli za niewiadome weźmiemy summę $x+y$ i wieloczyn xy, kładąc

$$x+y=s \quad \text{i} \quad xy=t,$$

otrzymamy układ

$$s(t+8)=4t,$$

$$(s^2-2t)(t^2-64)=48t^2,$$

którego będziemy szukali rozwiązania, rugując jedną z niewiadomych. Owoż, pierwsze równanie daje zaraz

$$s = \frac{4t}{t+8};$$

podstawiamy tę wartość w drugiem równaniu, i, po wykonaniu rachunków które nie mają żadnej trudności, znajdujemy

$$t^3 + 24t^2 + 192t = 512.$$

To równanie trzeciego stopnia jest szczególnym przypadkiem który się łatwo rozwiązuje. Jakoż, nietrudno widzieć że pierwsza strona $t^3 + 24t^2 + 192t$ przedstawia trzy pierwsze wyrazy sześcianu z dwumianu $t+8$, i brakuje tylko 512 aby mieć sześcian doskonały; więc, dodając tę liczbę do obydwóch stron, będzie

$$t^3 + 24t^2 + 192t + 512 = 2.512$$

albo

$$(t+8)^3 = 2.512.$$

Ostatnie równanie dwumienne ma oczywiście trzy pierwiastki, jeden rzeczywisty i dwa urojone,

$$t+8 = 8\sqrt[3]{2}, \quad t+8 = 4\sqrt[3]{2}(-1 \pm \sqrt{-3}).$$

Pierwszy pierwiastek, który jest rzeczywisty, daje

$$t = 8(\sqrt[3]{2} - 1),$$

i następnie

$$s = 2(2 - \sqrt[3]{4}).$$

Znając summę i wieloczyn dwóch ilości x i y, znajdujemy sposobem już wiadomym,

$$x = 2 - \sqrt[3]{4} \pm \sqrt{12 - 6\sqrt[3]{2} - 4\sqrt[3]{4}},$$

$$y = 2 - \sqrt[3]{4} \mp \sqrt{12 - 6\sqrt[3]{2} - 4\sqrt[3]{4}}.$$

Ale te obie wartości są urojone. Więc zadany układ nie ma rozwiązań rzeczywistych.

Przykład XV. *Rozwiązać układ*

$$x^2y+xy^2=6$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6}.$$

Znosząc mianowniki i rozkładając na czynniki, mamy

$$xy(x+y)=6,$$

$$6(x+y)=xy.$$

Jeśli teraz pomnożymy te równania stronami, będzie

$$(x+y)^2=1.$$

Zkąd wynikają dwa podwójne równania

$$x+y=\pm 1$$

$$xy=\pm 6.$$

w których znaki wyższe idą razem i niższe razem.

Biorąc układ

$$x+y=-1,$$

$$xy=-6,$$

mamy równanie

$$u^2+u-6=0$$

które daje dwa rozwiązania

$$\left\{\begin{aligned} x&=\frac{-1+\sqrt{1+24}}{2}=2, \\ y&=\frac{-1-\sqrt{1+24}}{2}=-3, \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} x&=-3, \\ y&=2. \end{aligned}\right.$$

Drugi układ

$$x+y=1$$

$$xy=6$$

prowadzi do równania

$$u^2-u+6=0$$

które daje dwa rozwiązania urojone

$$\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{1+\sqrt{-23}}{2}, \\ y=\dfrac{1+\sqrt{-23}}{2} \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{1-\sqrt{-23}}{2}, \\ y=\dfrac{1-\sqrt{-23}}{2}. \end{array}\right.$$

Więc zadany układ ma cztery rozwiązania, dwa rzeczywiste i dwa urojone.

Przykład XVI. *Rozwiązać układ*

$$xy+xz=a,$$
$$yx+yz=b,$$
$$zx+zy=c.$$

Dodajemy stronami te trzy równania, i, czyniąc $a+b+c=2p$, mamy

$$xy+xz+yz=p.$$

Zatem

$$xy=p-c, \qquad xz=p-b, \qquad yz=p-a.$$

Z ostatnich równań, mnożąc stronami dwa pierwsze i dzieląc przez trzecie, wywodzimy

$$x^2=\frac{(p-b)(p-c)}{p-a}.$$

Więc

$$x=\pm\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p-a}}.$$

Otrzymuje się podobnie

$$y=\pm\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p-b}}, \qquad z=\pm\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p-c}}.$$

Jeśli dane ilości a, b, c są wszystkie dodatne, wartości niewiadomych x, y, z powinny być wszystkie trzy dodatne albo wszystkie trzy odjemne.

Przykład XVII. *Rozwiązać układ*

$$x^2+xy+y^2=7,$$
$$x^2+xz+z^2=39,$$
$$y^2+yz+z^2=19.$$

Przez odciąganie stronami przekształcamy zadany układ na następujący

$$x^2+xy+y^2=7,$$
$$(z-x)(x+y+z)=12,$$
$$(x-y)(x+y+z)=20.$$

Owoż, dwa ostatnie równania, podzielone stronami, dają

$$\frac{z-x}{x-y}=\frac{3}{5}, \quad \text{zkąd} \quad z=\frac{8x-3y}{5};$$

przez podstawienie tej wartości, ostatnie równanie drugiego układu staje się

$$(x-y)(x+y)+(x-y).\frac{8x-3y}{5}=20,$$

albo

$$13x^2-11xy-2y^2=100.$$

Rugując teraz y^2 między pierwszem i ostatniem równaniem, mamy

$$y=\frac{5x^2-38}{3x};$$

podstawiamy tę wartość w pierwszem równaniu i otrzymujemy

$$49x^4-557x^2+1444=0.$$

Zkąd wyciągamy

$$x=\pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{557}{49}+\frac{2.38}{7}}\pm\sqrt{\frac{557}{49}-\frac{2.38}{7}}\right),$$

to jest $x=\pm 2$ i $x=\pm\frac{19}{7}$.

Więc zadany układ ma cztery rozwiązania

$$\begin{cases} x=\pm 2, \\ y=\mp 3, \\ z=\pm 5; \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\pm\frac{19}{7}, \\ y=\mp\frac{1}{7}, \\ z=\pm\frac{31}{7}. \end{cases}$$

Przykład XVIII. *Rozwiązać układ*

$$\frac{x^3-xy^2}{yz}=\frac{z}{x+y}=\frac{y}{x^2-xy}, \quad x^3+y^3=2z.$$

Trzy stosunki pomnożone między sobą dają

$$1=\frac{z}{x+y}=\frac{y}{x^2-xy}.$$

Mamy więc układ

$$x+y=z, \quad x^2-xy=y, \quad x^3+y^3=2z$$

równowarty zadanemu.

Ponieważ z i temsamem $x+y$ nie stają się zerami, możemy podzielić stronami trzecie równanie przez pierwsze, zkąd wynika

$$x^2-xy+y^2=2.$$

Od tego równania odciągamy stronami drugie

$$x^2-xy=y,$$

i otrzymujemy

$$y^2=2-y \quad \text{albo} \quad y^2+y-2=0;$$

zkąd

$$y=\frac{-1\pm 3}{2}.$$

Biorąc pierwszą wartość $y=1$ i podstawiając w równaniu $x^2-yx-y=0$, otrzymujemy

$$x^2-x-1=0,\quad \text{zkąd}\quad x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Biorąc potem drugą wartość $y=-2$, i podstawiając w tem samem równaniu, mamy

$$x^2+2x+2=0,\quad \text{zkąd}\quad x=-1\pm\sqrt{-1}.$$

Znalezione wartości dla x i y, poniesione do równania $z=x+y$, dają odpowiedające wartości niewiadomej z,

$$z=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\quad \text{i}\quad z=3\pm\sqrt{-1}.$$

Więc zadany układ ma cztery rozwiązania

$$y=1\left\{\begin{aligned} x&=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2},\\ z&=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2},\end{aligned}\right.\qquad y=-2\left\{\begin{aligned} x&=-1\pm\sqrt{-1},\\ z&=-3\pm\sqrt{-1}.\end{aligned}\right.$$

Przykład XIX. *Rozwiązać układ*

$$(x+y+z)^2=5y^2+8(x+z),\quad x^2=y+z,\quad z^2=x^2+y^2.$$

Na samo spojrzenie zaraz spostrzegamy rozwiązanie

$$x=y=z=0.$$

Szukajmy innych. Dodając stronami dwa ostatnie równania, otrzymujemy

$$z^2=y^2+y+z\quad \text{czyli}\quad z^2-y^2=z+y,$$

albo jeszcze

$$(z+y)(z-y-1)=0.$$

Musi więc być

$$z+y=0 \quad \text{albo} \quad z-y-1=0.$$

Pierwsze równanie $z+y=0$ prowadzi do rozwiązania

$$x=0, \quad y=\frac{8}{5}, \quad z=-\frac{8}{5}.$$

Drugie $z-y=1$, wzięte z równaniem $z+y=x^2$, daje

$$y=\frac{x^2-1}{2}, \quad z=\frac{x^2+1}{2}.$$

Przez podstawienie tych wartości pierwsze równanie układu staje się

$$(x^2+x)^2=\frac{5}{4}(x^2-1)^2+4(x+1)^2.$$

albo

$$(x+1)^2(x^2-10x+21)=0.$$

Ostatnie równanie rozkłada się na dwa

$$(x+1)^2=0 \quad \text{i} \quad x^2-10x+21=0.$$

Pierwsze $\quad x^2+1=0 \quad$ daje $\quad x=-1$;

Ta wartość, poniesiona do znalezionych wyrażeń y i z, wyznacza $y=0$ i $z=1$.

Mamy więc drugie rozwiązanie układu

$$x=-1, \quad y=0, \quad 2=1.$$

Drugie równanie $x^2-10x+21=0$ wyznacza dwie wartości

$$x=5\pm 2.$$

Biorąc pierwszą $x=7$, i podstawiając w tych samych wyrareniach y i z, otrzymujemy wartości

$$y=24, \quad \text{i} \quad z=25.$$

Nakoniec biorąc drugą wartość $x=3$, i podstawiając zawsze w wyrażeniach y i z, znajdujemy w wartości

$$y=4, \quad z=5.$$

Więc zadany układ ma cztery rozwiązania różne od zera,

$$\left|\begin{array}{l} x=0 \\ y=\frac{8}{5} \\ z=-\frac{8}{5} \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} x=-1 \\ y=0 \\ z=1 \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} x=7 \\ y=24 \\ z=25 \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} x=3 \\ y=4 \\ z=5. \end{array}\right.$$

Przykład XX. *Rozwiązać układ*

$$x^2+y^2-z^2-u^2=a, \quad x+y+z+u=b, \quad y^2=xz, \quad yz=xu.$$

Korzystając z tego że równania są jednorodne względem niewiadomych, połóżmy

$$y=xt, \quad z=xt', \quad u=xt'',$$

będziemy mieli

$$1+t^2-t'^2-t''^2=\frac{a}{x^2}, \quad 1+t+t'+t''=\frac{b}{x},$$

$$t^2=t', \quad tt'=t''=t^3.$$

Możemy wyrugować odrazu x, t', t'', i otrzymać

$$b^2(1+t^2-t^4-t^6)=a(1+t+t^2+t^3)^2.$$

albo

$$b^2(1+t^2)(1-t^4)=a(1+t)^2(1+t^2)^2;$$

Znosimy czynniki $1+t^2$ *i* $1+t$, dlatego że pierwszy nie jest nigdy zerem, a drugi stając się zerem dałby wartość $t=-1$, które nie przystoi zadanym równaniem. Mamy więc

$$b^2(1-t)=a(1+t),$$

zkąd

$$t=\frac{b^2-a}{b^2+a},$$

i następnie

$$t'=\left(\frac{b^2-a}{b^2+a}\right)^2,\quad t''=\left(\frac{b^2-a}{b^2+a}\right)^3.$$

Podstawiając te wartości w drugiem przekształconem równaniu, dla wyznaczenia x otrzymujemy

$$1+\frac{b^2-a}{b^2+a}+\left(\frac{b^2-a}{b^2+a}\right)^2+\left(\frac{b^2-a}{b^2+a}\right)^3=\frac{b}{x}.$$

Pierwsza strona tego równania jest summą *postępni* geometrycznej (*), która się wyraża przez

$$\frac{1-\left(\dfrac{b^2-a}{b^2+a}\right)^4}{\dfrac{2a}{b^2+a}}=\frac{(b^2+a)^4-(b^2-a)^4}{2a(b^2+a)^3}$$

$$=\frac{\{(b^2+a)^2+(b^2-a)^2\}\{(b^2+a)^2-(b^2-a)^2\}}{2a(b^2+a)^3}=\frac{4b^2(b^4+a^2)}{(b^2+a)^3};$$

zatem

$$\frac{b}{x}=\frac{4b^2(b^4+a^2)}{(b^2+a)^3}.$$

Więc rozwiązanie zadanego układu jest

$$x=\frac{(b^2+a)^3}{4b(b^4+a^2)},\quad y=\frac{(b^2+a)^2(b^2-a)}{4b(b^4+a^2)},$$

$$z=\frac{(b^2+a)(b^2-a)^2}{4b(b^4+a^2)},\quad u=\frac{(b^2-a)^3}{4b(b^4+a^2)}.$$

Przykład XXI. *Rozwiązać układ*

$$(1)\qquad \sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{61}{\sqrt{xy}}+1,$$

$$\sqrt[4]{x^3y}+\sqrt[4]{xy^3}=78.$$

(*) O postępniach arytmetycznej i geometrycznej będzie mowa w rozdziale IX.

Zadane równania są symetryczne i takie że, jeśli pewne wartości dodatne zadość im czynią, te same wartości wzięte ze znakiem — także je sprawdzają; to jest, jeśli $x=a$ i $y=b$ jest jednem z rozwiązań układu, to $x=b$ i $y=a$, $x=-a$ i $y=-b$, $x=-b$ i $y=-a$ będą także jego rozwiązaniami. Przewidujemy więc naprzód cztery rozwiązania; ale mogą być jeszcze inne.

Gdyby wyrugowano jedną z niewiadomych, otrzymanoby równanie wynikowe ósmego stopnia. Żeby go uniknąć, mnożymy pierwsze równania przez $\sqrt{xy}$, i rozkładamy na czynniki pierwszą stronę drugiego; co daje układ równowarty

$$(2)\qquad \begin{aligned} &\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2}-\sqrt{xy}=61,\\ &\sqrt[4]{xy}(\sqrt[4]{x^2}+\sqrt[4]{y^2})=78. \end{aligned}$$

Przypuszczając obie niewiadome x, y dodatne, i poprzestając na wartościach arytmetycznych pierwiastników, będzie

$$(3)\qquad \begin{aligned} &x+y-\sqrt{xy}=61,\\ &\sqrt[4]{xy}(\sqrt{x}+\sqrt{y})=78. \end{aligned}$$

Aby rozwiązać ten układ, bierzemy za niewiadome wieloczyn xy i summę $x+y$, podnosimy do kwadratu obie strony drugiego równania, i otrzymujemy

$$(4)\qquad \begin{aligned} &x+y-\sqrt{xy}=61\\ &\sqrt{xy}(x+y+2\sqrt{xy})=6084. \end{aligned}$$

Nowy układ jest ogólniejszy od zadanego, ale łatwiejszy. Jakoż, rugując $x+y$, dochodzimy zaraz do równania

$$3xy+61\sqrt{xy}-6084=0,$$

które, będąc drugiego stopnia względem $\sqrt{xy}$, daje dla tej niewiadomej dwie wartości

$$\sqrt{xy}=\frac{-61\pm277}{6},$$

to jest $\sqrt{xy}=36$ i $\sqrt{xy}=-\frac{169}{3}$.

Każda z tych dwóch wartości, podstawiona w równaniu $x+y-\sqrt{xy}=61$, wyznacza dla summy $y+x$ odpowiedającą wartość

$$x+y=97 \quad \text{i} \quad x+y=\frac{14}{3}.$$

Otrzymujemy więc, dla summy $x+y$ i wieloczynu xy, dwa układy wartości

$$\left\{\begin{array}{l} x+y=97, \\ xy=36^2, \end{array}\right. \quad \text{i} \quad \left\{\begin{array}{l} x+y=\frac{14}{3} \\ xy=\frac{169^2}{9}, \end{array}\right.$$

które znając, nietrudno już znaleźć niewiadome x i y. Jakoż, biorąc pierwszy układ $x+y=97$, $xy=36^2$, tworzymy równanie

$$u^2-97u+1296=0,$$

które daje

$$u=\frac{97\pm65}{2};$$

zkąd wynikają dwa dwojany wartości rzeczywistych

$$(5) \qquad \left\{\begin{array}{l} x=81, \\ y=16, \end{array}\right. \quad \text{i} \quad \left\{\begin{array}{l} x=16, \\ y=81. \end{array}\right.$$

Jeśli weźmiemy drugi układ $x+y=\frac{14}{3}$, $xy=\frac{169^2}{9}$, będziemy mieli równanie

$$9u-42u+169^2=0,$$

które daje

$$u=\frac{7}{3}\pm12\sqrt{-22};$$

zkąd wynikają dwa dwojany wartości urojonych

$$(6)\left\{\begin{aligned} x&=\frac{7}{3}+12\sqrt{-22},\\ y&=\frac{7}{3}-12\sqrt{-22},\end{aligned}\right. \quad \text{i} \quad \left\{\begin{aligned} x&=\frac{7}{3}-12\sqrt{-22},\\ y&=\frac{7}{3}+12\sqrt{-22},\end{aligned}\right.$$

Ale trzeba, podstawieniem w zadanych równaniach, sprawdzić znalezione wartości niewiadomych; bośmy je wyznaczyli rozwiązując układy ogólniejsze od zadanego. Owoż, dwojany wartości rzeczywistych (5), i te same wzięte ze znakiem —, zadość czynią układowi (1); więc wszystkie cztery dwojany stanowią cztery rozwiązania zadanego układu, jakośmy naprzód oznajmili. Co do dwojanów wartości urojonych (6), one nie sprawdzają zadanego układu; są więc rozwiązaniami obcemi.

Przykład XXII. *Rozwiązać układ*

$$x+y+z+u=a,$$
$$x^2+y^2+z^2+u^2=b^2,$$
$$x^4+y^4+z^4+u^4=c^4.$$
$$xu=yz$$

Biorąc summę $z+u$ i wieloczyn xu za niewiadome, oznaczając je przez s i t, będzie

$$xu=t=yz$$
$$x+u=s,$$
$$y+z=a-s;$$

zkąd wynika

$$x^2+u^2+2t=s^2,$$
$$y^2+z^2+2t=(a-s)^2.$$

Dodając stronami dwa ostatnie równania, otrzymujemy

$$x^2+y^2+z^2+u^2+4t=2s^2-2as+a^2$$

albo

$$(1) \qquad b^2+4t=2s^2-2as+a^2.$$

$x^2+u^2+(y+z)^2$
$=b^2+2t$
x^2+u^2+2t-
b^2-y^2
$-z^2$
$-b^2$

Owoż, pierwsze równanie układu jest to samo co

$$y+z=a-(x+u),$$

zkąd

$$y^2+z^2+2t=a^2-2a(x+u)+x^2+u^2+2t,$$

albo

$$y^2+z^2-(x^2+u^2)=a^2-2as.$$

Ale mamy

$$y^2+z^2+(x^2+u^2)=b^2;$$

więc

$$y^2+z^2=\frac{b^2-2as+a^2}{2}$$

$$x^2+u^2=\frac{b^2+2as-a^2}{2}.$$

Podnosimy do kwadratu obie strony tych dwóch równań i, dodając, otrzymujemy

$$x^4+y^4+z^4+u^4+4t^2=\frac{b^4+(2as-a^2)^2}{2},$$

albo

$$(2)\qquad 2c^4+8t^2=b^4+(2as-a^2)^2.$$

Znajdujemy tym sposobem dwa równania (1) i (2), drugiego stopnia o dwóch niewiadomych s i t, które się łatwo rozwiązują. Dość tylko uważać że, mnożąc przez 2 obie strony równania (1), można mu dać kształt

$$(3)\qquad 2b^2+8t=(2s-a)^2+a^2,$$

a równanie (2) można pisać

$$2c^4+8t^2=a^2(2s-a)^2+b^4.$$

Rugując teraz $(2s-a)^2$, przychodzimy do równania wynikowego

$$(4)\qquad 8t^2-8a^2t+a^4-2a^2b^2-b^4+2c^4=0,$$

które daje dla t dwie wartości

$$t=\frac{2a^2\pm\sqrt{2(a^2+b^2)^2-4c^4}}{4}.$$

Każda z nich, podstawiona w równaniu (3), wyznacza dla s dwie wartości

$$s=\frac{a}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{8t+2b^2-a^2},$$

z których pierwsza wyraża summę $x+u$, druga summę $y+z$. Ilości t i s są obie rzeczywiste jeśli $(a^2+b^2)^2 \geqq 2c^4$. Znając niewiadome $x+u$, $y+z$, xu, yz, widzimy że, z przyczyny symetryi między x, u, i y, z, zadany układ ma cztery rozwiązania rzeczywiste albo urojone. Ćwiczenie XXVIII może posłużyć na zastosowanie liczebne tego przykładu.

ĆWICZENIA.

I. *Rozwiązać układ*

$$x+y=\frac{xy}{a}, \quad x^2+y^2=\frac{x^2y^2}{b^2}.$$

Odpowiedź:

$$x=0 \text{ i } y=0; \quad x=\frac{ab(b\pm\sqrt{2a^2-b^2})}{b^2-a^2} \text{ i } y=\frac{ab(b\pm\sqrt{2a^2-b^2})}{b^2-a^2}.$$

znaki wyższe idą razem i niższe razem.

II. *Rozwiązać układ*

$$x^2-2xy+y^2-y=0, \quad x^2-3xy+2y^2+y=0.$$

Odpowiedź: $x=0$ i $y=0$ pierwiastki podwójne; $x=6$ i $y=4$.

III, *Rozwiązać układ*

$$x^2+2xy-8y^2-6x+18y-7=0,$$
$$2x^2-5xy-10y^2-3x+9y+7=0.$$

Odpowiedź : $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$ $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} y=3 \\ y=-1. \end{cases}$

IV. *Rozwiązać układ*

$$2x^2+xy-y^2+2x-y-4=0, \quad 6x^2-xy-y^2-4x-3y-2=0,$$

odpowiedź :

$$x=1 \text{ i } y=0; \; x=\frac{-7\mp\sqrt{-39}}{10} \text{ i } y=\frac{-1\pm3\sqrt{-39}}{10}.$$

V. *Rozwiązać układ*

$$12x^2-24xy+12y^2-4x+12y+3=0,$$
$$x^2+3xy-2y^2+x-3y+1=0.$$

Rugując y, będzie $144x^4+337x^2+144=0$. To równanie dwukwadratowe daje

$$x=\pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{-337}{144}+2}\pm\sqrt{\frac{-337}{144}-2}\right);$$

więc

$$\begin{cases} x=\pm\frac{3}{4}\sqrt{-1}, \\ y=\pm\frac{1}{4}\sqrt{-1}; \end{cases} \quad \begin{cases} x=\pm\frac{4}{3}\sqrt{-1}, \\ y=\frac{7}{6}\pm2\sqrt{-1}. \end{cases}$$

VI. *Rozwiązać układ*

$$x+y+\sqrt{xy}=19,$$
$$x^2+y^2+xy=133.$$

Odpowiedź : $x=9$ i $y=4$, $x=4$ i $y=9$.

VII. *Rozwiązać układ*

$$x^3+y^3=a^2, \quad x^2y^2=b^4.$$

Odpowiedź :

$$\begin{cases} x=\sqrt[3]{\dfrac{a^3\pm\sqrt{a^6+4b^6}}{2}} \\ y=\sqrt[3]{\dfrac{a^3\mp\sqrt{a^6+4b^6}}{2}} \end{cases} \quad \begin{cases} x=\sqrt[3]{\dfrac{a^3\pm\sqrt{a^6-4b^6}}{2}} \\ y=\sqrt[3]{\dfrac{a^3\mp\sqrt{a^6-4b^6}}{2}}, \end{cases}$$

drugie rozwiązanie jest rzeczywiste jeśli $a^2>b^2\sqrt[3]{4}$.

VIII. *Rozwiązać układ*

$$x^3+y^3=133, \quad x+y=7.$$

Odpowiedź: Kładąc $x-y=z$, będzie $x=\frac{7+z}{2}$, $y=\frac{7-z}{2}$. Te wartości podstawione w pierwszem równaniu dają $z=\pm 3$; poczem otrzymuje się zaraz

$$x=2 \text{ i } y=5 \quad \text{albo} \quad x=5 \text{ i } y=2.$$

IX. *Rozwiązać układ*

$$x^3+y^2=98 \qquad x^2y+xy^2=-30.$$

Odpowiedź : Mnożąc drugie równanie przez 3 i dodając do pierwszego, będzie $(x+y)^3=8$; zkąd $x+y=2$, $x+y=-1+\sqrt{-3}$, $x+y=-1-\sqrt{-3}$. Poczem, wyznaczywszy xy za pomocą drugiego równania, znajduje się łatwo rozwiązania układu :

$$\begin{cases} x=5, \\ y=-3 \end{cases} \Bigg| \; \begin{matrix} x=-3, \\ y=5; \end{matrix} \; \begin{cases} x=\frac{-5}{2}(1-\sqrt{-3}), \\ y=\frac{3}{2}(1-\sqrt{-3}), \end{cases} \Bigg| \; \begin{matrix} x=\frac{3}{2}(1-\sqrt{-3}), \\ y=\frac{-5}{2}(1-\sqrt{3-}); \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x=\frac{3}{2}(1+\sqrt{-3}), \\ y=-\frac{5}{2}(1+\sqrt{-3}), \end{cases} \Bigg| \; \begin{matrix} x=-\frac{5}{2}(1+\sqrt{-3}), \\ y=\frac{3}{2}(1+\sqrt{-3}). \end{matrix}$$

X. *Rozwiązać układ*

$$x-y=8, \quad x^3-2x^2y+2xy^2-y^3=392.$$

Odpowiedź : $x=5$ i $y=-3$, albo $x=3$ i $y=-5$.

XI. *Rozwiązać układ*

$$x^4+y^4=97, \quad x+y=5.$$

Odpowiedź :

$$\begin{cases} x=2, \\ y=3, \end{cases} \quad \begin{cases} x=3, \\ y=2; \end{cases} \quad \begin{cases} x=\dfrac{5\pm\sqrt{-151}}{2} \\ y=\dfrac{5\mp\sqrt{-151}}{2} \end{cases}.$$

XII. *Rozwiązać układ*

$$x^4+y^4=1377 \quad x-y=3.$$

Odpowiedź : Jeśli położono $x+y=z$, będzie $z^4+54z^2-10935=0$; zkąd $z=\pm9$, i $z=\pm 3\sqrt{-15}$.

Potem znajdujemy się łatwo

$$\begin{cases} x=6, \\ y=3; \end{cases} \quad \begin{cases} x=-3, \\ y=-6; \end{cases} \quad \begin{cases} x=\frac{3}{2}(\sqrt{-15}+1) \\ y=\frac{3}{2}(\sqrt{-15}-1); \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-\frac{3}{2}(\sqrt{-15}-1) \\ y=-\frac{3}{2}(\sqrt{-15}+1). \end{cases}$$

XIII. *Rozwiązać układ*

$$x^4+y^4=97, \quad x^2+y^2=13.$$

Odpowiedź : Można położyc $x^2-y^2=z^2$, będzie $z^2=\pm5$; poczem otrzymuje się łatwo $x=2,\ 3, -2, -3$, $y=3,\ 2, -3, -2$. Każda wartość x z każdą różną wartością y dają rozwiązanie układu. Co czyni osiem rozwiązań.

XIV. *Rozwiązać układ*

$$x^5+y^5=2882, \quad x+y=2.$$

Odpowiedź :

$$\begin{cases} x=5, \\ y=-3, \end{cases} \quad \begin{matrix} x=-3. \\ y=5; \end{matrix} \quad \begin{cases} x=1\pm3\sqrt{-2} \\ y=1\mp3\sqrt{-2}, \end{cases}$$

XV. *Rozwiązać podwójny układ*

$$x-y\pm\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}=\frac{20}{x+y},$$
$$x^2+y^2=34.$$

Po zniesieniu pierwiastnika i mianowników, biorąc x^2+y^2 i x^2-y^2 za niewiadome, otrzymuje się łatwo rozwiązania; układu; dla pierwszego, $x=5$ i $y=3$, $x=-\sqrt{\frac{59}{2}}$ i $y=\frac{-3}{\sqrt{2}}$;

dla drugiego, $x=-5$ i $y=-3, x=\sqrt{\frac{59}{2}}$ i $y=\frac{2}{\sqrt{2}}$.

XVI. *Rozwiązać układ*

$$(x-y)(x^2-y^2)=5$$
$$(x+y)(x^2+y^2)=65.$$

Odpowiedź :

$$\begin{cases} x=3 & x=2, \\ y=2 & y=3; \end{cases} \quad \begin{cases} x=\frac{3}{2}(-1+\sqrt{-3}), \\ y=-1+\sqrt{-3}, \end{cases} \quad \begin{cases} x=-1+\sqrt{-3} \\ y=\frac{3}{1}(-1+\sqrt{-3}), \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-1-\sqrt{-3}, \\ y=\frac{3}{2}(1+\sqrt{-3}). \end{cases} \quad \begin{cases} x=-\frac{3}{2}(1+\sqrt{-3}, \\ y=-1-\sqrt{-3}. \end{cases}$$

XVII. *Rozwiązać układ*

$$x^2+y^2+z^2=34.$$
$$3x+5y+8z=0,$$
$$12x+20y+29z=0.$$

Odpowiedź : $x=\pm5,\quad y=\mp3,\quad z=0.$

XVIII. *Rozwiązać układ*

$$xy=ab,\qquad b^nx^m+a^my^n=2\sqrt{a^mb^nx^my^n}.$$

Odpowiedź : $x=a$ i $y=b$.

XIX. *Rozwiązać układ*

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=2\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}, \qquad x-y=2b.$$

$$x+y=c$$

Odpowiedź: $x=a+b$ i $y=a-b$, $x=-(a-b)$ i $y=-(a+b)$.

XX. *Rozwiązać układ*

$$\frac{ax}{a+x}+\frac{by}{b+y}=\frac{(a+b)c}{a+b+c}.$$

Odpowiedź: $x=\frac{ac}{a+b}$, $y=\frac{bc}{a+b}$ pierwiastki

XXI. *Rozwiązać układ*

$$\left(x-3y+\frac{1}{z}\right)(x+z)=6,$$

$$\left(x+\frac{1}{z}\right)\frac{1}{y}=9,$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{9}{2}.$$

Odpowiedź: $x=2$, $y=\frac{1}{3}$, $z=1$.

XXII. *Rozwiązać układ*

$$xy+xz=a, \qquad yz+yx=b, \qquad zx+zy=c.$$

Odpowiedź: $x=\pm\sqrt{\frac{(a+c-b)(a+b-c)}{2(b+c-a)}}$,

$y=\pm\sqrt{\frac{(b+c-a)(a+b-c)}{2(a+c-b)}}$, $z=\pm\sqrt{\frac{b+c-a)(a+c-b)}{2(a+b-c}}$

biorąc znaki wyższe razem i znaki niższe razem.

XXIII. *Rozwiązać układ*

$$x^2y=a,\quad y^2z=b,\quad z^2u=c,\quad u^2x=d.$$

Odpowiedź :

$$x=\sqrt[15]{\frac{a^8c^2}{b^4d}},\quad y=\sqrt[15]{\frac{b^8d^2}{c^4a}},\quad z=\sqrt[15]{\frac{c^8a^2}{d^4b}},\quad u=\sqrt[15]{\frac{d^8b^2}{a^4c}}.$$

XXIV. *Rozwiązać układ*

$$ux=yz,\quad u+x=3,\quad y+z=-3,\quad u^5+x^5-y^5-z^5=66.$$

Odpowiedź :

$$u=\frac{3\pm1}{2}\ \text{ i }\ x=\frac{3\mp1}{2},\quad y=\frac{-3\pm1}{2}\ \text{ i }\ z=\frac{-3\mp1}{2}.$$

$$u=\frac{3\pm\sqrt{-19}}{2}\ \text{ i }\ x=\frac{3\mp\sqrt{-19}}{2},\quad y=\frac{-3\pm\sqrt{-19}}{2}$$

$$\text{i }\ z=\frac{-3\mp\sqrt{-19}}{2}.$$

XXV. *Rozwiązać układ*

$$xy+uz=16,\quad uy=4,\quad xz=16,\quad u+x=3.$$

Odpowiedź : $x=2,\quad y=4,\quad z=8,\quad u=1.$

XXVI. *Rozwiązać układ*

$$x^2+y^2+z^2+u^2-2yz-2uv+x-y+2u-5=0,$$
$$x+2y-z=1,$$
$$2y+z-u=1,$$
$$y-z+2u-v=3.$$
$$x+u=4,$$

Odpowiedź : $x=1,\quad y=1,\quad z=2,\quad u=3,\quad v=2,$

$$x=\frac{73}{11},\quad y=-\frac{20}{11},\quad z=2,\quad u=-\frac{29}{11},\quad v-=\frac{133}{11}.$$

XXVII. *Rozwiązać układ*

$$x+y+z+u=2,$$

$$x^2+y^2+z^2+u^2=50$$

$$x^4+y^4+z^4+u^4=1394.$$

$$ux=yz.$$

Odpowiedź : $\begin{cases} x=6, & y=-2, \\ u=1, & z=-3; \end{cases}$ $\begin{vmatrix} x=1, & y=-3, \\ u=6, & z=-2; \end{vmatrix}$

$\begin{cases} x=-2, & y=6, \\ u=-3, & z=1; \end{cases}$ $\begin{vmatrix} x=-3 & y=1. \\ u=-2 & z=6. \end{vmatrix}$

XXVIII. Znaleźć proporcyę w której summa kwadratów z wyrazów jest 50; summa skrajnych wyrazów czyni 7, a summa średnich 5.

Odpowiedź : $\frac{1}{2}=\frac{3}{6}\cdot$

XXIX. Wyrugować x między dwoma równaniami

$$ax^2+bx+c=0$$

$$a'x^2+b'x+c'=0.$$

Uważając x^2 i x jako dwie niewiadome pierwszego stopnia, dość jest wziąć stosunki

$$\frac{x^2}{bc'-cb'}=\frac{-x}{ac'-ca'}=\frac{1}{ab'-ba'};$$

zkąd zaraz wynika

$$\left(\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}\right)^2=\frac{bc'-cb'}{ab'-ba'},$$

albo

$$(ac' - ca')^2 = (ab' - ba')(bc' - cb').$$

XXX. *Rozwiązać układ*

$$3(x+y)(xy+8) = 35xy.$$

$$9(x^2+y^2)(x^2y^2+64) = 325x^2y^2.$$

Odpowiedź: Podzielić obie strony pierwszego równania przez xy, a drugiego przez x^2y^2; uczynić potem $x + \frac{8}{x} = u$, $y + \frac{y}{8} = v$; co da dwa równania

$$3(u+v) = 35, \quad 9(u^2+v^2) = 613,$$

z których następnie łatwo się otrzymuje osiem rozwiązań zadanego układu:

$$x=4 \begin{cases} y=3 \\ y=\frac{8}{3}, \end{cases} \quad x=2 \begin{cases} y=3 \\ y=\frac{8}{3}; \end{cases} \quad x=3 \begin{cases} y=4 \\ y=2, \end{cases} \quad x=\frac{8}{3} \begin{cases} y=4 \\ y=2 \end{cases}$$

XXXI. *Rozwiązać układ*

$$\frac{4}{y^2} + \frac{4+y}{y} = \frac{8+4y}{x} + \frac{12y^2}{x^2},$$

$$4y^2 - xy = x.$$

Odpowiedź: Rugując x, znajduje się łatwo dwa jedyne rozwiązania układu:

$$\begin{cases} x = 2, \\ y = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{50}{3} \\ y = -\frac{5}{3}. \end{cases}$$

XXXII. *Rozwiązać układ*

$$\frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{x+y}{x^2+y^2}, \quad \frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{x^2} = \frac{x-y}{y^2}.$$

Odpowiedź : Podzielić stronami drugie równanie przez pierwsze, będzie

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{(x-y)(x^2+y^2)}{(x+y)y^2}, \text{ albo } \frac{x+y}{x}=\frac{x-y}{y},$$

$$\text{albo jeszcze } \frac{y^2}{x^2}+2\frac{y}{x}-1=0.$$

Zkąd $\frac{y}{x}=-1\pm\sqrt{2}$, i następnie $x=\frac{1\pm\sqrt{2}}{4}$, $y=\frac{1}{4}$.

XXXIII. *Rozwiązać układ*

$$x^3+x^2y+xy^2+y^3=13$$
$$x^4y^2+x^2y^4=468.$$

Odpowiedź : Te dwa równania mogą wziąć kształt

$$(x+y)(x^2+y^2)=13, \quad x^2y^2(x^2+y^2)=468,$$

zkąd, dzieląc stronami, wynika $\frac{x^2y^2}{x+y}=36$.

Biorąc teraz za niewiadome $x+y=s$; $xy=t$, i rugując s, otrzymuje się równanie trójmienne

$$t^6-2.36^2t^3=13.36^3,$$

które daje $t^3=-216$ i $t^3=216.13$;

a ztąd $t=-6$ i $t=6\sqrt[3]{13}$. Poprzestając na tych dwóch pierwiastkach sześciennych rzeczywistych, będzie $x+y=1$ i $x+y=\sqrt[3]{13^2}$. Poczem, łatwo się znajduje dwa rzeczywiste rozwiązania układu,

$$\begin{cases} x=3, \\ y=-2, \end{cases} \quad \begin{cases} x=-2 \\ y=3, \end{cases}$$

i dwa urojone

$$\frac{\sqrt[3]{13^2}\pm\sqrt{-11\sqrt[3]{13}}}{2}, \quad y=\frac{\sqrt[3]{13}\mp\sqrt{-11\sqrt[3]{13}}}{2}.$$

ROZDZIAŁ VII

ZAGADNIENIA DRUGIEGO STOPNIA

---

301. Zagadnienie I. *Za 120 fr. kupiono kilka metrów sukna; gdyby metr kosztował 3 fr. mniej, za te same pieniądze mianoby 2 metry więcej, Ile kupiono metrów, i poczemu?*

Jeśli nazwiemy x liczbę kupionych metrów sukna, cena jednego metra wyrazi się przez $\frac{120}{x}$; a gdyby było 2 metry więcej, to jest $x+2$ metrów, cena jednego metra byłaby $\frac{120}{x+2}$. Owóż, według zagadnienia, druga cena jest o 3 franki niższa od pierwszej; więc, dodając 3 do drugiej ceny, mamy równanie zagadnienia

$$\frac{120}{x}=\frac{120}{x+2}+3.$$

Aby rozwiązać to równanie, znosimy mianowniki, chociaż są zmienne, i wiemy (n^ro^ 112) że otrzymujemy równanie równowarte

$$120(x+2)=120x+3x(x+2),$$

albo

$$x^2+2x-80=0;$$

zkąd

$$x=-1\pm\sqrt{1+80}=-1\pm9.$$

Co daje dla niewiadomej dwie wartości zadość czyniące równaniu, to jest

$$x=8 \quad \text{i} \quad x=-10.$$

Wartość dodatna 8 pokazuje że kupiono 8 metrów sukna;

więc jeden metr kosztował $\frac{120}{8}=15$ fr. Liczby 8 (metrów) i 15 (franków), sprawdzające wysłowienie zagadnienia, są jego rozwiązaniem.

Ale, co znaczy wartość odjemna -10? Aby ją wytłumaczyć, dość jest zamienić x na $-x$ w równaniu zagadnienia; będzie

$$\frac{120}{-x}=\frac{120}{-x+2}+3,$$

albo

$$\frac{120}{x}+3=\frac{120}{x-2}.$$

Ostatnie równanie przedstawia następujące zagadnienie:

Za 120 fr. kupiono pewną liczbę metrów sukna; gdyby metr kosztował 3 franki więcej, za te same pieniądze mianoby 2 metry mniej. Ile kupiono metrów, i poczemu?

Temu wysłowieniu odpowieda wartość dodatna $x=10$, Kupiono więc 10 metrów po 12 fr.

302. Zagadnienie II. *Podzielić daną ilość* a *na dwie części takie, żeby ich wieloczyn był równy drugiej ilości danej* m.

Nazwijmy x jedną z dwóch części; druga będzie $a-x$. Owoż, wieloczyn tych części powinien się równać liczbie m, mamy więc równanie zagadnienia.

$$x(a-x)=m,$$

albo

$$x^2-ax+m=0.$$

Rozwiązując to równanie, znajdujemy dla x dwie wartości

$$x'=\frac{a+\sqrt{a^2-4m}}{2} \quad \text{i} \quad x''=\frac{a-\sqrt{a^2-4m}}{2},$$

jedna z nich przedstawia jedną z dwóch szukanych części, druga wyraża drugą, i obie razem stanowią rozwiązanie zagadnienia.

Dyskussya. Możebność zagadnienia wymaga żeby było $a^2-4m \geqslant 0$. Temu warunkowi staje się zadość gdy $m<0$. Ale, jeśli $m>0$, powinno być $m \leqq \frac{a^2}{4}$; więc w tym przypadku, największa wartość jaką może mieć wieloczyn m jest równa $\frac{a^2}{4}$. Dopóki jest $m<\frac{a^2}{4}$, dwie szukane części x' i x'' są nierówne, a gdy $m=\frac{a^2}{4}$ wtedy te dwie części są równe, to jest $x'=\frac{a}{2}=x''$.

Ztąd wynika wielce użyteczne twierdzenie:

303. Twierdzenie. *Wieloczyn dwóch ilości zmiennych, mających ten sam znak, które czynią summę stateczną, jest największy możebny gdy te ilości stają się równemi.*

Nawzajem, *wartość samoista summy dwóch ilości zmiennych, mających ten sam znak, które tworzą wieloczyn stateczny, jest najmniejsza możebna gdy te ilości stają się równemi.*

Ważność tego twierdzenia i jego wzajemnicy wymaga dowodzenia wprost, które może być następujące:

Jeśli nazwiemy z różnicę między każdą z dwóch ilości i połową ich summy a, jedna z tych ilości wyrazi się przez $\frac{a}{2}-z$, druga przez $\frac{a}{2}+z$; będzie więc

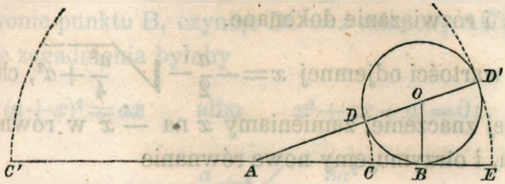
$$\left(\frac{a}{2}-z\right)\left(\frac{a}{2}+z\right)=m,$$

albo

$$\frac{a^2}{4}-z^2=m \quad \text{i} \quad a=\pm\sqrt{4m+4z^2}.$$

Pierwsza równość wydatnie pokazuje że wieloczyn m jest największy możebny gdy $z=0$; druga dowodzi że wartość samoista summy a jest najmniejsza możebna gdy $z=0$.

304. Zagadnienie III. *Podzielić daną prostę w stosunku średnim i skrajnym, to jest podzielić ją na dwie części takie żeby większa była średnią proporcyonalną między całą linią i częścią mniejszą.*



Jeśli oznaczymy przez a daną prostę AB, i przez x jej odcinek większy liczony od A, wtedy odcinek mniejszy wyrazi się przez $a-x$, i równanie zagadnienia będzie

$$x^2=a(a-x);$$

zkąd się wywodzi

$$x=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2}=\frac{a}{2}(-1\pm\sqrt{5}).$$

Wartość dodatna niewiadomej x, oczywiście mniejsza od a ale większa od $\frac{a}{2}$, wyznacza punkt C między A i B. Więc wartość

$$x=\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2}-\frac{a}{2},$$

odpowiedająca warunkom zagadnienia jest jego rozwiązaniem.

Można łatwo otrzymać odcinek AC geometryczną budową. Trzeba tylko, ze skrajności B linii AB, wyprowadzić prostopadłę BO równą połowie tej linii, i połączyć AO. Ponieważ przeciwprostokątna AO przedstawia $\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2}$, opisując ze środka O promieniem OB okrąg który przecina AO w punkcie D, mamy

$$AD=\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2}-\frac{a}{2};$$

więc x=AD. Poczem, przenosząc AD na AB, nakreśla się punkt C, i rozwiązanie dokonane.

Co do wartości odjemnej $x=-\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2}$, chcąc odgadnąć jej znaczenie, zamieniamy x na $-x$ w równaniu zagadnienia, i otrzymujemy nowe równanie

$$x^2=a(a+x);$$

któremu zadość czyni $x=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2}$. To drugie równanie przedstawia zagadnienie w którem odcinek x jest większy od danej linii a. Aby wyznaczyć ten odcinek na kierunku linii AB, dość uważać że okrąg, opisany ze środka O promieniem $\frac{a}{2}$, przecina przedłużenie przeciw prostokątnej AO w punkcie D′; zatem, kładąc AD′ w AC′ na kiernnku BA, otrzymujemy

$$AC'=AD'=\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2}+\frac{a}{2}.$$

Więc wartość odjemna niewiadomej x jest $x=-AC'$. Co usprawiedliwia użycie ilości odjemnych w przypadku przeciwieństwa położeń punktów. Tym sposobem punkt C′, leżący na lewej stronie punktu A, daje drugie rozwiązanie zagadnienia zogólnionego następującem wysłowieniem

Na kierunku danej prostej AB *znaleźć punkt taki, żeby jego odległość od punktu* A *była średnią proporcyonalną między odległością od punktu* B *i całą linią* AB.

305. Uwaga. Ogólne wysłowienie zagadnienia pokazuje że

punkt C', dający drugie rozwiązanie, nie może się znajdować na prawej stronie punktu B; bo, w tem położeniu, odległość AC', większa od BC' i od AB nie dopełnia warunku $AC'^2 = AB.BC'$, którego wymaga zagadnienie. Gdyby jednak, przez niebaczność na tę niemożebność, szukano punktu C' na prawej stronie punktu B, czyniąc $BC' = x$ mianoby $AC' = a + x$, i równanie zagadnienia byłoby

$$(a+x)^2 = ax \quad \text{albo} \quad x^2 + ax + a^2 = 0;$$

zkąd

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{-\frac{3a^2}{4}}.$$

Te wartości urojone oznajmiają *niemożebność;* ale ona nie tycze się zagadnienia które już jest niezaprzeczalną rzeczywistą, tylko się odnosi do założenia które jest w sprzeczności z jego wysłowieniem.

Niemożebność leży tu cała w przypuszczeniu że szukany punkt ma być na prawej stronie punktu B. Aby się o tem przekonać, szukajmy czy istnieje, na lewej stronie punktu B, jaki punkt dopełniający warunków zagadnienia. Owoż, jeśli oznaczymy przez x odległość punktu niewiadomego od B, jego odległość od A wyrazi się przez $a - x$ albo $x - a$, według jak ten punkt będzie przed A albo po A. W pierwszym przypadku będziemy mieli $(a-x)^2 = ax$, w drugim $(x-a)^2 = ax$. Te dwa równania wychodzą oba na jedno

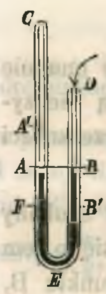
$$x^2 - 3ax + a^2 = 0;$$

więc to ostatnie daje zarazem obydwa punkta C i C'. I w samej rzeczy, rozwiązując je znajdujemy dwie wartości rzeczywiste i dodatne

$$x = \frac{3a \pm \sqrt{5a^2}}{2}.$$

Pierwsza większa od a, wyznacza punkt C'; druga, mniejszą od a, wyznacza punkt C'. Tym sposobem, unikając rozwiązania odjemnego, dobrze widzimy że, gdy się szuka pewnej odległości w stronie przeciwnej tej na której ona leży, błąd przypuszczenia nie zawsze jest sprostowany przez ilości odjemne, jakby się zdawało; ale może być wskazany niekiedy przez ilości urojone.

306. Zagadnienie IV. *Wyznaczyć, w manometrze z powietrzem ściśniętem, wysokość do jakiej się wznosi wierzchołek kolumny merkuryuszu na daną tężność pary.*



Manometr z powietrzem ściśniętem, służący do mierzenia tężności pary w machinach parowych, jestto rurka zakrzywiona, zamknięta w jednej skrajności C i otwarta w drugiej D. Część dolna AEB jest napełniona merkuryuszem, część górna AC powietrzem; para wchodzi otworem D i wywiera parcie na wierzchołek B kolumny merkuryuszu. Tężność pary mierzy się parciem atmosferycznem, a to ostatnie wyraża się przez wysokość h kolumny barometrycznej, której średnia wysokość jest $h = 0^m,76$.

Przypuszczając że rurka ma wszędzie to somo przecięcie proste, gdy tężność pary jest równa jednej atmosferze wierzchołki A i B kolumny merkuryuzs są oba na jednym poziomie. Jeśli tężność pary rośnie i staje się równa n atmosferom, wierzchołek B zniża się aż do położenia B', w którem wytrzymuje parcie pary wyrażone przez nh; wtedy wierzchołek A idzie do góry i zatrzymuje się w A'. Aby znaleźć związek między przemieszczeniem kolumny merkuryuszu i tężnością nh pary, oznaczamy przez x wzniesienie AA'=BB', przez a długość AC; i uważamy że parcia, jakich doznają punkta B' i F leżące na tym samym poziomie, są równe. Ale parcie w punkcie F jest równe ciężarowi kolumny merkuryuszu mającej wysokość $FA' = 2x$, więcej tężnością powietrza zamkniętego w objętości $CA' = a - x$. Owoż, wedle ustawy

Mariotta, *w tej samej temperaturze, massa gazu bierze objętości odwrotnie proporcyonalne do parć na nią wywartych;* a ponieważ parcie powietrza zamkniętego w objętości AC$=a$ jest równe parciu atmosferycznemu h, parcie tego samego powietrza zawartego w objętości $a-x$ będzie $\frac{ah}{a-x}$. Mamy więc równanie zagadnienia

$$(1) \qquad 2x+\frac{ah}{a-x}=nh,$$

albo

$$2x^2-(2a+nh)x+(n-1)ah=0.$$

Jeśli tężność pary jest większa od jednej atmosfery, pojmuje się łatwo że kolumna merkuryuszu wznosi się w części zamkniętej AC do wysokości AA' mniejszej od AC. Co dowodzi że niewiadoma x musi mieć jedną wartość dodatną mniejszą od a. Nietrudno to sprawadzić bez rozwiązywania równania. Jakoż, nadając niewiadomej x wartości 0 i a, widzimy że pierwsza strona rozwiązania bierze dwie wartości, $(n-1)\,ah$ i $-ah$, które mają znaki przeciwne. Ztąd wnosimy że równanie ma jeden pierwiastek zawarty między 0 i a, drugi większy od a (n° 271). Oba pierwiastki są dodatne; mniejszy od a rozwiązuje zagadnienie; większy od a nie odpowieda na zadane pytanie. Więc w tym przypadku, zagadnienie ma jedyne rozwiązanie

$$(2) \qquad x=\frac{2a+nh-\sqrt{(2a-nh)^2+8ah}}{4}$$

Ale, jeśli tężność pary jest mniejsza od jednej atmosfery, to jest jeśli $n<1$, wierzchołek B kolumny merkuryuszu podnosi się, a przeciwnie wierzchołek A opada; wtedy jedna z dwóch wartości x musi być odjemna. Równanie (1) ma istotnie dwa pierwiastki rzeczywiste i znaków przeciwnych, ponieważ jego ostatni wyraz jest odmienny. A że summa tych pierwiastków jest dodatna $a+\frac{nh}{2}$, to dowodzi że pierwiastek dodatny jest większy od a, i nie odpowieda na zadane pytanie. Więc formuła (2) daje w obydwóch przypadkach rozwiązanie zagadnienia.

307. Zagadnienie V. Znaleźć głębokość studni *upuszczając kamień z jej otworu, i licząc czas od chwili upuszczenia tego kamienia aż do chwili w której głos jego uderzenia o dno studni dochodzi do ucha.*

Nazwijmy x głębokość studni i θ czas w którym ją spadający kamień przebiega. Wiadomo że ciała spadające przebiegają w czasie θ przestrzeń wyrażoną przez równanie

$$x=\frac{1}{2}g\theta^2,$$

w którem y oznacza *przyspieszenie*, to jest podwójną przestrzeń, czyli $2x$, przebieżoną w powietrzu w pierwszej sekundzie. W Paryżu $g=9^m,8088...$ Ztąd wywodzimy

$$\theta=\sqrt{\frac{2x}{g}}.$$

Wiadomo także że głos rozchodzi się jednostajnie, z prędkością 340 metrów na sekundę w powietrzu; oznaczając przez v tę prędkość, widzimy że czas, w którym głos przychodzi od dna studni do ucha, wyraża się przez

$$\frac{x}{v}.$$

Owóż, czas całej obserwacyi składa się z czasu spadku kamienia, i z czasu jakiego potrzebuje głos uderzenia kamienia o dno studni, żeby dojść do ucha dostrzegacza. Więc, nazywając t czas całej obserwacyi, mamy równanie zagadnienia

$$(1) \qquad \sqrt{\frac{2x}{g}}+\frac{x}{v}=t.$$

Aby rozwiązać to równanie, odosobniamy pierwiastnik, przenosząc wyraz $\frac{x}{v}$ na drugą stronę; co daje równanie równowarte

$$(2) \qquad \sqrt{\frac{2x}{g}}=t-\frac{x}{v};$$

poczem podnosimy obie strony do kwadratu, i otrzymujemy

$$\frac{2x}{g}=\left(t-\frac{x}{v}\right)^2=t^2-\frac{2tx}{v}+\frac{x^2}{v^2},$$

albo

$$(3) \qquad \frac{x^2}{v^2}-2\left(t+\frac{v}{g}\right)\frac{x}{v}+t^2=0.$$

zkąd, biorąc $\frac{x}{v}$ za niewiadomę, wyciągamy

$$(4) \qquad \frac{x}{v}=t+\frac{v}{g}\pm\sqrt{\left(t+\frac{v}{g}\right)^2-t^2}$$

albo

$$x=\frac{v^2}{g}+vt\pm\sqrt{\left(\frac{v^2}{g}+vt\right)^2-v^2t^2}.$$

Te dwa pierwiastki są rzeczywiste i oba dodatne, bo pierwiastnik $\sqrt{\left(\frac{v^2}{g}+vt\right)^2-v^2t^2}$ jest rzeczywisty, i oczywiście mniejszy od $\frac{v^2}{g}+vt$.

Widać a *priori* że zagadnienie ma zawsze jedno rozwiązanie, i tylko jedno; nietrudno nawet rozpoznać który z dwóch pierwiastków daje to rozwiązanie, i wytłumaczyć zkąd pochodzi rozwiązanie obce.

Dla rozwiązywania, zastąpiliśmy równanie zagadnienia

$$(1) \quad \sqrt{\frac{2x}{g}}+\frac{x}{v}=t \quad \text{albo} \quad (2) \quad \sqrt{\frac{2x}{g}}=t-\frac{x}{v},$$

przez równanie

$$\frac{2x}{g}=\left(t-\frac{x}{v}\right)^2$$

które jest ogólniejsze; bo nietylko ma pierwiastki równania (2), ale jeszcze pierwiastki równania

$$(5)\qquad -\sqrt{\frac{2x}{g}}=t-\frac{x}{v}.$$

Trzeba więc rozpatrzyć który z dwóch pierwiastków równania (3) sprawdza równanie (5). Owoż, pierwszy pierwiastek (4), dający wartość $\frac{x}{v}$ większą od t, czyni odjemną różnicę $t-\frac{x}{v}$; zatem nie należy do równania (2) tylko do równania (5), i powinien być odrzucony jako rozwiązanie obce, wprowadzone przez podnoszenie do kwadratu stron równania (2). Zostaje drugi pierwiastek (4) który, dając wartość $\frac{x}{v}$ mniejszą od t, czyni dodatną różnicę $t-\frac{x}{v}$ i sprawdza równanie. Więc głębokość studni wyraża się przez pierwiastek mniejszy równania (3), to jest przez formułę

$$x=\frac{v^2}{g}+vt-\sqrt{\left(\frac{v^2}{g}+vt\right)^2-v^2t^2}.$$

Uwaga. Metoda przybliżeń po sobie idących ułatwia znacznie rachunek głębokości studni. Według wiadomego prawidła (n° 278), z rówannia (3) wywodzimy pierwszą przybliżoną wartość

$$\frac{x}{v}=\frac{t^2}{2\left(t+\frac{v}{g}\right)}.$$

Przypuszczając naprzykład $t=5''$, i uważając że ilość

$g=9{,}8088$ jest przybliżona przez niedostatek, dzieleniem skróconem znajdujemy iloraz $\frac{v}{g}=\frac{340}{9{,}8088}=34{,}663$ przybliżony na mniej niż 0,001. Mamy więc najpierwej

$$\frac{x}{v}=\frac{25}{79{,}326}=0{,}31515.$$

Druga przybliżona wartość będzie

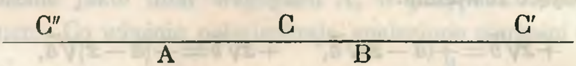
$$\frac{x}{v}=0{,}31515+0{,}00125=0{,}31640,$$

na mniej niż 0,0001;

zkąd wynika

$$x=107^m{,}58.$$

308. Zagadnienie VI. *Na linii prostej która łączy dwa światła znaleźć punkt równo oświecony.*



Niech będą A i B dwa światła, i C punkt równo oświecony; czyniąc AB$=d$ i AC$=x$, mamy BC$=d-x$. Do wyznaczenia punktu C trzeba wiedzieć że, *natężenie światła jest w stosunku odwrotnym kwadratu odległości punktu oświeconego od punktu światłego;* to jest, w odległości 2,3,4,... razy większej, natężenie tego samego światła będzie 4, 9, 16,... razy mniejsze. Na mocy tej ustawy, oznaczając przez a, natężenie światła A, to jest ilość światła jaką odbierają punkta leżące no jedność odległości od A; i tak samo przez b natężenia światła B; widzimy łatwo że światło A oświeca punkt C, położony w odległości x, z natężeniem $\frac{a}{x^2}$; podobnie światło B oświeca ten sam punkt C, położony w odległości $d-x$ od niego, z natężeniem $\frac{b}{(d-x)^2}$ Owoż, wysłowienie wymaga żeby te dwa natężenia były równe; mamy więc równanie zagadnienia

$$\frac{a}{x^2}=\frac{b}{(d-x)^2}, \tag{1}$$

albo

$$bx^2=a(d-x)^2.$$

Możnaby, rozwijając kwadrat drugiej strony, dać równaniu kształt zwyczajny $Ax^2+Bx+C=0$. Ale, ponieważ obie strony są kwadratami, wyciągając z nich pierwiastek kwadratowy przywodzi się zaraz równanie do pierwszego stopnia. Tym sposobem, dając każdemu pierwiastkowi podwójny znak $\pm$, znajdujemy równanie

$$\pm x\sqrt{b}=\pm(d-x)\sqrt{a}$$

które, z przyczyny wątpliwości znaków, przedstawia cztery następujące równania.

$$+x\sqrt{b}=+(d-x)\sqrt{a}, \quad +x\sqrt{b}=-(d-x)\sqrt{a},$$

$$-x\sqrt{b}=+(d-x)\sqrt{a}, \quad -x\sqrt{b}=-(d-x)\sqrt{a}.$$

Te jednak cztery równania nie są różne, albowiem dwa ostatnie przywodzą się do dwóch pierwszych, prostą przemianą znaków w obydwóch stronach. Nie ma więc potrzeby, wyciągając pierwiastek kwadratowy z dwóch stron równania, dawać każdej znak $\pm$; dość go położyć przed jedną z nich.

Rozwiązając równanie (1), otrzymujemy

$$\frac{\sqrt{a}}{x}=\frac{\pm\sqrt{b}}{d-x}=\frac{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}{d}, \tag{2}$$

zkąd

$$x=\frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}.$$

Dyskussya. 1° $a>b$. To założenie znaczy że światło A jest słabsze od B. Wtedy pierwsza wartość x jest dodatna i mniejsza od d, ale większa od $\frac{1}{2}d$; bo oczywiście ułamek $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ jest mniejszy od 1 ale większy od $\frac{1}{2}$. Istnieje więc między dwoma światłami, i dalej od A niż od B, punkt C równo oświecony przez każde z nich.

Druga wartość także dodatna, i większa od d dlatego że $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}>1$, wyznacza poza B na przedłużeniu AB, drugi punkt C' równo oświecony przez dwa światła.

2° $a<b$ To przypuszczenie oznacza że światło B jest mocniejsze od A. Więc, stosownie do poprzedzającego przypadku, punkt równo oświecony musi mieć względem B takie położenie jakie miał względem A, w przypuszczeniu przeciwnem. Co właśnie potwierdzają znalezione wartości dla x

Pierwsza, zawsze dodatna i mniejsza od $\frac{1}{2}d$, pokazuje że między światłami A i B, ale bliżej A niż B, istnieje punkt równo oświecony.

Druga wartość jest odjemna; jeśli ją oznaczymy przez $-x'$, wiemy że, biorąc na stronie światła słabszego A odległość AC''$=x'$, wyznaczymy punkt C'' równo oświecony przez A i B. Aby się o tem jeszcze lepiej przekonać, podstawiamy $-x'$ zamiast x w równaniu (1), i mamy

$$\frac{a}{x'^2}=\frac{b}{(d+x')^2}.$$

Owoż, pierwsza strona tej równości wyraża ilość światła jaką punkt C'' odbiera od A; druga przedstawia także ilość światła jaką on odbiera od B; więc punkt C'' jest równo oświecony przez A i B.

3°. $a=b$ W tym przypadku światła A i B mają równe natężenia, przez co dwie wartości x stają się

$$x=\frac{d}{2}, \quad \text{i} \quad x=\frac{d}{0}.$$

Pierwsza wartość okazuje że punkt równo oświecony, przez dwa światła A i B z jednakowem natężeniem, jest we środku linii AB która je łączy. Co przez się widoczne.

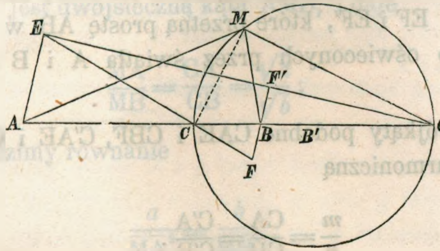
Druga wartość jest nieskończenie wielka. To znaczy właściwie że nie ma drugiego punktu równo oświeconego przez światła A i B, albo, mówiąc algebrycznie, że drugi punkt *oddalił się w nieskończoność*. Żeby usprawiedliwić to symboliczne wyrażenie, i zarazem dowieśdź że wartość nieskończenie wielka niewiadomej x jest także rozwiązaniem, uważajmy rozwiązane równanie (2) zagadnienia, które się rozkłada na dwa,

$$\frac{\sqrt{a}}{x}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{d} \quad \text{i} \quad \frac{\sqrt{a}}{x}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{d}.$$

Pierwsze, w założeniu $a=b$, daje $x=\frac{d}{2}$. Drugie pokazuje że, im się mniej natężenie a różni od b, tem większa musi być wartość niewiadomej x; ta zaś wartość staje się nieskończenie wielką wtedy tylko kiedy $a=b$; i nawzajem. Więc, w miarę jak różnica natężeń dwóch świateł A i B dąży do zera, punkt równo oświecony między A i B zbliża się do środka linii AB; a drugi punkt, równo oświecony poza A i B, oddala się od nich coraz więcej, i, gdy $a=b$, znika w nieskończenie wielkiej odległości. Tak trzeba rozumieć że wartość nieskończenie wielka niewiadomej x, zadość czyniąca równaniu, jest jednem z rozwiązań zagadnienia w przypadku szczególnym $a=b$. Ta nieskończenie wielka wartość jest dodatna albo odjemna, według jak jest granicą zmiennej x dodatnej albo odjemnej, to jest według jak natężenie a, najpierwej większe albo mniejsze od b, stało mu się potem równe.

309. Punkta C i C′, równo oświecone przez dwa punkta

światła A i B, dzielą harmonicznie prostę AB w stosunku $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$



Jakoż, czyniąc AC$=x$ i AC'$=x'$, z równania zagadnienia

$$\frac{a}{x^2}=\frac{b}{(d-x)^2} \quad \text{albo} \quad \frac{x^2}{(d-x)^2}=\frac{a}{b},$$

wywodzimy

$$\frac{x}{d-x}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\frac{x'}{x'-d}.$$

Co daje proporcyę harmoniczną (*).

$$\frac{\text{CA}}{\text{CB}}=\frac{\text{C'A}}{\text{C'B}},$$

w której stosunek $\frac{\text{CA}}{\text{CB}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Nawzajem, dwa punkta C i C', które dzielą prostę AB harmonicznie w stosunku $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, są równo oświecone przez dwa punkta światłe A i B, mające natężenia a i b. Co oczywiste.

Odległość CC' jest *średnią harmoniczną* między C'A i C'B.

Nietrudno wykreślić geometrycznie punkta *sprzężone* C i C'. Wyznaczywszy dwie proste m i n takie żeby było $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\frac{m}{n}$,

(*) Zobacz naszą *Geometryę*, wydanie drugie, 1869.

dość tylko z punkta A wyprowadzić jakąkolwiek prostę AE, i wziąć AE $= m$; przez punkt B poprowadzić, równolegle do AE, prostę BF i wziąć na niej BF $=$ BF' $= n$; nakoniec pociągnąć linie EF i EF', które przetną prostę AB w punktach C i C' równo oświeconych przez światła A i B z natężeniami a i b.

Bo, dwa trójkąty podobne CAE i CBF, C'AE i C'BF' dają proporcyę harmoniczną

$$\frac{m}{n} = \frac{CA}{CB} = \frac{C'A}{C'B}.$$

Jeśli $a = b$, punkt C jest we środku linii AB, i punkt C' wydalony w nieskończoność.

310. Można zogólnić zagadnienie punktów równo oświeconych, o których mowa.

Jeśli na średniej harmonicznej CC' *jako średnicy nakreślono koło, każdy punkt* M *jego okręgu będzie równo oświecony przez światła* A i B.

Jakoż, połączmy MA, MB, MC, MC'. Z założenia mamy

$$(1) \qquad \frac{CA}{CB} = \frac{C'A}{C'B};$$

a powiedam że prosta MC, prostopadła do MC', jest dwójsieczną kąta AMB. Bo, jeśli tak nie jest, przez punkt M poprowadźmy prostę MB' taką żeby prosta MC była dwójsieczną kąta AMB', będzie

$$(2) \qquad \frac{CA}{CB'} = \frac{C'A}{C'B'}.$$

Poczem, dzieląc stronami proporcyę (1) przez (2), otrzymamy

$$\frac{CB'}{CB} = \frac{C'B'}{C'B} = \frac{CB' + C'B'}{CB + C'B} = 1;$$

zatem

$$CB' = CB.$$

Więc MC jest dwójsieczną kąta AMB, i daje

$$\frac{MA}{MB} = \frac{CA}{CB} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}};$$

zkąd wywodzimy równanie

$$\frac{a}{\overline{MA}^2} = \frac{b}{\overline{MB}^2},$$

które dowodzi że punkt M jest równo oświecony przez światła A i B.

Jest więcej jeszcze. Całkowitym obrotem półokręgu CMC' około średnicy CC' tworzy się sfera. Więc *powierzchnia sfery, mającej średnię harmoniczną* CC' *za średnicę, jest miejscem punktów równo oświeconych przez światła* A i B.

Łatwo teraz rozwiązać przez geometryę ogólne zagadnienie:

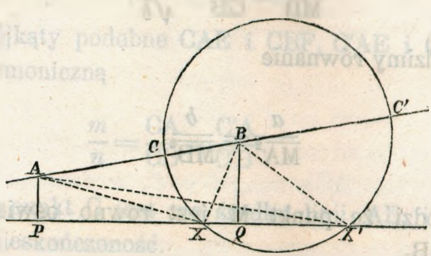
Znaleźć wszystkie punkta przestrzeni równo oświecone przez dwa punkta światłe A i B *z natężeniami* a i b.

Trzeba tylko podzielić prostę AB harmonicznie w stosunku $\sqrt{a} : \sqrt{b}$, i na średniej harmonicznej jako średnicy nakreślić sferę. Punkta powierzchni tej sfery rozwiązują zagadnienie.

Uwaga. W geometrycznem zagadnieniu: *podzielić daną prostę w stosunku średnim i skrajnym*, algebra wskazała rozwiązanie które nie było w jego wysłowieniu, i tym sposobem je zogólniła. Przeciwnie w zagadnieniu algebrycznem dwóch punktów równo oświeconych; geometrya, zogólniając je, dała rozwiązanie zarazem ogólne i wykwintne. Te dwa przykłady są dobitnym dowodem że algebra i geometrya, wspierając się nawzajem, powinny być razem uprawiane.

311. Po tem co poprzedza, nic łatwiejszego jak rozwiązać geometrycznie następujące zagadnienie:

Zagadnienie VII. *Znaleźć na danej prostej* PQ *punkta równo oświecone przez dwa punkta światłe* A i B *w przestrzeni, mające natężenia* a i b.



Trzeba tylko podzielić prostę AB harmonicznie w stosunku $\sqrt{a} : \sqrt{b}$, i na średniej harmonicznej CC′ jako średnicy nakreślić sferę. Przecięcia tej sfery z prostą PQ będą punktami szukanemi.

Zagadnienie ma ogólnie dwa rozwiązania, ale może mieć tylko jedno, albo nawet nie mieć żadnego.

W przypadku szczególnym, gdy dana prosta PQ jest na jednej płaszczyznie z punktami światłemi A i B, zagadnienie łatwo się rozwiązuje przez algebrę.

Jakoż, niech będą dane odległości $AP=p$, $BQ=q$, $PQ=d$; nazywając X jeden z punktów szukanych i czyniąc $PX=x$, mamy zaraz równanie zagadnienia

$$\frac{a}{\overline{AX}^2}=\frac{b}{\overline{BX}^2} \quad \text{to jest} \quad \frac{a}{p^2+x^2}=\frac{b}{q^2+(d-x)^2},$$

albo

$$(a-b)x^2-2adx+a(d^2+q^2)-bp^2=0.$$

Pierwiastki tego równania mogą być rzeczywiste i nierówne, z temi samemi znakami albo ze znakami przeciwnemi; mogą być także rzeczywiste i równe, albo urojone. Ich dyskussya nie przedstawia nic znamienitego; wyjąwszy kiedy $a=b$, wtedy jeden pierwiastek jest nieskończenie wielki, i oznacza że jeden z dwóch punktów równo oświeconych znika w nieskończoności.

312. Zagadnienie VIII. *Znaleźć dwie linie proste, znając ich summę* s *i średnię proporcyonalną* m.

Oznaczamy przez x i y dwie szukane proste. Znajomość jednej z dwóch niewiadomych x albo y wystarczyłaby do rozwiązywania tego zagadnienia, ale z dwiema rozumowanie będzie łatwiejsze; dlatego biorąc je mamy

$$x+y=s,$$

$$xy=m^2.$$

Daliśmy już kilka sposobów rozwiązywania tego układu. Chcemy teraz pokazać że można geometrycznem wykreśleniem znaleźć wartości niewiadomych x i y, nie rozwiązując żadnego równania.

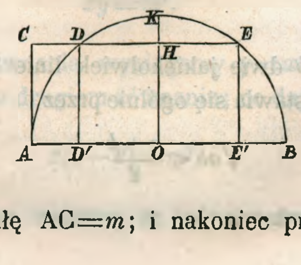
Rugujemy tedy y, i otrzymujemy

$$x^2-sx+m^2=0,$$

Pisząc to równanie wynikowe w następującym kształcie

$$x(s-x)=m^2,$$

widzimy że jedna z dwóch żądanych linij jest x, druga $s-x$. Owoż, aby je wyznaczyć, dość jest, na linii AB$=s$ jako średnicy, nakreślić pół-okrąg AKB; z punktu A wyprowadzić



do AB prostopadłę AC$=m$; i nakoniec przez punkt C poprowadzić sieczną CDE równoległą do AB. Odcinki CD i CE będą dwiema liniami szukanemi.

Jakoż, styczna AC daje

$$CD.CE=m^2;$$

a jest oczywiście

$$CD=AD'=BE' \text{ i } CE=AE', \text{ zatem } CD+CE=s.$$

Znalezione linie CD i CE są pierwiastkami równania wynikowego; bo każda z nich, podstawiona za x, sprawdza to równanie.

Uważając że PRZEZ WIELOCZYN DWÓCH LINIJ NALEŻY ROZUMIEĆ WIELOCZYN DWÓCH LICZB KTÓRE JE MIERZĄ, zagadnienie w mowie będące można tak wysłowić:

Znaleźć dwie linie proste, znając ich summę i wieloczyn.

Ale nie trzeba zapominać że, w geometrycznych wykreśleniach, wieloczyn dwóch linij wyraża się zawsze przez kwadrat ich średniej proporcyonalnej.

DYSKUSSYA. Możebność wykreślenia geometrycznego wymaga żeby styczna AC nie przewyższała promienia $OK=\frac{s}{2}$ prostopadłego do średnicy AB. Więc, żeby zagadnienie miało rozwiązanie, trzeba i dość jest żeby było

$$m \leq \frac{s}{2}.$$

Gdy $m=\frac{s}{2}$ dwie szukane linie są równe, a gdy $m > \frac{s}{2}$ te linie nie istnieją.

Nazywając a i b dwie jakiekolwiek linie proste, powyższa nierówność przedstawia się ogólnie przez

$$\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}.$$

Co wyraża twierdzenie:

Średnia geometryczna dwóch linij, albo dwóch liczb dodatnych, jest mniejsza od ich średniej arytmetycznej; a jest jej równa tylko wtedy kiedy te linie są równe. Co już wiadome (n° 80).

Ztąd można jeszcze wywieśdź dwa następujące twierdzenia:

Wieloczyn dwóch liczb dodatnych, mających summę stateczną, jest największy możebny gdy te liczby są równe. I NAWZAJEM, *summa dwóch liczb dodatnych mających wieloczyn stateczny. jest najmniejsza możebna, gdy te liczby są równe.*

Ale to twierdzenie ze swoją wzajemnicą jest mniej ogólne niż otrzymane w zagadnieniu III.

313. UWAGA. Dopiero co rozwiązane zagadnienie wychodzi na jedno z następującem:

Wyrachować boki prostokąta, znając jego obwód i bok kwadratu równowartego.

Ztąd także wynikają dwa twierdzenia:

1° *Ze wszystkich prostokątów równo obwodowych kwadrat ma największą powierzchnię.*

2° *Ze wszystkich prostokątów równowartych kwadrat ma najmniejszy obwód.*

314. ZAGADNIENIE IX. *Znaleźć dwie linie proste, znając ich różnicę* d *i wieloczyn* m².

Nazywając x i y dwie szukane linie, mamy

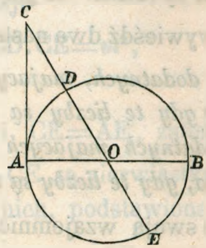
$$x-y=d$$

$$xy=m^2.$$

Z pierwszege równania wyciągamy $y=x-d$, i podstawiamy tę wartość w drugiem równaniu; co daje

$$(1) \qquad x(x-d)=m^2.$$

Pod tym kształtem widzimy że jedna z dwóch szukanych linij jest x, druga $x-d$. Aby je otrzymać, na linii $AB=d$ jako średnicy kreślimy koło, i z punktu A wyprowadzamy do



AB prostopadłę $AC=m$; poczem, przez punkt C i przez środek O koła prowadzimy sieczną, która przecina koło w punktach D i E. Odcinki CE i CD wyrażają niewiadome linie x i $x-d$.

Jakoż, styczna AC daje

$$CD.CE=m^2,$$

a jest oczywiście

$$CE-CD=AB=d.$$

Wykreślenie i temsamem zagadnienie jest zawsze możebne.

Ale nie trzeba myśleć żeby linie CD, CE były pierwiastkami równania (1). Te pierwiastki są jeden do łatny drugi odjemny, i wyznaczają się przez $x=CE$ i $x=-CD$; bo każda z tych wartości podstawiona za x sprawdza równanie (1).

315. Uwaga. Równania drugiego stopnia przywodzą się do kształtu $x^2+px+q=0$. Jeśli x i p oznaczają linie, jednorodność wymaga żeby q było wieloczynem dwóch linij, albo kwadratem ich średniej proporcyonalnej. Nazywając k^2 ten kwadrat, i biorąc wszystkie kombinacye jakie dać mogą

znaki spółczynników, mamy cztery następujące równania

(1) $$x^2-px+k^2=0$$

(2) $$x^2+px+k^2=0$$

(3) $$x^2-px-k^2=0$$

(4) $$x^2+px-k^2=0.$$

Za pomocą dwóch zagadnień VIII i IX można, nie rozwiązując tych równań, otrzymać ich pierwiastki, gdy są rzeczywiste, geometrycznem wykreśleniem.

Jakoż, równanie (1) może wziąć kształt

$$x(p-x)=k^2,$$

który pokazuje że x i $p-x$ są dwiema liniami, których summa równa się linii p, a wieloczyn kwadratowi linii k. Więc, stosując wykreślenie rozwinięte w zagadnieniu VIII, wyznaczamy te dwie linie, i następnie dwie wartości niewiadomej x, które się wyrażają przez $x=$CD i $x=$CE.

Gdy $\frac{p^2}{4}=k^2$ czyli $\frac{p}{2}=k$, sieczna CDE staje się styczną koła; co odpowieda przypadkowi pierwiastków równych. A gdy $k>\frac{p}{2}$, sieczna CDE nie spotyka koła; ta okoliczność oznacza pierwiastki urojone.

Równanie (2) nie ma pierwiastków dodatnych; ale, zamieniając x na $-x$ przywodzi się to równanie do pierwszego. Więc, wykreśliwszy pierwiastki ostatniego, trzeba im dać znak $-$.

