ARYTMETYKA

KURS WYŻSZY

Obejmująca Regułę Trzech

z zastosowaniami, podnoszenie do potęg i wyciąganie pierwiastku kwadratowego

NAPISANA

PZEZ

Michała Grubeckiego

Nauczyciela Szkół Publicznych.

WARSZAWA.

Nakładem Księgarni **J. Błaszkowskiego**

przy ulicy Krakowskie Przedmieście Nr 395.

1867.

Дозволено Цензурою.
Варшава 31 Августа 1867 года.

Druk Alexandra Ginsa.

CZĘŚĆ PIERWSZA.

Rozdział I.

Reguła Trzech.

(Тройное Правило).

§ 1.

Reguła trzech podaje nam sposoby rozwiązywania zagadnień, w których są dane trzy liczby, z tych dwie jednego gatunku a trzecia innego; szukamy zaś czwartéj liczby takiego gatunku jak trzecia.

Reguła trzech podług rodzaju odnoszących się do niéj zagadnień nosi nazwę: Reguły trzech pojedynczéj, złożonéj, łańcuchowéj, procentu, eskontu, spółki, mieszaniny i t. p.

a). Reguła Trzech pojedyncza.

(Простое тройное правило).

§ 2.

1. **Przykład.** 15 robotników wyrabia w pewnym czasie 200 arszynów płótna. Ileż go wyrobi 25 robotników przy tychże samych warunkach? arszynów płótna

ro.	ar.
15	200
25	x.

*

Rozwiązanie. Jeżeli 15 robotników wyrabia 200 arszynów płótna, to w tymże czasie

1 robotnik zrobi 15-ą część tegoż czyli $\frac{200}{15}$

a 23 robotników zrobi 25 razy więcéj, tojest $\frac{200\times25}{15}=333,33$ ar.

A zatém 25 robotników w tym samym czasie zrobi 333,33 arszynów.

§ 3.

2. **Przykład**. 25 tkaczy wyrabia w pewnym czasie 333,33 arszynów płótna; ileż go (płótna) wyrobi w tymże samym czasie 15 tkaczy?

tk.	ar.
25	333,33
15	x.

Rozwiązanie. Jeżeli 25 tkaczy wyrabia 333,33 arszynów, to w tymże czasie

1 tkacz wyrobi 25-ą część tegoż, czyli $\frac{333,33}{25}$

a 15 tkaczy „ 15 razy więcéj, tojest $\frac{333,33\times15}{25}=200$ ar.

A więc 15 tkaczy wyrobi w tymże czasie 200 arszynów płótna.

§ 5.

3. **Przykład**. 15 tkaczy wyrabia 200 arszynów płótna. Iluż potrzeba tkaczy do wyrobienia 333,33 arszynów takiegoż płótna w tymże samym czasie?

ar.	tk.
200	15
333,33	x.

Rozwiązanie. Jeżeli 200 arszynów były robione przez 15 tkaczy, to na wyrobienie

1-go ar. potrzeba 200 razy mniéj tkaczy czyli $\frac{15}{200}$

a dla wyrobienia 333,33 ar. potrzeba tkaczy 333,33 razy więcéj czyli $\frac{15\times333,33}{200}=25$ tkaczy.

Zatém dla wyrobienia w tymże samym czasie 333,33 arszynów trzeba 25 robotników.

Sposoby tu podane rozwięzywania zagadnień odnoszących się do reguły trzech nazywają się *sprowadzaniem do jedności.*

§ 5.

4. **Przykład**. Pewien podróżny idąc po 10 godzin dziennie, potrzebuje 20 dni na przejście z Warszawy do Dynaburga; ile godzin dziennie powinien na podróż używać, jeżeli tęż drogę chce odbyć w dniach 18-tu?

dni	godź.
20	10
18	x.

Rozwiązanie. Podróżując przez dni 20 po 10 godzin dziennie potrzebuje $20 \times 10 = 200$ godzin dla dojścia do celu podróży; jeżeli więc chce tęż drogę odbyć w 18 dniach, musi dziennie użyć na podróż 18-tą część 200 godzin czyli $\frac{200}{18} = 11\frac{1}{9}$ godzin.

§ 6.

5. **Przykład**. Pewien podróżny idąc po $11\frac{1}{9}$ godzin dziennie potrzebuje na przejście z Warszawy do Dynaburga 18 dni. Ile godzin powinien przeznaczyć na podróż, jeżeli chce tęż podróż przebyć w 20 dniach?

dni	godź.
18	$11\frac{1}{9}$
20	x.

Rozwiązanie. Jeżeli przez dzień idzie $11\frac{1}{9}$ godzin to przez 18 dni idzie $18 \times 11\frac{1}{9}$ godzin $= 200$ godzin
a „ 20 wypadnie na każdy dzień $\frac{200}{20} = 10$ godzin.

§ 7.

6. **Przykład**. Za 117 rubli ile dostanie ryz papiéru po 3,50 rub., po 4 rub. i po 5,50 rubli ryza, jeżeli chcemy miéć równą liczbę ryz każdego gatunku?

wszystkich

Rozwiązanie. Cena trzech ryz pierwszego gatunku po 3,50 r., drugiego po 4 r. i trzeciego po 5,50 rub. ryza wynosi razem 13 rubli; zatém za 117 rubli tyle ryz każdego gatunku dostanie ile razy 13 mieści się w 117 czyli $\frac{117}{13}=9$ ryz każdego gatunku.

§ 8.

7. **Przykład.** Ile arszynów wziąść potrzeba materyi szerokiéj na $^5/_8$ arszyna, dla podszycia 30 arszynów innéj materyi szerokiéj na $\frac{6}{8}$ arszyna?

szer.	długość
$\frac{6}{8}$	30
$\frac{5}{8}$	x.

Rozwiązanie. Jeżeli przy szerokości $^6/_8$ ar. potrzeba 30 ar. to przy szerokości $\frac{1}{8}$ ar. potrzeba 6 razy więcéj, to jest 30×6 a ,, ,, $\frac{5}{8}$,, ,, 5 ,, mniéj ,, $\frac{30\times 6}{5}=$ 32 ar.

A więc na podszycie téj materyi potrzeba będzie kupić 32 arszyny drugiéj.

§ 9.

8. **Przykład.** Dwa dywany są równéj szerokości i gatunku; ale jeden dłuższy o 3 arszyny kosztował 48 rubli a drugi 36 rubli. Jaka jest długość każdego z tych dywanów?

Rozwiązanie. Ponieważ przewyżka ceny jednego dywanu nad drugiego jest 12 rubli, zatém ceną trzech arszynów jest 12 rub.

A więc cena 1 arszyna jest $\frac{12}{3}=4$.

A że pierwszy kosztował 48 rubli
więc długość jego musi być $\frac{48}{4}=12$ arszynów
a drugiego $12-3=$ . . . . 9 arszynów.

b). Reguła Trzech Składana.

(Сложное тройное правило).

Odnoszące się do téj reguły zagadnienia mają więcéj niż trzy danych ilości, dają się jednak rozłożyć na dwa lub więcéj zagadnień trójwyrazowych.

§ 10.

1. **Przykład.** 10 centnarów siana wystarcza do wyżywienia 8 koni przez dni 15; ileż potrzeba będzie siana aby wyżywić 13 koni przez dni 20?

ko.	dn.	cen.
8	15	10
13	20	x.

Rozwiązanie.

Ponieważ 8 koni przez 15 dni zjadają 10 centnarów czyli 1000 funtów siana, to

1 koń przez dni 15 zjada 8 razy mniéj czyli $\frac{1000}{8}$

a 1 „ „ dzień 1 „ 15 „ „ „ $\frac{1000}{8 \times 15}$

więc 13 koni „ „ „ „ 13 „ więcéj „ $\frac{1000 \times 13}{8 \times 15}$

nakoniec 13 „ „ dni 20 zjadają 20 „ „ „ $\frac{1000 \times 13 \times 20}{8 \times 15}$ $= 2166^2/_3$ funtów.

§ 11.

2. **Przykład.** Z 28,5 funtów przędzy wyrobiono sztukę płótna 120 arszynów długą a 1,25 arszynów szeroką. Ileż wyrobią arszynów podobnegoż płótna szerokiego na 1,92 ar. z przędzy ważącéj 40 funtów?

℔	sz.	dł.
28,5	1,25	120
40	1,91	x.

Rozwiązanie. Kiedy z 28,5 ℔ przędzy wyrabiają 120 arszynów płótna szerokiego na 1,25 ar. to:

z 28,5 ℔ przędzy zrobią płótna szerokiego na 1 ar. 1,25 razy więcéj czyli $120 \times 1{,}25$

a z 1 „ przędzy zrobią płótna szerokiego na 1 ar. 28,5 razy mniéj czyli $\frac{120 \times 1{,}25}{28{,}5}$

z 40 „ przędzy zrobią płótna szerokiego na 1 ar. 40 razy więcéj czyli $\frac{120 \times 1{,}25 \times 40}{28{,}5}$

nakoniec z 40 „ przędzy zrobią płótna szerokiego na 1,92 ar. 1,92 razy mniéj czyli $\frac{120 \times 1{,}25 \times 40}{28{,}5 \times 1{,}92}$ $=109{,}66$ arszynów.

§ 12.

3. **Przykład.** 15 tkaczy wyrabiają 200 arszynów płótna szerokiego na $^3/_4$ arszyna, pracując przez dni 12 po 8 godzin dziennie; robotników 25 przy ~~innych~~ tychże samych warunkach ile zrobią płótna szerokiego na $^7/_8$ arszyna, jeżeli pracować będą przez dni 8 po 10 godzin dziennie?

Rob.	dn.	go.	sz.	dłu.
15	12	8	$^6/_8$	200
25	8	10	$^7/_8$	x.

Rozwiązanie. Jezeli 15 tkaczy pracując przez 12 dni po 8 godzin zrobią 200 arszynów płótna szerokiego na $^6/_8$ arszyna to:

1 tkacz przez 12 dn.	po 8 go.	na $^6/_8$ sz.	zrobi	$\frac{200}{15}$
a 1 „ „ 1 „	„ 8 „	„ $^6/_8$ „	„	$\frac{200}{15 \times 12}$
1 „ „ 1 „	„ 1 „	„ $^6/_8$ „	„	$\frac{200}{15 \times 12 \times 8}$
1 „ „ 1 „	„ 1 „	„ $^1/_8$ „	„	$\frac{200 \times 6}{15 \times 12 \times 8}$
25 tkaczy „ 1 „	„ 1 „	„ $^1/_8$ „	„	$\frac{200 \times 6 \times 25}{15 \times 12 \times 8}$
25 „ „ 8 „	„ 1 „	„ $^6/_8$ „	„	$\frac{200 \times 6 \times 25 \times 8}{15 \times 12 \times 8}$
25 „ „ 8 „	„ 10 „	„ $^1/_8$ „	„	$\frac{200 \times 6 \times 25 \times 8 \times 10}{15 \times 12 \times 8}$

25 tkaczy przez 8 dni po 10 go. na $^7/_8$ sz. zrobi $\frac{200\times6\times25\times8\times10}{15\times12\times8\times7}$ $=238,095$ arszynów.

Zagadnienia.

1). Kupiono 7 czetwerty pszenicy za 45 rubli; ileż wypadnie zapłacić za 16 czetwerty tego samego gatunku pszenicy? (odp. $102\frac{6}{7}$ rubli).

2). Jeżeli za 318 korcy żyta zapłacono 19080 rubli; ileż kupimy żyta za 36288 rubli? (odp. 604,8 korcy).

3). Na jakąś suknią wychodzi $4^1/_4$ łokci sukna szerokiego na $1\frac{1}{8}$ łokcia; jeżeli sukno będzie szerokie na $2^1/_3$ łokcia ileż go wziąść trzeba na tęż suknią? (odp. $3^3/_4$ łokci).

4). Kiedy 48 arszynów pewnéj materyi kosztowało 150 rubli; ileż zapłacić wypadnie za 60 arszynów tejże materyi? (odp. $187\frac{1}{2}$ rubli).

5). Za 48,50 arszynów materyi zapłacono 157,45 rubli; ileż kosztować będzie 62,32 arszyna tejże? (odp. 202,31 rubli).

6). Za beczkę wina obejmującą $29^3/_4$ garncy zapłacono 50 rubli; ile warte 17 garncy tegoż wina? (odp. 28 rubli $58\frac{98}{119}$ kop.)

7). Jeżeli ktoś w 94 godzinach zrobił 966 wiorst; ileż ujedzie w 134 godzinach jadąc z tąż samą szybkością? (odp. $1377^3/_{47}$ wiorst).

8). Za 522,75 rubli kupiono 287 arszynów płótna; ileż go dostanie za 255 rubli? (odp. 140 arszynów).

9). Za pewną summę pieniędzy kupiono 1200 korcy zboża po cenie 9 rubli; jaką ilość tego zboża kupić będzie można jeżeli cena jego podniosła się do 11 rubli? (odp. 981,82 korcy).

10). Lokomotywa biegnąc z szybkością 10 arszynów na sekundę, potrzebowała 20 minut dla przebieżenia pewnéj przestrzeni. W jakimże czasie przebiegnie tęż samę długość, jeżeli ubiegać będzie 13 arszynów na sekundę? (odp. 15,38 minut).

11). 682 łokcie i 12 cali sukna kosztowały 3101 rubli; za 310 rubli i 10 kopiejek ile można dostać sukna tegoż samego gatunku? (odp. 68 łokci i 6 cali).

12). Jeżeli za 70 pudów pewnego towaru zapłacono 2488 rubli 32 kopiejki; ileż wypada zapłacić za 19 pudów, 15 funtów i 24 łuty tegoż samego towaru? (odp. 689 rub. 40 kop.).

13). Kij na 8 stóp długi ustawiony prostopadle rzuca cień na 7 stóp długi. Jakże wysoką jest wieża, która w tejże chwili daje cień na 145 stóp długi? (odp. 165 $^5/_7$ stopy).

14). Dwóch kupców mienia się na towary: jeden miał 3 pudy i 33 funty herbaty po 7,50 rubli funt, drugi zaś miał herbatę po 37,50 rubli pud. Ileż ten drugi musi dać herbaty w zamian za towar pierwszego? (odp. 30 funtów i 19,2 łuta).

15). Przednie koło u wozu ma $5\frac{1}{4}$ łokcia obwodu; tylne robi 27 obrotów w tym samym czasie kiedy przednie robi 59 obrotów. Jak wielki okrąg tylnego koła? (odp. $11\frac{17}{36}$ łokcia).

16). $47^1/_2$ arszynów sukna szerokiego na $1^3/_4$ arszyna chcą podszyć płótnem; ileż go trzeba użyć, jeżeli ma tylko $7^1/_2$ werszka szerokości? (odp, $177^1/_3$ arszynów),

17). Parowa maszyna wyrzuciła 36 stóp kubicznych wody w 39 minutach. Ileż czasu potrzebować będzie dla wyrzucenia 2140 stóp kubicznych wody? (odp. 38 godzin i 35 minut).

18). 16ma rulonami obicia szerokiego na $1^1/_4$ arszyna można wykleić pokój; ileż potrzeba użyć rulonów dla wyklejenia tegoż pokoju, jeżeli szerokość obicia jest tylko $^3/_4$ arszyna? (odp. 26,66 rulonów).

19). Kupiono do cukrowni 145125 funtów buraków. Po zrobieniu próby przekonano się że 200 funtów tychże buraków daje 150 funtów czystego cukru. Ileż zatém funtów cukru z całego zakupu buraków spodziewać się można? (odp. $108843\frac{3}{4}$ funtów).

20). 200 garncy wódki 6téj próby otrzymuje się przez dolanie wody do 120 garncy okowity 9téj próby. W sprzedanych zatém 15362 garncach takiéj wódki ile było okowity? (odp. 9217,2 garncy).

21). 25 arszynów materyi szerokiéj na $\frac{2}{3}$ arszyna kosztowało 48 rubli. Ileż wypadnie zapłacić za 12 arszynów materyi, jeżeli szerokość jéj będzie $^3/_4$ arszyna? (odp. 25,92 rubli).

22). Sztaba żelazna na 120 arszynów długa a na 0,43 arszyna szeroka waży 100 funtów. Ileż ważyć będzie sztaba mająca 1,70 arszynów długości a szeroka na 0,65 arszyna? (odp. 2,14 funtów).

23). Sztaba metalowa mająca 1,20 ar. długości, 0,43 arszynów szerokości i 0,025 ar. grubości waży 100 funtów. Ileż będzie ważyć sztaba długa na 1,70 arszyna, szeroka na 0.65 arszyna i na 0,018 arszyna gruba? (odp. 154,19 funtów).

24). Na utrzymanie 30 ludzi wydano w 56 dniach 1020 rubli; ileż kosztować będzie utrzymanie 50 ludzi przez dni 70, przypuszczając że rozchody są jednakowe? (odp. 4250 rubli).

25). Garnizon fortecy stanowi 1500 ludzi; na każdego przeznaczono $1\frac{1}{4}$ funta chleba. Zapas jest zrobiony na 5 miesięcy. Jak długo tymże zapasem obdzielać można żołnierzy, jeżeli ich będzie mniéj o 250 a każdemu dawać będą o 8 łutów więcéj? (odp. 5 miesięcy).

26). 30 ludzi zrobiło 132 sążnie pewnéj roboty w 18 dniach; ileż jéj zrobi 54 ludzi pracując przez dni 28? (odp. 369 sąż. 3 stopy i $7\frac{1}{5}$ cali).

27). Człowiek idący 7 godzin dziennie, potrzebował 30 dni dla zrobienia 460 wiorst; gdyby szedł po 10 godzin na dzień ileby dni użył dla przejścia 1200 wiorst? (odp. $54\frac{18}{23}$ dni).

28). Jeżeli 100 uczniów mogą napisać 1000 arkuszy przez $7\frac{1}{8}$ dni; to 24 uczniów pisząc z jednakową jak poprzedni usilnością w jakim czasie napiszą 640 arkuszy? (odp. w 39 dniach).

29). 48 ludzi pracując przez dni 25 po 12 godzin dziennie zarobiło 1815 rubli 60 kopiejek. Ileż zarobi 30 ludzi przez dni 24, jeżeli będą się zajmować po 8 godzin na dzień, a zapłata jest odpowiednią do czasu na robotę poświęconego? (odp. 726 rub. 24 kop.).

30). 48 robotników pracując dziennie po 8 godzin wykopało w 6 dni 9 sążni sześciennych ziemi; w ilu dniach 160 robotników wykopie 120 sążni sześciennych ziemi, jeżeli dziennie po 10 godzin pracować będą? (odp. $1\frac{23}{25}$ dni).

31). 48 robotników pracując dziennie po 8 godzin wykopało w 6 dniach 9 sążni sześciennych ziemi; ile sążni wykopie 160 robotników gdy przez $1\frac{23}{25}$ dni w stosunku 10 godzin dziennie zajmować się będą? (odp. 120 sążni).

32). 288 ludzi przez 75 dni wykopało 72 sażeni kanału na 5 sażeni szerokiego a na $2\frac{2}{7}$ sażeni głębokiego; ileż czasu użyje 108 ludzi na wykopanie kanału 100 sażeni długiego, na 4 sażeni szerokiego a na 6 stóp głębokiego? (odp. $83\frac{1}{3}$ dni).

33). Jak długi kanał wykopie 108 ludzi pracując przez dni $83\frac{1}{2}$, jeżeli szerokość tego kanału będzie 4 sażeni a głębokość 6 stóp; wiedząc że 288 robotników w 75 dniach wykopało 72 sażeni rowu na 5 sażeni szerokiego a na $2\frac{2}{7}$ głębokiego? (odp. 100 sażeni).

34). 120 tkaczy pracując dziennie po 8 godzin utkali w 42 dniach 336 postawów sukna po 24 arszynów każdy; iluż trzeba tkaczy aby w 60 dniach utkali 456 postawów po 30 arszynów w każdym, przypuszczając że po 12 godzin dziennie pracować będą? (odp. 95 tkaczy).

35). Jeżeli 120 tkaczy utkało 336 postawów sukna po 24 arszynów w każdym, pracując przez 42 dni, po 8 godzin na dzień; ileż zawierać w sobie będzie arszynów każdy z 456 postawów utkanych przez 95 robotników, którzy pracowali przez dni 60 po 12 godzin dziennie? (odp. 30 arszynów).

36). Ile godzin dziennie pracować musi 95 tkaczy dla wykończenia w 60 dniach 456 postawów sukna po 30 arszynów każdy; kiedy 120 tkaczy w 42 dniach zajmując się po 8 godzin dziennie utkało 336 postawów, z których każdy zawierał po 24 arszyny sukna? (Odp. 12 godzin).

37). 150 stopami sześciennemi kamieni usypano 240 stóp długości szosy, na 0,15 stopy grubo; jakąż długość możnaby usypać 300 stopami sześciennemi kamieni sypiąc na 0,20 stopy grubą warstwę? (odp. 360 stóp).

38). 20 ludzi pracując dziennie po $7\frac{1}{2}$ godzin mogą w 16 dniach wybrukować ulicę długą na 360 sażeni, szeroką na $10\frac{2}{3}$ sażeni; jakiéj długości ulicę może wybrukować tyluż robotników przez dni 25, jeżeli po 9 godzin pracować będą i gdy ulica jest szeroka na 16 sażeni? (odp. $437\frac{1}{2}$ sażeni).