Uważajmy teraz równanie (3). Pisząc je w kształcie

$$x(x-p)=k^2,$$

widzimy że x i $x-p$ są dwiema liniami, których różnica jest równa linii p i wieloczyn równy kwadratowi linii k. Więc, otrzymamy te linie za pomocą wykreślania rozwiniętego w zagadnieniu IX. A ponieważ pierwiastki równania (3) mają znaki przeciwne, i pierwiastek dodatny jest liczebnie większy od odjemnego, wartości niewiadomej x wyrażają się przez

$$x = \mathrm{CE} \text{ i } x = -\mathrm{CD}.$$

Nakoniec, równanie (4) przywodzi się do równania (3) przez zamianę x na $-x$. Ale lepiej jest uważać je wprost i, dając mu kształt

$$x(x+p)=k,$$

wyznaczyć linie x i $x+p$ za pomocą wykreślania rozwiniętego w zagadnieniu IX; poczem wziąć dla x wartości wyrażone przez $x=\mathrm{CD}$ i $x=-\mathrm{CE}$, dlatego że pierwiastki równania (3) mają znaki przeciwne i ich summa jest odjemna.

316. Zagadnienie X. *Wyrachować boki prostokąta, mając daną przekątnę k i obwód $2p$.*

Niech będą x i y boki prostokąta. Mamy

$$x+y=p,$$
$$x^2+y^2=k^2.$$

Mnożąc przez 2 obie strony drugiego równania, i odciągając od nich kwadraty stron pierwszego, otrzymujemy

$$(x-y)^2=2k^2-p^2$$

zkąd

$$x-y=\pm\sqrt{2k^2-p^2}.$$

Kombinując przez dodawanie i odciąganie ostatnie równanie z pierwszem, i przypuszczając bok x większy od y, znajdujemy rozwiązanie

$$x=\frac{1}{2}(p+\sqrt{2k^2-p^2}),$$

$$y=\frac{1}{2}(p-\sqrt{2k^2-p^2}).$$

Dyskussya. Otrzymane wartości boków powinny być rzeczywiste i dodatne; co wymaga żeby było

$$p<k\sqrt{2}, \quad \text{i} \quad p>\sqrt{2k^2-p^2}, \quad \text{zkąd} \quad p>k.$$

Więc możebność zagadnienia wyraża się podwójnym warunkiem

$$k < p < k\sqrt{2}.$$

Jeśli $p = k\sqrt{2}$, wtedy bok $x = \frac{p}{2} = y$, i prostokąt jest kwadratem

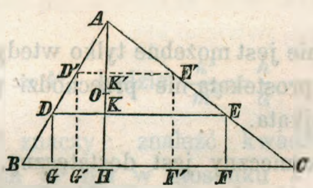
Jeśli $p = k$, będzie $x = p$, $y = 0$; wtenczas prostokąt staje się linią prostą długości p.

317. Ztąd się łatwo wywodzą dwa następujące twierdzenia:

1° *Ze wszystkich prostokątów z daną przekątną, kwadrat ma największy obwód.*

2° *Ze wszystkich prostokątów z danym obwodem, kwadrat ma największą prostokątnę.*

318. Zagadnienie XI. *Wpisać w trójkąt* ABC *prostokąt* DEFG *równowarty danemu kwadratowi* m².



Nazwijmy a i h podstawę BC i wysokość AH danego trójkąta, i oznaczmy przez x i y podstawę i wysokość niewiadomego prostokąta. Wyrażając że powierzchnia szukanego prostokąta jest równowarta kwadratowi m^2, mamy zaraz pierwsze równanie

$$xy = m^2.$$

Aby mieć drugie, trzeba wprowadzić ilości wiadome a i h.

Owoż, dwa trójkąty podobne ADE i ABC dają proporcyę

$$\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{BC}}=\frac{\mathrm{AK}}{\mathrm{AH}};$$

więc, podstawiając wartości tych linij, otrzymujemy

$$\frac{x}{a}=\frac{h-y^2}{h}.$$

Bardzo łatwo można teraz wyrugować jedną z dwóch niewiadomych, naprzykład x; dość tylko pomnożyć obie strony ostatniego równania przez y, i zastąpić xy przez m^2; będzie

$$\frac{m^2}{a}=\frac{hy-y^3}{h},$$

albo

$$ay^2-ahy+hm^2=0.$$

Dyskussya. Przede wszystkiem trzeba żeby pierwiastki znalezionego równania były rzeczywiste; co wymaga żeby było

$$a^2h^2-4ahm^3\geqslant 0, \quad \text{zkąd} \quad m^2\leqslant\frac{ah}{4}.$$

Więc zagadnienie jest możebne tylko wtedy, kiedy powierzchnia szukanego prostokąta nie przechodzi połowy powierzchni zadanego trójkąta.

Ten warunek konieczny jest dostateczny. Albowiem jeśli mu staje się zadość, oba pierwiastki równania są dodatne; ponieważ ich wieloczyn $\frac{hm^2}{a}$ i summa h są dodatne. Oczywiście te pierwiastki są mniejsze od h. Więc, jeśli $m^2<\frac{ah}{4}$, istnieją dwa prostokąty DEFG i D'E'F'G' które rozwiązują zagadnienie; a jeśli $m^2=\frac{ah}{4}$, te dwa prostokąty schodzą się w jeden, i zagadnienie ma tylko jedno rozwiązanie.

Zważając że summa wysokości y=KH i y=K'H dwóch prostokątów jest równa wysokości h trójkąta, pojmujemy że, o ile wysokość jednego z tych prostokątów przewyższa $\frac{h}{2}$ o tyle wysokość drugiego musi być niższa od $\frac{h}{2}$. Ztąd wnosimy że podstawy wyższe DE i D'E' dwóch prostokątów rozwiązujących zagadnienie, są równo oddalone od środka O wysokości AH.

Uwaga. Z prostokątów wpisanych w trójkąt, największy jest ten którego podstawa wyższa przechodzi przez środek odpowiedającej wysokości; czego dowodzi $m^2 \leqslant \frac{ah}{4}$.

319. Wykreślenie geometryczne. Dając ostatniemu równaniu kształt

$$y(h-y)=\frac{hm^2}{a},$$

można łatwo wyznaczyć jego pierwiastki geometryczną budową.

Jakoż, połóżmy

$$\frac{hm^2}{a}=k^2, \text{ będzie } \frac{k^2}{m^2}=\frac{h}{a}.$$

Ostatnia równość znaczy: znaleźć kwadrat k^2, któryby z danym kwadratem m^2 był w stosunku $h:a$. Geometrya naucza wykreślenia tego kwadratu,

Tym sposobem równanie przekształca się na następujące

$$y(h-y)=k^2.$$

i zagadnienie przywodzi się de już rozwiązanego.

320. Zagadnienie XII. *Znaleźć boki trójkąta prostokątnego, znając jego obwód* 2p *i powierzchnię* m^2.

Niech będą z przeciwprostokątna, x i y dwa inne boki trójkąta; mamy zaraz równania zagadnienia

$$(1)\qquad \begin{aligned} x^2+y^2&=z^2,\\ x+y+z&=2p,\\ xy&=2m^2. \end{aligned}$$

Rugując z, otrzymujemy

$$x^2+y^2=(2p-x-y)^2=4p^2-4p(x+y)+x^2+4m^2+y^2;$$

zkąd

$$x+y=\frac{m^2+p^2}{p}.$$

Znajdujemy więc przeciwprostokątnę

$$(2)\qquad z=2p-\frac{m^2+p^2}{p}=\frac{p^2-m^2}{p}.$$

Co do boków x i y, one są pierwiastkami równania

$$(3)\qquad pX^2-(m^2+p^2)X+2pm^2=0.$$

Dyskussya. Możebność zagadnienia wymaga żeby boki x, y, z były rzeczywiste i dodatne.

Owoż, znaleziona wartość boku z jest zawsze rzeczywista; żeby była dodatna, powinno być

$$m<p.$$

Do tego, pierwiastki równania (3) są oczywiście dodatne jeśli są rzeczywiste, to jest jeśli staje się zadość warunkowi

$$(m^2+p^2)^2-8m^2p^2\geqq 0.$$

Ta nierówność przywodzi się do

$$(p^2-m^2)^2\geqq 4m^2p^2;$$

zkąd, ponieważ już powinno być $m<p$, wyciągamy

$$p^2-m^2\geqq 2mp.$$

Ale ostatniej nierówności wolno dać kształt następujący

$$2p^2\geqq m^2+2pm+p^2;$$

zkąd

$$m+p\leqq p\sqrt{2}.$$

Więc ostatecznie trzeba żeby było

$$m \leqslant p(\sqrt{2}-1).$$

Ten warunek zawiera oczywiście poprzedzający; więc jest konieczny i dostateczny.

Jeśli jest dopełniony, zagadnienie ma jedno rozwiązanie. W przypadku szczególnym w którym

$$m = p(\sqrt{2}-1),$$

pierwiastki równania (3) są równe, i trójkąt prostokątny jest równoramienny.

321. Uwaga. Gdy p jest dane, największa wartość możebna dla m jest

$$m = p(\sqrt{2}-1);$$

a gdy przeciwnie m jest dane, najmniejsza wartość możebna dla p jest

$$p = \frac{m}{\sqrt{2}-1} = m(\sqrt{2}+1).$$

Ztąd wynikają dwa twierdzenia:

1° *Ze wszystkich trójkątów prostokątnych równego obwodu, trójkąt równoramienny ma największą powierzchnię.*

2° *Ze wszystkich trójkątów prostokątnych równej powierzchni, trójkąt równoramienny ma najmniejszy obwód.*

322. Zagadnienie XIII. *Wyrachować boki trójkąta prostokątnego, znając jego obwód* 2p *i długość* d *dwójsiecznej kąta prostego.*

Równania zagadnienia są

$$x + y + z = 2p$$

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

$$xy\sqrt{2} = d(x+y).$$

Otrzymuje się łatwo ostatnie wyrażając że powierzchnia uważanego trójkąta jest summą powierzchni dwóch trójkątów mających dwójsieczną d za bok spólny.

Z dwóch pierwszych równań wynika

$$xy = 2p(p-z);$$

a ponieważ pierwsze równanie daje

$$x+y = 2p-z;$$

podstawiając te wartości wieloczynu xy i summy $x+y$ w trzeciem równaniu, znajdujemy

$$z = \frac{2p(p\sqrt{2}-d)}{2p\sqrt{2}-d}.$$

Mamy zatem

$$x+y = \frac{2p^2\sqrt{2}}{2p\sqrt{2}-d},$$

$$x^2+y^2 = \frac{4p^2(p\sqrt{2}-d)^2}{(2p\sqrt{2}-d)^2}.$$

Jeśli teraz pomnożymy przez 2 obie strony ostatniego równania, i odciągniemy od nich strony przedostatniego, podniesione do kwadratu, będziemy mieli

$$(x-y)^2 = \frac{8p^2(d^2-2dp\sqrt{2}+p^2)}{(2p\sqrt{2}-d)^2},$$

zkąd

$$x-y = \pm\frac{2p\sqrt{2}\sqrt{d^2-2dp\sqrt{2}+p^2}}{2p\sqrt{2}-d}.$$

Znając summę i różnicę niewiadomych x i y, znajdujemy

$$x = \frac{p\sqrt{2}}{2p\sqrt{2}-d}\left(p\pm\sqrt{d^2-2dp\sqrt{2}+p^2}\right),$$

$$y = \frac{p\sqrt{2}}{2p\sqrt{2}-d}\left(p\mp\sqrt{d^2-2dp\sqrt{2}+p^2}\right).$$

Dyskussya. Żeby wartości x i y były rzeczywiste, powinno być

$$d^2-2dp\sqrt{2}+p^2 \geqq 0.$$

albo, co to samo,

$$(d-p\sqrt{2})^2 \geqq p^2.$$

Zkąd

$$d-p\sqrt{2}>p \quad \text{albo} \quad p\sqrt{2}-d>p.$$

Jedna z tych dwóch nierówności musi koniecznie mieć miejsce, to jest

$$(1) \quad d<p(\sqrt{2}-1) \quad \text{albo} \quad (2) \quad d>p(\sqrt{2}+1).$$

Ale trzeba także żeby wartości x, y i z były dodatne; co wymaga najpierwej żeby summa $x+y$ była dodatna, to jest żeby było

$$(3) \qquad d<2p\sqrt{2}.$$

Zatem, żeby z było dodatne, musi być

$$(4) \qquad d<p\sqrt{2}.$$

Ostatni warunek konieczny odsuwa warunek (2), jest dostateczny żeby x i y były dodatne. Zostają tedy trzy warunki konieczne (1), (3), (4); a że pierwszy zawiera dwa drugie, więc on jest jedynym warunkiem możebności zagadnienia.

Gdy $d=p(\sqrt{2}-1)$, wtedy $x=y$. Ztąd wynika twierdzenie:

Ze wszystkich trójkątów prostokątnych równoobwodowych trójkąt równoramiany ma największą dwójsieczną kąta prostego.

323. Zagadnienie XIV. *W trójkącie* ABC *wyrachować boki kąta* A, *mając daną ich summę* k, *bok przeciwległy* BC$=a$ *i wysokość odpowiedającą* AD$=h$.

Ponieważ wiadoma jest summa boków AB i AC, weźmy ich różnicę za niewiadomę posiłkową z; będzie

$$\mathrm{AB}+\mathrm{AC}=k, \quad \mathrm{AB}-\mathrm{AC}=z,$$

zkąd

$$AB = \frac{k+z}{2}, \quad AC = \frac{k-z}{2}.$$

Owoż w trójkącie ABC, biorąc kwadrat boku AB, mamy

$$\left(\frac{k+z}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{k-z}{2}\right)^2 \mp 2a\sqrt{\left(\frac{k-z}{2}\right)^2 - h^2},$$

zkąd, po wykonaniu i uproszczeniu rachunków, wynika równanie

$$(k^2 - a^2)z^2 = a^2k^2 - a^4 - 4a^2h^2,$$

które daje

$$z = a\sqrt{1 - \frac{4h^2}{k^2 - a^2}}.$$

Ta wartość podstawiona w wyrażeniach boków AB i AC, rozwiązuje zagadnienie.

Dyskussya. Możebność zagadnienia wymaga żeby z było rzeczywiste, to jest trzeba żeby było

$$h^2 \leq \frac{k^2 - a^2}{4}.$$

Ten warunek konieczny jest dostateczny.

Jeśli $h^2 = \frac{k^2 - a^2}{4}$, będzie $z = 0$, zatem AB$=$AC; wtedy trójkąt jest równoramienny i jego wysokość, odpowiedająca bokowi a, jest najmniejsza możebna.

324. Zagadnienie XV. *Znaleźć proporcyę, znając summę* 4a *czterech cwyrazów, summę* 4b² *ich kwadratów i summę* $4c^3$ *ich sześcianów.*

Bierzemy za niewiadome posiłkowe : różnicę $4r$ między summą skrajnych i summą średnich; wieloczyn t skrajnych równy wieloczynowi średnich. Poczem, nazywając x, y, z, u cztery szukane liczby w proporcyi, mamy

$$x+u+(y+z)=4a,$$

$$x+u-(y+z)=4r;$$

zkąd

$$(1)\quad \begin{cases} x+u=2a+2r, \\ y+z=2a-2r. \end{cases}$$

Mamy także

$$(2)\quad xu=yz=t.$$

Dość więc będzie wyznaczyć r i t, aby otrzymać x, y, z, u.

Owoż, z równań (1) i (2) wywodzimy łatwo summę kwadratów czterech niewiadomych x, y, z, u,

$$4b^2+4t=8a^2+8r^2,$$

zkąd

$$(3)\quad t-2r^2=2a^2-b^2.$$

Z tych samych równań wywodzimy summę sześcianów

$$x^3+u^3+3xu(x+u)+y^3+z^3+3yz(y+z)=16a^3+48ar^2,$$

albo

$$4c^3+12at=16a^3+48ar^2;$$

zkąd

$$(4)\quad 3a(t-4r^2)=4a^3-c^3.$$

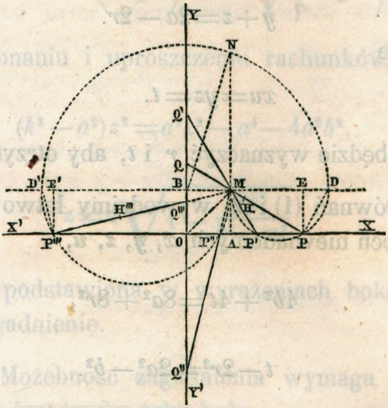
Równania (3) i (4) dają

$$t=\frac{8a^3-6ab^2+c^3}{3a}, \qquad r=\pm\sqrt{\frac{2a^3-3ab^2+c^3}{6a}}.$$

Podstawiając te wartości w równaniach (1) i (2), znajduje się summy $x+u$, $y+z$, i wieloczyny ux, yz; poczem łatwo już otrzymać cztery szukane wyrazy proporcyi.

Ten przykład dobrze pokazuje jak trafnie dobrane niewiadome posiłkowe ułatwiają rozwiązywanie zagadnień.

325. Zagadnienie XVI (*). *Przez punkt* M, *wzięty na dwójsiecznej kąta prostego, poprowadzić sieczną taką żeby jej część, zawarta między ramionami tego kąta, albo ich przedłużeniami, miała długość daną* m.



Nazwijmy a bok kwadratu OAMB mającego przekątnę OM, i niech będzie MP jedna z siecznych rozwiązujących zagadnienie, na której $PQ = m$. Wybór niewiadomej jest dowolny, ale nie obojętny; trzeba, o ile można, wybierać za niewiadomę tę która ma mieć najmniej wartości, a przynajmniej taką która prowadzi do równania najmniej zawiłego. Gdy jest dana summa dwóch niewiadomych, dobrze jest nieraz wziąć za niewiadomę posiłkową ich wieloczyn albo ich różnicę, a często nawet lepiej *połowę tej różnicy*; a gdy jest dany wieloczyn dwóch niewiadomych trzeba wziąć ich summę za niewiadomę

(*) Zagadnienie Pappusa, Matematyka Alexandryjskiego który żył około roku 400 ery chrześciańskiej.

posiłkową. Widzieliśmy już w mnogich przykładach użytek niewiadomych posiłkowych; zobaczymy jeszcze wydatniej w obecnym przykładzie że, od trafnego wyboru niewiadomych, zależy wykwintna prostota rozwiązań. Na pierwszy rzut oka zdaje się rzeczą bardzo naturalną wziąć, na przykład, odległość OP za niewiadomę. Nie zważając na to że punkt P może mieć na linii XX′ cztery rożne położenia P, P′, P″, P‴, i tym sposobem nadawać niewiadomej cztery różne wartości OP, OP′, OP″, OP‴, które poprowadzą do równania 4^{go} stopnia, probujemy tego rozwiązania, i, oznaczając przez x *odciętę* OP, przez y *rzędnę* OQ, mamy zaraz, przez trójkąt prostokątny OPQ, jedno równanie zagadnienia

$$(1) \qquad x^2+y^2=m^2.$$

Aby otrzymać drugie, dość uważać że trójkąt OPQ jest summą trójkątów OPM i OQM; co daje

$$OP.OQ=OP.MA+OQ.MB;$$

ztąd, podstawiając wartości

$$OP=x, \quad OQ=y, \quad MA=MB=a,$$

wywodzimy

$$(2) \qquad xy=a(x+y).$$

Łatwo się zapewnić że równania (1) i (2) stosują się do wszystkich położeń siecznej MP; jeśli, jako zwykle, x jest uważane za dodatne albo odjemne, według jak punkt P leży na prawo albo na lewo punktu O; a zaś y za dodatne albo odjemne, według jak punkt Q znajduje się wyżej albo niżej punktu O. Owoż, jakiekolwiek są znaki spółrzędnych x i y, równanie (1) zostaje oczywiście to samo; trzeba więc tylko sprawdzić równanie (2). Co nie przedstawia żadnej trudności, dlatego że w kącie XOY trójkąt OPQ jest summą trójkątów OMP, OMQ, a w kątach X′OY i XOY′ jest ich różnicą.

To ustaliwszy, jeśli wyrugujemy y między równaniami (1) i (2), znajdziemy

$$x^2+\frac{a^2x^2}{(x-a)^2}=m^2,$$

albo

$$x^4-2ax^3-(m^2-2a^2)x^2+2am^2x-a^2m^2=0;$$

równanie zupełne 4^{go} stopnia, mające cztery pierwiastki które odpowiedają czterem położeniom siecznej MP. Rozwiązywanie ogólne równań 4^{go} stopnia należy do algebry wyższej; ale nasze równanie przedstawia szczególną okoliczność, ktora je przywodzi do 2^{go} stopnia. Jakoż, zmieniając znaki i szykując wedle potęg rosnących niewiadomej x, nietrudno odkryć że pierwsza strona równania jest różnicą kwadratów

$$\left(am-mx-\frac{a}{m}x^2\right)^2-\left(\frac{a^2}{m^2}+1\right)x^4=0,$$

albo

$$(a^2+m^2)x^4-(ax^2+m^2x-am)^2=0.$$

Więc znalezione równanie rozkłada się na dwa równania drugiego stopnia

$$(\sqrt{a^2+m^2}+a)x^2+m^2x-am^2=0,$$
$$(\sqrt{a^2+m^2}-a)x^2-m^2x+am^2=0,$$

które dają ogólnie cztery rozwiązania zagadnienia. Pierwiastki pierwszego równania są zawsze rzeczywiste, i znaków przeciwnych; ale pierwiastki drugiego mogą być rzeczywiste i nierówne, albo rzeczywiste i równe, albo nawet urojone. Żeby drugie równanie miało pierwiastki rzeczywiste, powinno być

$$m^4-4am^2(\sqrt{a^2+m^2}-a)\geqq 0,$$

albo

$$(m^2+4a^2)^2 \geqq 16a^2(a^2+m^2);$$

zkąd

$$m \geqq 2a\sqrt{2}.$$

Owoż, $a\sqrt{a}=$OM; więc najmniejsza długość m jaką może mieć sieczna, poprowadzona przez punkt M dwójsiecznej kąta prostego XOY i zawarta między jego ramionami, jest równa dwa razy wziętej odległości OM i do niej prostopadła.

Zatem, jeśli $m>2a\sqrt{2}$, zagadnienie *Pappusa* ma cztery rozwiązania; jeśli $m=2a\sqrt{2}$, to ma ich trzy; a jeśli $m<2a\sqrt{2}$, to istnieją tylko dwa rozwiązania.

326. Nie rozwiązując dwóch powyższych równań, łatwo wyznaczyć ich pierwiastki przez geometrye; trzeba tylko dać tym równaniom kształt $x^2+px+k^2=0$, kreśląc trzecie proporcyonalne $\frac{m^2}{\sqrt{a^2+m^2}+a}$, $\frac{m^2}{\sqrt{a^2+m^2}-a}$ i potem średnie proporcyonalne $\frac{am^2}{\sqrt{a^2+m^2}+a}$, $\frac{am^2}{\sqrt{a^2+m^2}-a}$. Czego uczy geometrya do której odsyłamy.

Ale można działać inaczej. Zamiast rugować y między dwoma równaniami

$$x^2+y^2=m^2, \qquad xy=a(x+y),$$

pomnóżmy przez 2 obie strony drugiego i dodajmy do stron pierwszego; będzie

$$(x+y)^2-2a(x+y)-m^2=0,$$

zkąd

$$x+y=a\pm\sqrt{a^2+m^2}.$$

Zatem

$$xy=a(a\pm\sqrt{a^2+m^2}).$$

Te wartości, w których znaki wyższe pierwiastników powinny być brane razem, i niższe także razem, pokazują że niewiadome x i y są pierwiastkami podwójnego równania drugiego stopnia

$$X^2-(a\pm\sqrt{a^2+m^2})X+a(a\pm\sqrt{a^2+m^2})=0.$$

Gdyby rozwiązano te dwa równania, otrzymanoby cztery wartości dla x i cztery odpowiedające dla y; co stanowi ogólnie cztery rozwiązania zagadnienia, znalezione metodą różną od poprzedzającej.

Nie ma jednak potrzeby znać tych wartości, aby mieć wszystkie rozwiązania obecnego zagadnienia; dość tylko wyznaczyć summę $x+y$ albo wieloczyn xy; bo umiemy zbudować trójkąt, mając dany kąt O, bok mu przeciwległy m, i summę albo wieloczyn dwóch innych boków. Wykreślając obie wartości summy $x+y$, możnaby dać inne rozwiązanie zagadnienia; ale ono jest tylko przekształceniem daleko piękniejszego które zostawiamy na koniec.

Jest wiele sposobów rozwiązywania zągadnienia *Pappusa*, wskażemy najznamienitsze.

327. Zamiast brać OP za niewiadomę uczyńmy $\mathrm{AP}=x$, będzie

$$\mathrm{OQ}=\sqrt{m^2-(a+x)^2}.$$

Owoż, dwa trójkąty OPQ, APM dają

$$\frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{AM}}=\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{AP}},\quad \text{zkąd}\quad \mathrm{OQ}=\frac{a(a+x)}{x};$$

więc, porównywając dwie wartości linii OQ, otrzymujemy

$$\sqrt{m^2-(a+x)^2}=\frac{a(a+x)}{x},$$

albo

$$x^4+2ax^3+(2a^2-m^2)x^2+2a^3x+a^4=0;$$

równanie zupełne 4^{go} stopnia. Ale, przypatrując się spółczynnikom, odkrywamy że to równanie jest wzajemne względem a^2, to jest nie zmienia się przez zamianę x na $\frac{a^2}{x}$. Dzielimy więc przez x^2, i dajemy równaniu kształt następujący

$$x^2+\frac{a^4}{x^2}+2a\left(x+\frac{a^2}{x}\right)+2a^2-m^2=0.$$

Potem, czyniąc

$$x+\frac{a^2}{x}=u \quad \text{zkąd} \quad x^2+\frac{a^4}{x^2}=u^2-2a^2,$$

otrzymujemy równanie 2go stopnia

$$u^2+2au-m^2=0,$$

które daje

$$u=-a\pm\sqrt{a^2+m^2}.$$

Znając u, łatwo już znaleźć wartości niewiadomej x.

Uwaga. Gdyby, pozbywszy się pierwiastnika, zostawiono mianownik i wykonano kwadraty, byłoby

$$m^2-x^2-2ax=2a^2+\frac{2a^3}{x}+\frac{a^4}{x^2}.$$

Owoż, temu równaniu można dać kształt

$$x^2+2a^2+\frac{a^4}{x^2}+2a\left(x+\frac{a^2}{x}\right)=m^2$$

albo

$$\left(x+\frac{a^2}{x}\right)^2+2a\left(x+\frac{a^2}{x}\right)=m^2;$$

to pokazuje że, czyniąc

$$x+\frac{a^2}{x}=u,$$

otrzymujemy równanie drugiego stopnia

$$u^2+2au-m^2=0,$$

jako wyżej.

328. Newton, uważając że sieczne PQ i P′Q′, P″Q″ i P‴Q‴ są symetryczne względem dwójsiecznej OM, wziął odległość środka H jednej z nich od punktu O za niewiadomę y, dlatego że ta niewiadoma będzie miała tylko dwie wartości różne : zatem równanie 4^{go} stopnia na y, mając dwa pierwiastki podwójne, albo równe po dwa i znaków przeciwnych, będzie przywiedne do 2^{go} stopnia. W istocie równanie na y jest dwukwadratowe. Jakoż, czyniąc $MH=y$, mamy

$$MP=y+\frac{m}{2},\quad MQ=y-\frac{m}{2},\quad AP=\sqrt{\left(y+\frac{m}{2}\right)^2-a^2};$$

więc, z przyczyny równoległej OB do AM, będzie

$$\frac{y+\frac{m}{2}}{y-\frac{m}{2}}=\frac{\sqrt{\left(y+\frac{m}{2}\right)^2-a^2}}{a},$$

albo

$$2a(2y+m)=(2y-m)\sqrt{(2y+m)^2-4a^2},$$

i nakoniec

$$16y^4-8(4a^2+m^2)y^2+m^4-8a^2m^2=0.$$

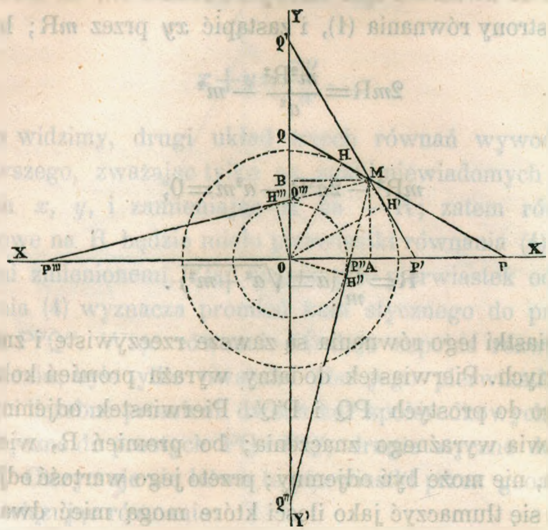
Rozwiązując to równanie dwukwadratowe, otrzymujemy

$$y=\sqrt{a^2+\frac{m^2}{4}\pm a\sqrt{a^2+m^2}}.$$

Pierwsza wartość jest zawsze rzeczywista i daje dwie linie P″Q″ P‴Q‴; druga, jeśli nie jest urojona, daje dwie linie MP, MP′, które schodzą się w jedną gdy $m=2a\sqrt{a}$.

329. Gergonne, widząc że cztery sieczne, MP, MP′; MP″, MP‴ są po dwie równo oddalone od wierzchołka kąta O, wziął za

niewiadomę odległość OH jednej z siecznych od punktu O;



dlatego że ta niewiadoma, mając tylko dwie różne wartości, zależy od równania drugiego stopnia.

Znając ją łatwo już dokończyć zagadnienia.

Uczyńmy więc OH$=$R. Zachowując niewiadome posiłkowe OP$=x$, OQ$=y$, mamy zaraz dwa równania

$$(1)\qquad x^2+y^2=m^2,$$

$$(2)\qquad xy=m\mathrm{R}.$$

Otrzymuje się trzecie równanie, do którego wchodzi ilość wiadoma a, wyrażając że trójkąt OPQ jest summą trójkątów OMP i OMQ; co daje

$$xy=ax+ay$$

albo

$$(3)\qquad x+y=\frac{xy}{a}.$$

Trzeba teraz wyrugować x i y. Aby tego dokazać, dość jest podnieść do kwadratu obie strony równania (3), od nich odciągnąć strony równania (1), i zastąpić xy przez mR; będzie

$$2m\mathrm{R}=\frac{m^2\mathrm{R}^2}{a^2}-m^2$$

albo

$$(4) \qquad m\mathrm{R}^2-2a^2\mathrm{R}-a^2m=0,$$

zkąd

$$\mathrm{R}=\frac{a}{m}(a\pm\sqrt{a^2+m^2}).$$

Pierwiastki tego równania są zawsze rzeczywiste i znaków przeciwnych. Pierwiastek dodatny wyraża promień koła OH stycznego do prostych PQ i P′Q′. Pierwiastek odjemny nie przedstawia wyraźnego znaczenia; bo promień R, wielkość samoista, nie może być odjemny; przeto jego wartość odjemna nie daje się tłumaczyć jako ilości które mogą mieć dwa kierunki przeciwne. Musimy więc szukać wprost nowego równania, któreby wyznaczało odległości punktu O od dwóch siecznych P″Q″ i P‴Q‴.

Biorąc sieczną P‴Q‴ i czyniąc OP‴$=x$, OQ‴$=y$, mamy pierwsze równanie

$$x^2+y^2=m^2.$$

Co do drugiego, trzeba uważać że, na mocy ugody znaków, odcięta x punktu P‴ jest odjemna, a rzędna y punktu Q‴ dodatna; przeciwnie dla siecznej P″Q″, odcięta x punktu P″ jest dodatna a zaś rzędna y punktu Q″ odjemna. Ztąd wynika że powierzchnia trójkąta OP‴Q‴, albo trójkąta OP″Q″, przedstawia się przez $-\frac{xy}{2}$. Więc drugie równanie jest

$$-xy=mr \quad \text{albo} \quad xy=-m\mathrm{R}.$$

Otrzymuje się trzecie równanie, wyrażając że trójkąt OP‴Q‴

jest różnicą trójkątów OMP‴ i OMQ‴; co daje

$$-xy=-ax-ay$$

albo

$$x+y=\frac{xy}{a}.$$

Jako widzimy, drugi układ trzech równań wywodzi się z pierwszego, zważając tylko na znaki niewiadomych posiłkowych x, y, i zamieniając R na $-$R; zatem równanie wynikowe na R będzie miało pierwiastki równania (4) ale ze znakami zmienionemi. Ztąd wnosimy że pierwiastek odjemny równania (4) wyznacza promień koła stycznego do prostych P″Q″ i P‴Q‴. Więc równanie (4) daje zupełne rozwiązanie zagadnienia; byle tylko uważano oba jego pierwiastki jako wartości liczebne promieni dwóch kół spółśrodkowych, pierwsze styczne do prostych PQ i P′Q′, drugie styczne do P″Q″ i P‴Q‴. Otrzymuje się łatwo te pierwiastki przez geometrye, nie rozwiązując równania.

Żeby zagadnienie miało cztery rozwiązania, trzeba żeby punkt M, z którego się prowadzi cztery styczne do dwóch kół spółśrodkowych, był zewnątrz okręgu większego, to jest żeby promień tego okręgu był mniejszy od OM$=a\sqrt{2}$. Wyrażamy więc że pierwiastek dodatny równania (4) jest mniejszy od $a\sqrt{2}$, i mamy.

$$\frac{a}{m}(a+\sqrt{a^2+m^2})<a\sqrt{2};\quad \text{zkąd}\quad m>2a\sqrt{2},$$

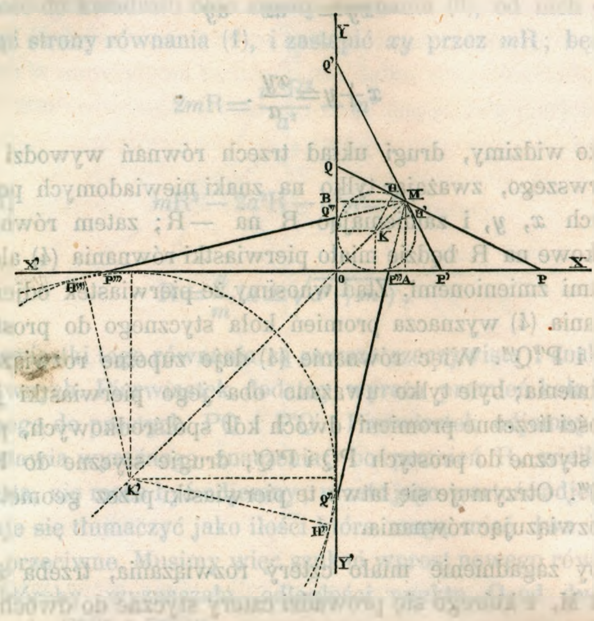
wynik już wiadomy.

330. Zagadnienie Pappusa rozwiązuje się łatwo za pomocą koła wpisanego w trójkąt OPQ. Jakoż, nazywając r promień tego koła, znajdujemy, jako wprzódy, dwa równania

$$(1)\qquad x^2+y^2=m^2,$$

$$(2)\qquad xy=a(x+y);$$

a wyrażając powierzchnię trójkąta OPQ w funkcyi jego obwo-



du i promienia koła wpisanego, otrzymujemy trzecie równanie

$$(3) \qquad xy = (m + x + y)r.$$

Aby teraz wyrugować x i y, porównywając dwa ostatnie równania wyciągamy wartość summy

$$x + y = \frac{mr}{a - r};$$

poczem, mnożąc drugie równanie przez 2, i dodając stronami do pierwszego, mamy

$$(x + y)^2 = m^2 + 2a(x + y);$$

nakoniec, podstawiając wartość summy $x + y$, znajdujemy

$$\frac{m^2 r^2}{(a - r)^2} = m^2 + \frac{2amr}{a - r},$$

albo

$$(4) \qquad 2r^2+2(m-a)r-am=0.$$

Zkąd

$$r=\frac{1}{2}(a-m\pm\sqrt{a^2+m^2}).$$

Pierwiastki tego równania są rzeczywiste i znaków przeciwnych. Pierwiastek dodatny wyraża promień koła wpisanego w trójkąt OPQ i stycznego do prostych PQ, P'Q', Co do pierwiastku odjemnego, można się domyślać że jego wartość liczebna wyraża promień koła stycznego do prostych P''Q'', P'''Q'''. Ale trzeba to sprawdzić, szukając wprost równania które wyznacza ten promień.

Owoż, biorąc koło zawpisane w trójkąt OP'''Q''' względnie do boku OP''', mamy zawsze pierwsze równanie

$$x^2+y^2=m^2.$$

Otrzymujemy dwa drugie, raz uważając że trójkąt OP'''Q''' jest różnicą trójkątów OMP''' i OMQ''', drugi raz wyrażając powierzchnię tego trójkąta w funkcyi jego obwodu i promienia koła wpisanego; co daje

$$xy=a(x+y),$$

$$-xy=(m+x+y)r \quad \text{albo} \quad xy=-(m+x+y)r.$$

Oczywiście wywodzi się te trzy równania z trzech poprzedzających, zważając na znaki niewiadomych posiłkowych x, y, i zmieniając tylko r na $-r$. Ztąd wnieść należy że równanie wynikowe na r ma pierwiastki równania (4) ale ze znakami zmienionemi, tak że pierwiastek odjemny tego równania jest pierwiastkiem dodatnym tamtego. Więc równanie (4) daje zupełne rozwiązanie zagadnienia; byle tylko wartości samoiste dwóch jego pierwiastków, były uważane jako długości promieni dwóch kół, pierwsze wpisane w trójkąt OPQ i styczne do dwóch prostych PQ, i P'Q', drugie zawpisane w trójkąt OP'''Q''' względnie do boku OP''', i styczne do dwóch prostych P''Q'' i P'''Q'''.

Żeby zagadnienie miało cztery rozwiązania, trzeba żeby punkt M był zewnątrz okręgu KH, to jest żeby odległość KM była większa od promienia r; co się wyraża przez nierówność

$$a\sqrt{2}-r\sqrt{2}>r \quad \text{albo} \quad a\sqrt{2}>(\sqrt{2}+1)r.$$

Jeśli za r podstawimy pierwiastek dodatny, który jest długością promienia KH, będzie

$$2a\sqrt{2}>(\sqrt{2}+1)(a-m+\sqrt{a^2+m^2}),$$

albo

$$\frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}>a-m+\sqrt{a^2+m^2},$$

$$2a\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)>a-m+\sqrt{a^2+m^2};$$

zkąd ostatecznie

$$m>2a\sqrt{2}.$$

Gdyby za niewiadomę wzięto odległość OK $=u$, ponieważ $r=\frac{u}{\sqrt{2}}$, podstawiając tę wartość mianoby równanie

$$u^2+(m-a)u\sqrt{2}-am=0,$$

którego pierwiastki są zawsze rzeczywiste i znaków przeciwnych; dodatny wyraża odległość OK, odjemny odległość przeciwną OK'.

331. Różne metody któremi rozwiązano zagadnienie Pappusa są niezaprzeczalnie wybornemi ćwiczeniami algebry i geometryi; dlategośmy je obszernie wyłożyli. Dajemy nakoniec najwykwintniejsze rozwiązanie, które się znajduje *w zbiorach matematycznych* tego znamienitego w starożytności autora.

Przypuszczając że prosta PQ, leżąca w kącie XOY (fig. stronicy 636), zadość czyni wysłowieniu zagadnienia, wyprowadźmy do tej linii z punktu P prostopadłę PD aż do przecięcia D z prostą MB. Oczywiście, gdyby znano długość MD, rozwiązanoby zagadnienie; bo wtedy dość byłoby wykreślić na MD jako średnicy półokrąg, któryby przeciął OX w punkcie P; łącząc MP mianoby żądaną prostę PQ. Bez wątpienia nie przychodzi zaraz na myśl brać długość BD za niewiadomę; a jednakże tak czyniąc, otrzymuje się zadziwiającej prostoty rozwiązanie które, zdaje się, więcej szczęśliwy traf niż przezorność nastręczyła.

Niech będzie więc $BD=z$; bierzemy do tego niewiadomę posiłkową $PD=u$ i spuszczamy prostopadłę PE na BD. Ponieważ dwa trójkąty prostokątne MBQ, PDE są równe, będzie $MQ=PD$. Mamy zatem, w trójkącie prostokątnym MPD,

$$\overline{MD}^2=\overline{MP}^2+\overline{PD}^2, \quad \text{i} \quad MD.PE=MP.PD;$$

co daje dwa równania o dwóch niewiadomych

$$(z-a)^2=(m-u)^2+u^2, \quad (z-a)a=(m-u)u.$$

Otrzymane równania stosują się do wszystkich czterech punktów P, P', P'', P''', z tą tylko różnicą że dla punktów P'' i P''', obie niewiadome z i u zmieniają znaki $+$. Co jasno sama figura pokazuje.

Aby wyrugować u, dość jest pomnożyć przez 2 obie strony drugiego równania i dodać do stron pierwszego; będzie odrazu

$$z^2-a^2=m^2, \quad \text{zkąd} \quad z=\pm\sqrt{a^2+m^2}.$$

Ten piękny wynik bardzo łatwo się wykreśla.

Na prostopadłej do MD w punkcie M, wziąć $MN=m$ i połączyć BN; będzie

$$BN=\sqrt{a^2+m^2};$$

potem na kierun ku BM, ponieść BN od B do D i od B do D'; nakoniec, na MD i na MD' jako średnicach, wykreślić półokręgi które przetną linię XX' ogólnie w czterech punktach P, P', P'', P''', i cztery proste MP, MP', MP'', MP''' rozwiążą zagadnienie.

Sieczne P''Q'' i P'''Q''' zawsze istnieją; ale sieczne PQ i P'Q' schodzą się w jedną gdy MD$=$2AM, i nie istnieją gdy jest MD$<$2AM.

Więc, żeby zagadnienie miało cztery rozwiązania, powinno być

$$\sqrt{a^2+m^2}-a>2a, \quad \text{zkąd} \quad m>2a\sqrt{2}.$$

332. Uwaga. Zagadnienie Pappusa może się zogólnić i zastosować do kąta jakiegokolwiek. Jakoż, czyniąc kąt O$=\theta$, mamy równania ogólniejszego zagadnienia

$$(1) \qquad x^2+y^2-2xy\cos\theta=m^2,$$

$$(2) \qquad xy=a(x+y).$$

Zkąd rugując y otrzymujemy

$$x^2+\frac{a^2x^2}{(x-a)^2}-\frac{2ax^2}{x-a}\cos\theta=m^2,$$

albo po uproszczeniu,

$$(3)\ x^4-4a\cos^2\frac{1}{2}\theta . x^3-(m^2-4a^2\cos^2\frac{1}{2}\theta)x^2+2am^2x-a^2m^2=0,$$

Pierwsza strona tego równania jest różnicą kwadratów,

$$\left(am-mx-\frac{2a\cos^2\frac{1}{2}\theta}{m}x^2\right)^2-\frac{4a^2\cos^4\frac{1}{2}\theta+m^2}{m^2}x^4=0;$$

więc równanie (3) czwartego stopnia rozkłada się na dwa równania drugiego stopnia

$$\left(\sqrt{4a^2\cos^4\frac{1}{2}\theta+m^2}+2a\cos^2\frac{1}{2}\theta\right)x^2+m^2x-am^2=0,$$

$$\left(\sqrt{4a^2\cos^4\frac{1}{2}\theta+m^2}-2a\cos^2\frac{1}{2}\theta\right)x^2-m^2x+am^2=0.$$

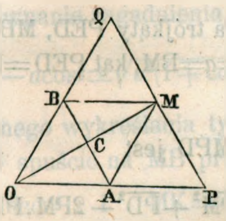
Pierwiastki pierwszego są zawsze rzeczywiste i ze znakami przeciwnemi. Żeby pierwiastki drugiego były także rzeczywiste, musi być

$$m^4-4am^2\left(\sqrt{4a^2\cos^4\frac{1}{2}\theta+m^2}-2a\cos^2\frac{1}{2}\theta\right)\geqq 0;$$

zkąd

$$m\geqq 4a\sin\frac{1}{2}\theta.$$

Owoż, przez punkt M dwójsiecznej jakiegokolwiek kąta O

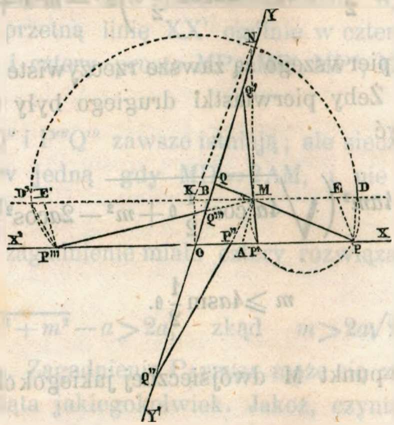


poprowadźmy prostopadłę PQ do tej linii, i przekątnę AB ukośnika OAMB, będzie oczywiście PQ = 2AB. Ale mamy AB $=2a\sin\frac{1}{2}\theta$; więc $4a\sin\frac{1}{2}\theta=$ PQ. Ztąd wynika

Twierdzenie. *Najmniejsza prosta zawarta w kącie* O, *jaką przez punkt* M *jego dwójsiecznej* OM *poprowadzić można, jest prostopadła do tej linii, i równa dwa razy wziętej przekątnej* AB *ukośnika* MAOB.

Wykreślenie podane przez Pappusa może się także zogólnić. Jakoż, niech będzie jakikolwiek kąt O $=\theta$; przypuszczając że sieczne PQ, P'Q', P''Q'', P'''Q''', przechodzące przez punkt M jego dwójsiecznej OM, rozwiązują zagadnienie, poprowadźmy przez punkt P prostę PD któraby czyniła z sieczną PQ kąt

MPD$=\theta$; i drugą prostę PE, którąby czyniła z ramieniem



XO kąt OPE$=\theta$. Dwa trójkąty PED, MBQ będą równe, ponieważ mają bok PE$=a=$BM, kąt PED$=$B i kąt EPD$=$BMQ; zatem PD$=$MQ.

Owoż, w trójkącie MPD jest

$$\overline{MD}^2=\overline{PM}^2+\overline{PD}^2-2PM.PD\cos\theta;$$

a dwa trójkąty podobne DMP, DEP dają

$$\frac{MD}{PD}=\frac{PM}{PE} \quad \text{zkąd} \quad MD.PE=PM.PD.$$

Więc, czyniąc BD$=z$, i PD$=u=$MQ, mamy dwa równania zagadnienia

$$(z-a)^2=(m-u)^2+u^2-2(m-u)u\cos\theta,$$

$$(z-a)\,a=(m-u)\,u.$$

W pierwszem równaniu możemy zastąpić wieloczyn $(m-u)u$ przez $(z-a)\,a$; co daje

$$(z-a)^2=(m-u)^2+u^2-2a(z-a)\cos\theta.$$

Poczem, mnożąc drugie równanie przez 2 i dodając stronami do ostatniego, otrzymujemy

$$z^2 - a^2 = m^2 - 2a(z-a)\cos\theta,$$

albo

$$z^2 + 2az\cos\theta - a^2 - 2a^2\cos\theta - m^2 = 0.$$

Pierwiastki tego równania są rzeczywiste i znaków przeciwnych. Pierwiastek dodatny wyznacza odległość BD. Pierwiastek odjemny daje odległość BD′ przeciwną pierwszej; o czem się łatwo przekonać, szukając wprost równania które wyznacza odległość BD′. Trzeba tylko z punktu P‴ wyprowadzić prostę P‴D′, którąby czyniła z sieczną P‴Q‴ kąt MP‴D′ $= \pi - \theta$, i drugą prostę P‴E′ którąby czyniła z ramieniem X′O kąt OP‴E′ $= \pi - \theta$. Dwa trójkąty BMQ‴, D′E′P‴ będą równe, i dowodzenie podobne powyższemu.

Rozwiązując równanie zagadnienia, znajdujemy

$$z = -a\cos\theta \pm \sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2 + m^2}.$$

Dla geometrycznego wykreślania tych dwóch pierwiastków, trzeba z punktu O spuścić na MB prostopadłę OK, która da

$$BK = a\cos\theta \quad \text{i} \quad MK = a(1+\cos\theta);$$

potem, z punktu M wyprowadzić do MB prostopadłę MN$=m$ i połączyć KN, będzie

$$KN = \sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2 + m^2};$$

nakoniec, wziąć na linii BM dwie odległości KD$=$KD′$=$KN. Otrzyma się

$$z = -a\cos\theta + \sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2 + m^2} = BD,$$

$$-z = a\cos\theta + \sqrt{a^2(1+\cos\theta^2 + m^2} = BD'.$$

Znając punkta D i D′, jeśli na MD jako cięciwie będzie wykreślony odcinek koła obejmujący kąt θ, a zaś na MD′ jako cięciwie odcinek koła obejmujący spełnienie kąta θ, łuki tych dwóch odcinków przetną linię XX' ogólnie w czterech punktach P, P', P'', P''', i cztery sieczne MP, MP', MP'', MP''' rozwiążą zagadnienie. Dwie ostatnie sieczne istnieją zawsze; ale dwie pierwsze mogą się schodzić w jedną, albo wcale nie istnieć.

333. Można jeszcze rozwiązać zogólnione zagadnienie Pappusa za pomocą koła wpisanego; wtedy równania są

$$x^2+y^2-2xy\cos\theta=m^2,$$
$$xy=a(x+y),$$
$$xy\cos\theta=(m+x+y)r.$$

Ostatnie wyraża podwójną powierzchnię trójkąta OPQ, w funkcyi jego obwodu i promienia koła wpisanego, albo także podwójną powierzchnię trójkąta OP'''Q''', w funkcyi jego obwodu i promienia koła zawpisanego względnie do boku OP'''. Rugując x i y, otrzymuje się równanie

$$r^2+\left(m\,tg\frac{1}{2}\theta-a\sin\theta\right)r-am\sin^2\frac{1}{2}\theta=0.$$

Nakoniec nietrudno rozwiązać to samo zogólnione zagadnienie za pomocą dwóch kół spółśrodkowych, stycznych do szukanych siecznych; wtedy znajduje się równanie

$$mR^2-4a\sin\theta\cos\frac{1}{2}\theta.R-a^2m\sin^2\theta=0.$$

334. Zagadnienie XVII. *Bachus zastając Sylena śpiącego przy pełnej beczce wina, pije przez trzy piąte czasu w którymby Sylen wypróżnił tę beczkę. Sylen się obudza i wypija resztę wina. Gdyby Bachus i Sylen byli razem pili, beczka byłaby się wypróżniła sześć godzin prędzej, i Bachus byłby tylko wypił dwie trzecie tego co zostawił Sylenowi. Pytanie w ilu godzinach każdy z nich pijąc sam jeden wypróżniłby beczkę.*

Niech będą x i y liczby szukanych godzin. Ponieważ

Bachus w jednej godzinie wypija $\frac{1}{x}$ beczki, pijąc przez $\frac{3}{5}y$ godzin wypróżni $\frac{1}{x}\cdot\frac{3y}{5}$ beczki. Gdy się obudza Sylen zostaje w beczce $1-\frac{3y}{5x}$ wina; a że on wypija na godzinę $\frac{1}{y}$ beczki, wypije pozostałe wino w czasie $\left(1-\frac{3y}{5x}\right)y$. Zatem Bachus i Sylen, pijąc jeden po drugim, wypróżnili beczkę w czasie

$$\frac{3y}{5}+\left(1-\frac{3y}{5x}\right)y.$$

Ale, ponieważ pijąc razem wypróżniają na godzinę $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ beczki, wypiliby całą beczkę w czasie $\frac{x+y}{xy}$. Więc wyrażając że, wedle zagadnienia, ostatni czas jest krótszy o sześć godzin od poprzedzającego, mamy pierwsze równanie

$$(1)\qquad \frac{3y}{5}+\left(1-\frac{3y}{5x}\right)y=\frac{xy}{x+y}+6.$$

Aby znaleźć drugie, trzeba wyrazić że ilość wina jaką wypiłby Bachus w towarzystwie z Sylenem jest dwie trzecie tej którą zostawił swemu towarzyszowi. Owoż, przez czas $\frac{xy}{x+y}$ Bachus wypiłby $\frac{1}{x}\cdot\frac{3y}{5x}$ beczki, i ta właśnie ilość powinna czynić dwie trzecie ilości $1-\frac{3y}{5x}$; mamy więc drugie równanie

$$(2\qquad \frac{y}{x+y}=\frac{2}{3}\left(1-\frac{3y}{5x}\right).$$

Znosząc mianowniki w obydwóch równaniach, otrzymujemy

$$(3)\qquad 3x^2y+5xy^2-3y^3-30x^2-30xy=0,$$

$$(4)\qquad 10x^2-11xy-6y^2=0.$$

Nietrudno rozwiązać te równania, rugując najpierwej y^3;

co się uskutecznia mnożąc pierwsze równanie przez 2 a drugie przez y, i odciągając stronami; będzie

$$4x^2y-21xy^2+60x^2+6xy=0$$

albo

$$4xy-21y^2+60x+6y=0;$$

zkąd

$$(5) \qquad x=\frac{3y(7y-20)}{4(y+15)}.$$

Podstawiając tę wartość w równaniu (4), mamy

$$\frac{15y^2(7y-20)^2}{8(y+15)^2}-\frac{11y^2(7y-20)}{4(y+15)}-6y^2=0$$

albo

$$113y^2-1310y+1800=0.$$

Zkąd

$$y=\frac{655\pm 475}{113},$$

a w szczególności

$$y=10 \quad \text{i} \quad y=\frac{180}{113}.$$

Pierwsza wartość podstawiona w równaniu (5) daje $x=15$; druga dałaby dla x wartość odjemną która się nie stosuje do zagadnienia. Więc szukane liczby godzin są

$$x=15 \quad \text{i} \quad y=10.$$

335. Zagadnienie XVIII. *Wyrachować promienie podstaw pnia stożka wpisanego w sferę promienia* R, *znając wysokość* h *i objętość* $\frac{1}{3}\pi a^2 h$ *tego pnia.*

Nazywając x i y szukane promienie, mamy zaraz pierwsze równanie.

$$\frac{1}{3}\pi h(x^2+y^2+xy)=\frac{1}{3}\pi h a^2,$$

albo

$$(1) \qquad x^2+y^2+xy=a^2.$$

Aby otrzymać drugie, trzeba wyrazić że stożek ścięty jest wpisany w sferę promienia R, to jest wyrazić że jego wysokość h jest summą albo różnicą odcinków średnicy 2R ; co daje

$$(2)\qquad \sqrt{R^2-x^2}\pm\sqrt{R^2-y^2}=h.$$

Znosząc pierwiastniki, będzie najpierwej

$$2R^2-x^2-y^2\pm2\sqrt{(R^2-x^2)(R^2-y^2)}=h^2,$$

a potem

$$4(R^2-x^2)(R^2-y^2)=(h^2-2R^2)^2+2(h^2-2R^2)(x^2+y^2)+(x^2+y^2)^2,$$

albo

$$(x^2+y^2)^2+2h^2(x^2+y^2)-4x^2y^2+h^4-4h^2R^2=0.$$

Weźmy teraz $xy=t$ za niewiadomę posiłkową, i wyrugujmy summę x^2+y^2 między równaniami pierwszem i ostatniem; otrzymamy

$$(a^2-t)^2+2h^2(a^2-t)-4t^2+h^4-4h^2R^2=0,$$

albo

$$(3)\qquad 3t^2+2(a^2+h^2)t-(a^2+h^2)^2+4h^2R^2=0.$$

Rzeczywistość pierwiastków tego równania wymaga żeby było

$$(a^2+h^2)^2+3(a^2+h^2)^2-12h^2R^2 \geqslant 0.$$

albo

$$(a^2+h^2)^2 \geqslant 3h^2R^2.$$

Ale trzeba jeszcze żeby x i y były dodatne. Owoż, summa pierwiastków równania (3) jest odjemna; więc, żeby jeden z nich był dodatny, powinno być

$$(a^2+h^2)^2>4h^2R^2;$$

zkąd

$$(4)\qquad a^2>h(2R-h).$$

Ten warunek zawiera już poprzedzajcy; jeśli jest dopełniony, równanie (3) da

$$t=\frac{-(a^2+h^2)+2\sqrt{(a^2+h^2)^2-3h^2R^2}}{3}.$$

Znając tę wartość, nietrudno znaleźć x i y. Jakoż, mamy równanie posiłkowe

$$xy=t$$

dodając je stronami do równania (1) znajdujemy summę

(5) $$x+y=\sqrt{a^2+t};$$

a mnożąc równanie posiłkowe przez 3 i odciągając stronami od równania (1), otrzymujemy różnicę

(6) $$x-y=\sqrt{a^2-3t},$$

w której x oznacza większy z dwóch szukanych promieni. Ale trzeba żeby było

$$3t<a^2,$$

to jest

$$-(a^2+h^2)+2\sqrt{(a^2+h^2)^2-3h^2R^2}<a^2,$$

albo

$$2\sqrt{(a^2+h^2)^2-3h^2R^2}<2a^2+h^2;$$

zkąd

(7) $$a^2<\frac{3}{4}(4R^2-h^2).$$

Ponieważ ilość $\frac{3}{4}(4R^2-h^2)$ jest większa od $h(2R-h)$, mamy dwie granice (4) i (7), niższą i wyższą, ilości a^2. Więc, jeśli sfera jest dana, i wzięto dowolnie $h<2R$, możebność zagadnienia wymaga żeby ilość a zadość czyniła podwójnemu warunkowi

$$\sqrt{h(2R-h)}<a<\frac{1}{2}\sqrt{3(4R^2-h^2)}.$$

W przypadku szczególnym, 1° gdy a równa się swojej granicy niższej

$$a=\sqrt{h(2R-h)} \quad \text{czyli} \quad a^2=h(2R-h),$$

będzie $t=0$, i zatem $x=a$, $y=0$; wtedy pień stożka staje się stożkiem w którym promień podstawy jest równy ilości a.

2° Jeśli ilość a jest równa swojej granicy wyższej

$$a=\frac{1}{2}\sqrt{3(4R^2-h^2)} \quad \text{czyli} \quad a^3=\frac{3}{4}(R^2-{}^2h),$$

będzie $3t=a^2$, i zatem $x=y$; wtedy pień stożka staje się walcem, którego promień podstawy jest

$$x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4a^2}{3}}=\frac{a}{\sqrt{3}}.$$

336. Zagadnienie XIX. *Wpisać w trójkąt* ABC *prostokąt taki żeby, swoim obrotem około spólnego boku* BC, *utworzył walec mający całą powierzchnię równowartą powierzchni sfery promienia* R.

Niech będą podstawa $BC=a$ i wysokość h trójkąta ABC. Jeśli nazwiemy x i y podstawę i wysokość szukanego prostokąta, cała powierzchnia tak utworzonego walca wyrazi się przez $2\pi yx+2\pi y^2$, i będziemy mieli pierwsze równanie

$$2\pi xy+2\pi y^2=4\pi R^2,$$

albo

$$(1) \qquad xy+y^2=2R^2.$$

Znajdziemy drugie, wyrażając że prostokąt jest wpisany w trójkąt; co się uskutecznia przez proporcyę

$$(2) \qquad \frac{x}{a}=\frac{h-y}{h},$$

Rugując x między temi dwoma równaniami, otrzymujemy

$$\frac{2R^2-y}{a}=\frac{hy-y^2}{h},$$

albo

$$(3)\qquad (h-a)y^2+ahy-2hR^2=9.$$

Dyskussya. Trzy są możebne przypadki do roztrząsania: $a<h$, $a=h$, $a>h$.

Pierwszy przypadek $a<h$. Pierwiastki równania (3) są rzeczywiste i znaków przeciwnych, ponieważ spółczynniki wyrazów skrajnych mają znaki przeciwne. Pierwiastek odjemny powinien być odrzucony, bo on znaczyłby że wzięto różnicę między summą powierzchni dwóch podstaw walca i jego powierzchnią boczną, nie zaś summę tych ilości jako pokazuje równanie (1). Ale na tem nie dosyć. Trzeba jeszcze żeby, na mocy równania (2), pierwiastek dodatny nie przewyższał wysokości h, dlatego że x nie może być ilością odjemną.

Rozwiązujemy więc równanie (3), i piszemy że jego pierwiastek dodatny jest mniejszy od h,

$$y=\frac{-ah+\sqrt{a^2h^2+8(h-a)hR^2}}{2(h-a)}<h.$$

albo, ponieważ $a<h$,

$$-ah+\sqrt{a^2h^2+8(h-a)hR^2}<2h(h-a),$$

$$\sqrt{a^2h^2+8(h-a)R^2h}<2h^2-ah;$$

zkąd, podnosząc do kwadratu i redukując, wynika

$$2(h-a)R^2<h^3-ah^2,$$

i nakoniec

$$R<\frac{h}{2}\sqrt{2}.$$

Więc, gdy $a<h$, żeby zagadnienie było możebne, trzeba

żeby promień R danej sfery nie przewyższał połowy przekątnej kwadratu wystawionego na wysokości h trójkąta ABC.

Jeśli $R=\frac{h}{2}\sqrt{2}$, będzie $y=h$ i $x=0$. Ztąd i z poprzedzającego wynika że największa powierzchnia cała walca jaką utworzyć może prostokąt jest $4\pi.\frac{h^2}{2}=2\pi h^2$. Ale wtedy prostokąt tworzący staje się linią prostą długości h, i cała powierzchnia walca przywodzi się do jego dwóch podstaw mających promień h; co daje właśnie $2h^2$.

Drugi przypadek $a=h$. W tym przypadku jeden z pierwiastków równania jest nieskończenie wielki, i nie stosuje się do zagadnienia. Drugi pierwiastek $y=\frac{2R^2}{h}$ rozwiązuje zagadnienie jeśli jest $\frac{2R^2}{h}\leq h$, czyli $R\leq\frac{h}{2}\sqrt{2}$.

Trzeci przypadek $a>h$. Ponieważ spółczynniki wyrazów skrajnych równania (3) mają te same znaki, pierwiastki tego równania mogą być rzeczywiste albo urojone. Trzeba więc przede wszystkiem żeby było

$$a^2h^2+8(h-a)hR^2>0,$$

zkąd warunek rzeczywistości pierwiastków

$$R\leq\frac{a}{2}\sqrt{\frac{h}{2(a-h)}}.$$

Do tego jeszcze przynajmniej jeden z dwóch pierwiastków dodatnych powinien być mniejszy od h; co się wyraża przez nierówność

$$\frac{-ah\pm\sqrt{a^2h^2+8(h-a(hR^2)}}{2(h-a)}<h,$$

albo

$$\frac{ah\mp\sqrt{a^2h^2-8(a-h)hR^2}}{2(a-h)}<h.$$

Ztąd, znosząc mianownik który jest dodatny i redukując, wynika

$$(4) \qquad \mp\sqrt{a^2h^2-8(a-h)hR^2}<h(a-2h).$$

Żeby teraz pójść dalej, trzeba mieć wzgląd na znak czynnika $a-2h$; albowiem może być $a<2h$, $a=2h$, $a>2h$.

1° Jeśli $a<2h$, wartość dodatna pierwiastnika nie przystoi. Biorąc jego wartość odjemną i zmieniając znaki, powinno być

$$\sqrt{a^2h^2-8(a-h)hR^2}>h(2h-a),$$

albo, podnosząc do kwadratu i uproszczając,

$$-2(a-h)R^2>h^3-ah^2;$$

zkąd, dzieląc przez czynnik odjemny $-(a-h)$, wynika

$$2R^2<h^2,$$

i nakoniec

$$R<\frac{h}{2}\sqrt{2}.$$

Ostatni warunek zawiera w sobie ten którego wymaga rzeczywistość pierwiastków. Jakoż, jeśli założymy

$$\frac{h}{2}\sqrt{2}<\frac{a}{2}\sqrt{\frac{h}{2(a-h)}},$$

będzie

$$2h^2<\frac{a^2h}{2(a-h)},$$

albo

$$4ah-4h^2<a^2;$$

zkąd

$$0<(2h-a)^2.$$

Co sprawdza założoną nierówność.

Więc, gdy $a<2h$, jeśli $R\leq\frac{h}{2}\sqrt{2}$ będzie $y'\leq h$ i $y''>h$. Zagadnienie ma jedno tylko rozwiązanie.

2° Jeśli $a=2h$, warunek rzeczywistości pierwiastków równania staje się $R \leq \frac{h}{2}\sqrt{2}$; wtedy pierwsza nierówność (4) jest oczywista, a druga niemożebna; i zagadnienie ma jedno rozwiązanie.

3° Jeśli $a>2h$, pierwsza nierówność (4) zawsze istnieje; zatem $y'<h$. Żeby wiedzieć pod jakim warunkiem druga nierówność ma miejsce, podnosimy do kwadratu obie jej strony które są dodatne, i po uproszczeniu otrzymujemy

$$-2(a-h)R^2<-(a-h)h^2;$$

zkąd

$$R>\frac{h}{2}\sqrt{2}.$$

Ale rzeczywistość pierwiastków wymaga $R<\frac{a}{2}\sqrt{\frac{h}{2(a-h)}}$; powinno więc być

$$\frac{a}{2}\sqrt{\frac{h}{2(a-h)}}>\frac{h}{2}\sqrt{2},$$

i następnie

$$\frac{a^2}{2(a-h)}>2h,$$

albo

$$(a-2h)^2>0.$$

Co sprawdza drugą nierówność (4), i dowodzi że y'' h

Więc, gdy się staje zadość nierównościom

$$a>2h \quad \text{i} \quad \frac{h}{2}\sqrt{2}<R<\frac{h}{2}\sqrt{\frac{h}{2(a-h)}},$$

wtedy zagadnienie ma dwa rozwiązania.

W przypadku szczególnym w którym jest $R=\frac{h}{2}\sqrt{2}$, zagadnienie ma jeszcze dwa rozwiązania $y'<h$ i $y''=h$; ale,

w drugiem rozwiązaniu, prostokąt mający podstawę $x=0$ i wysokość h staje się linią prostą długości h.

W drugim przypadku szczególnym w którym jest $R=\frac{h}{2}\sqrt{\frac{h}{2(a-h)}}$, pierwiastki równania (3) są równe, $y'=y''=\frac{ah}{2(a-h)}$; wtedy dwa rozwiązania schodzą się w jedno, którem jest prostokąt mający podstawę $\frac{a(a-2h)}{2(a-h)}$ i wysokość $\frac{ah}{2(a-h)}$.

Z całej dyskussyi wynika że, gdy $a<2h$, największa wartość jaką można nadać promieniowi R jest $\frac{h}{2}\sqrt{2}$; ale wtedy prostokąt jest linią prostą długości h. Gdy zaś $a>2h$, największy promień możebny jest $R=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{h}{2(a-h)}}$; jemu odpowieda istotny prostokąt, mający podstawę $x=\frac{a(a-2h)}{2(a-h)}$ i wysokość $y=\frac{ah}{2(a-h)}$.

337. Zagadnienie XX. *W sferę promienia* R *wpisać walec, któregoby cała powierzchnia była równowarta podwójnej powierzchni koła promienia* a.

Oznaczając przez x promień walca i przez y jego wysokość, mamy dwa równania zagadnienia

$$(1)\qquad xy+x^2=a^2,$$

$$(2)\qquad x^2+\frac{y^2}{4}=R^2.$$

Aby je rozwiązać, zastępujemy ich układ przez równowarty łatwiejszy

$$(3)\qquad y=\frac{a^2-x^2}{x},$$

(4) $$5x^4-2(a^2+2R^2)x^2+a^4=0,$$

który ma widocznie cztery rozwiązania.

Dyskussya. Możebność zagadnienia wymaga żeby wartości dla x i y były rzeczywiste i obie dodatne, x mniejsze od R, y mniejsze od 2R.

Owoż, żeby pierwiastki równania dwukwadratowego (4) były rzeczywiste, powinno być

$$(a^2+2R^2)^2-5a^4 \geqslant 0, \quad \text{zkąd} \quad a^2 \leqq \frac{R^2}{2}(\sqrt{5}+1).$$

Gdy temu warunkowi staje się zadość, wartości dla x^2 wyprowadzone z równania (4) są rzeczywiste, i do tego obie dodatne, bo ich wieloczyn i summa są dodatne.

To mając, trzeba podstawić w równaniu (3) każdą z dwóch wartości dodatnych dla x, i uważać za dobrą tylko tę która czyni y dodatnem; co wymaga żeby było

$$x^2 < a^2.$$

Jeśli x dopełnia tego warunku, wartość dla y będzie dodatna i mniejsza od 2R; albowiem tak wyznaczone wartości dodatne x i y zadość czynią równaniu

$$x^2+\frac{y^2}{4}=R^2.$$

Więc liczba rozwiązań zagadnienia jest równa liczbie pierwiastków rzeczywistych, dodatnych i mniejszych zarazem od a^2 i od R^2, jakie daje równanie (4) uważane jako drugiego stopnia względem x^2.

Chodzi teraz o to żeby wiedzieć ile jest wartości dla x^2 mniejszych zarazem od a^2 i od R^2. W tym celu, w pierwszej stronie równania (4) zamiast x^2 podstawiamy kolejno 0, a^2, R^2, i otrzymujemy odpowiedające wyniki a^4, $4a^2(a^2-R^2)$, $(a^2-R^2)^2$.

Owoż, wynik $4a^2(a^2-R^2)$ może być dodatny, odjemny albo zero; trzeba więc rozróżnić trzy przypadki $a^2<R^2$, $a^2>R^2$ i $a^2=R^2$.

Pierwszy przypadek $a^2<R^2$. Wyniki z podstawień $0, a^2, R^2$ mają znaki $+, -, +$. To dowodzi że pierwiastki x^2 równania (4) są rzeczywiste i oba dodatne; jeden z nich jest zawarty między 0 i a^2, drugi między a^2 i R^2. Pierwszy pierwiastek mniejszy od a^2, i tem bardziej mniejszy od R^2, rozwiązuje zagadnienie; drugi, większy od a^2, nie stosuje się. Więc w przypadku $a^2<R^2$ zagadnienie ma jedno rozwiązanie, odpowiedające wartości

$$x=\sqrt{\frac{a^2+2R^2-\sqrt{(a^2+2R^2)^2-5a^2}}{5}}.$$

Co zresztą łatwo wprost sprawdzić, podstawiając wartość x^2 w równaniu (3).

Drugi przypadek $a^2>R^2$. Wyniki z podstawień $0, R^2, a^2$ są wszystkie trzy dodatne; więc równanie (4) albo nie ma żadnego pierwiastku x^2 zawartego między 0 i a^2, albo je ma obydwa między temi granicami. Owoż, jeśli warunkowi

$$a^2<\frac{R^2}{2}(\sqrt{5}+1)$$

staje się zadość, pierwiastki x^2 są rzeczywiste i dodatne, oba zawarte między 0 i R^2, albo oba większe od R^2. Żeby były mniejsze od R^2, dość jest żeby tylko połowa ich summy była mniejsza od R^2; co się wyraża przez

$$\frac{a^2+2R^2}{5}<R^2, \quad \text{zkąd} \quad a^2<3R^2.$$

Ostatnia nierówność ma miejsce, ponieważ jest

$$a^2<\frac{R^2}{2}(\sqrt{5}+1)<2R^2.$$

Więc, w założeniu $a^2 > R^2$, jeśli warunek rzeczywistości pierwiastków x^2 jest dopełniony, równanie (4) wyznacza dla x^2 dwie wartości dodatne mniejsze od R^2, i tem bardziej mniejsze od a^2. W tym przypadku zagadnienie ma dwa rozwiązania, które odpowiedają dwom wartościom x danym przez formułę

$$x = \sqrt{\frac{a^2 + 2R^2 \pm \sqrt{(a^2+R^2)^2 - 5a^2}}{5}}.$$

Trzeci przypadek $a^2 = R^2$. Równanie (4) wyznacza dla x^2 dwie wartości

$$x^2 = \frac{3R^2 \pm 2R^2}{5},$$

to jest

$$x^2 = R^2 \quad \text{i} \quad x^2 = \frac{R^2}{5},$$

które, poniesione do równania (3), dają dla y odpowiedające wartości

$$y = 0 \quad \text{i} \quad y = \frac{4}{5} R\sqrt{5}.$$

Więc, w tym szczególnym przypadku, zagadnienie ma dwa rozwiązania, któremi są dwa walce, mające całe powierzchnie równowarte podwójnej powierzchni wielkiego koła sfery. Ale pierwszy z tych walców, którego wysokość stała się zerem i dwie podstawy zeszły się w jedną, jest poprostu podwójnem wielkiem kołem sfery.

Uwaga 338. Zagadnienie ma jedno rozwiązanie gdy a^2 jest mniejsze od R^2; dwa rozwiązania, gdy a^2 poczynając od R^2 dąży do $\frac{R^2}{2}(\sqrt{5}+1)$; ale dwa ostatatnie schodzą się w jedno jeśli $a^2 = \frac{R^2}{2}(\sqrt{5}+1)$. Nakoniec, zagadnienie jest niemożebne gdy a^2 jest większe od $\frac{R^2}{2}(\sqrt{5}+1)$.

To pokazuje że cała powierzchnia walca rośnie z powierzchnią danego koła πa^2, i jest największa możebna gdy a^2 dosięga wartości $\frac{R^2}{2}(\sqrt{5}+1)$. Wtedy x^2 jest pierwiastkiem podwójnym równania (4), które daje

$$x^2=\frac{a^2+2R^2}{5}=\frac{R^2}{10}(5+\sqrt{5}).$$

Więc, ze wszystkich walców wpisanych w daną sferę, największy jest ten który ma promień

$$x=R\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}};$$

wysokość tego walca wyraża się przez

$$y=\frac{a^2-x^2}{x}=2R\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}},$$

i jego powierzchnia cała jest

$$\pi R^2(\sqrt{5}+1).$$

Ta powierzchnia jest równowarta powierzchni bocznej walca, mającego za podstawę wielkie koło danej sfery, i za wysokość bok dziesięciokąta foremnego gwiazdzistego, wpisanego w to koło.

339. Zagadnienie XXI. *Znaleźć trzy liczby całkowite po sobie idące, z których trzy pierwsze przedstawiają trzy boki trójkąta, a czwarta jego powierzchnię.*

Jeśli nazwiemy x najmniejszą z czterech liczb szukanych, trzy następujące będą $x+1$, $x+2$, $x+3$. Otóż, wiadomo z geometryi że powierzchnia trójkąta, w funkcyi jego boków a, b, c, wyraża się przez formułę

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

w której $a+b+c=2p$; więc, podstawiając cztery niewiadome liczby wedle wysłowienia, będzie

$$x+3=\sqrt{\frac{3(x+1)^2(x+3)(x-1)}{16}};$$

zkąd, podnosząc do kwadratu, po wykonaniu wszystkich rachunków otrzymuje się

$$3x^3+3x^2-19x-51=0.$$

Chociaż to równanie jest zupełne 3go stopnia, nietrudno jednak rozwiązać je, korzystając z okoliczności że $x=3$ zadość mu czyni. Jakoż, dzielimy pierwszą stronę przez $x-3$ (n° 52), i mamy wieloczyn

$$(x-3)(3x^2+12x+17)=0,$$

który pokazuje że powyższe równanie rozkłada się na dwa

$$x-3=0, \quad 3x^2+12x+17=0.$$

Pierwsze rozwiązuje się przez $x=3$, drugie nie ma pierwiastków rzeczywistych; więc zadane zagadnienie ma tylko jedno rozwiązanie, i cztery szukane liczby są

3, 4, 5, 6.

340. Zagadnienie XXII. *Znaleźć summę* S_n *potęg* ntych *pierwiastków równania* $ax^2+bx+c=0$.

Oznaczając przez x_1 i x_2 dwa pierwiastki tego równania, mamy

$$ax_1^2+bx_1+c=0,$$
$$ax_2^2+bx_2+c=0.$$

Pomnóżmy pierwszą równość przez x_1^{n-2}, drugą przez x_2^{n-2} i dodajmy, będzie

$$a(x_1^n+x_2^n)+b(x_1^{n-1}+x_2^{n-1})+c(x_1^{n-2}+x_2^{n-2})=0;$$

więc, jeśli uczynimy

$$x_1^n+x_2^n=S_n, \quad x_1^{n-1}+x_2^{n-1}=S_{n-1}, \quad x_1^{n-2}+x_2^{n-2}=S_{n-2},\ldots$$

otrzymamy formułę

$$aS_n + bS_{n-1} + cS_{n-2} = 0,$$

w której n bierze wartości 2, 3, 4,...

Wiedząc że $S_0 = x_1{}^0 + x_2{}^0 = 2$, $S_1 = -\frac{b}{a}$, można za pomocą tej formuły wyrachować po kolei summy podobnych potęg pierwiastków równania stopnia drugiego.

Żeby otrzymać summę S_{-n} potęg n^{tych} odwrotności tych pierwiastków, dość położyć $x = \frac{1}{y}$. Z przekształconego równania $a + by + cy^2 = 0$ wynika formuła

$$cS_{-n} + bS_{-n+1} + aS_{-n+2} = 0,$$

która daje S_{-n} za pomocą S_{-n+1} i S_{-n+2}.

Ale z summy S_n potęg pierwiastków równania stopnia drugiego wywodzi się łatwo summa S_{-n} potęg ich odwrotności

Jakoż, $$S_{-n} = \frac{1}{x_1{}^n} + \frac{1}{x_2{}^n} = \frac{x_1{}^n + x_2{}^n}{x_1{}^n x_2{}^n} = \frac{S_n}{\left(\frac{c}{a}\right)^n} = \frac{a^n S_n}{c^n}.$$

Zastosowanie. Wyrachować summę sześcianów pierwiastków równania $6x^2 - x - 2 = 0$.

Mamy najpierwej

$$6S_2 - S_1 - 2S_0 = 0, \quad \text{albo} \quad 6S_2 - \frac{1}{6} - 4 = 0; \quad \text{zkąd} \quad S_2 = \frac{25}{36}.$$

Potem

$$6S_3 - \frac{25}{36} - 2 . \frac{1}{6} = 0; \quad \text{więc} \quad S_3 = \frac{37}{217}.$$

Summa sześcianów odwrotności tych pierwiastków jest

$$S_{-3} = \frac{a^3}{c^3} S_3 = \frac{216}{8} \cdot \frac{37}{216} = \frac{37}{8}.$$

WYSŁOWIENIA ZAGADNIEŃ.

I. *Kilka osób podróżując razem najęły za 342 fr. powóz który miał ich dowieźć do miejsca przeznaczenia. Na końcu podróży zabrakło trzem podróżnym pieniędzy; inni za nich założyli dając każdy 19 fr. więcej. Pytanie ile było podróżnych?*

Odpowiedź: $x=9$ i $x=-6$. Wytłumaczyć rozwiązanie odjemne.

II. *Pewne osoby złożyły 4160 fr. i potem każda przydała jeszcze 40 razy tyle franków ile było osób. Pracując tym kapitałem zyskały tyle na sto ile było osób; podzieliły się zyskiem i każdej się dostało 12 razy tyle ile było osób. Ileż było osób?*

Odpowiedź: 4 albo 26.

III. *Pewien kupiec miał dwa bilety; jeden 1577 fr. 90 cent. płatny po trzech miesiącach, drugi 2600 fr. płatny po siedmiu miesiącach. Bankier eskontując te bilety dał za obydwa summę 4050 fr. Na jaką stopę był eskont?*

Odpowiedź: 7 fr. 30 cent. za 100 rocznie.

IV. *Pewna osoba rozdzieliła swój kapitał* 1300 fr. *na dwie części i umieściła każdą na procent. Stopy procentów są różne ale procenta od obydwóch części są równe. Wiadomo do tego że, gdyby pierwsza część była umieszczona na stopę procentu drugiej, toby dała 360 fr; a druga umieszczona na stopę procentu pierwszej dałoby a 490 fr. Jakie są stopy dwóch procentów?*

Odpowiedź: 7% i 6%.

V. *Kupiec sprzedał pewny przedmiot za 11 fr. i zyskał tyle na sto ile go ten przedmiot kosztował. Jaka była cena kupna?*

Odpowiedź: 10 fr. Wartość odjemna $x=-110$ nie stosuje się do zagadnienia.

VI. *Dwaj robotnicy, najęci na różne ceny, odebrali zapłatę po pewnym czasie. Pierwszy dostał* 96 *fr; drugi, który pracował* 6 *dni mniej, dostał* 54 *fr. Gdyby drugi był pracował przez wszystkie dnie a pierwszy chybił* 6 *dni, byliby dostali oba tę samą summę. Pytanie ile dni każdy pracował i po jakiej cenie za dzień?*

Odpowiedź : Pierwszy pracował 34 dni i zarabiał 4 fr. na dzień; drugi pracował 18 dni i zarabiał 3 fr.

VII. *Dwaj podróżni wyjeżdzają z dwóch punktów różnych* A, B *i jadą na przeciw jeden drugiego, z prędkościami statecznemi. Ich prędkości są takie, że pierwszy podróżny przybywa do* B *w cztęry godziny po spotkaniu się z drugim, drugi przyjeżdża do* A *w dziewięć godzin po tem spotkaniu. Pytanie jaki jest stosunek tych prędkości?*

Odpowiedź : Nazywając x i y dwie prędkości, oznaczając przez C punkt spotkania, i biorąc niewiadome posiłkowe $AB=d$, $AC=z$, otrzymuje się zaraz równania

$$\frac{z}{x}=\frac{d-z}{y}, \quad \frac{d-z}{x}=4, \quad \frac{z}{y}=9;$$

zkąd, mnożąc stronami dwa pierwsze i dzieląc przez ostatnie, wynika $\frac{y}{x^2}=\frac{4}{9y}$; zatem $\frac{x}{y}=\frac{3}{2}$.

VIII. *Pewien kupiec ma dwa gatunki cukru różnej ceny; ciężary tych dwóch gatunków są w stosunku* 4 : 3. *Kilogram pierwszego gatunku kosztuje tyle centymów ile ten gatunek waży kilogramów; drugi gatunek jest tańszy od pierwszego o* 5 *centymów na kilogramie. Cena wszystkiego cukru wynosi* 442 *fr. Ile waży każdy gatunek cukru?*

Odpowiedź : 160 kg. i 120 kg.

IX. *Dwa domy dobroczynności rozdały każdy* 1200 *fr. swoim ubogim; pierwszy wspomógł* 40 *ubogich więcej niż drugi, ale* *ostatni dał* 5 *fr. każdemu ubogiemu więcej niż pierwszy. Ile było ubogich?*

Odpowiedź : 80.

X. *Dwaj gońcy, wyjeżdżając nie razem z jednego punktu, udają się w tę samą stronę; i wiadomo że drugi, jadąc godziną później za pierwszym, spotyka go w odległości* 24 *mil od punktu wyjazdu. Gdyby ci gońcy ujeżdżali* 2 *mile więcej na godzinę, spotkanie miałoby miejsce* 16 *mil dalej. Pytanie z jaką prędkością jedzie każdy goniec?*

Odpowiedź : Pierwszy ujeżdża 6 mil, drugi 8 mil na godzinę.

XI. *Znaleźć liczbę złożoną z trzech cyfer, taką żeby druga cyfra była średnią proporcyonalną między dwiema innemi, żeby stosunek tej liczby do summy jej cyfer był* $\frac{124}{7}$, *i żeby dodając do niej* 594 *otrzymano liczbę przewróconą.*

Odpowiedź : 248.

XII. *Rozdzielić liczbę* 21 *na dwie części takie, żeby różnica ich sześcianów była* 331.

Odpowiedź : 10 i 11.

XIII. *Znaleźć proporcyę, w której summa skrajnych jest* 14, *summa średnich jest* 11, *i summa czwartych potęg czterech wyrazów jest* 24929.

Odpowiedź : $\frac{12}{8} = \frac{3}{2}$.

XIV. *Znaleźć proporcyę w której różnica skrajnych jest* 5, *różnica średnich jest* 1, *i summa kwadratów czterech wyrazów jest* 50.

Odpowiedź : $\frac{6}{3} = \frac{2}{1}$.

XV. *Znaleźć proporcyę, znając przewyżkę* 1 *summy skrajnych* *nad summą średnich, przewyżkę* 15 *summy kwadratów wyrazów skrajnych nad summą kwadratów wyrazów średnich, przewyżkę* 133 *summy sześcianów wyrazów skrajnych nad summą sześcianów wyrazów średnich.*

Odpowiedź : $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.

XVI. *Znaleźć proporcyę, znając summę* 25 *czterech wyrazów, summę* 2275 *ich sześcianów i wieloczyn* 24 *skrajnych.*

Odpowiedź : Biorąc za niewiadome posiłkowe summę s skrajnych i summę s' średnich, znajduje się łatwo proporcyę $\frac{12}{8} = \frac{3}{2}$.

XVII. *Znaleźć cztery liczby w proporcyi, znając summę* $2s$ *wyrazów średnich, summę* $2s'$ *skrajnych, i summę* q^2 *kwadratów tych czterech wyrazów.*

Odpowiedź : Biorąc za niewiadome wieloczyn średnich, łatwo się otrzymuje szukane wyrazy

$$s^2 + \sqrt{q^2 - s'^2}, \quad s' + \sqrt{q^2 - s^2}, \quad s - \sqrt{q^2 - s'^2}, \quad s' - \sqrt{q^2 - s^2}$$

XVIII. *Znaleźć cztery liczby w proporcyi, znając ich summę* a, *summę ich kwadratów* b^2, *i summę czwartych potęg* c^4.

Odpowiedź : Wziąć za niewiadome posiłkowe wieloczyn t średnich, i różnicę r między summą skrajnych i średnich.

XIX. *Wyrachować rozmiary równoległościanu prostokątnego, mającego objętość* 8 *metrów sześciennych; wiedząc że trzy krawędzie przyległe czynią summę* 7 *metrów, a jedna z nich jest średnią proporcyonalną między dwiema drugiemi.*

Odpowiedź : 1, 2, 4.

XX. *Między jakiemi granicami trzeba zmieniać* x, *żeby funkcya* y *dana przez równanie* $\{(x-a)^2+y^2\}^2 - 16axy^2 = 0$, *zostawała ciągle rzeczywistą?*

Odpowiedź : Trzeba żeby było $(\sqrt{2}-1)^2 < \frac{x}{a} < (\sqrt{2}+1)^2$.

XXI. *Podzielić koło promienia* R *kołem spółśrodkowem tak, żeby wieniec kołowy był średnią harmoniczną między powierzchniami tych dwóch kół.*

Odpowiedź : Promień koła szukanego jest $R\sqrt{-1+\sqrt{2}}$.

XXII. *Ile ma boków wielokąt w którym jest* 170 *przekątnych?*

Odpowiedź : 20.

XXIII. *Pewna osoba, zapożyczywszy summę* a *fr. na dwa lata, uiściła się z tego długu przez dwie wypłaty po* b *fr. na końcu każdego roku. Na jaką stopę był dług zaciągnięty?*

Odpowiedź : Na stopę x wyznaczoną przez równanie $ax^2+(2a-b)x-2b=0$.

XXIV. *Wyrachować boki* x *i* y *kąta prostego, w trójkącie którego wiadoma jest przeciwprostokątna* a *i summa* k *tych dwóch boków z wysokością* u *odpowiedającą przeciwprostokątnej.*

Odpowiedź : Równania zagadnienia są :

$$x^2+y^2=a,\quad x+y+u=k,\quad xy=au.$$

Otrzymuje się łatwo równanie $u^2-2(a+k)u-a^2+k^2=0$ które daje u, i potem $x-y$; etc.

Możebność zagadnienia wymaga $a<k<\frac{a}{2}(1+2\sqrt{2})$

XXV. *Wyrachować boki trójkąta prostokątnego, znając summę* a *dwóch boków kąta prostego i wysokość* h *odpowiedającą przeciwprostokątnej.*

Odpowiedź : Nazywając z przeciwprostokątnę, znajduje się łatwo $z^2+2hz-a^2=0$, potem xy; etc. Możebność zagadnienia wymaga $h<\frac{a}{4}\sqrt{2}$.

XXVI. *Wyrachować boki trójkąta prostokątnego, znając różnicę* d *dwóch boków kąta prostego i różnicę* δ *odcinków* BD *i* CD, *wyznaczonych na przeciwprostokątnej przez wysokość* AD.

Odpowiedź : Równania zagadnienia są

$$x^2+y^2=z^2,\quad x-y=d,\quad \frac{x^2-y^2}{z}=\delta.$$

Zkąd $x+y=\frac{\delta z}{d}$; etc.

Możebność zagadnienia $d<\delta<d\sqrt{3}$.

XXVII. *Znaleźć boki trójkąta prostokątnego, mając daną jego powierzchnię* m^2, *i promień koła wpisanego* r.

Odpowiedź : Równania zagadnienia są

$$x^2+y^2=z^2,\quad xy=m^2,\quad z=x+y-2r.$$

Zkąd $r=\frac{m^2-2r^2}{2r}$; etc. Możebność zagadnienia $m<r\sqrt{2}$.

XXVIII. *Znając podstawę* a *trójkąta jego wysokość,* h *i promień* R *koła opisanego, wyznaczyć dwa inne boki.*

Odpowiedź : Równania zagadnienia są

$$xy=2Rh,\quad 4a^2h^2=(a+x+y)(a+x-y)(a+y-x)(x+y-a).$$

Biorąc niewiadome posiłkowe $x+y=s$, $x-y=t$, i uważając że

$$xy=\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-\left(\frac{x-y}{2}\right)^2=\frac{s^2-t^2}{4},$$

otrzymuje się układ równowarty

$$s^2-t^2-8Rh=0,\quad (s^2-a^2)(t^2-a^2)+4a^2h^2=0.$$

Zkąd równanie wynikowe

$$s^4-2(a^2+4Rh)s^2+a^4+8Rh+4a^2h^2=0,$$

które daje

$$s^2=a^2+4Rh\pm 2h\sqrt{4R^2-a^2}.$$

Powinno być najpierwej $a<2R$; do tego trzeba jeszcze żeby kwadraty s^2 i t^2 były dodatne.

Jeśli $a^2 > 4Rh$, zagadnienie może mieć dwa rozwiązania albo tylko jedno; jeśli $a^2 = 4R^2$, jest jedno rozwiązanie; jeśli $a^2 < 4Rh$, może być jedno rozwiązanie, albo nie być żadnego.

XXIX. *W sferę promienia* R *wpisać walec któregoby objętość była równowarta summie odcinków sferycznych mających z nim spólne podstawy.*

Odpowiedź: Oznaczając przez x promień walca i przez $2y$ jego wysokość, otrzymuje się równania zagadnienia

$$2\pi x^2 y = \pi x^2 (R-y) + \frac{1}{3}\pi (R-y)^3, \quad x^2+y^2=R^2;$$

zkąd, rugując x^2 wynika

$$2(R^2-y^2)y = (R^2-y^2)(R-y) + \frac{1}{3}(R-y)^3,$$

równanie 3go stopnia które się rozkłada na dwa

$$R-y=0, \qquad 2y^2+2Ry-R^2=0.$$

Więc zagadnienie ma dwa rozwiązania

$$x=\frac{R}{2}\sqrt{2\sqrt{3}}, \quad y=\frac{R}{2}(\sqrt{3}-1), \quad \text{i} \quad x=0, \quad y=R.$$

XXX. *Przeciąć daną sferę płaszczyzną tak, żeby mniejszy odcinek sferyczny był równowarty stożkowi, który ma z nim spólną podstawę i wierzchołek w środku sfery.*

Odpowiedź: Wysokość stożka jest odcinkiem większym promienia sfery podzielonego w stosunku średnim i skrajnym.

XXXI. *Na podstawie sześcianu zbudować pień piramidy mający tę samą wysokość, i taki żeby stosunek jego objętości do objętości sześcianu był równy liczbie* k.

Odpowiedź: Oznaczając przez x bok podstawy wyższej pnia piramidy, i przez a krawędź sześcianu, równanie zagadnienia będzie

$$a^2+x^2+ax=3ka^2.$$

Pierwiastki tego równania, jeśli są rzeczywiste, mogą mieć znaki przeciwne albo być oba odjemne. Pokazać że pierwiastek odjemny rozwiązuje zagadnienie dając pień piramidy *drugiego gatunku*. Dyskutować.

XXXII. *Wyrachować boki trójkąta prostokątnego, mając dany jego obwód* 2p, *i wiedząc że różnica całych powierzchni, utworzonych obrotem tego trójkąta około każdego osobno z dwóch ramion kąta prostego, jest równowarta powierzchni koła promienia* a.

Odpowiedź : Równania zagadnienia są

$$x+y+z=2p,\quad x^2+y^2=z^2,\quad yz+y^2-xz-x^2=a^2.$$

Trzecie, na mocy pierwszego bierze kształt $(y-x)=\frac{a^2}{2p}$; owoż, podnosząc ostatnie do kwadratu i odejmując od podwójnych stron drugiego, z wyrugowaniem z^2, otrzymuje się

$$(x+y)^2-8p(x+y)+8p^2-\frac{a^4}{4p^2}=0.$$

Znając summę $x+y$ i różnicę $y-x$, łatwo już znaleźć x, y i z. Jest tylko jedno rozwiązanie.

XXXIII. *Wyrachować boki trójkąta prostokątnego, znając jego obwód* 2p, *i wiedząc że summa objętości, utworzonych obrotem tego trójkąta około każdego osobno z dwóch ramion kąta prostego, jest równowarta połowie objętości sfery promienia* R.

Odpowiedź : Równania są :

$$x+y+z=2p,\quad x^2+y^2=z^2,\quad xy(x+y)=2R^3.$$

Owoż, z dwóch pierwszych równań wywodzi się $0=2p^2-2p(x+y)+xy$; więc, biorąc $x+y$ i xy za niewiadome posiłkowe, otrzymuje się zaraz

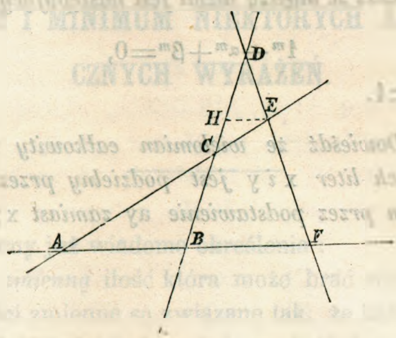
$$x+y=\frac{p^2+\sqrt{p^4+4pR^3}}{2p},\quad xy=\sqrt{p^4+4pR^3}-p^2;$$

poczem x, y i z.

Możebność zagadnienia

$$R^3 \leqq (20-14\sqrt{2})p^3 \quad \text{albo} \quad R \leqq (2-\sqrt{2})p.$$

XXXIV. *Są dane trzy linie proste* AE, AF, BD, *które, przecinając się, tworzą trójkąt* ABC *mający boki* a, b, c.



Poprowadzić poprzeczną DE *taką, żeby jej odcinki* DE *i* EF, *zawarte między danemi liniami, miały długości* m *i* n.

Odpowiedź : Wziąć, jako czyni Newton, długość CE za niewiadomą x, poprowadzić prostę EH równoległą do AB; użyć wiadomego twierdzenia geometryi

$$\frac{\overline{CE}^2}{CD.CH}+\frac{\overline{DE}^2}{DC.DH}=\frac{\overline{HE}^2}{HC.HD}+1;$$

i, wyznaczywszy cztery długości CD, CH, DH, HE w funkcyi x, podstawić w tem równaniu; etc.

XXXV. *Znaleźć summę* S_n *potęg* n^{tych} *pierwiastków równania dwukwadratowego*

$$ax^4+bx^2+c=0.$$

Odpowiedź : $aS_n+bS_{n-2}+cS_{n-4}=0.$

Trzeba uważać że

$$S_0=4,\quad S_1=0,\quad S_2=-\frac{2b}{a},\quad S_3=0.$$

XXXVI. *Oznaczając przez* 1, α, β *trzy pierwiastki sześcienne jedności, dowieśdź że między niemi jest następujący związek*

$$1^m+\alpha^m+\beta^m=0,$$

gdy $m=3p\pm1$.

XXXVII. *Dowieśdź że wielomian całkowity i jednorodny względem dwóch liter* x *i* y *jest podzielny przez* x — ay, *gdy się staje zerem przez podstawienie* ay *zamiast* x; *jakiekolwiek jest* a.

ROZDZIAŁ VIII.

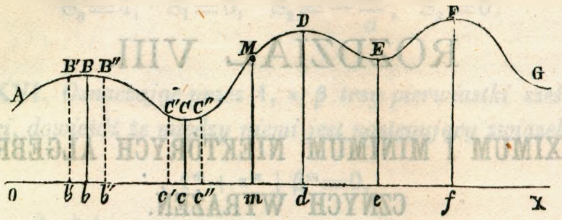
MAXIMUM I MINIMUM NIEKTÓRYCH ALGEBRYCZNYCH WYRAŻEŃ.

Przypominamy już wiadome określenia :

Nazywa się *zmienną* ilość która może brać różne wartości. Jeśli dwie ilości zmienne są związane tak, że każdej wartości nadanej dowolnie jednej odpowieda wartość drugiej, mówi się że pierwsza jest *zmienną niezależną* a druga jej *funkcyą*. Jedna zmienna może być funkcyą kilku innych zmiennych. I tak, powierzchnia koła jest funkcyą jego promienia, uważanego za zmienny; powierzchnia trójkąta jest funkcyą jego podstawy i wysokości; objętość równoległościanu jest funkcyą jego trzech rozmiarów uważanych za zmienne. Gęstość wody jest funkcyą temperatury.

341. Maximum i minimum wartości. Gdy ilość zmienna najpierwej rośnie a potem maleje, jej wartość, począwszy od której przestaje rość aby maleć, nazywa się *maximum*. Przeciwnie, jeśli ta ilość najpierwej maleje a potem rośnie, jej wartość, począwszy od której przestaje maleć aby rość, nazywa się *minimum*. Ztąd wynika że wartość maximum funkcyi jest ta która przewyższa dwie sąsiednie wartości, idące bezpośrednio przed nią i po niej; a zaś wartością minimum ta która jest mniejsza od bezpośrednio sąsiednich.

Aby dać widoczny przykład funkcyi która może nabywać wartości maxima i minima, przypuśćmy że punkt ruchomy M



przebiega krzywę krętą ABCDEFG, i uważajmy zmienność odległości Mm tego punktu od osi OX, w miarę jak jego rzut m na tej osi oddala się od punktu stałego O. Widzimy łatwo że odległość Mm, zależna od odległości Om, jest jej funkcyą. Owoż, jeśli oznaczymy ógólnie przez x *odciętę* Om punktu M, przez y jego *rzędnę* Mm, figura pokazuje że, dla x=Ob, rzędna y=Bb jest maximum; ponieważ przewyższa dwie rzędne sąsiednie B'b' i B''b'', które odpowiedają dwom odciętym Ob'=O$b-h$ i Ob''=O$b+h$, jednej cokolwiek mniejszej od Ob, drugiej cokolwiek większej. h znaczy przyrost zmiennej x, tak mały jak się podoba. Podobnie dla x=Od i dla x=Of, rzędne Dd i Ff są maxima. Przeciwnie dla x=Oc, rzędna y=Cc jest minimum; bo jest mniejsza od dwóch bezpośrednio sąsiednich C'c' i C''c'', które odpowiedają dwom odciętym x=O$c-h$ i x=O$c+h$. Tak samo rzędna Ee odpowiedająca odciętej Oe jest minimum.

Powyższa figura przedstawia jasno i daje dokładne wyobrażenie wartości nazwanych maximum i minimum. Nadto, nie tylko dowodzi że jedna funkcya może mieć kilka maximum i kilka minimum, ale jeszcze że między dwoma maximum jest zawsze jedno minimum; i nawzajem, między dwoma minimum jest zawsze jedno maximum. Minimum jest oczywiście mniejsze od każdego z dwóch maximum które je zawierają; ale może być większe od innych maximum. I tak, rzędna minimum Ee jest mniejsza od dwóch rzędnych maximum Dd i Ff, ale większa od rzędnej maximum Bb. Więc maximum nie znaczy *największej*, ani minimum *najmniejszej* ze wszystkich wartości jakie uważana funkcya brać może Dlatego wartości maximum i minimum, któreśmy wyżej określili, nazywają się *maximum i minimum względne*, a zaś wartości *największa i najmniejsza możebna* są *maximum i minimum samoiste* (bezwzględne). Funkcya $\sqrt{1-x}$ bierze wartość najmniejszą możebną gdy jest $x=1$. Ta wartość nie może się nazywać minimum; bo jest tylko mniejsza od jednej sąsiedniej którą się otrzymuje przez $x=1-h$, ale nie jest mniejsza od drugiej sąsiedniej, otrzymanej przez $x=1+h$, która jest urojona.

342. Algebra elementarna nie jest w stanie dać ogólnych metod poszukiwania maximum i minimum funkcyj algebrycznych; te metody należą do wyższej matematyki. Są jednak pewne algebryczne wyrażenia, w których łatwo odkryć wartości maximum albo minimum; o takich tylko mówić będziemy, wykładając teoryę na przykładach.

Biorąc najpierwej funkcyę całkowitą pierwszego stopnia względem x, jako

$$ax+b,$$

widzimy że ona, będąc ciągle rosnąca albo ciągle malejąca, według jak spółczynnik a jest dodatny albo odjemny, nie ma ani maximum ani minimum.

Przechodzimy potem do drugiego stopnia, i bierzemy funkcyę całkowitą względem x, w jej kształcie ogólnym

$$ax^2+bx+c.$$

Wiemy już z dyskussyi trójmianu (n^{ro} 274) że, gdy x zmieniając się od $-\infty$ do $+\infty$ nabywa wartości $-\frac{b}{2a}$, trójmian przechodzi przez wartość $\frac{4ac-b^2}{4a}$ która jest minimum albo maximum, według jak $a>0$ albo $a<0$; ponieważ jest mniejsza albo większa oddwóch wartości bezpośrednio sąsiednich wyrażonych przez $\frac{4ac-b^2}{4a}+ah^2$, i odpowiedających wartościom $x=-\frac{b}{2a}-h$ i $x=-\frac{b}{2a}+h$.

Z tego powodu i dla większej jasności, wyłożymy na tej prostej funkcyi elementarną metodę poszukiwania maximum i minimum wyrażeń algebrycznych. Oto na czem zależy metoda.

Nadajemy uważanej funkcyi wartość *niewyznaczoną* m, czyniąc

$$ax^2+bx+c=m, \tag{1}$$

i wyrażamy warunek rzeczywistości pierwiastków równania, to jest szukamy w jakich granicach może się odmieniać funkcya m żeby jej zmienna x zostawała rzeczywista. Te granice, jeśli istnieją, będą maximum albo minimum wartości m. W przeciwnym razie, jeśli x zostaje rzeczywiste, jakiekolwiek są wartości nadawane dla m, uważana funkcya nie ma ani maximum ani minimum.

Owóż, rzeczywistość pierwiastków równania (1) wymaga żeby było

$$b^2-4a(c-m)\geqslant 0,$$

albo

$$4am\geqslant 4ac-b^2. \tag{2}$$

Trzeba teraz rozróżnić dwa przypadki: $a>0$ i $a<0$.

1° Jeśli $a>0$, z nierówności (2) wyciągamy

$$m\geqslant\frac{4ac-b^2}{4a}. \tag{3}$$

Ten wynik pokazuje że wartości dla m powinny być większe od $\frac{4ac-b^2}{4a}$, i że najmniejsza z nich jest $m=\frac{4ac-b^2}{4a}$.

Ostatnia, dla której pierwiastki równania (1) stają się równemi, odpowieda wartości

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

Ale trzeba dowieśdź że ta, względnie najmniejsza wartość dla m, jest istotnie minimum zadanej funkcyi. Owoż, $m = \frac{4ac - b^2}{4a}$ jest wartością funkcyi ciągłej m, odpowiedającą wartości $x = -\frac{b}{2a}$; więc, jeśli weźmiemy h dostatecznie blizkie zera, wyniki z podstawień $x = -\frac{b}{2a} - h$ i $x = -\frac{b}{2a} + h$ będą się różniły od $\frac{4ac - b^2}{4a}$. Ich wartości będą większe od tej ilości; bo, na mocy nierówności (3), ilość niewyznaczona m nie może mieć wartości bezpośrednio mniejszej od $\frac{4ac - b^2}{4a}$. Więc, w założeniu $a > 0$, wartość $\frac{4ac - b^2}{4a}$ jest minimum funkcyi $ax^2 + bx + c$.

2° Jeśli $a < 0$, z nierówności (2) wywodzimy

$$m \leqq \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Ten wynik pokazuje że wartości nadawane ilości m powinny być mniejsze od $\frac{4ac - b^2}{4a}$, i że największa między niemi jest $m = \frac{4ac - b^2}{4a}$. Rozumując jako wyżej, łatwo widzimy że ta względnie największa wartość dla m w założeniu $a < 0$, odpowiedająca wartości $\frac{b}{2a}$ zmiennej x, jest maximum zadanej funkcyi $ax^2 + bx + c$.

Więc funkcya drugiego stopnia ax^2+bx+c, *całkowita względem* x, *ma zawsze wartość minimum albo maximum, według jak spółczynnik* a *jest dodatny albo odjemny; te obie wartości odpowiedają zmiennej* x *równej połowie summy pierwiastków rzeczonej funkcyi.*

343. Zagadnienie I. *Znaleźć maximum i minimum ułamka*

$$\frac{x^2+x+1}{x+1}.$$

Stosując metodę kładziemy

$$\frac{x^2+x+1}{x+1}=m,$$

i, znosząc mianownik, otrzymujemy

$$(1)\qquad x^2+(1-m)x+1-m=0.$$

Żeby pierwiastki tego równania były rzeczywiste, powinno być

$$(1-m)^2-4(1-m)\geqq 0,$$

albo

$$m^2+2m-3\geqq 0.$$

Ponieważ pierwszy spółczynnik jest dodatny, wartości trójmianu będą dodatne, jeśli za m podstawimy liczby nie zawarte między jego pierwiastkami. Trzeba więc najpierwej wiedzieć czy trójmian ma pierwiastki rzeczywiste nierówne, i znać ich wartości. Równamy trójmian do zera, i, rozwiązując równanie

$$m^2+2m-3=0,$$

znajdujemy

$$m=-1\pm 2,$$

a w szczególności

$$m'=-3 \quad \text{i} \quad m''=1.$$

Te wartości pokazują że liczby podstawiane za m powinny być mniejsze od -3, albo większe od $+1$; ztąd wynika że największą liczbą między pierwszemi jest -3, a najmniejszą między drugiemi jest $+1$. Więc -3 jest maximum wartości m, a zaś $+1$ jej minimum. Żeby teraz wiedzieć jakiej wartości dla x odpowieda to maximum albo minimum, trzeba je podstawić w równaniu

$$x=\frac{m-1}{2}.$$

Owoż, zastępując m przez -3, mamy $x=-2$, zastępując m przez $+1$ otrzymujemy $x=0$; więc $x=-2$ nadaje ułamkowi $\frac{x^2+x+1}{x+1}$ wartość maximum -3, a zaś $x=0$ nadaje mu wartość minimum $+1$. Jako widzimy, minimum jest tu większe od maximum. Co już dziwić nie powinno; bo wiemy z określenia że maximum nie jest koniecznie największą wartością funkcyi ani minimum najmniejszą.

344. Można dojść do tych samych wyników cokolwiek różnym sposobem. Rozwiązujemy równanie (1), i mamy

$$x=\frac{m-1\pm\sqrt{m^2+2m-3}}{2}.$$

Ponieważ x powinno być rzeczywiste, trzeba żeby ilość m^2+2m-3 pod pierwiastnikiem była dodatna, a przynajmnej żeby nie była odjemna. Owoż, rozkładając ją na czynniki, znajdujemy

$$m^2+2m-3=(m-1)(m+3)$$

Ten wieloczyn będzie dodatny, jeśli oba czynniki są dodatne albo oba odjemne; co wymaga

$$m-1>0 \quad \text{i} \quad m+3>0, \quad \text{zkąd} \quad m>1 \quad \text{i} \quad m>-3,$$

albo przeciwnie

$$m-1<0 \quad \text{i} \quad m+3<0, \quad \text{zkąd} \quad m<1 \quad \text{i} \quad m<-3.$$

Te nierówności przywodzą się do dwóch

$$m>1 \text{ albo } m<-3.$$

Więc, żeby x było rzeczywiste, trzeba i dość jest żeby wartości m dopełniały jednego z dwóch warunków

$$m\geqslant 1, \text{ albo } m\leqslant -3.$$

Ztąd wnosimy że $m=1$ jest wartością minimum ułamka $\frac{x^2+x+1}{x+1}$, a zaś $m=-3$ jego maximum. Jako wyżej otrzymano.

345. Zagadnienie II. *Znaleźć maximum albo minimum ułamka*

$$\frac{x-1}{x^2}.$$

Kładziemy

$$\frac{x-1}{x^2}=m,$$

zkąd równanie

$$mx^2-x+1=0.$$

Owoż, warunek rzeczywistości pierwiastków jest

$$1-4m\geqslant 0,$$

albo

$$m\leqslant \frac{1}{4}.$$

Więc ułamek $\frac{x-1}{x^2}$ ma wartość maximum $m=\frac{1}{4}$, która odpowieda wartości

$$x=\frac{1}{2m}=2;$$

ale nie ma minimum.

346. Zagadnienie III. *Znaleźć maximum albo minimum ułamka*

$$\frac{2x}{x^2-1}.$$

Kładziemy

$$\frac{2x}{x^2-1}=m,$$

zkąd

$$mx^2-2x-m=0.$$

Owoż, rzeczywistość pierwiastków równania wymaga żeby było

$$1+m^2 \gtrless 0;$$

a temu warunkowi staje się zadość, jakakolwiek jest wartość położona za m; więc zadany ułamek nie ma ani maximum ani minimum.

347. Zagadnienie IV. *Znaleźć maximum i minimum ułamka stosunkowego*

$$\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}.$$

Kładziemy

$$\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}=m, \tag{1}$$

zkąd wynika równanie

$$(a-a'm)x^2+(b-b'm)x+c-c'm=0,$$

w którem warunek rzeczywistości pierwiastków jest

$$(b-b'm)^2-4(a-a'm)(c-c'm)\gtrless 0,$$

albo, porządkując względem m,

$$(b'^2-4a'c')m^2-2(bb'-2ac'-2ca')m+b^2-4ac \gtrless 0. \tag{2}$$

Trzeba rozróżnić trzy przypadki.

1° $b'^2-4a'c'<0$. W tym przypadku pierwiastki trójmianu (2) są zawsze rzeczywiste. Bo, gdyby były urojone, trójmian zostawałby odjemny dla wszelkiej wartości podstawionej za m; zatem x nie miałoby wartości rzeczywistej. Co niemożebne, ponieważ równanie (1) pokazuje że, biorąc jakąkolwiek wartość rzeczywistą dla x, otrzymuje się odpowiedającą wartość rzeczywistą dla m; więc nawzajem tej wartości m odpowieda wartość rzeczywista x. Ztąd wynika że trójmian (2) jest dodatny dla każdej wartości m zawartej między jego pierwiastkami m' i m'', a jest odjemny dla wszelkiej innej. Więc, żeby x było rzeczywiste, wartości nadawane dla m powinny być większe od pierwiastku mniejszego m', ale mniejsze od większego m'', albo im równe. Co dowodzi że pierwiastek mniejszy m' jest minimum wartości zadanego ułamka, i pierwiastek większy m'' jego maximum.

Ale, gdyby pierwiastki rzeczywiste trójmianu były równe, $m'=m''$, trójmian byłby wtedy kwadratem odjemnym $(b'^2-4a'c')(m-m')^2$ dla wszelkiej wartości m, prócz tylko jednej $m=m'$ które go czyni zerem.

W tym szczególnym przypadku, ułamek (1) mający wartość stateczną m' jest niezależny od x; ale wtenczas spółczynniki odpowiedających wyrazów, dwóch trójmianów które tworzą ten ułamek, są proporcyonalne (nr° 95), to jest, dają

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}.$$

2° $b'^2-4a'c'>0$. W tym drugim przypadku, jeśli pierwiastki trójmianu (2) są rzeczywiste i nierówne, $m'<m''$, ten trójmian będzie dodatny dla wszelkiej wartości m mniejszej od pierwiastku mniejszego m', albo większej od pierwiastku większego m'; a będzie odjemny dla wszystkich wartości m zawartych między temi pierwiastkami. Więc pierwiastek mniejszy m' jest wartością maximum zadanego ułamka, a zaś pierwiastek większy m'' jego wartością minimum.

Jeśli pierwiastki trójmianu (2) są rzeczywiste i równe, albo urojone, jego wartości, wynikające z podstawienia jakichkolwiek liczb za m, zachowują znak pierwszego wyrazu, to jest są zawsze dodatne; wtedy nie ma ani maximun ani minimum.

Ale trzeba uważać że, gdy pierwiastki trójmianu (2) są równe, jego spółczynniki zadość czynią warunkowi

$$(bb'-2ac'-2ca')^2-(b'^2-4a'c')(b^2-4ac)=0,$$

albo

$$(ac'-ca')^2-(ab'-ba')(bc'-cb')=0,$$

który pokazuje że dwa trójmiany, tworzące zadany ułamek, mają jeden pierwiastek spólny albo nawet obydwa. (*Cwiczenie* XXIX na stronicy 599); więc w tym szczególnym przypadku zadany ułamek uproszcza się, i może nawet mieć wartość stateczną.

3° $b^2-4ac=0$. W tym ostatnim przypadku nierówność (2) przywodzi się do pierwszego stopnia, i bierze kształt $pm+q\geqslant 0$. Rozwiązującją, otrzymuje się minimum albo maximum, według jak spółczynnik p ilości m jest dodatny albo odjemny. Ale nie ma ani maximum ani minimum gdy ten spółczynnik jest zerem. Nie może się zdarzyć zarazem $p=0$ i $q<0$; bo x byłoby zawsze urojone.

348. Uwaga. Zmienność ułamka $\dfrac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$. Chcąc wiedzieć jakiej zmienności ulega ten ułamek, gdy x rośnie od $-\infty$ do $+\infty$, trzeba najpierwej zrównać do zera jego licznik i mianownik, aby mieć wartości x które go czynią zerem albo nieskończenie wielkim, po odjęciu spólnego mianownika jeśli istnieje. Potem szukać maximum i minimum. Nakoniec wyznaczyć szczególne wartości odpowiedające wartościom $x=0$ i $x=\pm\infty$. To mając, napisać różne wartości zmiennej x w porządku ich wielkości, i naprzeciwko umieścić odpowiedające wartości funkcyi. Tak sporządzony obraz przed-

stawi zmienność funkcyi tem dokładniej im więcej będzie wziętych wartości dla x.

349. Zagadnienie V. *Znaleźć maximum i minimum funkcyi*

$$\frac{x^4-4x^2+5}{x^2-2}.$$

Kładziemy

$$(1)\qquad \frac{x^4-4x^2+5}{x^2-2}=m,$$

zkąd wynika równanie

$$(2)\qquad x^4-(4+m)x^2+5+2m=0.$$

Żeby to równanie dwukwadratowe miało pierwiastki rzeczywiste, trzeba żeby wartości dla x^2 były rzeczywiste i dodatne. Owoż rozwiązując równanie (2), uważane jako drugiego stopnia względem x^2, mamy

$$x^2=\frac{4+m\pm\sqrt{m^2-4}}{2};$$

powinno więc być przede wszystkiem

$$m^2-4\geqslant 0;$$

zkąd

$$m\geqslant 2 \text{ albo } m\leqslant -2.$$

Podstawiając $m=2$ w ostatniem równaniu, znajdujemy $x^2=3$; zkąd $x=\pm\sqrt{3}$. Co dowodzi że każdej z tych dwóch wartości x odpowieda *minimum* 2. Podstawiamy tak samo $m=-2$ i otrzymujemy $x^2=1$, zkąd $x=\pm 1$; to pokazuje że obydwom wartościom $x=+1$ i $x=-1$ odpowieda *maximum* -2.

Ale x^2 może być jeszcze dodatne jeśli $4+m$ jest większe od $\sqrt{m^2-4}$; wyrażamy tę nierówność kładąc

$$4+m\geqslant\sqrt{m^2-4},\quad \text{zkąd wynika}\quad m\geqslant -\frac{5}{2}.$$

Ostatni warunek mieści się w warunku $m>2$ rzeczywistości pierwiastków; ztąd wnosimy że wartość $m=-\frac{5}{4}$, odpowiedająca zmiennej $x=0$, jest *minimum* zadanej funkcyi.

Z tego wszystkiego się pokazuje że funkcya $\frac{x^4-4x^2+5}{x^2-2}$ ma dwa maxima i trzy minima, to jest: każda z dwóch wartości $x=\pm 1$ daje maximum -2, a każda z dwóch wartości $x=\pm\sqrt{3}$ daje minimum 2; wartości $x=0$ odpowieda minimum $-\frac{5}{2}$.

350. ZAGADNIENE VI. *Znaleźć maximnm albo minimum funkcyi*

$$\frac{x^4+4x^2+5}{x^2+2}.$$

Kładąc

$$\frac{x^4+4x^2+5}{x^2+2}=m,$$

mamy równanie

$$(1) \qquad x^4+(4-m)x^2+5-2m=0,$$

z którego wyciągamy

$$(2) \qquad x^2=\frac{m-4\pm\sqrt{m^2-4}}{2}.$$

Ponieważ x^2 powinno być rzeczywiste i dodatne, wyrażamy najpierwej warunek rzeczywistości pierwiastków przez nierówność

$$m^2-4>0,$$

z której wynika

$$m>2 \quad \text{albo} \quad m<-2.$$

Ale żadna z dwóch granic $+2$ i -2 nie może być wzięta za m, bo obie nadają pierwiastki urojone równaniu (1). Idziemy więc dalej, i wyrażamy że przynajmniej większy pierwiastek x^2 jest dodatny, pisząc

$$m-4+\sqrt{m^2-4}>0 \quad \text{albo} \quad \sqrt{m^2-4}>4-m;$$

zkąd wynika

$$m \geqslant \frac{5}{2}.$$

Wartość $m=\frac{5}{2}$ dopełnia warunku $m>2$ rzeczywistości pierwiastków, i czyni $x^2=0$; więc ona jest minimum funkcyi $\frac{x^4+4x^2+5}{x^2+2}$, która nie ma innego minimum ani maximum.

351. Zagadnienie VII. *Znaleźć maximum albo minimum funkcyi*

$$\frac{x^4-4x^3+2x^2-4x+1}{x^2}.$$

Kładziemy

$$\frac{x^4-4x^3+2x^2-4x+1}{x^2}=m$$

zkąd

$$(1) \qquad x^4-4x^3+(2-m)x^2-4x+1=0.$$

Rozwiązujemy to równanie wzajemne wiadomym sposobem, dzieląc przez x^2 i czyniąc

$$(2) \qquad x+\frac{1}{x}=y;$$

co daje równanie

$$y^2-4y-m=0$$

z którego wyciągamy

$$y=2\pm\sqrt{4+m}.$$

Żeby te wartości y były rzeczywiste, powinno być

$$(3) \qquad 4+m \geqslant 0 \quad \text{albo} \quad m \geqslant -4.$$

Ale trzeba jeszcze żeby wartości dla x były także rzeczywiste. Owoż, podstawiając wyrażenie y w równaniu (2), otrzymujemy

$$(4)\qquad x^2-(2\pm\sqrt{4+m})x+1=0.$$

Musi więc być

$$(2\pm\sqrt{4+m})^2-4\geqslant 0 \quad \text{albo} \quad 4+m\pm 4\sqrt{4+m}\geqslant 0;$$

zkąd wynikają dwie nierówności

$$4+m+4\sqrt{4+m}\geqslant 0 \quad \text{i} \quad 4+m-\sqrt{4+m^2}\geqslant 0.$$

Pierwsza jest oczywista, ponieważ $4+m\geqslant 0$ na mocy (3); żeby drugiej stało się zadość, trzeba żeby było

$$4+m\geqslant 4\sqrt{4+m}, \quad \text{albo} \quad (4+m)^2\geqslant 16(4+m);$$

zkąd, dzieląc obie strony przez czynnik dodatny $4+m$, wynika

$$4+m\geqslant 16;$$

więc

$$(5)\qquad m\geqslant 12.$$

Ostatni warunek zawiera już poprzednio wymagany (3). Ztąd wnosimy że funkcya zadana ma dwa minimum; jedno $m=-4$, drugie $m=12$.

Żeby wiedzieć jakim wartościom dla x odpowiedają te dwa minima, trzeba podstawić każde z nich w równaniu (4)

$$x^2-(2-\sqrt{4+m})x+1=0.$$

Podstawiając $m=-4$, znajdujemy $(x-1)^2=0$, zkąd $x=1$. Podstawiając potem $m=12$, otrzymyjemy $(x+1)^2=0$, zkąd $x=-1$.

Więc $x=1$ nadaje funkcyi $\dfrac{x^4-4x^3+2x^2-4x+1}{x^2}$ wartość minimum -4; a zaś $x=-1$ nadaje jej wartość minimum 12.

352. Uwaga. Wyłożona metoda elementarna szukania maximum albo minimum danej funkcyi algebrycznej jest bardzo ograniczona; bo wymaga znajomości warunków pod jakiemi pierwiastki tej funkcyi zrównanej z ilością niewyznaczoną m, są rzeczywiste; dlatego, prócz ztąd wynikających równań drugiego stopnia, dwukwadratowych i wzajemnych, rzadko do innych zastosować się daje. Powyższe przykłady dobrze pokazują logiczny niedostatek metody która, zamiast prowadzić wprost do odkrycia maximum albo minimnm uważanej funkcyi, wywodzi je ubocznie, i niejako przypadkowo, z warunków możebności zagadnienia obcego zadanemu. Ale daje najpierwej maximum albo minimum, i potem wartości zmiennej x którym one odpowiedają.

TWIERDZENIA OGÓLNE.

353. Twierdzenie I. *Wieloczyn dwóch czynników zmiennych i z tym samym znakiem, których summa zostaje stateczna, jest maximum gdy te czynniki są równe.*

Jakoż, oczywista tożsamość

$$(x+y)^2-(x-y)^2=4xy$$

pokazuje że, jeśli summa $x+y$ zostaje stateczna, wieloczyn xy jest największy możebny gdy czynniki x i y są równe; *albo ogólniej, gdy ich różnica* x — y *jest najmniejsza możebna, jeśli zerem być nie może.* I przeciwnie, ten wieloczyn jest najmniejszy możebny, gdy różnica $x-y$ jego czynników staje się największą jaką być może.

Ale trzeba dowieśdź że, gdy czynniki x, y są równe, w założeniu summy statecznej $x+y$, wtedy ich wieloczyn największy możebny jest maximum w matematycznem znaczeniu tego wyrazu. W tym przypadku czyniąc

$x+y=a$, mamy $x=y=\frac{a}{2}$ i $xy=\frac{a^2}{4}$. Owoż, jeśli weźmiemy $x=\frac{a}{2}\mp h$, będzie $y=\frac{a}{2}\pm h$, i wieloczyn tych czynników wyrazi się przez

$$\left(\frac{a}{2}\mp h\right)\left(\frac{a}{2}\pm h\right)=\frac{a^2}{4}-h^2;$$

więc największy możebny wieloczyn $\frac{a^2}{4}$ jest istotnie maximum.

354. Twierdzenie II. *Summa dwóch ilości zmiennych dodatnych, których wieloczyn zostaje stateczny, jest minimum gdy te ilości są równe.*

Na dowodzenie tego, dajemy poprzednio użytej tożsamości kształt następujący

$$(x+y)^2=4xy+(x-y)^2;$$

zkąd wynika

$$x+y=\pm\sqrt{4xy+(x-y)^2}.$$

Ostatnia równość pokazuje że wartość samoista summy $x+y$ dwóch ilości x i y, mających wieloczyn stateczny xy, jest największa albo najmniejsza możebna, według jak ich różnica $x-y$ staje się największą albo najmniejszą jaką być może.

Trzeba teraz dowieśdź że, gdy dwie ilości zmienne dodatne x i y, tworzące wieloczyn stateczny xy, stają się równemi, wtedy ich summa $x+y$ jest minimum. W tym przypadku, czyniąc $xy=p$ mamy $x=y=\sqrt{p}$, i $x+y=2\sqrt{p}$. Owoż, jeśli weźmiemy $x=\sqrt{p}(1\mp h)$, będzie $y=\frac{\sqrt{p}}{1\mp h}$, i summa tych dwóch ilości wyrazi się przez

$$\sqrt{p}(1\mp h)+\frac{\sqrt{p}}{1\mp h}=\sqrt{p}\left(\frac{1\mp 2h+h^2+1}{1\mp h}\right)=2\sqrt{p}+\frac{h^2\sqrt{p}}{1\mp h},$$

więc najmniejsza możebna summa $2\sqrt{p}$ jest istotnie minimum.

Ta summa będzie *maximum,* jeśli ilości x i y, tworzące wieloczyn xy stateczny, są obie *odjemne.*

Uwaga. Dwa różne przypadki twierdzenia II są niejako dwiema wzajemnicami twierdzenia I.

Twierdzenia I i jego wzajemnic można łatwo dowieśdź następującym sposobem. Jeśli uczynimy

$$x+y=s \quad \text{i} \quad xy=p,$$

wartości x i y będą pierwiastkami równania

$$(1) \qquad X^2-sX+p=0.$$

A ponieważ te pierwiastki powinny być rzeczywiste, trzeba żeby było

$$s^2-4p\geq 0 \quad \text{albo} \quad s^2\geq 4p.$$

Owoż, jeśli dwie ilości x i y, obie dodatne albo obie odjemne, tworzą summę stateczną s, ich wieloczyn zmienny xy jest maximum gdy ma wartość $p=\frac{s^2}{4}$, to jest gdy czynniki x i y, będące pierwiastkami równania (1), są równe między sobą,

$$x=\frac{s}{2}=y\,.$$

Nawzajem, gdy dwie ilości dodatne x i y, tworzą wieloczyn stateczny p, ich summa zmienna $x+y$ będzie miała wartość minimum $s=2\sqrt{p}$ gdy te ilości będą równe, jeśli równemi stać się mogą.

Ale, jeśli dwie ilości odjemne x i y tworzą wieloczyn stateczny p, ich summa zmienna $x+y$ ma wartość maximum $s=-2\sqrt{p}$, gdy te ilości są równe.

Przykład I. *Podzielić ilość* a *na dwie części takie żeby ich wieloczyn był maximum.*

Jeśli nazwiemy x jedną z dwóch części, druga będzie $a-x$, i ich wieloczyn wyrazi się przez

$$(a-x)x.$$

Owoż, czynniki $a-x$ i x tworzą summę stateczną a; więc maximum ich wieloczynu ma miejsce gdy one są równe; co daje

$$a-x=x, \quad \text{zkąd} \quad x=\frac{a}{2}.$$

Trzeba więc podzielić daną ilość a na dwie części równe, aby otrzymać ich wieloczyn maximum $\frac{a^2}{4}$.

Wieloczyn $(a-x)x$ jest tem mniejszy im się więcej jego czynniki różnią między sobą.

Przykład II. *Znaleźć maximum powierzchni trójkąta prostokątnego, wiedząc że summa przeciwprostokątnej* z *i odpowiedającej wysokości* u *jest równa linii* a.

Powierzchnia tego trójkąta ma za miarę $\frac{1}{2}zu$, a jest $z+u=a$; więc maximum powierzchni wymagałoby $u=z$; ale ta równość jest niemożebna. Owoż, wieloczyn zu jest największy możebny gdy różnica $z-u$ jego czynników staje się najmniejszą jaką być może; co się zdarza gdy wysokość u, ogólnie mniejsza od połowy przeciwprostokątnej z, jest równa tej połowie. Wtedy $u=\frac{z}{2}=\frac{a}{3}$; trójkąt prostokątny jest równoramienny, i jego powierzchnia ma wartość, nie maximum, ale największą możebną $\frac{a^2}{9}$. Nawzajem, mając daną powierzchnię trójkąta prostokątnego, $\frac{1}{2}zu=k^2$, znajduje się łatwo że summa $z+u$, przeciwprostokątnej i wysokości, jest najmniejsza możebna gdy trójkąt jest równoramienny.

Przykład III. *Znaleźć maximum i minimum ułamka*

$$\frac{x^4-4x^2+5}{x^2-2}.$$

Wykonywając dzielenie, otrzymujemy

$$x^2-2+\frac{1}{x^2-2}.$$

Mamy teraz summę dwóch ilości x^2-2 i $\frac{1}{x^2-2}$ których wieloczyn jest stateczny. Trzeba więc, dla znalezienia maximum i minimum, zrównać te dwie ilości, to jest napisać

$$x^2-2=\frac{1}{x^2-2};$$

co daje

$$(x^2-2)^2=1, \text{ zkąd } x^2-2=\pm 1,$$

a w szczególności $x=\pm\sqrt{3}$ i $x=\pm 1$.

Pierwsze dwie wartości x wyznaczają dwa minima równe 2, a zaś drugie dwie wartości x wyznaczają dwa maxima równe 1.

Do tego, ponieważ różnica dwóch ilości x^2-2, $\frac{1}{x^2-2}$, które czynią wieloczyn stateczny, staje się największą możebną gdy jest $x=0$, summa $x^2-2+\frac{1}{x^2-2}$, przez podstawienie $x=0$, bierze wartość $-\frac{5}{2}$ najmniejszą jaką mieć może. Ta najmniejsza wartość rzeczonej summy jest jej trzeciem maximum; albowiem, podstawiając $x=0\mp h$, otrzymuje się oczywistą nierówność

$$h^2-2+\frac{1}{h^2-2}>-2+\frac{1}{-2}.$$

Więc zadany ułamek ma dwa maxima i trzy minima; wyniki zgodne z otrzymanemi w n^rze^ 349.

355. TWIERDZENIE III. *Wieloczyn* n *czynników zmiennych dodatnych, których summa zostaje stateczna, jest maximum gdy te czynniki są równe.* I NAWZAJEM.

1° Niech będą n czynniki x, y, z, u... wieloczynu wszystkie dodatne i mające summę stateczną

$$x+y+z+u+\ldots=a.$$

Ponieważ te czynniki w liczbie n są dodatne i mniejsze od a, ich wieloczyn jest mniejszy od a^n, i przeto ma pewną wartość maximum. Powiedam teraz że wieloczyn $xyz\ldots$ jest maximum gdy wszystkie jego czynniki są równe między sobą. Jakoż, gdyby ten wieloczyn był maximum chociaż ma dwa czynniki nierówne x i y, na przykład, zastępując każdy z tych czynników przez ich średnię arytmetyczną $\frac{x+y}{2}$, otrzymanoby nowy wieloczyn

$$\frac{x+y}{2}\cdot\frac{x+y}{2}zu\ldots,$$

którego czynniki mają tę samą summę co czynniki pierwszego. Ale średnia arytmetyczna $\frac{x+y}{2}$ dwóch ilości dodatnych jest większa od ich średniej geometrycznej $\sqrt{xy}$ (n° 69); więc nowy wieloczyn jest większy od pierwszego

$$(a) \qquad \frac{x+y}{2}\cdot\frac{x+y}{2}zu\ldots>\sqrt{xy}\cdot\sqrt{xy}\cdot zu\ldots,$$

albo

$$\frac{x+y}{2}\cdot\frac{x+y}{2}zu\ldots>xyzu\ldots;$$

co się sprzeciwia założeniu

Ztąd wynika że wieloczyn $xyzu\ldots$ nie może być minimum gdy ma czynniki nierówne. A ponieważ wiadomo naprzód że istnieje maximum wieloczynu, więc to maximum przypada gdy wszystkie czynniki są równe.

2° *Nawzajem summa* x+y+z+... *ilości zmiennych dodatnych, których wieloczyn* xyz... *zostaje stateczny, jest minimum gdy te ilości są równe.*

Jakoż, gdyby uważana summa $x+y+z$... była minimum, chociaż ma dwie ilości nierówne x i y na przykład, możnaby nie naruszając wieloczynu $xyz...=p$, otrzymać summę mniejszą; dość byłoby tylko zastąpić każdą z dwóch ilości x i y przez ich średnię geometryczną, coby dało

$$(b)\qquad \sqrt{xy}+\sqrt{xy}+z+\ldots<\frac{x+y}{2}+\frac{x+y}{2}+z+\ldots$$

albo

$$2\sqrt{xy}+z+u+<x+y+z+u+\ldots;$$

wynik przeciwny założeniu.

A ponieważ summa $x+y+z+\ldots$, będąc większa od zera, ma pewną wartość minimum, ztąd wnosimy że minimum tej summy przypada kiedy wszystkie ilości które ją składają są równe między sobą.

356. Twierdzenie III jest jeszcze prawdziwe, gdy wszystkie czynniki są odjemne i ich liczba n jest parzysta; bo wtedy równość (a) nie przestaje istnieć, i rozumowanie zostaje to samo.

Jeśli wszystkie czynniki są odjemne i ich liczba n nieparzysta, wtenczas wartość samoista wieloczynu, którego czynniki tworzą summę stateczną, jest maximum gdy te czynniki są równe. Więc w tym przypadku wieloczyn czynników odjemnych jest minimum.

Z tego wszystkiego wynika że, *aby podzielić liczbę dodatną* a *na* n *części którychby wieloczyn był maximum, trzeba ją podzielić na części równe.*

Co do wzajemnicy twierdzenia III^{go}, jeśli liczby x, y, z, ... są wszystkie odjemne i czynią wieloczyn stateczny $xyz\ldots=p$, ponieważ wartość samoista summy $x+y+z+\ldots$ jest minimum gdy te liczby są równe, summa liczb odjemnych $x+y+z+\ldots$ będzie maximum.

357. Wniosek. *Średnia arytmetyczna* n *liczb jest większa od ich średniej geometrycznej.*

Mamy dowieśdź że jest

$$\frac{a+b+c+\ldots}{n}>\sqrt[n]{abc\ldots}$$

albo, podnosząc obie strony do potęgi n^{tej},

$$\left(\frac{a+b+c+\ldots}{n}\right)^n>abc\ldots$$

Owoż, obydwie strony ostatniej nierówności są wieloczynami n czynników tworzących te same summy, ale czynniki pierwszego wieloczynu są równe a czynniki drugiego nierówne; więc pierwszy wieloczyn jest istotnie większy od drugiego.

358. Twierdzenie IV. *Wieloczyn potęg* $x^py^qz^r$, *których summa pierwiastków* $x+y+z$ *zostaje stateczna, jest maximum gdy te pierwiastki są proporcyonalne do wykładników.*

Niech będzie

$$x+y+z=a.$$

Wieloczynowi $x^py^qz^r$ można dać kształt

$$x^py^qz^r=p^pq^qr^r\left(\frac{x}{p}\right)^p\left(\frac{y}{q}\right)^q\left(\frac{z}{r}\right)^r,$$

który pokazuje że oba wieloczyny $x^py^qz^r$ i $\left(\frac{x}{p}\right)^p\left(\frac{y}{q}\right)^q\left(\frac{z}{c}\right)^r$

nabywają wartości maximum przez te same wartości zmiennych x, y, z.

Nazywając W drugi wieloczyn i pisząc

$$W=\frac{x}{p}\cdot\frac{x}{p}\cdots\frac{y}{q}\cdot\frac{y}{q}\cdots\frac{z}{r}\cdot\frac{z}{r}\cdots,$$

Widzimy że się składa $p+q+r$ czynników, których summa jest steczna i równa danej a,

$$\frac{x}{p}p+\frac{y}{q}q+\frac{z}{r}r=x+y+z=a.$$

Gdyby te czynniki były niezależne między sobą, i tylko musiały tworzyć daną summę a, ich wieloczyn byłby maximum gdy one są równe między sobą, to jest gdy każdy jest równy ilorazowi $\frac{a}{p+q+r}$ I tak, gdyby było na przykład

$$W_1=x_1y_2\ldots x_py_1y_2\ldots y_qz_1z_2\ldots z_r$$

z jedynym warunkiem

$$x_1+x_2+\ldots+x_p+y_1+y_2+\ldots+y_q+z_1+z_2+\ldots+z_r=a,$$

otrzymanoby maximum wieloczynu W_1 kładąc

$$x_1=x_2=\ldots=x_p=y_1=y_2=\ldots=y_q=z_1=z_2=\ldots=z_r=\frac{a}{p+q+r},$$

i to maximum byłoby $\left(\frac{a}{p+q+r}\right)^{p+q+r}$.

Ale niektóre z czynników wieloczynu W są z założenia równe między sobą; nie można więc niemi rozporządzać dowolnie, i dlatego rozumowanie użyte w n^rze^ 355 do nich się zastosować nie daje. Owoż, wszystkie wartości wieloczynu W mieszczą się oczywiście między wartościami wieloczynu W_1; więc maximum wieloczynu W nie może przewyższać maximum wieloczynu W_1. A że pierwsze maximum jest równe drugiemu gdy położono

$$\frac{x}{p}=\frac{y}{q}=\frac{z}{r}=\frac{a}{p+q+r},$$

więc wieloczyn potęg $x^p y^q z^r$ staje się maximum gdy pierwiastki, x, y, z, które tworzą summę stateczną a, są proporcyonalne do odpowiedających wykładników p, q, r.

Ztąd wnosimy że, aby podzielić daną liczbę a na n części $x, y, z, u\ldots$ takich żeby wieloczyn potęg $x^p y^q z^r u^s\ldots$ był maximum, trzeba tylko dopełnić warunków

$$\frac{x}{p}=\frac{y}{q}=\frac{z}{r}=\frac{u}{s}=\ldots$$

359. Twierdzenie V. *Summa ilości dodatnych* x, y, z, *których potęgi tworzą wieloczyn stateczny* $x^p y^q z^r = k$, *jest minimum gdy te ilości są proporcyonalue do wykładników potęg.*

Powiedam że minimum summy $x+y+z$ odpowieda wartościom danym przez równania

$$\frac{x}{p}=\frac{y}{q}=\frac{z}{r}=\sqrt[p+q+r]{\frac{k}{p^p q^q r^r}}.$$

Jakoż, jeśli tak wyznaczona summa $x+y+z$ nie jest minimum, niech będą wartości x', y', z', które czynią summę $x'+y'+z'<x+y+z$. Ale, na mocy twierdzenia IV, wartości x, y, z nadają wieloczynowi $x^p y^q z^r$ wartość maximum k; będzie więc $x'^p y'^q z'^r < k$. Zatem, żeby wieloczyn $x'^p y'^q z'^r$ był równy wieloczynowi $x^p y^q z^r$, trzeba żeby summa $x'+y'+z'$ była przynajmniej równa summie $x+y+z$, która temsamem jest minimum, i wyraża się przez

$$(p+q+r)\sqrt[p+q+r]{\frac{k}{p^p q^q r^r}}.$$

360. Twierdzenie IV i jego wzajemnica twierdzenie V mogą się zogólnić. Dowodzenie przypuszcza że wykładniki dodatne $p, q, r\ldots$ są całkowite, ale twierdzenia są prawdziwe gdy te wykładniki są ułamkowe.

Niech będzie $x+y+z=a$; powiedam że wieloczyn $x^{\frac{p}{\alpha}} y^{\frac{q}{\beta}} z^{\frac{r}{\gamma}}$ potęg ułamkowych jest maximum, gdy pierwiastki x, y, z są proporcyonalne do odpowiedających im wykładników $\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\beta}, \frac{z}{\gamma}$.

Mamy zawsze

$$x^{\frac{p}{\alpha}} y^{\frac{q}{\beta}} z^{\frac{r}{\gamma}} = \sqrt[\alpha\beta\gamma]{x^{\beta\gamma p} y^{\alpha\gamma q} z^{\alpha\beta r}};$$

owoż, maximum tego pierwiastnika arytmetycznego odpowieda wartości maximum wieloczynu $x^{\beta\gamma p} y^{\alpha\gamma q} z^{\alpha\beta r}$, a ostatnie maximum wymaga żeby było

$$\frac{x}{\beta\gamma p} = \frac{y}{\alpha\gamma q} = \frac{z}{\alpha\beta r};$$

więc jest

$$\frac{x}{\frac{p}{\alpha}} = \frac{y}{\frac{q}{\beta}} = \frac{z}{\frac{r}{\gamma}} = \frac{a}{\frac{p}{\alpha} + \frac{q}{\beta} + \frac{r}{\gamma}}.$$

Co było do dowodzenia.

Wzajemnica zogólnionego twierdzenia jest oczywiście prawdziwa

Przykład I. *Znaleźć maximum wieloczynu* x^2y, *wiedząc że* $x^2+xy=a^2$.

Nie naruszając wieloczyn x^2y, można mu dać kształt

$$x^2y = xy(x^2)^{\frac{1}{2}};$$

będzie więc

$$\frac{x^2}{\frac{1}{2}} = \frac{xy}{1} = \frac{\frac{a^2}{3}}{2}, \quad \text{zkąd} \quad x = \frac{y}{2} \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Przykład II. *Znaleźć minimum summy* $x^m + \frac{1}{x^n}$.

Mamy wieloczyn stateczny

$$x^m \cdot \left(\frac{1}{x^n}\right)^{\frac{m}{n}} = 1;$$

więc

$$\frac{x^m}{1} = \frac{\frac{1}{x^n}}{\frac{m}{n}}, \text{ zkąd } x = \sqrt[m+n]{\frac{n}{m}}.$$

361. Maxima i minima któreśmy dopiero co wyłożyli są wzajemne, i ta ich wzajemność może się wyrazić następującem ogólnem twierdzeniem.

Twierdzenie VI. *Gdy jest dana funkcya* $f(x, y) = a$ *dwóch zmiennych* x, y, *jeśli druga funkcya* $\varphi(x, y)$ *tych samych zmiennych ma wartość maximum* M *w pewnych okolicznościach; nawzajem, gdy druga funkcya* $\varphi(x, y)$ *jest dana, pierwsza będzie minimum w tych samych okolicznościach; byle tylko maximum* M *funkcyi* $\varphi(x, y)$ *zmniejszało się w swoich granicach gdy dana wartość* a *funkcyi* $f(x, y)$ *maleje.*

Jakoż, oznaczmy przez a' jakąkolwiek ilość mniejszą od a. Z założenia, maximum funkcyi $\varphi(x, y)$, odpowiedające wartości $f(x, y) = a'$, jest mniejsze od M; więc funkcya $f(x, y)$ bierze wartość przynajmniej równą a gdy $\varphi(x, y)$ równa się M.

Przykład III. *Znaleźć maximum wieloczynu* $x^p y^q z^r$, *wiedząc że jest summa stateczna* $x^\alpha + y^\beta + z^\gamma = a$.

Nie naruszając wieloczynu potęg $x^p y^q z^r$ można mu dać kształt

$$(x^\alpha)^{\frac{p}{\alpha}} (y\ )^{\frac{q}{\beta}} (z^\gamma)^{\frac{r}{\gamma}};$$

więc dla jego maximum powinno być

$$(1)\qquad \frac{\alpha x^\alpha}{p}=\frac{\beta y^\beta}{q}=\frac{\gamma z^\gamma}{r}.$$

Nawzajem, jeśli jest wieloczyn stateczny $x^p y^q z^r=k$, summa $x^\alpha+y^\beta+z^\gamma$ będzie minimum dla wartości niewiadomych x, y, z wyznaczonych przez te same równanie (1), na mocy twierdzenia VI.

362. Ogólne twierdzenia, dotyczące maximum wieloczynu albo minimum summy, przypuszczają że czynniki będąc związane jednem tylko równaniem, wyrażającem ich summę stateczną albo wieloczyn stateczny, mogą wszystkie, prócz jednego, zmieniać się dowolnie, i stać się naprzykład równemi między sobą albo proporcyonalnemi do wykładników ich potęg. W tem teorycznem założeniu zagadnienia maximum i minimum mają zawsze rozwiązanie. Ale w zastosowaniach rzeczy dzieją się inaczej. Zdarza się albowiem że niektóre czynniki nie mogą zadość czynić warunkom nałożonym do znalezienia maximum albo minimum. To nie dowodzi w ogóle żeby wtedy zadane zagadnienie nie miało maximum albo minimum, tylko pokazuje niedostatek zastosowanego twierdzenia.

I tak, szukajmy maximum wieloczynu

$$(1-x^2)(3+x^2).$$

Ponieważ summa czynników jest stateczna, stosując wiadome twierdzenie do wyznaczenia maximum tego wieloczynu, trzebaby zrównać czynniki: coby dało

$$1-x^2=3+x^2, \qquad \text{zkąd} \qquad x=\pm\sqrt{-1}.$$

Ta wartość urojona nie znaczy że uważany wieloczyn nie ma maximum, odpowiedającego wartości rzeczywistej dla x; jest ona tylko wskazem że twierdzenie, użyte do znalezienia maximum, nie stosuje się do zadanego przykładu. I w samej rzeczy, ponieważ różnica $2+2x^2$ czynników $3+x^2$ i $1-x^2$ staje się najmniejszą możebną dla $x=0$, odpowiedająca wartość 3 wieloczynu jest największa; podstawiając $x=\mp h$ przekonywamy się że ta największa wartość jest maximum wieloczynu. Z resztą, wykonywając mnożenie, otrzymujemy wielomian

$$3-2x^2-x^4$$

który, dla $x=0$, nabywa oczywiście wartości maximum 3.

Następujące zagadnienia wyjaśnią jeszcze inne szczegóły o których wiedzieć należy.

363. Zagadnienie VIII. *Ze wszystkich odcinków sferycznych mających równą wysokość jaki jest maximum albo minimum?*

Nazwijmy R promień sfery, h daną wysokość odcinków sferycznych o dwóch podstawach. Te podstawy mają spólne bieguny; jeśli oznaczymy przez x odległość jednego z dwóch biegunów od najbliższej podstawy, odległość tego samego biegona od drugiej podstawy będzie $x+h$, i powierzchnie dwóch podstaw będą miały za miary $\pi(2R-x)x$, $\pi(2R-x-h)(x+h)$. Zatem objętość odcinka sferycznego o dwóch podstawach wyrazi się przez

$$\frac{1}{2}\pi h\left\{(2R-x)x+(2R-x-h)(x+h)\right\}+\frac{1}{6}\pi h^3.$$

albo, po uproszczeniu,

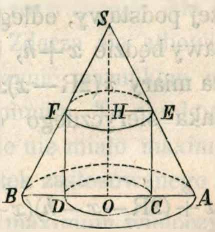
$$\frac{\pi h^2}{3}(3R-h)+\pi h(2R-h-x)x.$$

Owoż, wyraz stateczny jest oczywiście dodatny; wyraz zmienny jest także dodatny albo zero, ponieważ x nie może być mniejsze od 0 ani większe od $2R-h$. Więc wartość $\frac{\pi h^2}{3}(3R-h)$, odpowiedająca zmiennej $x=0$ albo $x=2R-h$, przedstawia najmniejszą możebną objętość odcinka sferycznego, którego jedna z dwóch podstaw stała się zerem. Ale ta wartość nie jest minimum, bo nie można zmiennej x nadać wartości cokolwiek mniejszej od 0, albo cokolwiek większej od $2R-h$, to jest nie można wziąć ogólnie $x=\mp\varepsilon$ ani $x=2R-h\mp\varepsilon$; gdzie ε znaczy ilość dodatną tak małą jak się podoba.

Odcinek sferyczny o dwóch podstawach ma jednak maximum objętości; albowiem wieloczyn $\pi h(2R-h-x)x$; którego czynniki zmienne tworzą summę stateczną $2R-h$, jest maximum dla $x=\frac{2R-h}{2}$. Wtedy podstawy odcinka są równnn oddalone od środka sfery.

364. Zagadnienie IX. *W stożek prosty wpisać walec taki żeby jego powierzchnia cała była maximum.*

Niech będzie r promień OA stożka i h jego wysokość OS.



Jeśli oznaczymy przez x i y promień OC i wysokość OH wpisanego walca, jego powierzchnia cała S będzie

$$S=2\pi xy+2\pi x^2.$$

Trzeba teraz wyrazić że walec jest wpisany w stożek, co da związek między x i y. Uważając że trójkąty ECA i SOA są podobne, znajdujemy proporcyę

$$\frac{y}{h}=\frac{r-x}{r};\quad \text{zkąd}\quad y=\frac{h(r-x)}{r}.$$

Podstawiamy tę wartość y w pierwszem równaniu, i otrzymujemy funkcyę

$$(1) \qquad S = 2\pi x \left(h + \frac{r-h}{r} x\right),$$

której mamy wyznaczyć wartość maximum.

Aby ułatwić poszukiwanie, rozróżniamy kilka przypadków.

1°. $h \leqq r$. W tem założeniu, ponieważ ilość $\frac{r-h}{r}$ jest dodatna albo zero, funkcya S zwiększa się zarazem ze swoją zmienną x. Na początku, kiedy $x=0$ walec staje się linią prostą OS i jego powierzchnia cała jest zerem; na końcu, kiedy $x=r$ walec staje się podstawą stożku, wtedy jego powierzchnia wyraża się przez $2\pi r^2$. Między temi granicami powierzchnia S, powiększając cię ciągle, nie ma ani maximum ani minimum.

2°. $h > r$. W tym przypadku funkcya S bierze kształt

$$(2) \qquad S = \frac{2\pi(h-r)}{r}\left(\frac{hr}{h-r} - x\right)x,$$

który pokazuje że czynnik stateczny $\frac{2\pi(h-r)}{r}$ jest dodatny i summa czynników zmiennych stateczna $\frac{hr}{h-r}$. Ztąd wnosimy że wieloczyn wyrażający powierzchnię S jest maximum gdy jego czynniki zmienne są równe, jeśli równemi stać się mogą.

To maximum odpowieda wartości średniej czynników zmiennych, to jest wartości

$$x = \frac{hr}{2(h-r)}.$$

Ale x powinno być mniejsze od r, bo inaczej prawdziwy walec nie istnieje; trzeba więc żeby było

$$\frac{hr}{2(h-r)}<r,\quad \text{zkąd wynika warunek}\quad h>2r.$$

Jeśli temu warunkowi staje się zadość, powierzchnia cała walca ma wartość maximum, wyrażoną przez $\frac{\pi r h^2}{2(h-r)}$. Aby ją uwydatnić, podstawiamy $x=\frac{hr}{2(h-r)}\mp\varepsilon$ w równaniu (2), i otrzymujemy

$$S=\frac{2\pi(h-r)}{r}\left(\frac{hr}{2(h-r)}\pm\varepsilon\right)\left(\frac{hr}{2(h-r)}\mp\varepsilon\right)$$

$$=\frac{\pi h^2 r}{2(h-r)}-\frac{2\pi(h-r)}{r}\varepsilon^2;$$

co widocznie pokazuje zapowiedziane maximum.

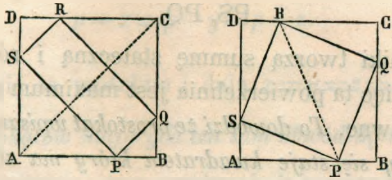
Przeciwnie, jeśli $\frac{hr}{2(h-r)}\geqq r$ to jest $h\leqq 2r$, powierzchnia cała walca nie ma maximum. Jakoż, w formule (2) można dać wieloczynowi czynników zmiennych kształt następujący

$$\left(\frac{hr}{h-r}-x\right)x=\frac{h^2r^2}{4(h-r)^2}-\left(\frac{hr}{2(h-r)}-x\right)^2,$$

który dowodzi że ten wieloczyn zwiększa się w miarę jak x rośnie. Widzimy więc teraz że, gdy x rośnie od 0 do r, powierzchnia S zwiększa się ciągle od 0 aż do wartości ostatecznej $4\pi r^2$. W tym przypadku czynniki zmienne nie stają się równemi, coby wymagało wartości $x=\frac{hr}{2(h-r)}$; powierzchnia S dosięga wartości największej, gdy różnica $\frac{hr}{h-r}-2x$ czynników zmiennych jest najmniejsza możebna; co właśnie przypada gdy $x=r$ (n[ro] 353).

Z tego wszystkiego wynika że powierzchnia cała walca, wpisanego w stożek prosty kołowy, wtenczas tylko ma wartość maximum gdy wysokość h stożka jest zawarta między jego promieniem r i średnicą $2r$.

365. ZAGADNIENIE X. *W dany kwadrat wpisać prostokąt maximum.*



Przypuśćmy zagadnienie rozwiązane, i niech będzie prostokąt PQRS wpisany w kwadrat ABCD (pierwsza figura). Widzimy łatwo że trójkąty APS, BPQ są podobne, i trójkąty BPQ, DRS równe. Zatem czyniąc AB$=a$, AP$=x$ i AS$=y$, mamy proporcyę

$$\frac{AP}{BQ}=\frac{AS}{BP} \quad \text{albo} \quad (1) \quad \frac{x}{a-y}=\frac{y}{a-x},$$

z której wyprowadzamy

$$\frac{x}{x+y-a}=\frac{y}{x+y-a};$$

ostatnia proporcya dowodzi że, jeśli niema $x+y-a=0$, powinno być

$$x=y.$$

Znajdujemy więc

$$\overline{PS}^2=2x^2 \quad \text{i} \quad \overline{PQ}^2=2(a-x)^2,$$

zkąd

$$PS=x\sqrt{2} \quad \text{i} \quad PQ=(a-x)\sqrt{2}.$$

Summa tych dwóch boków jest stateczna, bo

$$PS+PQ=a\sqrt{2}=AC;$$

co pokazuje że prostokąty wpisane w kwadrat ABCD są równoobwodowe, i ich obwód jest równy summie przekątnych tego kwadratu.

Ale powierzchnia prostokąta PQRS ma za miarę wieloczyn

$$PS. PQ,$$

którego czynniki tworzą summę stateczną i równą przekątnej AC; więc ta powierzchnia jest maximum gdy czynniki PS i PQ są równe. *To dowodzi że prostokąt wpisany* PQRS *jest maximum, gdy się staje kwadratem który ma za wierzchołki środki boków kwadradu* ABCD.

Jeśli $x+y=a$, będzie $BP=y$; wtedy prostokąt wpisany PQRS (druga figura) jest kwadratem, ponieważ

$$\overline{PQ}^2=\overline{BP}^2+\overline{BQ}^2=y^2+x^2=\overline{PS}^2.$$

Owoż kwadrat PQRS jest równy $\frac{1}{2}\overline{PR}^2$; a przekątna PR, w ogóle większa od boku kwadratu ABCD, jest równa temu bokowi gdy wierzchołki P i R przypadają we środkach boków AB i CD; *więc kwadrat mający za wierzchołki środki boków* kwadratu ABCD *jest najmniejszy z kwadratów wpisanych.*

Godne uwagi że kwadrat, mający za wierzchołki środki boków danego kwadratu, jest zarazem maximum między prostokątami wpisanemi i minimum między kwadratami wpisanemi.

366. Zagadnienie XI. *Między trójkątami równo obwodowemi jaki jest maximum?*

Wiadomo że powierzchnia trójkąta w funkcyi jego boków wyraża się przez formułę

$$S=\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}.$$

w której x, y, z, oznaczają trzy boki, p znaczy połowę ich summy. Owoż, w wieloczynie $p(p-x)(p-y)(p-z)$ czynniki zmienne $p-x$, $p-y$, $p-z$ tworzą summę stateczną $p-x+p-y+p-z=p$; więc wieloczyn będzie maximum gdy te czynniki będą równe, jeśli równemi stać się mogą; co wymaga żeby było

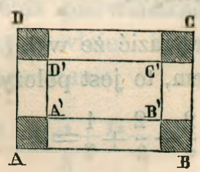
$$p-x=p-y=p-z.$$

Te równania są możebne i dają $x=y=z=\frac{2p}{3}$; *więc ze wszystkich trójkątów mających ten sam obwód* 2p *trójkąt równoboczny jest maximum; jego powierzchnia wyraża się przez* $\frac{p^2}{9}\sqrt{3}$.