39). Jeżeli 480 robotników przez 2 lata, pracując rocznie po 6 miesięcy, a miesięcznie po 25 dni, w każdy dzień po 10 godzin, usypali groblę na 1400 sążni długą, na 8 stóp szeroką a na $11\frac{1}{9}$ stóp wysoką; to jakiéj wysokości groblę usypie 360 robotników przez 3 lata pracując rocznie po 5 miesięcy, a na miesiąc po 24 dni, dziennie zaś po 9 godzin, jeżeli ta grobla ma być 1600 sążni długa a 7 stóp szeroka? (odp. 9 stóp).

40). 12 pisarzy przez dni 45 pracując po 8 godzin, przepisali 2 egzemplarze dzieła, złożonego z 8 tomów, każdy tom zawierał 480 stronnic, na każdéj stronnicy 54 wiersze a w każdym wierszu po 54 litery; ileż innych 30 pisarzy, którzy tylko po 6 godzin nocą pisać mogą, użyją nocy do napisania 8 egzemplarzy dzieła, złożonego z 4 tomów, w każdym po 750 stronnic, a na każdéj stronnicy po 90 wierszy a w każdym wierszu po 80 liter; jeżeli prędkość pisma pierwszych jest $\frac{4}{5}$ prędkości pisma drugich, trudność pisania na pierwszym papierze jest $\frac{7}{6}$ trudności pisania na drugim, trudność pracy nocnéj jest $\frac{5}{6}$ trudności pracy dziennéj, trudność czytania manuskryptu pierwszego jest $\frac{8}{7}$ trudności czytaniu manuskryptu drugiego? (odp. $238\frac{2}{21}$ nocy).

Rozdział II.

Reguła Łańcuchowa.

(Цѣпное правило).

§ 13.

Prawidło podług którego, mając podane równania pośrednie, zamieniamy miary lub monety jednego kraju na odpowiednie drugiego kraju, albo téż dowiadujemy się znaczenia miar lub monet dawnych przez porównanie z obecnemi, nazywa się regułą łańcuchową. To nazwisko dano téj regule dla tego że równania w nią wchodzące łączą się z sobą jakby ogniwa łańcucha.

§ 14.

Przy układaniu równań wchodzących w zadania téj reguły, należy rozpoczynać od ilości niewiadoméj i kończyć tak aby drugi wyraz ostatniego równania był jednego gatunku z niewiadomą, w pośrednich zaś równaniach pierwszy wyraz każdego równania ma być tego gatunku jak drugi wyraz poprzedniego równania. Przykłady najlepiéj nam to objaśnią.

§ 15.

1. **Przykład.** Ile metrów znaczy stopa angielska, jeżeli 16 stóp angielskich znaczą 15 stóp starych francuzkich których 6 równa się 1,945 metra?

Ułóżmy równania podług wskazanego sposobu

x metrów $=$ 1 stopie angielskiéj

16 stóp ang. $=$ 15 stóp francuzkich

6 stóp fran. $=$ 1,949 metrów.

Rozwiązanie. Jeżeli 6 starych stóp francuzkich$=$1,949 metrów to:

1 stopa francuzka $=\frac{1,949}{6}$ metrów.

Kiedy zaś 15 takich stóp francuzkich wyrównywa 16 stopom angielskim, wypadnie:

16 stóp angielskich $=\frac{1,949}{6}\times 15=\frac{1,949\times 15}{6}$ metrom.

Jedna zaś stopa angielska będzie 16-tą częścią tego, to jest 1 stopa angielska $=\frac{1,949\times 15}{6\times 16}$ metrów.

Wyrzuciwszy z tego ułamku wspólny czynnik 3, wypadnie 1 stopa angielska $=\frac{1,949\times 5}{2\times 16}=\frac{9,745}{23}=0,304$ metrom.

§ 16.

Przypatrzywszy się wyrażeniu $\frac{1945\times 15}{6\times 16}$ widzimy że niewiadoma równa się ułamkowi którego licznikiem jest iloczyn wyrazów drugiéj kolumny a mianownikiem iloczyn wyrazów piérwszéj kolumny.

Na zasadzie tego rozwiążmy przykład następujący.

§ 17.

2. **Przykład.** 4 szyllingi angielskie warte są 37 susów hamburgskich, 160 marek bankowych hamburgskich (1 marka ma 16 susów) równają się 141 złotym amszterdamskim, 277 złotych amszterdamskich czynią 480 franków; iluż frankom odpowiada 4000 szyllingów angielskich?

Rozwiązanie.

x fran.	=	4000 szyl. ang.
4 szyl. ang.	=	37 susom
$16\times 170=2560$ susów	=	141 zł. am.
227 zł. am.	=	480 fran.

zatém x szyllingów $=\frac{4000\times 37\times 141\times 480}{4\times 2560\times 227}=4309,20$ frankom.

A więc 4000 szyllingów znaczą 4309,20 franków.

§ 18.

Uwaga. Sposób ten układania równań tak reguły trzech składanéj jako też i łańcuchowéj od swego wynalazcy Holendra Reesa zowie się Regułą Reesa; jest on powszechnie w handlu używany.

Reguły łańcuchowéj używamy także do rozwiązywania wielu zagadnień jako to obliczania procentów, w rachunkach mnożeń i dzieleń liczb wielorakich i t. p.

§ 19.

3. **Przykład.** Ile rubli zapłacić potrzeba za 5 garncy okowity, jeżeli 3 kwaterki tejże kosztują 27 kopiejek?

Rozwiązanie.

x rub.	=	5 garn.
1 garn.	=	4 kwartom
1 kwarta	=	4 kwaterkom
3 kwater.	=	27 kopiejkom
100 kopiej.	=	1 rublowi.

$$x = \frac{5 \times 4 \times 4 \times 27 \times 1}{1 \times 1 \times 3 \times 100}$$

Uprościwszy przez 3 i opuściwszy jednostki otrzymamy że

$$x = \frac{5 \times 4 \times 4 \times 9}{100} = \frac{720}{100} = 7{,}20 \text{ rublom.}$$

Zatém 5 garncy okowity kosztują 7 rub. 20 kop.

§ 20.

4. **Przykład.** Ile łutów pewnego towaru dostanie za 3 grosze jeżeli 5 funtów tegoż kosztuje 8 talarów?

Rozwiązanie. Tu główną wiadomą są złote a główną niewiadomą łuty; zacznijmy więc od łutów.

x łutów	=	3 groszom
30 groszy	=	1 złotemu
6 złotych	=	1 talarowi
8 talarów	=	5 funtom
1 funt	=	32 łutom.

Zatem x łutów $= \frac{3 \times 1 \times 1 \times 5 \times 32}{30 \times 6 \times 8 \times 1}$

Po uproszczeniu przez 3, 5 i 8 otrzymamy że

$x = \frac{1}{3}$ łuta.

To jest że za 3 grosze dostanie $\frac{1}{3}$ łuta.

§ 21.

5. **Przykład.** 1 łut pewnego towaru kosztuje $2\frac{1}{2}$ kopiejki; ile będzie kosztować pud tegoż towaru?

Rozwiązanie.

x rub. = 1 pudowi
1 pud = 40 ℔
1 ℔ = 32 łutom
1 łut = $2\frac{1}{2}$ kop.
100 kop. = 1 rub.

Ztąd x rubli $= \frac{1 \times 40 \times 32 \times 2\frac{1}{2} \times 1}{1 \times 1 \times 1 \times 100} = 32$ rublom.

A więc pud tego towaru kosztuje 32 ruble.

Zadanie to daje się jeszcze i tak rozwiązać: Wiedząc że pud zawiera w sobie 1280 łutów, musi przeto 1280 razy więcéj kosztować niż 1 łut to jest $2\frac{1}{2} \times 1280 = 32$ rublom.

§ 22.

Reguła łańcuchowa zowie się też regułą zamiany (Arbitrage), jeżeli jéj używamy do porównania monet różnych krajów co jest w wielkiém użyciu przy operacyach bankierskich.

Zagadnienia.

1). Poczemu w Petersburgu wypada butelka piwa angielskiego, jeżeli na miejscu bitt kosztuje 20 funtów szterlingów; wiadomo zaś, że 1 bitt ma w sobie 108 gelnów a 64 gelny równają się 88,7 garncom ruskim; 1 zaś funt szterling wart 6,20 rubli (odp. 20,7 kopiejek).

2). Jeżeli kupiec berliński ugodził w Petersburgu czetwert' pewnego zboża po 3,51 rubli; to ileż talarów kosztuje go szeffel na miejscu, wiedząc że 1 szeffel ma 3354,3 cali angielskich sześciennych, a 1 czetwert' równa się 12809,69 calom angielskim sześciennym, jeden zaś rubel znaczy $32\frac{2}{3}$ srebrnych groszy? (odp. 1 talar).

3). Ileż uncya angielskiego monetowego złota warta jest rubli ruskich złotem; jeżeli funt troy angielskiego monetowego złota zawiera w sobie $\frac{11}{12}$ czystego złota, czyli 11 uncyj złota a 1 uncyą miedzi; taki funt troy waży 8399,748 doli, a na 1 rubel wypada 27 doli czystego złota? (odp. 28 rubli 28 kop.)

4). Kupiec francuzki zapłacił w Rydze po 5,24 ruble za czetwert' pszenicy; po ileż franków wypada hektolitr tego zboża, jeżeli na 1 hektolitr idzie 6102,57 cali sześciennych angielskich a 4 franki równają się jednemu rublowi? (odp. 10 franków).

5). Za 2145 jardów sukna zapłacono w Londynie 1925 funtów szterlingów. Ileż rubli będzie kosztował 1 arszyn, jeżeli 1 jard równa się 3 stopom (futom), w jednym funcie szterlingu 20 szyllingów, w 1 szyllingu 12 pensów, $10\frac{1}{4}$ pensa równają się 30 kopiejkom. Dostawa zaś na miejsce kosztowała po $2\frac{1}{2}$ rubla od wartości 190 rubli? (odp. 3,02 rubla).

6). Pewien ruski szlachcic kupił sobie we Francyi dobra mające 85 hektarów za 250000 franków; chce wiedzieć poczemu wypada dziesiatyna na ruskie pieniądze, kiedy ar znaczy 21,967 sażeni kwadratowych, 100 arów stanowi 1 hektar, a dziesiatyna zawiera w sobie 2400 sażeni? (odp. 803,34 rubli).

7). Jeden funt ruski ilu hamburgskim kolońskim markom wyrównywa, kiedy 1 marka waży 0,233735 kilogramów, a 1 kilogram 2,679 funtów troy; wiadomo przy tém że 10000 doli są równe 14,28614 angielskich uncyj troy, 1 zaś funt troy ma 12 uncyj? (odp. 1,75216 markom).

8). Jeżeli 3 pudy pewnego drogiego medykamentu kosztują 3840 dukatów, to ile kosztować będzie 1 gran? (odp. 3 grosze).

9). Jedna uncya angielskiego monetowego srebra $\frac{37}{40}$ próby kosztuje 60 pensów, 39 pensów idzie na 1 rubel, a 14,2864 uncyj troy waży 10000 doli. Ileż kopiejek znaczy 1 zołotnik ruskiego monetowego srebra $\frac{84}{96}$ próby? (odp. 21,09 kopiejek).

10). 72 mile francuzkie ilu werstom wyrównywają, jeżeli 10000 francuzkich mil są równe 27685 angielskim milom, których 10 idzie na 15 wiorst ruskich? (odp. 298,998 wiorst).

11). W pewnym domu przez 4 lata i 4 miesiące wypotrzebowano 1155 funtów cukru; ileż łutów przecięciowo dziennie expensowano, licząc na rok 365 dni a na miesiąc dni 30? (odp. $23\frac{9}{13}$ łutów).

12). Kiedy za 2 arkusze papiéru płacą 3 grosze; ile dukatów będzie kosztowała bela? (odp. 13 dukatów i 1 Talar).

13). Jeżeli 80 łokci berlińskich idzie na $92\frac{2}{3}$ łokci polskich, a przytém wiadomo że 79,06 łokci polskich równają się 64 arszynom; to iluż arszynom wyrównywa 113 łokci berlińskich? (odp. 106 arszynom prawie).

14). Ileż trzeba zapłacić w Berlinie za funt pewnego towaru, kiedy centnar zawierający 100 funtów kosztuje 45 luidorów, a 100 talarów w luidorach równają się 112 talarom w kurancie? (talar ma 30 groszy srebrnych). (odp. 11 groszy srebrnych).

15). Weksel Petersburgski na 1000 rubli ma być w Berlinie w dukatach wypłacony; ile to wyniesie jeżeli w Amsterdamie dają 37 stywerów za 1 rubel, 50 stywerów równają się 1-u hollenderskiemu talarowi w kurancie, takich zaś 100 talarów idzie na 144 pruskie talary, a za 1 dukata w Berlinie płacą 3 talary? (odp. $355\frac{1}{5}$ dukatów).

16). 10000 doli jaką są częścią kilogramu kiedy 10000 doli równają się 1,805634 hollenderskim markom, jedna zaś marka ma 5120 assów, a 1 kilogram waży 20805,92 assy? (odp. 0,4443374 kilograma).

17). 400 funtów gdańskich ile czyni berlińskich, kiedy 100 hamburgskich waży 112 gdańskich, a 100 berlińskich czyni 106 hamburgskich? (odp. 363,6363 funtów berlińskich).

18). Ileż zapłacił kupiec za 1300 łokci pewnéj materyi, jeżeli sprzedając łokieć po 12 złotych zarabiał po 20 na 100; pomimo tego że na swój łokieć mierząc kupującym tracił po 2 na 100? (odp. 12740 złotych).

Uwaga. Każde 100 łokci kupionych równają się 98 sprzedanym, czyl że kupiwszy 1300 łokci sprzedał tylko 1274; za każde zaś 100 wydane na materyą brał od kupujących po 120.

19). 1152 łokcie materyi zakupionéj w Lipsku kosztowały z transportem 150 dukatów; po ileż wypadnie sprzedawać łokieć warszawski, o $\frac{2}{100}$ większy, chcąc zarobić 15 na 100? (odp. po 2 złote i 23 grosze).

20). Jeżeli 13 talarów holenderskich czyni 33 złote reńskie, a 72 reńskich idzie na 35 portugalskich milrejsów, tych zaś 7 na 34 liry florenckie, tych 35 na 27 francuzkich franków, tych 64 na 28 funtów szterlingów, tych 68 na 399 dukatów neapolitańskich, tych znowu 55 na 59 rubli srebrem, których 18 znaczy 20 talarów pruskich; to 300000 talarów holenderskich ile uczyni talarów pruskich? (odp. 592748 tarów 10 groszy srebrnych prawie).

21). Kupiec rygski zobowiązał się kupcowi paryzkiemu wypłacić 4500 rubli w Pradze lub we Frankfurcie nad Menem. Za 100 złotych reńskich płaci się w Rydze 65 rubli 12 kop., a 1000 rubli za 1080 talarów; w Pradze zaś za 260 franków dają 100 złotych reńskich, a we Frankfurcie 100 talarów za 370 franków. Gdzież więc korzystniéj tę wypłatę dokonać: w Pradze czy we Frankfurcie? (odp. we Frankfurcie gdyż w tém mieście zapłaciłby 17982 franki a w Pradze 17966 franków i 83 centimy).

22). Z Anglii do Kijowa przesłano przez Hamburg paczkę towarów ważącą 400 funtów *avoir du poid*. Wiedząc że 1 funt hamburgski równa się 1 funtowi avoir du poid i 4,1 uncyom, a ruskich zawiera 1 funt, 17 zołotników i 73 doli; nadto że tara czyli opakowanie rachuje się $^2/_3$ od sta. *Pytanie*. Ile funtów ruskich otrzyma kupiec kijowski czystego towaru? (odp. 8 pudów, 36 funtów, 25 zołotników i 61 doli.

23). Spławiono do Gdańska 1500 czetwerty pszenicy, któréj w drodze zepsuło się $\frac{1}{5}$ na 100; jeżeli czetwert' zawiera 2,0974 hektolitry francuzkie a 1 szeffel prusski 0,5496 hektolitra. Ileż czystéj pszenicy przyjęto na miarę pruską? (odp. 5712.9 szeflów).

24). 8684 funtów hamburgskich z opakowaniem ile czyni polskich, kiedy na 1 funt hamburgski idzie 1,035 pruskich a na 1 pruski 1,1447 polskich funtów; przytém na opakowanie odchodzi $\frac{1}{5}$ na 100? (odp. 256 pudów, 23 funty, 87 zołotników i 47,6 doli).

25). 270 węgierskich ejmerów wina ile czyni wiader, kiedy 1 wiadro = 12,3044 litrom francuskim, 1 mas austryjacki = 1,415 litrom, zaś 1 eimer zawiera 4 masy? (odp. 262 wiadra i 2 krużki).

26). 12003 mile angielskie ile czynią francuzkich kilometrów, kiedy 1 mila angielska, zawiera 5280 stóp angielskich, 3 takie stopy idzie na 1 yard, który się równa 0,91428 metra, a 1000 metrów stanowi 1 kilometr? (odp. 19316 kilometrów i 533,5 metrów).

27). Postaw angielskiego sukna zawiera 73 yardy, ile to uczyni arszynów, wiedząc że 91 metrów = 100 yardom, a 1 arszyn zawiera 0,71 metra? (odp. 93 arszyny i 4 werszki).

28). 12000 wiader ile czyni imperial-gallonów, kiedy 1 imperial-gallon = 4,543 litry, a wiadro czyni 12,3044 litry? (odp. 32503,368 imperial-gallonów).

29). Za 800 diesiatyn gruntu ile przypadnie morgów austryjackich (joch), kiedy za 150 dają w Austryi 100, a 1 joch = 2 morgom i 46 prętom kwadratowym magdeburgskim, a 1 diesiatyna = 4 morgom i 49,78 prętom kwadratowym magdeburgkim? (odp. 1011 joch i 328 prętów □).

30). 2100 akrów angielskich ile czyni diesiatyn, kiedy 1 diesiatyna = 10925 metrom □, a 1 akr = 4046,7098 metrom? (odp. 777 diesiatyn i 2057,4 sażenom □).

Rozdział III.

Reguła Procentu.

(Процентное правило).

§ 23.

Wszelka wartość nazywa się *kapitałem* (капиталъ), kapitały oceniamy za pośrednictwem jednostki monetarnéj, jaką u nas jest rubel lub złoty, we Francyi frank, talar w Prussach i t. d.

§ 24.

Jeżeli właściciel kapitału ustępuje na pewien czas używalność tegoż jakiéj drugiéj osobie, wymaga za to od niéj pewnego wynadgrodzenia które nazywamy *procentem* (процентъ); procent jaki każde 100 kapitału rocznie przynosi zowie się *stopą procentową* (такса).

Dla powstrzymania lichwy, prawo dozwala tylko po 5 od sta, co się wyraża przez 5%, pobierać; w handlowych zaś operacyjach stopa 6% jest tolerowaną; ci co wypożyczają kapitał na wyższe procenta są kryminalnie karani jako trudniący się lichwiarstwem.

§ 25.

Ten co oddaje kapitał na procent *wierzycielem* (кредиторъ) się nazywa, biorący zaś takowy zowie się *dłużnikiem* (должникъ).

§ 26.

Procenta od kapitałów zwykle corocznie się płacą wierzycielom i taki procent nazywamy prostym. Jeżeli zaś dochód od kapitału pozostaje u dłużnika z tym warunkiem aby po upływie każdego roku przyliczał się do kapitału i sam również procent przynosił mówimy wtedy, że się rachuje procent od procentu i taki procent zowią *procentem składanym*.

a). **O procentach prostych.**

§ 27.

1. **Przykład**. Jaki będzie procent od kapitału 12648 rubli umieszczonego na 5% rocznie?

kapi.	pro.
100	5
12648	x

Rozwiązanie. Jeżeli kapitał 100 rubli daje 5 rubli rocznie to kapitał 1 rubel da $\frac{5}{100}$

a „ 12648 rubli da $\frac{5\times12648}{100}=632,40$ rubli.

Zatem żądany procent wynosi 632 ruble 40 kopiejek.

§ 28.

2. **Przykład**. Jaki to kapitał umieszczony na 5% da procentu 632,40 rubli?

pro.	kapi.
5	100
632,40	x

Rozwiązanie. Kiedy 5 rubli jest procentem od 100 rubli to 1 rubel jest procentem od kapitału $\frac{100}{5}$

a 632,40 rubli jest procentem od kapitału $\frac{100\times632,40}{5}=12648$ rub.

A więc szukanym kapitałem jest 12648 rubli.

§ 29.

3. **Przykład**. Jeżeli kapitał 12648 rubli daje rocznie procentu 632,40 rubli; na ileż od sta został wypożyczony?

kapi.	pro.
12648	632,40
100	x

Rozwiązanie. Jeżeli kapitał 12648 rubli daje 632.40 rubli procentu to

1 rubel kapitału da procentu $\frac{632,40}{12648}$

a 100 rubli " " " $\frac{632,40 \times 100}{12648} = 5$ rubli.

Przeto kapitał na 5% został wypożyczony.

W tenże sam sposób rozwiązujemy wiele zagadnień w których idzie o znalezienie stopy procentowéj tak od gotowych kapitałów, jako też i od umieszczonych w nieruchomościach.

§ 30.