Ponieważ maximum $\frac{p^2\sqrt{3}}{9}$ powierzchni trójkąta zmniejsza się gdy obwód $2p$ maleje, ztąd, na mocy twierdzenia VI, wnosimy że, nawzajem, ze wszystkich trójkątów równowartych trójkąt równoboczny ma obwód minimum.

Uwaga. Między trójkątami mającemi obwód $2p$ i podstawę a, trójkąt równoramienny jest maximum.

367. Zagadnienie. XII. *Mając dany arkusz tektury prosto-*



kątnej ABCD, *wycięto w jej czterech kątach kwadraty równe* A'A', BB',... *i zrobiono pudełko, mające za dno prostokąt* A'B'C'D' *i za ściany prostokąty pozostałe. Jaki powinien być bok wyciętych kwadratów żeby objętość pudełka była maximum?*

Niech będą a i b boki danego prostokąta, x bok wyciętego kwadratu. Objętość pudełka wyraża się przez

$$(a-2x)(b-2x)x.$$

Gdyby, dla zastosowania wiadomego twierdzenia, dano wieloczynowi kształt

$$\frac{1}{4}(a-2x)(b-2x)(4x),$$

nie naruszając jego wortości uczynionoby stateczną summę czynników $a-2x$, $b-2x$, $4x$; ale te czynniki nie mogłyby stać się równemi dla żadnej wartości x, bo dwa równania

$$a-2x=b-2x=4x$$

o jednej niewiadomej są widocznie niezgodne.

Unika się tej drudności za pomocą *metody spółczynników niewyznaczonych*. Oto jakim sposobem. Można oczywiście, mnożąc i dzieląc wieloczyn trzech czynników $(a-2x)(b-2x)x$, przez trzy ilości α, β, γ, przedstawić go w kształcie

$$\alpha\beta\gamma.\frac{a-2x}{\alpha}.\frac{b-2x}{\beta}.\frac{x}{\gamma},$$

i rozporządzić ilościami niewyznaczonemi α, β, γ, tak żeby summa czynników zmiennych $\frac{a-2x}{\alpha}+\frac{b-2x}{\beta}+\frac{x}{\gamma}$ była stateczna; dość tylko wyrazić że w tej summie spółczynnik niewiadomej x jest zerem, to jest położyć

$$(1) \qquad -\frac{2}{\alpha}-\frac{2}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=0.$$

Możemy teraz powiedzieć że czynniki zmienne $\frac{a-2x}{\alpha}$, $\frac{b-2x}{\beta}$, $\frac{x}{\gamma}$ przekształconego wieloczynu są równe, i napisać dwa równania

$$(2) \qquad \frac{a-2x}{\alpha}=\frac{b-2x}{\beta}=\frac{x}{\gamma}.$$

Owoż, trzy równania (1) i (2), będąc jednorodne względem trzech ilości α, β, γ, wystarczają do ich wyrugowania; trzeba tylko uważać że, na mocy równań (2), α, β, γ są proporcyonalne do $a-2x$, $b-2x$, x, i podstawić te wartości w równaniu (1); co daje

$$(3) \qquad -\frac{2}{a-2x}-\frac{2}{b-2x}+\frac{1}{x}=0, \text{(*)}$$

albo

$$(3') \qquad 12x^2-4(a+b)x+ab=0.$$

Rozwiązując ostatnie równanie, otrzymujemy

$$x=\frac{a+b\pm\sqrt{a^2+b^2-ab}}{6}.$$

Oba pierwiastki są rzeczywiste i dodatne. Ale możebność zagadnienia wymaga żeby było

$$a-2x>0 \quad \text{i} \quad b-2x>0 \quad \text{zkąd} \quad x<\frac{a}{2} \quad \text{i} \quad x<\frac{b}{2}.$$

Przypuszczając $b<a$, podstawiamy $\frac{b}{a}$ za x w równaniu (3'), i znajdujemy wynik odjemny $b(b-a)$, który dowodzi że $\frac{b}{2}$ jest zawarte między dwoma pierwiastkami tego równania; więc pierwiastek większy powinien być odrzucony. Zagadnienie ma tedy jedyne rozwiązanie

$$(4) \qquad x=\frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2-ab}}{6}.$$

(*) Znosząc mianowniki i pisząc

$$-2(b-2x)x-2(a-2x)x+(a-2x)(b-2x)=0,$$

widzimy że równanie (3) nie jest czem innem jak *pochodną* wieloczynu $(a-2x)(b-2x)x$, podzieloną przez ten wieloczyn. O pochodnych będzie mowa w algebrze wyższej.

Podstawiając wartość x w równaniach (2), wyznaczonoby dla stosunków $\frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{\beta}{\gamma}$ wartości rzeczywiste i dodatne. Nie ma jednak potrzeby do rachunku maximum znać tych wartości, a dla usprawiedliwienia metody dość tylko wiedzieć że istnieją.

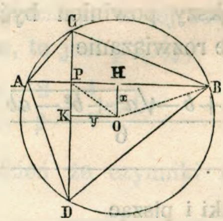
Uwaga. Jeśli dana tektura jest kwadratem, będzie $b=a$ i formuła (4) da $x=\frac{a}{6}$. Otrzymuje się wprost ten wynik, uważając że wtedy objętość pudełka wyraża się przez

$$(a-2x)^2 x \quad \text{albo} \quad \frac{1}{2}(a-2x)^2.2x;$$

a maximum ostatniego wieloczynu potęg, w którym summa pierwiastków $a-2x$, $2x$ jest stateczna, wymaga żeby było

$$\frac{a-2x}{2}=\frac{2x}{1}; \quad \text{zkąd} \quad x=\frac{a}{6}.$$

368. Zagadnienie XIII. *Przez punkt wzięty wewnątrz koła poprowadzono dwie cięciwy prostokątne jakiekolwiek, i, łącząc ich skrajności, utworzono czworobok. Jaki trzeba dać kierunek tym cięciwom żeby powierzchnia czworoboku była maximum albo minimum?*



Niech będzie wewnątrz koła O punkt P, przez który prowadzimy dwie cięciwy prostokątne AB, CD, i tworzymy czworobok ACBD. Jeśli ze środka O spuścimy, na te cięciwy, prostopadłe OH, OK, i weźmiemy je za niewiadome, czyniąc $OH=x$, $OK=y$, $OP=p$, $OB=R$, otrzymamy

$$AB=2BH=2\sqrt{R^2-x^2}, \quad CD=2DK=\sqrt{R^2-y^2}.$$

Owoż, powierzchnia czworoboku ACBD wyraża się przez

$$\frac{1}{2}AB.CD=2\sqrt{(R^2-x^2)(R^2-y^2)};$$

a między x i y jest związek

$$x^2+y^2=p^2,$$

który pokazuje że summa czynników R^2-x^2, R^2-y^2, jest ilością stateczną $2R^2-p^2$; zatem wieloczyn $(R^2-x^2)(R^2-y^2)$, jest maximum gdy te czynniki są równe. Co daje

$$R^2-x^2=R^2-y^2, \quad \text{zkąd} \quad x=y.$$

Więc powierzchnia czworoboku ACBD *jest maximum gdy cięciwy postokątne* AB *i* CD *są równe.*

Aby znaleźć minimum powierzchni o której mowa, uważamy że wieloczyn $(R^2-x^2)(R^2-y^2)$, którego czynniki są dodatne i tworzą summę stateczną, jest najmniejszy możebny gdy różnica tych czynników staje się największą $\pm(y^2-x^2)$ (n^ro^ 353), to jest gdy x^2 jest najmniejsze a y^2 największe możebne, albo nawzajem; czyniąc $x=0$ mamy $y^2=p^2$. Te wartości podstawione nadają wieloczynowi najmniejszą możebną wartość

$$R^2(R^2-p^2).$$

Powiedamy teraz że ta wartość jest minimum. Jakoż, biorąc $x=\mp h$, będzie $y^2=p^2-h^2$; z podstawienia tych wartości otrzymany wynik

$$R^2-h^2)(R^2-p^2+h^2)=R^2(R^2-p^2)+h^2(p^2-h^2)$$

dowodzi że $R^2(R^2-p^2)$ jest istotnie minimum uważanego wieloczynu.

Więc powierzchnia czworoboku ACBD *ma wartość minimum, gdy jedna z dwóch cięciw prostokątnych* AB, CD, *przechodzących przez punkt* P *jest największą możebną a druga najmniejszą możebną.*

Można dojść inaczej do tych samych twierdzeń. W wieloczynie $(R^2-x^2)(R^2-y^2)$ podstawmy $y^2=p^2-x^2$, i połóżmy

$$(R^2-x^2)(R^2-p^2+x^2)=m;$$

będzie

$$x^4-p^2x^2+m-R^2(R^2-p^2)=0.$$

Rozwiązując to równanie względem x^2, znajdujemy

$$x^2=\frac{p^2\pm\sqrt{p^4-4m+4R^2(R^2-p^2)}}{2}.$$

Owoż, x^2 powinno być rzeczywiste i dodatne; co wymaga żeby było

$$m\leqslant\frac{p^4+4R^2(R^2-p^2)}{4}.$$

Więc

$$m=\frac{p^4+4R^2(R^2-p^2)}{4}$$

jest maximum powierzchni czworoboku, odpowiedające wartościom

$$x^2=\frac{p^2}{2}=y^2;\text{ zkąd } x=\frac{p\sqrt{2}}{2}=y.$$

Ale, x^2 jest jeszcze rzeczywiste i dodatne jeśli, zarazem z powyższym niezbędnym warunkiem, staje się zadość następującemu

$$p^2\geqslant\sqrt{p^4-4m+4R^2(R^2-p^2)},$$

zkąd

$$m\geqslant R^2(R^2-p^2);$$

warunek zgodny z poprzedzającym.

Więc

$$m = R^2(R^2 - p^2)$$

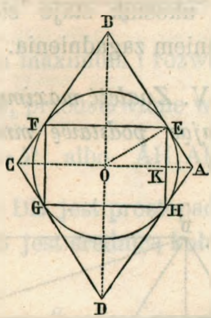
jest minimum powierzchni czworoboku, odpowiedające wartościom

$$x=0, \quad y=p.$$

Te wszystkie wyniki potwierdzają powyższe.

369. Zagadnienie XIV. *Opisać na kole ukośnik taki, żeby summa jego powierzchni z powierzchnią prostokąta, wpisanego w koło i w ten ukośnik, była najmniejsza możebna.*

Niech będzie ukośnik ABCD opisany na kole promienia R,



i prostokąt EFGH wpisany zarazem w koło i w ukośnik. Jeśli nazwiemy x bok AB, powierzchnia ukośnika będzie miała za miarę

$$2Rx.$$

Dla wyznaczenia powierzchni prostokąta, uważamy że trójkąty OEK, OAB, mające boki prostopadłe, są podobne i dają

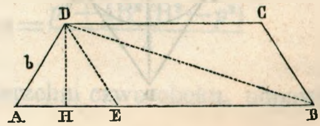
$$\text{Trój. OEK} = \text{trój. OAB} \times \frac{R^2}{x^2};$$

zkąd wnosimy że powierzchnia prostokąta EFGH wyraża się przez

$$8.\frac{Rx}{2}.\frac{R^2}{x^2} \quad \text{albo} \quad \frac{4R^3}{x}.$$

Te dwie powierzchnie $2Rx$ i $\frac{4R^3}{x}$ tworzą wieloczyn stateczny $8R^4$; więc ich summa $2Rx+\frac{4R^3}{x}$ miałaby wartość maximum gdyby one mogły stać się równemi; ale ta równość jest oczywiście niemożebna. Owoż, wiemy że summa dwóch ilości dodatnych, których wieloczyn jest stateczny, staje się najmniejszą możebną gdy ich różnica bierze wartość najmniejszą jaką mieć może; co się właśnie zdarza w naszem zagadnieniu gdy $x=2R$; wtedy ukośnik staje się kwadratem. Więc kwadrat jest rozwiązaniem zagadnienia.

370. Zagadnienie XV. *Znaleźć maximum powierzchni trapezu równoramiennego, znając podstawę mniejszą* a *i długość* b *boków nierównoległych.*



Jeśli oznaczymy przez x połowę różnicy AE dwóch podstaw trapezu, podstawa większa wyrazi się przez $a+2x$, i wysokość przez $\sqrt{b^2-x^2}$; zatem powierzchnia trapezu będzie

$$\frac{AB+CD}{2}.DH=(a+x)\sqrt{b^2-x^2},$$

i stanie się maximum dla tej samej wartości x co jej kwadrat

$$(a+x)^2(b^2-x^2) \quad \text{albo} \quad (a+x)^2(b+x)(b-x).$$

Dla wyznaczenia maximum tego wieloczynu potęg, trzeba użyć metody już wiadomych spółczynników α, β, γ, i napisać równania

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\gamma}=0,$$

$$\frac{a+x}{2\alpha}=\frac{b+x}{\beta}=\frac{b-x}{\gamma};$$

zkąd, rugując α, β, γ, otrzymuje się równanie

$$2x^2+ax-b^2=0,$$

którego pierwiastek dodatny

$$x=\frac{-a+\sqrt{a^2+8b^2}}{4}$$

odpowieda szukanemu maximum i rozwiązuje zagadnienie.

Powyższe równanie, przedstawione w kształcie

$$x(2x+a)=b^2 \quad \text{albo} \quad \mathrm{AH}.\mathrm{AB}=\overline{\mathrm{AD}}^2,$$

dowodzi że przekątna DB jest prostopadła do boku DA; więc podstawa większa AB jest średnicą koła opisanego na trapezie maximum.

Jeśli $b=a$, będzie $x=\frac{a}{2}$ i $\mathrm{AB}=2a$; wtedy boki AD, DC, BC są równe promieniowi koła opisanego, i trapez maximum jest pół-sześciokątem foremnym.

371. Zagadnienie XVI. *Mając dany obwód* 2p *i powierzchnię* a^2 *trapezu równoramiennego, wyznaczyć jego boki tak, żeby powierzchnia boczna* πm^2 *pnia stożka, utworzonego obrotem tego trapezu około linii łączącej środki jego podstaw, była maximum.*

Jeśli nazwiemy x, y połowy podstaw trapezu, i z jeden z boków nierównoległych, równania zagadnienia będą

$$x+y+z=2p, \qquad (x+y)\sqrt{z^2-(x-y)^2}=a^2, \qquad (x+y)z=m^2.$$

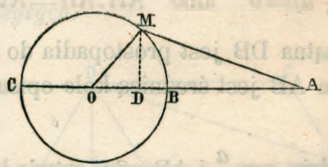
Ztąd wynika równanie $2p - z = \frac{m^2}{z}$ albo $z^2 - 2pz + m^2 = 0$, które wymaga żeby było $p^2 - m^2 \geq 0$. Więc maximum powierzchni pnia stożka odpowieda wartości $m = p$ która daje $z = p$, i następnie $x + y = p$, $x - y = \frac{\sqrt{p^2 - a^2}}{p}$ przypuszczając $x > y$. Ale trzeba żeby było $a \leq p$. Jeśli temu warunkowi staje się zadość, będzie

$$x = \frac{p^2 + \sqrt{p^4 - a^4}}{2p}, \quad y = \frac{p^2 - \sqrt{p^4 - a^4}}{2p}, \quad z = p.$$

Te wartości sprawdzają warunek $z^2 - (x-y)^2 > 0$; więc są rozwiązaniem zagadnienia.

Gdy $a = p$ trapez staje się prostokątem, i pień stożka walcem.

372. Zagadniene XVII. *Przez punkt* A *płaszczyzny koła* O, *poprowadzić do jego okręgu linię prostą minimum.*



Połączmy punkt A z jakimkolwiek punktem M okręgu O, i, nazywając a odległość OA, oznaczmy przez x rzut OD promienia OM=R. Trójkąt AMO daje kwadrat odległości AM,

$$\overline{\mathrm{AM}}^2 = a^2 + \mathrm{R}^2 - 2ax,$$

w którym zmienna x jest dodatna albo odjemna, według jak rzut D punktu M pada na OB albo na OC.

Funkcya algebryczna pierwszego stopnia $a^2 + \mathrm{R}^2 - 2ax$ nie ma oczywiście ani maximum ani minimum, nie nabywa wartości największej ani najmniejszej; bo może rość nieograniczenie ze zmienną x odjemną, albo maleć ze zmienną x dodatną. Uważana geometrycznie, ta funkcya bierze wartość najmniejszą gdy jest $x=R$, i największą gdy $x=-R$; ale te dwie wartości nie są minimum i maximum w matematycznem znaczeniu tych wyrazów, bo nie można wziąć $x=R+h$ ani $x=-R-h$. Jednakże wiemy *a priori* że odległość AM ma wartość minimum i maximum. Albowiem, gdy punkt M dążąc do B przechodzi to położenie, odległość AM maleje i przestaje maleć aby rosnąć; więc normalna mniejsza AB jest minimum odległości AM; tak samo, gdy punkt M dążąc do C przechodzi to drugie położenie, odległość AM rośnie i przestaje rość aby maleć; więc normalna większa AC jest maximum odległości AM.

Aby jeszcze lepiej widzieć czem się to dzieje, zamiast rzutu x weźmy kąt $AOM=\theta$ za zmiennę niezależną; będzie

$$\overline{AM}^2=a^2+R^2-2aR\cos\theta.$$

Owoż gdy $\theta=0$, funkcya $a^2+R^2-2aR\cos\theta$ nabywa wartości najmniejszej możebnej $a^2+R^2-2aR=(a-R)^2=\overline{AB}^2$, a gdy jest $\theta=\pi$, ta funkcya ma wartość najmniejszą $a^2+R^2+2aR=(a+R)^2=\overline{AC}^2$.

Pierwsza wartość jest minimum, druga maximum; bo,

$$\text{dla } \theta=\mp h \text{ będzie } a^2+R^2-2aR\cos h>a^2+R^2-2aR,$$

$$\text{a dla } \theta=\pi\mp h \text{ mamy } a^2+R^2+2aR\cos h<a^2+R^2+2aR.$$

Ten przykład jasno pokazuje że to co nazywają maximum i minimum odnosi się, nietylko do wartości samoistej jakiej nabywa funkcya, ale jeszcze do trybu istnienia zmiennej niezależnej.

373. Zagadnienie XVIII. *Wpisać w koło trójkąt maximum.*

Między trójkątami różnobocznemi, wpisanemi w dane koło, nie ma oczywiście żadnego z powierzchnią maximum; uważamy więc trójkąt równoramienny, wpisany w koło promienia R. Nazywając $2x$, y, S podstawę, wysokość i powierzchnię tego trójkąta, mamy równania

$$S=xy, \quad x^2=(2R-y)y;$$

zatem

$$S^2=(2R-y)y^3.$$

Owoż, pierwiastki y i $2R-y$ tworzą summę stateczną 2R; więc maximum wieloczynu ich potęg wyznaczy się przez równanie

$$\frac{y}{3}=\frac{2R-y}{1}=\frac{R}{2}; \quad \text{zkąd} \quad y=\frac{3R}{2}.$$

Co dowodzi że trójkąt maximum wpisany w koło jest równoboczny.

374. Zagadnienie XIX. *Między trójkątami* ABC *mającemi dany bok* a *i kąt mu przeciwległy* A, *znaleźć ten którego obwód jest największy.*

Odpowiedź : Trygonometrya daje

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{x}{\sin B}=\frac{y}{\sin C}=\frac{x+y}{\sin B+\sin C}=\frac{x+y}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}},$$

zkąd

$$x+y=\frac{a\cos\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}.$$

Więc summa $x+y$ będzie największa i temsamem obwód największy, gdy kąt $B-C=0$, to jest gdy trójkąt będzie równoramienny. Co widoczne geometrycznie.

Ten obwód jest maximum; bo, czyniąc $B-C=\mp h$, otrzymuje się

$$x+y=\frac{a\cos(\mp 2h)}{\sin\frac{A}{2}}=\frac{a\cos 2h}{\sin\frac{A}{2}}<\frac{a}{\sin\frac{A}{2}}.$$

375. Zagadnienie XX. *Znając summę dwóch boków i ich kąt, znaleźć trójkąt w którym wysokość odpowiedająca kątowi jest maximum.*

Niech będzie dany kąt A i summa k jego boków, z bok przeciwległy, u odpowiedająca wysokość; równania zagadnienia są

$$x+y=k,\quad xy\sin A=uz,\quad z^2=x^2+y^2-2xy\cos A.$$

Z tych równań łatwo się wywodzi

$$z^2=(x-y)^2+4xy\sin^2\frac{A}{2}=(x-y)^2+2uz\operatorname{tg}\frac{A}{2},$$

albo

$$(x-y)^2=z\left(z-2u\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right).$$

To pokazuje że powinno być

$$u\leq\frac{z}{2\operatorname{tg}\frac{A}{2}}.$$

Owoż mamy także

$$z^2=(x+y)^2-4xy\cos^2\frac{A}{2}=k^2-2uz\cot\frac{A}{2},$$

zkąd

$$z=-u^2\cot\frac{A}{2}+\sqrt{u\cot^2\frac{A}{2}+k^2}.$$

Podstawiając tę wartość w powyższej nierówności, będzie

$$u\leq\frac{-u\cot\frac{A}{2}+\sqrt{u^2\cot^2\frac{A}{2}+k^2}}{2\operatorname{tg}\frac{A}{2}},$$

albo

$$u^2\left(2\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\cot\frac{A}{2}\right)^2\leq u^2\cot^2\frac{A}{2}+k^2;$$

zkąd nakoniec

$$u\leq\frac{k}{2}\cos\frac{A}{2},$$

Więc jest maximum $u=\frac{k}{2}\cos\frac{A}{2}$, które czyni $(x-y)^2=0$; ztąd $x=y$. Szukany trójkąt jest równoramienny, i jego boki są: $x=\frac{k}{2}=y$, $z=k\sin\frac{A}{2}$.

376. Zagadnienie XXI. *Między trójkątami prostokątnemi mającemi obwód* 2p, *znaleźć ten w którym summa przeciwprostokątnej i odpowiedającej wysokości jest maximum.*

Oznaczając przez x, y, z, u boki kątu prostego, przeciwprostokątnę i wysokość, przez m summę $z+u$, będzie

$$x+y+z=2p,\quad x^2+y^2=z^2,\quad xy=uz,\quad u+z=m.$$

Z dwóch pierwszych równań wywodzi się

$$xy=2p^2-2pz.$$

Mamy zatem dwa równania

$$uz=2p^2-2pz,\quad u+z=m,$$

które dają

$$z^2-(m+2p)z+2p^2=0,\ \text{zkąd}\ z=\frac{m+2p-\sqrt{m^2+4mp-4p^2}}{2}<p.$$

Owoż, z drugiego i trzeciego równania wynika

$$(x-y)^2=z(z-2u);$$

co pokazuje że $u\leqq\frac{z}{2}$; dodając stronami $m=u+z$ będzie $m\leqq\frac{3z}{2}$; zatem, rugując z mamy

$$m\leqq\frac{3(m+2p)-3\sqrt{m^2+4mp-4p^2}}{4};\ \text{zkąd}\ m+3p\leqq 3p\sqrt{2}.$$

Więc jest maximum $m=3p(\sqrt{2}-1)$, które czyni $(x-1)^2=0$; zkąd $x=y$.

Trójkąt prostokątny równoramienny, którego boki są : $z=\frac{2}{3}m=2p(\sqrt{2}-1)$, $x=p(2-\sqrt{2})=y$; wysokość $u=p(\sqrt{2}-1)$.

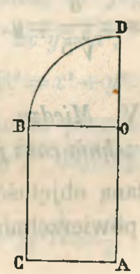
377. Zagadnienie XXII. *Między równoległościanami prostokątnemi równej powierzchni, jaki ma objętość maximum? a między równoległościanami prostokątnemi równej objętości, jąki ma powierzchnię minimum?*

1° Jeśli nazwiemy x, y, z trzy krawędzie przyległe równoległościanu prostokątnego, jego powierzchnia wyrazi się przez $2(xy+xz+yz)=a^2$, objętość przez xyz. Owoż kwadrat objętości jest $x^2y^2z^2=xy.yz.zx$; więc jej minimum odpowieda równaniom $xy=yz=xz$, zkąd $x=y=z$. Co wyraż sześcian.

2°. Oznaczając objętość przez a^3, będzie $xyz=a^3$, albo $xy.xz.yz=a^6$: owoż powierzchnia równoległościanu wyraża się przez summę $2(xy+yz+zz)$; więc jej minimum odpowieda równaniom $xy=yz=xz$, zkąd $x=y=z$.

378. Zagadnienie XXIII. *Znaleźć minimum całej powierzchni framugi, mając daną jej objętość.*

Framuga jest figurą utworzoną półobrotem prostokąta AOBC i ćwierci koła BOD około osi AD. Jeśli nazwiemy x pro-



mień OB koła i y wysokość AO prostokąta, powierzchnia cała framugi wyrazi się przez

$$\pi xy+\frac{\pi x^2}{2}+\pi x^2=\frac{\pi}{2}(2xy+3x^2).$$

Oznaczmy przez $\frac{1}{6}\pi a^3$ daną objętość framugi, będzie

$$\frac{\pi x^2 y}{2}+\frac{\pi x^3}{3}=\frac{\pi a^3}{6};$$

zkąd

$$y=\frac{a^3-2x^3}{3x^2}.$$

Podstawiając tę wartość w wyrażeniu powierzchni, otrzymujemy

$$\frac{\pi}{6}\left(5x^2+\frac{2a^3}{x}\right).$$

Owoż, wieloczyn potęg $5x^2.\left(\frac{2a^3}{x}\right)^2$ jest ilością stateczną $20a^6$; więc summa $5x^2+\frac{2a^3}{x}$ będzie minimum, jeśli istnieje równanie

$$\frac{5x^2}{1}=\frac{2a^3}{2x},$$

zkąd wynika

$$x=\frac{a}{\sqrt[3]{5}}=y.$$

379. Zagadnienie XXIV. *Między walcami równej objętości znaleźć ten którego powierzchnia cała jest minimum.*

Jeśli nazwiemy πa^3 daną objętość walca, x promień jego podstawy, y wysokość, powierzchnia cała tego walca wyrazi się przez

$$2\pi(xy+x^2),$$

i jego objętość przez

$$\pi x^2 y=\pi a^3.$$

Owoż, ostatniemu równaniu można dać kształt

$$xy(x^2)^{\frac{1}{2}}=a^3,$$

który pokazuje że potęgi wyrazów, składających summę $xy+x^2$, tworzą wieloczyn stateczny a^3; więc minimum tej summy odpowieda wartościom dla x i y danym przez równania

$$\frac{xy}{1}=\frac{2x^2}{1}; \text{ zkąd } y=2x,$$

i następnie

$$x=\frac{a}{\sqrt[3]{2}}=\frac{y}{2}.$$

Wniosek. Na mocy twierdzenia V, *między walcami prostemi danej powierzchni całej, ma objętość maximum ten którego wysokość jest równa średnicy podstawy.*

Uwaga. Litr do mierzenia rzeczy sypkich jest właśnie walcem którego wysokość równa się średnicy podstawy.

380. Zagadnienie XXV. *Między walcami równej objętości znaleźć ten który jest wpisany w najmniejszą sferę.*

Nazywając R promień najmniejszej sfery, x i $2y$ promień i wysokość wpisanego walca, πa^3 jego objętość, mamy

$$2x^2y=a^3,$$

$$R^2=x^2+y^2.$$

Żeby wyznaczyć minimum promienia R, albo, co to samo, minimum summy x^2+y^2, dajemy pierwszemu równaniu kształt

$$x^2(y^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{a^3}{2}.$$

który pokazuje że dla minimum summy x^2+y^2 powinno być

$$\frac{x^2}{1}=\frac{y^2}{\frac{1}{2}}, \text{ zkąd } x=y\sqrt{2}=\frac{a}{\sqrt[6]{2}}.$$

Więc promień i wysokość szukanego walca są

$$x=\frac{a}{\sqrt[6]{2}},\quad 2y=a\sqrt[3]{2};$$

promień najmniejszej sfery jest

$$R=a\sqrt{\frac{3}{2\sqrt[3]{2}}}.$$

381. Zagadnienie XXVI. *Wpisać w sferę walec mający powierzchnię całą maximum.*

Niech będzie R promień sfery, x promień wpisanego walca i $2y$ jego wysokość. Powlerzchnia cała tego walca wyraża się przez

$$4\pi xy+2\pi x^2=2\pi(2xy+x^2).$$

Owoż, między x i y jest związek

$$x^2+y^2=R^2;$$

jeśli więc położymy

$$2xy+x^2=m,$$

i między dwoma równaniami wyrugujemy y, będzie

$$5x^4-2(m+2R^2)x^2+m^2=0.$$

To równanie dwukwadratowe, rozwiązane względem x^2, daje

$$x^2=\frac{m+2R^2\pm\sqrt{4R^4+4R^2m-4m^2}}{5}.$$

x^2 powinno być rzeczywiste i dodatne; co wymaga żeby było

$$4R^4+4R^2m-4m^2\geqq 0,\quad \text{albo}\quad (2m-R^2)^2\leqq 5R^4;$$

ztąd, jeśli $2m>R^2$, wynika

$$m\leqq(1+\sqrt{5})\frac{R^2}{2}.$$

Więc

$$m=(1+\sqrt{5})\frac{R^2}{2}$$

jest maximum powierzchni całej walca, które odpowieda wartości

$$x^2=\frac{5+\sqrt{5}}{10}R^2, \quad \text{zkąd} \quad x=R\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}.$$

Ta wartość dla x rozwiązuje zagadnienie, ponieważ jest mniejsza od R.

Ale x^2 może jeszcze być rzeczywiste i dodatne, a przynajmniej nieodjemne, jeśli staje się zadość nierówności

$$m+2R^2 \geqslant \sqrt{4R^4+4R^2m-4m^2},$$

zkąd wynika

$$m \geqslant 0.$$

Więc $m=0$ jest najmniejszą wartością powierzchni całej walca wpisanego. Ta najmniejsza wartość, której odpowieda $x=0$, nie jest minimum; bo wtedy walec staje się linią prostą, i nie można brać $x=-h$.

To wszystko zostało otrzymane w przypuszczeniu $2m > R^2$; jeśli przeciwnie $2m < R^2$, będzie

$$m \geqslant (1-\sqrt{5})\frac{R^2}{2}.$$

Ostatni wynik nie prowadzi do drugiego rozwiązania zagadnienia; bo niewolno brać $m=(1-\sqrt{5})\frac{R^2}{2}$, dlatego że m jest dodatne z założenia. Więc zagadnienie ma tylko jedno właściwe rozwiązanie.

382. ZAGADNIENIE XXVII. *Wpisać w sferę stożek prosty mający powierzchnię całą maximum.*

Nazywając R promień sfery i x promień stożka, jeśli weźmiemy apotemę krawędzi za niewiadomę y, ta krawędź będzie $2\sqrt{R^2-y^2}$ i powierzchnia cała stożka wyrazi się przez

$$2\pi x\sqrt{R^2-y^2}+\pi x^2.$$

Owoż, nietrudno spostrzedz dwa trójkąty podobne które dają proporcyę

$$\frac{x}{y}=\frac{2\sqrt{R^2-y^2}}{R};$$

zkąd, wyciągając wartość $x=\frac{2y}{R}\sqrt{R^2-y^2}$ i podstawiając w wyrażeniu powierzchni, otrzymujemy

$$\frac{4\pi y(R^2-y^2)}{R}+\frac{4\pi y^2(R^2-y^2)}{R^2}.$$

Trzeba więc znaleźć wartość maximum wieloczynu

$$y(R^2-y^2)(R+y) \quad \text{albo} \quad y(R-y)(R+y)^2.$$

Do jej wyznaczenia stosujemy wiadomą metodę spółczynników α, β, γ, pisząc odrazu równanie

$$\frac{1}{y}-\frac{1}{R-y}+\frac{2}{R+y}=0,$$

z którego wynika

$$4y^2-Ry-R^2=0,$$

Pierwiastki tego równania są rzeczywiste i znaków przeciwnych; odrzucając pierwiastek odjemny, mamy rozwiązanie zagadnienia

$$y=\frac{R(1+\sqrt{17})}{8},$$

i następnie krawędź stożka

$$2\sqrt{R^2-y^2}=\frac{R}{4}\sqrt{46-2\sqrt{17}};$$

jego wysokość jest

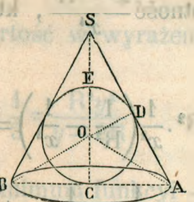
$$\frac{2(R^2-y^2)}{R}=\frac{R(23-\sqrt{17})}{16},$$

i promień

$$x=\frac{R}{8.4}(1+\sqrt{17})\sqrt{46-2\sqrt{17}}=\frac{R}{16}\sqrt{190+14\sqrt{17}}\cdot$$

383. Zagadnienie XXVIII. *Opisać na sferze stożek prosty którego powierzchnia cała jest minimum.*

Niech będzie stożek prosty opisany na sferze promienia R, i SAB jego przecięcie główne. Widzimy łatwo że, gdy



wierzchołek S stożka, leżący na przedłużeniu średnicy CE prostopadłej do podstawy AB, jest najpierwej bardzo blizko powierzchni sferycznej i potem się od niej oddala nieskończenie, powierzchnia cała tego stożka jest najpierwej bardzo wielka, potem maleje i znowu staje się tak wielką jak się podoba; więc ona przechodzi przez wartość mniejszą od dwóch bezpośrednio sąsiednich, to jest przez minimum. Do wyznaczenia tego minimum bierzemy za niewiadome promień CA$=x$ i styczną SD$=y$.

Ponieważ krawędź SA$=y+x$, powierzchnia cała stożka wyraża się przez

$$\pi x(x+y)+\pi x^2=\pi x(2x+y).$$

Ale trójkąty podobne SAC, SDO dają

$$\frac{CA}{OD}=\frac{SC}{SD},\quad \text{to jest}\quad \frac{x}{R}=\frac{\sqrt{2xy+y^2}}{y}.$$

albo

$$\frac{x^2}{R^2}=\frac{2x+y}{y}; \quad \text{zkąd} \quad \frac{2x+y}{2x}=\frac{x^2}{x^2-R^2} \quad \text{i} \quad y=\frac{2R^2x}{x^2-R^2}.$$

Podstawiając wartość $2x+y=\frac{2x^3}{x^2-R^2}$ w wyrażeniu powierzchni, otrzymujemy

$$\frac{2\pi x^4}{x^2-R^2}.$$

Widzimy teraz że, aby znaleźć minimum funkcyi $\frac{x^4}{x^2-R^2}$, dość wziąć jej odwrotność $\frac{x^2-R^2}{x^4}$, której można dać kształt wieloczynu, pisząc

$$\frac{x^2-R^2}{x^4}=R^2.\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{R^2}-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{x^2}\left(1-\frac{R^2}{x^2}\right).$$

Owoż, czynniki $\frac{1}{x^2}$ i $\frac{1}{R}-\frac{1}{x^2}$ mają summę stateczną $\frac{1}{R^2}$; więc ich wieloczyn jest maximum, a temsamem powierzchnia cała stożka jest minimum, gdy istnieje równanie

$$\frac{1}{x^2}=\frac{1}{R^2}-\frac{1}{x^2}; \quad \text{zkąd} \quad x=R\sqrt{2}.$$

Wartość minimum powierzchni całej stożka opisanego na sferze promienia R wyraża się, przez $8\pi R$, i jego podstawa przez $2\pi R$. Styczna $SD=\frac{2R^2x}{x^2-R^2}=2R\sqrt{2}$, poczem krawędź $SA=3\sqrt{2}$ i wysokość $SC=4R$.

384. Zagadnienie. XXIX. *Opisać na sferze stożek kołowy mający objętość minimum.*

Między stożkami pochyłemi opisanemi na sferze nie ma widocznie żadnego minimum; uważamy więc stożek kołowy prosty. Jeśli nazwiemy x promień podstawy i y wysokość, objętość tego stożka wyrazi się przez

$$\frac{1}{3}\pi x^3 y.$$

Owoż (*fig. poprzednia*), trójkąty podobne SAC, SDO dają

$$\frac{CA}{OD}=\frac{SC}{SD} \quad \text{to jest} \quad \frac{x}{R}=\frac{y}{\sqrt{(y-2R)y}};$$

zkąd

$$x=\frac{R^2 y}{y-2R}.$$

Przedstawiając tę wartość w wyrażeniu objętości, otrzymujemy

$$\frac{1}{3}\pi\frac{R^2y^2}{y-2R}.$$

Trzeba więc znaleźć minimum funkcyi $\frac{y^2}{y-2R}$, do której możnaby zastosować metodę elementarną; ale widzimy zaraz że odwrotność $\frac{y-2R}{y^2}$ tej funkcyi może wziąć kształt wieloczynu

$$\frac{1}{2R}\cdot\frac{2R}{y}\left(1-\frac{2R}{y}\right),$$

którego czynniki zmienne mają summę stateczną. Więc maximum tego wieloczynu, i temsamem minimum objętości stożka, otrzymuje się przez równanie

$$\frac{2R}{y}=1-\frac{2R}{y}; \quad \text{zkąd} \quad y=4R.$$

Objętość stożka minimum opisanego na sferze promienia R wyraża się przez $\frac{8}{3}\pi R^3$, jego podstawa przez $2\pi R^2$.

Uwaga. Z otrzymanych wyników spostrzegamy że stożek objętości minimum, opisany na sferze, nie różni się od stożka mającego powierzchnię całą minimum. Można to było przewidzieć, uważając że *objętość stożka opisanego na sferze jest równa wieloczynowi jego powierzchni całej przez trzecią część promienia sfery.*

Ten stożek podwójnego minimum ma objętość i powierzchnię dwa razy większą od objętości i powierzchni sfery; jego wysokość jest równa podwójnej średnicy, a podstawa podwójnemu kołu wielkiemu.

385. Zagadnienie XXX. *Znaleźć maximum różnicy między stożkiem prostym, wpisanym w sferę, i odcinkiem sferycznym spólnej z nim podstawy.*

Nazywając x wysokość odcinka sferycznego o jednej podstawie; jego objętość będzie

$$\frac{1}{2}\pi x^2(2R-x)+\frac{1}{6}\pi x^3=\frac{1}{3}\pi x^2(3R-x).$$

Co do objętości stożka, trzeba rozróżnić dwa przypadki:

1° Jeśli stożek wpisany w sferę jest zewnątrz odcinka sferycznego z którym ma spólną podstawę, jego wysokość będzie $2R-x$, i objętość wyrazi się przez

$$\frac{1}{3}\pi x(2R-x).$$

Więc, biorąc różnicę objętości stożka i odcinka, otrzymujemy

$$\frac{1}{3}\pi x(2x^2-7Rx+4R^2),$$

albo, rozkładając trójmian na czynniki

$$\frac{1}{48}x(4x-7R-R\sqrt{17})(4x-7R+R\sqrt{17}).$$

Do wyznaczenia maximum tego wieloczynu; stosujemy metodę spółczynników α, β, γ, i piszemy odrazu równanie

$$\frac{1}{x}+\frac{4}{4x-7R-R\sqrt{17}}+\frac{4}{4x-74+R\sqrt{17}}=0,$$

które, po zniesieniu mianowników, staje się

$$3x^2-7Rx+2R^2=0.$$

Pierwiastki tego równania są $x'=\frac{R}{3}$ i $x''=2R$. Mniejszemu $\frac{R}{3}$, podstawionemu w wyrażeniu różnicy objętości, odpowieda wartość maximum $\frac{17}{81}\pi R^3$, która rozwiązuje zagadnienie.

Większy pierwiastek 2R, podstawiony w wyrażeniu różnicy, daje wynik odjemny $-\frac{4R^3}{3}$, który oznacza najmniejszą różnicę objętości stożka i odcinka sferycznego; ale ten stożek jest zerem a odcinek sferą.

2° Jeśli stożek prosty jest wpisany w odcinek sferyczny, jego objętość wyraża się przez

$$\frac{1}{3}\pi x^2(2R-x);$$

wtedy, biorąc różnicę objętości odcinka sferycznego i stożka, mamy

$$\frac{1}{3}\pi R^2(3R-x)-\frac{1}{3}\pi x^2(2R-x)=\frac{1}{3}\pi Rx^2.$$

Ta różnica jest najmniejsza możebna dla $x=0$; ale dla tej wartości stożek i odcinek sferyczny stają się zerami.

386. Zagadnienie XXXI. *Znaleźć maximum albo minimum wielomianu.*

$$3x^2+4xy+2y^2-6x-7y+3,$$

który jest drugiego stopnia względem x *i* y.

Dajemy temu wielomianowi wartość niewyznaczoną m, kładąc

$$3x^2+4xy+2y^2-6x-7y+3=m,$$

i rozwiązujemy równanie względem y na przykład; co daje

$$y=\frac{7-4x\pm\sqrt{-8x^2-8x+25+8m}}{4}.$$

Owoż, y powinno być rzeczywiste, a pierwszy wyraz trójmianu pod pierwiastnikiem jest odjemny; trzeba więc dobierać dla m takie wartości które nadają trójmianowi pierwiastki rzeczywiste; bo tylko wtedy, dla wszelkiej wartości x zawartej między temi pierwiastkami, trójmian bierze wartość dodatną albo zero. To wymaga żeby m zadość czyniło warunkowi

$$16+8(25+8m)\geqslant 0,$$

zkąd

$$m\geqslant -\frac{27}{8}.$$

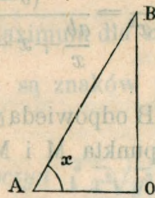
Więc $m=-\frac{27}{8}$ jest minimum zadanego wielomianu. Ta wartość dla m czyni kwadratem odjemnym trójmian pod pierwiastnikiem, i daje

$$y=\frac{7-4x\pm\sqrt{-8\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}}{4}.$$

Ostatni wynik pokazuje że y jest rzeczywiste dla jedynej wartości $x=-\frac{1}{2}$, i wtedy $y=\frac{9}{4}$. Te dwie wartości zmiennych niezależnych x i y nadają uważanemu wielomianowi wartość minimum $-\frac{27}{8}$.

387. Zagadnienie XXXII. *Krąg* A, *położony na stole pozio-*

mym, oświeca lampa B, *stojąca na podstawie której spodek* O *jest w odległości* a *od środka kręgu* A; *na jakiej wysokości* OB *powinna być ta lampa, żeby krąg odbierał od niej ilość maximum światła?*



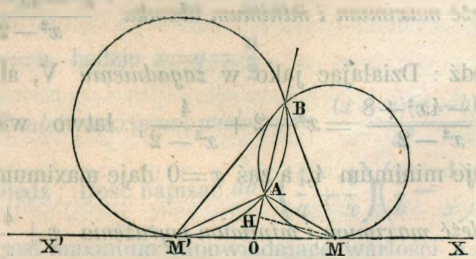
Wiadomo z fizyki że natężenie światła, które odbiera powierzchnia, jest proporcyonalne do wstawy nachylenia promieni, i odwrotnie proporcyonalne do kwadratu odległości punktu oświeconego od punktu światłego. Więc, oznaczając przez k natężenie światła lampy na jedność odległości, przez x nachylenie BAO, oświecenie kręgu A będzie

$$\frac{k\sin x}{\overline{AB}^2} \quad \text{albo} \quad \frac{k}{a^2}\sin x\cos^2 x = \frac{k}{a^2}\sin x(1-\sin^2 x).$$

Zatem maximum oświecenia odpowieda wartości

$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{albo} \quad \operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

388. Zagadnienie XXXIII. *Znaleźć na linii prostej* XX′ *punkt* M *z którego widać odległość* AB *pod kątem* AMB *maximum.*



Czyniąc OA$=a$, OB$=b$, kąt BOX$=\alpha$, OM$=x$, i spuszczając prostopadłę MH na AB, będzie

$$\operatorname{tg} AMB = \operatorname{tg}(MAH - MBH) = \frac{\operatorname{tg} MAH - \operatorname{tg} MBH}{1 + \operatorname{tg} MAH \operatorname{tg} MBH}$$

$$= \frac{(b-a)x \sin\alpha}{ab - (a+b)x\cos\alpha + x^2} = \frac{(b-a)\sin\alpha}{\frac{ab}{x} + x - (a+b)\cos\alpha}.$$

Więc maximum kąta AMB odpowieda wartościom $x = \pm\sqrt{ab}$ które, wyznaczając dwa punkta M i M', dają dwa rozwiązania zagadnienia.

Rozwiązuje się bardzo łatwo to zagadnienie przez geometrye. Dość tylko poprowadzić przez dwa punkta A i B koło styczne do prostej XX', punkta zetknięcia M i M' będą punktami szukanemi; bo wszelki kąt mający wierzchołek na XX' w sąsiedztwie punktu M albo M', którego ramiona przechodzą przez A i B, jest oczywiście mniejszy od kąta AMB, albo AM'B; więc te dwa ostatnie są kątami maximum.

WYSŁOWIENIA ZAGADNIEŃ.

I. *Znaleźć maximum ułamka* $\frac{5x-1}{4x^2}$.

Odpowiedź : Jest maximum $\frac{25}{16}$ dla $x = \frac{2}{5}$.

II. *Znaleźć maximum i minimum ułamka* $\frac{x^4 - 4x^2 + 8}{x^2 - 2}$.

Odpowiedź : Działając jako w *zagadnieniu* V, albo uważając że $\frac{x^4 - 4x^2 + 8}{x^2 - 2} = x^2 - 2 + \frac{4}{x^2 - 2}$, łatwo widzieć że $x = \pm 2$ daje minimum 4, a zaś $x = 0$ daje maximum -4.

III. *Znaleźć maximum i minimum wyrażenia* $x + \frac{4}{x}$.

Odpowiedź : Minimum dla $x = 2$, maximum dla $x = -2$.

IV. *Szukać maximum i minimum wyrażenia* $ax^2 + \frac{b}{x^2}$.

Odpowiedź: 1° jeśli spółczynniki a i b są oba dodatne, będzie minimum dla $x = \pm\sqrt[4]{\frac{b}{a}}$; 2° jeśli spółczynniki a i b są oba odjemne, będzie maximum dla $x = \pm\sqrt[4]{\frac{b}{a}}$; 3° nakoniec, jeśli spółczynniki a i b są znaków przeciwnych, nie ma ani maximum ani minimum.

V. *Mając dany wieloczyn* $\sqrt[3]{x^2}\sqrt{y^3} = \left(\frac{3}{2}\right)^9$, *znaleźć minimum summy* $\sqrt{x^3} + \sqrt[3]{y^2}$.

Odpowiedź: $\frac{9}{4}\sqrt{x^3} = \frac{4}{9}\sqrt[3]{y^2}$; zatem $x = 1$, $y = \left(\frac{3}{2}\right)^6$ dają minimum $1 + \left(\frac{3}{2}\right)^4$.

VI. *Znaleźć minimum wyrażenia* $\frac{a+x}{a-x} + \frac{a-x}{a+x}$.

Odpowiedź: Wieloczyn tych dwóch ułamków równa się 1, więc $x = 0$ daje minimum 2.

VII. *Podzielić daną liczbę* a *na dwie części takie, żeby* m *razy kwadrat pierwszej więcej* n *razy kwadrat drugiej czyniły summę minimum.*

Odpowiedź: Nazywając x pierwszą część, druga będzie $a - x$, i otrzyma się $\frac{x}{n} = \frac{y}{m} = \frac{a}{m+n}$.

Jeśli $m = n$, będzie $x = y = \frac{a}{2}$.

VIII. *Znaleźć maximum wieloczynu* $\frac{(x+a)(x-b)}{x^2}$.

Odpowiedź: Dość napisać $ab\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{x}\right)$, aby widzieć że jest maximum odpowiedające wartości $x = \frac{a+b}{2ab}$.

IX. *Wiedząc że* $x+y=2a$, *między jakiemi granicami może się zmieniać summa* x^3+y^3?

Odpowiedź: Położyć $x-y=2z$; będzie $x=a+z$, $y=a-z$; zatem $x^3+y^3=2a^3+6az^2=2m$. Trzeba żeby było $\frac{m-a^3}{3a}\geqslant 0$; więc minimum summy x^3+y^3 jest $2a^3$, i ono odpowieda wartościom $z=0$, $x=y=a$.

X. *Znaleźć maximum i minimum ułamka* $\frac{x}{x^2+px+q}$.

Odpowiedź: 1° jeśli $q>0$, wtedy $x=\sqrt{q}$ daje maximum, $x=-\sqrt{q}$ daje minimum; 2° jeśli $q<0$, nie ma ani maximum ani minimum.

XI. *Rozdzielić daną liczbę* a *na dwa czynniki* x i $\frac{a}{x}$ *takie, żeby summa* $x^2+\frac{a^3}{x^3}$ *była minimum.*

Odpowiedź: $x=\sqrt[5]{\frac{3a^3}{2}}$ daje minim. $\frac{a}{2}\sqrt[5]{72a}+\frac{2a^2}{\sqrt[5]{108a^4}}$.

XII. *Znaleźć minimum summy* $Ax^m+\frac{B}{x^n}$; *wykładniki* m *i* n *są dodatne.*

Odpowiedź: Ogólnie jest minimum dla $x=\sqrt[m+n]{\frac{nB}{mA}}$; dyskutować A, B, $m+n$.

XIII. *Jakie wartości trzeba dać zmiennym* x *i* y, *żeby, wyprowadzona z równania* $x^2-2axy+y^2+2ax-2y+4a=0$, *wartość dla* a *była najmniejsza albo największa możebna?*

Odpowiedź: Wyrazić najpierwej że pierwiastki y są rzeczywiste; potem, czyniąc zadość temu warunkowi, dobrać dla a wartość taką żeby x zostawało rzeczywiste. Co da minimum $a=\frac{1}{4}$, odpowiedające wartościom $x=0$, $y=1$.

XIV. *Znaleźć najmniejszą wartość jaką może mieć wyrażenie* $20x^2+4xy+y^2-5x+7y+3$.

Odpowiedź : $x=\frac{19}{32}$, $y=-\frac{75}{16}$ dają wartość szukaną $-\frac{953}{64}$.

XV. *Znaleźć minimum summy kwadratów* $x^2+y^2+z^2$, *wiedząc że jest* $ax+by+cz=d$.

Odpowiedź: Trzeba położyć $x^2+y^2+z^2=m$, i wyrugować jedną z trzech niewiadomych, na przykład z; co da $x^2+y^2+\frac{(d-ax-by)^2}{c^2}=m$. Poczem, rozumując i działając jako w zagadnieniu XXXI, otrzyma się

$$x=\frac{ad}{a^2+b^2+c^2},\ y=\frac{bd}{a^2+b^2+c^2},\ \text{i następnie } z=\frac{cd}{a^2+b^2+c^2}.$$

Te wartości podstawione dają minimum summy $x^2+y^2+z^2$.

XVI. *Znaleźć maximum i minimum wyrażenia* $\frac{b}{x}+\frac{c}{y}$, *wiedząc że* $x+y=a$; b i c *są dodatne*, a *jakiekolwiek*.

Odpowiedź : Jeśli $a>0$, jest maximum $\frac{(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2}{a}$ dla $x=\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$, i minimum $\frac{(\sqrt{b}+\sqrt{c})^2}{a}$ dla $x=\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$; jeśli $a<0$, to przeciwnie.

XVII. *Wpisać w koło prostokąt mający powierzchnię maximum.*

Odpowiedź : Ten prostokąt jest kwadratem. Znajduje się go, nazywając x, y dwa rozmiary, i szukając maximum wieloczynu xy, albo x^2y^2 ponieważ $x^2+y^2=4R^2$. R promień koła.

XVIII. *Na danej przeciwprostokątnej* a *wykreślić trójkąt prostokątny mający powierzchnię maximum.*

Odpowiedź : Nazywając x, y boki kąta prostego, S powierzchnię trójkąta, będzie

$$x^2+y^2=a^2 \quad \text{i} \quad S=\frac{xy}{2} \quad \text{albo} \quad S^2=\frac{x^2y^2}{4}.$$

Więc, na mocy twierdzenia I, powinno być $x=y$.

XIX. *Na danej przeciwprostokątnej wykreślić trójkąt prostokątny mający obwód maximum.*

Odpowiedź : Nazywając x, y boki kąta prostego i oznaczając przez m ich summę, będzie $x^2+y^2=a^2$, $x+y=m$; zkąd, odciągając kwadraty stron drugiego równania od podwójnych stron pierwszego, wynika $(x-y)^2=2a^2-m^2$. To pokazuje że powinno być $m^2\leq 2a^2$; więc $m=a\sqrt{2}$ jest maximum summy $x+y$, i daje $x=y$. Trójkąt prostokątny jest równoramienny, i jego obwód ma wartość maximum $a\sqrt{2}+a$.

XX. *Mając dany obwód* 2p *trójkąta prostokątnego, wyznaczyć jego boki tak, żeby wysokość odpowiedająca przeciwprostokątnej była maximum.*

Odpowiedź : Trójkąt prostokątny powinien być równoramienny; jego boki są $x=p(2-\sqrt{2})=y$, $z=p(2-\sqrt{2})\sqrt{2}$. Wysokość odpowiedająca przeciwprostokątnej jest oczywiście mniejsza od jej ośródkowej; więc jest największa gdy się równa połowie przeciwprostokątnej. Co właśnie ma miejsce w trójkącie prostokątnym równoramiennym.

Jeśli zamiast kąta prostego jest dany kąt A, wtedy (n° 375) odpowiedająca wysokość maximum będzie $\dfrac{p}{\cos\frac{A}{2}}\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)$.

XXI. *W trójkącie prostokątnym mającym daną przeciwprostokątnę* a, *jakie powinny być dwa inne boki* x *i* y *żeby, pomnożone jeden przez* p *drugi przez* q, *tworzyły summę* px+qy *maximum* ?

Odpowiedź : $\dfrac{x}{p}=\dfrac{y}{q}=\dfrac{a}{\sqrt{p^2+q^2}}$.

XXII. *Na danej linii prostej* AB$=$a, *wyznaczyć punkt* C *taki żeby summa kwadratów* $\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$ *była minimum.*

Odpowiedź : $AC=\frac{a}{2}$, bo $\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=a^2-2AC.BC$; etc.

XXIII. *Wpisać w półkole trapez maximum.*

Odpowiedź : Ten trapez jest pół-sześciokątem foremnym (*Zag.* X).

XXIV. *W koło promienia* R *wpisać trapez mający boki nierównoległe równe danej linii* a, *i powierzchnię maximum.*

Odpowiedź : Biorąc za niewiadomę x odległość środka koła od linii która łączy środki boków nierównoległych, łatwo się znajduje że powinno być $x=0$; to jest że szukany trapez jest prostokątem.

Uwaga. Gdyby zamiast boków nierównoległych, była dana wysokość trapezu, zagadnienie rozwiązywałoby się na samo spojrzenie.

XXV. *Mając dane dwie równoległe* AB, CD, *i sieczną* AD, *przez punkt* P *wzięty na* AB *poprowadzić sieczną* PQ *tak żeby, przecinając sieczną* AD, *tworzyła dwa trójkąty* APX, DQX *których summa jest minimum.*

Odpowiedź : Czyniąc $AD=a$, $AX=x$, i uważając że odległość h punktu P od AD jest wiadoma, summa powierzchni dwóch trójkątów będzie $\frac{hx}{2}+\frac{(a-x)^2h}{2x}=\frac{h}{2}\left(2x+\frac{a^2}{x}-2a\right)$.

Więc $x=\frac{a}{2}\sqrt{2}$ daje szukane minimum.

XXVI. *Mając dane koło* O *i punkt* A *na jego płaszczyznie, poprowadzić cięciwę* BC *prostopadłą do* AO *taką, żeby powierzchnia trójkąta* ABC *była maximum albo minimum.*

Odpowiedź : Nazywając R promień koła, a odległość AO, oznaczając przez x odległość cięciwy BC od środka koła O będzie $x=\frac{a\pm\sqrt{a^2+8R^2}}{4}$. Pierwiastek dodatny daje minimum, jeśli $a<R$; pierwiastek odjemny daje zawsze maximum.

XXVII. *Opisać na kole ukośnik taki, żeby summa jego powierzchni z podwójną powierzchnią prostokąta, wpisanego zarazem w koło i w ten ukośnik, była minimum.*

Odpowiedź: Szukany ukośnik powinien być kwadratem.

XXVIII. *Mając dany trójkąt* ABC, *albo kwadrat* ABCD, *poprowadzić na jego płasczyznie przez wierzchołek* A *oś* AX *tak, żeby objętość utworzona obrotem tego trójkąta, albo kwadratu, około* AX, *była maximum.*

Odpowiedź: Oś AX powinna być prostopadła do ośrodkowej AD trójkąta ABC, albo do przekątnej AC kwadratu ABCD.

XXIX. *Między trójkątami równowartemi i mającemi kąt* A, *znaleźć ten w którym summa boków danego kąta jest minimum.*

Odpowiedź: Nazywając x, y boki kąta A, i S powierzchnię trójkąta, mamy $S=\frac{1}{2}xy\sin A$. Wieloczyn xy jest stateczny, więc summa $x+y$ jest minimum gdy $x=y$. Trójkąt równoramienny.

XXX. *Wpisać w koło trójkąt równoramienny taki, żeby summa jego podstawy i wysokości była maximum albo minimum.*

Odpowiedź: Będzie maximum, jeśli apotema podstawy trójkąta jest jej ćwiercią. Nie ma minimum.

XXXI. *Pewien kocieł ma kształt walca zakończonego półsferzem tej samej średnicy. Znając jego wysokość* h, *wyrachować rozmiary walca tak żeby objętość kotła była maximum.*

Odpowiedź: Nazywając x promień i y wysokość walca, będzie $x+y=h$, objętość $\pi x^2y+\frac{2}{3}\pi x^3=\frac{1}{3}\pi x^2(3y+2x)$ $=\frac{1}{3}\pi x^2(3h-x)$. Co daje $\frac{x}{2}=3h-x$; zkąd $x=2h$ i $y=-h$.

Więc objętość kotła nie ma maximum.

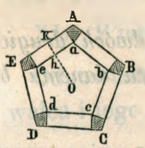
XXXII. *Jest dany stożek prosty styczny do sfery promienia* R, *i jego podstawa ma ten sam środek co sfera; jaką trzeba nadać wysokość temu stożkowi żeby jego objętość była minimum?*

Odpowiedź: Nazywając x promień stożka, y jego wysokość, mamy $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{R^2}$; objętość stożka jest $\frac{1}{3}\pi x^2 y$; dla minimum trzeba $x\sqrt{2}=y=R\sqrt{3}$.

XXXIII. *Między stożkami prostemi z powierzchnią boczną* πa^2, *znaleźć ten który ma objętość maximum.*

Odpowiedź: Za pomocą twierdzenia n° 360, otrzymuje się łatwo promień szukanego stożka $x=\frac{a}{\sqrt[4]{3}}$ i wysokość $y=a\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}$.

XXXIV. *W wielokąt foremny* ABCDE, *wykrojony z tektury, wpisano drugi wielokąt* abcde *podobny do pierwszego i podobnie ustawiony; poczem, z wierzchołków* a, b, c, d, e *spuszczono prostopadłe na boki pierwszego wielokąta, i wycięto czworoboczki odcieniowane na figurze. Wyznaczyć apotemę nowego wielokąta tak, żeby objętość pudełka mającego za dno ten wielokąt i za ściany boczne prostokąty pozostałe była maximum.*



Odpowiedź: Jeśli oznaczymy przez x apotemę Oh i przez y wysokość hK, powierzchnia wielokąta $abcde$ będzie proporcyonalna do x^2; zatem objętość pudełka będzie proporcyonalna do x^2y; a ponieważ summa $x+y=$OK, wieloczyn x^2y będzie maximum jeśli jest $\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{OK}{3}$; zkąd $x=\frac{2}{3}$OK, $y=\frac{1}{3}$OK.

XXXV. *Między trójkątami prostokątnemi mającemi obwód* 2p, *jaki jest ten w którym summa dwóch boków kąta prostego i wysokości względnej do prostokątnej jest maximum?*

Odpowiedź : Trójkąt równoramienny. Oznaczając przez m szukane maximum, równania zagadnienia są

$$x+y+z=2p,\quad x^2+y^2=z^2,\quad xy=uz,\quad x+y+u=m.$$

Zkąd się wywodzą dwa równania

$$z-u=2p-m,\qquad uz=2p^2-2pz,$$

które dają

$$z=\frac{-m+\sqrt{m^2+8p^2}}{2}.$$

Do tego $(x-y)^2=z^2-2uz=(z-2u)$ pokazuje że $u\leqq\frac{z}{2}$; dodając do ostatniego równania stronami $z-u=2p-m$, będzie $m\leqq 2p+\frac{3z}{2}$, i następnie rugując z, $(m\leqq p(3-\sqrt{2})$. Więc jest maximum $m=p(3-\sqrt{2})$, i ono czyni $(x-y)^2=0$ czyli $x=y$. Poczem $z=2p(\sqrt{2}-1)$, $u=p(\sqrt{2}-1)$, $x=p(2-\sqrt{2})=y$.

XXXVI. *Mając dany jeden bok i summę dwóch drugich, znaleźć trójkąt w którym wysokość odpowiedająca danemu bokowi jest maximum.*

Odpowiedź: Trójkąt równoramienny; bo, oznaczając przez a dany bok, przez x i y dwa drugie boki, przez $2p$ wiadomy obwód, przez u szukaną wysokość, będzie

$$\frac{au}{2}=\sqrt{p(p-a)(p-x)(p-y)}.$$ Co daje $x=y=\frac{2p-a}{2}$.

XXXVII. *Między trójkątami mającemi obwód* 2p *i kąt* A, *znaleźć ten w którym wysokość odpowiedająca kątowi* A *jest maximum.*

Odpawiedź : Rozumując jako w zagadnieniu XX, łatwo się znajduje że trójkąt jest równoramienny, i ma boki

$$x=\frac{p}{\cos^2\frac{A}{2}}\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)=y,\quad z=\frac{2p\sin\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}\left(1-\sin\frac{A}{2}\right),$$

wysokość $u = \frac{p}{\cos\frac{A}{2}}\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)$.

XXXVIII. *Jest dane koło wpisane w kąt prosty; poprowadzić do tego koła styczną taką, żeby trójkąt prostokątny utworzony miał powierzchnię minimum albo maximum.*

Odpowiedź: Trzeba żeby styczna była prostopadła do dwójsiecznej kąta prostego.

XXXIX. *Znaleźć maximum objętości walca którego dano powierzchnię całą.*

Odpowiedź: Powierzchnia cała walca $2\pi(xy+x^2)$ jest stateczna, objętość $\pi x^2 y$ może się wyrazić przez $\pi(xy)(x^2)^{\frac{1}{2}}$ więc dla maximum objętości powinno być $xy = 2x^2$; zkąd $y=2x$.

XL. *Wpisać w sferę walec mający objętość maximum.*

Odpowiedź: Nazywając R, x, y, promień sfery, promień walca i jego wysokość, będzie $x^2+y^2=R^2$; objętość walca $\pi x^2 y = \pi x^2 (y^2)^{\frac{1}{2}}$; więc maximum objętości zależy od równań $\frac{x^2}{1} = 2y^2 = \frac{2R^2}{3}$; etc.

XLI. *Wpisać w sferę stożek prosty mający objętość maximum.*

Odpowiedź: Nazywając x i y promień i wysokość stożka wpisanego w sferę promienia R, mamy $x^2=(2R-y)y$; objętość stożka jest $\frac{1}{3}\pi x^2 y$, albo, podstawiając wartość x^2, $\frac{1}{3}\pi(2R-y)y^2$; więc maximum tej objętości odpowieda wartościom $\frac{2R-y}{1} = \frac{y}{2} = \frac{2R}{3}$.

XLII. *W sferę promienia* R *wpisać walec prosty którego powierzchnia cała jest maximum albo minimum.*

Odpowiedź: Maximum powierzchni jest $\frac{R^2}{2}(1+\sqrt{5})$ i odpowieda wartości $x=\frac{R}{10}\sqrt{50+10\sqrt{5}}$. Najmniejsza powierzchnia jest 0, i odpowieda wartości $x=0$; ale wtedy walec staje się średnicą sfery.

XLIII. W *stożek prosty wpisać walec mający powierzchnię boczną maximum.*

Odpowiedź: Nazywając R i h, x i y, promień i wysokość stożka i walca, będzie $\frac{x}{R}+\frac{y}{h}=1$; powierzchnia boczna walca wyraża się przez $2\pi xy$ albo przez $2\pi Rh\left(\frac{x}{R}\cdot\frac{y}{h}\right)$; więc dla jej maximum będzie $\frac{x}{R}=\frac{y}{h}=\frac{1}{2}$.

XLIV. *Znaleźć maximum objętości walca wpisanego w stożek prosty kołowy.*

Odpowiedź: Powinno być $\frac{x}{2r}=\frac{y}{h}=\frac{1}{3}$.

XLV. *Opisać na walcu prostym stożek objętości minimum.*

Odpowiedź: Nazywając r i h, x i y promień i wysokość walca i stożka, będzie $\frac{r}{x}+\frac{h}{y}=1$; objętość stożka jest $\frac{1}{3}\pi x^2 y$; odwrotność wieloczynu x^2y może się wyrazić przez $\frac{1}{r^2h}\left(\frac{r}{x}\right)^2\frac{h}{y}$, więc dla szukanego minimum powinno być $\frac{r}{2x}=\frac{h}{y}=\frac{1}{3}$.

XLVI. *Znaleźć maximum summy objętości krymki sferycznej i stożka w nią wpisanego.*

Odpowiedź: Nazywając x spólną wysokość dwóch figur, powinno być $x=\frac{5R}{3}$.

XLVII. *Między walcami równowartemi znaleźć ten którego* *powierzchnia boczna, powiększona powierzchnią jednej podstawy, czyni summę minimum.*

Odpowiedź: Walec w którym promień podstawy jest równy jego wysokości.

XLVIII. *Znaleźć na linii środków dwóch sfer zewnętrznych punkt taki, żeby summa dwóch stref widzianych z tego punktu była maximum.*

Odpowiedź: Nazywając R i R′ promienie dwóch sfer, a odległość środków, i oznaczając przez x odległość szukanego punktu od środka sfery mającej promień R większy od R′, otrzymuje się dwa rozwiązania

$$x=\frac{aR\sqrt{R}}{R\sqrt{R}+R'\sqrt{R'}},\qquad x=\frac{aR\sqrt{R}}{R\sqrt{R}-R'\sqrt{R'}}.$$

Dyskutować te rozwiązania.

XLIX. *Znaleźć maximum wieloczynów*

$x^3(1-x^2)$ i $x^2(1-x^3)$ *w których* $x<1$.

Odpowiedź: Wpierwszym, $x=\sqrt{\frac{3}{5}}$, daje maximum $\frac{6}{25}\sqrt{\frac{3}{5}}$, $x=-\sqrt{\frac{3}{5}}$ daje minimum $-\frac{6}{25}\sqrt{\frac{3}{5}}$.

W drugim, $x=\sqrt[3]{\frac{2}{5}}$ daje maximum $\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}}$, $x=0$ daje minimum 0.

L. *Znaleźć maximum i minimum ułamka* $\frac{x^m}{y^n}$.

Odpowiedź: W założeniu $x>0$, $y>0$, dla $\frac{x}{m}=\frac{y}{n}$, jest maximum jeśli $\frac{x}{y}<1$ i $\frac{m}{n}<1$; minimum jeśli $\frac{x}{y}>1$ i $\frac{m}{n}>1$. Nie ma ani maximum ani minimum jeśli $x<y$ ale $m>n$, albo naodwrót.

ROZDZIAŁ IX

POSTĘPNIE I LOGARYTMY

POSTĘPNIA ARYTMETYCZNA

389. Nazywa się *postępnią* (*) *arytmetyczną*, albo *postępnią różnicową*, ciąg ilości w którym różnica każdej z poprzedzającą jest ta sama. Te ilości nazwano *wyrazami* a ich różnicę *stosunkiem* postępni.

I tak, liczby całkowite po sobie idące 1, 2, 3, 4, 5,... tworzą postępnię arytmetyczną której stosunkiem jest 1.

Mówi się że postępnia jest *rosnąca* albo *malejąca*, według jak jej wyrazy idą powiększając się albo zmniejszając. A ponieważ stosunkiem postępni arytmetycznej jest ilość, którą trzeba dodać do jednego wyrazu aby otrzymać bezpośrednio następujący, dlatego w postępni arytmetycznej rosnącej stosunek jest dodatny, w malejącej odjemny.

Żeby wskazać że uważane ilości tworzą postępnię arytmetyczną, stawia się najpierwej znak $\div$, i po nim pisze się te ilości jedną po drugiej, oddzielając je punktem.

I tak, ciągi liczb

$$\div 1.3.5.9.11....$$

$$\div 36.33.30.27.24....$$

są dwiema postępniami arytmetycznemi; pierwsza jest rosnąca

(*) *Progressus* znaczy postęp *progressio* a wyrażamy przez *postępnię*.

i ma stosunek dodatny 2; druga jest malejąca i ma stosunek odjemny —3. Dając znak + albo — stosunkowi postępni arytmetycznej, nie ma już potrzeby rozróżniania jej na rosnącą i malejącą. Wyraża się postępnię arytmetyczną ogólnie, pisząc

$$\div a.b.c.d\ldots.i.k.l$$

i czyta się ją mówiąc : a ma się do b jako c do d,.... jako k do l.

W każdej postępni arytmetycznej jest pięć ilości do uważania : pierwszy wyraz a i ostatni l, stosunek oznaczony zwykle przez r, liczba wyrazów przez n, ich summa przez S. Między temi pięcioma ilościami są dwa związki, wyrażone dwiema formułami któremi się teraz zajmiemy.

300. Wartość wyrazu rzędu n. Według określenia postępni arytmetycznej, każdy jej wyraz tworzy się z poprzedzającego, dodawaniem stosunku dodatnego albo odjemnego. Zatem drugi wyraz jest $a+r$, trzeci $a+2r$, czwarty $a+3r$,.... n^{ty} będzie $a+(n-1)r$.

Więc *wyraz jakikolwiek postępni arytmetycznej równa się pierwszemu powiększonemu tyle razy stosunkiem ile jest wyrazów przed nim.*

Oznaczając przez l ostatni wyraz, to jest wyraz n^{ty} który ma $n-1$ wyrazów przed sobą, otrzymujemy pierwszą formułę

$$(1) \qquad l=a+(n-1)r,$$

w której r jest ilością dodatną albo odjemną, według jak postępnia arytmetyczna jest rosnąca albo malejąca.

Przykład. Wyrachować 10^{ty} wyraz postępni arytmetycznej której pierwszym wyrazem jest 12 i stosunkiem 4.

Ten 10^{ty} wyraz jest równy $12+9.4=48$.

Uwaga. W postępni arytmetycznej rosnącej wyrazy powiększają się coraz bardziej, tak że wyraz *nty* może przewyższać wszelką daną wielkość K. Trzeba tylko wziąć dla n wartość całkowitą taką żeby zadość czyniła nierówności

$$a+(n-1)r>K;\quad \text{zkąd}\quad n>1+\frac{K-a}{r}.$$

Na przykład w postępni

$$\div 3.8.13.18.23\ldots,$$

żeby wyraz n^{ty} przewyższał 100, dość jest żeby było

$$n>1+\frac{100-3}{5};$$

więc $n=21$ wystarcza.

391. Zagadnienie I. *Między dwie dane ilości* a *i* b *wstawić* m *średnich arytmetycznych.*

To znaczy : utworzyć postępnię arytmetyczną złożoną z $m+2$ wyrazów i taką żeby a i b były wyrazami skrajnemi. Oczywiście jedyną niewiadomą jest stosunek r; żeby go znaleźć, dość uważać że ostatni wyraz b szukanej postępni ma $m+1$ wyrazów przed sobą; co daje

$$b=a+(m+1)r,\quad \text{zkąd}\quad r=\frac{b-a}{m+1}.$$

Znając stosunek r i pierwszy wyraz a, łatwo wyrachować po jednemu wszystkie inne wyrazy postępni.

Przykład. *Między* 3 *i* 12 *wstawić* 5 *średnich arytmetycznych.*

Stosunek $r=\frac{12-3}{6}=\frac{3}{2}$; zatem wyrazy żądanej postępni są

$$3,\ \frac{9}{2},\ 6,\ \frac{15}{2},\ 9,\ \frac{21}{2},\ 12.$$

392. Zagadnienie II. *Między dwie ilości* a *i* b *wstawić* m *średnich takich. żeby różnica dwóch po sobie idących wyrazów była mniejsza od* δ.

Ponieważ stosunek r powinien być mniejszy od δ, mamy

$$\frac{b-a}{m+1}<\delta;\quad \text{zkąd}\quad m>\frac{b-a}{\delta}-1.$$

Biorąc na przykład $a=5$, $b=9$, $\delta=\frac{3}{2}$, będzie $m>\frac{8}{3}-1$; zkąd $m\geqq 2$. Więc trzeba wstawić najmniej 2 średnie arytmetyczne; co daje postępnię

$$5,\ \frac{19}{3},\ \frac{23}{3},\ 9.$$

393. *Znaleźć pod jakim warunkiem trzy dane liczby* a, b, c, *mogą być w tej samej postępni arytmetycznej.*

Jeśli trzy liczby a, b, c, ustawione porządkiem wielkości, znajdują się w jednej postępni arytmetycznej, przypuszczając że między a i b jest $p-1$ wyrazów, mi[illegible] podobnie $q-1$ wyrazów, mamy

$$b=a+pr,\qquad c=a+qr,$$

zkąd, rugując r, otrzymujemy szukany warunek

$$\frac{p}{q}=\frac{b-a}{c-a}.$$

Owoż p i q są liczbami całkowitemi; więc trzeba i dość jest dla możebności zagadnienia *żeby ułamek* $\frac{b-a}{c-a}$, *przywiedziony do najprostszego kształtu, był ilorazem dwóch liczb całkowitych.* Jeśli temu warunkowi staje się zadość, można wziąć liczbę p równą licznikowi i liczbę q równą mianownikowi nieredukownego ułamka, albo p i q równe jednakowym wielownikom licznika i mianownika. Wtedy zagadnienie ma nieskończoną liczbę rozwiązań.

394. Twierdzenie I. *Wstawiając, między dwa po sobie idące wyrazy postępni arytmetycznej, tę samą liczbę* m *średnich, otrzymuje się jedyną postępnię, której stosunkiem jest iloraz z podzielenia stosunku pierwotnego* r *przez* m + 1.

Jakoż, cząstkowe postępnie od a do b, od b do c,.... mają stosunki równe

$$\frac{b-a}{m+1}=\frac{c-b}{m+1}=\ldots,=\frac{r}{m+1},$$

a ostatni wyraz każdej jest pierwszym następującej; więc wszystkie razem stanowią jedną postępnię arytmetyczną, której stosunkiem jest $\frac{r}{m+1}$.

395. Twierdzenie II. *Wstawić najpierwej* m — 1 *średnich między dwie dane liczby* a *i* b, *i potem, między każde dwa wyrazy otrzymanej postępni, wstawić* m' — 1 *nowych średnich, wychodzi na jedno co wstawić odrazu* mm' — 1 *średnich między te dwie liczby* a *i* b.

Jakoż, wstawiając $m-1$ średnich arytmetycznych między dwie liczby a i b, mamy stosunek $\frac{b-a}{m}$ pierwszej postępni; wstawiając potem $m'-1$ średnich między każde dwa wyrazy tej postępni, znujdujemy stosunek $\frac{b-a}{mm'}$ drugiej postępni. Owoż, otrzymuje się odrazu ostatni stosunek wstawiając $mm'-1$ średnich między dane liczby a i b. Co dowodzi twierdzenia.

To twierdzenie jest ogólne; albowiem, na mocy dowodzenia, wstawić najpierwej $m-1$ średnich między dwie liczby a i b, potem $m'-1$ średnich między każde dwa wyrazy otrzymanej postępni, i znowu $m''-1$ średnich między każde dwa wyrazy ostatniej postępni, i tak dalej; wychodzi oczywiście na jedno co wstawić odrazu $mm'm''\ldots-1$ średnich między a i b.

396. Twierdzenie III. *W każdej postępni arytmetycznej summa dwóch wyrazów równo oddalonych od skrajnych jest stateczna, i równa summie skrajnych.*

Niech będzie postępnia arytmetyczna mająca n wyrazów

$$\div\, a.b.c.d\ldots\ i.k.l.$$

Drugi wyraz od początku jest $b=a+r$, drugi od końca przedstawia się przez $k=l-r$; więc ich summa $b+k=a+l$.

Ogólnie, jeśli nazwiemy x wyraz mający p wyrazów przed sobą, i y wyraz mający p wyrazów po sobie, będzie

$$x=a+pr,\quad y=l-pr;$$

więc
$$x+y=a+l.$$

Uwaga. W postępni arytmetycznej mającej nieparzystą liczbę wyrazów, środkowy wyraz jest połową summy skrajnych.

397. Summa wyrazów. Oznaczając przez S summę n wyrazów postępni arytmetycznej, mamy

$$S=a+b+c+\ldots i+k+l;$$

a jeśli napiszemy wyrazy tej summy w porządku odwrotnym, będzie

$$S=l+k+i+\ \ldots c+b+a.$$

Dodajemy teraz kolumnami wyrazy składające obie summy, i otrzymujemy

$$2S=(a+l)+(b+k)+(c+i)+\ldots+(i+c)+(k+b)+(l+a).$$

Ale summy w nawiasach są równe każda summie $a+l$, i ich liczba jest n; znajdujemy więc

$$2S=(a+l)n;$$

zkąd formuła

$$(2) \qquad S=\frac{(a+l)n}{2}.$$

Summa wyrazów postępni arytmetycznej jest równa połowie summy skrajnych pomnożonej przez liczbę wyrazów.

Przykład. *Ogrodnik podlewa 40 drzew w linii prostej, rozsadzonych na 2 metry jedno od drugiego, niosąc zarazem dwa wiadra wody którą czerpie ze źródła odległego na 14 metrów od pierwszego drzewa. Ile przebiegł metrów gdy podlał wszystkie drzewa i powrócił do źródła?*

Ogrodnik, niosąc wodę od źródła do pierwszego drzewa pod które wylewa jedno wiadro, i idąc wciąż do drugiego gdzie wylewa drugie wiadro, przebiega 16 metrów; powracając do źródła po wodę przebiega drugie 16 metrów. Więc podlanie dwóch pierwszych drzew wymaga 32 metrów drogi. Podlanie dwóch drugich drzew wymaga 40 metrów; podlanie dwóch następujących, 48 metrów; i tak dalej. Ztąd wynika że droga prebieżona jest summą postępni arytmetycznej

$$\div 32.40.48.56\ldots.$$

mającej stosunek 8 i złożonej z 20tu wyrazów. Owoż, ostatni wyraz $l=32+8.19=184$; więc summa wyrazów jest

$$S=\frac{(32+184)}{2}20=2160.$$

Ogrodnik przebiegł 2160 metrów, gdy podlał wszystkie drzewa i powrócił do źródła.

398. Można wyrazić summę postępni arytmetycznej w funkcyi pierwszego wyrazu a, stosunku r i liczby wyrazów n; dość tylko podstawić w formule (2) wartość ostatniego wy-

razu $l=a+(n-1)r$; co daje

$$S=\frac{\{2a+(n-1)r\}n}{2}. \tag{3}$$

Zastosowania. 1° *Znaleźć summę* n *pierwszych liczb całkowitych,* 1, 2, 3, 4...n.

Ponieważ te liczby tworzą postępnię arytmetyczną której stosunkiem jest 1, ich summa będzie

$$S=\frac{(2+n-1)n}{2}=\frac{(n+1)n}{2}.$$

2° *Znaleźć summę* n *pierwszych liczb nieparzystych* 1, 3, 5, 7...

Te liczby tworzą postępnię arytmetyczną której stosunkiem jest 2; zatem ich summa będzie

$$S=\frac{\{2+(n-1)2\}n}{2} \quad \text{albo} \quad S=n^2.$$

Więc summa n pierwszych liczb nieparzystych jest równa kwadratowi ich liczby.

Ta własność może czasem posłużyć do rozłożenia kwadratu nieparzystego na summę dwóch kwadratów. I tak,

$$5^2=4^2+(1+4.2)=4^2+3^2,$$
$$17^2=15^2+(2+15.2+16.2)=15^2+8^2.$$

399. Uwaga ogólna. Między pięcioma ilościami a, l, r, n, S znaleźliśmy tylko dwa oddzielne związki (1) i (2). Ale z samej natury tych ilości wynika że, między niemi, nie może istnieć więcej niż dwa równania oddzielne; bo, gdyby istniało trzecie, znając na przykład a i r, mianoby dla niewiadomych l, n, S trzy równania któreby wyznaczyły ich wartości; co oczywiście niemożebne.

Owoż, z pięciu ilości a, l, n, r, S, można dziesięcioma sposobami wziąć dwie za niewiadome, to jest: a i l, a i n, a i r,

a i S; l i n, l i r, l i S; n i r, n i S; r i S. Co daje dziesięć różnych zagadnień. Osiem są pierwszego stopnia; a tylko dwa, mające niewiadome a i n albo l i n które się mnożą, są drugiego stopnia. Rozwiążemy jedno z ostatnich, które przedstawia pewną okoliczność godną uwagi.

400. Zagadnienie IV. *Mając dane* l, r, S, *znaleźć* a *i* n. Mamy równania

$$l=a+(n-1)r, \quad S=\frac{(a+l)n}{2}.$$

Rugując a, otrzymujemy równanie drugiego stopnia

$$rn^2-(2l+r)n+2S=0,$$

które daje

$$n=\frac{2l+r\pm\sqrt{(2l+r)^2-8rS}}{2r}.$$

Ta podwójna wartość n, podstawiona w pierwszem równaniu, wyznacza odpowiedające wartości dla a,

$$a=\frac{r\mp\sqrt{(2l+r)^2-8rS}}{2}.$$

Dyskussya. Żeby wartość n rozwiązywała zagadnienie, powinna być rzeczywista, dodatna i całkowita; co wymaga przede wszystkiem żeby ilość pod pierwiastnikiem była dodatna i kwadratem doskonałym; ale do tego trzeba jeszcze żeby mianownik $2r$ dzielił dokładnie licznik i dał iloraz dodatny. Zagadnienie może mieć dwa rozwiązania wtedy tylko kiedy jest $\frac{2l+r}{r}>0$ i $\frac{S}{r}>0$. Nietrudno pojąć że mogą istnieć dwie postępnie arytmetyczne mające ten sam stosunek, ten sam wyraz ostatni i równowartą summę, ale różny pierwszy wyraz i różną liczbę wyrazów; bo niektóre wyrazy summy mogą się niszczyć, i jeden z nich może być zerem. Następujące przykłady wydatnie to wszystko pokazują.

1° Biorąc $r=3$, $l=7$, $S=-3$, i podstawiając w powyższej formule, będzie

$$n=\frac{14+3\pm\sqrt{17^2+72}}{6}=\frac{17\pm19}{6}=\begin{cases}6,\\ -\frac{1}{3};\end{cases}$$

odrzucamy wartość $n=-\frac{1}{3}$ jako niewłaściwą, i podstawiając $n=6$ w pierwszem równaniu, mamy

$$a=7-15=-8.$$

Więc postępnia

$$-8,\ -5,\ -2,\ 1,\ 4,\ 7$$

jest jedynem rozwiązaniem zagadnienia.

2° Niech będą: $r=2$, $l=7$, $S=12$; podstawienie tych liczb w dwóch powyższych formułach, daje odpowiedające wartości dla n i a,

$$n=\frac{16\pm8}{4}=\begin{cases}6,\\ 2,\end{cases}\qquad a=\frac{2\mp8}{2}\begin{cases}-3,\\ +5.\end{cases}$$

Są więc dwie postępnie

$$-3,\ -1,\ 1,\ 3,\ 5,\ 7,\qquad \text{i}\qquad 5,\ 7,$$

które rozwiązują zagadnienie; obie mają summy równowarte, ale w pierwszej niektóre wyrazy się niszczą.

3° Gdyby wzięto $r=5$, $l=15$, $S=30$, znalezionoby

$$n=\begin{cases}4,\\ 3,\end{cases}\qquad a=\begin{cases}0,\\ 5;\end{cases}$$

i dwie postępnie rozwiązujące zagadnienie byłyby

$$0,\ 5,\ 10,\ 15,\qquad \text{i}\qquad 5,\ 10,\ 15,$$

obie summy są te same, ale pierwsza ma wyraz 0 więcej niż druga.

POSTĘPNIA GEOMETRYCZNA.

401. *Postępnią geometryczną* albo *ilorazową* jest ciąg ilości z których każda równa się poprzedzającej pomnożonej przez tę samą liczbę zwaną *stosunkiem* postępni. Ten stosunek może być dodatny lub odjemny.

Postępnia geometryczna jest *rosnąca* albo *malejąca*, według jak jej stosunek dodatny jest większy albo mniejszy od jedności. Aby wskazać że uważane ilości tworzą postępnię geometryczną, stawia się najpierwej znak $\div\div$ i po nim pisze się te ilości jedną po drugiej, przedzielając je dwoma punktami

I tak, ciągi liczb

$$\div\div 2 : 6 : 18 : 54 : 162 : 486 : 1458 \ldots..$$

$$\div\div 8 : 4 : 2 : 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16} : \ldots.$$

są dwiema postępniami geometrycznemi; pierwsza jest rosnąca i ma stosunek 3, druga malejąca ma stosunek $\frac{1}{2}$.

Jako widzimy, postępnia geometryczna jest szeregiem proporcyj ciągłych, każdy jej wyraz jest średnią proporcyonalną między dwoma sąsiędniemi, na przykład

$$6 = \sqrt{2.18}, \quad \frac{1}{4} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}}.$$

Wyraża się postępnię geometryczną ogólnie, pisząc

$$\div\div a : b : c : d : \ldots.. i : k : l.$$

Stosunek postępni geometrycznej oznaczają zwykle literą q.

402. Wartość wyrazu rzędu n. Ponieważ, według okre-

ślenia postępni geometrycznej, tworzy się każdy wyraz z poprzedzającego mnożąc go przez stosunek, jeśli pierwszy wyraz jest a drugi będzie aq, trzeci aq^2, czwarty $aq^3 \ldots$, n^{ty} aq^{n-1}.

Więc *wyraz jakikolwiek postępni geometrycznej równa się pierwszemu pomnożonemu przez potęgę stosunku, mającą za wykładnik liczbę wyrazów które poprzedzają ten wyraz.*

Oznaczając przez l wyraz n^{ty}, to jest ten który ma $n-1$ wyrazów przed sobą, otrzymujemy pierwszą formułę

$$(1) \qquad l = aq^{n-1},$$

w której stosunek q jest liczbą większą albo mniejszą od jedności, dodatną albo odjemną.

Przykład. Wyrachować 6^{ty} wyraz postępni geometrycznej, której pierwszym wyrazem jest 3 i stosunkiem $\frac{1}{4}$.

Ten 6^{ty} wyraz równa się wieloczynowi $3\left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{3}{1024}$.

403. Nim pójdziemy dalej, dowiedziemy najpierwej następujących ważnych twierdzeń.

1° *Potęgi po sobie idące liczby większej od jedności rosną coraz bardziej, i mogą przewyższać wszelką oznaczoną wielkość.*

Niech będzie

$$A = 1 + \alpha.$$

Mamy oczywiście

$$A^2 > A, \qquad A^3 > A^2. \qquad A^4 > A^3, \ldots A^n > A^{n-1};$$

co dowodzi że potęgi liczby $A > 1$ powiększają się coraz bardziej z ich wykładnikami.

Te potęgi mogą przechodzić wszelką oznaczoną wielkość. Jakoż, mnożąc powyższą równość przez A, będzie

$$A^2 = A + A\alpha;$$

zkąd, ponieważ $A > 1$, wynika

$$A^2 > A + \alpha.$$

Następnie

$$A^3 > A^2 + \alpha,$$

$$A^4 > A^3 + \alpha$$

$$A^n > A^{n-1} + \alpha.$$

Dodając wszystkie nierówności z pierwszą równością, otrzymujemy

$$A^n > 1 + n\alpha.$$

albo

$$(1+\alpha)^n > 1 + n\alpha.$$

Owoż, można wziąć n tak wielkie żeby summa $1+n\alpha$ przewyższała wszelką daną wielkość K; dość tylko żeby było

$$1 + n\alpha \geq K,$$

albo

$$n \geqq \frac{K-1}{\alpha}.$$

Będzie więc tem bardziej

$$(1+\alpha)^n > K.$$

Uwaga. Wartość n, wyznaczona przez powyższą nierówność, jest dostateczna do dowodzenia wysłowionej prawdy, ale nie jest konieczna do rozwiązywania zagadnień. I tak, gdyby szukano, tym sposobem, do jakiej potęgi trzeba podnieść 2 żeby było $2^n > 1000$? znalezionoby $n \geqq \frac{1000-1}{1}$ to jest $n \geqq 999$; gdy tymczasem $n = 10$ wystarcza.

2° *Potęgi po sobie idące liczby niniejszej od jedności maleją coraz bardziej, i mogą stać się mniejszemi od liczby tak małej jak się podoba.*

Jakoż, przypuszczając $a < 1$, mamy oczywiście

$$a^2 < a, \quad a^3 < a^2, \quad a^4 < a^3, \ldots a^n < a^{n-1};$$

co już dowodzi że potęgi liczby mniejszej od jedności są tem mniejsze im ich wykładniki są większe. Te potęgi mogą stać się mniejszemi od wszelkiej danej małości; albowiem, biorąc $a < 1$, można położyć

$$a = \frac{1}{1+\alpha},$$

gdzie α znaczy liczbę dodatną. Będzie zatem

$$a^n = \frac{1}{(1+\alpha)^n}.$$

Żeby zaś mieć potęgę a^n mniejszą od liczby ε tak małej jak się podoba, trzeba tylko zadość uczynić nierówności

$$\frac{1}{(1+\alpha)^n} < \varepsilon, \quad \text{albo} \quad (1+\alpha)^n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Co zawsze możebne na mocy 1°.

3° *Pierwiastki wskazu coraz większego liczby* $A > 1$ *maleją i dążą do jedności.*

Albowiem, dlatego że $A > 1$, mamy

$$A^{n+1} > A^n;$$

zkąd, wyciągając pierwiastek wskazu $n(n+1)$, wynika

$$\sqrt[n]{A} > \sqrt[n+1]{A}.$$

Co już dowodzi że pierwiastki liczby A, oczywiście większe od jedności, maleją w miarę jak się wskaz n powiększa.

Owoż, można wziąć wskaz n przyzwoicie wielki i taki, żeby różnica $\sqrt[n]{A} - 1$ była mniejsza od liczby ε tak małej jaką mieć chcemy, to jest żeby było

$$\sqrt[n]{A} - 1 < \varepsilon \quad \text{albo} \quad \sqrt[n]{A} < 1 + \varepsilon;$$

bo ostatnia nierówność jest równowarta następującej

$$A < (1 + \varepsilon)^n,$$

która jest zawsze możebna.

4° *Pierwiastki wskazu coraz większego liczby* a < 1 *rosną i dążą do jedności.*

Jakoż, dlatego że $a < 1$, mamy

$$a^{n+1} < a^n;$$

zkąd, wyciągając pierwiastek wskazu $n(n+1)$, wynika

$$\sqrt[n]{a} < \sqrt[n+1]{a}.$$

Co pokazuje że pierwiastki liczby a, oczywiście mniejsze od jedności, rosną w miarę jak się wskaz n powiększa.

Owoż, można wziąć wskaz n przyzwoicie wielki i taki, żeby różnica $1 - \sqrt[n]{a}$ była mniejsza od liczby ε tak małej jak się podoba, to jest żeby było

$$1 - \sqrt[n]{a} < \varepsilon \quad \text{albo} \quad \sqrt[n]{a} > 1 - \varepsilon;$$

bo ostatnia nierówność jest równowarta następującej

$$a > (1 - \varepsilon)^n,$$

która, będąc zawsze możebna na mocy 2°, dowodzi twierdzenia.

Więc ogólnie, *gdy wskaz* n = ∞, *pierwiastek* n^{ty} *liczby większej albo mniejszej od jedności ma za granicę jedność.*

401. *Wyrazy postępni geometrycznej rosnącej powiększają się*

ciągle i mogą przechodzić wszelką oznaczoną wielkość; *a przeciwnie wyrazy postępni geometrycznej malejącej zmniejszają się ciągle i dążą do zera.*

Jakoż, 1° w postępni geometrycznej rosnącej stosunek jest większy od jedności i może się wyrazić przez $1+\alpha$; więc ta postępnia przedstawia się w kształcie

$$\div\!\div\, a : a(1+\alpha) : a(1+\alpha)^2 : a(1+\alpha)^3 : a(1+\alpha)^4 : \ldots$$

który, na mocy wyżej dowiedzionych twierdzeń, wydatnie pokazuje że jej wyrazy powiększają się coraz bardziej, i mogą przewyższać wszelką naznaczoną wielkość. Do tego, widać oczywiście że różnica dwóch po sobie idących wyrazów jest tem większa im są dalej od pierwszego.

2° W postępni geometrycznej malejącej stosunek jest mniejszy od jedności, i może się wyrazić przez $\frac{1}{1+\alpha}$; więc ta postępnia bierze kształt

$$\div\!\div\, a : \frac{a}{1+\alpha} : \frac{a}{(1+\alpha)^2} : \frac{a}{(1+\alpha)^3} : \frac{a}{(1+\alpha)^4} : \ldots$$

który widocznie pokazuje że jej wyrazy zmniejszają się coraz bardziej, i wciąż dążą do zera; a różnica dwóch po sobie idących wyrazów jest oczywiście tem mniejsza im są dalej od pierwszego.

405. Zagadnienie I. *Między dwie dane ilości* a *i* b *wstawić* m *średnich geometrycznych.*

To znaczy: utworzyć postępnię geometryczną mającą $m+2$ wyrazów, w której a i b są skrajnemi. Niewiadomą zagadnienia jest stosunek q; żeby go znaleźć, trzeba uważać że w szukanej postępni wiadome są: pierwszy wyraz a i ostatni b który ma $m+1$ wyrazów przed sobą; więc, stosując formułę (1), będzie

$$b = aq^{m+1}, \quad \text{zkąd} \quad q = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}.$$

Przykład. Między 2 i 93312 wstawić 5 średnich geometrycznych

Mamy stosunek

$$\sqrt[6]{\frac{93312}{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{46656}} = \sqrt[3]{216} = 6;$$

więc szukana postępnia jest

$$\div\div\ 2 : 12 : 72 : 432 : 2592 : 15552 : 93312.$$

Uwaga. Gdy wskaz $m+1$ pierwiastku który wyciągać trzeba dla znalezienia stosunku q, jest liczbą pierwszą, albo zawiera czynniki różne od 2 i 5, wtedy wyciąga się ten pierwiastek przez logarytmy, których teoryę w tym rozdziale wyłożymy.

406. Twierdzenie 1. *Wstawiając między każde dwa wyrazy postępni geometrycznej tę samą liczbę* m *średnich geometrycznych, otrzymuje się jedyną postępnię której stosunkiem jest pierwiastek wskazu* m+1 *ze stosunku pierwotnego* q.

Niech będzie postępnia geometryczna

$$\div\div\ a : b : c : d : \ldots i : k : l,$$

mająca stosunek q. Stosunki postępni cząstkowych wyrażają się przez

$$\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}},\ \sqrt[m+1]{\frac{c}{b}},\ \sqrt[m+1]{\frac{d}{c}}, \ldots$$

i są wszystkie równe stosunkowi $\sqrt[m+1]{q}$; do tego, ostatni wyraz każdej postępni jest pierwszym następującej; więc wszysłkie razem stanowią jedną postępnię mającą stosunek $\sqrt[m+1]{q}$, to jest, biorąc wykładniki ułamkowe,

$$\div\div a : aq^{\frac{1}{m+1}} : aq^{\frac{2}{m+1}} : aq^{\frac{3}{m+1}} : \ldots aq^{\frac{m}{m+1}} : b$$

$$: bq^{\frac{1}{m+1}} : bq^{\frac{2}{m+1}} : \ldots \quad : kq^{\frac{m}{m+1}} : l.$$

407. TWIERDZENIE II. *Wstawić najpierwej* $m-1$ *średnich geometrycznych między dwie liczby* a *i* b, *i potem* $m'-1$ *średnich geometrycznych między każde dwa wyrazy otrzymanej postępni, wychodzi na jedno co wstawić* odrazu $mm'-1$ *takich średnich między dwie liczby* a i b.

Jakoż, wstawiając najpierwej $m-1$ średnich geometrycznych między dwie liczby a i b, mamy postępnię geometryczną której stosunkiem jest

$$\sqrt[m]{\frac{b}{a}};$$

wstawiając potem $m'-1$ średnich geometrycznych między każde dwa wyrazy otrzymanej postępni, stosunkiem nowej postępni będzie

$$\sqrt[m']{\sqrt[m]{\frac{b}{a}}} = \sqrt[mm']{\frac{b}{a}}.$$

Owoż, stosunkiem postępni geometrycznej, którą się znajduje wstawiając $mm'-1$ średnich geometrycznych między dane liczby a i b, jest właśnie

$$\sqrt[mm']{\frac{b}{a}};$$

co dowodzi twierdzenia, które jest ogólne jako jego spółwzględne w postępniach arytmetycznych.

408. Zagadnienie II. *Znaleźć pod jakim warunkiem trzy liczby* a, b, c *mogą być w jednej postępni geometrycznej.*

Jeśli trzy liczby a, b, c, ustawione porządkiem wielkości, znajdują się w tej samej postępni geometrycznej, przypuszczając że między a i b jest $m-1$ wyrazów, między a i c jest $n-1$ wyrazów, mamy

$$b=aq^m, \quad c=aq^n;$$

zkąd, podnosząc obie strony pierwszej równości do potęgi n, obie strony drugiej do potęgi m, i dzieląc stronami, rugujemy stosunek q i otrzymujemy szukany warunek

$$\frac{b^n}{c^m}=\frac{a^n}{a^m} \quad \text{albo} \quad \left(\frac{b}{a}\right)^n=\left(\frac{c}{a}\right)^m.$$

Dajmy na to że liczby a, b, c są spółmierne, i, przywodząc ułamki $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$ do najprostszego kształtu, wyraźmy je przez $\frac{h}{k}$, $\frac{r}{s}$; będziemy mieli

$$\frac{h^n}{k^n}=\frac{r^m}{s^m}.$$

Owoż, ta równość dwóch ułamków nieredukownych wymaga żeby było osobno

$$h^n=r^m \quad \text{i} \quad k^n=s^m;$$

trzeba więc żeby liczniki h i r składały się z tych samych czynników pierwszych, i tak samo mianowniki k i s; nad to, wykładniki każdego czynnika pierwszego, tak w licznikach h i r jako w mianownikach k i s, powinny być w stosunku statecznym $\frac{m}{n}$. Jeśli tym warunkom staje się zadość, stosunek $\frac{m}{n}$ będzie wyznaczony ale jego wyrazy m i n zostaną niewyznaczone. Takim sposobem trzy liczby a, b, c mogą być razem w nieskończonej liczbie postępni geometrycznych.

Przykład. *Jakie liczby spółmierne mogą być w postępni geometrycznej razem z liczbami* 1 *i* 10?

Oznaczając przez $\frac{A}{B}$ liczbę spółmierną szukaną, powinno być:

$$10 = q^m \quad \text{i} \quad \frac{A}{B} = q^n;$$

zkąd, rugując q, wynika

$$\frac{A^m}{B^m} = 10^n = 2^n.5^n.$$

Owoż, druga strona równości jest liczbą całkowitą, więc pierwsza musi nią być także; a ponieważ $\frac{A}{B}$ jest ułamkiem nieredukownym z założenia, będzie $B=1$, zatem

$$A^m = 2^n.5^n.$$

Co wymaga żeby liczba A składała się tylko z czynników 2 i 5, podniesionych do potęg α i β takich żeby było

$$2^{\alpha m}.5^{\beta m} = 2^n.5^n; \quad \text{zkąd} \quad \alpha m = n = \beta m, \quad \text{albo} \quad \alpha = \beta = \frac{n}{m}.$$

Więc wykładniki czynników 2 i 5 w liczbie A powinny być równe, albo innemi słowy, liczba A musi być potęgą liczby 10. To dowodzi że potęgi liczby 10 są jedynemi liczbami spółmiernemi które się mogą znajdować razem z liczbami 1 i 10 w jednej postępni geometrycznej.

409. Zagadnienie III. *Wiedząc że liczba* A *wpada między dwa wyrazy* g *i* h *postępni geometrycznej* a : b : c : ... g : h : ... l, *wstawić taką liczbę* m *średnich żeby różnica dwóch wyrazów nowej postępni, między które wpada* A, *była mniejsza od danej ilości* ε.

Nazywając q' stosunek nowej postępni, przypuśćmy że A wpada między dwa wyrazy po sobie idące gq'^n i gq'^{n+1}; ich różnica jest $gq'^n(q'-1)$; żeby była mniejsza od ε, dość wyznaczyć q' przez nierówność

$$gq'^n(q'-1)<\varepsilon.$$

Owoż $A>gq'^n$, więc założonej nierówności stanie się tem bardziej zadość, jeśli będzie

$$A(q'-1)<\varepsilon;$$

zkąd

$$q'-1<\frac{\varepsilon}{A}.\quad \text{albo}\quad \sqrt[m+1]{q}-1<\frac{\varepsilon}{A};$$

ostatnia nierówność jest zawsze możebna (nr° 403, 3°).

Ztąd wynika że, wstawiając coraz więcej średnich geometrycznych, można otrzymać dwa po sobie idące wyrazy postępni tak mało różne od A jak się podoba.

410. Summa wyrazów. Oznaczając przez S summę wyrazów postępni geometrycznej, mamy

$$S=a+b+c+\ldots+i+k+l.$$

Jeśli pomnożymy obie strony przez q, będzie

$$Sq=aq+bq+cq+\ldots+iq+kq+lq,$$

albo

$$Sq=b+c+d+\ldots k+l+lq.$$

Teraz, jeśli stosunek q jest większy od jedności, odciągamy stronami pierwszą równość od ostatniej, i otrzymujemy

$$Sq-S=lq-a \quad \text{albo} \quad S(q-1)=lq-a;$$

zkąd formuła

$$(2)\qquad S=\frac{lq-a}{q-1}.$$

Jeśli przeciwnie stosunek q jest mniejszy od jedności, trzeba odciągnąć stronami ostatnią równość od pierwszej; co daje

$$S-Sq=a-lq \quad \text{albo} \quad S(1-q)=a-lq;$$

zkąd

$$S=\frac{a-lq}{1-q}.$$

Drugie wyrażenie summy różni się samem tylko kształtem od pierwszego, i z niego się wywodzi prostą przemianą znaków licznika i mianownika.

Jeśli stosunek q jest odjemny, rozumując podobnie otrzymuje się jeszcze formułę która się wywodzi z formuły (2) przemianą q na $-q$. Więc formuła (2) jest ogólna.

Przykład I. *Znaleźć summę pięciu liczb*

$$4,\ 12,\ 36,\ 108,\ 324.$$

Stosując formułę (2), będzie

$$S = \frac{324.3-4}{3-1} = 484.$$

Przykład II. *Znaleźć summę czterech wyrazów*

$$3,\ -6,\ 12,\ -24.$$

Formuła (2) daje

$$S = \frac{-24 \times -2-3}{-2-1} = -15.$$

411. Można mieć summę wyrazów postępni geometrycznej w funkcyi ilości a, q, n. Dość tylko w formule (2) zastąpić l przez jego wartość aq^{n-1}, co daje

$$(3) \qquad S = \frac{a(q^n-1)}{q-1}.$$

Otrzymuje się wprost formułę (3) dając summie postępni geometrycznej kształt wydatny

$$S = a + aq + aq^2 \ldots + aq^{n-2} + aq^{n-1} = a(1 + q + q^2 + \ldots q + q^{n-1}),$$

i uważając że, jakiekolwiek jest q, dodatne albo odjemne, summa w nawiasach jest ilorazem z podzielenia $1-q^n$ przez $1-q$, albo z podzielenia q^n-1 przez $q-1$. Te wyniki dowodzą ogólności formuły (3).

Dyskussya formuły

$$S=\frac{a(q^n-1)}{q-1}.$$

1° $q>1$, *postępnia rosnąca.* W tym przypadku potęga q jest tem większa im jej wykładnik n jest większy; i nawet nie ma żadnej granicy którejby przejść nie mogła, gdy n bierze wartości dostatecznie wielkie; wtedy summa S może stać się większą od wszelkiej ilości naznaczonej.

Jeśli stosunek q jest odjemny ale liczebnie większy od 1, wtedy summa S, naprzemian dodatna i odjemna, może także przechodzić w wartości samoistej wszelką daną wielkość.

2° $o<q<1$, *postępnia malejąca.* Zmieniając znaki licznika mianownika, można napisać formułę (3) jako następuje

$$S=\frac{a}{1-q}-\frac{aq^n}{1-q}.$$

Pod tym kształtem widzimy łatwo że summa n pierwszych wyrazów postępni składa się z części stałej $\frac{a}{1-q}$, zmniejszonej częścią zmienną $\frac{aq^n}{1-q}$ tem mniejszą im n jest większe. Ztąd wynika że summa S rośnie gdy się n powiększa; co naprzód widoczne. Owoż, gdy n, powiększając się, przechodzi poza wszelką granicę, część zmienna $\frac{aq^n}{1-q}$ maleje i może stać się tak małą jak się podoba; wtedy summa S rośnie ciągle, ale nie przechodzi nigdy granicy $\frac{a}{1-q}$ do której się zbliża nieskończenie. Więc gdy $n=\infty$, to jest gdy uważamy postępnię geometryczną malejącą, złożoną z wyrazów które się ciągną bez końca, wtedy summa S tych wszystkich wyrazów jest, z całą ścisłością,

$$S=\frac{a}{1-q}. \tag{4}$$

Jeśli stosunek q jest odjemny, wyrazy postępni są naprzemian dodatne i odjemne; wtedy formuła

$$S=\frac{a}{1-q}-\frac{aq^n}{1-q}$$

pokazuje że summa n wyrazów jest raz mniejsza drugi raz większa od ilości stałej $\frac{a}{1-q}$, według jak n jest parzyste albo nieparzyste. Więc, gdy n rośnie nieskończenie, summa wyrazów dąży do granicy $\frac{a}{1-q}$ niejako wahając około niej, i dla $n=\infty$ jest $S=\frac{a}{1-q}$ jako wyżej, ale $q<0$.

Ten tryb zbieżności summy S dowodzi że granicą ilości zmiennej nie koniecznie jest ilość stała do której ona coraz bardziej się zbliża chociaż jej nigdy nie dosięga, ale ilość do której ciągle dąży i może się od niej różnić tak mało jak się podoba.

Przykład I. *Znaleźć summę ciągu ułamków, z których każdy jest połową poprzedzającego,*

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots$$

Czyniąc $a=\frac{1}{2}$ i $q=\frac{1}{2}$ w formule (4), będzie

$$S=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1.$$

Przykład II. *Znaleźć summę algebryczną ciągu ułamków naprzemian dodatnych i odjemnych, z których każdy jest połową poprzedzającego,*

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-+\ldots$$

Czyniąc $a=\frac{1}{2}$ i $q=-\frac{1}{2}$ w formule (4), będzie

$$S=\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}.$$

Przykład III. *Znaleźć wartość ułamka dziesiętnego okresowego*

0,12121212....

Ten ułamek może być uważany jako postępnia geometryczna malejąca

$$\div\frac{12}{100}:\frac{12}{100^2}:\frac{12}{100^3}:\frac{12}{100^4}:\ldots$$

której stosunkiem jest $\frac{1}{100}$; więc wartość tego ułamka, równa summie postępni, wyraża się za pomocą formuły (4) przez

$$\frac{\frac{12}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{12}{99};$$

co jest właśnie wynikiem jaki się otrzymuje w artymetyce.

3° $q=1$. *Przypadek osobliwy*. Formuła (3) daje $\frac{0}{0}$; ale to niewyznaczenie jest tylko pozorne; bo, dzieląc najpierwej

q^n-1 przez $q-1$, będzie

$$S=a(q^{n-1}+q^{n-2}+q^{n-3}+\ldots q+1);$$

czyniąc potem $q=1$, otrzymujemy

$$S=an.$$

Wynik naprzód wiadomy, albowiem wszystkie wyrazy postępni są równe pierwszemu i jest ich n.

Jeśli $q = -1$, wtedy summa S jest naprzemian równa pierwszemu wyrazowi a albo jest zerem.

Uwaga. Co powiedziano w numerze 399 o dwóch formułach postępni arytmetycznych, i o liczbie zagadnień, stosuje się do postępni geometrycznych; z tą jednak różnicą że w ostatnich zagadnienia w których q i n są niewiadome prowadzą do równań stopni wyższych od drugiego, albo wymagają metod które dopiero w algebrze wyższej będą wyłożone, albo jeszcze rozwiązują się przez logarytmy o których wkrótce będzie mowa.

412. Twierdzenie III. *W postępni geometrycznej, mającej skończoną liczbę wyrazów, wieloczyn wyrazów równo oddalonych od skrajnych jest stateczny, i równy wieloczynowi skrajnych.*

Niech będzie postępnia geometryczna mająca n wyrazów

$$:: a : b : c : d : \ldots i : k : l :$$

Drugi wyraz i przedostatni mogą się przedstawić przez

$$b = aq, \quad k = \frac{l}{q},$$

więc ich wieloczyn jest

$$bk = al.$$

Ogólnie, wyraz x mający p wyrazów przed sobą, i wyraz y mający p wyrazów po sobie, są

$$x = aq^p, \quad y = \frac{l}{q^p},$$

więc ich wieloczyn

$$xy = al.$$

413. Wieloczyn wyrazów postępni geometrycznej. Oznaczmy przez P wieloczyn n wyrazów postępni

$$\dot{:}\!\!:\, a : b : c : d : \ldots : i : k : l,$$

będzie

$$P = abcd\ldots ikl;$$

ale, jeśli napiszemy czynniki w porządku odwrotnym, będzie także

$$P = lkih\ldots cba.$$

Ztąd, mnożąc te dwa równe wieloczyny jeden przez drugi, i stanowiąc obok czynniki równo oddalone od skrajnych, otrzymujemy

$$P^2 = al.bk.ci\ldots ic.kb.la.$$

Owoż, każdy z wieloczynów przedzielonych punktami jest równy wieloczynowi skrajnych al, i ich liczba jest n; więc

$$P^2 = (al)^n, \quad \text{zkąd} \quad P = \pm\sqrt{(al)^n}.$$

Daliśmy podwójny znak $\pm$ pierwiastnikowi, dlatego że wieloczyn P może być odjemny gdy $q < 0$.

Trzeba uważać że potęga $(al)^n$ jest kwadratem doskonałym. Aby to widzieć, dość jest podstawić za l jego wartość aq^{n-1}; co daje

$$(al)^n = a^{2n}q^{n(n-1)}$$

kwadrat doskonały, ponieważ jedna z dwóch liczb po sobie idących n i $n-1$ jest koniecznie parzysta. Więc, jeśli n jest parzyste, $n=2k$, będzie

$$P = \sqrt{(al)^{2k}} = (al)^k;$$

jeśli przeciwnie n jest nieparzyste, $n = 2k+1$, będzie

$$P = \sqrt{(al)^{2k+1}} = \sqrt{(al)^{2k}al} = al\sqrt{al};$$

ale wtedy al jest kwadratem doskonałym, bo $al = a.aq^{2k}$.

414. Uwaga. Widzieliśmy że postępnie geometryczne ze stosunkiem odjemnym, jako na przykład

$$\div\!\div\, 3 : -6 : 12 : -24 : 48 : -96 : \ldots,$$

posiadają te same ogólne własności co postępnie ze stosukiem dodatnym; trzeba jednak uważać że, wstawiając między ich wyrazy nieparzystą liczbę średnich geometrycznych, otrzymuje się nową postępnię ale z wyrazami urojonemi. I tak, wstawiając na przykład jedną średnię geometryczną między każde dwa wyrazy powyższej postępni, będzie

$$\div\!\div\, 3 : 3\sqrt{-2} : -6 : -6\sqrt{-2} : 12 : 12\sqrt{-2} : 24 : -23\sqrt{-2}$$

$$: 48 : 48\sqrt{-2} : -96 : \ldots.$$

KILKA ZAGADNIEŃ O POSTĘPNIACH.

415. Zagadnienie I. *Między dwie liczby* $\frac{2}{3}$ *i* $\frac{7}{6}$ *wstawić średnie arytmetyczne takie, żeby jedna z nich była równa jedności.*

Oznaczając przez n liczbę wyrazów które poprzedzają 1, przez p liczbę tych które idą przed ostatnim wyrazem $\frac{7}{6}$, będzie

$$1 = \frac{2}{3} + nr, \qquad \frac{7}{6} = \frac{2}{3} + pr.$$

albo

$$nr = \frac{1}{3}, \qquad pr = \frac{1}{2};$$

zkąd, dzieląc stronami, wynika

$$\frac{n}{p} = \frac{2}{3}.$$

Zagadnienie jest niewyznaczone. Ale, jeśli chcemy wstawić najmniej średnich arytmetycznych i mieć 1 między niemi, trzeba wziąć $n=2$; co da stosunek $r=\frac{1}{6}$, i szukana postępnia będzie

$$\div \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} \cdot 1 \cdot \frac{7}{6} \cdot$$

416. Zagadnienie II. *Znaleźć postępnię geometryczną, znając summę s wyrazów, summę s_2 ich kwadratów i summę s_4 ich czwartych potęg.*

Równania zagadnienia są

$$\frac{lq-a}{q-1}=s, \quad \frac{l^2q^2-a^2}{q^2-1}=s_2, \quad \frac{l^4q^4-a^4}{q^4-1}=s_4.$$

Dzieląc stronami drugie równanie przez pierwsze, i czwarte przez drugie, będzie

$$\frac{lq+a}{q-1}=\frac{s_2}{s}=r, \quad \frac{l^2q^2+a^2}{q^2+1}=\frac{s_4}{s_2}=t.$$

Mamy zatem układ równowarty pierwszemu,

$$lq-a=(q-1)s, \quad lq+a=(q+1)r, \quad l^2q^2+a^2=(q^2+1)t.$$

Jeśli teraz podniesiemy do kwadratu strony dwóch pierwszych równań, i od ich summy odciągniemy podwójne strony trzeciego, wyrugujemy odrazu dwie niewiadome a, l, i otrzymamy

$$0=(r^2+s^2-2t)q^2-2(s^2-r^2)q+r^2+s^2-2t,$$

zkąd

$$q=\frac{s^2-r^2\pm 2\sqrt{(s^2-t)(t-r^2)}}{r^2+s^2-2t};$$

dwie wartości rzeczywiste, jeśli $s^2>t>r^2$ albo $s^2<t<r^2$; ale tylko jedna, jeśli $s^2=t$ albo $t=r^2$.

Owoż, przez odciąganie, dwa pierwsze równania drugiego układu dają

$$a=\frac{r-s}{2}q+\frac{r+s}{2};$$

podstawiając każdą z wartości q otrzymamy odpowiedające wartości dla a. Więc zagadnienie może mieć dwa rozwiązania albo tylko jedno, albo nie mieć żadnego. Znając a i q, łatwo za pomocą pierwszego równania wyznaczyć ostatni wyraz l, i tworząc postępnię znaleźć temsamem liczbę jej wyrazów.

417. Zagadnienie III. *Znaleźć postępnię geometryczną, znając summę* s *wyrazów, summę* s_2 *ich kwadratów i summę* s_3 *ich sześcianów.*

Równania zagadnienia są

$$\frac{lq-a}{q-1}=s,\qquad \frac{l^2q^2-a^2}{q^2-1}=s_2,\qquad \frac{l^3q^3-a^3}{q^3-1}=s_3.$$

Dzieląc stronami drugie i trzecie przez pierwsze, i czyniąc dla skrócenia $\frac{s_2}{s}=r$, mamy układ równowarty

$$lq-a=(q-1)s,\quad lq+a=(q+1)r,\quad l^2q^2+alq+a^2=(q^2+q+1)t.$$

Jeśli teraz, od kwadratu stron pierwszego równania i od potrójnych kwadratów stron drugiego, odciągniemy poczwórne strony trzeciego, wyrugujemy odrazu dwie niewiadome a i l; i będzie

$$0=(s^2+3r^2-4t)q^2-2(s^2-3r^2+2t)q+s^2+3r^2-4t;$$

zkąd

$$q=\frac{s^2-3r^2+2t\pm2\sqrt{3(s^2-t)(t-r^2)}}{s^2+3r^2-4t}.$$

Owoż, rugując lq między dwoma pierwszemi równaniami drugiego układu, otrzymujemy

$$a = \frac{r-s}{2} q + \frac{r+s}{2}.$$

Więc obecne zagadnienie, jako poprzedzające, może mieć dwa rozwiązania albo tylko jedno, i nawet nie mieć żadnego.

418. ZAGADNIENIE IV. *Znaleźć postępnię ilorazową złożoną z czterech wyrazów, znając summę* s *tych wyrazów i summę* s_2 *ich kwadratów.*

Ponieważ liczba n wyrazów jest wiadoma, bierzemy formułę (3), i mamy równania zagadnienia

$$\frac{a(q^4-1)}{q-1} = s, \quad \frac{a^2(q^8-1)}{q^2-1} = s_2;$$

zkąd, dzieląc kwadraty stron pierwszego przez odpowiedające strony drugiego, wynika

$$\frac{(q^4-1)(q+1)}{(q-1)(q^4+1)} = \frac{s^2}{s_2} = k,$$

albo, po uproszczeniu i wykonaniu rachunków,

$$(1-k)q^4 + 2(q^3+q^2+q) + 1 - k = 0.$$

Owoż, na mocy twierdzenia dowiedzionego w algebrze wyższej, to równanie w którem trzy wyrazy po sobie idące są w postępni geometrycznej, albo ogólniej, w którem *kwadrat jednego wyrazu nie jest większy od wieloczynu dwóch bezpośrednio sąsiednich* (*), ma przynajmniej dwa pierwiastki urojone; więc zagadnienie może mieć dwa rozwiązania albo nie mieć żadnego.

Dla dokończenia rachunku weźmy przykład liczebny. Przypuszczając $s=5$, $s_2=85$, będzie $k=\frac{5}{17}$, i równanie wza-

(*) TWIERDZENIE de GUA, (1784).

jemne, wyżej otrzymane, stanie się

$$6q^4+17(q^3+q^2+q)+6=0.$$

Rozwiązując je wiadomym sposobem (n^ro 290), znajdujemy dla q dwie wartości urojone któreśmy naprzód zapowiedzieli, i dwie rzeczywiste $q=-\frac{1}{2}$, $q=-2$. Pierwszej rzeczywistej odpowieda $a=8$, drugiej $a=-1$. Istnieją więc dwie postępnie ilorazowe które rozwiązują wzięty przykład liczebny, to jest

$$\div\!\!\div\, 8:-4:2:-1 \quad \text{i} \quad \div\!\!\div\, -1:2:-4:8.$$

Ale w gruncie te dwie postępnie nie różnią się niczem innem tylko przewróconym porządkiem wyrazów, i dlatego są tylko jednem istotnem rozwiązaniem.

Nieźle jest znać jeszcze inny sposób rozwiązywania tego zagadnienia. Jeśli oznaczymy przez $2x$ summę dwóch wyrazów średnich b i c postępni, przez $2y$ ich różnicę $c-b$, będzie

$$b=x-y, \quad c=x+y;$$

zkąd stosunek $q=\frac{x+y}{x-y}$ i następnie wyrazy skrajne

$$a=\frac{(x-y)^2}{x+y}, \quad d=\frac{(x+y)^2}{x-y}.$$

Mamy więc, biorąc powyższy przykład liczebny, dwa równania zagadnienia,

$$\frac{(x-y)^2}{x+y}+x-y+x+y+\frac{(x+y)^2}{x-y}=5.$$

$$\frac{(x-y)^4}{(x+y)^2}+(x-y)^2+(x+y)^2+\frac{(x+y)^4}{(x-y)^2}=85;$$

albo, po uproszczeniu,

$$(1) \qquad 4x(x^2+y^2)=5(x^2-y^2),$$

$$(2) \qquad 4(x^2+y^2)(x^4+6x^2y^2+y^4)=85(x^2-y^2)^2.$$

Rugując $x^2 - y^2$, otrzymujemy równanie dwukwadratowe i jednorodne

$$63x^4 + 38x^2y^2 - 5y^4 = 0,$$

z którego wywodzimy

$$y^2 = 9x^2.$$

Ta jedyna wartość dodatna dla y^2, podstawiona w równaniu (1), daje

$$x = -1; \quad \text{zatem} \quad y = \pm 3.$$

Znajdujemy więc dwa rozwiązania

$$q = \begin{cases} -\frac{1}{2}, \\ -2, \end{cases} \qquad a = \begin{cases} 8 \\ -1, \end{cases}$$

zgodne z otrzymanemi powyżej.

ĆWICZENIA.

I. Mówią że grę szachów wynalazł matematyk Sessa, i nauczył w nią grać *Szacha perskiego*. Ten monarcha tak był uradowany iż ofiarował matematykowi w nagrodę co zechce, dodając że gotów nawet dać mu połowę państwa. Matematyk prosi tylko żeby mu dano jedno ziarko pszenicy za pierwszą przegródkę szachownicy, dwa ziarka za drugą, cztery za trzecią, osiem za czwartą, i tak dalej; podwajając ciągle aż do ostatniej 64ej przegródki. Ileż powinienby dostać ziarek przenicy?

Odpowiedź : Ilość żądanych ziarek jest summą postępni geometrycznej

$$\div\!\div 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : \ldots : 2^{64},$$

Wykonawszy rachunek, znajdujemy że liczba ziarek jest

18 446 744 073 709 551 615.

Aby mieć wyobrażenie tak ogromnej liczby, postarano się dowiedzieć ile jest ziarek w korcu pszenicy, ile trzeba korcy na zasiew jednego morga, i ile zbiór wydaje. Otoż, wyrachowano że, gdyby cała powierzchnia ziemi, licząc góry i morza, stała się polem ornem, trzebaby *osiem* razy większej powierzchni, żeby zasiana mogła wydać ilość ziarek którą powyższa 20to cyfrowa liczba wyraża. Wszystkie dotąd znane bogactwa świata nie wystarczyłyby na zapłacenie pszenicy matematyka Sessy!

II. Zadanie Jakóba Bernoulli. Jeśli dwa pierwsze wyrazy postępni geometrycznej są dodatne i równe dwom pierwszym wyrazom postępni arytmetycznej, każdy inny wyraz pierwszej postępni jest większy od wyrazu odpowiedającego drugiej.

Odpowiedź: Dość tego dowieśdź na dwóch postępniach

$$\div\!\div\, 1 : (1\pm\alpha) : (1\pm\alpha)^2 : (1\pm\alpha)^3 \ldots\ldots (1\pm\alpha)^n \ldots$$

$$: 1 \,.\, (1\pm\alpha) \,.\, (1\pm2\alpha) \,.\, (1\pm3\alpha) \ldots\ldots (1\pm n\alpha) \ldots$$

Owoż, z założenia $1\pm\alpha>0$, więc $(1\pm\alpha)^n>1\pm n\alpha$; etc.

III. Jaki powinien być pierwszy wyraz postępni arytmetycznej, żeby między summą i liczbą jej wyrazów była równość $S=n^k$; k jest liczbą całkowitą dodatną.

Odpowiedź: $a=n^{k-1}-\frac{1}{2}(n-1)r$.

IV. Nazywając a i c dwa wyrazy równo oddalone od trzeciego b, dowieśdź że w postępni geometrycznej jest $b^2-ac=0$, a zaś w postępni arytmetycznej b^2-ac jest kwadratem doskonałym.

V. Znaleźć postępnię różnicową złożoną z pięciu wyrazów, których wiadoma jest summa s i summa s_2 ich kwadratów.

Odpowiedź: Jeśli oznaczono wyraz środkowy przez x i stosunek przez y, równania zagadnienia będą

$$5x=S, \quad 5x^2+10y^2=S_2; \text{ etc.}$$

VI. Znaleźć postępnię różnicową złożoną z czterech wyrazów, znając stosunek r i wieloczyn p jej wyrazów.

Odpowiedź: Nazywając x i y wyrazy średnie, równania zagadnienia są $y-x=r$, $r^2y^2-2x^2xy=p$, zkąd

$$x=\frac{-r\pm\sqrt{5r^2\pm4\sqrt{r^4+p}}}{2}, \text{ etc. ogólnie cztery rozwiązania.}$$

VII. Znaleźć postępnię ilorazową w której summa wyrazów jest 31, summa ich kwadratów 341, i summa ich sześcianów 4681.

Odpowiedź: $\div\!\div 1:2:4:8:16$.

VIII. Znaleźć postępnię ilorazową złożoną z czterech wyrazów, których summa jest 40, i summa ich kwadratów 3280.

Odpowiedź: $\div\!\div -2:6:-18:54$.

IX. Znaleźć postępnię ilorazową w której różnica między summą drugiego i czwartego wyrazu a summą pierwszego i trzeciego jest 15, do tego summa kwadratów wszystkich czterech wyrazów wynosi 765.

Odpowiedź: Równania zagadnienia są $a(q^2+1)(q-1)=15$, $\frac{a^2(q^8-1)}{q^2-1}=765$; zkąd rozwiązanie $\div\!\div 3:6:12:24$.

X. Między 3 i 12288 wstawić 11 średnich geometrycznych.

Odpowiedź: $q=2$; etc.

XI. Znaleźć trzy pierwsze wyrazy postępni ilorazowej, wiedząc że ich summa jest 195, a różnica między ostatnim i pierwszym równa się liczbie 120.

Odpowiedź: 15 : 45 : 135 i ∻ 125 — 175 : 245.

XII. Znaleźć postępnię ilorazową mającą sześć wyrazów, w której summa dwóch wyrazów środkowych jest 12, a summa skrajnych czyni 96.

Odpowiedź: Biorąc za niewiadome pierwszy wyraz środkowy x i stosunek q, znajduje się łatwo postępnię ∻ $-3 : 6 : -12 : 24 : -48 : 96$, i drugą jeszcze mającą pierwszy wyraz $a=\frac{3}{22}(341-59\sqrt{33})$, stosunk $q=\frac{7+\sqrt{33}}{4}$ i ostatni wyraz $l=\frac{3}{22}(341+59\sqrt{33})$.

XIII. Znaleźć postępnię ilorazową złożoną z sześciu wyrazów, wiedząc że summa skrajnych jest 99, a summa wszystkich średnich wynosi 90.

Odpowiedź: Równania zagadnienia są $a(q^5+1)=99$, $aq.\frac{q^4-1}{q-1}=90$; zkąd ∻ 3 : 6 : 12 : 24 : 48 : 96 odrzucajac rozwiązania $q=-1$, i dwa urojone.

XIV. Znaleźć postępnię ilorazową mającą $2n$ wyrazów, w której summa wyrazów rzędu parzystego jest A, i summa wyrazów rzędu nieparzystego B.

Odpowiedź: $q=\frac{A}{B}$, $a=\frac{B^2}{A^2+B^2}$; etc.

XV. Znaleźć postępnię ilorazową złożoną z pięciu wyrazów, znając ich summę A, i summę B wyrazów rzędu parzystego.

Odpowiedź: Nazywając x wyraz środkowy i q stosunek, równania zagadnienia będą:

$$x\left(q^2+\frac{1}{q^2}+1+q+\frac{1}{q}\right)=A,\quad x\left(q+\frac{1}{q}\right)=B;$$

$$\text{zkąd}\quad q^2+\frac{1}{q^2}+q+\frac{1}{q}+1=\frac{A}{B}\left(q+\frac{1}{q}\right);\ \text{etc.}$$

48

XVI. Znaleźć postępnię ilorazową złożoną z czterech wyrazów, znając przewyżkę A summy skrajnych nad summą średnich, i przewyżkę B summy kwadratów wyrazów skrajnych nad summą kwadratów wyrazów średnich.

Odpowiedź : $\frac{(q-1)^2}{q^2+1}=\frac{A^2}{B}$; etc.

XVII. Znaleźć postępnię ilorazową złożoną z czterech wyrazów których summa jest A, a różnica między summą kwadratów wyrazów skrajnych i summą kwadratów wyrazów średnich jest B.

Odpowiedź : $\frac{q^2+1}{(q-1)^2}=\frac{A^2}{B}$, etc.

XVIII. Znaleźć summę n ułamków

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\frac{5}{32}+\dots\frac{n}{2^n}$$

których liczniki tworzą postępnię różnicową, a mianowniki postępnię ilorazową.

Odpowiedź : Nazywając S tę summę, będzie

$$2S-S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n}=2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)-\frac{n}{2^n}$$

albo

$$S=2-\frac{2+n}{2^n}.$$

Granicą summy S jest 2 gdy $n=\infty$.

XIX. Dowieśdź że w postępni geometrycznej mającej sześć wyrazów, różnica wyrazów skrajnych jest większa od pięć razy różnicy wyrazów środkowych.

Odpowiedź : $a(q^5-1)>5aq^2(q-1)$ jest to samo co

$$(q^2-1)^2+q(q-1)^2>0.$$

XX. Ciąg liczb nieparzystych podzielono na grupy następujące

$$1 \mid 3, 5 \mid 7, 9, 11 \mid 13, 15, 17, 19 \mid \ldots$$

takie że pierwsza grupa zawiera jedną liczbę, druga dwie, trzecia trzy,... n^ta^ zawiera n. Dowieśdź że summa wyrazów każdej grupy jest sześcianem ich liczby.

Odpowiedź : Znaleźć pierwszy wyraz n^{tej} grupy i zastosować formułę (3) n^ro^ 398.

XXI. Kupiec koni, zapytany o cenę konia, odpowieda : podkowy mojego konia mają 20 hufnali, zapłaćcie $\frac{1}{2}$ centyma za pierwszy hufnal, 1 centym za drugi, 2 centymy za trzeci, 4 centymy za czwarty, i tak dalej podwajając; a dam wam konia ze wspaniałym ubiorem wartającym 1000 fr. Za ile sprzedawał konia?

Odpowiedź : Za 5242 fr. 67 cent. $\frac{1}{2}$.

XXII. W postępni ilorazowej mającej nieparzystą liczbę wyrazów, summa kwadratów wyrazów jest równa summie tych wyrazów, pomnożonej przez przewyżkę summy wyrazów rzędu nieparzystego nad summą wyrazów rzędu parzystego.

Odpowiedź : Tworząc wskazane summy sprawdza się łatwo równość.

XXIII. Znaleźć summę wieloczynów z mnożenia n pierwszych wyrazów branych po dwa, postępni geometrycznej

$$\div\!\div a : aq : aq^2 : aq^3 : \ldots aq^{n-1}.$$

Odpowiedź : $\dfrac{a^2q(q^{n-1}-1)(q^n-1)}{(q^2-1)(q-1)}$.

XXIV. Z dwóch postępni, arytmetycznej i geometrycznej, mających te same wyrązy skrajne i równą liczbę wyrazów, w której summa jest większa?

Odpowiedź : W postępni arytmetycznej. Dość tylko porównać summy wyrazów równo oddalonych od skrajnych.

XXV. Łącząc środki czworoboku utworzono równoległobok, łącząc potem środki tego ostatniego utworzono nowy równoległobok; i tak dalej. Dowieśdź że summa powierzchni wszystkich równoległoboków jest dwa razy większa od powierzchni czworoboku.

Odpowiedź : Powierzchnie równoległoboków tworzą postępnię $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16} \ldots$ etc.

XXVI. Jakie są postępnie różnicowe, w których summa dwóch którychkolwiek wyrazów jest jednym z ich wyrazów?

Odpowiedź : Te których pierwszy wyraz jest wielownikiem stosunku.

XXVII. Jakie są postępnie ilorazowe, w których wieloczyn dwóch wyrazów jest jednym z ich wyrazów?

Odpowiedź : Te których pierwszy wyraz jest potęgą stosunku.

TEORYA ELEMENTARNA LOGARYTMÓW

419. Gdy są uważane dwie postępnie, jedna geometryczna zaczynająca się od jedności i mająca stosunek dodatny, druga arytmetyczna zaczynająca się od zera, jako

$$(A) \qquad \div\!\div 1 : q : q^2 : q^3 : \ldots q^n : \ldots$$

$$(B) \qquad \div 0 . r . 2r : 3r \ldots nr \ldots$$

wyrazy postępni arytmetycznej nazywają się *logarytmami* odpowiedających wyrazów postępni geometrycznej. I tak, 1 ma 0 za logarytm, logarytmem liczby q jest r; ogólnie logarytm liczby q^n jest równy nr; co się wyraża pisząc $\log q^n = nr$.

Takie dwie postępnie, stanowią *układ logarytmów*.

Każde dwie postępnie geometryczna i arytmetyczna, byle tylko pierwsza zawierała wyraz 1 a druga wyraz 0 i te wyrazy sobie odpowiadały, stanowią układ logarytmów. Istnieje zatem nieskończona liczba układów logarytmów. Jedna liczba ma tylko jeden logarytm w układzie do którego należy; ale, mogąc należeć do nieskończonej liczby układów, może mieć nieskończoną liczbę logarytmów. I nawzajem; ztąd wynika że logarytm liczby osobnej zostaje niewyznaczony, dopóki nie wyrażono szczególnego układu logarytmów. We wszystkich układach logarytmem jedności jest zero; bo to jest warunkiem istnienia logarytmów określonych jako wyżej.

420. Powyższe określenie logarytmów stosuje się tylko do liczb które tworzą postępnię geometryczną, ale można je łatwo rozciągnąć do wszystkich liczb. Jakoż, przypuśćmy że między każde dwa wyrazy postępni geometrycznej (A) wstawiono $m-1$ średnich geometrycznych, i między każde dwa wyrazy postępni arytmetycznej (B) wstawiono tę samą liczbę $m-1$

średnich arytmetycznych; tak otrzymane dwie nowe postępnie będą zawierały wszystkie wyrazy dwóch postępni pierwotnych, które nie przestaną sobie odpowiedać. Więc, zastępując takim sposobem dwie dawne postępnie przez dwie nowe, nie tylko zachowujemy tym samym liczbom te same logarytmy, ale jeszcze określamy logarytmy tylu innych liczb ilu zechcemy, które nie figurowały w postępni (A). Owoż, wiemy że można wstawić w dwóch postępniach, geometrycznej i arytmetycznej, liczbę średnich dość wielką, żeby wolno było uważać wyrazy obydwóch postępni jako rosnące stopniami niższemi od wszelkiej wartości naznaczonej; więc, czyniąc $\sqrt[m]{q} = 1 + \alpha$ i $\frac{r}{m} = \beta$, w założeniu że dwie pierwotne postępnie są rosnące, możemy je zastąpić przez dwie nowe

$$(A') \quad \dot{\div}\, 1 : (1+\alpha) : (1+\alpha)^2 : (1+\alpha)^3 : \ldots (1+\alpha)^n \ldots$$

$$(B') \quad \div\, 0. \quad \beta. \quad 2\beta. \quad 3\beta \ldots \quad n\beta \ldots$$

w których α i β oznaczają dwie liczby dodatne tak małe jak się podoba.

To ustaliwszy, nietrudno już określić logarytm wszelkiej liczby N dodatnej większej od 1.

Jeśli liczba N znajduje się w postępni geometrycznej (A'), gdy jest na przykład $N = (1+\alpha)^n$, jej logarytmem będzie odpowiedający wyraz $n\beta$ postępni arytmetycznej (B').

Jeśli liczba N nie może być wprowadzona do postępni geometrycznej (A), to nie będzie się znajdowała w postępni (A'), ale będzie zawarta między dwoma wyrazami po sobie idącemi, na przykład między $(1+\alpha)^n$ i $(1+\alpha)^{n+1}$; bo, wyrazy postępni (A'), mającej stosunek większy od 1, rosną ponad wszelką wielkość (nr[o] 404). Biorąc za liczbę N jeden z wyrazów które ją zawierają, popełnia się błąd mniejszy od ich różnicy $(1+\alpha)^n\alpha < N\left(\sqrt[m]{q} - 1\right)$, która może stać się tak małą jak się podoba. A ponieważ liczba N jest spólną granicą wyrazów $(1+\alpha)^n$ i $(1+\alpha)^{n+1}$, jej logarytm jest, z *określenia,* spólną granicą logarytmów $n\beta$ i $(n+1)\beta$ tych dwóch wyrazów; więc biorąc $n\beta$ albo $(n+1)\beta$ za logN, otrzymujemy wartość tego logarytmu na mniej niż $\beta=\frac{r}{m}$.

421. Dotąd określiliśmy tylko logarytmy liczb większych od jedności; żeby mieć logarytmy liczb mniejszych od jedności, wyobrażamy sobie obie postępnie (A′) i (B′) przedłużone ku lewej stronie; co daje

$$(1)\qquad \div\frac{1}{(1+\alpha)^3}:\frac{1}{(1+\alpha)^2}:\frac{1}{1+\alpha}:1:(1+\alpha):(1+\alpha)^2:(1+\alpha)^3:\ldots$$

$$(2)\qquad \div-3\beta.\quad -2\beta.\ -\beta.\ \ 0.\quad \beta.\quad 2\beta.\quad 3\beta\ldots$$

Widzimy teraz że liczby $1+\alpha$, $(1+\alpha)^2$, $(1+\alpha)^3$, ... $(1+\alpha)^n$..., większe od jedności, mają logarytmu dodatne β, 2β, 3β...$n\beta$; a przeciwnie liczby $\frac{1}{1+\alpha}$, $\frac{1}{(1+\alpha)^2}$, $\frac{1}{(1+\alpha)^3}\ldots$ $\frac{1}{(1+\alpha)^n}\ldots$ dodatne i mniejsze od jedności, mają logarytmy odjemne $-\beta$, -2β, -3β; ... $-n\beta$.

Więc, jeśli liczba N, dodatna i mniejsza od jedności, wpada między dwa po sobie idące wyrazy $(1+\alpha)^{-n}$, $(1+\alpha)^{-n-1}$, jej logarytm jest, z *określenia,* spólną granicą odpowiedających wyrazów $-n\beta$, $-(n+1)\beta$; tak że, biorąc $(1+\alpha)^{-n}$ za N, otrzymuje się $\log N=-n\beta$ na mniej niż $\frac{r}{m}$.

W obydwóch postępniach (1) i (2) część rosnąca powiększa się aż do nieskończoności; ale w geometrycznej część malejąca dąży nieograniczenie do zera, gdy tymczasem w arytmetycznej powiększa się do nieskończoności odjemnej. Więc $\log\infty=+\infty$ i $\log 0=-\infty$.

Rzeczy miałyby się przeciwnie, gdyby jedna postępnia była rosnąca a druga malejąca; wtedy logarytmy liczb większych od jedności byłyby odjemne, a logarytmy liczb mniejszych od jedności dodatne.

Wynika z wszystkiego co poprzedza że liczby odjemne nie mają logarytmów.

422. Żeby określenie logarytmów było zupełne, trzeba dowieśdź że, *jeśli można wprowadzić jedną liczbę* N *dwoma sposobami do postępni geometrycznej* (A), *wyznaczy się dla niej, dwoma sposobami, ten sam logarytm.*

Albo jeszcze ogólniej, *jeśli wyrachowano jedne logarytmy wstawiajac pewną liczbę średnich między każde dwa wyrazy po sobie idące dwóch pierwotnych postępni, a wyrachowano drugie wstawiając inną liczbę średnich, te rozmaite logarytmy należą do jednego układu.*

Oba zadania mają właśnie miejsce; ponieważ wartości znalezione w obydwóch przypadkach dla logarytmu liczby N, są te same które się otrzymuje wstawiając odrazu $mm'-1$ średnich między każde dwa wyrazy obydwóch postępni (n[ra] 395 i 407).

WŁASNOŚCI LOGARYTMÓW.

423. *Logarytm wieloczynu jest równy summie logarytmów czynników.*

Uważajmy najpierwej wieloczyn dwóch czynników. Twierdzenie jest widoczne jeśli oba czynniki znajdują się w postępni (1). Jakoż, niech będą

$$(1+\alpha)^p \quad \text{i} \quad (1+\alpha)^q$$

te dwa czynniki; ponieważ postępnia geometryczna (1) zawiera wszystkie potęgi całkowite stosunku $1+\alpha$, a postępnia arytmetyczna (2) obejmuje wszystkie wielowniki stosunku β, i wykładniki potęg są spółczynnikami odpowiedających wielowników, wieloczyn $(1+\alpha)^{p+q}$ uważanych czynników mieści się w postępni geometrycznej (2), i jego logarytm jest

$$(p+q)\beta,$$

to jest równa się summie

$$p\beta+q\beta$$

logarytmów dwóch czynników.

W dowodzeniu wzięliśmy oba logarytmy dodatne; ale rozumowanie jest ogólne, i stosuje się gdy jeden z dwoch logarytmów jest odjemny, albo obydwa. I tak, biorąc na przykład dwa czynniki

$$(1+\alpha)^p \quad \text{i} \quad (1+\alpha)^{-q}$$

widzimy że ich wieloczyn $(1+\alpha)^{p-q}$ ma logarytm

$$(p-q)\beta,$$

który się równa summie

$$p\beta+(-q\beta)$$

logarytmów jego czynników.

Jeśli czynniki wieloczynu nie mogą się znajdować w postępni (2), dowodzenie się modyfikuje, ale twierdzenie jest ogólne. Aby je okazać, uważajmy dwie jakiekolwiek liczby dodatne A i B, nie należące obie razem do żadnej postępni geometrycznej. Wiemy że, mając daną postępnię geometryczną jako (2), można zawsze wstawić dość średnich, żeby jedna z nich różniła się od A i druga od B tak mało jak się podoba. Zatem, nazywając A' i B' te dwie średnie, będzie

$$\log(A'B') = \log A' + \log B'.$$

Owoż, ta równość istnieje ciągle jakkolwiek blisko log(A'B') dosięga do granicy log(AB), i snmma log A'+log B' dochodzi do granicy $\log A + \log B$; więc te granice są równe, i mamy w całej ogólności

$$\log(AB) = \log A + \log B.$$

Uważajmy teraz wieloczyn kilku czynników, na przykład czterech A, B, C, D; będziemy mieli oczywiście

$$\log(ABCD) = \log(ABC.D) = \log(ABC) + \log D,$$
$$\log(ABC) = \log(AB.C) = \log(AB) + \log C$$
$$\log(AB) = \log A + \log B;$$

więc, dodając stronami, otrzymujemy

$$\log(ABCD) = \log A + \log B + \log C + \log D.$$

424. *Logarytm ilorazu jest równy logarytmowi dzielnej mniej logarytmem dzielnika.*

Niech będzie iloraz $\frac{A}{B}$; oznaczając jego wartość przez Q, mamy

$$A = BQ;$$

zkąd, biorąc logarytmy, otrzymujemy

$$\log A = \log B + \log Q, \quad \text{albo} \quad \log Q = \log A - \log B.$$

Więc

$$\log\frac{A}{B} = \log A - \log B.$$

Uwaga. Jeśli $\frac{A}{B}$ jest ułamkiem mniejszym od 1, jego logarytm jest odjemny.

425. *Logarytm potęgi liczby jest równy logarytmowi tej liczby pomnożonemu przez wykładnik potęgi.*

Ponieważ potęga m^{ta} liczby A jest wieloczynem m czynników równych, mamy

$$A^m = A.A.A\ldots,$$

zkąd

$$\log A^m = \log A + \log A + \log A + \ldots;$$

więc

$$\log A^m = m \log A.$$

426. *Logarytm pierwiastku liczby jest równy logarytmowi tej liczby podzielonemu przez wskaz pierwiastku.*

Niech będzie pierwiastek n^{ty} oznaczony przez $\sqrt[n]{A}$. Określenie tego pierwiastnika daje tosamość

$$\left(\sqrt[n]{A}\right)^n = A;$$

zkąd, biorąc logarytm potęgi n^{tej} pierwiastnika, otrzymujemy

$$n \log \sqrt[n]{A} = \log A.$$

Więc

$$\log \sqrt[n]{A} = \frac{\log A}{n}.$$

Uwaga. To twierdzenie jest szczególnym przypadkiem poprzedzającego zogólnionego.

Jakoż, 1° Jeśli $m = \frac{p}{q}$, będzie tosamość

$$\left(A^{\frac{p}{q}}\right)^q = A^p,$$

zkąd, biorąc logarytmy potęg, wynika

$$q \log \left(A^{\frac{p}{q}}\right) = p \log A;$$

zatem

$$\log A^{\frac{p}{q}} = \frac{p}{q} \log A.$$

2° Jeśli $m=\frac{1}{n}$, będzie

$$\left(A^{\frac{1}{n}}\right)^n=A,\quad \text{zkąd}\quad n\log\left(A^{\frac{1}{n}}\right)=\log A;$$

zatem

$$\log A^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}\log A\,.$$

3° Jeśli nakoniec $m=-n$, będzie

$$A^{-n}=\frac{1}{A^n};$$

zkąd

$$\log(A^{-n})=\log\left(\frac{1}{A^n}\right)=\log 1-n\log A.$$

zatem

$$\log.A^{-n}=-n\log A.$$

Więc, jakikolwiek jest wykładnik m, całkowity albo ułamkowy, dodatny albo odjemny, mamy zawsze

$$\log.A^m=m\log A.$$

427. Uwaga. Powyższe twierdzenia pokazują że, gdyby miano tablice logarytmów, możnaby znacznie uprościć liczebne rachunki; mnożenie, dzielenie, podnoszenie do potęg, i wyciąganie pierwiastków jakiegokolwiek wskazu, zamieniłyby się na dodawanie, odciąganie, mnożenie i dzielenie logarytmów. I tak, chcąc na przykład wyrachować $\sqrt[n]{A}$, dość byłoby wziąć w tablicach $\log A$ i podzielić go przez n; mianoby $\log\sqrt[n]{A}$. Więc, szukając w tablicach liczby odpowiedającej temu logarytmowi, znalezionoby pierwiastek n^{ty} liczby A.

RÓŻNE UKŁADY LOGARYTMÓW.

428. Ponieważ we wszystkich układach logarytmów jedność ma za logarytm zero, układ jest określony gdy jest w nim dany logarytm jednej liczby. Zwykle wiadoma jest liczba mająca za logarytm jedność, i tę liczbę nazwano *podstawą* układu. Oznczając ją przez a, mamy dwa wyrazy 1 i a postępni geometrycznej, i odpowiedające im wyrazy 0 i 1 postępni arytmetycznej; więc te dwie postępnie są wyznaczone, i temsamem jest wyznaczony układ logarytmów.

429. *W dwóch układach stosunek logarytmów jednej liczby jest stateczny.*

Niech będzie postępnia geometryczna

$$\ldots(1+\alpha)^{-3},(1+\alpha)^{-2},(1+\alpha)^{-1},1,(1+\alpha),(1+\alpha)^2,(1+\alpha)^3,\ldots(1+\alpha)^n,\ldots$$

i dwie postępnie arytmetyczne

$$\ldots-3\beta,\ -2\beta,\ -\beta,\ 0,\ \beta,\ 2\beta,\ 3\beta,\ldots\ n\beta,\ldots$$

$$\ldots-3\beta',\ -2\beta',\ -\beta',\ 0,\ \beta',\ 2\beta',\ 3\beta',\ldots\ n\beta',\ldots$$

które z pierwszą stanowią dwa układy logarytmów. Oznaczamy przez $\log A$ logarytm liczby A wzięty w pierwszym układzie, przez LA jej logarytm w drugim układzie.

Jeśli liczba A znajduje się w postępni geometrycznej, i jest na przykład

$$A=(1+\alpha)^n,$$

jej logarytmy wzięte w dwóch układach wyrażą się przez

$$\log A=n\beta,\qquad LA=n\beta';$$

będzie zatem

$$\frac{LA}{\log A}=\frac{\beta'}{\beta}.$$

Stosunek stateczny.

Ale, jeśli liczba A nie może się znajdować w postępni geometrycznej pierwotnej; wtedy, wstawiając $m-1$ średnich, otrzymuje się nową postępnię w której dwa po sobie idące wyrazy, na przykład $(1+\alpha)^{\frac{n}{m}}$ i $(1+\alpha)^{\frac{n+1}{m}}$ zawierają liczbę A, a zaś odpowiedające im logorytmy $\frac{n}{m}\beta$ i $\frac{n+1}{m}\beta$, $\frac{n}{m}\beta'$ i $\frac{n+1}{m}\beta'$; zawierają, log A. Będzie więc

$$\frac{n}{m} < \frac{\log A}{\beta} < \frac{n+1}{m},$$

$$\frac{n}{m} < \frac{LA}{\beta'} < \frac{n+1}{m}.$$

Owoż, stosunki $\frac{LA}{\beta'}$ i $\frac{\log A}{\beta}$ mieszczą się oba między temi samemi granicami; więc, jeśli nie są równe, ich różnica musi być mniejsza od różnicy $\frac{1}{m}$ tych granic. Co niemożebne; bo różnica stosunków niezależna od m zostaje stateczna, a różnica granic maleje dążąc do zera, gdy m rośnie nieskończenie. Jest więc konieczne równanie

$$(1)\qquad \frac{LA}{\beta'} = \frac{\log A}{\beta} \quad \text{albo} \quad \frac{LA}{\log A} = \frac{\beta'}{\beta}$$

które dowodzi twierdzenia.

430. Wniosek. Uważając dwie liczby A i B, mamy

$$(2)\qquad \frac{LA}{\log A} = \frac{\beta'}{\beta} = \frac{\log B}{LB}, \quad \text{albo} \quad \frac{LA}{LB} = \frac{\log A}{\log B}.$$

Ztąd twierdzenie: *Stosunek logarytmów dwóch liczb jest ten sam we wszystkich układach.*

431. Między podstawami dwóch układów jest związek. Jakoż, nazywając b podstawę drugiego układu, i zastępując A przez a, B przez b w równaniu (2), otrzymujemy

$$(3) \qquad \mathrm{L}a = \frac{1}{\log b}, \quad \text{albo} \quad \mathrm{L}a . \log b = 1 .$$

Jeśli w równaniu (1) położymy podstawę b zamiast liczby A, będzie

$$\frac{\beta'}{\beta} = \frac{1}{\log b};$$

przez podstawienie tej wartości równanie (1) daje formułę

$$(4) \qquad \mathrm{LA} = \frac{1}{\log b} \log \mathrm{A},$$

która pokazuje że, aby przekształcić logarytm układu z podstawą a na logarytm układu z podstawą b, trzeba go tylko pomnożyć przez liczbę $\frac{1}{\log b}$. Ten mnożnik stateczny nazywa się *modułem* drugiego układu względem pierwszego, i oznacza się zwykle literą M, to jest

$$\mathrm{M} = \frac{1}{\log b} = \mathrm{L}a.$$

Formuła (4) służy jeszcze do wyznaczenia podstawy b układu, gdy jest wiadomy jeden z jego logarytmów LA. Ten rachunek będzie później wykonany za pomocą tablic.

LOGARYTMY POSPOLITE.

432. W rachunkach liczebnych używa się wyłącznie układu logarytmów mającego podstawę 10, który jest określony przez dwie postępnie

$$\dot{\div}\, 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : \ldots$$

$$\div\, 0 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \ldots.$$

i nazywa się *układem pospolitym*. W tym układzie potęgi liczby 10 mają swoje wykładniki za logarytmy. I tak,

$$\log 10^m = m\log 10 = m,$$

jakikolwiek jest wykładnik m, całkowity albo ułamkowy, dodatny albo odjemny.

Te potęgi są jedynemi liczbami mającemi logarytmy spółmierne. Wszystkie inne liczby, nie mogąc być wprowadzone do postępni geometrycznej dziesiętnej (nro 408), mają logarytmy niespółmierne.

433. Cecha. W układzie którego podstawą jest 10, logarytmy potęg 10^1, 10^2, 10^3, 10^4... są jedynemi liczbami całkowitemi 1, 2, 3, 4,...; logarytmy wszystkich innych liczb większych od 1, składają się z części całkowitej nazwanej *cechą* (charakterystyką), i z części dziesiętnej, zwanej czasem *mantissą*. I tak, logarytmy liczb od 1 do 10, będąc zawarte między 0 i 1, mają cechę 0; logarytmy liczb od 10 do 100 mają cechę 1; logarytmy liczb od 100 do 1000 mają cechę 2; i tak dalej. Ztąd wynika że w układzie pospolitym *cecha logarytmu liczby większej od* 1, *ma tyle jedności mniej jedną ile jest cyfer w całkowitej części tej liczby.*

Ogólnie, liczba której część całkowita ma n cyfer mieści się między 10^{n-1} i 10^n; więc jej logarytm, zawarty między $n-1$ i n, ma $n-1$ cyfer w swojej części całkowitej.

Użyteczność układu pospolitego logarytmów leży szczególniej w następującej cennej własności;

Żeby pomnożyć albo podzielić liczbę przez potęgę nтą 10ciu, *dość tylko do cechy logarytmu tej liczby dodać albo od niej odjąć* n *jedności.*

Jakoż,

$$\log(A.10^n) = \log A + \log.10^n = \log A + n,$$

$$\log.\frac{A}{10^n} = \log A - \log 10^n = \log A - n.$$

Więc, gdy dwie liczby dziesiętne składają się z tych samych cyfer i różnią się tylko miejscem przecinka, ich logarytmy mają tę samą część dziesiętną i różnią się tylko cechą. I nawzajem.

TABLICE LOGARYTMÓW POSPOLITYCH.

434. Trzeba tylko wyrachować logarytmy liczb całkowitych rozciągających się do pewnego kresu. Ponieważ te logarytmy są niespółmierne, obliczono je z przybliżeniem; przestając na liczbie cyfer dziesiętnych, potrzebnej do zwyczajnych zastosowań.

Gdyby wstawiono wielką liczbę średnich w postępni geometrycznej $\div\div 1 : 10 : 100 : 1000 : \ldots$ i równą liczbę średnich w postępni arytmetycznej $\div 1.2.3.4\ldots.$ otrzymanoby nowe wyrazy postępni geometrycznej mało różne od liczb całkowitych 2, 3, 4, 5... ich logarytmy byłyby wartościami logarytmów liczb 2, 3, 4, 5... tem bardziej przybliżonemi im więcej użyto średnich. Ale taki rachunek jest niepraktyczny.

Ułożenie pierwszej tablicy logarytmów było bardzo pracowite. Wyznaczano po jednemu logarytmy liczb pierwszych, obliczając średnie geometryczne które je zawierają, i średnie arytmetyczne między które wpadają ich logarytmy. Jedynie dla pokazania jak są mozolne te rachunki, będziemy szukali logarytmu liczby 7.