4. **Przykład.** Majątek za który zapłacono 100000 złotych przynosi 3500 złotych rocznie; jakaż jest stopa procentowa kapitału umieszczonego w téj posiadłości?

Rozwiązanie. Tu wartość majątku 100000 złotych uważam jako kapitał wypożyczony, a dochód 3500 złotych jako procent roczny od tego kapitału.

Zatem 100000 złotych kapitał 3500 procent
100 " " x "

Kiedy kapitał 100000 złotych daje 3500 złotych procentu to 1 złoty kapitału da procentu $\frac{3500}{100000}$

a 100 złotych " " " $\frac{3500 \times 100}{100000} = 3,50$ rubli.

A zatem przez kupno domu tego właściciel otrzymuje tę korzyść jakby kapitał swój na $3,50\ \%$ umieścił.

Często się zdarza potrzeba obliczenia procentu za lat kilka, albo też za pewną część roku, jak to w następnych zagadnieniach zobaczymy.

§ 31.

5. **Przykład.** Jaki jest trzechletni dochód od kupitału 12648 rubli umieszczonego na 5%?

kapi. pro.
100 r. 15 r.
12648 r. x r.

Rozwiązanie. Kiedy kapitał 100 daje rocznie 5 dochodu, to przez 3 lata da 15. A kiedy kapitał 100 rubli daje 15 rubli dochodu to

kapitał 1 rubel da $\frac{15}{100}$ rubli.

a „ 12648 „ „ $\frac{15 \times 12648}{100} = 1897{,}20$ rubli.

W tym razie dość będzie roczny procent jaki ten kapitał przynosi pomnożyć przez liczbę lat.

§ 32.

6. **Przykład**. Jeżeli kapitał 12648 rubli dał przez 3 lata procentu 1897,20 rubli, jak wielka była stopa procentowa?

Rozwiązanie. Kiedy kapitał 12648 rubli dał przez 3 lata 1897,20 rubli procentu to

kapitał 1 rubel daje $\frac{1897{,}20}{12648}$ rubli.

a „ 100 rubli „ $\frac{1897{,}20 \times 100}{12648} = 5$ rubli.

Zatém stopą procentową téj pożyczki było 5%.

§ 33.

7. **Przykład**. Jaki jest kapitał który umieszczony na 5% przyniósł po 3 latach 1897,20 rubli procentu?

Rozwiązanie. Kiedy 100 rubli daje rocznie 5 rubli to przez 3 lata da 15 rubli procentu. Kiedy więc 15 rubli, jest procentem od 100 to

1 rubel jest procentem od $\frac{100}{15}$

a 1897,20 rubli „ „ „ $\frac{100 \times 1897{,}20}{15} = 12648$ rubli.

Zatém szukanym kapitałem jest 12648 rubli.

Uwaga. Jeżeli czas jest mniejszy od roku wtedy w dniach lub miesiącach go wyrażamy.

§ 34.

8. **Przykład**. Ile się należy procentu od kapitału 100000 rubli za dni 80 licząc po 5% rocznie?

kapitał 100 rubli przez 365 dni daje 5 rubli
,, 100000 ,, ,, 80 ,, ,, x ,,

Rozwiązanie. Kiedy kapitał 100 rubli przez 365 dni daje 5 rubli procentu to tenże kapitał

100 r. przez 1 dzień da 365 razy mniéj czyli $\frac{5}{365}$
a 100 ,, ,, 80 dni ,, 80 ,, więcéj ,, $\frac{5\times80}{365}$
a 1 ,, ,, 80 ,, ,, 100 ,, mniéj ,, $\frac{5\times80}{365\times100}$
nakoniec 100000 ,, ,, 80 ,, ,, 100000 ,, więcéj ,, $\frac{5\times80\times100000}{365\times100}$

Po dokonaniu uproszczeń i działań otrzymamy że

$$x = \frac{80000}{73} = 1095 \text{ rubli } 89\tfrac{3}{73} \text{ kopiejek.}$$

Zatém ośmdziesięciodniowy procent od tego kapitału jest 1095 rubli $89\frac{3}{73}$ kopiejek.

§ 35.

9. **Przykład**. Ile się należy procentu od kapitału 12648 rubli za 8 miesięcy przy stopie procentowéj 5%?

kapitał 100 rubli przez 12 miesięcy daje 5 rubli
,, 12648 ,, ,, 8 ,, ,, x ,,

Rozwiązanie. Kiedy kapitał 100 rubli przez 12 miesięcy daje 5 rubli procentu to

kapitał 100 rubli przez 1 miesiąc da $\frac{5}{12}$
tenże ,, 100 ,, ,, 8 miesięcy ,, $\frac{5\times8}{12}$
a ,, 1 rubel ,, 8 ,, ,, $\frac{5\times8}{12\times100}$
nakoniec ,, 12648 rubli ,, 8 ,, ,, $\frac{5\times8\times12648}{12\times100}$

Po uproszczeniu i wykonaniu działań otrzymamy że

$$x = \frac{4216\times5}{100} = 421{,}60 \text{ rublom.}$$

A zatém szukanym procentem za miesięcy 8 jest 421 rubli 60 kopiejek.

To zadanie można jeszcze rozwiązać w ten sposób.

Procent roczny od 1 rubla jest $\frac{5}{100}$ to od 12648 rubli będzie $\frac{5\times12648}{100}$ czyli 632,40 rubli.

Procent za 6 miesięcy jest połową rocznego zatem $=$ . . . . 316.20 rubli

a za 2 miesiące jako za 3-cią część półrocza będzie 3-cią częścią powyższego czyli . . . . 105,40 „

Zatém procent za 8 miesięcy jest . . . 421,60 rubli.

§ 36.

10. **Przykład**. Jaki to kapitał przyniósł w 228 dniach 500 rubli procentu przy stopie 4,50%?

kapitał 100 przez 365 dni daje 4,50 ruble

„ x „ 228 „ „ 500 rubli.

Rozwiązanie. Kiedy kapitał 100 rubli daje rocznie 4,50 rubli, to kapitał 100 rubli przez 1 dzień da $\frac{4,50}{365}$ rubli

a tenże „ 100 „ „ 228 dni „ $\frac{4,50\times228}{365}$ „

a „ 1 rubel „ 228 „ „ $\frac{4,50\times228}{365\times100}$ „

Jeżeli $\frac{4,50\times228}{365\times100}$ rubli są procentem od 1-go rubla za 228 dni, to 500 rubli będą procentem od kapitału złożonego z tylu rubli ile razy procent od 1 rubla $\frac{4,50\times228}{365\times100}$ mieści się w całkowitym procencie 500 rublach; zatém

$$x=500:\frac{4,50\times228}{365\times100}=\frac{500\times365\times100}{4,50\times228}=17787,50 \text{ rublom.}$$

Szukanym przeto kapitałem jest 17787 rubli 50 kopiejek.

§ 37.

11. **Przykład**. Przez ile dni musi pozostawać na pożyczce kapitał 6875 rubli aby wydał rubli 72,05 procentu, licząc po 4,25%?

kapitał 100 przez dni 365 dał procentu 4,25 rubli
„ 6875 „ „ x „ „ 72,05 „

Rozwiązanie. Jeżeli 100 rubli przez 365 dni daje 4,25 rubli procentu, to kapitał 1 rubel przez 365 dni da $\frac{4,25}{100}$ rubli

a kapitał 6875 przez 365 dni da procentu $\frac{4,25 \times 6875}{100}$ rubli

tenże „ 6875 „ 1 dzień da „ $\frac{4,25 \times 6875}{100 \times 365}$ „

Gdy $\frac{4,25 \times 6875}{100 \times 365}$ rubli są procentem dziennym od kapitału 6875 rubli, to 72,05 rubli będą procentem za tyle dni, ile razy dzienny procent $\frac{4,25 \times 6875}{100 \times 365}$ mieści się w 72,05, to jest

$$x = 72,05 : \frac{4,25 \times 6875}{100 \times 365} = \frac{72,05 \times 100 \times 365}{4,25 \times 6875} = 90 \text{ dniom.}$$

A więc kapitał 6875 rubli w 90 dni przyniósł wiadomy procent.

§ 38.

12. **Przykład**. Kapitał 6875 rubli wypożyczony na 90 dni przyniósł 72,05 rubli procentu; jakaż była stopa procentowa?

kapitał 6875 rubli w dniach 90 dał 72,05 rubli procentu
„ 100 „ „ „ 365 „ x „ „

Rozwiązanie. Kiedy 6875 rubli przez dni 90 przyniosły 72,05 rubli procentu to

kapitał 6875 rubli przez 1 dzień da proc. $\frac{72,05}{90}$

a tenże „ 6875 „ „ 365 dni „ „ $\frac{72,05 \times 365}{90}$

więc „ 1 rubel „ 365 „ „ „ $\frac{72,05 \times 365}{90 \times 6875}$

a „ 100 rubli „ 365 „ „ „ $\frac{72,05 \times 365 \times 100}{90 \times 6875}$

$= 4,25$ rublom.

Zatém kapitał był wypożyczony na 4,25 %.

§ 39.

13. **Przykład**. Znaleść procent od kapitału 12648 rubli umieszczonego na procencie 5% za lat 4 i dni 140?

Zamieniam lata na dnie, licząc rok po 360 dni.

kapitał 100 rubli przez 360 dni daje procentu 5 rubli

„ 12648 „ „ 1600 „ „ „ x „

Rozwiązanie. Jeżeli kapitał 100 rubli daje 5 rubli przez dni 360 to

kapitał 1 rubel przez 360 dni da procentu $\frac{5}{100}$ r.

a „ 1 „ „ 1 dzień „ „ $\frac{5}{100\times360}$ r.

to „ 12648 rubli „ 1 „ „ „ $\frac{5\times12648}{100\times360}$ r.

a „ 12648 „ „ 1600 dni „ „ $\frac{5\times12648\times1600}{100\times360}$

$=2772,16$ rubli.

Alboliteż

Kiedy procent roczny od 1 rubla jest $\frac{5}{100}$ to od 12648 rubli za rok będzie $\frac{5\times12648}{100}=632,40$ rubli, a za 4 lata od tegoż kapitału będzie procentu . . $632,40\times4=2529,60$ rubli

Ponieważ 140 dni są $\frac{140}{360}$ częścią roku, zatém procent za 140 dni będzie. . . $\frac{632,40\times140}{360}=242,56$ „

A więc procent za 4 lata i 140 dni wynosi 2772,16 rubli.

§ 40.

14. **Przykład**. Odebrano po roku kapitału wraz z procentem 13270,40 rubli; jaki był kapitał a jaki procent, jeżeli liczono po 6%?

Tu każde 106 rubli kapitału z procentem powstaje z kapitału piérwotnego 100 rubli; zadanie przeto można przedstawić tak:

kapitał z procentem 106 rubli powstał z kapitału 100 r.