Ponieważ 7 mieści się między wyrazami 1 i 10 postępni geometrycznej, log7 wpada między wyrazy 0 i 1 postępni arytmetycznej. Aby mieć wartość więcej przybliżoną do log7, wstawiamy średnię geometryczną między 1 i 10, i średnię arytmetyczną między 0 i 1. Oznaczając pierwszą przez A_1, znajdujemy

$$A_1=\sqrt{1.10}=3,162277\ldots,$$

$$\log A_1=\frac{0+1}{2}=0,5.$$

Teraz 7 wpada między wyrazy 3,162277 i 10 postępni geometrycznej, a log 7 między odpowiedające wyrazy 0,5 i 1 postępni arytmetycznej. Szukając średniej geometrycznej między 3,162277 i 10, a średniej arytmetycznej między 0,5 i 1, znajdujemy

$$A_2 = \sqrt{10 A_1} = \sqrt{31,62277} = 5,623412\ldots$$

$$\log A_2 = \frac{0,5+1}{2} = 0,75.$$

Poczem, widząc że 7 wpada między 5,623412 i 10, szukamy znowu dwóch średnich, geometrycznej i arytmetycznej, i otrzymujemy

$$A_3 = \sqrt{10 A_2} = \sqrt{56,23412} = 7,498941$$

$$\log A_3 = \frac{1+0,75}{2} = 0,875.$$

Wykonywając rachunek za pomocą działań skróconych będzie

$$\begin{array}{ll}
A_4 = \sqrt{A_3\, A_2} = 6,493815\ldots & \log A_4 = 0,8125. \\
A_5 = \sqrt{A_4\, A_3} = 6,978309\ldots & \log A_5 = 0,84375. \\
A_6 = \sqrt{A_5\, A_3} = 7,233941\ldots & \log A_6 = 0,859375. \\
A_7 = \sqrt{A_6\, A_5} = 7,104975\ldots & \log A_7 = 0,8515625. \\
A_8 = \sqrt{A_7\, A_5} = 7,041356\ldots & \log A_8 = 0,8476562\ldots \\
A_9 = \sqrt{A_8\, A_5} = 7,009760\ldots & \log A_9 = 0,8457031\ldots \\
A_{10} = \sqrt{A_9\, A_5} = 6,994016\ldots & \log A_{10} = 0,8447265\ldots \\
A_{11} = \sqrt{A_{10} A_9} = 7,001883\ldots & \log A_{11} = 0,8452148\ldots \\
A_{12} = \sqrt{A_{11} A_{10}} = 6,997948\ldots & \log A_{12} = 0,8449707\ldots
\end{array}$$

Doszedłszy do tej wartości, można w dalszem poszukiwaniu zastąpić średnię geometryczną przez średnię arytmetyczną; bo, na mocy wiadomej formuły, błąd jest mniejszy od

$$\frac{(A_{11}-A_{12})^2}{8A_{12}} < \frac{(0,004)^2}{55} < \frac{1}{3.10^6}.$$

Ale, mimo tego uproszczenia, rachunek jest zmudny i długi.

Mamy następnie

$$\begin{array}{ll}
A_{13}=6,999915\ldots & \log A_{13}=0,8450927\ldots \\
A_{14}=7,000899\ldots & \log A_{14}=0,8451537\ldots \\
A_{15}=7,000407\ldots & \log A_{15}=0,8451232\ldots \\
A_{16}=7,000161\ldots & \log A_{16}=0,8451079\ldots \\
A_{17}=7,000038\ldots & \log A_{17}=0,8451003\ldots \\
A_{18}=6,999976\ldots & \log A_{18}=0,8450965\ldots \\
A_{19}=7,000007\ldots & \log A_{19}=0,8450984\ldots \\
A_{20}=6,999996\ldots & \log A_{20}=0,8450974\ldots
\end{array}$$

Biorąc $\log 7=\frac{1}{2}\left(\log A_{19}+\log A_{20}\right)=0,8450979$

otrzymujemy wartość przybliżoną na mniej niż $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^6}$.

Takim sposobem znaleziono pierwsze logarytmy. Później wyznaczono je daleko łatwiej, za pomocą *szeregów* o których będzie mowa w algebrze wyższej. Neper, baron szkocki, wynalazca logarytmów, których ogłosił teoryę w dziele pod tytułem *Mirifici logarythmorum canonis descriptio*, wyrachował najpierwej logarytmy na podstawie niespółmiernej

$$e=2,718281828459045\ldots.$$

Briggs, professor w Oxford, na usilne zalecenie Neper'a wypracował i, pod tytułem *Arithmetica logarithmica*, wydał w 1624 r. pierwsze tablice logarytmów o podstawie 10, z czternastoma dziesiętnemi, dla liczb od 1 do 20000 i od 90000 do 100000. Spółczesny Vlacq, zapełnił lukę, i wyrachował, z dziesięcioma cyframi, logarytmy liczb od 1 do 100000. Po nich Gardiner wydał tablice logarytmów z siedmioma dziesiętnemi. Nareszcie Callet przejrzał te tablice, i dociągnął aż do liczby 108000 która wskazuje ile jest sekund w łuku 30 stopni.

URZĄDZENIE TABLIC LOGARYTMÓW O SIEDMIU DZIESIĘTNYCH.

435. Są różnych autorów tablice logarytmów: wszystkie mniej więcej mają kształt tablic Kallet'a, o użyciu których damy tylko krótką wiadomość; bo samo obejrzenie tablic więcej naucza niż ich opis.

Pierwsze pięć stronic tablic Kalleta, pod tytułem *Chiliade I* (pierwszy tysiąc), zawierają liczby od 1 do 1020, umieszczone w kolumnach z literą N; na prawej stronie tych kolumn stoją, z napisem *Log.* kolumny logarytmów, tak że każdej liczbie odpowieda w linii poziomej logarytm, mający samą tylko *część dziesiętną* złożoną z ośmiu cyfer. Nie pisano cechy, bo ona jest naprzód wiadoma.

Następujące tablice rozciągają się od 1020 do 108000. Kolumna N obejmuje liczby całkowite po sobie idące od 1020 do 10800; obok stojąca kolumna z cyfrą 0 na czele, przedstawia logarytmy odpowiedające tym liczbom, mające samą tylko część dziesiętną, złożoną z siedmiu cyfer. Ale cyfry liczb i logarytmów nie są wszystkie napisane w każdej linii. W kolumnie N dwie ostatnie cyfry liczb znajdują się wszędzie na swojem miejscu; dwie zaś pierwsze są wskazane raz na pięć, i trzeba się ich domyślać na czterech miejscach pod spodem. W kolumnie 0 widać, na lewej stronie, trójcyfrowe liczby odosobnione, powiększające się jednością; na prawej stronie są liczby czterocyfrowe w każdej linii. Pierwsze wzięte z każdą ostatnią, umieszczoną na przeciw albo poniżej, tworzą część dziesiętną logarytmu, który odpowieda liczbie stojącej w tej samej linii co cztery ostatnie cyfry dziesiętne. Poza 100000, liczby odosobnione są czterocyfrowe, i logarytmy mają osiem dziesiętnych.

Kolumny z tytułem 1, 2, 3,...9, zawierają cztery ostatnie dziesiętne logarytmów liczb od 10200 do 108000. Zastępując cztery ostatnie cyfry kolumny 0, przez cztery odpowiedne cyfry kolumny 1 na przykład, otrzymuje się część dziesiętną logarytmu liczby, utworzonej przez dopisanie cyfry 1 do liczby stojącej naprzeciwko w kolumnie N. I tak, część dziesiętna logarytmu liczby 1234 jest 0913152, a zaś logarytm liczby 12345 ma część dziesiętną 0914911.

Gdy liczba odosobniona kolumny 0 nie należy do wszystkich liczb które z nią stoją na jednej linii, wtedy ta linia jest złamana tak, że na niej zostają same dziesiętne odpowiedające trzem pierwszym; inne są pod nią. W tablicach *Schrön'a*, te cztery dziesiętne odpowiedające są oznaczone gwiazdką, i linia nie jest złamana. I tak, część dziesiętna logarytmu liczby 106780 jest 02848992, a zaś logarytm liczby 106783 ma część dziesiętną 02850212.

Ostatnia kolumna z tytułem *dif.* zawiera *różnice tablicowe i ich części proporcyonalne*, to jest różnice logarytmów dwóch liczb po sobie idących, i wieloczyny tych różnic pomnożonych przez 0,1. 0,2. 0,3. .... 0,9.

Tablice logarytmów służą do rozwiązywania dwóch następujących zagadnień.

436. ZAGADNIENIE PIERWSZE. MAJĄC DANĄ LICZBĘ, ZNALEŹĆ JEJ LOGARYTM.

I^szy^ PRZYPADEK. *Dana liczba jest całkowita.*

Gdy dana liczba znajduje się w tablicach, to jest jeśli nie przewyższa liczby 108000, otrzymuje się zaraz jej logarytm sposobem któryśmy wyżej pokazali.

Jeśli dana liczba przechodzi granice tablic, jako na przykład 23456789, trzeba ją podzielić przez potęgę 10^{ciu} taką, żeby część całkowita ilorazu była mniejsza od 108000. W naszym przykładzie, dzieląc przez 1000, mamy iloraz 23456,789 którego logarytm różni się od log 23456789 samą tylko cechą. Aby znaleźć część dziesiętną tego logarytmu, uważamy że iloraz 23456,789 mieści się między dwiema po sobie idącemi liczbami 23456 i 23457; zkąd wnosimy że jego logarytm jest zawarty między logarytmami tych dwóch liczb. Owoż log 23456 ma część dziesiętną 3702540, a różnica między log 23457 i log 23456 jest 185 jedności siódmego rzędu dziesiętnego; więc log 23456,789 równa się log 23456 więcej pewną ilością mniejszą od różnicy tablicowej 185. Do wyznaczenia tej ilości przypuszczają że

Przyrosty logarytmów są proporcyonalne do przyrostów liczb. Proporcya tem bliższa prawdziwej im bardziej przyrosty liczb są mniejsze od jedności.

Powiemy więc: ponieważ przyrostowi 1 liczby 23456 odpowieda przyrost 185 logarytmu, zatem, gdy liczba 23456 powiększa się ułamkiem 0,789 jedności, logarytm powiększa sie także ułamkiem 0,789 różnicy tablicowej 185, to jest wieloczynem $184 \times 0,789$; co się jeszcze wyraża proporcyą

$$\frac{1}{0,789} = \frac{185}{x} \quad \text{zkąd} \quad x = 185 \times 0,789.$$

Wykonywając wieloczyn, będzie $x = 145,965$, albo tylko $x = 146$; zaniedbując dziesiętne rzędu wyższego nad siódmy.

Dodajemy znaleziony przyrost 146 do części dziesiętnej 3702540 szukanego logarytmu, i, przywracając właściwą cechę, otrzymujemy

$$\log 23456789 = 7,3702686.$$

Można uniknąć mnożenia $185 \times 0,789$ za pomocą tablic *Kal-*

let'a, biorąc w kolumnie *części proporcyonalnych*, wyrachowane wieloczyny różnicy tablicowej 185 przez 0.7, 0.8, 0.9, które są pod nią umieszczone, i dając im rzęd dziesiętny odpowiedający rzędowi cyfer mnożnika 0,789. Ale, mówiąc z przynależną ścisłością, nie wolno twierdzić że znaleziony wieloczyn 146 jest przybliżony na mniej niż $\frac{1}{10^7}$; bo nie wiadomo czy wieloczyny cząstkowe są przez niedostatek albo przez zbytek. Tablice *Schrön'a* usuwają tę wątpliwość, wskazując *podkreśleniem* ostatniej cyfry kiedy ona jest przez zbytek.

Oto wzór całego rachunku

Liczba 23456789

log 23456...		3702540
dla	0,7...	130
	0,08...	148
	0,009...	167

log 23456789 = 7,3702686.

Dobrze jest uważać w zastosowaniu powyższej proporcyi że, gdy trzeba oddzielać więcej niż trzy ostatnie cyfry danej liczby, aby zostająca jej część na lewo nie przewyższała 108000, czwarta cyfra i następujące już nie wpływają na logarytm. I tak, szukajmy na przykład logarytmu liczby 1203456789. Oddzieliwszy pięć ostatnich cyfer, bierzemy w tablicach log 12034, i wykonywamy rachunek jako następuje :

log 12034...		.0804100
dla	0, 5...	181
	0, 06...	217
	0, 007...	253
	0, 008...	0289
	0, 0009...	00325

log 1203456789 = 9,084305

Ten przykład pokazuje że czwarta cyfra 8 i piąta 9 nie mają żadnego wpływu na logarytm.

II^{gi} PRZYPADEK. *Dana liczba jest dziesiętna.*

Niech będzie liczba 360,5897 której trzeba wyznaczyć logarytm. Wiemy naprzód że cechą żądanego logarytmu jest 2 (n^{ro} 433); więc, nie zważając na przecinek, szukamy logarytmu liczby 3605897 i znajdujemy, według pierwszego przypadku,

	Liczba 3605897	
	log 36058....	5570016
	dla 0,9....	108
	0,07....	84
zatem	$\log 360{,}5897 = 2{,}5570132.$	

Niech będzie teraz liczba dziesiętna 0,00456789 mniejsza od jedności. Przenosząc przecinek na prawo pierwszej cyfry znaczącej i pisząc 4,56789, mnożymy daną liczbę przez 1000; czem nie zmieniamy części dziesiętnej logarytmu, ale tylko dodajemy 3 do jego cechy. Owoż, działając jako w poprzedzającym przykładzie, znajdujemy

$$\log 4{,}56789 = 0{,}6597157;$$

więc

$$\log 0{,}00456789 = 0{,}6597157 - 3 = -2{,}3402843.$$

Otrzymany logarytm jest odjemny. Ale logarytmy odjemne utrudzają rachunek; dlatego właśnie nie wykonywa się odciągania i tylko się bierze cechę odjemną -3, dając jej kształt $\bar{3}$. Tym sposobem, pisząc

$$\log 0{,}00456789 = \bar{3}{,}6597197,$$

wyraża się że część dziesiętna logarytmu jest dodatna a tylko sama cecha odjemna. Trzeba uważać że cecha odjemna, logarytmu liczby dziesiętnej mniejszej od jedności, jest równa liczebnie rzędowi pierwszej dziesiętnej znaczącej tej liczby.

III. Przypadek. *Dana liczba jest ułamkowa.*

Jeśli liczba jest ułamkiem $\frac{a}{b}$, albo składa się z części całkowitej i ułamka, trzeba, przywiodłszy ją do kształtu $\frac{a}{b}$, uważać to wyrażenie jako iloraz, i odciągnąć logarytm mianownika od logarytmu licznika; co da

$$\log\frac{a}{b} = \log a - \log b.$$

Jako przykład, szukajmy logarytmu liczby ułamkowej $\frac{36}{7}$; znajdziemy

$$\log\frac{36}{7} = \log 36 - \log 7 = 1{,}55630250 - 0{,}84509804$$

$$= 0{,}71120446.$$

Szukajmy jeszcze logarytmu ułamka $\frac{2566}{25823}$. Otrzymamy

$$\log\frac{2566}{25823} = 3{,}4092567 - 4{,}4120067 = -1{,}0027500;$$

logarytm całkiem odjemny. Żeby mieć logarytm z cechą odjemną, trzeba dodać 2 do logarytmu licznika i odciągnąć logarytm mianownika; co daje

$$\log\frac{2566}{25823} = \bar{2}{,}9972500.$$

Można wiedzieć naprzód cechę odjemną logarytmu ułamka; dość tylko znać rzęd pierwszej cyfry dziesiętnej ilorazu. Owoż, dla otrzymania tej cyfry w naszym przykładzie, trzeba dopisać dwa zera do licznika, to jest pomnożyć go przez 100; więc cechą szukanego logarytmu jest $\bar{2}$, jako wyżej otrzymano,

437. ZAGADNIENIE DRUGIE. Mając dany logarytm, znaleźć odpowiadającą liczbę.

Iszy Przypadek. *Logarytm całkiem dodatny.*

Niech będzie 5,2345679 logarytm którego liczbę wyznaczyć mamy. Nie zważając na cechę, i szukając części dziesiętnej w kolumnie 0 między logarytmami liczb od 1020 do 10800, znajdujemy zaraz pierwszą część 234; potem, przebiegając okiem, spostrzegamy po niżej tej części, całą drugą część 5679 w kolumnie 2; posuwamy się nakoniec w linii prostej aż do kolumny N, i bierzemy w niej odpowiedającą liczbę 1716, do której dopisujemy cyfrę 2. Tak otrzymana liczba 17162 byłaby szukaną, gdyby dany logarytm miał cechę 4. Ale, ponieważ cecha jest 5, trzeba pomnożyć 17162 przez 10. Więc 171620 jest liczbą mającą dany logarytm 5,2345679.

Niech będzie jeszcze 2,5678964 dany logarytm. Działając jako wyżej, znajdujemy łatwo liczbę 36974; poczem, uważając że cechą danego logarytmu jest 2, dzielimy znalezioną liczbę przez 100, i otrzymujemy 369,74.

Niech będzie teraz logarytm 3,4567890, który nie znajduje się cały w tablicach. Patrząc w kolumnie 0 i przebiegając następujące, widzimy że część dziesiętna jest zawarta między logarytmami 0,4567758 i 0,4567910, którym odpowiedają, bez względu na rzęd jedności, liczby 28627 i 28628. Ztąd wnosimy że szukana liczba jest równa mniejszej 28627, powiększonej pewną ilością, odpowiedającą przewyżce 132 logarytmu 0,4567890 nad 0,4567758. Owoż, różnica tablicowa dwóch logarytmów, między które wpada logarytm dany, jest 152; więc, przypuszczając że *przyrosty liczb są proporcyonalne do przyrostów logarytmów*, powiemy : ponieważ przyrost 152 logarytmu daje powiększenie 1 liczbie 28627, przyrost 1 da jej powiększenie $\frac{132}{152}=0,86...$ To wszystko wyraża się jeszcze proporcyą

$$\frac{152}{132}=\frac{1}{x} \quad \text{zkąd} \quad x=\frac{132}{152}=0{,}86...$$

Zkąd wynika że szukana liczba składa się z cyfer 2862786... Ale ta liczba powinna mieć tylko cztery cyfry w części całkowitej, ponieważ cecha danego logarytmu jest 3; więc nakoniec liczba o której mowa jest 1862,786.

Można, unikając dzielenia 132 przez 152, wyznaczyć cyfry ilorazu za pomocą tabliczki części proporcyonalnych. Jakoż, między wieloczynami tych części, umieszczonemi pod różnicą tablicową 152, najwięcej się zbliża przez niedostatek do dzielnej 132 wieloczyn 122, któremu odpowieda iloraz 0,8 i reszta 10. Dopisując 0 do 10 mamy nową dzielnę 100, do której najwięcej się zbliża wieloczyn 91 dziesiętnych, odpowiedający ilorazowi 0,6; ztąd wnosimy że dzielna 100 setnych odpowieda ilorazowi 0,06. Przestając na tych dwóch cyfrach ilorazu, znajdujemy jako wyżej przyrost 0,86 liczby względnej do przyrostu 132 logarytmu.

Rachunek wykonywa się jako następuje

$$\log x = 3{,}4567890$$

dla	4567758....	28627
1sza reszta	132....	08
2ga reszta	10....	006

Szukana liczba $x=2862{,}786$.

IIgi Przypadek. *Logarytm z cechą odjemną.*

Rachunek liczby jest ten sam co w przypadku poprzedzającym. Cecha odjemna nie zmienia go w niczem; bo najpierwej, nie zważając na cechę, szuka się cyfer liczby, i dopiero po ich otrzymaniu wyznacza się rzęd najwyższych jedności.

Żeby jednak nie zostawić żadnej wątpliwości, weźmiemy parę przykładów.

Niech będzie dany logarytm $\bar{2},,0123478$. Między logarytmami liczb większych od 100000 znajdujemy zadany logarytm, i jemu odpowieda liczba złożona z cyfer 102884. Owoż, z przyczyny cechy $\bar{2}$, pierwsza znacząca cyfra szukanej liczby powinna być drugiego rzędu dziesiętnego; więc ta liczba jest

$$0,0102884.$$

Szukając liczby odpowiedającej logarytmowi $\bar{1},1695784$, znajdujemy

dla	1695569....	14776
1sza reszta	215....	07
2ga reszta	9....	003
Szukana liczba		0,1477673.

III^{ci} Przypadek. *Logarytm całkiem odjemny.*

Niech będzie logarytm $-1,6750080$. Biorąc ten logarytm dodatnie, znajdujemy odpowiedającą liczbę 47,316 przez którą dzielimy 1, i mamy szukaną liczbę $\dfrac{1}{47,316}$ albo $\dfrac{1000}{47316}$;

dlatego że $\log \dfrac{1}{47,316} = 0 - \log 47,316$.

Ale zwykle przekształca się logarytm całkiem odjemny na logarytm mający samą jedną cechę odjemną, dodając do części dziesiętnej jedność i odejmując ją od cechy; przez co nic się nie zmienia tylko postać, i otrzymuje się

$$-1,6750080 = -2 + (1 - 0,6750080) = \bar{2},3249920.$$

Odciąganie części dziesiętnej od jedności wykonywa się od lewej ręki do prawej, odejmując każdą cyfrę od 9, prócz ostatniej cyfry znaczącej którą trzeba odjąć od 10.

Szukając teraz liczby odpowiedającej logarytmowi $\bar{2},3249920$, otrzymujemy

dla	3249817....	21134
1sza reszta	103....	05

Szukana liczba 0,0211345.

438. Uwaga. Niech będą a i $a+1$ dwie liczby całkowite po sobie idące; różnica ich logarytmów wyraża się przez

$$\log(a+1)-\log a=\left(1+\frac{1}{a}\right).$$

W miarę jak a rośnie, $1+\frac{1}{a}$ maleje i dąży do zera; to pokazuje że różnica tablicowa jest tem mniejsza im liczby są większe. I w samej rzeczy, między logarytmami liczb 100 i 101 różnica jest 43213 jedności siódmego rzędu dziesiętnego; gdy tymczasem między logarytmami liczb 100000 i 100001 ta różnica jest tylko 43 jedności tego samego rzędu. Owoż, im większe są liczby i mniej się różnią, tem dokładniejsza jest proporcya która służy do znalezienia logarytmów liczb przechodzących zakres tablic, i nawzajem do wyznaczenia liczb odpowiedających danym logarytmom.

Że ta proporcya nie jest prawdziwa, łatwo tego dowieśdź. Jakoż, dając liczbie a przyrost h, mamy dla logarytmu przyrost

$$\log(a+h)-\log a=\log\left(1+\frac{h}{a}\right);$$

dając znowu liczbie $a+h$ ten sam przyrost h, otrzymujemy dla logarytmu przyrost wyrażony przez

$$\log(a+h+h)-\log(a+h)=\log\left(1+\frac{h}{a+h}\right).$$

Gdyby proporcya, o której mowa, była prawdziwa, ponieważ przyrosty liczb są równe, przyrosty logarytmów byłyby także równe; co nie ma miejsca, bo jest oczywiście

$$\log\left(1+\frac{h}{a+h}\right)<\log\left(1+\frac{h}{a}\right).$$

Ta nierówność dowodzi że, gdy liczby powiększają się jednostajnie, logarytmy powiększają się coraz mniej. Więc, jeśli oznaczymy przez Δ różnicę tablicową, przez δ przyrost logarytmu adpowiedający przyrostowi h liczby, będzie

$$\frac{1}{h}>\frac{\Delta}{\delta};$$

zkąd

$$\delta > h\Delta \quad \text{a zaś} \quad h<\frac{\delta}{\Delta}.$$

Widzimy teraz jasno że, stosując przybliżoną proporcyę i biorąc $\delta=h\Delta$, otrzymujemy dla logarytmu powiększenie za małe; biorąc zaś $h=\frac{\delta}{\Delta}$, znajdujemy dla liczby powiększenie za wielkie. To jest, innemi słowy, użycie proporcyi daje w przejściu z liczby do logarytmu wynik za mały, a przeciwnie w przejściu z logarytmu do liczby wynik za wielki.

Ale, na jakie przybliżenie wartości $h\Delta$ i $\frac{\delta}{\Delta}$ liczyć można? Odpowiedź na to podwójne pytanie do algebry wyższej należy. Tutaj powiemy tylko że są dwa rodzaje błędów; jedne pochodzą z niedokładności proporcyi, drugie z niedoskonałości logarytmów tablic. Dodajemy jednak że, jeśli użyto najwyższej części tablic (od 10200 do 108000), summa obydwóch błędów z wieloczynu $h\Delta$ nie wpływa na jedności siódmego rzędu dziesiętnego. Co się zaś tycze ilorazu $\frac{\delta}{\Delta}$, trzeba przestać na jego dwóch cyfrach, to jest nie przechodzić poza cyfrę *setnych*.

DZIAŁANIA NA LOGARYTMACH Z CECHAMI ODJEMNEMI I POPEŁNIENIA ARYTMETYCZNE.

439. Cechy odjemne. Logarytm z cechą odjemną i z częścią dziesiętną dodatną powinien być uważany jako dwumian $-a+b$, w którym jeden wyraz jest odjemny drugi dodatny.

I tak,

$$\bar{2},3549016=-2+0,3549016;$$

zatem

$$-(\bar{2},3549016)=2-0,3549016=1,6450984.$$

Działania na logarytmach z cechami odjemnemi przywodzą się do czterech następujących :

	Dodawanie		Odciąganie
	$\bar{3},4567890$		$\bar{4},3450821$
	$\bar{2},6798123$		$\bar{2},8719843$
summa	$\bar{4},1366013.$	różnica	$\bar{3},4730978.$

Z dodawania części dziesiętnych wynika 1 dla części całkowitej; dołączając to 1 do summy odjemnej $-3-2$, otrzymano cechę odjemną $\bar{4}$. Podobnie z odciągania części dziesiętnych wynika 1 dla części całkowitej; ta zatrzymka 1 dołączona do $\bar{2}$ daje $\bar{1}$; odciągając $\bar{1}$ od $\bar{4}$ otrzymano cechę $\bar{3}$.

Mnoży się logarytm z cechą odjemną przez liczbę całkowitą, wykonywając osobno mnożenie części dziesiętnej i cechy przez tę liczbę, i potem redukując całkowite dodatne z odjemnemi. Ale, gdy mnożnik ma tylko jedną cyfrę, mnożenie i redukcya odbywają się zarazem.

Mnożenie przez jedną cyfrę.

$$\begin{array}{rr} & \bar{2},9807210 \\ & 6 \\ \hline \text{wieloczyn} & \bar{7},8803260 \end{array}$$

Mnożenie przez 12.

$$\begin{array}{rr} & \bar{3},5612348 \\ & 12 \\ \hline & 1,1224696 \\ & 5,612348 \\ \hline & 6,7348176 \\ & -36 \\ \text{wieloczyn} & \overline{30},7348176 \end{array}$$

Żeby podzielić logarytm z cechą odjemną przez liczbę całkowitą, trzeba zacząć od cechy. Jeśli ta cecha dzieli się dokładnie przez dzielnik, dokończa się ilorazu dzieleniem części dziesiętnej. Ale, jeśli cecha odjemna nie jest dokładnie podzielna przez dzielnik, trzeba ją uczynić podzielną, dodając do niej potrzebną liczbę jedności odjemnych, i zarazem dodając równą liczbę jedności dodatnych do części dziesiętnej; po wykonaniu obydwóch dzieleń, otrzymuje się iloraz złożony z części odjemnej całkowitej i z części dodatnej dziesiętnej.

Dzielenie przez 3.

$$\begin{array}{r|l} \bar{6},5806121 & 3 \\ \bar{2},1935373 & \\ 2 & \end{array}$$

Dzielenie przez 5

$$\begin{array}{r|l} \bar{2},9450870 & 5 \\ \bar{1},7890174 & \end{array}$$

Pierwszy iloraz nie potrzebuje objaśnienia. Aby wyznaczyć drugi, dodano do cechy odjemnej $\bar{2}$ liczbę konieczną -3 która ją czyni podzieloną przez 5, i dodano $+3$ do części dziesiętnej. Tym sposobem, nie zmieniając danej dzielnej, otrzymuje się nową złożoną z dwóch części, z których jedna całkowita i odjemna jest podzielna przez 5, druga ułamkowa i dodatna jest mniejsza od 5. Dlatego więc iloraz z podzielenia nowej dzielnej przez 5 ma część odjemną całkowitą a część dodatną ułamkową dziesiętną.

440. Cechy odjemne nietylko zogólniają ale jeszcze upraszczają logarytmiczny rachunek.

Przykład. *Kapitał* 36584 fr. *umieszczony przez dwa roki, dał procent* 3658 fr. 40. *Jaki da procent kapitał* 25678 *umieszczony w tych samych warunkach przez trzy lata?*

Nazywając x szukany kapitał, będzie, według reguły trzech składanej,

$$x = \frac{3658{,}40 \times 25678 \times 3}{36584 \times 2}$$

zatem, biorąc logarytmy, mamy

$$\log x = \log 3658{,}40 + \log 25678 + \log 3 - \log 36584 - \log 2.$$

Trzebaby teraz znaleźć summę logarytmów dodatnych, summę logarytmów odjemnych, i odciągnąć drugą summę od pierwszej; co wymaga trzech działań. Ale można przekształcić logarytmy poprzedzone znakiem —, tak żeby ich części dziesiętne stały się dodatnemi. Dość tylko uważać że, na przykład,

$$-(4{,}5632912) = \bar{5} + (1 - 0{,}5632912) = \bar{5}{,}4367088,$$

$$-(\bar{3}{,}9310050) = 2 + (1 - 0{,}9310050) = 2{,}0889950.$$

Więc, jakikolwiek jest logarytm, żeby zamienić jego odciąganie na dodawanie, trzeba przydać jedność do cechy i zmienić jej znak, poczem wziąć dopełnienie do 9 każdej cyfry dziesiętnej, prócz ostatniej znaczącej którą trzeba odjąć od 10. Tym sposobem działając, jest tylko do wyrachowania jedna summa części dziesiętnych; co jest oczywistem uproszczeniem. Ale, gdyby szukano tylko różnicy dwóch logarytmów, nie trzeba zamieniać odciągania na dodawanie; bo rachunek byłby niepotrzebnie przydłużony.

W zadanym przykładzie wszystko się oblicza jako następuje:

$$\begin{aligned} \log 3658,40 &= 3,5632912 \\ \log 2567\,8 &= 4,4095612 \\ \log 3 &= 0,4771213 \\ -\log 36584 &= \bar{5},4367088 \\ -\log 2 &= \bar{1},6989700. \\ \hline \log x &= 3,5856525, \end{aligned}$$

więc

$$x = 5851\,\text{fr}.\,70.$$

441. Dopełnienie arytmetyczne. Nazywa się *dopełnieniem* logarytmu różnica między 10 i tym logarytmem. I tak, dopełnienie logarytmu 3,4678744 jest

$$10 - 3,4678744 = 6,5321256.$$

Otrzymuje się to dopełnienie, odejmując cechę i każdą cyfrę dziesiętną od 9, prócz ostatniej cyfry znaczącej którą trzeba odjąć od 10.

Według tego prawidła, znajduje się tak samo dopełnienie logarytmu z cechą odjemną, i dopełnienie logarytmu większego od 10; pierwsze jest dodatne, drugie ma cechę odjemną. I tak

$$\text{dop.}\,\bar{3},5678910 = 12,4321090,$$

$$\text{dop.}\,12,3456789 = \bar{3},6543210.$$

Za pomocą dopełnień arytmetycznych, odciąganie logarytmów zamienia się na dodawanie. Jakoż,

$$\log a - \log b = \log a + (10 - \log b) - 10 = \log a + \text{D}^{\text{e}} \log b - 10.$$

Pojmuje się łatwo użytek dopełnień arytmetycznych w uproszczeniu logarytmicznego rachunku, zwłaszcza gdy się unika działań na ilościach odjemnych. I tak, gdyby wykonywano, za pomocą dopełnień, rachunek ostatniego przykładu, byłoby

$$\begin{array}{ll}
\log 3658{,}40 & = 2{,}5632912 \\
\log 25678 & = 4{,}4095612 \\
\log 3 & = 0{,}4771213 \\
\text{dop. } \log 36584 & = 5{,}4367088 \\
\text{dop. } \log 2 & = 9{,}6989700 \\
\hline
\log x & = 23{,}5856525 - 20.
\end{array}$$

Wynik zgodny z poprzedzającym, i prawie ten sam rachunek.

Ale, niech będzie do znalezienia

$$x = \sqrt[7]{\frac{(0{,}19875)^6}{0{,}067143}}.$$

Bierzemy logarytmy obydwóch stron, i mamy

$$\log x = \frac{6\log 0{,}19875 - \log 0{,}067143}{7}.$$

Wykonywając rachunek przez logarytmy z cechami odjemnemi, łatwo się otrzymuje

$$\begin{array}{lr}
6\log 0{,}19875 = (\bar{1}{,}2983071)6 = & \bar{5}{,}7898426 \\
\log 0{,}067143 \qquad\qquad = & \bar{2}{,}8270007 \\
\hline
\text{różnica} & \bar{4}{,}9628419.
\end{array}$$

$$\log x = \frac{1}{7}(\bar{4}{,}9628419) = \bar{1}{,}5661203.$$

Więc

$$x = 0{,}368231.$$

Przez dopełnienia logarytmów rachunek byłby dłuższy i zawilszy.

KILKA ZASTOSOWAŃ LICZEBNYCH.

442. Przykład I. *Wyrachować średnicę kuli ołowianej ważącej* 1 *kilogram, wiedząc że gęstość ołowiu jest* 11,352.

Ciężar kuli sferycznej, mającej promień x, wyraża się przez

$$\frac{4}{3}\pi x^3 \times 11,352 = 1;$$

zkąd

$$(2x)^3 = \frac{6}{\pi \times 11,352}.$$

Biorąc logarytmy obydwóch stron, będzie

$$3\log(2x) = \log 6 - \log\pi - \log 11,352.$$

Owoż

$$\log 6 = 0,7781513$$

$$-\log\pi = \bar{1},5028502 \qquad \log\pi = 0,497149872$$

$$-\log 11,352 = \bar{2},9449276 \qquad \log 11,352 = 1,0550724$$

$$3\log(2x) = \bar{1},2259291;$$

ztąd

$$\log 2x = \bar{1},7419764.$$

Więc

$$2x = 0^{d\cdot m},55204.$$

Srednica kuli jest wymierzona w decymetrach, dlatego że ciężar tej kuli jest dany w kilogrammach.

Przykład II. *Między* 3 *i* 8 *wstawić* 4 *średnie geometryczne.*

Stosunek q szukanej postępni jest.

$$q = \sqrt[5]{\frac{8}{3}};$$

zkąd, biorąc logarytmy, wynika

$$\log q = \frac{1}{5}(\log 8 - \log 3) = \frac{0,4259687}{5} = 0,0851937$$

więc

$$q = 1,21673\ldots; \text{ etc.}$$

Przykład III. *Znaleźć summę* S *postępni geometrycznej, w której wiadome są* a, l, n.

Między równaniami $l = aq^{n-1}$ i $S = \frac{lq-a}{q-1}$ rugując q, znajdujemy

$$S = \frac{l\sqrt[n-1]{\frac{l}{a}} - a}{\sqrt[n-1]{\frac{l}{a}} - 1}.$$

Aby mieć wartość S, trzeba najpierwej przez logarytmy wyrachować pierwiastek; poczem, nazywając x ten pierwiastek będzie

$$S = \frac{lx-a}{x-1}.$$

Ostatnie wyrażenie może się wyrachować po prostu, albo przez logarytmy.

Przykład IV. *Znaleźć liczbę* n *wyrazów postępni geometrycznej, w której* a, l, S *są wiadome.*

Mamy równania

$$l = aq^{n-1} \quad \text{i} \quad S = \frac{lq-a}{q-1}.$$

Ostatnie daje zaraz

$$q = \frac{S-a}{S-l},$$

Znając wartość q, bierzemy logarytmy obydwóch stron pierwszego równania, i otrzymujemy

$$\log l = \log a + (n-1)\log q;$$

zkąd wywodzimy dla n wartość

$$n = 1 + \frac{\log l - \log a}{\log q}.$$

Ale q może być dodatne albo odjemne. Żeby pokazać jak można ominąć trudność gdy jest $q < 0$, bierzemy przykład liczebny, przypuszczając $a=2$, $l=162$, $S=122$; co daje

$$q = \frac{120}{-40} = -3.$$

W tym przypadku, ponieważ pierwszy wyraz a i ostatni l są oba dodatne, wykładnik $n-1$ musi być parzysty; możemy więc za q położyć 3, i otrzymać

$$n - 1 = \frac{\log 162 - \log 2}{\log 3} = \frac{1,90848501}{0,47712125}.$$

Wykonywając dzielenie, znajdujemy prawie 4. Więc szukana liczba wyrazów jest

$$n = 5.$$

Przykład V. *Znaleźć podstawę układu w którym logarytm liczby* 12 *jest* 2,4849066.

Niech będzie b ta podstawa. Aby ją wyznaczyć, trzeba zastosować formułę (4) stronicy 766; uważając że

$$L\,12 = 2.4849066 \qquad \log 12 = 1,07918120.$$

Będzie więc

$$\log b = \frac{1,0791812}{2,4849066} = 0,4342944.$$

zkąd

$$b = 7,218281...$$

Przykład VI. *Znaleźć wartość całkowitą liczby* n *która zadość czyni nierówności*

$$2^n > 1000.$$

Przez logarytmy mamy

$$n \log 2 > 3,$$

zkąd

$$n > \frac{3}{0{,}3010299}$$

Więc dość jest wziąć

$$n = \frac{3}{0{,}30} = 10.$$

Przykład VII *Rozwiązać równanie wykładnicze*

$$4^{2x^2 - x + \frac{1}{2}} = 8.$$

Biorąc logarytmy obydwóch stron, będzie

$$\left(2x^2 - x + \frac{1}{2}\right) \log 4 = \log 8,$$

albo

$$\left(2x^2 - x + \frac{1}{2}\right) 2 \log 2 = 3 \log 2;$$

zkąd

$$2x^2 - x + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad \text{albo} \quad x^2 - x - 1 = 0.$$

Więc

$$x = 1 \quad \text{i} \quad x = -\frac{1}{2}.$$

Przykład VIII. *Rozwiązać układ dwóch równań*

$$x^2 + y^2 = 10100,$$

$$\log x + \log y = 3.$$

Drugie równanie jest to samo co

$$\log xy = \log.10^3.$$

albo

$$xy = 1000.$$

Więc dany układ jest równowarty następującemu

$$(x+y)^2 = 12100$$

$$(x-y)^2 = 8100\ ,$$

który ma rozwiązanie $\begin{cases} x=100 \\ y=10\ , \end{cases}$ albo $\begin{cases} x=10 \\ y=100. \end{cases}$

Przykład IX. *Jakie są podstawy spółmierne i takie, żeby logarytm liczby całkowitej* N *był spółmierny?*

Oznaczając przez $\frac{p}{q}$ liczbę spółmierną jakąkolwiek, mamy

$$\log N = \frac{p}{q},$$

zkąd

$$\log . N^{\frac{q}{p}} = 1.$$

Więc $N^{\frac{q}{p}}$ jest podstawą układu. Żeby ta podstawa była spółmierna, wykładnik $\frac{q}{p}$ musi być liczbą całkowitą, albo, co to samo, powinno być $p=1$; zatem szukane podstawy spółmierne wyrażają się przez N^q, gdzie q jest całkowite.

ĆWICZENIA.

I. Znaleźć liczbę x taką żeby, dzieląc jej logarytm przez liczbę spółmierną a, otrzymano ten sam wynik co odciągając $\log a$ od jej logarytmu.

Odpowiedź : $x = a^{\frac{a}{a-1}}$

II. Jaka jest podstawa b układu, w którym liczba spółmierna a jest równa swojemu logarytmowi?

Odpowiedź : $b=\sqrt[a]{a}$.

III. Rozwiązać równanie $\sqrt[x+2]{117649} : \sqrt[x+3]{2401}=7$.

Odpowiedź : $x=1$ i $x=-4$.

IV. Rozwiązać równanie

$$\log(2x^3-8x)-\log(x^4+2x^3-2x^2-4x+1)=\log 3.$$

Odpowiedź : $x\pm 1$, $x=\dfrac{-2\pm\sqrt{-5}}{3}$.

V. Rozwiązać równanie $3^{x^2-3x+5}=19683$.

Odpowiedź : $x=4$ i $x=-1$.

VI. Minimum wieloczynu $A^{x^m}. B^{x^n}$.

Odpowiedź : $x=\sqrt[m+n]{\dfrac{n\log B}{m\log A}}$.

PROCENTA SKŁADANE I RATY.

443. Procenta składane. Mówi się że kapitał jest umieszczony *na procencie składanym*, gdy na końcu każdego roku, procent przyłącza się do kapitału i tworzy z nim nowy kapitał który przynosi procent przez rok następujący. Procent składany zawiera procent od procentu, to jest procent się kapitalizuje.

Rzecz o procentach składanych przywodzi się do następującego zagadnienia :

Nazywając r *procent roczny od* 1 *fr.* a *kapitał umieszczony* *na procencie składanym, znaleźć wartość* A *jakiej ten kapitał nabywa po* n *latach.*

Oczywiście, ponieważ każdy frank przynosi procent r po roku, kapitał a franków przyniesie w tym samym czasie procent ar; ten procent dołączony do kapitału a daje summę

$$a+ar \quad \text{albo} \quad a(1+r).$$

Więc, żeby wiedzieć jaką summę czyni kapitał z procentem po jednym roku, trzeba tylko pomnożyć ten kapitał przez

$$1+r.$$

Następnie, ponieważ kapitał z procentem na początku drugiego roku jest $a(1+r)$, wartość tego kapitału na końcu drugiego roku będzie

$$a(1+r)\times(1+r) \quad \text{albo} \quad a(1+r)^2;$$

to jest, wartość nabyta kapitału z procentem składanym, po upływie dwóch lat, wyraża się przez $a(1+r)^2$. Ten kapitał nabędzie na końcu trzeciego roku wartości

$$a(1+r)^2\times(1+r) \quad \text{albo} \quad a(1+r)^3.$$

I tak dalej. Co pokazuje że wartość kapitału z procentem składanym po n latach jest

$$a(1+r)^n.$$

Mamy więc formułę procentów składanych

$$(1) \qquad \mathrm{A}=a(1+r)^n.$$

Ta formuła, zawierająca cztery ilości a, A, n, r, służy do wyrachowania jednej z nich, gdy trzy inne są wiadome; byle tylko n było liczbą całkowitą. Ale właśnie z przyczyny tego zastrzeżenia formuła (1) nie jest ogólna. W handlu zgodzono się powszechnie na to że przez n pierwszych lat kapitał zostaje na procencie składanym; a potem, przez ułamek $\frac{p}{q}$ następującego roku, nabyta dotąd wartość kapitału przynosi procent prosty po $\frac{pr}{q}$ za frank. To jest, po upływie czasu $\frac{p}{q}$ każdy frank staje się $1+\frac{pr}{q}$, i temsamem wartość $a(1+r)^n$ staje się

$$a(1+r)^n\left(1+\frac{pr}{q}\right).$$

Więc ogólna formuła procentów składnych jest

$$(2) \qquad A=a(1+r)^n\left(1+\frac{pr}{q}\right).$$

W tej formule $\frac{p}{q}$ znaczy miesiące i dnie; dla ułatwienia rachunków, liczą miesiąc za 30 dni i rok za 360 dni.

Wartości A i a łatwo się obliczają, gdy są dane cztery inne Ale, wyrachowanie czasu $n+\frac{p}{q}$ albo procentu r od fr. przedstawia pewne trudności, które naprzód uprzątnąć trzeba; co właśnie uczynimy.

444. Uważając czas za niewiadomę, widzimy że się składa z części całkowitej n i z ułamka $\frac{p}{q}$. Te dwie ilości wyznaczają się osobno.

Jakoż, biorąc logarytmy obydwóch stron równania (2), będzie

$$\log A=\log a+n\log(1+r)+\log\left(1+\frac{pr}{q}\right);$$

zkąd

$$n=\frac{\log A-\log a-\log\left(1+\frac{pr}{q}\right)}{\log(1+r)}.$$

Jeżeli teraz, dzieląc $\log A - \log a$ przez $\log(1+r)$ jak gdyby szukano n za pomocą formuły (1), nazwiemy k część całkowitą ilorazu i R resztę, otrzymamy

$$n = k + \frac{R - \log\left(1 + \frac{pr}{q}\right)}{\log(1+r)}.$$

Owoż, $\log\left(1 + \frac{pr}{q}\right) < \log(1+r)$, dlatego że $\frac{p}{q} < 1$ i tem-samem $\frac{pr}{q} < r$; co dowodzi że

$$\frac{R - \log\left(1 + \frac{pr}{q}\right)}{\log(1+r)}$$

jest ułamkiem. Więc, ponieważ n jest liczbą całkowitą, musi być odrębnie

$$n = k \quad \text{i} \quad \frac{R - \log\left(1 + \frac{pr}{q}\right)}{\log(1+r)} = 0.$$

Ostatnie równanie daje

$$\log\left(1 + \frac{pr}{q}\right) = R;$$

zkąd, oznaczając przez N liczbę mającą R za logarytm, wynika

$$1 + \frac{pr}{q} = N; \quad \text{zatem} \quad \frac{p}{q} = \frac{N-1}{r}.$$

Jeśli $R = 0$, będzie $1 + \frac{pr}{q} = 1$; wtedy $n = k$, $\frac{p}{q} = 0$.

To wszystko pokazuje że, do wyznaczenia czasu przez który zostawał kapitał na procencie składanym, najprościej jest użyć formuły (1). Albowiem, jeśli dzieląc $\log A - \log a$ przez

$\log(1+r)$, otrzymuje się iloraz k zupełny, będzie

$$n=k \quad \text{i} \quad \frac{p}{q}=0;$$

a jeśli jest reszta R, rachunek dokończa się jako wyżej. Można nawet uważać R za ułamek roku; bo błąd jest bardzo mały, jako zobaczymy w liczebnych zastosowaniach.

445. Gdy czas jest wyrażony liczbą całkowitą, otrzymuje się niewiadomę r za pomocą formuły (1); ale, gdy czas jest dany przez liczbę ułamkową, niewiadoma r zawisła od równania (2) które jest stopnia $n+1$, i którego rozwiązywanie do algebry wyższej należy. Jednak, nie rozwiązując tego równania, *metoda przybliżeń po sobie idących* daje dość łatwo wartość r następującym rachunkiem.

Biorąc logarytmy obydwóch stron równania (2) i wyciągając wartość $\log(1+r)$, będzie

$$\log(1+r)=\frac{\log A-\log a}{n}-\frac{\log\left(1+\frac{pr}{q}\right)}{n}.$$

Owoż, wartość r jest ułamkiem, zwykle zawartym między 0,03 i 0,06, a zaś $\frac{p}{q}<1$; dlatego liczba $1+\frac{pr}{q}$ mało się różni od 1, i wyraz

$$\frac{\log\left(1+\frac{pr}{q}\right)}{n}$$

jest ilością bardzo małą. Zaniedbając ten wyraz i czyniąc

$$\log(1+r_1)=\frac{\log A-\log a}{n},$$

otrzymujemy pierwszą wartość przybliżoną r_1 dla r.

Ta wartość jest za wielka. Jeśli ją podstawimy w zaniedbanym, wyrazie i uczynimy

$$\log(1+r_2)=\frac{\log A-\log a-\log\left(1+\frac{pr_1}{q}\right)}{n},$$

to będzie wyrażenie które da drugą przybliżoną wartość r_2 dla r.

Wartość r_2 jest za mała, bo wyraz $\frac{1}{n}\log\left(1+\frac{pr_1}{q}\right)$ jest za wielki.

Gdyby posunięto dalej rachunek, znalezionoby dwie wartości r_3 i r_4 więcej przybliżone do r; pierwsza jest przez zbytek druga przez niedostatek. A ponieważ $r_3 < r_1$ i $r_4 > r_2$, to dowodem że wartości przez zbytek maleją a wartości przez niedostatek rosną; więc jedne i drugie, mogąc się różnić coraz mniej między sobą, dążą do spólnej granicy która jest wartością niewiadomej r. Znalezionoby zawsze tę wartość, gdyby logarytmy tablic były doskonałe; ale, gdy różnica między r i wartościami przybliżonemi pada niżej błędu tablic, wtedy metoda przybliżeń już nic dać nie może.

Przestając na r_3 albo na r_4, popełnia się błąd mniejszy od różnicy r_3-r_4; biorąc średnię arytmetyczną $\frac{r_3+r_4}{2}$ za wartość dla r, błąd będzie mniejszy od $\frac{r_3-r_4}{2}$.

ZAGADNIENIA PROCENTÓW SKŁADANYCH

446. Zagadnienie I. *Wyrachować wartość kapitału* 12000 *z procentem składanym przez lat* 14, *po* 4,5 od 100.

Formuła (1) daje $A=12000(1{,}045)^{14}$.

Zkąd, biorąc logarytmy, wynika

$$\log A=\log 12000+14\log 1{,}045,$$

Owoż, $\log 12000 = 4,0791812$

$14 \log 1,045 = 0,2676280$

$\log A = 4,3468092.$

3468092....22223

1sza reszta 65.... 03

2ga reszta 6.... 003

$4,3468092 = \log 22223,33;$

więc

$A = 22223$ fr. 33.

447. Zagadnienie II. *Jaki trzeba umieścić kapitał na procencie składanym, po 4,5 od 1,000, przez 10 lat i 3 miesiące, żeby mieć 100000 fr. na końcu tego czasu.*

Uważając że $1 + r = 1 + \frac{4,5}{100} = 1,045$; $1 + \frac{pr}{q} = 1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{4,5}{100}$ $= 1,01125$; i stosując formułę (2), będzie

$$100000 = a(1,045)^{10}(1,01125),$$

zkąd, biorąc logarytmy, otrzymujemy

$$\log a = \log 100000 - 10 \log 1,045 - \log 1,01124.$$

Rachunek.

$\log 100000 = 5$

$-10 \log 1,045 = \bar{1},8088371$ $\quad \log 1,045 = 0,01911629.$

$-\log 1,01125 = \bar{1},9951415$ $\quad \log 1,01125 = 0,0048585$

$\log a = 4,8039786$

803958....63676

reszta 28.... 04

$4,8039786 = \log 63676,4$

więc

$a = 63676$ fr. 40.

Uwaga. Gdyby, biorąc $n=10+\frac{1}{4}$, zastosowano formułę (1), byłoby

$$100000=a(1,045)^{10+\frac{1}{4}};$$

zkąd

$$\log a=\log 100000-\frac{41}{4}\log 1,045.$$

$$=5-0,1959420=4,8040580$$

Owoż,

	8040580....	63688
1sza	reszta 4....	0
2ga	reszta 4....	006
	4,8040580 = log 63688,06	

więc

$$a=63688 \text{ fr. } 06.$$

Różnica między dwiema wartościami dla a jest 11 fr. 66.

448. Zagadnienie III. *Przez jaki czas kapitał powinen zostawać na procencie składanym po* 5 *od* 100, *żeby stał się dwa razy większym*

Uważając że powinno być $A=2a$, i biorąc formułę (1), mamy

$$2a=a(1,05)^n \quad \text{albo} \quad 2=(1,05)^n.$$

Ostatnia równość pokazuje że rozwiązanie zagadnienia jest niezależne od kapitału pierwotnego. Żeby mieć n, bierzemy logarytmy obydwóch stron i otrzymujemy

$$n=\frac{\log 2}{\log 1,05}=\frac{0,3010300}{0,0211893}.$$

Owoż, wykonywając dzielenie, znajdujemy iloraz całkowity 14, i resztę 0,0043798, która jest logarytmem dwumianu $1+\frac{pr}{q}$; będzie więc

$$\log\left(1+\frac{p}{360}\cdot\frac{5}{100}\right)=0,0043798.$$

Między logarytmami liczb od 100000 do 108000 znajdujemy

dla 0,0043772....1,01013;

zatem

$$\frac{p}{360}\cdot\frac{5}{100}=0,01013,$$

zkąd

$$p=73 \text{ dni}.$$

Więc kapitał umieszczony na procencie składanym, po 5 od 100, podwaja się w przeciągu 14 lat i 73 dni.

Gdyby uważano

$$n=14+\frac{43798}{211893},$$

znalezionoby 14 lat i 74 dni. Wynik prawie ten sam co poprzedzający.

449. Zagadnienie IV. *Kapitał* 60000 *fr. umieszczony na procencie składanym przez* 3 *lata i* 6 *miesięcy, nabył wartości* 71193 *fr.* 95. *Jaka była stopa procentu?*

Według formuły (2) jest

$$71193,95=60000(1+r)^3\left(1+\frac{r}{2}\right);$$

zkąd, przez logarytmy, wyciągamy

$$\log(1+r)=\frac{\log 71193,95-\log 60000}{3}-\frac{1}{3}\log\left(1+\frac{r}{2}\right),$$

i, stosując metodę przybliżeń po sobie idących, mamy pierwszą wartość

$$\log(1+r_1)=\frac{\log 71193{,}95-\log 60000}{3},$$

$$=\frac{0{,}0742918}{3}=0{,}0247639;$$

ztąd
$$1+r_1=1{,}05867$$
$$r_1=0{,}05867.$$

Wartość r_1 jest za wielka. Podstawiając ją w zaniedbanym wyrazie, będzie

$$\frac{1}{3}\log\left(1+\frac{r_1}{2}\right)=\frac{1}{3}\log 1{,}02933=\frac{0{,}0125419}{3}.$$

Poczem, znajdujemy drugą przybliżoną wartość

$$\log(1+r_2)=\frac{0{,}0742918-0{,}0125419}{3}=0{,}0205499.$$

Zkąd

$$1+r_2=1{,}04845$$
$$r_2=0{,}04845.$$

Wartość r_2 jest za mała. Posuwając dalej rachunek przybliżenia, mamy najpierwej

$$\frac{1}{3}\log\left(1+\frac{r_2}{2}\right)=\frac{\log 1{,}02422}{3}=\frac{0{,}0103932}{3};$$

potem

$$\log(1+r_3)=\frac{0{,}0742918-0{,}013932}{3}=0{,}0212995.$$

Zkąd

$$1+r_3=1{,}05026$$

$$r_3=0.05026.$$

Następnie

$$\frac{1}{3}\log\left(1+\frac{r_3}{2}\right)=\frac{1}{3}\log 1{,}02513=\frac{0{,}0107789}{3}$$

$$\log(1+r_4)=\frac{0{,}0742918-0{,}0107789}{3}=0{,}0211376;$$

zkąd

$$1+r_4=1{,}04987$$

$$r_4=0{,}04987.$$

Idąc jeszcze dalej, będzie

$$\frac{1}{3}\log 1{,}02493=\frac{0{,}0106366}{3}$$

$$\log(1+r_5)=\frac{0{,}0742918-0{,}010366}{3}=0{,}0212184;$$

zkąd

$$1+r_5=1{,}05007$$

$$r_5=0{,}05007.$$

Poczem znalezionoby $r_6=0{,}04998$. Ztąd już wnieść można że stopa procentu jest 5 od 100.

450. Zagadnienie V. *Na jakiej stopie procentu składanego trzeba umieścić kapitał* 12567 *fr., żeby za* 10 *lat nabył wartości* 25841 *fr?*

Według formuły (1) będzie

$$25841=12567(1+r)^{10};$$

zkąd

$$\log(1+r)=\frac{\log 25841-\log 12567}{10}$$

$$=\frac{4{,}4123093-4{,}0982316}{10}=0{,}03140777.$$

$$1+r=1{,}074998$$

$$r=0{,}074998.$$

Więc trzeba umieścić kapitał na 7,50 od 100.

451. Zagadnienie VI. *Pewna osoba, mając do zapłacenia summę* a *za* m *lat i summę* b *za* n *lat, chce wystawić na obie summy jeden bilet płatny za* p *lat; jaką powinna napisać summę* x *na tym bilecie?*

Kapitał a, płatny po m latach, ma dzisiaj wartość $\frac{a}{(1+r)^m}$; tak samo kapitały b i x płatne, pierwszy po n latach drugi po p latach, wartają dzisiaj $\frac{b}{(1+r)^n}$ i $\frac{x}{(1+r)^p}$; powinno więc być

$$\frac{x}{(1+r)^p}=\frac{a}{(1+r)^m}+\frac{b}{(1+r)^n},$$

zkąd

$$x=a(1+r)^{p-m}+b(1+r)^{p-n}.$$

452. Raty roczne. Nazywa się *ratą roczną* summa stała, dawana rocznie, do spłacenia zaciągniętego długu, albo do uzbierania kapitału.

Na mocy tego podwójnego określenia, rzecz o ratach rocznych przywodzi się do dwóch zadań.

Pierwsze zadanie. *Zaciągnięto dług* C, *na stopę* r *od* 1 *fr., z warunkiem spłacenia go wraz z procentem składanym, ratami rocznemi przez* n *lat. Pytanie jaka jest kwota raty?*

Ta kwota powinna być oczywiście taka żeby, licząc wszystkie raty z ich procentami składanemi aż do czasu ostatniej wypłaty, otrzymano wartość jakiej w tym czasie nabywa zapożyczony kapitał.

Owoż, wypłata pierwszej raty odbywa się w rok po dniu pożyczki; ta rata a, gdyby odniesiono jej wypłatę na koniec n^{tego} roku, nabyłaby wartości $a(1+r)^{n-1}$; w tej epoce wartość drugiej raty byłaby $a(1+r)^{n-2}$, wartość trzeciej byłaby $a(1+r)^{n-3}$; i tak następnie aż do ostatniej, która jest a. Więc wszystkie raty czyniłyby postępnię geometryczną

$$a(1+r)^{n-1}+a(1+r)^{n-2}+a(1+r)^{n-3}+\ldots+a(1+r)+a,$$

mającą n wyrazów których summa równa się

$$\frac{a\{(1+r)^n-1\}}{r}.$$

Ale, na końcu n lat, kapitał zapożyczony C nabywa wartości

$$C(1+r)^n;$$

powinno więc być

$$(3) \qquad C(1+r)^n=\frac{a\{(1+r)^n-1\}}{r},$$

albo $$Cr(1+r)^n=a\{(1+r)^n-1\}.$$

Taka jest ogólna formuła rat rocznych do umorzenia długu.

453. Dobrze jest znać jeszcze następujący sposób otrzymania formuły (3).

Osoba zaciągająca dzisiaj dług C winna na końcu roku $C(1+r)$; a ponieważ wtedy spłaca summę a, zostaje dłużna reszty

$$C(1+r)-a.$$

Na końcu drugiego roku dług powiększył się procentem jednego roku i stał się

$$\{C(1+r)-a\}(1+r) \quad \text{albo} \quad C(1+r)^2-a(1+r).$$

Ale wtedy osoba spłaca drugą ratę a, i zostaje jeszcze winna

$$C(1+r)^2-a(1+r)-a.$$

Na końcu trzeciego roku, ten dług, który się powiększy procentem jednego roku i zmniejszył trzecią ratą a, jest

$$C(1+r)^3-a(1+r)^2-a(1+r)-a.$$

Widać już oczywiście że na końcu n^{tego} roku dług będzie

$$C(1+r)^n-a(1+r)^{n-1}-a(1+r)^{n-2}-\ldots a(1+r)-a.$$

Owoż, w tej epoce dług powinien zostać całkiem spłacony; więc ostatnie wyrażenie jest równe zeru i daje formułę

$$C(1+r)^n=a(1+r)^{n-1}+a(1+r)^{n-2}+\ldots+a(1+r)+a$$

$$=a\frac{\{(1+r)^n-1\}}{r},$$

jako wyżej.

Ten drugi sposób znalezienia formuły (3) jest godny uwagi, bo pokazuje ile zostaje długu na końcu każdego roku. Jakoż, po upływie k lat zostaje do spłacenia

$$C(1+r)^k-a(1+r)^{k-1}-a(1+r)^{k-2}-\ldots\ldots-a(1+r)-a.$$

454. Równanie (3), zawierające cztery ilości C, a, n, r, służy do wyznaczenia jednej z nich gdy trzy inne są wiadome.

I tak, 1°. *Znaleźć* a.

Formuła (3) daje zaraz

$$a=\frac{Cr(1+r)^n}{(1+r)^n-1}.$$

Trzeba najpierwej wyrachować przez logarytmy potęgę $(1+r)^n$, i odjąć od niej 1; co da mianownik. Potem, za pomocą formuły

$$\log a=\log Cr+n\log(1+r)-\log\{(1+r)^n-1\},$$

wyrachować $\log a$ i następnie a.

Uwaga. Rata a zmniejsza się gdy n się powiększa; jakoż, dając formule (3) kształt

$$a=\frac{Cr}{1-\frac{1}{(1+r)^n}},$$

widzimy że, w miarę jak n rośnie, mianownik rośnie także i zbliża się coraz bardziej do 1; więc a zmniejsza się i dąży do Cr. Jeśli $n = \infty$ będzie $a = Cr$. Wtedy rata roczna nazywa się *rentą wieczystą*. Co naprzód wiadome.

2° *Znaleźć* C.

Formuła (3) daje

$$C = \frac{a\{(1+r)^n - 1\}}{r(r+r)^n};$$

Rachunek taki sam jako wyżej. Ale można go cokolwiek uprościć, dając formule kształt

$$C = \frac{a}{r}\left\{1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right\};$$

wtedy trzeba wyrachować przez logarytmy odwrotność $\frac{1}{(1+r)^n}$ i odjąć ją od 1; poczem nietrudno już znaleźć C.

3° *Wyznaczyć* n.

Przekształca się najpierwej równanie (3) na

$$(a - Cr)(1+r)^n = a;$$

zkąd

$$n = \frac{\log a - \log(a - Cr)}{\log(1+r)}.$$

Trzeba uważać że $a > Cr$; bo Cr jest procentem od kapitału C, i oczywiście rata a powinna zawierać ten procent z częścią kapitału; inaczej umorzenie długu byłoby niemożebne. Gdy $a = Cr$, wtędy $\log(a - Cr) = -\infty$ i $n = \infty$; to znaczy że płacąc sam procent nie można się uiścić z długu; bo płaci się tylko rentę wieczystą.

Jeśli dzielenie daje dla n liczbę całkowitą, ta liczba rozwiązuje zagadnienie. Ale, gdy dzielenie ma resztę, zagadnienie jest niemożebne. W ostatnim przypadku, nazywając k i $k+1$ dwie liczby całkowite po sobie idące, między któremi zawiera się iloraz zupełny, można okazać że k rat rocznych nie wystarcza do spłacenia długu, a dołączając jeszcze jedną ratę danoby więcej niż trzeba. I w samej rzeczy, jest

$$k < \frac{\log a - \log(a - Cr)}{\log(1+r)} < k+1,$$

albo

$$\log(1+r)^k < \log\frac{a}{a-Cr} < \log(1+r)^{k+1};$$

zkąd, przechodząc do liczb, wywodzimy dwie nierówności

$$a(1+r)^k - Cr(1+r)^k < a \quad \text{i} \quad a(1+r)^{k+1} - Cr(1+r)^{k+1} > a,$$

i następnie

$$a\{(1+r)^k - 1\} < C(1+r)^k \quad \text{i} \quad a\{(1+r)^{k+1} - 1\} > C(1+r)^{k+1}.$$

Co było do dowodzenia.

Więc, jeśli szukając liczby n lat, otrzymano iloraz k i pewną resztę, ta reszta będzie wskazem że nie można umorzyć długu ratami rocznemi; bo, wypłaciwszy k rat, zostanie jeszcze do spłacenia różnica

$$C(1+r)^k - \frac{a\{(1+r)^k - 1\}}{r} \quad \text{albo} \quad \frac{a - (a-Cr)(1+r)^k}{r}.$$

Gdyby dłużnik wypłacił całą ratę a na końcu roku $k+1$, wierzyciel miałby mu do zwrócenia summę

$$a - \frac{a(1+r) - (a-Cr)(1+r)^{k+1}}{r} \quad \text{albo} \quad \frac{(a-Cr)(1+r)^{k+1} - a}{r}.$$

4° *Wyznaczyć* r.

Równanie (3) jest względem r stopnia $n+1$; można jednak nie rozwiązując go, znaleźć dość łatwo przybliżoną wartość r. Jakoż, przypuszczając ilości C i n stałe, jest widoczne samo z siebie że rata a powiększa się albo zmniejsza w miarę jak r rośnie albo maleje; więc, dając formule (3) kształt

$$\frac{a}{C}=\frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n-1} \quad \text{albo} \quad \frac{a}{C}=\frac{r}{1-\frac{1}{(1+r)^n}},$$

jeśli zamiast r położymy wartość r_1, zwykle zawartą między 0,03 i 0,06, ta wartość okaże się za małą albo za wielką, według jak druga strona równania będzie mniejsza albo większa od pierwszej. Wynik podstawienia jest wskazem w jaką stronę trzeba kierować przybliżenie. Po kilku próbach trafnie dobranych, otrzymuje się dla r wartość dostatecznie przybliżoną.

Można jeszcze działać inaczej. Przypuszczając ilości a i C stałe, nietrudno spostrzedz że n rośnie albo maleje w miarę jak się r powiększa albo zmniejsza; z resztą dług jest tem większy im stopa procentu $100r$ jest wyższa. To wiedząc, z formuły (3), za pomocą logarytmów, wyciągamy dla n wartość

$$n=\frac{\log a-\log(a-Cr)}{\log(1+r)},$$

i zamiast r kładziemy r_1. Jeśli to podstawienie czyni drugą stronę większą albo mniejszą od pierwszej, trzeba zmniejszyć albo zwiększyć r_1, aby się bardziej zbliżyć do prawdziwej wartości r; etc.

455. Drugie zadanie. *Pewna osoba umieszcza, na początku każdego roku, summę* a *przez* n *lat, i kapitalizuje procenta po* r *od* 1 *fr. Jaki będzie miała kapitał* C *na końcu* n*tego* *roku?*

Pierwsza summa a, na procencie przez n lat, nabywa wartości $a(1+r)^n$; druga, będąc umieszczona przez $n-1$ lat, nabywa wartości $a(1+r)^{n-1}$; i tak dalej; ostatnia summa, zostając na procencie przez rok tylko, ma wartość $a(1+r)$. Będzie więc

$$C=a(1+r)^n+a(1+r)^{n-1}+a(1+r)^{n-2}+\ldots+a(1+r),$$

albo

$$(4)\quad C=\frac{a(1+r)\{(1+r)^n-1\}}{r}=\frac{a\{(1+r)^{n+1}-(1+r)\}}{r}.$$

Taka jest formuła tworzenia się kapitału ratami rocznemi. Służy ona do wyznaczenia jednej z czterech ilości a, C, n, r gdy trzy inne są dane, i przedstawia te same okoliczności rachunków co formuła (3).

456. ZASTOSOWANIA LICZEBNE. Przykład I. *Jaką ratą roczną a można spłacić, przez 25 lat, summę 63500 fr. na procencie 4 od sta?*

Formuła (3), w której niewiadoma jest a, daje

$$\log a=\log Cr+n\log(1+r)-\log\{(1+r)^n-1\}.$$

Mamy zaś

$$\log(1+r)=\log 1{,}04=0{,}01703334$$

$$\log(1+r)^n=25\log 1{,}04=0{,}4258335$$

zkąd

$$(1+r)^n=2{,}665836.$$

Następnie

$$\log Cr=\log 2540\ldots\ldots=3{,}4048337$$

$$n\log(1+r)\ldots\ldots\ldots\ldots=0{,}4258335$$

$$-\log\{(1+r)^n-1\}=-\log 1{,}665836=\bar{1}{,}7783677$$

$$\log a\quad=3{,}6090349.$$

Więc

$$a=4064\text{ fr. }76.$$

Ppzykład II. *Jaką summę można zapożyczyć dzisiaj, ofiarujac płacić przez 10 lat ratę roczną 2500 fr. na stopie 4,5 od sta?*

Dając formule (3) kształt

$$C = \frac{a}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right),$$

będzie

$$\log C = \log a + \log\left(1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right) - \log r.$$

Owoż

$$\log(1+r) = \log 1{,}045 \qquad = 0{,}01911629$$

$$\log.\frac{1}{(1+r)^n} = -10\log 1{,}045 \quad = \bar{1},8088371$$

zkąd

$$\frac{1}{(1+r)^n} = 0{,}6439276$$

$$1 - \frac{1}{(1+r)^n} = 0{,}3560724\,.$$

Następnie

$$\begin{array}{ll} \log a = \log 2500 & = 3{,}3979400 \\ \log\left(1 - \dfrac{1}{(1+r)^n}\right) & = \bar{1},5515383 \\ -\log r = -\log 0{,}045 & = 1{,}3467875 \\ \hline \qquad\qquad \log C & = 4{,}2962658. \end{array}$$

Więc

$$C = 19781 \text{ fr. } 80.$$

PRZYKŁAD III. *Pewna osoba umieszcza, na początku każdego roku* 100 *fr. na procencie składanym po* 5 *od sta; jaką będzie miała summę za* 12 *lat?*

Formuła (4) daje

$$\log C = \log a + \log\{(1+r)^{n+1} - (1+r)\} - \log r.$$

Owoż

$$\log(1+r) = \log 1{,}05 \qquad = 0{,}02118930$$

$$\log(1+r)^{n+1} = 13\log 1{,}05 \qquad = 0{,}2754609$$

zkąd

$$\begin{array}{ll} (1+r)^{n+1} & = 1{,}885649 \\ 1+r & = 1{,}05 \\ \hline (1+r)^{n+1} - (1+r)\ldots\ldots & = 0{,}835649. \end{array}$$

Następnie

$$\begin{aligned} \log a &= \log 100 \ldots\ldots\ldots && = 2 \\ \log\{(1+r)^{n+1} - (1+r)\} & && = \bar{1},9220239 \\ -\log r &= \log 0,05 \ldots\ldots && = 1,3010300 \\ \hline & \log C && = 3,2230539. \end{aligned}$$

Więc

$$C = 1671 \text{ fr. } 30.$$

Przykład IV. *W jakim czasie pożyczka* 100000 *fr. na stopie* 4 *od* 100, *będzie spłacona ratą roczną* 6789 *fr.* 50?

Formuła (3) daje

$$n = \frac{\log a - \log(a - Cr)}{\log(1+r)}.$$

Kładąc wartości, będzie

$$n = \frac{\log 6789,5 - \log 2789,5}{\log 1,04} = \frac{3,8318378 - 3,4455264}{0,0170333}$$

$$= \frac{3863114}{170333} = 22 + \ldots$$

Trzeba więc wypłacić 22 rat rocznych. A ponieważ jest reszta, te raty nie umorzą całego długu, i zostanie jeszcze na końcu 22^{go} roku do spłacenia summa, wskazana w n^{ro} 456, 3° przez

$$\frac{a - (a - Cr)(1+r)^k}{r}.$$

Owoż,

$$\begin{aligned} \log(a - Cr) &= \log 2789,5 = 3,4455262 \\ \log(1+x)^k &= \log(1,04)^{22} = 0,3747344 \\ \hline \log(a - Cr)(1+r)^{22} &= 3,8202606 \end{aligned}$$

zkąd

$$(a - Cr)(1+r)^{22} = 6610,9.$$

Następnie

$$\frac{6789,5 - 6610,9}{0,04} = 4465.$$

Więc, po wypłaceniu 22 rat rocznych, zostaje jeszcze dług 4465 fr.

Przykład V. *Płacąc ratę* 7 051 956 *fr. przez* 25 *lat, umorzono pożyczkę* 104 567 890 *fr. Jaka była stopa procentu?*

Formuła (3) daje

$$n = \frac{\log a - \log(a - Cr)}{\log(1+r)}.$$

Mamy $\log a = \log 7051956 = 6{,}8483096.$

Owoż, przypuszczając najpierwej $r = 0{,}04$, będzie

$$Cr = 104567890 \times 0{,}04 = 4182715{,}60$$

$$\log(a - Cr) = \log 2869240{,}40 = 6{,}4577669$$

$$\log(1+r) = \log 1{,}04 = 0{,}01703334$$

więc

$$n = \frac{6{,}8483096 - 6{,}4577669}{0{,}01703334} = \frac{39054270}{703334} = 22 + \ldots$$

Wartość $r = 0{,}04$ jest za mała.

Przypuśćmy $r = 0{,}05$. Będzie

$$Cr = 104567890 \times 0{,}05 = 5228394{,}50$$

$$\log(a - Cr) = \log 1833561{,}50 = 6{,}2632955$$

$$\log(1+r) = \log 1{,}05 = 0{,}02118930,$$

więc

$$n = \frac{0{,}5850141}{0{,}02118930} = 27 + \ldots$$

Wartość $r = 0{,}05$ jest za wielka.

Biorąc średnię arytmetyczną między znalezionemi wartościami 0,04 i 0,05, otrzymujemy $r = \frac{0,04 + 0,05}{2} = 0,045.$

Wartość przybliżona na mniej niż 0,005. Żeby wiedzieć jakie jest przybliżenie, przez niedostatek czy przez zbytek, podstawiamy tę wartość zamiast r, i znajdujemy

$$
\begin{aligned}
Cr &= 104567890 \times 0,045 &&= 4705555,15\\
\log a &= \log 7051956 &&= 6,8483096\\
\log(a - Cr) &= \log 2346400,95 &&= 6,3704022\\
\log(1+r) &= \log 1,045 &&= 0,01911629;
\end{aligned}
$$

zatem

$$n = \frac{47790740}{1911629} = 25,00001\ldots$$

Ten wynik dowodzi że wartość $r = 0,045$ jest przez zbytek. Więc znaleziona stopa procentu 4 fr. 50 jest cokolwiek większa od prawdziwej, ale się od niej różni o mniej niż $^1/_2$ centyma. Co łatwo sprowadzić, posuwając dalej przybliżenie i biorąc $r = 0,0449$.

Uwaga. Gdyby do rozwiązywania tego zagadnienia użyto drugiej metody, biorąc formułę

$$\frac{a}{C} = \frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1},$$

wyznaczonoby najpierwej

$$\frac{a}{C} = \frac{7051956}{104567890} = 0,06743901\ldots$$

Poczem, uważając że $r < \frac{a}{C}$, i podstawiając na przykład $r=0{,}045$, byłoby

$$\log(1+r)=\log 1{,}045 \quad =0{,}01911629$$

$$\log(1+r)^n=25\log 1{,}045 \quad =0{,}47790725$$

$$(1+r)^n=3{,}005434;$$

zatem mianoby

$$\frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n-1}=\frac{0{,}13524453}{2{,}005434}=0{,}06743903\ldots$$

Ten wynik podstawienia dowodzi że wartość $r=0{,}045$ jest przybliżona przez zbytek i różni się mało od prawdziwej. Co sprawdza wartość otrzymaną wyżej.

Przykład VI. *Umieszczając co rok summę 1125 fr. na procencie składanym, uzbierano przez 20 lat kapitał 37327 fr. Jaka była stopa procentu?*

Wkładając co rok summę a i kapitalizując, otrzymuje się oczywiście summę C tem prędzej im stopa procentu jest wyższa. To dowodzi że n maleje gdy r rośnie, i na odwrót. Żeby więc znaleźć r, rozwiązujemy równanie (4) względem n; co daje

$$n+1=\frac{\log\{(C+a)r+a\}-\log a}{\log(1+r)}=21.$$

Owoż, przypuszczając $r=0{,}046$ będzie

$$\log(1+r)=\log 1{,}046=0{,}01953168$$

$$C+a=38452,$$

$$\log\{(C+a)r+a\}=\log 2893{,}792 \quad =3{,}4614673$$

$$\log a=\log 1125 \quad =3{,}0511225;$$

zatem

$$\frac{0{,}4102848}{0{,}01953168}=21{,}006\ldots$$

co pokazuje że wartość $r=0{,}046$ jest za mała.

Ciągnąc dalej rachunek, łatwo widzieć że wartości $r=0{,}0462$ i $r=0{,}0463$ są przybliżone, pierwsza przez niedostatek, druga przez zbytek; ich średnia arytmetyczna $r=0{,}04675$ różni się od prawdziwej wartości o mniej niż 0,00005. Więc stopa procentu 4 fr. 675 jest z błędem mniejszym od pół centyma.

Uwaga. Można innym sposobem przyjść do tych samych wyników. Uważając że kapitał uzbierany C jest tem większy im wyższa stopa procentu, trzeba tylko dać formule (4) kształt

$$\frac{C}{a}=\frac{(1+r)^{n+1}-(1+r)}{r}$$

i probować dla r wartości użytych wyżej

457. Niekiedy dług zaciągnięty w towarzystwach kredytowych spłaca się, nie jedną ratą roczną, ale dwiema ratami półrocznemi równemi. Według takiej ugody, oznaczając przez a ratę wypłacaną co sześć miesięcy, przez r' procent półroczny od 1 fr. i przez n' liczbę rat półrocznych, będzie

$$C(1+r')^{n'}=\frac{a'\{(1+r')^{n'}-1\}}{r}.$$

Ale teraz, odnosząc wszystko do jednego roku, mamy: $a'=\frac{a}{2}$, $r'=\frac{r}{2}$, $n'=2n$; więc formuła rat półrocznych jest

$$(5)\qquad C\left(1+\frac{r}{2}\right)^{2n}=\frac{a\left\{\left(1+\frac{r}{2}\right)^{2n}-1\right\}}{r}.$$

Na zastosowanie weźmy liczby przykładu 1 n^ro^ 456, i szukajmy *jaką ratą półroczną, wypłacaną przez* 25 *lat, umorzy się kapitał* 63500 *fr. na stopie* 4 *od* 100.

Formuła (5), w której niewiadomą jest a, daje

$$\log a=\log Cr+2n\log\left(1+\frac{r}{2}\right)-\log\left\{\left(1+\frac{r}{2}\right)^{2n}-1\right\}.$$

Owoż, $\log\left(1+\frac{r}{2}\right)=\log(1,02)=0,00860017$

$$\log\left(1+\frac{r}{2}\right)^{2n}=50\log(1,02)=0,4399944\,;$$

zkąd $$\left(1+\frac{r}{2}\right)^{2n}=2,691587.$$

Następnie $\log Cr=\log 2540\ldots\ldots\ldots\ldots=3,4048337$

$$2n\log\left(1+\frac{r}{2}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=0,4300085$$

$$-\log\left\{\left(1+\frac{r}{2}\right)-1\right\}=-\log 1,691587\quad=\bar{1},7717056$$

$$\log a\quad=3,6065478.$$

Więc $$a=4041 \text{ fr. } 54.$$

Wartość mniejsza od znalezionej 4064 fr. 76 w przykładzie o którym mowa. Co naprzód wiadome.

458. Zagadnienie I. *Znaleźć wartość* a *renty płatnej przez* n *lat, wiedząc że wartość* k *takiej renty byłaby płatna przez* p *lat.*

Kapitał renty k, płatnej przez p lat, wyraża się przez

$$\frac{k\left\{(1+r)^p-1\right\}}{r(1+r)^p};$$

będzie więc

$$\frac{k\left\{(1+r)^p-1\right\}}{r(1+r)^p}(1+r)^n=\frac{a\left\{(1+r)^n-1\right\}}{r},$$

zkąd

$$a=\frac{k\left\{(1+r)^p-1\right\}}{(1+r)^n-1}(1+r)^{n-p}.$$

459. Zagadnienie II. *Jaki jest kapitał renty która rośnie co rok w postępni geometrycznej ze stosunkiem* q, *i ma trwać* n *lat?*

Nazywając a pierwszą rentę, będzie

$$C(1+r)^n = a(1+r)^{n-1} + aq(1+r)^{n-2} + \ldots + aq^{n-2}(1+r) + aq^{n-1};$$

zkąd, biorąc aq^{n-1} za czynnik, etc... wynika

$$C = \frac{aq^{n-1}\left\{\left(\frac{1+r}{q}\right)^n - 1\right\}}{\frac{1+r-q}{q}(1+r)^n} = \frac{a\{q^n-(1+r)^n\}}{(q-1-r)(1+r)^n}.$$

460. Zagadnienie III. *Jaki jest kapitał renty która rośnie jako liczby* 1, 2, 3, 4...n, *i ma być wypłacana przez* n *lat?*

Mamy zaraz

$$C(1+r)^n = a\{(1+r)^{n-1} + 2(1+r)^{n-2} + \ldots (n-1)(1+r) + n\}$$

albo

$$\frac{C}{a}(1+r)^n = (1+r)^{n-1} + 2(1+r)^{n-2} + 3(1+r)^{n-3} + \ldots$$

$$+ (n-1)(1+r) + n.$$

Żeby łatwo znaleźć summę wyrazów drugiej strony, mnożymy najpierwej obie strony równania przez $1+r$; co daje

$$\frac{C}{a}(1+r)^{n+1} = (1+r)^n + 2(1+r)^{n-1} + 3(1+r)^{n-2} + \ldots$$

$$+ (n-1)(1+r)^2 + n(1+r);$$

poczem, odciągając stronami, otrzymujemy

$$\frac{Cr}{a}(1+r)^n = (1+r)^n + (1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + \ldots$$

$$+ (1+r)^2 + (1+r) - n,$$

albo

$$\frac{Cr}{a}(1+r)^n=(1+r)\frac{\{(1+r)^n-1\}}{r}-n.$$

Więc szukany kapitał jest

$$C=\frac{a}{r^2(1+r)^n}\{(1+r)^n-1-r-nr\}.$$

ĆWICZENIA.

I. Wyrachować wartość kapitału 50000 fr. umieszczonego na procencie składanym po 4 od 100, przez 15 lat i 4 miesiące.

Odpowiedź : 91247 fr. 80.

II. Jaki umieścić kapitał na procencie składanym po 4,5 od 100, przez lat 8 i dni 90, żeby nabył wartości 50000 fr?

Odpowiedź : 34768 fr. 15.

III. Na jakiej stopie procentu składanego trzeba umieścić kapitał 2543 fr. żeby, po 24 latach, 5 miesięcach i 10 dniach, nabył wartości 7460 fr.?

Odpowiedź : 4,5 od 100.

IV. Ludność pewnego państwa, wynosząca 25,000,000 mieszkańców, powiększa się każdego roku o $\frac{1}{400}$ swojej wartości

Jaka będzie ta ludność za wiek?

Odpowiedź : 32 090 600 mieszkańców, okrągło.

V. Jak wielki kapitał trzeba złożyć w kassie oszczędności żeby, dopłacając po 200 fr. przez 10 lat, odebrać na końcu tego czasu summę 12000 fr.? Kassy oszczędności płacą zwykle 4 od 100.

Odpowiedź : 6752 fr. 1 c.

VI. Pewna osoba wnosi do banku przezorności co rok summę v, przez lat n. Pytanie jaką rentę a będzie odbierała na początku każdego z n lat, albo każdego z $2n$ lat następujących?

Odpowiedź : $a=v(1+r)^n$ przez n lat;

albo $$a=\frac{v(1+r)^n}{(1+r)^n+1}$$ przez $2n$ lat.

VII. Pewien zapisał swemu wnukowi 300 fr. przez lat 10 pobierać się mające. Wnuk zażądał żeby spadkobierca, wytrącając sobie procent składany, wypłacił mu zaraz ten zapis. Pytanie ile spadkobierca powinien wypłacić, rachując 5 od 100?

Odpowiedź : 2316 fr. 52.

VIII. Dowieśdź ogólnie że, w tych samych warunkach, rata roczna jest większa od podwójnej raty półrocznej.

IX. Za ile lat wyczerpa się kapitał 100000 fr. złożony na procencie składanym po 5 od 100, z którego biorą co rok summę 6000 fr.?

Odpowiedź : Po 36 latach. Na końcu 36go roku zostanie już tylko z kapitału summa 4163 fr. 70, która na końcu 37go roku nabędzie wartości 4371 fr. 88.

X. Pewien zaciągnął dług 400000 fl. i spłaca go rocznie ratami po 25000 fl. z procentem 5 od 100. Za ile lat dług będzie umorzony?

Odpowiedź : Po 33 latach dług nietylko zostanie całkiem wypłacony, ale jeszcze wierzyciel będie winien dłużnikowi nadpłaconą summę 318,8 fl. (Euler *Introd. in analys. infinit*).

LOGARYTMY UWAŻANE JAKO WYKŁADNIKI

FUNKCYA WYKŁADNICZA a^x.

461. Nowa teorya logarytmów opiera się na własnościach funkcyi wykładniczej a^x, która dlatego tak się nazywa że jej zmienna x jest w wykładniku, i w której a oznacza liczbę stateczną dodatną, większą albo mniejszą od jedności. Żeby poznać własności tej funkcyi, wiedzieć jak się ona zmienia, gdy x przechodzi ciągiem przez wszystkie stany wielkości, trzeba określić potęgę a^x, rozróżniając wykładnik x spółmierny i niespółmierny.

462. *Gdy wykładnik* x *jest spółmierny, całkowity albo ułamkowy, potęgi dodatne liczby dodatnej* a *są większe albo mniejsze od jedności, i rosną albo maleją razem z wykładnikiem, według jak liczba* a *jest większa albo mniejsza od jedności. Rzecz ma się przeciwnie dla potęg odjemnych.*

Jakoż, oznaczając ogólnie przez $\frac{m}{n}$ wykładnik x, całkowity albo ułamkowy, mamy

$$a^x = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Jeśli $a > 1$,

będzie $a^m > 1$; zatem $\sqrt[n]{a^m} > 1$, albo $a^{\frac{m}{n}} > 1$.

Następnie, biorąc $\frac{m}{n} > \frac{m'}{n'}$, zkąd $mn' > nm'$, otrzymujemy oczywistą nierówność

$$a^{\frac{mn'}{nn'}} > a^{\frac{nm'}{nn'}},$$

która daje

$$a^{\frac{m}{n}} > a^{\frac{m'}{n'}}.$$

Jeśli $a < 1$,

biorąc $\frac{m}{n} > \frac{m'}{n'}$ dowiedzie się łatwo że $a^{\frac{m}{n}} < a^{\frac{m'}{n'}}$.

Ponieważ potęgi odjemne są odwrotnościami potęg dodatnych, druga część wysłowionego twierdzenia jest następstwem pierwszej.

Ztąd wynika że, gdy wykładnik spółmierny x, dodatny albo odjemny, odbiera przyrost spółmierny dodatny h, wtedy jest

$$a^{x+h} \gtrless a^x \quad \text{według jak} \quad a \gtrless 1.$$

Albowiem

$$\frac{a^{x+h}}{a^x} = a^h.$$

463. Możemy teraz powiedzieć co znaczy wyrażenie a^x, gdy wykładnik x jest niespółmierny. Niech będą dwa ciągi

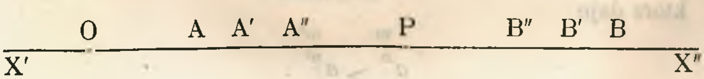
$$\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}, \frac{m''}{n''}, \ldots \quad \text{i} \quad \frac{m+1}{n}, \frac{m'+1}{n'}, \frac{m''+1}{n''}, \ldots$$

wartości przybliżonych, przez niedostatek i przez zbytek, liczby niespółmiernej x do której dążą coraz bardziej, różniąc się między sobą tak mało jak się podoba. Jeśli za x podstawimy te wartości, otrzymamy potęgi

$$a^{\frac{m}{n}}, a^{\frac{m'}{n'}}, a^{\frac{m''}{n''}}, \ldots \quad \text{i} \quad a^{\frac{m+1}{n}}, a^{\frac{m'+1}{n'}}, a^{\frac{m''+1}{n''}}, \ldots$$

których spólną granicą będzie a^x.

Aby to wydatnie okazać, przypuśćmy dla utkwienia myśli że $a > 1$, i weźmy na prostej XX', zaczynając od punktu O jako początku,



długości

$$\mathrm{OA}=a^{\frac{m}{n}},\quad \mathrm{OA}'=a^{\frac{m'}{n'}},\quad \mathrm{OA}''=a^{\frac{m''}{n''}}\ \ldots$$

i

$$\mathrm{OB}=a^{\frac{m+1}{n}},\quad \mathrm{OB}'=a^{\frac{m'+1}{n'}},\quad \mathrm{OB}''=a^{\frac{m''+1}{n''}},\ldots$$

Widzimy dobrze że skrajności A, A′, A″... odcinków przez niedostatek i skrajności B, B′, B″... odcinków przez zbytek są w dwóch odrębnych częściach linii XX′; ale przestwór który je oddziela może oczywiście stać się mniejszym od wszelkiej ilości naznaczonej. Co dowodzi że między temi dwiema częściami może tylko istnieć jeden punkt P przedziału. Otóż właśnie oddległość OP tego punktu od początku O ma za miarę a^x. Więc, gdy wykładnik x jest niespółmierny, wyrażenie a^x oznacza spólną granicę potęg $a^{\frac{m}{n}}$ i $a^{\frac{m+1}{n}}$ których wykładniki zbliżają się coraz bardziej do x; co daje

$$a^x=\mathrm{gr.}\,a^{\frac{m}{n}}.$$

464. To ustaliwszy, pojmuje się łatwo że prawidło wykładników całkowitych stosuje się do wykładników niespółmiernych. I w samej rzeczy, z określenia mamy

$$a^xa^y=\mathrm{gr.}\,a^{\frac{m}{n}}\times\mathrm{gr.}\,a^{\frac{p}{q}}.$$

Owoż

$$\mathrm{gr.}\,a^{\frac{m}{n}}\times\mathrm{gr.}\,a^{\frac{p}{q}}=\mathrm{gr.}\,a^{\frac{m}{n}}\cdot a^{\frac{p}{q}}=\mathrm{gr.}\,a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}};$$

a zaś $\mathrm{gr.}\,a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$ jest to cośmy nazwali a^{x+y}, ponieważ $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}$ ma za granicę $x+y$;

więc

$$a^xa^y=a^{x+y}.$$

Dowodzenie obejmuje przypadek w którym jeden z wykładników jest spółmierny a drugi niespółmierny. Zatem powyższa równość zogólnia zupełnie prawidło wykładników, i z niej się wywodzą wszystkie własności funkcyj wykladniczych

465. Twierdzenie. *Wyrażenie* a^x *jest funkcyą ciągłą.*

To znaczy że a^x zmienia się sposobem ciągłym, gdy x rośnie sposobem ciągłym; albo jeszcze innemi słowy, można dać zmiennej x przyrost h dość mały, i taki żeby przyrost funkcyi a^x był mniejszy od wszelkiej ilości naprzód oznaczonej.

Uważajmy najpierwej przypadek w którym liczba a, zawsze dodatna, jest większa od jedności. Jeśli nadamy zmiennej x przyrost dodatny h, funkcya a^x stanie się a^{x+h}, i będzie miała przyrost

$$a^{x+h}-a^x=a^x(a^h-1).$$

Ten przyrost jest dodatny; bo, na mocy tego co poprzedza, $a^h>1$; więc a^x rośnie razem z x.

Żeby dowieśdź że a^x rośnie sposobem ciągłym gdy się x wciąż powiększa, trzeba okazać że, biorąc ilość h dostatecznie małą, można zawsze uczynić zadość nierówności

$$a^{x+h}-a^x<\varepsilon \quad \text{albo} \quad a^h-1<\frac{\varepsilon}{a^x};$$

w której ε jest ilością tak małą jak się podoba.

Owoż, biorąc przyrost h mniejszy od ułamka $\frac{1}{n}$ mającego mianownik całkowity, twierdzenie będzie, dowiedzione, jeśli okażemy że można liczbą całkowitą n, przyzwoicie wielką, zadość uczynić nierówności

$$a^{\frac{1}{n}}-1<\frac{\varepsilon}{a^x} \quad \text{albo} \quad a<\left(1+\frac{1}{a^x}\right)^n;$$

co, jako już wiemy (nro 403), jest zawsze możebne.

Gdy liczba dodatna a jest mniejsza od 1, można ją wyrazić ułamkiem $\frac{1}{a'}$ którego mianownik przewyższa jedność; wtedy równość

$$a^x = \frac{1}{a'^x}$$

pokazuje że, gdy x rośnie ciągiem, a'^x rośnie także ciągiem; zatem a^x maleje sposobem ciągłym.

466. Wniosek. *Wynika z ciągłości funkcyi a^x że, gdy się x zmienia od $-\infty$ do $+\infty$, funkcya przechodzi przez wszystkie wartości dodatne i bierze raz tylko każdą z nich.*

Jakoż, 1° *gdy* $a > 1$. Potęgi całkowite liczby a, większej od jedności, są większe od jedności i mogą przechodzić wszelką naprzód oznaczoną wielkość; a że jest $a^0 = 1$, więc, gdy x rośnie od 0 do $+\infty$, funkcya a^x przechodzi przez wszystkie liczby zawarte między 1 i ∞.

Jeśli zaś damy zmiennej x wartości odjemne czyniąc

$$x = -x', \quad \text{będzie} \quad a^x = \frac{1}{a^{x'}};$$

wtedy, jeśli x' rośnie od 0 do $+\infty$, a'^x rośnie od 1 do $+\infty$; zatem a^x maleje od 1 do 0.

Więc, gdy x rośnie ciągiem od $-\infty$ do $+\infty$, funkcya a^x przechodzi przez wszystkie wartości od 0 do $+\infty$, i bierze raz tylko każdą z nich, ponieważ wciąż się powiększa.

2° Gdy $0 < a < 1$. Wyrażając a w kształcie ułamka $\frac{1}{a'}$ którego mianownik jest większy od jedności, będzie

$$a^x = \frac{1}{a'^x}.$$

Owoż, gdy x rośnie ciągiem od $-\infty$ do $+\infty$, a'^x rośnie wciąż od 0 do $+\infty$; wtedy a^x maleje ciągiem od $+\infty$ do 0, i przechodzi przez wszystkie wartości dodatne ale tylko raz przez każdą z nich.

Więc, jakakolwiek jest liczba dodatna a, gdy wykładnik x zmienia się ciągle, wyrażenie a^x daje wszystkie liczby dodatne, tak spółmierne jako niespółmierne.

NOWE OKREŚLENIE LOGARYTMÓW.

467. Mając dane równanie

$$a^x = y,$$

w którem a jest liczbą dodatną, mówi się że x jest logarytmem liczby y względem liczby a wziętej za *podstawę*. Więc *logorytmem liczby jest wykładnik potęgi do jakiej trzeba podnieść podstawę żeby otrzymać tę liczbę.*

Każdej podstawie odpowieda *układ logarytmów*. W każdym układzie logarytmem podstawy jest jedność, a logarytmem jedności zero; bo

$$a^1 = a, \quad a^0 = 1.$$

Gdy podstawa jest większa od 1, liczby większe od 1 mają logarytmy dodatne, a zaś liczby mniejsze od 1 mają logarytmy odjemne; $\log(+\infty) = +\infty$, $\log 0 = -\infty$.

Przeciwnie się mają rzeczy gdy podstawa jest mniejsza od 1.

Liczby odjemne nie mają logarytmów na podstawie dodatnej; bo liczba dodatna nie może wydać potęg odjemnych.

WŁASNOŚCI LOGARYTMÓW.

468. *Logarytm wieloczynu jest równy summie logarytmów jego czynników.*

Niech będą x, x', x'',... logarytmy liczb y, y', y'',..; z określenia mamy

$$a^x = y, \quad a^{x'} = y', \quad a^{x''} = y'', \ldots$$

zkąd mnożąc stronami, ponieważ prawidło wykładników jest ogólne (n^ro^ 464), otrzymujemy

$$a^{x+x'+x''+\cdot} = yy'y'' \ldots$$

Więc summa $x + x' + x'' + \ldots$ jest logarytmem wieloczynu $yy'y'' \ldots$; co daje

$$\log yy'y'' \ldots = \log y + \log y' + \log y'' + \ldots$$

469. *Logarytm ilorazu jest równy logarytmowi dzielnej mniej logarytmem dzielnika.*

Jakoż, dzieląc stronami równania

$$a^x = y, \quad a^{x'} = y',$$

będzie

$$a^{x-x'} = \frac{y}{y'};$$

więc $x - x'$ jest logarytmem ilorazu $\frac{y}{y'}$; zatem

$$\log \frac{y}{y'} = \log y - \log y'.$$

470. *Logarytm potęgi liczby jest równy logarytmowi tej liczby pomnożonemu przez wykładnik potęgi.*

Mamy

$$a^x = y.$$

Owoż, podnosząc obie strony równania do potęgi m^{tej}, jakikolwiek jest wykładnik m, dodatny albo odjemny, całkowity albo ułamkowy i nawet niespółmierny, będzie zawsze

$$a^{mx} = y^m.$$

Więc mx jest logarytmem potęgi y^m; co daje w całej ogólności

$$\log . y^m = m \log y.$$

Uwaga. Pierwiastek liczby jest szczególnym przypadkiem jej potęgi; i tak, $\sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}}$. Więc

$$\log . \sqrt[n]{y} = \frac{\log y}{n}.$$

to jest: logarytm pierwiastku n^{tego} liczby y równa się logarytmowi tej liczby podzielonemu przez wskaz pierwiastku.

ZWIĄZEK MIĘDZY LOGARYTMAMI DWÓCH UKŁADÓW. MODUŁ.

471. Niech będą a i a' podstawy logarytmów dwóch układów; oznaczając przez L i L' te logarytmy, na mocy nowego określenia mamy

$$a^{\mathrm{L}a'} = a';$$

jeśli weźmiemy logarytmy obydwóch stron względem podstawy a', znajdziemy

$$\mathrm{L}a' \mathrm{L}'a = 1.$$

To pokazuje że logarytmy podstaw dwóch układów, wzięte nawzajem w tych układach, są odwrotnościami jeden drugiego.

Nazwijmy teraz x i x' logarytmy liczby y wzięte w dwóch układach; będzie

$$a^x = y = a'^{x'}.$$

Biorąc logarytmy stron skrajnych względem podstawy a, naprzykład, otrzymujemy

$$x = x'\mathrm{L}a', \quad \text{zkąd} \quad x' = \frac{x}{\mathrm{L}a'} = x\mathrm{L}'a.$$

Co daje już wiadome prawidło: *Żeby przejść z jednego układu logarytmów do drugiego, trzeba pomnożyć dawne logarytmy przez odwrotność dawnego logarytmu nowej podstawy, albo, co to samo, przez nowy logarytm dawnej podstawy.*

Ten mnożnik stateczny nazywa się *modułem* logarytmów drugiego układu względem pierwszego, i oznacza się literą M. I tak, moduł logarytmów pospolitych względem neperyańskich przejście z neperyańskich do pospolitych jest

$$\mathrm{M} = \frac{1}{\mathrm{L}10} = \log e = 0{,}4342944819\ldots$$

Między logarytmami dwóch układów jest związek. Jakoż, powyższe równanie

$$x = x'\mathrm{L}a' \quad \text{albo} \quad \frac{\mathrm{L}y}{\mathrm{L}'y} = \mathrm{L}a'$$

pokazuje że: *stosunek logarytmów jednej liczby, w dwóch różnych układach, jest ten sam dla wszystkich liczb.*

Z ostatniego równania wynika jeszcze następujące

$$\frac{\mathrm{L}y}{\mathrm{L}'y} = \frac{\mathrm{L}y'}{\mathrm{L}'y'} \quad \text{albo} \quad \frac{\mathrm{L}y}{\mathrm{L}y'} = \frac{\mathrm{L}'y}{\mathrm{L}'y'},$$

które dowodzi ogólniejszego Twierdzenia: *Logarytmy dwóch liczb, wzięte w dwóch różnych układach, są proporcyonalne.*

TOŻSAMOŚĆ LOGARYTMÓW OKREŚLONYCH PRZEZ WYKŁADNIKI I PRZEZ POSTĘPNIE.

472. Niech będą liczby

$$a,\ aq,\ aq^2, \ldots aq^n$$

w postępni geometrycznej mającej stosunek q; ich logarytmy

$$\log a,\ \log a + \log q,\ \log a + 2\log q, \ldots \log a + n\log q,$$

jakąkolwiek mają podstawę, tworzą oczywiście postępnię arytmetyczną której stosunkiem jest $\log q$.

Niech będzie teraz układ logarytmów określony przez dwie postępnie, geometryczną i arytmetyczną,

$$q^{-n}, \ldots q^{-3},\ q^{-2},\ q^{-1},\ 1,\ q,\ q^2,\ q^3, \ldots q^n,$$

$$-n\alpha,\quad -3,\quad -2\alpha,\quad -\alpha,\ 0,\ \alpha,\ 2\alpha,\ 3\alpha, \ldots n\alpha.$$

Przypuszczając stosunek q dostatecznie blizki jedności, można zawsze wyobrazić sobie postępnię geometryczną, którejby wyrazy większe od jedności różniły się od liczb całkowitych tak mało jak się podoba. W tem założeniu, czyniąc

$q^{\frac{1}{\alpha}} = b$ zkąd $q = b^\alpha$, będzie

$$b^{-n\alpha} \ldots b^{-3\alpha},\ b^{-2\alpha},\ b^{-\alpha},\ b^0,\ b^\alpha,\ b^{2\alpha},\ b^{3\alpha}, \ldots b^{n\alpha},$$

$$-n\alpha,\ -3\alpha,\ -2\alpha,\ -\alpha,\quad 0,\ \alpha,\ 2\alpha,\ 3\alpha, \ldots n\alpha.$$

Przekształcony układ wyraźnie pokazuje że logarytmy liczb dodatnich są wykładnikami potęg podstawy b. Co było do dowodzenia.

CWICZENIA.

I. Rozwiązać równanie wykładnicze $a^{b^x}=c$.

Odpowiedź: $x=\dfrac{\log\dfrac{\log c}{\log a}}{\log b}$; przypuszczając ilości a, b, c dodatne, i $\dfrac{\log c}{\log a}>0$.

II. Rozwiązać równania

$$x=y^q,$$
$$x^q=y^p.$$

Odpowiedź: $x=y=0$ albo $x=y=1$.

III. Rozwiązać równania

$$(y+1)^x=1000$$
$$(y^4-2y^2+1)^{x-1}=\frac{(y-1)^{2x}}{(y+1)^x}.$$

Odpowiedź: $x=\dfrac{2}{\log 2}$, $y=1$; albo $x=\dfrac{2}{\log(1+10\sqrt{10})}$, $y=10\sqrt{10}$.

IV. Rozwiązać równania z pierwiastnikami arytmetycznemi.

$$(\sqrt{x})^{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=(\sqrt{y})^{\frac{8}{3}},$$
$$(\sqrt{y})^{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=(\sqrt{x})^{\frac{2}{3}}.$$

Odpowiedź: $x=y=1$,

albo $x=\left(\dfrac{11-\sqrt{57}}{6}\right)^2$, $y=\dfrac{11-\sqrt{57}}{6}$.

ROZDZIAŁ X

KOMBINACYE I DWUMIAN.

SZYKI ALBO WARYACYE.

473. Nazywamy *szykami* m przedmiotów branych po n, rozmaite układy jakie można utworzyć z tych m przedmiotów, biorąc je po n wszystkiemi sposobami możebnemi i stawiając rzędem jeden po drugim. Na mocy tego określenia, dwa szyki różnią się albo naturą składających przedmiotów, albo tylko porządkiem w jakim te przedmioty są ustawione.

I tak, niech będą, na przykład, cztery przedmioty które nazywamy literami a, b, c, d. Biorąc je po dwa wszystkiemi sposobami możebnemi, tworzymy z nich dwanaście następujących szyków

$$ab,\ ac,\ ad;\ ba,\ bc,\ bd;\ ca,\ cb,\ cd;\ da,\ db,\ dc.$$

Pierwszy i drugi szyk mają litery b i c różne; ale pierwszy i czwarty różnią się tylko porządkiem ustawienia tych samych liter a i b. Podobnie o innych

Uważajmy teraz ogólnie m przedmiotów, i oznaczmy symbolem $\overset{n}{A}_m$ liczbę wszystkich szyków jakie z tych przedmiotów, branych po n, utworzyć można.

Jeśli, mając dane m przedmiotów, mianowanych literami a, b, c,...k,l, napiszemy te litery po jednej, utworzymy m szyków

$$a, b, c, \ldots, k, l.$$

Ich liczba wyraża się przez

$$\overset{1}{A}_m = m.$$

Żeby znaleźć szyki m liter branych po *dwie*, dość jest na prawej stronie każdej litery napisać kolejno wszystkie inne; co daje

$$\begin{array}{l} ab,\ ac,\ ad, \ldots ak,\ al, \\ ba,\ bc,\ bd, \ldots bk,\ bl, \\ ca,\ cb,\ cd, \ldots ck,\ cl, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ ka,\ kb,\ kc, \ldots kj,\ kl, \\ la,\ lb,\ lc, \ldots lj,\ lk. \end{array}$$

Te szyki są wszystkie jakie z m liter, branych po dwie, otrzymać można; bo je utworzono stawiając każdą literę na wszystkich miejscach możebnych; i nie ma żadnego szyku powtórzonego dwa razy, dlatego że każda litera zajmuje względem wszystkich innych liter raz tylko pierwsze miejsce i raz tylko drugie. A ponieważ jest m linij poziomych, i każda zawiera $m-1$ szyków, liczba wszystkich szyków wyraża się przez

$$A_m^2 = m(m-1).$$

Otrzymuje się szyki m liter po trzy, pisząc na prawej stronie każdego szyku dwóch liter, kolejno każdą z $m-2$ innych liter; co daje

$$\begin{array}{l} abc,\ abd,\ abe, \ldots abk,\ abl, \\ acb,\ acd,\ ace, \ldots ack,\ acl, \\ adb,\ adc,\ ade, \ldots adk,\ adl, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ bac,\ bad,\ bae, \ldots bak,\ bal, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ lka,\ lkb,\ lkc, \ldots lki,\ lkj. \end{array}$$

Tym sposobem wszystkie szyki m liter, stawianych po trzy, zostały napisane. Bo szyk trzech liter składa się oczywiście z szyku dwóch liter, do którego dopisano inną literę, a żaden z powyszych szyków nie jest powtórzony dwa razy, dlatego że szyki stojące na jednej linii poziomej różnią się trzecią literą, a dwa szyki należące do dwóch linij poziomych różnią się literami albo ich porządkiem. Owoż jest $m(m-1)$ linij poziomych, tyle ile szyków po dwie litery, i każda z tych linij obejmuje $m-2$ szyków; więc liczba szyków m liter po trzy wyraża się przez

$$A_m^3 = m(m-1)(m-2).$$

Idąc tak dalej i rozumując podobnie, znajdujemy formułę ogólną

$$A_m^n = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1).$$

Liczba szyków m *przedmiotów, branych po* n, *jest równa wieloczynowi* n *czynników zmiejszających się jednością, zaczynając od* m.

474. Dobrze jest sprawdzić tę formułę, szukając jej następującym sposobem. Liczba wszystkich liter składających szyki A_m^n jest nA_m^n, ponieważ każdy szyk zawiera n liter; zatem jedna litera, na przykład a, wchodzi do tych szyków liczbę razy wyrażoną przez $\frac{n}{m}A_m^n$. Owoż jeśli, odosobniając literę a, utworzymy szyki A_{m-1}^{n-1}, i potem w każdym położymy literę a na n miejscach jakie ona zajmować może, znajdziemy wszystkie szyki zawierające literę a; ich liczba będzie nA_{m-1}^{n-1}, i wyrazi ile razy litera a wchodzi do szyków A_m^n. Więc, znając dwa wyrażenia tej samej liczby, otrzymujemy równanie ogólne

$$\frac{n}{m}A_m^n = nA_{m-1}^{n-1}$$

albo
$$A_m^n = m\,A_{m-1}^{n-1}.$$

Odejmując od m i n, kolejno liczby 1, 2, 3,... $n-2$, mamy

$$A_{m-1}^{n-1} = (m-1)A_{m-2}^{n-2},$$

$$A_{m-2}^{n-2} = (m-2)A_{m-3}^{n-3},$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$A_{m-n+2}^{2} = (m-n+2)\,A_{n-n+1}^{1}$$

a jest wprost $\quad A_{m-n+1}^{1} = m-n+1.$

Ztąd, mnożąc stronami wszystkie równości, wynika formuła

$$A_m^n = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1),$$

która daje liczbę szyków zwanych także waryacyami.

Zastosowania. 1° *Ile jest liczb mających trzy cyfry znaczące?* Tyle ile można utworzyć szyków, biorąc trzy którekolwiek z dziewięciu cyfer 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

$$A_9^3 = 9.8.7 = 504.$$

2° *Ile jest liczb trójcyfrowych?* Tyle ile można utworzyć szyków, biorąc trzy którekolwiek z dziesięciu cyfer 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0; ale odrzucając szyki zaczynające się od 0.

$$A_{10}^3 = 10.9.8 = 720.$$

Owoż, liczba szyków zaczynających się od 0 równa się

$$A_9^2 = 9.8 = 72.$$

Więc jest 648 liczb trójcyfrowych.

PRZEMIANY.

475. Nazywa się *przemianami* m przedmiotów rozmaite układy jakie otrzymać można z tych przedmiotów, stawiając je jeden po drugim we wszelkim porządku możebnym. Każda przemiana obejmuje wszystkie przedmioty, a dwie przemiany różnią się tylko samym porządkiem przedmiotów. Ztąd wynika że przemiany są szykami wszystkich razem przedmiotów. Więc, wyrażając przez P_m liczbę przemian m przedmiotów, będzie

$$P_m = m(m-1)(m-2)\ldots 2.1,$$

albo

$$P_m = 1.2.3\ldots m.$$

Liczba przemian m *przedmiotów jest równa wieloczynowi* m *pierwszych liczb całkowitych.*

Niekiedy, dla skrócenia, oznaczają wieloczyn $1.2.3\ldots m$ przez $m!$

Przemiany tworzą się następującym sposobem, Dwie litery a i b dają tylko dwie przemiany ab i ba. Aby mieć przemiany trzech liter a, b, c, trzeba na końcu każdej z dwóch pierwszych przemian ab i ba, postawić trzecią literę c, i przeprowadzić ją przez wszystkie miejsca; co daje sześć przemian

$$abc,\ acb,\ cab,$$

$$bac,\ bca,\ cba.$$

Ogólnie, znając wszystkie przemiany $m-1$ liter, żeby otrzymać przemiany m liter, dość jest, na końcu każdej z poprzedzających przemian, postawić literę $m^{tą}$ i przeprowadzić ją przez wszystkie miejsca aż do pierwszego.

Zastosowania. 1° *Wieloczyny równowarte są przemianami ich* *czynników.* Trzy czynniki a, b, c dają liczbę wieloczynów równowartych wyrażoną przez

$$P_3 = 1.2.3 = 6.$$

2° *Iloma sposobami 4 osoby mogą zasiadać do stołu?* Liczba tych sposobów jest równa liczbie przemian czterech przedmiotów

$$P_4 = 1.2.3.4 = 24.$$

3° *Iloma sposobami można ustawić* 10ciu *żołnierzy w linii prostej?* Liczba ustawień jest równa liczbie przemian dziesięciu przedmiotów

$$P_{10} = 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10 = 3628800.$$

Uwaga. W wyznaczniku rzędu n^{tego}, wyrazy tworzą się z głównego wyrazu $a_{1.1}a_{2.2}a_{3.3}\ldots a_{n.n}$, przemieniając wskazy pierwsze albo drugie wszystkiemi sposobami możebnemi; więc liczba wyrazów tego wyznacznika równa się liczbie przemian $1.2.3.4\ldots n$.

KOMBINACYE.

476. Nazywają *kombinacyami* m przedmiotów po n, rozmaite układy jakie się otrzymuje biorąc n z tych przedmiotów wszystkiemi sposobami możebnemi, tak żeby dwa układy różniły się przynajmniej jednym przedmiotem. Na przykład, z trzech liter a, b, c, branych po dwie, można tylko otrzymać trzy kombinacye

$$ab,\ ac,\ bc.$$

Oto jakim sposobem tworzą się kombinacye. Niech będzie ogólnie m liter $a, b, c, d, e, \ldots l$.

Kombinacye m liter po *jednej są*

$$a, b, c, d, e, \ldots l.$$

Żeby mieć kombinacye tych liter *po dwie*, trzeba do każdej litery dopisać kolejno wszystkie następujące; co daje

$$
\begin{array}{r}
ab,\ ac,\ ad,\ ae, \ldots al \\
bc,\ bd,\ be, \ldots bl \\
cd,\ ce, \ldots cl \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
jk,\ jl \\
kl.
\end{array}
$$

Tworzy się kombinacye m liter *po trzy*, dopisując do każdej kombinacyi *dwóch liter*, kolejno wszystkie litery następujące po tej która kończy kombinacyę. Tak się otrzymują kombinacye

$$
\begin{array}{r}
abc,\ abd,\ abe, \ldots abl \\
acd,\ ace, \ldots acl \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
akl \\
bcd,\ bce \ldots bcl \\
bde \ldots bdl \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
jkl.
\end{array}
$$

Podobnym sposobem tworzą się kombinacye następujących rzędów.

Żeby znaleźć liczbę kombinacyj m przedmiotów branych po n, dość uważać że, gdyby znano te kombinacye, wykonywając w każdej wszystkie przemiany n przedmiotów, otrzymanoby wszystkie szyki odpowiedającego rzędu. Albowiem, każdy szyk m przedmiotów po n różni się od kombinacyj tego rzędu samym tylko ustawieniem przedmiotów; a żaden szyk otrzymany przemianą przedmiotów kombinacyj nie jest powtórzony dwa razy, dlatego że szyki powstające z jednej kombinacyi różnią się porządkiem przedmiotów, a szyki pochodzące z dwóch kombinacyj różnią się przynajmniej jednym przedmiotem. Jeśli więc oznaczymy przez C_m^n liczbę kombinacyj m przedmiotów branych po n, będzie

$$A_m^n = C_m^n \times P_m,$$

zkąd

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_m} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots.\ n}.$$

477. Nietrudno dojść wprost do tej formuły. Jakoż, gdyby napisano wszystkie kombinacye C_m^n, ponieważ każda zawiera n liter, liczba napisanych liter byłaby nC_m^n; a że wszystkie litery wchodzą jednakowym sposobem, jedna z nich, naprzykład a, byłaby napisana liczbę razy wyrażoną przez $\frac{n}{m} C_m^n$. Można znaleźć tę liczbę innym sposobem. Jeśli, odosobniając literę a, utworzymy z $m-1$ innych branych po $n-1$ kombinacye C_{m-1}^{n-1}, i potem do każdej wstawimy odosobnioną literę a, otrzymamy wszystkie kombinacye rzędu n do których wchodzi litera a; więc ona jest napisana liczbę razy oznaczoną przez C_{m-1}^{n-1}. Znając teraz dwa wyrażenia tej samej liczby, mamy równość

$$\frac{n}{m} C_m^n = C_{m-1}^{n-1}$$

albo

$$C_m^n = \frac{m}{n} C_{m-1}^{n-1};$$

zkąd, odejmując od m i n liczby 1, 2, 3,... $n-2$, wywodzimy

$$C_{m-1}^{n-1}=\frac{m-1}{n-1}C_{m-2}^{n-2},$$

$$C_{m-2}^{n-2}=\frac{m-2}{n-2}C_{m-3}^{n-3},$$

. . . .

$$C_{m-n+2}^{2}=\frac{m-n+2}{2}C_{m-n+1}^{1},$$

a jest oczywiście $C_{m-n+1}^{1}=\frac{m-n+1}{1}.$

Więc, mnożąc wszystkie równości stronami, i znosząc czynniki spólne, znajdujemy szukaną formułę

$$C_m^n=\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1\ldots2\ldots3\ldots n}.$$

W zastosowaniu tej formuły dogodniej jest czasem pisać najpierwej mianownik a potem licznik.

478. Kombinacye są wieloczynami różnemi; owóż liczba kombinacyj m przedmiotów, branych po n, jest oczywiście całkowita; więc powyższa formuła dowodzi TWIERDZENIA ARYTMETYKI: *Wieloczyn* n *liczb całkowitych po sobie idących jest podzielny przez wieloczyn* n *pierwszych liczb.*

Mnożąc licznik i mianownik formuły kombinacyj, przez wieloczyn $1.2.3\ldots(m-n)$, można jej dać kształt nieraz użyteczny

$$C_m^n=\frac{1.2.3.4\ldots m}{1.2.3\ldots n\times1.2.3\ldots(m-n)}=\frac{P_m}{P_nP_{m-n}}.$$

Ten kształt pokazuje że druga strona zostaje ta sama gdy się w niej przemienia n na $m-n$. Mamy więc

$$C_m^{m-n}=\frac{1.2.3.4\ldots m}{1.2.3\ldots(m-n)\times1.2.3\ldots n}=C_m^n.$$

Ztąd TWIEREZENIE : *Liczba kombinacyj* m *przedmiotów branych po* n *jest równa liczbie kombinacyj tych przedmiotów branych po* m — n.

Twierdzenie samo przez się oczywiste; bo, jeśli z m przedmiotów wzięto n, zostaje $m-n$; więc każdej kombinacyi po n odpowieda kombinacya po $m-n$; ile jednych tyle drugich.

479. Często jest potrzebne TWIERDZENIE : *Liczba kombinacyj* m *przedmiotów po* n *jest równa liczbie kombinacyj* m — 1 *przedmiotów po* n, *więcej liczbą kombinacyj* m — 1 *przedmiotów po* n — 1.

Aby tego dowieśdź, uważajmy że, między kombinacyami m przedmiotów branych po n, są które nie zawierają pewnego przedmiotu a; inne go zawierają. Pierwsze się tworzą z $m-1$ przedmiotów po n; drugie tworzą się także z $m-1$ przedmiotów, ale branych po $n-1$ i przyłączając przedmiot a który uzupełnia n. Będzie więc

$$C_m^n = C_{m-1}^n + C_{m-1}^{n-1}.$$

I tak,

$$C_7^4 = C_7^3 = C_6^3 + C_6^2 = \frac{6.5.4}{1.2.3} + \frac{6.5}{1.2} = \frac{6.5}{1.2}\left(\frac{4}{3}+1\right) = \frac{7.6.5}{1.2.3}.$$

Równość wyrażająca ostatnie twierdzenie daje

$$C_m^n + C_m^{n+1} = C_{m+1}^{n+1},$$

$$C_{m-1}^n + C_{m-1}^{n+1} = C_m^{n+1},$$

$$C_{m-2}^n + C_{m-2}^{n+1} = C_{m-1}^{n+1},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$C_n^n + \quad 0 \quad = C_{n+1}^{n+1},$$

zkąd, dodając stronami, otrzymujemy formułę

$$C_m^n + C_{m-1}^n + C_{m-2}^n + \ldots + C_n^n = C_{m+1}^{n+1}$$

która nam będzie wkrótce użyteczna.

480'. Zastosowania. 1°. *W radzie złożonej z 24 członków ciągną losem kommissyę z 5u osób. Ile takich kommissyj być może?* Tyle ile jest kombinacyj z 24 osób dobieranych po 5.

$$C_{24}^5 = \frac{24.23.22.21.20}{1.2.3.4.5} = 42\,504.$$

2° *Między kombinacyami* m *przedmiotów, branych po* n, *ile jest takich które zawierają* p *przedmiotów* a, b, c...k? Odosobniając wszystkie p przedmioty mianowane i tworząc kombinacye z $m-p$ innych branych po $n-p$, a potem wstawiając do każdej wszystkie przedmioty odosobnione, otrzymuje się oczywiście żądane kombinacye. Wiec ich liczba jest

$$C_{m-p}^{n-p} = \frac{(m-p)(m-p-1)(m-p-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots(n-p)}.$$

3° *Między kombinacyami* m *przedmiotów branych po* n, *ile jest takich do których nie wchodzi żaden z* p *przedmiotów* a, b, c,...k? Odosobniając wszystkie przedmioty mianowane i tworząc kombinacye z $m-p$ innych branych po n, otrzymuje się żądane kombinacye. Zatem ich liczba jest

$$C_{m-p}^n = \frac{(m-p)(m-p-1)(m-p-2)\ldots(m-p-n+1)}{1.2.3\ldots n}.$$

4° *Między kombinacyami* m *przedmiotów branych po* n, *ile jest takich które zawierają przynajmniej jeden z* p *przedmiotów* a, b, c,...k? Na mocy tego co poprzedza, liczba tych kombinacyj jest oczywiście równa różnicy

$$C_m^n - C_{m-p}^n.$$

5° *Jak trzeba kombinować* m *przedmiotów, żeby mieć największą liczbę kombinacyj?* Biorąc stosunek $C_m^n : C_m^{n-1}$ otrzymujemy równość

$$C_m^n = \frac{m-n+1}{n} C_m^{n-1},$$

która pokazuje że liczba kombinacyj zwiększa się dopóki $\frac{m-n+1}{n}$ przewyższa jedność. Kładziemy więc

$$\frac{m-n+1}{n} > 1, \text{ zkąd } n < \frac{m+1}{2}.$$

Widzimy teraz że: jeśli m jest parzyste, trzeba wziąć $n = \frac{m}{2}$ żeby mieć najwięcej kombinacyj; a jeśli m jest nieparzyste, dość wziąć $n = \frac{m-1}{2}$ albo $n = \frac{m+1}{2}$.

I tak, 6 przedmiotów dają najwięcej kombinacyj gdy są brane po 3, to jest $\frac{6.5.4}{1.2.3} = 20$; a zaś 7 przedmiotów, kombinowane po 3 albo po 4, dają $\frac{7.6.5}{1.2.3} = \frac{7.6.5.4}{1.2.3.4} = 35$, i ta liczba 35 kombinacyj jest największa możebna.

PRAWDOPODOBIEŃSTWO.

481. Nazywa się *prawdopodobieństwem* stosunek przypadków przychylnych do liczby wszystkich przypadków równie możebnych. I tak, z urny zawierającej 12 gałek równej wielkości, 7 białych i 5 czarnych, wyciągają jedną gałkę; pytanie jakie jest prawdopodobieństwo dla każdego koloru? Ponieważ jest 12 przypadków równie możebnych, 7 dla białych i 5 dla czarnych, prawdopodobieństwo jest $\frac{7}{12}$ dla wyjścia białej

gałki, a $\frac{5}{12}$ dla wyjścia czarnej. Więc, gdyby się zakładano o wyjście tych gałek, osoba grająca na białą gałkę powinna stawić 7 fr. a osoba grająca na czarną 5 fr.

Loterya liczbowa składa się z 90u numerów, z których przy każdem ciągnięciu wychodzi 5 na traf. Gracz oznacza jeden numer, na przykład 12; jeśli ten numer znajduje się między 5ma wychodzącemi, gracz wygrał, jeśli nie to przegrał. Grać na jeden numer nazywa się brać *extrakt*. Żeby znaleźć prawdopodobieństwo wygrania extraktu, trzeba uważać że liczba wszystkich przypadków możebnych jest liczbą kombinacyj 90 numerów po 5,

$$C_{90}^{5} = \frac{90.89.88.87.86}{1.2.3.4.5.}.$$

Przypadkami przychylnemi są kombinacye które zawierają oznaczony numer 12; ich liczba, jako wiemy (nro 480, 2°) jest

$$C_{89}^{4} = \frac{89.88.87.86}{1.2.3.4}.$$

Zatem prawdopodobieństwo wyjścia numeru oznaczonego, czyli extraktu, to jest stosunek liczby przypadków przychylnych do całej liczby przypadków możebnych, który się wyraża ilorazem z podzielenia C_{89}^{4} przez C_{90}^{5}, jest $\frac{5}{90}$ albo $\frac{1}{18}$,

To pokazuje że, na 18tu przypadkach możebnych jest 1 przychylny dla osoby która wzięła extrakt, a 17 dla loteryi. Trzebaby więc stawić 1 przeciw 17; loterya, zamiast 17 razy, płaci tylko 15 razy stawkę.

Stawiając na dwa numera oznaczone, gra się na *ambo*. Jeśli te dwa numera są oba między *pięcioma* wychodzącemi, wygrywa się; jeśli nie, przegrywa. Przypadkami przychylnemi są kombinacye zawierające dwa stawione numera, ich liczba jest $C_{88}^{3} = \frac{88.87.86}{1.2.3}$. Zatem prawdopodobieństwo że wyjdzie stawione ambo wyraża się ilorazem z podzielenia C_{88}^{3} przez C_{90}^{5}, i jest $\frac{4.5}{90.89}$ albo $\frac{2}{801}$. To pokazuje że są 2 przypadki przychylne a 799 nieprzychylnych. Trzebaby więc stawić 2 przeciw 799, albo 1 przeciw $399 + \frac{1}{2}$. Loterya daje tylko 270 razy stawkę.

Stawiając na 3 numera oznaczone, gra się na *terno*. Prawdopodobieństwo wygrania terna, równe ilorazowi z podzielenia C_{87}^{2} przez C_{90}^{5}, jest $\frac{1}{11748}$. Loterya daje tylko 5500 razy stawkę.

Nakoniec, prawdopodobieństwo wygrania *kwaterna* jest $\frac{1}{511038}$, ale loterya daje tylko 75 000 razy stawkę. Prawdopodobieństwo wygrania *kwinterna* jest $\frac{1}{43949268}$.

SZYKI Z POWTARZANIEM.

482. Szyki liter z powtarzaniem są takie ustawienia do których każda z danych liter może wchodzić powtórzona kilka razy, tak jednak żeby stopień szyku ten sam zostawał.

Na przykład, szyki z dwóch liter a, b, ustawianych po trzy z powtarzaniem, są

$$aaa,\ aab,\ baa,\ bbb,\ bba,\ bab,\ abb.$$

Oznaczamy ogólnie przez $A_m^{'n}$ liczbę szyków m danych liter ustawianych po n z powtarzaniem. Oczywiście m liter branych po jednej dają m szyków, to jest

$$A_m^{'1} = m.$$

Żeby mieć szyki m liter, dobranych po dwie z powtarzaniem, dość jest na prawej stronie każdej litery postawić każdą z danych liter, to jest napisać

$$aa,\ ab,\ ac,\dots\ ba,\ bb,\ bc\dots\ ca,\ cb,\ cc,\ cd,\dots$$

Otrzymane tym sposobem szyki są wszystkie jakie z danych liter, biorąc je po dwie, utworzyć można, i nie ma żadnego powtórzonego dwa razy; bo każda litera zajmuje raz tylko pierwsze i drugie miejsce względem każdej innej, i raz tylko są napisane szyki do których ta sama litera wchodzi dwa razy. Liczba takich szyków jest $m.m = m^2$; co się wyraża przez

$$A'^{2}_{m} = m^2.$$

Tak samo, pisząc na prawej stronie każdego szyku dwóch liter, kolejno każdą z danych liter, otrzymuje się wszystkie szyki po 3 litery; ich liczba jest $A'^{3}_{m} = m^2.m = m^3$. I tak dalej. Mamy więc ogólną formułę szyków z powtarzaniem

$$A'^{n}_{m} = m^n.$$

PRZEMIANY Z POWTARZANIEM.

483. Niech będzie m liter, między któremi znajduje się α liter równych a, β równych b, γ równych c. Gdyby wszystkie m liter były różne, liczba ich przemian wyrażiłaby się przez P_m; ale, ponieważ niektóre litery wchodzą kilka razy, niektóre przemiany powtarzają się wiele razy. Nazwijmy x liczbę przemian różnych; i, żeby je łatwiej znaleźć, rozróżnijmy wskazami czynniki równe, pisząc

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\dots a_\alpha;\ b_1,\ b_2,\ b_3,\dots b_\beta;\ c_1,\ c_2,\ c_3\dots c_\gamma.$$

Jeśli teraz wykonamy przemiany tych liter, każda z x prz mian różnych da P_α przemian względem a, P_β względem b, P_γ względem c; tak że liczba przemian wszystkich m liter wyrazi się przez $x.P_\alpha.P_\beta.P_\gamma$. Mamy więc równość

$$xP_\alpha P_\beta P_\gamma = P_m;$$

zkąd

$$x = \frac{P_m}{P_\alpha P_\beta P_\gamma} = \frac{m!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}.$$

albo wyraźniej

$$x = \frac{1.2.3...m}{1.2...\alpha \times 1.2...\beta \times 1.2...\gamma}.$$

Jako przykład, mając dane sześć liter *aaabbc*, z których trzy pierwsze są równe a i dwie następujące równe b, szukajmy ile z nich można utworzyć przemian z powtarzaniem, i jakie są te przemiany. Oczywiście pięć liter *aaabb* dają tylko dziesięć przemian różnych z powtarzaniem, które są

aaabb, *baaab*, *bbaaa*, *abaab*, *abbaa*, *aabab*, *aabba*, *ababa*, *baaba*, *babaa*.

Jeśli teraz, w każdej z tych przemian, postawimy literę c kolejno na każdem z sześciu miejsc możebnych, będziemy mieli wszystkie przemiany różne z powtarzaniem, jakie z sześciu danych liter otrzymać można; to jest

aaabbc, *aaabcb*, *aaacbb*, *aacabb*, *acaabb*, *caaabb*;

baaabc, *baaacb*, *baacab*, *bacaab*, *bcaaab*, *cbaaab*;

. . . .

Liczba tych przemian jest 60; co się zgadza z formułą

$$x = \frac{1.2.3.4.5.6}{1.2.3 \times 1.2} = 60.$$

KOMBINACYE Z POWTARZANIEM.

484. Kombinacye z powtarzaniem, albo *kombinacye zupełne,* m liter ustawianych po n, są wieloczynami różnemi, w których te same litery mogą się powtarzać kilka razy. I tak, dwie litery a i b, brane po *trzy* z powtarzaniem, dają cztery kombinacye

$$aaa, \ aab, \ abb, \ bbb,$$

które można pisać

$$a^3, \ a^2b, \ ab^2, \ b^3.$$

Zachowując notacyę $\overset{n}{C}_m$ dla kombinacyj zwyczajnych, oznaczamy przez $\overset{n}{K}_m$ liczbę kombinacyj zupełnych, utworzonych z m różnych liter branych po n z powtarzaniem.

W kombinacyach zwyczajnych liczba n liter, które tworzą jedną kombinacyę, nie może przewyższać liczby m danych liter. Ale w kombinacyach zupełnych, w których te same litery mogą się powtarzać kilka razy, liczba n liter jednej kombinacyi może być większa od całej liczby m liter różnych; co właśnie ma miejsce w kombinacyach wyżej wskazanych, których liczba wyraża się przez $\overset{3}{K}_2 = 4$.

Sposobem już wiadomym łatwo się znajduje liczbę kombinacyj z powtarzaniem. Jakoż, przypuśćmy że, mając dane m liter, utworzono z nich kombinacye z powtarzaniem po n liter. Ponieważ każda taka kombinacya zawiera n liter, liczba napisanych liter jest $n\overset{n}{K}_m$; a że wszystkie wchodzą jednakowym sposobem, jedna z nich jest napisana liczbę razy oznaczoną przez

$$\frac{n}{m}\overset{n}{K}_m.$$

Owoż, nietrudno mieć drugie wyrażenie tej liczby. Albowiem, jeśliby z danych m liter, biorąc je po $n-1$ z powtarzaniem, utworzono kombinacye zupełne których jest K_m^{n-1}. i do każdej wstawiono literę a, naprzykład, otrzymanoby wszystkie kombinacye zupełne rzędu n, zawierające literę a; więc ta litera jest napisana najpierwej liczbę razy oznaczoną przez $\frac{n-1}{m} K_m^{n-1}$ i potem jeszcze K_m^{n-1} razy; to jest ze wszystkiem liczbę razy wyrażoną przez

$$\left(\frac{n-1}{m}+1\right) K_m^{n-1},$$

Ztąd wynika równość

$$\frac{n}{m} K_m^n = \left(\frac{n-1}{m}+1\right) K_m^{n-1}$$

albo

$$K_m^n = \frac{m+n-1}{n} K_m^{n-1}.$$

Zastępując teraz n kolejno przez $n-1$, $n-2, \ldots 3.2.1$, i uważając że $K_m^1 = m$, mamy

$$K_m^{n-1} = \frac{m+n-2}{n-1} K_m^{n-2},$$

$$K_m^{n-2} = \frac{m+n-3}{n-2} K_m^{n-3}$$

. . . .

$$K_m^2 = \frac{m+1}{2} K_m^1$$

$$K_m^1 = \frac{m}{1}.$$

Nakoniec, mnożąc stronami te równości razem z pierwszą, znajdujemy formułę

$$K_m^n = \frac{m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ n}.$$

Można dać tej formule kształt następujący

$$K_m^n = \frac{(m+n-1)(m+n-2)\ldots(m+1)m}{1.\ 2\ \ldots(n-1)n} = C^n_{m+n-1}.$$

który pokazuje że liczba kombinacyj zupełnych z m liter po n jest równa liczbie kombinacyj zwyczajnych z $m+n-1$ liter branych po n.

485. Nic łatwiejszego jak tworzyć jedne po drugich kombinacye zupełne różnych rzędów, i wiedzieć ich liczbę.

Jakoż, niech będzie m danych liter ustawionych w linii prostej, porządkiem alfabetycznym

$$a,\ b,\ c,\ \mathrm{d},\ldots k,\ l.$$

Kombinacye zupełne tych m liter, branych po dwie, tworzą następujący obraz

$$\begin{array}{rrrrrr}
a^2, & ab, & ac. & ad,\ldots & ak, & al,\\
 & b^2, & bc, & bd,\ldots & bk, & bl,\\
 & & c^2, & cd,\ldots & ck, & cl,\\
 & & . & . & . & .\\
 & & & & k^2, & kl,\\
 & & & & & l^2.
\end{array}$$

Owóż, liczba kombinacyj zupełnych które tworzą pierwszą linię wyraża się oczywiście przez C^1_m; liczba tych które stoją w drugiej linii jest dana przez C^1_{m-1}; następujące liczby kombinacyj są oznaczone przez C^1_{m-2}, $C^1_{m-3},\ldots C^1_1$.

Zatem liczba wszystkich kombinacyj jest równa summie

$$C^1_m + C^1_{m-1} + C^1_{m-2} + \ldots C^1_2 + C^1_1 = C^2_{m+1},$$

na mocy tego co w nr° 479 było powiedziane. Mamy więc

$$K^2_m = C^2_{m+1}.$$

Żeby teraz utworzyć kombinacye zupełne m liter branych po trzy, dość jest napisać literę a we wszystkich kombinacyach już otrzymanych; literę b we wszystkich tych do których litera a nie wchodzi; literę c w tych wszystkich do których litery a i b nie wchodzą. I tak dalej; co daje

$$\begin{array}{r}
a^3,\ a^2b,\ a^2c,\ a^2d, \ldots a^2k,\ a^2l, \\
ab^2,\ abc,\ abd, \ldots abk,\ abl, \\
ac^2,\ acd, \ldots ack,\ acl, \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
ak^2,\ akl, \\
al^2, \\
b^3,\ b^2c,\ bd^2, \ldots b^2k,\ b^2l, \\
bc^2,\ bcd, \ldots bck,\ bcl. \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
bk^2,\ bkl, \\
bl^2, \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
k^3,\ k^2l, \\
kl^2, \\
l^3.
\end{array}$$

Według tego co poprzedza,, liczba kombinacyj zupełnych, z m liter branych po trzy do których wchodzi litera a, wyraża się przez $K^2_m = C^2_{m+1}$.

Następnie, liczba kombinacyj zupełnych do których nie wchodzi litera a jest dana przez $K^2_{m-1} = C^2_m$. Liczba kombinacyj zupełnych do których dwie litery a i b nie wchodzą przedstawia się przez $K^2_{m-2} = C^2_{m-1}$. I tak dalej. Ostatni oddział ma tylko jedną kombinacyę, którą dla jednostajności wyraża się przez C^2_2. Więc liczba tych wszystkich bombinacyj jest równa summie

$$C^2_{m+1} + C^2_m + C^2_{m-1} + \dots + C^2_2 = C^3_{m+2};$$

co daje

$$K^3_m = C^3_{m+2}.$$

Ztąd, przez podobieństwo, wywodzimy formułę ogólną

$$(1) \qquad K^n_m = C^n_{m+n-1}.$$

Jeśli ta formuła jest prawdziwa dla kombinacyj zupełnych z m liter branych po n, to będzie także prawdziwa dla kombinacyj zupełnych z m liter branych po $n+1$. Albowiem, żeby utworzyć te ostatnie, dość jest napisać literę a we wszystkich kombinacyach już otrzymanych, których liczba jest C^n_{m+n-1}; postawić literę b we wszystkich tych do których litera a nie wchodzi i których liczba jest C^n_{m+n-2}; napisać literę c we wszystkich kombinacyach do których litery a i b nie wchodzą, ich liczba jest C^n_{m+n-3}; i tak dalej. Widzimy tym sposobem że liczba kombinacyj zupełnych, utworzonych z m liter po $n+1$, jest równa summie

$$C^n_{m+n-1} + C^n_{m+n-2} + C^n_{m+n-3} + \dots + C^n_n = C^{n+1}_{m+n}.$$

Co daje

$$K_m^{n+1} = C_{m+n}^{n+1}.$$

Więc formuła (1) jest ogólna.

486. Na mocy wiadomych twierdzeń mamy

$$K_m^n = C_{m+n-1}^n = C_{m+n-1}^{m-1};$$

owóż,

$$C_{m+n-1}^{m-1} = \frac{(m+n-1)(m+n-2)\ldots(n+1)}{1.\quad 2.\quad \ldots\; m-1} = K_{n+1}^{m-1}$$

więc

$$K_m^n = K_{n+1}^{m-1}.$$

Liczba kmbinacyj zupełnych z m liter branych po n jest ta sama co z $n+1$ liter branych po $m-1$.

POTĘGI DWUMIANU.

487. Niech będzie do wykonania wieloczyn m dwumianów mających ten sam pierwszy wyraz

$$(x+a)(x+b)(x+c)\ldots.(x+l).$$

Według prawidła mnożenia, wieloczyn ilukolwiek wielomianów jest summą wieloczynów, jakie się otrzymuje biorąc jeden wyraz z każdego wielomianu wszystkiemi sposobami możebnemi; a jeśli uporządkowano ten wieloczyn względem litery x, pierwszym wyrazem będzie oczywiście x^m, wieloczyn m pierwszych wyrazów dwumianów.

Żeby znaleźć następujące wyrazy, dość uważać że, nie licząc pierwszego dwumianu $x+a$, pierwszym wyrazem wieloczynu innych $m-1$ dwumianów jest x^{m-1}; zkąd wynika że szukany wieloczyn ma wyraz ax^{m-1}, i tak samo zawiera wyrazy

bx^{m-1}, cx^{m-1},...lx^{m-1}. Więc, oznaczając przez Σa summę $a+b+c+...+l$ drugich wyrazów dwumianów, drugi wyraz wieloczynu wyrazi się przez $x^{m-1}\Sigma a$.

Jeśli odsunięto dwa pierwsze dwumiany $x+a$, $x+b$, pierwszym wyrazem wieloczynu innych $m-2$ dwumianów będzie x^{m-2}; zatem, mnożąc x^{m-2} przez wieloczyn ab drugich wyrazów dwumianów odsuniętych, otrzymuje się wyraz abx^{m-2} szukanego wieloczynu; zkąd wynika że ten wieloczyn zawiera także wyrazy acx^{m-2},...bcx^{m-2}, bdx^{m-2},..klx^{m-2}. Więc, oznaczając przez Σab summę $ab+ac+...+bc+bd+...+kl$, kombinacyj drugich wyrazów dwumianów, branych po dwa, trzeci wyraz szukanego wieloczynu wyrazi się przez $x^{m-2}\Sigma ab$.

Rozumując podobnie łatwo widzieć że spółczynnik ilości x^{m-3} jest summą $abc+abd+...bcd+bce+...jkl$, kombinacyj po trzy drugich wyrazów dwumianów; co daje wyraz $x^{m-3}\Sigma abc$ wieloczynu. I tak dalej. Ogólnie spółczynnik ilości x^{m-n} jest summą kombinacyj drugich wyrazów dwumianów, branych po n. Ostatni wyraz jest wieloczynem $abcd...l$ drugich wyrazów dwumionów.

Więc wieloczyn m dwumianów rozwija się jako następuje

$$(x+a)(x+b)(x+c)...(x+l)$$
$$=x^m+x^{m-1}\Sigma a+x^{m-2}\Sigma ab+x^{m-3}\Sigma abc+...+abc...l.$$

488. Przypuśćmy teraz że wszystkie m dwumiany są równe między sobą, to jest $a=b=c=...=l$; wtedy wieloczyn m dwumianów staje się potęgą $(x+a)^m$; summa Σa jest równa ma, summa Σab równa potędze a^2 powtórzonej tyle razy ile jest kombinacyj z m predmiotów branych po dwa, to jest

$$\Sigma ab=\frac{m(m-1)}{1.\ 2}a^2;$$

spółczynnik ilości x^{m-3}, równy summie kombinacyj drugich wyrazów branych po trzy, staje się równy potędze a^3 pomnożonej przez liczbę tych kombinacyj, to jest

$$\Sigma abc = \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3} a^3.$$

Ogólnie, spółczynnik $\Sigma abc\ldots g$ ilości x^{m-n}, wyrażający summę kombinacyj drugich wyrazów branych po n, staje się równy potędze a^n pomnożonej przez liczbę tych kombinacyj, to jest

$$\Sigma abc\ldots g = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ n} a^n.$$

Mamy więc formułę

$$(1)\quad (x+a)^m = x^m + \frac{m}{1} ax^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.\ 2} a^2x^{m-2} + \ldots$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.\ 2.\ 3\ldots n} a^n x^{m-n} + \ldots + a^m,$$

która jest znana pod nazwiskiem *dwumianu Newtona* *.

489. Uwaga. 1° W rozwinięciu potęgi m^{tej} dwumianu $x+a$ wykładnik ilości x zmiejsza się jednością od jednego wyrazu do drugiego, począwszy od pierwszego w którym jest m aż

---

* Newton sławny matematyk. fizyk i astronom angielski, urodzony w 1642 r. umarł w 1727. Dwumian z wykładnikiem całkowitym i dodatnym nie należy się *Newtonowi*, chociaż nosi jego nazwisko; bo już *Stifel* mówi o potęgach dwumianu i wyciąganiu pierwiastków, w dziele *Arithmetica integra, authore Michaele Stifelio; Norimb.* 1544 r. Jest tu przedmowa sławnego teologa Filipa *Melanchtona*, w której zaleca arytmetykę, dlatego że ona « *kształci umysł i przyzwyczaja go do znajdowania upodobania w prawdzie i w pewności.* »

Ale dwumian z wykładnikiem ułamkowym i odjemnym jest niezaprzeczalnie znamienitem odkryciem Newtona.

do ostatniego w którym jest 0; przeciwnie, wykładnik ilości a zwiększa się jednością, idąc od pierwszego wyrazu w którym jest 0 aż do ostatniego w którym jest m; tak że summa tych wykładników w każdym wyrazie jest zawsze m, i liczba wyrazów rozwinięcia jest $m+1$.

2° Wyraz ogólny, ten który zajmuje rzęd $n+1$ w rozwinięciu, albo który ma n wyrazów przed sobą, jest

$$T_{n+1}=\frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{1.\ 2.\ 3\ \dots\ n}a^n x^{m-n};$$

wykładnik rosnący n wskazuje liczbę wyrazów przed T_{n+1}, wykładnik malejący $m-n$ liczbę wyrazów po T_{n+1}.

Zatem wyraz rzędu n^{tego} będzie

$$T_n=\frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+2)}{1.\ 2.\ 3\ \dots\ (n-1)}a^{n-1}x^{m-n+1}.$$

Co daje

$$T_{n+1}=T_n\times\frac{m-n+1}{n}\cdot\frac{a}{x}.$$

Zkąd wynika prawidło tworzenia się spółczynników dwumianu. *Znając jeden wyraz, żeby otrzymać spółczynnik następującego, trzeba pomnożyć spółczynnik wiadomy przez wykładnik jego czynnika* x *i podzielić przez wykładnik czynnika* a *w nowym wyrazie.*

3° *Spółczynniki wyrazów równo oddalonych od skrajnych są równe.* Bo spółczynnik wyrazu $a^n x^{m-n}$, mającego n wyrazów przed sobą, jest równy liczbie kombinacyj m przedmiotów branych po n, a spółczynnik wyrazu $a^{m-n}x^n$, mającego n wyrazów po sobie albo $m-n$ wyrazów przed sobą, jest równy liczbie kombinacyj m przedmiotów branych po $m-n$; owoż te dwie liczby kombinacyj, jako już wiadomo, są równe między sobą.

Zresztą, ponieważ dwumian $(x+a)^m$ jest symetryczny względem x i a, jego rozwinięcie powinno być także symetryczne względem tych liter; więc wyrazowi $ka^n x^{m-n}$ musi odpowiedać wyraz symetryczny $ka^{m-n}x^n$; te zaś dwa wyrazy równo oddalone od skrajnych mają ten sam spółczynnik.

4° *Spółczynniki zwiększają się od początku aż do środka rozwinięcia a potem się zmniejszają aż do końca.* Jakoż, spółczynniki rosną dopóki jest

$$\frac{m-n+1}{n} > 1, \quad \text{zkąd} \quad n < \frac{m+1}{2}.$$

Więc, jeśli m jest parzyste, liczba $m+1$ wyrazów jest nieparzysta i we środku stoi spółczynnik największy ze wszystkich; a jeśli m jest nieparzyste, liczba wyrazów $m+1$ jest parzysta, i wtedy we środku stoją dwa spółczynniki równe, większe od wszystkich innych. Co już wiadome (n^ro 480, 5°).

490. Zastępując a przez $-a$ w rozwinięciu dwumianu $(x+a)^m$, zmienia się tylko znak $+$ na $-$ w wyrazach rzędu parzystego, do których wchodzą potęgi nieparzyste ilości a. Będzie więc

$$2) \quad (x-a)^m = x^m - \frac{m}{1}ax^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.\ 2}a^2x^{m-2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}$$

$$+ \ldots + (-1)^m a^m;$$

spółczynniki mają na przemian znak $+$ i $-$.

491. Przykłady. Stosując wyżej okazane własności dwumianu, można łatwo, i dobrze jest umieć, prędko rozwijać jego potęgi. I tak :

$$1° \quad (x+a)^9 = x^9 + 9ax^8 + 36a^2x^7 + 84a^3x^6 + 126a^4x^5 + 126a^5x^4$$

$$+ 84a^6x^3 + 36a^7x^2 + 9a^8x + a^9.$$

Żeby przejść od drugiego wyrazu do trzeciego, trzeba mnożyć przez 8 i dzielić przez 2, albo, co to samo, mnożyć przez 4. Przechodzi się od trzeciego wyrazu do czwartego, mnożąc przez 7 i dzieląc przez 3, albo najpierwej dzieląc przez 3 i potem mnożąc przez 7. Żeby przejść od czwartego wyrazu do piątego, trzeba mnożyć przez $\frac{6}{4}$ albo przez $\frac{3}{2}$; co się wykonywa dzieląc przez 2 i mnożąc przez 3. Ponieważ rozwinięcie ma liczbę parzystą wyrazów, $9+1=10$, a otrzymaliśmy ich połowę, spółczynniki następujących pięciu są te same, tylko w porządku odwrotnym.

Ułatwia się jeszcze rachunek spółczynników, tworząc naprzód mnożniki m, $\frac{m-1}{2}$, $\frac{m-2}{3}$, $\frac{m-3}{4}$, etc.

2° $(x+a)^6 = x^6 + 6ax^5 + 15a^2x^4 + 20a^3x^3 + 15a^4x^2 + 6a^5x + a^6$.

Rozwinięcie ma liczbę nieparzystą 7 wyrazów; trzeba więc tylko wyrachować 4 pierwsze, tworząc mnożniki 6, $\frac{5}{2}$, $\frac{4}{3}$; spółczynniki następujących powracają te same.

3° $(x-a)^5 = x^5 - 5ax^4 + 10a^2a^3 - 10a^3x^2 + 5a^4y - a^5$.

Ponieważ liczba wyrazów jest parzysta ostatni ma znak $-$, i wyrazy równo oddalone od skrajnych są ze znakami przeciwnemi.

4° $(x-a)^4 = x^4 - 4ax^3 + 6a^2x^2 - 4a^2x + a^4$.

Liczba wyrazów jest nieparzysta; więc ostatni ma znak $+$, i wyrazy w równej odległości od skrajnych są z temi samemi znakami.

5° Rowinąć potęgę $(1-z)^7$. Tworząc naprzód mnożniki 7, $\frac{6}{2}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{4}{4}$, i uważając że potęgi jedności są jednością, a potęgi ilości z rosną od z^1 aż do z^7, otrzymujemy

$$(1-z)^7 = 1 - 7z + 21z^2 - 35z^3 + 35z^4 - 21z^5 + 7z^6 - z^7.$$

6° Podnieść dwumian $3a^4 - 2bx^3$ do potęgi 5tej. Najlepiej jest, dla jednostajności rachunku, dać dwumianowi kształt $3a^4\left(1 - \frac{2bx^3}{3a^4}\right)$ i podnieść osobno oba czynniki do potęgi 5tej. Będzie najpierwej

$$(3a^4 - 2bx^3)^5 = 243a^{20}\left(1 - \frac{2bx^3}{3a^4}\right)^5;$$

potem, rozwijając ogólnie potęgę piątą dwumianu, przyjdzie

$$\left(1 - \frac{2bx^3}{3a^4}\right)^5 = 1 - 5.\frac{2bx^3}{3a^4} + 10.\frac{4b^2x^6}{9a^8} - 10.\frac{8b^3x^6}{27a^{12}}$$
$$+ 5.\frac{16b^4x^9}{81a^{16}} - \frac{32b^5x^{12}}{243a^{20}}.$$

Nakoniec, mnożąc przez $243a^{20}$, znajdujemy żądaną potęgę

$$(2a^4 - 2bx^3)^5 = 243a^{20} - 810a^{16}bx^3 + 1080a^{12}b^2x^6 - 720a^8b^3x^9$$
$$+ 240a^4b^4x^{12} - 32b^5x^{15}.$$

492. Jeśli w rozwinięciach $(x+a)^m$ i $(x-a)^m$ uczynimy $x = a = 1$, będzie

$$2^m = 1 + \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.\ 2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3} + \ldots + 1,$$

$$0 = 1 - \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.\ 2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3} + \ldots.$$

Więc, w potędze m^{tej} dwumianu $x+a$, summa spółczynników jest równa 2^m, i summa spółczynników rzędu nieparzystego jest równa summie spółczynników rzędu parzystego.

Dwa powyższe równania mogą wziąć następujące kształty

$$C_m^1 + C_m^2 + C_m^3 + \ldots + C_m^m = 2^m - 1,$$

$$C_m^1 + C_m^3 + C_m^5 + \ldots = 1 + C_m^2 + C_m^4 + C_m^6 + \ldots.$$

Pierwsze dowodzi że liczba wszystkich kombinacyj, jakie z m przedmiotów, branych po jednemu, po dwa, po trzy.... po m utworzyć można, jest równa $2^m - 1$; drugie pokazuje że, gdy utworzono wszystkie kombinacye możebne z m przedmiotów, liczba kombinacyj zawierających liczbę nieparzystą przedmiotów przewyższa jednością liczbę kombinacyj które mają liczbę parzystą tych przedmiotów.

TRÓJKĄT ARYTMETYCZNY PASKALA (*).

493. Między spółczynnikami dwóch po sobie idących potęg dwumianu są związki o których wiedzieć trzeba; żeby je odkryć, dość jest pomnożyć potęgę m^{ta} dwumianu $x+a$ przez przez ten dwumian. Niech będzie więc ogólnie

$$(x+a)^m = x^m + A_1 a x^{m-1} + A_2 a^2 x^{m-2} + A_3 a^3 x^{m-3} + \ldots + a^m;$$

jeśli pomożymy obie strony tej równości przez $x+a$, otrzymamy

$$(x+a)^{m+1} = x^{m+1} \begin{array}{l|l|l|l} +A_1 & a x^m + A_2 & a^2 x^{m-1} + A_3 & a^3 x^{m-2} + \ldots \\ +1 & +A_1 & +A_2 & \end{array}$$

Widzimy teraz że spółczynniki potęgi $(x+a)^{m+1}$ otrzymują się przez dodawania dwóch po sobie idących spółczynników potęgi $(x+a)^m$; to jest, żeby mieć spółczynnik jakiegokolwiek wyrazu w rozwinięciu $(x+a)^{m+1}$, trzeba tylko dodać do spół-

* PASCAL, sławny matematyk i pisarz francuzki, urodzony w 1623 umarł w 1660 r.

czynnika wyrazu tego samego rzędu, spółczynnik wyrazu poprzedzającego w rozwinięciu $(x+a)^m$. To wiedząc uważajmy następujący obraz

$$
\begin{array}{c|cccccccc}
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 \\
1 & 8 & 28 & 56 & 70 & 56 & 28 & 8 & 1 \\
\cdot\cdot & \multicolumn{8}{l}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
1 & C_m^1 & C_m^2 & C_m^3, \ldots\ldots\ldots & & & C_m^m .
\end{array}
$$

w którym pierwsza linia pozioma wyraża spółczynniki potęgi $(x+a)^1$, druga spółczynniki potęgi $(x+a)^2$, trzecia spółczynniki potęgi $(x+a)^3$,... ogólnie linia m^{ta} zawiera spółczynniki $1, C_m^1, C_m^2, \ldots C_m^m$ potęgi m^{tej} dwumianu $x+a$.

Nie licząc pierwszej kolumny mającej same jedności, wszystkie inne liczby stanowią tak zwany *trójkąt arytmetyczny* Paskala, o którym już wiedział Stifel, jako świadczy jego *Arithmetica integra* wydana w 1544 r.

Na mocy związków między spółczynnikami dwóch po sobie idących potęg dwumianu, każdy wyraz trójkąta arytmetycznego jest summą wyrazu stojącego ponad nim z wyrazem na lewej stronie. I tak, $56=35+21$. Ta własność, która może służyć do tworzenia trójkąta arytmetycznego, tłumaczy się znaną formułą

$$C_m^n = C_{m-1}^n + C_{m-1}^{n-1}.$$

Ztąd wynika że *summa* m *pierwszych liczb kolumny jakiej-*

kolwiek jest m^{ta} *liczbą kolumny następującej*. Uważając naprzykład pięć pierwszych liczb drugiej kolumny, mamy

$$35=20+15,\quad 20=10+10,\quad 10=4+6,\quad 4=1+3;$$

zatem, dodając stronami, będzie

$$35=15+10+6+3+1.$$

494. Liczby figurowe. Liczby składające kolumny trójkąta arytmetycznego nazwano *liczbami figurowemi* (numeri figurati). Liczby pierwszej kolumny są *liczbami figurowemi pierwszego rzędu*, drugiej kolumny *liczbami figurowemi drugiego rzędu*,... liczby n^{tej} kolumny są *liczbami figurowemi* n^{tego} *rzędu*.

Ze składu trójkąta arytmetycznego wynika że summa m pierwszych liczb kolumny n^{tej} wyraża się ogólnie, za pomocą wiadomego twierdzenia, przez

$$C_n^n+C_{n+1}^n+C_{n+2}^n+\ldots+C_{m+n-1}^n=C_{m+n}^{n+1}$$

$$=\frac{m(m+1)(m+2)\ldots(m+n)}{1.\ 2.\ 3\ldots\ (n+1)}=K_m^{n+1}.$$

gdzie K oznacza kombinacye zupełne.

Ztąd twierdzenie: *Summa* m *liczb kolumny* n^{tej} *jest równa liczbie kombinacyj zupełnych z* m *przedmiotów branych po* n+1.