„ „ „ 13270,40 „ „ „ „ x „

Rozwiązanie. Kiedy każde 106 kapitału z procentem powstaje z kapitału pierwotnego 100 rubli, to

kap. z proc. 1 rub. powstał z kap. $\frac{100}{106}$ rubli

a „ „ „ 13270,40 „ „ „ „ $\frac{100\times13270,40}{106}=12519,25$ rubli.

Ztąd sam pierwotny kapitał równa się 12519,25 rublom. Chcąc na odpowiedź sam procent otrzymać rozumujemy tak:

Jeżeli w każdych 106 rublach kapitału z procentem zawiera się 6 procentu, to w kapitale 13270,40 r. zawiera się tyle razy po 6 rubli procentu ile razy 106 r. mieści się w 13270.40 rublach to jest

$$\frac{13270{,}40}{106}\times 6=\frac{13270{,}40\times 6}{106}=751{,}15 \text{ rublom samego procentu.}$$

A zatém w danym kapitale z procentem zawiera się pierwotny kapitał 751,15 r. i procent roczny do tegoż 12519,25 rubli.

§ 41.

15. **Przykład.** Gdyby się zapytano, jeżeli kapitał 12519,25 rubli sam pozostając przez rok na procencie zamienił się na 13270,40 rubli; po czemu od sta liczono?

Rozwiązanie. Odjąwszy pierwotny kapitał 12519,25 r. od kapitału z procentem 13270,40 r. otrzymam na resztę 751,15 r. które są procentem rocznym od całego pierwotnego kapitału.

Zadanie przeto zamieniło się na takie.

Jeżeli 751,15 r. przyniosły po roku 12519,25 r. procentu to 100 r. ile przyniesie.

Zadanie to rozwięzuje się w sposób pokazany w przykładzie 3im téj reguły.

§ 42.

16. **Przykład.** Jaki to kapitał po 6 latach będąc wypożyczony na 5% zamienił się na 6500 rubli?

Rozwiązanie. 5% na rok jest toż samo co 6 razy po 5% czyli 30 na 6 lat; przeto każde 100 r. szukanego kapitału po 6 latach zamieniło się na 130 r.

kap. z pr. 130 po 6 latach powstał z kap. 100

„ „ 6500 „ 6 „ „ „ x.

Rozwiążemy więc to zadanie postępując jak w przykładzie 14tym to jest:

Kiedy każde 130 r. kapitału z procentem powstaje ze 100 kapitału pierwotnego to

kapit. z pr. 1 rubel powstał z kapit. pierw. $\frac{100}{130}$ r.

a „ „ 6500 r. „ „ „ $\frac{100\times6500}{130}$ r.

Zatém $x.=\frac{100\times6500}{130}$ = rublom

A więc pierwotny kapitał wynosi 5000 rubli.

§ 43.

18 **Przykład**. Za summę 4850 rubli dłużnik po upływie lat $3\frac{1}{3}$ oddał wierzycielowi 5820 rubli kapitału z procentem; jakaż była stopa procentowa?

Odjąwszy 4850 r. od 5820 rubli dowiem się że samego procentu za $3\frac{1}{2}$ lat było 970 rubli; zadanie przeto można tak przedstawić:

kap. 4850 r. po $3\frac{1}{3}$ latach dał proc. 970 r.

„ 100 r. „ 1 roku „ „ x.

Rozwiązanie. Kiedy kapitał 4850 r. w przeciągu $3\frac{1}{3}$ lat czyli $\frac{10}{3}$ roku dał procentu 970 to

przez $\frac{1}{3}$ roku da $\frac{970}{10}$ r.

a „ 1 rok „ $\frac{970\times3}{10}$=291 r.

kiedy zaś kapitał 4850 r. daje rocznie procentu 291 rubli to

1 rubel przez 1 rok da $\frac{291}{4850}$ r.

a 100 rubli „ 1 „ „ $\frac{291\times100}{4850}$=6 r.

b). O procentach Składanych.

§ 44.

Jeżeli po upływie roku wlicza się procent do wypożyczonego kapitału z warunkiem, aby i od tego dodatku rachował się procent rocznie; mówimy że kapitał oddany został na *procent składany*.

Następny przykład najlepiéj to objaśni.

§ 45.

1. **Przykład**. Na jaką summę zamieni się kapitał 8000 rubli po 4 latach jeżeli go oddamy na procent składany przy stopie 5%?

Rozwiązanie. Jeżeli 100 r. daje 5 procentu rocznie to 1 rubel da $\frac{5}{100}$ rubla; każdy więc 1 rubel po roku zamienia się na $1 \times \frac{5}{100}$ czyli na $\frac{105}{100}$ rubli.

Kiedy zaś 1 rubel po roku zamienia się na $\frac{105}{100}$ r. to kapitał $\frac{105}{100}$ r. po roku zamienia się na $\frac{105}{100} \times \frac{105}{100}$ r., czyli że kapitał 1 rubel po 2ch latach zamienia się na $\frac{105}{100} \times \frac{105}{100}$ r.

Kiedy kapitał 1 rubel po roku zamienia się na $\frac{105}{100}$ r. to kapitał $\frac{105}{100} \times \frac{105}{100}$ r. zamieni się na $\frac{105}{100} \times \frac{105}{100} \times \frac{105}{100}$, to znaczy że kapitał 1 rubel po 3 latach zamienił się na $\frac{105}{100} \times \frac{105}{100} \times \frac{105}{100}$ rubli.

Nakoniec kiedy kapitał 1 rubel po roku zamienił się na $\frac{105}{100}$ r., to kapitał $\frac{105}{100} \times \frac{105}{100} \times \frac{105}{100}$ r. zamieni się na $\frac{105}{101} \times \frac{105}{100} \times \frac{105}{100} \times \frac{105}{100}$ r. to jest że kapitał 1 rubel zamienił się po 4ch latach na $\frac{105}{100} \times \frac{105}{100} \times \frac{105}{100} \times \frac{105}{100}$ r. co$=1{,}05 \times 1{,}05 \times 1{,}05 \times 1{,}05$, czyli 1,05 wziętemu za czynnik 4 razy, to jest tyle razy ile lat pozostawał na procencie.

Gdy więc 1 rubel oddany na procent składany po 5% zamienił się po 4ch latach na $1{,}05 \times 1{,}05 \times 1{,}05 \times 1{,}05$ to 8000 rubli przez tenże sam czas zamieni się na 8000 razy większą summę czyli na

$$8000 \times 1{,}05 \times 1{,}05 \times 1{,}05 \times 1{,}05 =$$
$$= 8000 \times 1{,}21550625 = 9724{,}05 \text{ rubli.}$$

A zatém aby znaleźć w jaką summę zamieni się po upływie pewnego czasu, kapitał oddany na procent składany, należy kapitał dany pomnożyć przez ułamek, którego licznikiem będzie liczba 100 z dodaną stopą procentową a mianownikiem sama liczba sto, tyle razy wziętym za mnożnik ile lat w obrocie kapitał pozostawał.

§ 46.

Następująca tabella pokazuje nam w co się zamienia 1000 rubli po roku, dwóch i t. d. latach aż do 10 włączniej licząc po 3%, 4%, 5% i 6%.

	po 3%		po 4%		po 5%		po 6%	
	Rs.	K.	Rs.	K.	Rs.	K.	Rs.	K.
po 1ym roku	1030	„	1040	„	1050	„	1060	„
„ 2 latach	1060	90	1081	60	1102	50	1123	60
„ 3 „	1092	73	1124	86	1157	63	1191	2
„ 4 „	1125	51	1169	86	1215	51	1262	48
„ 5 „	1159	27	1216	65	1276	29	1338	23
„ 6 „	1194	5	1265	32	1340	10	1418	52
„ 7 „	1229	87	1315	93	1407	17	1503	63
„ 8 „	1266	77	1368	57	1477	41	1593	35
„ 9 „	1304	77	1423	31	1551	34	1689	48
„ 10 „	1343	92	1480	25	1628	90	1790	85

Dla objaśnienia w jaki sposób użytkować można z téj tablicy, rozwiążmy to zadanie.

§ 47.

2. **Przykład.** Jaki kapitał wypłaci Bank po 24 latach za 400 rubli, złożone w nim na procent składany po 3%?

Rozwiązanie. Dojdźmy naprzód w co się ta summa zamieni po latach 10ciu.

Jeżeli za 1000 rubli po 10 latach, jak to wiemy z tablicy, wypłaca Bank przy téj stopie 1343,92 r. to

za 1 r. otrzymujemy $\frac{1343,92}{1000}$ r.

a za 400 r. „ $\frac{1343,92 \times 400}{1000} =$ r.

więc 400 rubli po 10 latach zamieni się na 537,57 r.

Mamy teraz nowe zadanie: Jeżeli 1000 rubli po 10 latach zamieniają się na 1343,92 r., to 537,57 r. w co się przez tenże czas zamieni?

Kiedy 1000 r. zamieniają się na 1343,92 r.

to 1 r. zamieni się na $\frac{1343,92}{1000}$ r.

a 537,57 r. „ „ „ $\frac{1343,92 \times 537,57}{1000}$ $=722,45$ r.

A więc 400 rubli po latach 20 zamieni się na 722 r. 45 k.

Widzimy z tablicy, że 1000 rubli po 4ch latach na procencie 3% zamieniają się na 1125,50 r. zatém

1 rubel przy tych warunkach zamieni się na $\frac{1125,50}{1000}$

a 722,45 rubli „ „ „ „ $\frac{1125,50 \times 722,45}{1000}$ $=813,12$ rubli.

Zatém 400 r. złożone w Banku na procent składany po 3% zamieniły się po 24 latach na 813 rubli i 12 kopiejek.

§ 48.

Przykład. Pewien odebrał 2592 kapitału z trzechletnim procentem składanym po 5%; jak był wielki pierwotny kapitał?

Rozwiązanie. Ponieważ 2592 jest iloczynem z wartości 1 rubla, pozostawianego przez 3 lata na składanym procencie po 5%, przez kapitał pierwiastkowy; podzieliwszy przeto 2592 r. przez powyższą wartość 1go rubla, która jest $1,05 \times 1,05 \times 1.05 = 1,157625$ r., to iloraz $2592 : 1,157625 = 2239,06$ rubli będzie szukanym kapitałem pierwotnym.

Najużyteczniejsze zastosowanie procentu składanego przedstawiają nam kassy oszczędności, których przeznaczeniem jest przyjmować oszczędności, jakie robotnicy składają w końcu każdego tygodnia. Najmniejszym wkładem może być kopiejek 15, a najwyższym złożonym w nich kapitałem rubli 300. Nazwisko wkładającego wciąga się do rejestrów, jemu zaś wydaje się książeczka poświadczająca summę jakiéj jest posiadaczem. Procent 4% dołącza się do kapitału.

O Papierach publicznych.

§ 49.

Papierami publicznemi nazywamy wszelkie pożyczki rządowe, listy zastawne Towarzystwa Kredytowego, obligacyje, papiery likwidacyjne, akcyje i t. p.

Rządy zaciągające pożyczkę publiczną zapewniają pewien procent, jak to: 3%, 4%, 5%.

Papiery te zaś w miarę okoliczności podnoszą się, lub opadają w swéj wartości; kursa ich zaś ogłaszają się codziennie na giełdzie.

§ 50.

1. **Przykład**. Jeżeli nabywamy jakieś papiery publiczne podług kursu 121,20 r. za 100., na jakim procencie umieszczamy swój kapitał, jeżeli procent zapewniony na nich jest 5%?

Rozwiązanie. Kiedy 121,20 r. daje 5 procentu to

1 rubel da $\frac{5}{121,20}$

a 100 r. „ $\frac{5\times100}{121,20}=4\frac{1}{8}$ r.

Zatém przez nabycie tych papierów umieściłem swój kapitał na $4\frac{1}{8}$ %.

§ 51.

2. **Przykład**. Jeżeli 3 procentowe papiery stoją 84,15 rubli za 100; za ile trzeba ich kupić, aby mieć dochodu 3450 r.?

Rozwiązanie. Jeżeli 3 ruble dochodu kosztują 84,15 r. to

1 rubel dochodu będzie kosztować $\frac{84,15}{3}$

a 3450 rubli „ „ „ $\frac{84,15\times3450}{3}=96772,50$ r.

*

§ 52.

3. **Przykład**. Za 60575 rubli ile można kupić dochodu pięcio procentowego jeżeli kurs jego jest 121,15 rubli za 100?

Rozwiązanie. Kiedy 121,15 r. daje 5 dochodu to

1 rubel da dochodu $\frac{5}{121,15}$

a 60575 rubli „ „ $\frac{5 \times 60575}{121,15} = 2500$ rubli.

Zagadnienia.

1). Jakiż jest procent od 6530 złotych za 1 rok licząc po $5\frac{1}{2}$ %? (odp. 359 zł. $4\frac{1}{2}$ gr.).

2). Gdy kapitał 24856 rubli wypożyczą na rok po $6\frac{1}{2}$ % ileż procentu dostaną? (odp. 1615 r. 64 k.).

3). Wypożyczywszy na rok kapitał 72634,20 r. po $7\frac{1}{2}$%, ile otrzymają procentu? (odp. 5477,55 r.).

4). Kapitał 2540 r. jaki przyniesie procent po roku licząc po 6%? (odp. 152,40 rub.).

5). Kapitał 3217,25 rubli jaki przyniesie procent po roku licząc po $4\frac{2}{3}$%? (odp. 150 rub. 14,5 kop.).

6). Jaki będzie procent roczny od kapitału 14153 rub. 50 kop. przy stopie $3\frac{1}{2}$% (odp. 495 rub. $35\frac{1}{2}$ kop.).

7). Jakiż to kapitał umieszczony na 6% da po roku 152,40 rubli procentu? (odp. 2540 r.).

8). Gdy pewien kapitał umieszczony na $5\frac{1}{2}$% dał po roku 359 zł. i $4\frac{1}{2}$ groszy procentu, jak wielki był ten kapitał? (odp. 6530 złotych).

9). Jeżeli kto pobiera 510 rub. pensyi, to od jakiego kapitału pobiera procent, licząc po 5%? (odp. od 10200 r.).

10). Od pozostałej na majątku summy małoletnich zobowiązał się nowy właściciel płacić po $7\frac{1}{2}$%, i wypłaca rocznie opiekunowi po 474 ruble 24 kop.; Jak wielki kapitał małoletnich pozostał na tym majątku? (odp. 6323 r. 20 kop.).

11). Od jakiego kapitału jest rocznym procentem 150 rubli $13\frac{5}{6}$ kop., jeżeli rachują po $4\frac{2}{3}$%? (odp. 3217,71 rub.).

12). Pewien pan w zamian za wioskę dostał dom przynoszący czystego dochodu 895 rubli $37\frac{1}{4}$ kop., za ileż sprzedał dobra jeżeli z domu tylko $3\frac{1}{2}$% rachuje? (odp. za 25582 rub. 7 kop.).

13). Na jaki procent umieszczono kapitał 8000 rub. jeżeli ten dał po roku 280 rubli procentu? (odp. $3\frac{1}{2}$%).

14). Jeżeli majątek za który zapłacono 6323 ruble 20 kop. daje rocznie 474 ruble i 84 kopiejki dochodu, po ileż od 100 wypada? (odp. $7\frac{1}{2}$%).

15). Od kapitału 1350 rubli ulokowanego w Banku pobierają rocznie po 54 ruble; jak wielka jest stopa procentowa? (odp. 4%).

16). Kupiono sukna za 4840 rubli i zyskano na niém 242 ruble, ileż wypada zysku na 100? (odp. 5 na 100).

17). Jaka stopa procentowa kapitału 14820 r., jeżeli ten co rok przynosi 592 r. 80 kop. (odp. 4%).

18). Jeżeli za wypożyczenie 40 złotych lichwiarz bierze 80 groszy na miesiąc, to jaka jest stopa procentowa (odp. 80%).

19). Jak wielki jest procent pięcioletni od kapitału 1350 r. przy stopie 4%? (odp. 270 r.).

20). Kapitał 6323 r. 20 kop. ile przyniesie po 4 latach licząc $7\frac{1}{2}$%? 1896,96 r.).

21). Jaki jest procent za półtora roku od kapitału 8940 r. licząc po 6%? (odp. 804,60 r.).

22). Jaki jest procent od kapitału 8649 rubli po $6\frac{1}{2}$% za 3 lata, 5 miesięcy i 8 dni? (odp. 1929,91 rub.).

23). Sprzedając sukno po 3 rub. 40 kop. arszyn zyskuje kupiec po $6\frac{1}{2}$%, ileż płacił za arszyn? (odp. 3,20 rubli).

24). Od 6400 rubli ile należy odebrać procentu za 3 lata i 8 miesięcy, jeżeli kapitał był oddany na 5%? (odp. 1120 rubli.

25). Za summę 4850 franków, oddał dłużnik wierzycielowi po 3-ch latach i 4 miesiącach summę 5820 rubli; na jaki procent miał sobie kapitał wypożyczony? (odp. na 6%).

26). Jedna osoba kupiła posiadłość za 200000 rubli, i pobiéra z niéj dochodu rocznie 13400 rubli; druga wybudowała dom, co ją kosztował 150000 rubli, przynosi on jéj rocznie 10800 rocznie. Któraż z tych dwóch osób zrobiła lepszy interes? (odp. druga, gdyż piérwsza otrzymuje $6\frac{7}{10}$% a druga $7\frac{1}{5}$%).

27). Ile się należéć będzie procentu za lat 2 i dni 50 od summy 40000 rubli przy stopie procentowéj 6%? (odp. 5133 rubli 33 kopiejek).

28). Ile czasu pozostawać musi na procencie kapitał 4850 franków, aby przy stopie 6% zamienił się na 5820 franków? (odp. 3 lata i 4 miesiące).

29). W skutek decyzyi sądu odebrano od dłużnika kapitału 8649 rubli i procentu od tegoż 1929 rubli 91 kopiejek licząc po $6\frac{1}{2}$%; jakże długo ten kapitał był trzymany? (odp. 3 lata, 5 miesięcy i 7 dni).

30). Jeżeli kapitał 8940 rubli pozostając półtora roku na procencie przyniósł 804,60 rubli dochodu, jakaż była stopa procentowa? (odp. 6%).

31). Odebrano po 3-ch latach i 8 miesiącach 1173 rubli $33\frac{1}{3}$ kopiejek procentu od kapitału 6400 rubli; jak wiele od sta liczono? (odp. 5%).

32). Jeżeli od niewiadomego kapitału ulokowanego na 6% po 2-ch latach i 50 dniach odebrano zaległego procentu 5133 rubli 33 kopiejek; jak wielki był kapitał? (odp. 40000 rubli).

33). Jaki jest procent od kapitału 238 rubli 40 kopiejek po 5% za 3 lata? (odp. 41 rubli 72 kopiejek).

34). Od jakiego kapitału procentem za $3\frac{1}{2}$ lat licząc po 5% jest summa 41 rubli 72 kopiejek? (odp. od 238 rubli 40 kopiejek).

35). Jeżeli kapitał 238 rubli 40 kopiejek, licząc po 5% dał procentu 41 rubli 72 kopiejek; ile czasu zostawał w ręku dłużnika? (odp. $3\frac{1}{2}$ roku).

36). Jeżeli kapitał 238 rubli 40 kopiejek pozostając na procencie przez $3\frac{1}{2}$ roku, dał zysku 41 rubli i 72 kopiejek; jak wielka była stopa procentowa? (odp. 5%).

37). Pewien kupiec zapłaciwszy za 250-cio kwartową beczkę wina 100 rubli; chce zarobić 25%, poczemu kwartę tego wina sprzedawać powinien? (odp. po $\frac{1}{2}$ rubla).

38). Jaki to kapitał, który po 4% licząc, przez $3\frac{1}{2}$ roku zamienił się na 6840 rubli? (odp. 6000 rubli).

39). Pewien kupiec korzenny kupił 100 funtów bakalij za 90 rubli; nie może ich drożéj jak po 80 kopiejek funt sprzedawać, ile traci na 100? (odp. $11\frac{1}{9}$%).

40). Jeden kapitalista po 5-ciu latach i 4 miesiącach odebrał 622380 rubli zamiast 500000 rubli wypożyczonych; na jakimże procencie umieszczone były jego pieniądze? (odp. 4,29%).

41). Pewien kupiec kupił cukru 100 funtów za 20 rubli, meklerowi płaci $\frac{1}{2}$%, chcąc zarobić 10 procent poczemu jeden funt musi sprzedawać? (odp. 22,1 kopiejek).

42). Sprzedając ogółowo wziął kupiec 113 rubli za 100 funtów pewnego towaru zarabia po 7% chociaż komissowe $\frac{1}{2}$% go kosztowało; ileż za te 100 funtów zapłacił? (odp. 105 rubli $11\frac{27}{43}$ kopiejek).

43). Odebrano kapitału wraz z procentem 80000 rubli za 1 rok i 8 miesięcy licząc po 6%; jakiż był sam kapitał a jaki procent? (odp. kapitał 72727 r. 27 k. a procent 7272,73 r.)

44). Jeżeli po 288 dniach odebrano kapitału wraz z procentem 18287,50 rubli licząc po 4,50%; to ileż oddano na procent? (odp. 17660,55 rubli).

45). Jeżeli zamiast 17660,55 rubli wypożyczonych odebrano 18287,50 rubli przy stopie 4,50; jak długo kapitał pozostawał na procencie? (odp. 9 miesięcy i 18 dni).