495. Za pomocą ostatniego twierdzenia, łatwo się znajduje summę podobnych potęg n pierwszych liczb całkowitych.

1° *Summa* n *pierwszych liczb naturalnych*. Te liczby tworzą pierwszą kolumnę, więc ich summa jest

$$C_1^1+C_2^1+C_3^1+\ldots+C_n^1=K_n^2=\frac{n(n+1)}{1.\ 2};$$

zkąd już wiadoma formuła

$$1+2+3+4+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

2° *Summa kwadratów* n *pierwszych liczb.* Mamy tosamość

$$n^2 = 2\frac{n(n-1)}{1.\ 2} + n;$$

zatem, czyniąc kolejno $n=1, 2, 3, \ldots n$ i biorąc summę odpowiedających wartości obydwóch stron, będzie

$$\Sigma n^2 = 2\Sigma\frac{n(n-1)}{1.\ 2} + \Sigma n.$$

Ale, ponieważ dla $n=1$ pierwsza wartość wieloczynu $\frac{n(n-1)}{1.\ 2}$ jest zero, trzeba tylko wziąć summę $n-1$ pierwszych jego wartości. Otrzymujemy więc

$$\Sigma n^2 = 2\,\overset{3}{K}_{n-1} + \overset{2}{K}_n$$

$$= \frac{(n-1)\,n\,(n+1)}{3} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1.\ 2.\ 3};$$

zkąd formuła

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1.\ 2.\ 3}.$$

Można wprost znaleźć tę formułę; dość tylko napisać tosamości

$$\begin{aligned}
1^3 &= \ldots\ldots\ldots\ldots 1\\
2^3 &= (1+1)^3 = 1^3 + 3.1^2 + 3.1 + 1\\
3^3 &= (2+1)^3 = 2^3 + 3.2^2 + 3.2 + 1\\
4^3 &= (3+1)^3 = 3^3 + 3.3^2 + 3.3 + 1\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
n^3 &= (n-1+1)^3 = (n-1)^3 + 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1\\
(n+1)^3 &= (n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1.
\end{aligned}$$

Dodając stronami, będzie

$$(n+1)^3=3(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)+3(1+2+3+\ldots+n)+n+1;$$

zkąd

$$1^2+2^2+3^2+\ldots n^2=\frac{(n+1)^3-(n+1)}{3}-\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

3° *Summa sześcianów* n *pierwszych liczb.* Jeśli w tosamości

$$n^3=\frac{6(n+1)n(n-1)}{1.\ 2.\ 3}+n$$

uczynimy kolejno $n=1, 2, 3, \ldots n$, i weźmiemy summę wartości obydwóch stron, będzie

$$\Sigma n^3=6\Sigma\frac{(n+1)n(n-1)}{1.\ 2.\ 3}+\Sigma n.$$

Ale wieloczyn $\frac{(n+1)n(n-1)}{1.\ 2.\ 3}$ staje się zerem dla $n=1$, trzeba więc tylko wziąć $n-1$ pierwszych jego wartości.

$$\Sigma n^3=6\,\overset{4}{K}_{n-1}+\overset{2}{K}_n$$

$$=\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{4}+\frac{n(n+1)}{2}=\left\{\frac{n(n+1)}{1.\ 2}\right\}^3.$$

Zkąd formuła

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)}{4}.$$

4° Rozumując podobnie, można łatwo znaleźć summę czwartych potęg. Dość tylko, biorąc tosamość

$$n^4=\frac{24(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}+2n^3+n^2-2n.$$

uważać że wieloczyn $\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$ staje się zerem dla

$n=1$ i $n=2$; będzie

$$\Sigma n^4 = 24\,K^5_{n-2} + \frac{n^2(n+1)^2}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n(n+1),$$

i ostatecznie

$$1^4+2^4+3^4+\ldots n^4 = \frac{n(n+1)}{30}(6n^3+9n^2+n-1).$$

STOSY KUL.

496. W arsenałach układają kule jednakowego kalibru w stosy, które są trojakiego gatunku : trójkątne, czworokątne i prostokątne.

Stos trójkątny ma kształt piramidy trójkątnej, której wierzchołkiem jest jedna kula a podstawą warstwa kul tworząca trójkąt równoboczny. Na tej warstwie leży druga której kule wchodzą w miejsca próżne pierwszej. Ta druga warstwa ma także kształt trójkąta równobocznego, ale z bokiem zawierającym jedną kulę mniej. I tak samo następujące warstwy, aż do ostatniej która może tylko jedną mieć kulę.

Nazwijmy n bok podstawy, to jest liczbę kul w boku warstwy na ubitej ziemi; liczba kul składających tę warstwę, na mocy budowy stosu, będzie

$$1+2+3+4+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Więc, jeśli weźmiemy summę wszystkich warstew, to jest jeśli, w otrzymanem wyrażeniu, uczynimy kolejno $n=1, 2, 3\ldots n$ i dodamy odpowiedające wartości, znajdziemy liczbę kul stosu wyrażoną przez

$$C^2_2 + C^2_3 + C^2_4 + \ldots + C^2_{n+1} = K^3_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3}.$$

Dajmy na to że bok podstawy zawiera 12 kul, stos będzie ich miał $\frac{12.13.14}{1.\ 2.\ 3}=364$.

Uwaga. Ponieważ liczby $\frac{n(n+1)}{1.\ 2}$ są miarą trójkąta a liczby $\frac{n(n+1)(n+2)}{1.\ 2.\ 3}$ wyrażają miarę piramidy trójkątnej, dlatego liczby figurowe drugiej kolumny nazywają się *liczbami trójkątnemi*, a figurowe trzeciej kolumny *liczbami piramidalnemi*.

Stos czworokątny, ma kształt piramidy kwadratowej. Jego podstawa i wszystkie inne warstwy są kwadratami; w każdej bok zawiera jedną kulę mniej niż w warstwie bezpośrednio niższej, tak że najwyższa ma tylko jedną kulę która jest wierzchołkiem stosu.

Wynika z tej budowy że, nazywając n bok podstawy i biorąc summę wszystkich warstew, począwszy od wierzchołka, znajdujemy liczbę kul stosu równą summie kwadratów

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{1.\ 2.\ 3}.$$

Jeśli bok podstawy zawiera 12 kul, stos ma ich $\frac{12.13.25}{1.\ 2.\ 3}=650$.

Zagadnienie. *Znając liczbę* a *kul stosu czworokątnego, wyznaczyć liczbę jego warstew.*

Mamy

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{1.\ 2.\ 3}=a, \text{ zkąd wynika } (n+1)^3>3a>n^3.$$

Więc liczba całkowita n jest pierwiastkiem największego sześcianu całkowitego jaki się mieści w $3a$. Biorąc $a=650$, liczba warstew będzie 12.

Stos prostokątny. Podstawa tego stosu jest prostokątem; na niej leżąca warstwa jest także prostokątem, ale mającym jedną kulę mniej w każdym boku. I tak samo następujące warstwy, aż do najwyższej która jest prostą linią kul, niejako grzbietem stosu.

Jeśli oznaczymy przez $p+1$ liczbę kul składających grzbiet, warstwa bezpośrednio niższa będzie zawierała dwie linie po $p+2$ kul, następująca trzy linie po $p+3$ kul; i tak dalej aż do ostatniej, w której będzie n linij po $p+n$ kul; oznaczając przez n liczbę kul w małym boku podstawy. Więc liczba kul stosu jest równa summie

$$
\begin{aligned}
& p+1+2(p+2)+3(p+3)+\ldots+n(p+n) \\
& = p(1+2+3+\ldots+n)+1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 \\
& = \frac{1}{2}pn(n+1)+\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\
& = \frac{1}{6}n(n+1)(3p+2n+1).
\end{aligned}
$$

Zamiast p można wprowadzić liczbę N kul większego boku podstawy; dość tylko uważać że $N=n+p$. Podstawiając wartość $p=N-n$, otrzymuje się, w funkcyi boków N i n liczbę kul stosu

$$\frac{1}{6}n(n+1)(3N-n+1).$$

Na przykład, jeśli większy bok podstawy zawiera 36 kul a mniejszy 24, stos będzie ich miał

$$\frac{1}{6}24.25(108-24+1)=8500.$$

Gdyby jeden ze stosów był ścięty równolegle do podstawy, wyrachowanoby liczbę jego kul, uważając go jako różnicę dwóch stosów zupełnych.

SUMMY PODOBNYCH POTĘG LICZB W POSTĘPNI ARYTMETYCZNEJ.

497. Niech będzie n liczb $a, b, c, \ldots k, l$ w postępni arytmetycznej mającej stosunek r, to jest

$$b = a + r,\quad c = b + r,\quad d = c + r, \ldots l = k + r.$$

Podnosząc obie strony tych równości do potęgi $m+1$, mamy

$$b^{m+1} = a^{m+1} + \frac{m+1}{1} r a^m + \frac{(m+1)m}{1.\ 2} r^2 a^{m-1} + \ldots\ldots + r^{m+1}$$

$$c^{m+1} = b^{m+1} + \frac{m+1}{1} r b^m + \frac{(m+1)m}{1.\ 2} r^2 b^{m-1} + \ldots\ldots + r^{m+1}$$

. . . .

$$l^{m+1} = k^{m+1} + \frac{m+1}{1} r k^m + \frac{(m+1)m}{1.\ 2} r^2 k^{m-1} + \ldots\ldots + r^{m+1}$$

Jest także

$$(l+r)^{m+1} = l^{m+1} + \frac{m+1}{1} r l^m + \frac{(m+1)m}{1.\ 2} r^2 l^{m-1} + \ldots\ldots + r^{m+1}.$$

Jeśli dodamy stronami te równości, znosząc spólne wyrazy $b^{m+1}, c^{m+1}, \ldots l^{m+1}$, i dla skrócenia kładąc

$$a^m + b^m + c^m + \ldots + l^m = S_m$$

$$a^{m-1} + b^{m-1} + c^{m-1} + \ldots + l^{m-1} = S_{m-1}$$

$$a^{m-2} + b^{m-2} + c^{m-2} + \ldots + l^{m-2} = S_{m-2}$$

. . . .

$$a + b + c + \ldots + l = S_1$$

otrzymamy

$$(l+r)^{m+1} = a^{m+1} + \frac{m+1}{1} r S_m + \frac{(m+1)m}{1.\ 2} r^2 S_{m-1} + \ldots + n r^{m+1};$$

zkąd dla S_m formuła ogólna

$$S_m = \frac{(l+r)^{m+1} - a^{m+1}}{(m+1)r} - \frac{m}{2} r S_{m-1} - \frac{m(m-1)}{2.\ 3} r^2 S_{m-2} - \ldots$$

w której ciąg wyrazów zatrzymuje się dochodząc do wyrazu mającego czynnik $m - m = 0$.

Za pomocą tej formuły wyrachuje się jedną po drugiej summy $S_1, S_2, \ldots S_m$, biorąc po kolei $m = 1, 2, 3, 4\ldots$

Przypuszczając $m = 0$, będzie $S_0 = \frac{l + r - a}{r} = n$; co naprzód wiadome. Poczem $m = 1$ daje

$$S_1 = \frac{(l+r)^2 - a^2}{2r} - \frac{nr}{2} = \frac{(l+r+a)nr}{2r} - \frac{nr}{2} = \frac{(a+l)}{2} n.$$

498. Jako zastosowanie, uważajmy ciąg naturalny liczb $1, 2, 3, \ldots n$; będzie $a = 1$, $r = 1$, $l = n$. Przez podstawienie tych wartości formuła staje się

$$S_m = \frac{(n+1)^{m+1} - 1}{m+1} - \frac{m}{2} S_{m-1} - \frac{m(m-1)}{2.\ 3} S_{m-2} - \ldots$$

Czyniąc w niej kolejno $m = 0, 1, 2, 3, 4$, znajdujemy

$$S_0 = n.$$

$$S_1 = \frac{n^2 + 2n}{2} - \frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$S_2 = \frac{n^3 + 3n^2 + 3n}{3} - \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n}{3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1.\ 2.\ 3},$$

$$S_3 = \frac{n}{4}(n^3 + 2n^2 + n) = \frac{n(n+1)^2}{4},$$

$$S_4 = \frac{n}{30}(6n^4 + 15n^3 + 10n^2 - 1) = \frac{n(n+1)}{30}(6n^3 + 9n^2 + n - 1);$$

formuły już otrzymane innym sposobem.

POTĘGI WIELOMIANÓW.

499. Znaleźć rozwinięcie potęgi m^{tej} wielomianu

$$(a+b+c+\ldots+l)^m,$$

jestto wykonać mnożenie m wielomianów równych między sobą; a wiemy że wieloczyn kilku wielomianów jest summą wieloczynów jakie się otrzymuje, biorąc jeden wyraz w każdym z czynników wszystkiemi sposobami możebnemi. Owoż, jeśli weźmiemy literę a w α czynnikach, literę b w β czynnikach, literę c w γ czynnikach,... literę l w λ czynnikach, otrzymamy wyraz kształtu

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots l^\lambda,$$

w którym summa wykładników jest stateczna

$$\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda=m.$$

W mnożeniu ten wyraz będzie powtórzony oczywiście tyle razy ile mogą dać przemian α liter równych a, β liter równych b, γ liter równych c,... λ liter równych l. Zbierając w jeden te wyrazy równe, widzimy że rozwinięcie ma wyraz

$$\frac{P_m}{P_\alpha P_\beta P_\gamma \ldots P_\lambda} a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots l^\lambda.$$

Więc całe rozwinięcie może się przedstawić formułą symboliczną

$$(1)\quad (a+b+c+\ldots+l)^m = \Sigma \frac{P_m}{P_\alpha P_\beta P_\gamma P_\lambda} a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots l^\lambda.$$

Ale z pewnem zastrzeżeniem. Jakoż, jeśli jeden z wykładników α, β, γ, ...λ jest zerem, symbol P_0 sam przez się nic nie wyraża. Żeby wiedzieć jak się wyznaczają spółczynniki w tym osobliwym przypadku, szukajmy wprost spółczynnika wyrazu do którego litera a, na przykład, nie wchodzi. Owoż, biorąc literę b w β czynnikach, literę c w γ czynnikach,... literę l w λ czynnikach, spostrzegamy że wyraz $b^\beta c^\gamma ... l^\lambda$, w którym wykładniki czynią summę $\beta+\gamma+...+\lambda=m$, jest powtórzony tyle razy ile z β liter równych b, z γ liter równych c,... z λ liter równych l, można utworzyć przemian; co daje w rozwinięciu wyraz

$$\frac{P_m}{P_\beta P_\gamma ... P_\lambda} b^\beta c^\gamma ... l^\lambda.$$

Otóż, ten wyraz wywodzi się właśnie z formuły symbolicznej jeśli, przypuszczając $\alpha=0$, weźmiemy $P_0=1$. Za pomocą tej ugody formuła (1) jest ogólna, to jest daje wszystkie wyrazy rozwinięcia od pierwszego aż do ostatniego.

Uwaga. Ugodna wartość $P_0=1$ nie przedstawia nic zdróżnego; jest ona logicznem następstwem notacyi. Żeby to jaśniej wykazać, uważajmy przemiany n liter. Jeśli, odosobniając jedną literę, utworzymy z pozostałych $n-1$ wszystkie przemiany możebne, i potem w każdej położymy literę odosobnioną, kolejno na wszystkich n miejscach jakie w niej zajmować może, będziemy mieli niezawodnie wszystkie przemiany n liter. Istnieje więc równość

$$P_n=nP_{n-1}.$$

Owoż, czyniąc $n=1$ w tej równości, otrzymujemy $P_1=P_0$ a jest oczywiście $P_1=1$; więc, dla ogólności formuły, trzeba przyjąć że $P_0=1$.

500. Nietrudno wiedzieć ile rozwinięcie (1) ma wyrazów. Dość tylko, nazywając p liczbę liter danego wielomianu, uważać że, bez względu na spółczynniki, wyrazy rozwinięcia są

$$a^m,\ a^\alpha b^\beta c^\gamma ... l^\lambda,\ b^{\beta'} c^{\gamma'} ... l^{\lambda'}, ... l^m;$$

i że każdy z nich, zawierając m liter ze wszystkiem, jest kombinacyą p liter a, b, c,... l wielomianu, branych po m z powtórzeniem. Więc liczba wyrazów rozwinięcia, równa liczbie kombinacyj zupełnych z p liter branych po m, wyraża się przez

$$K_p^m = \frac{p(p+1)(p+2)\dots(p+m-1)}{1.\ 2.\ 3\dots m}.$$

albo

$$K_{m+1}^{p-1} = \frac{(m+1)(m+2)\dots(m+p-1)}{1.\ 2.\ (p-1)}.$$

501. Szukajmy rozwinięcia kwadratu $(a+b+c\dots l)^2$, wielomianu. Ponieważ, według formuły ogólnej, kwadrat wielomianu jest wieloczynem symetrycznym stopnia drugiego, do którego każda z liter a, b, c,... l wchodzi z wykładnikiem 2, 1, 0, rozwinięcie kwadratu może tylko mieć dwa gatunki wyrazów; to jest wyrazy kształtu a^2 ze spółczynnikiem 1, i wyrazy kształtu ab ze spółczynnikiem $\frac{P_2}{P_1 P_1}=2$. Co się wyraża pisząc

$$(a+b+c+\dots l)^2 = \Sigma a^2 + 2\Sigma ab.$$

Więc kwadrat wielomianu jest równy summie kwadratów ze wszystkich wyrazów, więcej podwójną summą wieloczynów z tych wyrazów branych po dwa (nro 32).

Uważajmy jeszcze sześcian $(a+b+c+\dots+l)^3$ wielomianu. Rozwinięcie sześcianu może tylko mieć trzy gatunki wyrazów: 1° wyrazy kształtu a^3 ze spółczynnikiem 1; 2° wyrazy kształtu a^2b, mające spółczynnik $\frac{P_3}{P_2 P_1}=3$; i 3° wyrazy kształtu abc mające spółczynnik $\frac{P_3}{P_1 P_1 P_1}=6$. Co się wyraża pisząc

$$(a+b+c+\dots+l)^3 = \Sigma a^3 + 3\Sigma a^2 b + 6\Sigma abc.$$

Więc sześcian wielomianu jest równy summie sześcianów ze wszystkich wyrazów, więcej potrójną summą wieloczynów, jakie *się otrzymuje mnożąc kwadrat każdego wyrazu przez każdy inny wyraz, i więcej sześciurną summą wieloczynów z wyrazów branych po trzy.*

Gdyby wzięto czwartą potęgę $(a+b+c+...+l)^4$ wielomianu, rozumując podobnie znalezionoby

$$(a+b+c+...+l)^4 = \Sigma a^4 + 4\Sigma a^3 b + 6\Sigma a^2 b^2 + 12\Sigma a^2 bc + 24\Sigma abcd.$$

WYCIĄGANIE PIERWIASTKÓW Z WIELOMIANÓW.

502. Pokażemy najpierwej jak się wyciąga pierwiastek kwadratowy z wielomianu. Niech będzie wielomian stopnia p względem x, uporządkowany według potęg malejących tej ilości

$$Ax^p + A_1 x^{p-1} + A_2 x^{p-2} + ... + A_p.$$

Przypuszczając że istnieje wielomian stopnia n

$$\alpha x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \alpha_2 x^{n-2} + ... + \alpha_n,$$

który podniesiony do kwadratu wydaje zadany wielomian, mamy tosamość

$$Ax^p + A_1 x^{p-1} + A_2 x^{p-2} + ... + A_p$$

$$= \alpha^2 x^{2n} + 2\alpha\alpha_1 x^{2n-1} + \alpha_1^2 x^{2n-2} + 2(\alpha x^n + \alpha_1 x^{n-1})\alpha_2 x^{n-2}$$

$$+ \alpha_2^2 x^{2n-4} + ... + \alpha_n^2.$$

Co wymaga żeby obie strony były tego samego stopnia względem x, i żeby równe potęgi tej ilości miały spółczynniki równe.

Pierwszy warunek daje

$$2n = p, \quad \alpha^2 = A \quad \text{i} \quad \alpha_n^2 = A_p.$$

Więc, żeby wielomian całkowity względem x był kwadratem doskonałym, trzeba żeby był stopnia parzystego względem tej litery, i temsamem względem każdej innej którą zawiera;

do tego trzeba jeszcze żeby spółczynniki najwyższej potęgi x były kwadratami. Jeśli tym warunkom staje się zadość, będzie

$$n=\frac{p}{2},\quad \alpha=\sqrt{A}\quad \text{i}\quad \alpha_n=\pm\sqrt{A_p}.$$

Znając pierwszy wyraz αx^n pierwiastku kwadratowego, łatwo wyznaczyć następujące. Jakoż, jeśli od zadanego wielomianu odciągniemy kwadrat $\alpha^2 x^{2n}$, nazywając R resztę będzie

$$R=2\alpha\alpha_1 x^{2n-1}+\alpha_1^2 x^{2n-2}+2(\alpha x^n+\alpha_1 x^{n-1})\alpha_2 x^{n-2}+\alpha_2^2 x^{2n-4}+\ldots+\alpha_n^2$$

W tej reszcie pierwszy wyraz $2\alpha\alpha_1 x^{2n-1}$, mający największy wykładnik litery porządkującej, jest podwójnym wieloczynem pierwszego wyrazu αx^n pierwiastku przez drugi $\alpha_1 x^{n-1}$; więc, dzieląc pierwszy wyraz uporządkowanej pierwszej reszty przez podwójny pierwszy wyraz pierwiastku, otrzymuje się drugi jego wyraz.

Odciągając od zadanego wielomianu kwadrat $(\alpha x^n+\alpha_1 x^{n-1})^2$ znalezionej części pierwiastku, otrzymanoby drugą resztę. Ale, ponieważ odciągnięto już kwadrat $\alpha^2 x^{2n}$, dość jest do podwójnego pierwszego wyrazu αx^n dodać drugi $\alpha_1 x^{n-1}$, i, mnożąc summę $2\alpha x^n+\alpha_1 x^{n-1}$ przez $\alpha_1 x^{n-1}$, odciągnąć wieloczyny od pierwszej reszty; co da drugą resztę

$$R'=2(\alpha x^n+\alpha_1 x^{n-1})\alpha_2 x^{n-2}+\alpha_2^2 x^{2n-4}+2(\alpha x^n+\alpha_1 x^{n-1}+\alpha_2 x^{n-2})\alpha_3 x^{n-3}$$
$$+\alpha_3^2 x^{2n-6}+\ldots\ldots+\alpha_n^2.$$

Widzimy w tej nowej reszcie że wyraz $2\alpha\alpha_2 x^{2n-2}$, mający największy wykładnik względem x, jest podwójnym wieloczynem pierwszego wyrazu αx^n pierwiastku przez trzeci $\alpha_2 x^{n-2}$; więc, dzieląc pierwszy wyraz drugiej reszty przez $2\alpha x^n$ otrzymuje się trzeci wyraz pierwiastu. Poczem znowu, dodając trzeci wyraz $\alpha_2 x^{n-2}$ do dwóch pierwszych podwojonych, mnożąc summę $2\alpha x^n+2\alpha_1 x^{n-1}+\alpha_2 x^{n-2}$ przez $\alpha_2 x^{n-2}$ i odciągając wieloczyny od drugiej reszty, znajduje się trzecią

$$R'' = 2(ax^n + \alpha_1 x^{n-1} + \alpha_2 x^{n-2})\alpha_3 x^{n-3} + \alpha_3^2 x^{2n-6} + \ldots\ldots + \alpha_n^2.$$

I tak dalej. Dzieląc zawsze pierwszy wyraz każdej uporządkowanej reszty przez podwójny pierwszy wyraz pierwiastku, otrzymuje się wszystkie wyrazy tego pierwiastku. Nakoniec, odciągając ostatni wieloczyn $(2ax^n + 2\alpha_1 x^{n-1} + \ldots \alpha_n)\alpha_n$, jeśli się dochodzi do reszty zero, dany wielomian stopnia $2n$ jest kwadratem doskonałym, i znaleziony wielomian stopnia n jego pierwiastkiem kwadratowym. Ale, jeśli się znajduje resztę, ponieważ jej stopień jest niższy od n, działanie musi przestać; wtedy znaleziony wielomian wyraża, względnie do x, część całkowitą pierwiastku kwadratowego, a dany wielomiam jest summą kwadratu tej części i reszty.

Prykład. *Wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z wielomianu* $9a^2x^4 + 6ab^2x^3 + (b^4 - 12ac^3)x^2 - 4b^2c^3x + 4c^6$.

Widzimy zaraz że pierwszym wyrazem szukanego pierwiastku jest $3ax^2$; ostatnim będzie $+2c^3$ albo $-2c^3$.

Wykonywując rachunek jakośmy wyłożyli, znajdujemy

$$\begin{array}{r|l}
9a^2x^4 + 6ab^2x^3 + (b^4 - 12ac^3)x^2 - 4b^2c^3x + 4c^6 & 3ax^2 + b^2x - 2c^3 \\
-9a^2x^4 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad & \overline{6ax^2 + b^2x} \\
-6ab^2x^3 - b^4x^2 \qquad\qquad\qquad\qquad & \quad + b^2x \\
-12ac^3x^2 \qquad\qquad\qquad & \overline{6ax^2 + 2b^2x - 2c^3} \\
+12ac^3x^2 + 4b^2c^3x - 4c^6 & \qquad\qquad -2c^3 \\
0 \qquad\qquad\quad &
\end{array}$$

Uwaga. Rozumowanie zostaje to samo, jeśli wielomian, z którego się wyciąga pierwiastek kwadratowy, jest uporządkowany według potęg rosnących x. Z tą tylko różnicą że dzielenie pierwszych wyrazów reszt przez podwójny pierwszy wyraz pierwiastku może się ciągnąć bez końca, gdy zadany wielomian nie jest kwadratem doskonałym. Wtedy trzeba zatrzymać działanie, skoro się otrzymuje iloraz mający stopień wyższy od stopnia wyrazu który powinien być ostatni.

Można wiedzieć naprzód że dany wielomian nie jest kwadratem doskonałym, w następujących przypadkach :

1° Jeśli, względem jakiejkolwiek litery porządkującej, pierwszy wyraz wielomianu jest kwadratem doskonałym a ostatni nim nie jest; bo wyrazy pierwiastku, będąc ilorazami ilości spółmiernych, są wszystkie spółmierne.

2° Jeśli dany wielomian jest całkowity, a spółczynnik pierwszego wyrazu jakiej reszty nie jest podzielny przez podwójny spółczynnik pierwszego wyrazu pierwiastku; bo wtedy pierwiastek byłby ułamkowy i tak samo jego kwadrat.

503. *Pod jakim warunkiem trójmian drugiego stopnia* ax^2+bx+c *jest kwadratem doskonałym?*

Mnożąc ten trójmian przez a i wyciągając pierwiastek kwadratowy z wieloczynu $a^2x^2+abx+ac$, będzie

$$\begin{array}{r|l} a^2x^2+abx+ac & ax+\frac{b}{2} \\ \cline{2-2} -a^2x^2 & 2ax+\frac{b}{2}. \\ -abx-\frac{b^2}{4} & \\ ac-\frac{b^2}{4} & \end{array}$$

Widzimy tym sposobem że trójmian $a^2x^2+abx+ac$ nie może być kwadratem doskonałym, tylko wtedy kiedy reszta $ac-\frac{b^2}{4}$ równa się zeru. Przypuszczając że temu warunkowi staje się zadość, otrzymujemy

$$a^2x^2+abx+ac=\left(ax+\frac{b}{2}\right)^2,$$

zkąd

$$ax^2+bx+c=\frac{1}{a}\left(ax+\frac{b}{2}\right)^2.$$

Owoż, jeśli spółczynnik a jest dodatny, mamy

$$\frac{1}{a}\left(ax+\frac{b}{2}\right)^2=\left(\frac{ax+\frac{b}{2}}{\sqrt{a}}\right)^2=\left(x\sqrt{a}+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2;$$

zatem

$$ax^2+bx+c=\left(x\sqrt{a}+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2.$$

Jeśli przeciwnie, spółczynnik a jest odjemny, czyniąc dla skrócenia $\sqrt{-1}=\mathrm{i}$, będzie $a=(\mathrm{i}\sqrt{-a})^2$, zkąd $\sqrt{a}=\mathrm{i}\sqrt{-a}$; mamy więc

$$\frac{1}{a}\left(ax+\frac{b}{2}\right)^2=\left\{\frac{x(\mathrm{i}\sqrt{-a})^2+\frac{b}{2}}{\mathrm{i}\sqrt{-a}}\right\}^2=\left(x\mathrm{i}\sqrt{-a}+\frac{b}{2\mathrm{i}\sqrt{-a}}\right)^2,$$

i ostatecznie

$$ax^2+bx+c=\left(x\sqrt{a}+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2,$$

jako wyżej; ale czynnik $\sqrt{a}$ jest urojony.

Z tego wszystkiego wynika że warunkiem koniecznym i dostatecznym, żeby trójmian ax^2+bx+c był kwadratem doskonałym, jest

$$b^2=4ac.$$

Wynik już wiadomy (n^ro 269).

504. Szukajmy jeszcze jakich trzeba warunków żeby wielomian drugiego stopnia o dwóch niewiadomych

$$\mathrm{A}x^2+2\mathrm{B}xy+\mathrm{C}y^2+2\mathrm{D}x+2\mathrm{E}y+\mathrm{F},$$

który gdzieindziej ważną gra rolę, był kwadratem doskonałym.

Mnożąc ten wielomian przez A, i z wieloczynu wyciągając pierwiastek kwadratowy względem x, będzie

$$\begin{array}{l|l} A^2x^2+2A(By+D)x+ACy^2+2AEy+AF & Ax+By+D \\ \underline{-Ax^2} & \overline{2Ax+By+D} \\ \quad -2A(By+D)x-B^2y^2-2BDy-D^2 & \quad +By+D \\ \quad \overline{(AC-B^2)y^2+2(AE-BD)y+AF-D^2} & \end{array}$$

Widzimy dobrze tym sposobem że dany wielomian nie może być kwadratem doskonałym, tylko wtedy kiedy reszta

$$(AC-B^2)y^2+2(AE-BD)y+AF-D^2$$

jest zerem niezależnie od y; co wymaga trzech koniecznych i dostatecznych warunków

$$B^2=AC, \quad D^2=AF, \quad BD=AE.$$

Dwa pierwsze pokazują że trzy spółczynniki A, C, F powinny mieć te same znaki. Przypuszczając że wszystkim warunkom staje się zadość, mamy tosamość

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dy+2Ey+F=\left(x\sqrt{A}+\frac{By+D}{\sqrt{A}}\right)^2,$$

w której czynnik $\sqrt{A}$ może być urojony.

505. Ważna uwaga. Można czasem, wyciągając pierwiastek kwadratowy, rozwiązać równanie 4^{go} stopnia, jeśli się uda rozłożyć je na różnicę albo na summę dwóch kwadratów, albo znaleźć pierwiastek doskonały.

Niech będzie równanie.

$$x^4-4x^3+x^2+6x+2=0.$$

Wyciągaąc pierwiastek kwadratowy, otrzymujemy

$$\left(x^2-2x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=0.$$

Ta różnica kwadratów jest równa wieloczynowi summy i różnicy pierwiastków

$$(x^2-2x-1)(x^2-2x-2)=0;$$

zkąd dwa równania

$$x^2-2x-1=0 \quad \text{i} \quad x^2-2x-2=0$$

które dają $\qquad x=1\pm\sqrt{2} \quad \text{i} \quad x=1\pm\sqrt{3}.$

Niech będzie na drugi przykład równanie

$$8x^4-24x^3+22x^2-8x+1=0.$$

Porządkujemy wielomian według potęg rosnących x, i wyciągając pierwiastek kwadratowy znajdujemy

$$(1-4x+3x^2)^2-x^4=0.$$

Ta różnica kwadratów daje dwa równania

$$4x^2-4x+1=0 \quad \text{i} \quad 2x^2-4x+1=0;$$

zkąd

$$x=\frac{1}{2}, \quad \text{i} \quad x=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}.$$

506. Pierwiastek m^{ty} wielomianu. Zogólniając co o pierwiastku kwadratowym powiedziano, nietrudno pojąć teoryę wyciągania pierwiastku stopnia jakiegokolwiek z wielomianów. Niech będzie wielomian stopnia p

$$Ax^p+A_1x^{p-1}+A_2x^{p-2}+\ldots+A_p,$$

z którego chcemy wyciągnąć pierwiastey m^{ty}. Ponieważ tym pierwiastkiem, jeśli istnieje, jest pewny wielomian stopnia n

$$\alpha x^n+\alpha_1x^{n-1}+\alpha_2x^{n-2}+\ldots\alpha_n,$$

powinna być tosamość

$$Ax^p+A_1x^{p-1}+A_2{}^{p-2}+\ldots+A_p=(\alpha x^n+\alpha_1x^{n-1}+\alpha_2x^{n-2}+\ldots\alpha_n)^m$$

$$=\alpha^m x^{nm}+\frac{m}{1}\alpha^{m-1}x^{n(m-1)}(\alpha_1x^{n-1}+\alpha_2x^{n-2}\ldots\alpha_n)$$

$$+\frac{m}{1}\frac{m-1}{2}\alpha^{m-2}x^{n(m-2)}(\alpha_1x^{n-1}+\ldots+\alpha_n)^2+\ldots\ldots+\alpha_n^m.$$

Co wymaga żeby obie strony były tego samego stopnia, i żeby równe potęgi x miały spółczynniki równe.

Ztąd wynika że musi być

$$nm=p, \quad \text{zkąd} \quad n=\frac{p}{m};$$

Trzeba więc najpierwej żeby stopień p danego wielomianu był wielownikiem wskazu n pierwiastku; i to się odnosi do każdej litery wziętej za porządkującą. Trzeba potem żeby było

$$\alpha^m=\mathrm{A}, \quad \text{zkąd} \quad \alpha=\sqrt[m]{\mathrm{A}}.$$

Znając pierwszy wyraz pierwiastku równy $\sqrt[m]{\mathrm{A}}\,x^{\frac{p}{m}}$, dla wyznaczenia następujących, odciągamy jego potęgę $m^{tą}$ od danego wielomianu i znajdujemy resztę wyrażoną przez

$$\mathrm{R}=m\alpha^{m-1}x^{n(m-1)}(\alpha_1 x^{n-1}+\alpha_1 x^{n-2}+\ldots+\alpha_n)$$
$$+\frac{m(m-1)}{1.2}\alpha^{(m-2)}x^{n(m-2)}(\alpha_1 x^{n-1}+\ldots+\alpha_n)^2+\ldots\ldots+\alpha_n^m.$$

W tej reszcie wyraz $m\alpha^{m-1}x^{n(m-1)}.\alpha_1 x^{n-1}$, który ma największy wykładnik, jest m razy wieloczynem potęgi $m-1$ pierwszego wyrazu αx^n pierwiastku przez drugi $\alpha_1 x^{n-1}$; więc żeby otrzymać drugi wyraz pierwiastku, dość jest podzielić przez $m\alpha^{m-1}x^{n(m-1)}$ pierwszy wyraz uporządkowanej resz'y R.

Poczem, odejmując potęgę $m^{tą}$ $(\alpha x^n+\alpha_1 x^{n-1})^m$ od daneego wielomianu, albo odciągając różnicę $(\alpha x^n+\alpha_1 x^{n-1})^m-\alpha^m x^{n(m-1}$ od pierwszej rezty R, znajdujemy drugą resztę

$$\mathrm{R}'=(m\alpha_1 x^n+\alpha_1 x^{n-1})^{m-2}(\alpha_2 x^{n-2}+\alpha_3 x^{n-3}+\ldots+\alpha_n)$$
$$+\frac{m(m-1)}{1.\ 2}(\alpha x^n+\alpha_1 x^{n-1})^{m-2}(\alpha_2 x^{n-2}+\ldots+\alpha_n)^2+\ldots\ldots$$

W tej drugiej reszcie wyrazem który ma największy wykładnik, jest wieloczyn $m\alpha^{m-1}x^{n(m-1)}.\alpha_2 x^{n-2}$; więc, dzieląc pierwszy wyraz drugiej reszty R′ przez $m\alpha^{m-1}x^{n(m-1)}$, wyznaczy się oczywiście trzeci wyraz pierwiastku.

Poczem znowu, odejmując potęgę $m^{tą}$ $(\alpha x^n+\alpha_1 x^{n-1}+\alpha_2 x^{n-2})^m$ od całego danego wielomianu, albo odciągając tylko różnicę $(\alpha x^n+\alpha_1 x^{n-1}+\alpha_2 x^{n-2})^m-(\alpha x^n+\alpha_1 x^{n-1})^m$ od drugiej reszty, znajduje się trzecią, której pierwszy wyraz podzielony przez $m\alpha^{m-1}x^{n(m-1)}$ da czwarty wyraz pierwiastku. I tak dalej, aż do reszty zero, albo do reszty stopnia niższego od stopnia $\frac{p}{m}$ pierwiastku.

Te działania są mozolne. Można mniej zmudnie znaleźć pierwiastek m^{ty} wielomianu za pomocą *spółczynników niewyznaczonych*; oto jakim sposobem :

Niech będzie wielomian $8x^9+36x^8+6x^7-177x^6-192x^5+249x^4+446x^3-15x^2-300x-125$ z którego mamy wyciągnąć pierwiastek sześcienny.

Ponieważ dany wielomian jest stopnia 9go, jego pierwiastek sześcienny ma kształt ax^3+bx^2+cx+d; ztąd wynika że wielomian powinien módz się wyrazić w następującym kształcie

$$(ax^3+bx^2+cx+d)^3=a^3x^9+3a^2bx^8$$

$$\left.\begin{array}{l}+3a^2c\\+3ab^2\end{array}\right|x^7\left.\begin{array}{r}+3a^2d\\+6abc\\+\quad b^3\end{array}\right|x^6\left.\begin{array}{r}+6abd\\+3ac^2\\+3b^2c\end{array}\right|x^5\left.\begin{array}{r}+6acd\\+3bc^2\\+3b^2d\end{array}\right|x^4\left.\begin{array}{r}+3ad^2\\+6bcd\\+\quad c^3\end{array}\right|x^3\left.\begin{array}{r}+3bd^2\\+3c^2d\\ \end{array}\right|x^2$$

$$+cd^2x+d^3.$$

Trzeba więc żeby było

$$(1)\quad\begin{array}{r}a^3=8\\3a^2b=36\\+3ab^2=63a^2c\\3a^2d+6abc+b^3=-177\end{array}\qquad(2)\quad\begin{array}{r}6abd+3ac^2+3b^2c=-192\\6acd+3bc^2+3b^2d=249\\3ad^2+6bcd+c^3=446\\3bd^2+3c^2d=-15\\3cd^2=-300\\d^3=-125.\end{array}$$

Cztery równania (1) dają po kolei, dla czterech niewiadomych spółczynników, wartości

$$a=2,\quad b=3,\quad c=-4,\quad d=-5,$$

które czynią tosamościami równania (2). Te ostatnie mogą służyć za sprawdzenia. Więc szukany pierwiastek jest

$$2x^3+3x^2-4x-5.$$

ĆWICZENIA.

I. Dowieśdź że

$$K^n_1+K^n_2+K^n_3+\ldots+K^n_m=K^{n+1}_m.$$

K znaczy kombinacye zupełne.

II. Z m liter, między któremi jest α liter równych a, β lite równych b, utworzono szyki stopnia n. Pytanie ile jest szyków do których wchodzi p razy litera a, i q razy litera b?

Odpowiedź : $\dfrac{P_m}{P_p P_q}\,C^{n-p-q}_{m-\alpha-\beta}$.

III. Z m liter, między któremi jest α liter równych a i β liter równych b, utworzono kombinacye stopnia n. Pytanie ile jest kombinacyj do których litera a wchodzi p razy i litera b wchodzi q razy?

Odpowiedź : $C^{n-p-q}_{m-\alpha-\beta}$.

IV. Dowieśdź że summa kwadratów spółczynników dwumianu $(x+a)^m$ jest

$$\frac{2m(2m-1)(2m-2)\ldots(m+1)}{1.\;2.\;3\ldots m},\ \text{albo}\ \frac{2.6.10.14\ldots(4m-2)}{1.2.\;3.\;4\ldots m}.$$

V. Dowieśdź że $(a+b\sqrt{-1})^m=A+B\sqrt{-1}$,

$$(a-b\sqrt{-1})^m=A-B\sqrt{-1}.$$

Spółczynniki A i B mogą być zerami, jako naprzykład

$$(1+\sqrt{-1})^2=2\sqrt{-1}, \qquad (1+\sqrt{3}\sqrt{-1})^3=-8.$$

VI. Jakie powinny być związki między spółczynnikami wielomianu

$$Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E$$

żeby był kwadratem doskonałym?

Odpowiedź: Wyciągając pierwiastek kwadratowy wprost, albo przez spółczynniki niewyznaczone, otrzymuje się łatwo dwa warunki $B^3-4ABC-8A^2D=0$, $(B^2-4AC)^2-64A^2E=0$.

VII. Wyciągnąć pierwiastek czwarty z wielomianu

$$81x^4-216x^3+216x^2-96x+16.$$

Odpowiedź: $3x-2$.

VIII. Jakie są warunki konieczne i dostateczne, żeby wielomian drugiego stopnia o trzech niewiadomych

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy+2Cx+2C'y+2C''z+D,$$

był kwadratem doskonałym.

Odpowiedź: $B^2=A'A''$, $B'^2=A''A$, $B''^2=AA'$,

$$\frac{CC'}{B''}=\frac{CC''}{B'}=\frac{C'C''}{B}=D.$$

Trzy pierwsze warunki są te same co

$$A-\frac{B'B''}{B}=0, \quad A'-\frac{B''B}{B'}=0, \quad A''-\frac{BB'}{B''}=0.$$

Z nich i z poprzednich wywodzą się inne $\frac{C^2}{A}=\frac{C'^2}{A'}=\frac{C''^2}{A''}=D$; etc.

IX. Rozwiązać równanie $4x^4-28x^3+80x^2-140x+100=0$.

Odpowiedź: $x=\frac{5\pm2\sqrt{5}}{2}$, $x=1\pm2\sqrt{-1}$.

X. Rozwiązać równanie $8x^4-8x^3+6x^2-2x+1=0$.

Odpowiedź : $x=\pm\frac{1}{2}\sqrt{-1}$ $x=\frac{1\pm\sqrt{-1}}{2}$.

XI. Sprawdzić formułę

$$x^m+\frac{1}{x^m}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^m-\frac{m}{1}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{m-2}+\frac{m(m-3)}{1.\ 2}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{m-4}$$

$$-\frac{m(m-4)(m-5)}{1.\ 2.\ 3}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{m-6}+\ldots$$

ciąg się zatrzymuje na spółczynniku zero albo wykładniku zero.

XII. Dowieśdź formuły którą podał Abel matematyk duński,

$$(x+a)^m=x^m+ma(x+b)^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1\ 2}a(a-2b)(x+2b)^{m-2}$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}a(a-3b)^2(x+3b)^{m-3}+\ldots\ldots$$

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.\ 2.\ n}a(a-nb)^{n-1}(x+nb)^{m-n}+\ldots\ldots$$

Ta formuła istnieje jakiekolwiek jest b, i dla $b=0$ staje się dwumianem.

KONIEC

NOTY

I. O PRZENOSZENIU WYRAZÓW RÓWNANIA Z JEDNEJ STRONY NA DRUGĄ.

Żeby dowieśdź zasady: *Można przenieść jeden wyraz równania z jednej strony na drugą zmieniając tylko jego znak*, autorowie algebry usiłują najpierwej okazać, że się nie zmienia pierwiastków równania, dodając do obydwóch jego stron tę samą ilość. Jakoż, mówią, równania

$$A=B$$

$$A+m=B+m$$

są *widocznie* równowarte; zatem, jeśli ilość m jest równa i znaku przeciwnego jednemu z wyrazów, to go zniszczy, i ten wyraz zniknie ze strony równania na której się znajdował, a ukaże się na drugiej ze znakiem przeciwnym. Więc można przenieść jeden wyraz, etc.

Atoli dwa powyższe równania nie są koniecznie równowarte; świadkiem dwa następujące

$$(1) \qquad px+q=0,$$

$$(2) \qquad x^2+px+q=x^2;$$

z których pierwsze ma tylko jeden pierwiastek, $x=-\frac{q}{p}$, a drugie ma ich dwa, $x=-\frac{q}{p}$ i $x=\infty$ (n^ro^ 265). Więc, dodając ilość x^2 do obydwóch stron równania (1), wprowadza się do niego rozwiązanie obce; dodając zaś $-x^2$ do stron równania (2), traci się jedno rozwiązanie.

Inni, przypuszczając dobrowolnie że równanie $A=B$ ma zawsze rozwiązanie, przywodzą je do tosamości, przez podstawienie wartości pierwiastków; poczem, dodając liczbę m do obydwóch stron równania, powiedają że się tosamość nie psuje, co oczywiste; ale z tąd wnoszą że równanie także się nie psuje; czemu przeczyć wolno.

Chcąc uniknąć tych zarzutów, daliśmy wprost dowodzenie wysłowionej zasady w tekscie.

II. Metoda granic.

Nazywa się *granicą* ilości zmiennej ilość stała do której ta zmienna coraz bardziej się zbliża, i może się różnić od niej tak mało jak się podoba.

I tak, naprzykład, 1 jest granicą summy ułamków $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$... zmniejszających się o połowę; $\frac{1}{3}$ jest granicą summy ułamków, na przemian dodatnych i odjemnych, z których każdy jest połową poprzedzającego (nr° 411).

W ostatnim przykładzie summa n ułamków jest raz mniejsza drugi raz większa od $\frac{1}{3}$, według jak n jest parzyste albo nieparzyste. Co pokazuje że ilość zmienna może przechodzić swoją granicę, zbliżając się do niej coraz więcej.

Koło jest granicą wielokąta wpisanego albo opisanego, którego liczba boków rośnie bez końca i każdy bok coraz bardziej maleje; wielokąt wpisany ciągle się zwiększa a wielokąt opisany ciągle się zmniejsza, dążąc do granicy której przejść żaden z nich nie może.

Gdy ilość zmienna, powiększając się ciągle, nie może przewyższać ilości stałej, albo, zmniejszając się ciągle, nie może stać się mniejszą od ilości stałej, wtedy ta zmienna ma widocznie pewną granicę.

Zasada. *Jeśli dwie ilości zmienne są równe we wszystkich stanach wielkości przez które przechodzą a jedna z nich dąży do pewnej granicy, to oczywiście druga dąży także do tej samej granicy.*

Albo, co wychodzi na jedno, *gdy dwie ilości zmienne są ciągle równe ich granice są równe*; bo inaczej jedna ilość zmienna miałaby dwie granice.

Twierdzenie I. *Granica summy ilości zmiennych, w liczbie skończonej, jest summa granic tych ilości.*

Niech będą A, B, C ilości zmienne, a, b, c ich odpowiedające granice; α, β, γ ilości dodatne albo odjemne, które się mogą stać mniejszemi od wszelkiej ilości naznaczonej, i takie żeby było

$$A=a+\alpha,\quad B=b+\beta,\quad C=c+\gamma.$$

Mamy

$$A+B-C=a+b-c+\alpha+\beta-\gamma.$$

Owoż summa algebryczna $\alpha+\beta-\gamma$ trzech ilości tak małych jak się podoba, może się stać mniejszą od wszelkiej ilości naznaczonej; więc granicą summy algebrycznej $A+B-C$ ilości zmiennych jest summa algebryczna $a+b-c$ granic tych ilości.

Twierdzenie II. *Granica wieloczynu, skończonej liczby czynników, jest wieloczyn granic tych czynników.*

Niech będą czynniki zmienne

$$A=a+\alpha,$$

$$B=b+\beta,$$

$$C=c+\gamma,$$

$$D=d+\delta.$$

Pomnóżmy pierwszą równość przez wieloczyn BCD, drugą przez wieloczyn aCD, trzecią przez abD, ostatnią przez abc; będzie

$$ABCD=aBCD+\alpha BCD,$$

$$aBCD=abCD+\beta aCD,$$

$$abCD=abcD+\gamma abD,$$

$$abcD=abcd+\delta abc.$$

Zkąd, dodając stronami i znosząc wyrazy równe, wynika

$$ABCD=abcd+\alpha BCD+\beta aCD+\gamma abD+\delta abc.$$

Owoż, na mocy poprzedzającego twierdzenia, granicą drugiej strony jest wieloczyn $abcd$; więc

$$\text{gr}.ABCD=abcd=\text{gr}.A\times\text{gr}.B\times\text{gr}.C\times\text{gr}.D.$$

Twierdzenie III. *Granica ilorazu jest iloraz granic dzielnej i dzielnika.*

Niech będą A dzielna, B dzielnik, q iloraz. Mamy

$$A=Bq;$$

więc

$$\text{gr}.A=\text{gr}.B\times\text{gr}.q,$$

zkąd

$$\text{gr}.q=\frac{\text{gr}.A}{\text{gr}.B}.$$

III. Dodatek do odsyłacza stronicy 453.

Jeśli $a=\pm\infty$, ale b i c zostają ilościami skończonemi, wtedy oba pierwiastki równania $ax^2+bx+c=0$ są zerami, $x'=0$, $x''=0$. Jakoż, weźmy równanie

$$cy^2+by+a=0,$$

którego pierwiastki są odwrotnościami pierwiastków równania uważanego, będzie

$$y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2c}.$$

Przypuszczając że a i c mają znaki przeciwne, gdy się a powiększa nieskończenie pierwiastnik $\sqrt{b^2-4ac}$ może przewyższać wszelką wielkość; więc dla $a=\infty$ otrzymujemy

$$y=\pm\infty;\quad \text{zatem}\quad x'=+\frac{1}{\infty}=0,\quad x''=-\frac{1}{\infty}=0.$$

Ale, jeśli a i c mają te same znaki, będzie

$$y=\frac{-b\pm\sqrt{4ac-b^2}\sqrt{-1}}{2c};$$

wtedy, jeśli a zwiększa się nieskończenie, pierwiastnik $\sqrt{4ac-b^2}$ rośnie ponad wszelką wielkość; więc, dla $a=\infty$, znajdujemy $y=\pm\infty\sqrt{-1}$, i następnie

$$x'=+\frac{1}{\infty\sqrt{-1}}=0,\quad x''=-\frac{1}{\infty\sqrt{-1}}=0.$$

Mnogie są przykłady takich osobliwości w geometryi analitycznej, gdy, dla rozpoznania linii krzywej, szuka się jej *niemaltycznych;* jako naprzykład w linii 3go rzędu przedstawionej przez równanie $yx^2-2x+y^2=0$. To równanie dla $y=0$ daje $x=+\infty$ i $x=0$, a dla $y=-\infty$ daje $x=\pm\infty$.

IV. Własności liczb; liczba cyfer okresów dziesiętnych.

Twierdzenie. *Liczba pierwsza* p *dzieli summę potęg* m*tych* liczb $1, 2, 3, \ldots p-1$, *jeśli wykładnik całkowity* m *jest dodatny i mniejszy od* $p-1$.

Jakoż, w formule nro 498

$$S_m = \frac{(n+1)^{m+1}-1}{m+1} - \frac{m}{2} S_{m-1} - \frac{m(m-1)}{2.\,3} S_{m-2} - \dots \frac{n}{m+1}$$

zastąpmy n przez $p-1$, będzie

$$S_m = \frac{p(p^m-1)}{m+1} - \frac{m}{2} S_{m-1} - \frac{m(m-1)}{1.\,2} S_{m-2} - \dots$$

zkąd, mnożąc obie strony przez wieloczyn $1.2.3\dots m(m+1)$, wynika równość

$$1.2.3\dots m(m+1)S_m = Ap - A_1 S_{m-1} - A_2 S_{m-2} - \dots$$

w której spółczynniki A, A_1, $A_2 \dots$ są liczbami całkowitemi. Zatem, jeśli summy S_{m-1}, $S_{m-2}, \dots S_1$ są podzielne przez p, pierwsza strona będzie także podzielna przez p. Ale p, z założenia większe od $m+1$, nie może, dzielić żadnego z czynników wieloczynu $1.2.3\dots m(m+1)$; musi więc dzielić S_m. Owoż summa $S_1 = \frac{p(p-1)}{2}$ jest podzielna przez p, bo jest przynajmniej $p=3$; ztąd, na mocy powyższej równości, wnosimy że wszystkie następujące summy S_2, $S_3 \dots$ aż do ostatniej S_m są podzielne przez p.

Liczba cyfer okresów dziesiętnych.

Twierdzenie I. *Gdy mianownik ułamka nieredukownego $\frac{a}{b}$ jest pierwszy do 10, liczba cyfer okresu ułamka dziesiętnego równowartego jest dzielnikiem liczby* $\varphi(b)$, *która wyraża ile jest całkowitych mniejszych i pierwszych względem* b.

Niech będzie k liczba cyfer okresu ułamka dziesiętnego na który się zamienia ułamek $\frac{a}{b}$. Ponieważ z założenia wieloczyn $a.10^k$, podzielony przez b, wydaje resztę a, różnica $a(10^k-1)$ jest podzielna przez b; zatem b, będąc pierwsze do a, dzieli 10^k-1. Ale także wedle założenia ta różnica jest najmniejsza podzielna przez b; ztąd wynika że tylko same potęgi liczby 10, których wykładniki są wielownikami wykładnika k, dają resztę 1 z podzielenia przez b. I tak, potęga 10^{nk} podzielona przez b daje resztę 1, bo różnica potęg $10^{nk}-1$ jest podzielna przez 10^k-1, a ta ostatnia przez b; przeciwnie potęga 10^{nk+i}, w której $i<k$, nie daje reszty 1, bo oczywiście różnica $10^{nk+i}-10^{nk}=10^{nk}(10^i-1)$ nie jest podzielna przez b. Owoż, na mocy wiadomego twierdzenia, różnica $10^{\varphi(b)}-1$ jest podzielna przez b (*); więc $\varphi(b)$ jest wielownikiem z k, albo innemi słowy, k jest dzielnikiem liczby $\varphi(b)$.

Wniosek, Gdy mianownik b jest liczbą pierwszą liczba k jest dzielnikiem liczby $b-1$, bo wtedy $\varphi(b)=b-1$.

Uwaga. Liczba cyfer okresu dziesiętnego jest niezależna od licznika a, i od czynników 2, 5 które wpływają tylko na cyfry nieokresowe. Więc ułamki nieredukowne których mianowniki są równe bez względu na czynniki 2 i 5, dają tę samą liczbę cyfer okresu dziesiętnego.

Twierdzenie II. Jeśli mianownik ułamka nieredukownego $\frac{A}{B}$, pierwszy do 10, *jest wieloczynem czynników* a^α, b^β, c^γ, *pierwszych między sobą po dwa, liczba cyfer okresu dziesiętnego, odpowiedającego temu ułamkowi, jest najmniejszym wielownikiem liczb które wyrażają ile jest cyfer w okresach dziesiętnych odpowiedających ułamkom* $\frac{1}{a^\alpha}$, $\frac{1}{b^\beta}$, $\frac{1}{c^\gamma}$.

Oznaczmy przez k, k', k'' liczby cyfer okresów dziesiętnych które odpowiedają ułamkom $\frac{1}{a^\alpha}$, $\frac{1}{b^\beta}$, $\frac{1}{c^\gamma}$, i przez m najmniejszy wielownik tych trzech liczb.

Ponieważ różnice 10^k-1, $10^{k'}-1$, $10^{k''}-1$ są z założenia podzielne odpowiednio przez a^α, b^β, c^γ, różnica 10^m-1 jest przez nie podzielna; ale te trzy dzielniki są pierwsze między sobą po dwa, więc ich wieloczyn B dzieli 10^m-1.

Powiedamy teraz że różnica 10^m-1, jest najmniejsza podzielna przez wieloczyn B. Jakoż, gdyby ten wieloczyn dzielił różnicę mniejszą $10^{m'}-1$, toby dzielił także różnicę $10^m-10^{m'}=10^{m'}(10^{m-m'}-1)$; zatem jego czynniki a^α, b^β, c^γ, pierwsze do 10, nie mogąc dzielić $10^{m'}$, musiałoby dzielić różnicę $10^{m-m'}-1$; co niemożebne, bo $m-m'<m$ nie jest wielownikiem liczb k, k', k''. Więc 10^m-1, jest najmniejszą różnicą podzielną przez B; co dowodzi że m, najmniejszy wielownik liczb k, k', k'', wyraża liczbę cyfer okresu dziesiętnego pochodzącego z ułamka $\frac{A}{B}$.

(*) Zobacz w naszej *arytmetyce* twierdzenia własności liczb, umieszczone w notach na końcu dzieła.

TWIERDZENIE III, *Gdy ułamek, mający za mianownik potęgę* p^α *liczby pierwszej* p, *daje okres dziesiętny obejmający* k *cyfer, ułamek nieredukowny z mianownikiem* p^n *da okres dziesiętny zowierający* $kp^{n-\alpha}$ *cyfer jeśli* p^α *jest największą potęgą jaka dzieli* 10^k-1.

Nazywając q iloraz całkowity $\frac{10^k-1}{p^\alpha}$, mamy tosamość

$$10^k=1+p^\alpha q;$$

która, podniesiona do potęgi całkowitej m, daje

$$10^{km}=1+\frac{m}{1}p^\alpha q+\frac{m(m-1)}{1.\ 2.}p^{2\alpha}q^2+\ldots+p^{m\alpha}q^m.$$

Ztąd, mnożąc obie strony przez wieloczyn mianowników $1.2.3\ldots\frac{m-1}{2}$, wywodzimy równość

$$1.2.3\ldots\frac{m-1}{2}(10^{km}-1)=\mathrm{A}mp^\alpha q+\mathrm{A}_1 mp^{2\alpha}q^2\ldots+\mathrm{A}p^{m\alpha}q^m,$$

w której spółczynniki A, A_1,... są liczbami całkowitemi.

Ta równość wydatnie pokazuje że, jeśli $m=p$, potęga $p^{\alpha+1}$ dzieli drugą stronę i temsamem pierwszą, to jest dzieli wieloczyn $1.2.3\ldots\frac{p-1}{2}(10^{kp}-1)$. Ale liczba pierwsza p, będąc większa od $\frac{p-1}{2}$, nie może dzielić żadnego z czynników $1.2.3\ldots\frac{p-1}{2}$; więc potęga $p^{\alpha+1}$ dzieli różnicę $10^{kp}-1$. Z tej samej równości wynika jeszcze że, ponieważ q nie jest wielownikiem z p na mocy założenia, potęga $p^{\alpha+1}$ jest największa jaka dzieli różnicę $10^{kp}-1$, i nawzajem różnica $10^{kp}-1$ jest najmniejsza podzielna przez $p^{\alpha+1}$.

Więc, jeśli ułamek $\frac{a}{p^\alpha}$ daje okres dziesiętny złożony z k cyfer, ułamek nieredukowny $\frac{b}{p^{\alpha+1}}$, zamieniony na dziesiętny, będzie miał okres zawierający kp cyfer; następnie ułamek nieredukowny $\frac{c}{p^{\alpha+2}}$ zamieni się na dziesiętny okresowy mający kp^2 cyfer, i tak dalej; zatem ułamek nieredukowny $\frac{l}{p^n}$ zamieni się na dziesiętny z okresem mającym $kp^{n-\alpha}$ cyfer.

Wniosek. Jeśli ułamek $\frac{a}{p}$, mający za mianownik liczbę pierwszą p różną od 3, daje okres złożony z k cyfer, ułamek $\frac{l}{p^n}$ zamieni się na dziesiętny okresowy mający kp^{n-1} cyfer.

Twierdzenie IV. *Gdy mianownik ułamka nieredukownego, bez względu na czynniki 2 i 5 które zawierać może, dzieli summę* 10^k+1, *ten ułamek zamieniony na dziesiętny ma okres obejmujący liczbę cyfer parzystą, i każda cyfra pierwszego pół-okresu z odpowiedającą cyfrą drugiego czyni summę* 9.

1° Niech będzie ułamek właściwy nieredukowny $\frac{a}{b}$ którego mianownik nie ma czynników 2 i 5.

Ponieważ mianownik b, pierwszy do licznika a i do 10, dzieli summę 10^k+1, reszta z podzielenia wieloczynu $a.10^k$ przez b równa się $b-a$; co daje

$$a.10^k=bq+b-a.$$

Tak samo, ponieważ dzielnik b jest pierwszy do $a-b$ i do 10, dzielna $(b-a)10^k$ daje resztę a, to jest

$$(b-a)10^k=bq'+a.$$

Doszedłszy do reszty a widzimy że, jeśli summa 10^k+1 jest najmniejsza podzielna przez b, okres dziesiętny ma $2k$ cyfer. W tem przypuszczeniu, dodając stronami dwie powyższe równości i dzieląc przez b, otrzymujemy

$$10^k=q+q'+1, \quad \text{zkąd} \quad q+q'=10^k-1.$$

Owoż, 10^k-1 jest liczbą złożoną z k cyfer 9, więc cyfry pierwszego pół-okresu z cyframi tego samego rzędu w drugim pół-okresie tworzą summy równe 9.

Na przykład $\frac{11}{13}=0,846153\ldots$ gdzie $8+1=9$, $4+5=9$, $6+3=0$.

2° Niech będzie teraz ułamek nieredukowny $\frac{a}{2^35^2b}$, w którym b dzieli summę 10^k+1.

Dając mu kształt $\frac{1}{10^3}\cdot\frac{25a}{b}$, i zamieniając ułamek $\frac{25a}{b}$ na dziesiętny otrzymuje się część całkowitą, i po przecinku okres złożony z dwóch półokresów których odpowiedające cyfry czynią summy 9; więc, dzieląc potem przez 10^3, to jest cofając przecinek o *trzy* cyfry na lewo, otrzymuje się trzy dziesiętne nieokresowe i nie narusza się w niczem okresu. Co było do okazania.

Wniosek. *Jeśli ułamek, mający za mianownik liczbę pierwszą* p, *daje okres dziesiętny obejmujący* 2k *cyfer i rozdzielający się na dwa pół-okresy których odpowiedające cyfry czynią summę* 9, *wtedy ułamek nieredukowny mający za mianownik* p^n *daje okres dziesiętny obejmujący* $2kp^{n-1}$ *cyfer, i rozdzielający się także na dwa pół-okresy których odpowiedające cyfry czynią summy* 9.

Bo, z założenia p dzieli różnicę $10^{2k}-1$; zatem, na mocy twierdzenia III^{go}, p^n dzieli różnicę $10^{2kp^{n-1}}-1$ która się równa wieloczynowi $(10^{kp^{n-1}}+1)(10^{kp^{n-1}}-1)$. Owoż p^n nie może dzielić czynnika $10^{kp^{n-1}}-1$, a p nie dzieli zarazem obydwóch czynników $10^{kp^{n-1}}-1$ i $10^{kp^{n-1}}+1$, bo nie dzieli ich różnicy; więc p^n musi dzielić summę $10^{kp^{n-1}}+1$. Co dowodzi wniosku.

Za pomocą tych twierdzeń, można łatwo wiedzieć ile ma cyfer okres odpowiedający ułamkowi nieredukownemu $\frac{A}{5.11^2.13}$ na przykład; dość tylko znać liczby cyfer okresów odpowiedających ułamkom $\frac{1}{11}$ i $\frac{1}{13}$. Owoż, okres pierwszego ma 2 cyfry, drugiego 6; okres odpowiedający ułamkowi $\frac{1}{11^2}$ zawiera 2.11 cyfer; a najmniejszy wielownik liczb 2.11 i 6 jest 66; więc okres odpowiedający ułamkowi $\frac{A}{5.11^2.13}$ ma 66 cyfer; i wiemy jeszcze że cyfry pierwszego pół-okresu z odpowiedającemi drugiego czynią summy 9.

Widzimy tak samo że ułamek nieredukowny $\frac{a}{3.7^3}$, zamieniony na dziesiętny, ma okres złożony z 294 cyfer.

KONIEC NOT.

ZNACZNIEJSZE OMYŁKI DRUKU

Przede wszystkiem czytelnik zechce poprawić stronicowanie, począwszy *od stronicy* 336 *aż do* 641.

stron.	*wiersz*	*zamiast*	*czytaj*
3	3	*a* kiedy	kiedy
13	2	najpierwiej	najpierwej
13	2 od dołu	zadań	działań
13	10	od 1,	od —1,
14	11	jednąlitość	jedną ilość
20	4	gracze	gracze po skończeniu gry,
26	5	$3a^4b$	$32a^4b$
»	6	$-15a^3b^2$	$-15a^3b^2$,
»	10	wieloczynów	wielomianów
»	9 od dołu	— AM″	OA
47	9	$=a$	$=a^2$
52	3	$3x^2+18x^3$	$3x^2-18x^3$
53	5	*az*	wyraz
»	6 od dołu	$-ab^2$	$-2ab^2$
54	4	$-ab^2$	$-2ab^2$
»	6	$+2ab$	$+2ab^2$
59	14	$-x^3$,	$-2x^3$,
71	5	x^m+a^n	$x^m\pm a^n$
74	7 od dołu	$-a^2x^2$	$-2a^2x^2$
88	5 od dołu	arytmetycznej	geometrycznej
85	4 od dołu	$\frac{a}{x}$	$\frac{x}{a}$
87	7	poprzedzająca	poprzedzające
89	4 od dołu	kilku	kilka
95	10 od dołu	płaszczyznie	płasczyznie i nie
103	5	tymsamem	temsamem

106 Po wysłowieniu ćwiczenia II dodać : *jeśli* m *jest parzyste.*

$$x^{2m}+x^{2m-2}+x^{2m-4}+\dots+x^{m+1}-x^{m-1}-x^{m-3}-\dots x^2-1$$

jest podzielne przez $x^m+x^{m-1}+x^{m-2}+\dots+x+1$

jeśli m jest nieparzyste

stron.	wiersz	zamiast	czytaj
106	4 od dołu	ciąg	wielomian
»	3 od dołu	x^{np-n}	$x^{(p-1)n}$
»	2 od dołu	ciąg	wielomian
»	2 od dołu	x^{n-1}	x^{p-1}.
	Dodać : wielomian $1+x^n+x^{2n}+x^{3n}+\ldots x^{(p-1)n}$ jest podzielny przez $1+x+x^2+x^3+x^{p-1}$, jeśli n i p są pierwsze między sobą.		
119	7	otrzymamy	otrzymany
121	4 od dołu	pierwiastek	pierwiastnik
122	5	$\sqrt[n]{a^n}$	$\sqrt[n]{a^m}$
124	5	$.3a=\frac{9}{5}$	$.3a^2=\frac{9}{4}$
136	4 od dołu	razem	zerem
151	2 od dołu	niezredukowany	nieredukowny
152	2 od dołu	$x=2$,	$x=1$,
172	5	y	1
»	8	do sześcianu będzie,	do sześcianu, będzie
177	6	2f,90	2f,60
191	2	wyciągmy	wyciągamy
256	7 od dołu	$\frac{y}{10}$	$\frac{y}{18}$
287	13	$b'c'$	$b'c''$
297	8 od dołu	$-1(-2)$	$-1-(-2)$
305	11 od dołu	równości	nierówności
321	8	mając	znając
339	9 od dołu	x	u
347	11 od dołu	liczbę k	k
369	9 od dołu	wypływała	wpływała
377	5 od dołu	mieszaninę droższą albo tańszą	mieszaniny droższej albo tańszej
379	13	$\frac{1}{12}$.	$\frac{1}{11}$.
389	11	$a_{1\cdot2}a_{1\cdot2}$	$a_{1\cdot2}a_{1\cdot3}$
390	12	jego	jako
451	8 od dołu	dochodzi zera	dochodzi do zera
460	7	Pierwiastnikami	pierwiastkami
464	3 od dołu	$\left(x+\frac{b^2}{2a}\right)$	$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$
467	13 od dołu	498	462
477	1 od dołu	$x_1<x_3<x'$	$x_1>x_3>x'$.
482	1 od dołu	$x'-x_2$	$x'-x_1$

stron.	*wiersz*	*zamiast*	*czytaj*
483	9 od dołu	$\frac{4ac}{b}$	$\frac{4ac}{b^2}$
484	2 od dołu	$\frac{4ac}{b}$	$\frac{4ac}{b^2}$
496	8 od dołu	$\sqrt{A^2}+B$	$\sqrt{A^2+B}$
538	1 od dołu	umiejemy	umiemy
558	8	x^2+y^2	y^3+x^3
559	10	znajdujemy się	znajduje się
561		Równanie $x+y=c$ umieszczone w zadaniu XIX należy do zadania XX.	
598	4 od dołu	*cwyrazów*	*wyrazów*
631	4 od dołu	*Uwaga* 338	338. Uwaga,
632	8 od dołu	*trzy*	*cztery*
635	11 od dołu	1300	13000
»	6 od dołu	*dałoby*	*dałaby a*
640	4 od dołu	$8Rh$	$8a^2Rh$
649	6	m	m (1)
665	2 od dołu	minimum	maximum
668	6	$p+q+r$	z $p+q+r$
668	12	$x_1y_2 \ldots$	$x_1x_2 \ldots$
670	5	$x^{\frac{p}{\alpha}} y^{\frac{q}{\beta}} z^{\gamma}$	$x^{\frac{p}{\alpha}} y^{\frac{q}{\beta}} z^{\frac{r}{\gamma}}$
680	11	drudności	trudności
718	w odsyłaczu	*progressio a*	a *progressio*
719	13	300	390
728	5	lub	albo
744	10	stanowiąc	stawiając
757	14	odpowiadały	odpowiedały
758	5	nie tylko	nietylko
766	6 od dołu	$\frac{\beta'}{\beta'}$	$\frac{\beta'}{\beta}$
783	2	POPEŁNIENIA	DOPEŁNIENIA
798	1	w zaniedbanym, wyrazie	w zaniedbanym wyrazie,
799	10	1,000,	100
824	5 od dołu	będzie, dowiedzione,	będzie dowiedzione,
858	2 od dołu	Rowinąć	Rozwinąć

Nakładem właściciela Biblioteki Kórnickiej a przewodniczącego w Towarzystwach Naukowej Pomocy i Nauk Ścisłych w Paryżu, wyszły następujące dzieła matematyczne :

1. Norzewski Roch. *Nouvelle théorie des proportions et progressions harmoniques avec ses applications à la géométrie.* Paris, 1852, in-8°, 60 pages de texte et deux planches lithographiées (wyczerpane).

2. G.-H. Niewęgłowski, b. profesor analizy w Szkole Wyższej Polskiej Montparnasse, examinator matematyki w liceum Świętego Ludwika w Paryżu : *Arytmetyka z teoryą przybliżeń liczebnych* i t. d. (Kurs zupełny, zawierający działania skrócone, błędy samoistne i względne; noty dotyczące własności liczb, wiele rozwiązanych zagadnień, ćwiczenia). Paryż, 1866, in-8°, stron 352. Cena 1 tal. 10 sgr.

3. *Geometrya. Część I, Geometrya płaska* (wydanie drugie), w Paryżu, 1866 roku, stron 436 in-8°, figury w tekscie. Cena 1 tal. 10 sgr.

4. *Geometrya. Część I i II*, kurs zupełny, drugie wydanie zupełnie przerobione, zawierające całą geometryę starożytnych i metody geometryi nowoczesnej (pierwsze wydanie z 1852 roku). Paryż, 1868, in-8° stron VIII i 778. Cena 2 tal. 20 sgr.

5. *Trygonometrya prostolinijna i sferyczna z teoryą ilości urojonych i z notami.* Paryż, 1870 roku, in-8°, stron XV i 407. Cena 1 tal. 15 sgr.

6. *Zasady rachunku różniczkowego i całkowego z zastosowaniami*, wyłożył W. Folkierski, inżynier cywilny, b. uczeń szkoły politechnicznej w Karlsruhe, licencyat nauk matematycznych P. F. Sorbony, profesor Mechaniki w szkole Wyższej przygotowawczej w Paryżu, tom I zawierający *Rachunek różniczkowy* oraz dodatek Władysława Trzaski o *Wyznacznikach.* Paryż, 1870, in-8°, stron XLIII i 1087, figur w tekscie 136. Cena 3 tal 10 sgr.

7. *Pamiętnik Nauk Ścisłych w Paryżu*, tom I. Główne artykuły przez pp. Franke, Gosiewskiego, Sągajłę, Trzaskę, Żmurkę. Paryż, 1871, in-4° stron 186, figur 5. Cana 2 tal.

8. *Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu*, tom II. Artykuły pp. Gosiewskiego, Kucharzewskiego, Sągajły Trzaski i Zalińskiego. Paryż, 1872, in- 4 stron 245, figur 8. Cena 2 talary. (Obydwa tomy razem oprawne 3 tal. 22. sgr.)

9. *Wykład Hydrauliki wraz z teoryą machin wodnych*, poprzedzony wiadomościami wstępnemi z Hydrostatyki i Hydrodynamiki, przez pp. Feliksa KUCHARZEWSKIEGO i Władysława KLUGERA (inżynierów dyplomowanych szkoły Dróg i Mostów w Paryżu). Paryż, 1873, in-8° stron LVI i 1018. Figur w tekście 110, oprawa angielska. Cena 20 franków.

10. *Zasady rachunku różniczkowego i całkowego*, przez Władysława FOLKIERSKIEGO, stałego Sekretarza i Wice-prezesa Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu, tom II *Rachunek całkowy*. Część pierwsza : *całkowanie różniczek* i t. d. Paryż, 1873, in-4° stron XVI i 752. figur 76, oprawa angielska. Cena 20 franków.

11. *Wykład Mechaniki cząsteczkowej (molekularnej)*, przez Władysława GOSIEWSKIEGO, professora Fizyki matematycznej. Tomu 1go części różniczkowej zeszyt pierwszy. Paryż, 1873, in-8°, stron 176. Cena fr. 4.

12. *Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu*, tom III, zawierający wypracowania pp. W. Folkierskiego, Klugera, Kucharzewskiego, Dolińskiego, Gosiewskiego i Martynowskiego. Paryż, 1873, stron VIII i 354, figur 96. Cena fr. 12.

13. *Mechanika rozumowa*, przez G.-H. NIEWĘGŁOWSKIEGO, dwa tomy. Tom I, *Statyka i Dynamika punktu*. Paryż, in-8° stron 544, z figurami; cena fr. 10.

14. *Wykład zupełny Algebry* przez Adolfa SĄGAJŁĘ, w czterech tomach. Tom pierwszy : *Początki Algebry*. Paryż, 1873, in-8° stron 632, z figurami. Cena 5 fr. 50 cent.

15. *Bibliografia piśmiennictwa polskiego z działu Matematyki i Fizyki oraz ich zastosowań*, przez Dra Teofila ŻEBRAWSKIEGO, członka Akademii Krakowskiej. Kraków, 1873, in-8° str. 617, z 4 tablicami. Cena 3 talary.

16. *Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych*, tom IV, zawierający wypracowania pp. Martynowskiego, K. Brandta, J.-N. Frankiego, W. Klugera, W. Puchewicza, S. Baranowskiego i Cayley'a (tłumaczenie z angielskiego). Paryż, 1874, in-4° czterdzieści dwa arkusze druku, figur w tekście 100. Cena 12 franków.

17. *Wykład zupełny Algebry* przez Adolfa SĄGAJŁĘ w czterech tomach. Tom II : *Teorya wyznaczników i ich przedniejsze zastosowania*. Paryż, 1874, in-8°, stron 400. Cena 5 fr. 50 cent.

18. *Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych*, tom V, zawierający prace pp. K. Maszkowskiego, Wł. Gosiewskiego, Ł. Wojciechowskiego, J. Rostafińskiego i S. Baranowskiego. Paryż, 1874, in-4° czterdzieści cztery arkusze druku, figur w tekscie 24, tablic 20. Cena fr. 16.

19. *Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu*, tom VI zawierający prace pp. J. Rostafińskiego, A. Martynowskiego, S. Elzanowskiego, W. Zajączkowskiego i M. Girdwoynia. Paryż, 1875, in-4° czterdzieści cztery arkusze druku, figur w tekscie 10, tablic litografowanych 12, stalorytów 8. Cena franków 20.

20. G.-H. Niewęgłowski. *Mechanika Rozumowa*, tom II, *Dynamika układów materyalnych, Hydrostatyka i Hydrodynamika*. Paryż, 1876, in-8° str. 885, z figurami w tekscie. Cena 15 fr.

21. *Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu*, tom VII, zawierający prace pp. Wł. Gosiewskiego, K. Brandta, K. Hertza i S. Dicksteina, A. Sękowskiego, M.-A. Baranieckiego, B. Rejchmana, M.-A. Baranieckiego i A. Sągajły. Paryż, 1875, in-4° czterdzieści arkuszy druku, figur w tekscie (drzeworytów) 56, miedziorytów typograficznych (sur cuivre en relief) 2; tablic : miedzioryt 1, stalorytów 4, fotodruk 1. Cena franków 20.

22. *Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu*, tom VIII zawierający prace pp. M.-A. Baranieckiego, Wł. Gosiewskiego, M. Hulewicza, Z. Laskowskiego, J. Rostafińskiego, A. Sągajły, A. Transon'a (tłumaczenie z francuzkiego), M.-A. Baranieckiego. In-4°, Paryż, 1876, trzydzieści arkuszy druku, figur w tekscie 18, tablica jedna litografowana. Cena franków 20.

23. Wł. Kluger : *Wykład wytrzymałości materyałów*. Paryż, 1871, in-8° stron 595 z figurami w tekscie. Cena 15 franków.

24. *Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu*, tom IX zawierający prace pp. M. Girdwoynia, M. Szystowskiego, Wł. Gosiewskiego, Ł. Wojciechowskiego, S Diksteina i Gosiewskiego, K. Brandta i J. Śniechowskiego. Paryż, 1877, in-4° pięćdziesiąt arkuszy druku, drzeworytów 81, tablic litografowanych 11, miedziorytów 2. Cena 20 franków.

25. *Wykład nauki o równaniach różniczkowych* przez Wł. Zajączkowskiego, doktora filozofii, profesora Matematyki w Akademii Technicznej Lwowskiej, in-8° stron XIV i 918. Cena franków 25.

26. *Zasady geometryi analitycznej* przez Adolfa Sągajłę, tom I, in-4°. Paryż, 1877, stron LIV i 699 z figurami w tekscie. Cena 25 franków.

27. *Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu*, tom X zawierający prace pp. J. Sochockiego, E. Habicha, M.-A. Baranieckiego, T. Chudzińskiego, K. Brandta, Wł. Trzaski i Wł. Trzaski, M. Szystowskiego i A. Martynowskiego. Paryż, 1878, in-4° czterdzieści arkuszy druku, drzeworytów 75; tablic litografowanych 9. Cena franków 20.

28. G.-H. Niewęgłowski, profesor matematyki w Paryżu, *Algebra*, w dwóch tomach. Część pierwsza, zawierająca *Algebrę elementarną*. Paryż, 1879, in-8° stron XII i 896. Cena franków 12.

Znajdują się obecnie w druku :

29. Ernest Sągajło. *Geometrya Wykreślna z zastosowaniami*, in-4°.

30. *Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu*, tom XI, in-4°.

31. Dr. M.-A. Baraniecki. *Teorya Wyznaczników* według najnowszych zasad, in-8°.