46). Gdy summę 3600 rubli złożono w Banku na procent składany po 4%; ileż po 5-ciu latach odebrać wypadnie? (odp. 4379 rubli 94 kopiejek).

47). 24500 rubli złożone w Banku na 4% przez 2 lata; na jak wielki zamieniają się kapitał, jeżeli liczyć będziem procent od procentu? (odp. 26499 rubli 20 kopiejek).

48). Jeżeli po 2-ch latach odebrano z Banku 26499 rubli 20 kopiejek kapitału wraz z procentem składanym 4%; jakiż był kapitał pierwiastkowy? (odp. 24500 rubli).

49). Oddano kapitał na procent 1% za 2 miesiące, z tym warunkiem aby po każdych 2-ch miesiącach procent przyliczał się do kapitału. Po ileż procentów należy brać od 100 na rok, aby tęż samę korzyść odnieść można było? (odp. 6,15%).

50). Urzędnik pobierający 3000 złp. rocznie składa 10-tą część swéj pensyi w kassie oszczędności, która liczy po 4%; jakąż summę odbierze po 5-ciu latach? (odp. 1689 złotych $26\frac{7}{10}$ groszy).

51). Do jakiéj summy podniesie się kapitał 4000 rubli oddany na procent składany 4% przez lat 8, i jaki to kapitał w tym samym czasie po 5%, wyda tenże sam procent, gdy nie będziem liczyć procentu od procentu? (odp. kapitał 4000 zamieni się na 5474,28 rubli, a kapitał 3685,70 rubli tenże procent wyda licząc po 5%).

52). Wyrachować jak wiele 10000 rubli przyniesie korzyści po 6-ciu latach, gdy je ulokujemy na procencie składanym po 5%, i porównać tę korzyść z procentem prostym od téj summy za tenże sam czas i przy téj saméj stopie? (odp. procentu składanego będzie 3401 rubli, a prostego 3000 rubli; różnica zatem o 401 rubli zachodzi).

53. Pewna osoba składa rocznie do Banku po 10000 rubli na procent składany po 4,50% ileż odbierze po 5 latach? (odp. 12461,28 rubli).

O Papiérach Publicznych.

54). Kupując papiéry $4\frac{1}{2}$ procentowe gdy stoją po 95 za 100; na jakim procencie umieszcza się kapitał? (odp. na 4,737%).

55). Ile trzeba zapłacić za 500 rubli procentu w papierach 3 procentowych, kiedy stoją 70 za 100? (odp. 11666,67 rubli).

56). Gdy pięcio-procentowe akcye kolei żelaznéj stoją po 119,50 rubli za 100 rubli jakaż jest rzeczywista stopa kapitału w nich umieszczonego? (odp. 4,18%).

57). Na których papierach więcéj będzie korzyści, czy na 5-cio procentowych przy kursie 121,90 za 100, czy też na 3 procentowych gdy stoją 84 za 100? (odp. kupując pierwsze lokujemy kapitał na 4,10%, drugie zaś na 3,57%).

58). Ile trzeba zapłacić aby w papiérach 3 procentowych przy kursie 83 za 100 mieć rocznego dochodu 3000 rubli? (odp. 83000 rubli).

59). Zapłacono 36120 rubli za dochód roczny po 300 0rubli od papierów 5-ciu procentowych; jaki był ich kurs na ówczas? (odp. 166 rubli za 100 rubli).

60). Jeżeli kupiono listów zastawnych za 100000 złotych to ile odbiérano rocznie dochodu, gdy w czasie kupna kursowały po 89,50 za 100? (odp. 4469,28 rubli).

Rozdział IV.

Reguła potrącania procentu (escompte).

(Правило учета векселей).

§ 53.

Wekslem zowiemy pewien rodzaj kwitu, przez który dłużnik zobowiązuje się w oznaczonym terminie wypłacić wierzycielowi pożyczoną od niego summę. Summa wekslowa zawiéra w sobie zwykle kapitał wypożyczony wraz z procentem za cały czas, przez jaki dłużnik ma użytkować z kapitału. Z tego widzimy, że wartość rzeczywista wekslu jest mniejsza od summy w nim wyrażonéj, gdyż ta dopiéro rzeczywistą się staje w dniu, na który termin wypłaty jest naznaczony. Jeżeli posiadacz wekslu chce go na gotówkę zamienić, udaje się zwykle do bankiera, a ten wypłacając mu, potrąca sobie pewny procent, który nazywa się eskontem (l'éscompte). A zatém eskont jest to strata na wekslu wypłaconym przed terminem. Ilość jaką się potrąca od każdego sta nazywa się stopą eskontu. Gdy *np.* stopa eskontu jest 6%, to bankier z wekslu wydanego na każde 100 rubli potrąca 6 rubli a posiadaczowi wypłaci gotówką tylko 94 ruble.

Działanie takie nazywają w handlu *eskontowaniem* albo *diskontowaniem*. Dwa są sposoby eskontowania: zewnątrz (escompte en dehors) i wewnątrz (escompte en dedans).

Przykłady najlepiéj nam to objaśnią.

Dyskonto

a). Eskont zewnątrz.

§ 54.

1. **Przykład**. Posiadacz wekslu na 4780 rubli płatnego za rok, ile otrzyma zaraz od bankiera przy stopie eskontowéj 6%?

Rozwiązanie. Dowiaduję się jaki jest procent roczny od kapitału 4780 rubli licząc po 6%.

Kiedy więc 100 rubli daje 6 procentu

to 1 rubel „ $\frac{6}{100}$

a 4780 rubli „ $\frac{6 \times 4780}{100} = 286,80$ rubli.

Jeżeli więc summa 4780 pozostając przez rok na procencie 6% przynosi zysku 286,80 rubli, ten przeto procent wytrąca bankier z summy wekslowéj, a posiadaczowi wekslu wypłaci resztę 4493,20 rubli.

§ 55.

2. **Przykład**. Jeżeliby posiadacz wekslu na 640 rubli, płatnego za 4 miesiące, chciał go zaraz na gotówkę zamienić, a bankier zgadza się go eskontować podług stopy $4\frac{1}{2}\%$, ileż straci na tym wekslu?

Rozwiązanie. Dowiaduję się jaki jest procent od 640 rubli za 4 miesiące licząc po $4\frac{1}{2}\%$.

Kiedy 100 rubli daje przez 12 miesięcy $4\frac{1}{2}$

to 1 rubel „ „ „ „ $\dfrac{4\frac{1}{2}}{100}$

a 1 „ przez 4 miesiące da $\dfrac{4\frac{1}{2}}{100 \times 3}$

nakoniec 640 rubli „ „ „ dadzą $\dfrac{4\frac{1}{2} \times 640}{100 \times 3} = 9{,}60$ r.

A więc posiadacz wekslu straci na summie wekslowéj 9,60 rubli, a bankier wypłaci mu 630 rubli 40 kopiejek.

b). Eskont wewnątrz.

Rozwiążmy jeszcze raz téż same 2 przykłady.

§ 56.

4. **Przykład**. Posiadacz wekslu na 4780 rubli płatnego za rok, ile otrzyma zaraz od bankiera przy stopie procentowéj 6%.

Rozwiązanie. Ponieważ każde 106 kapitału wekslowego zamienia się na 100 przy eskontowaniu, to

1 rubel zamieni się na $\dfrac{100}{106}$

a 4780 rubli „ „ „ $\dfrac{100 \times 4780}{106} = 4509{,}43$ ruble.

Zatém w ten sposób licząc, z summy wekslowéj wypłacą mu 4509,43 rubli, a potrącą 270 rubli 56 kopiejek to jest mniéj niż poprzednio o 16 rubli 24 kopiejek.

§ 57.

2. **Przykład.** Jeżeli posiadacz wekslu na 640 rubli płatnego za 4 miesiące chce go zaraz na gotówkę zamienić, a bankier zgadza się eskontować podług stopy $4\frac{1}{2}\%$; ileż straci na tym wekslu?

Rozwiązanie. Znaleźliśmy poprzednio że procent od 100 rubli za 4 miesiące w tym razie jest $1\frac{1}{2}$ rubel; a więc na każde 100 rubli summy wyrażonéj na wekslu przylicono $1\frac{1}{2}$ rubel procentu. Jeżeli przeto za każde $101\frac{1}{2}$ rubli eskontujący bankier wypłaca 100, ileż zapłaci za 640 rubli.

Kiedy każde 100 kapitału rzeczywistego wyrażone jest w wekslu przez $101\frac{1}{2}$,

to 1 rubel kapitału znaczy w wekslu $\frac{100}{101\frac{1}{2}}$

a 640 rubli „ „ „ „ $\frac{100 \times 640}{101\frac{1}{2}} = 630,54$

rubli.

A więc posiadacz wekslu odbierze 630.54 rubli, a bankier potrąci 9,46 rubli, to jest 0,14 rubli mniéj niż poprzednio.

§ 58.

Uwaga. Różnice między temi eskontami w piérwszym 16,24 rubli, a w drug,m 0,14 rubli są procentami piérwsza od 270,56 rubli za rok a druga od 9,46 rubli za czas czteromiesięczny. A zatém odtrącając zewnątrz bankier zatrzymuje u siebie razem procent od summy jaką wypłaca i procent od tegoż samego procentu. Odtrącajęc zaś procent wewnątrz korzysta tylko z procentu od saméj summy.

Różnica jak widzimy zachodzi tu nie wielka, gdy zaś zwykle posiadacz wekslu zgadza się z warunkami przez eskontującego podanemi, niepopełnia się więc rzeczywistéj niesprawiedliwości, w jakikolwiek sposób odtrącanie odbywać się będzie.

§ 59.

Pierwszy podany tu sposób odtrącania procentu zewnątrz jako łatwiejszy jest najwięcéj używany w stosunkach handlowych.

Trafiają się téż zagadnienia tego rodzaju jak następujące, rozwiązanie których bardzo się zbliża do eskontowania wewnątrz.

§ 60.

3. **Przykład**. Odprzedając towar za 840 rubli kupiec zarobił 20% ileż go ten towar kosztował?

Rozwiązanie. Mówiąc ze kupiec zarobił 20% znaczy, że sprzedając brał 120 r. za to co go 100 r. kosztowało.

Jeżeli więc każde 120 r. które brał za towar kosztowały go 100 r. to

1 rubel kosztował go $\frac{100}{120}$ r.

a 840 rubli kosztowały go $\frac{100 \times 840}{120}$ r. $=$ 700 r.

A zatém kupiec na ten towar dał 700 rubli.

Ażeby pokazać jak się eskontuje weksel z terminem kilkoletnim, zastanówmy się nad następującém zadaniem.

§ 11.

4. **Przykład**. Jaką summę za 3 lata wypłaci bankier posiadaczowi wekslu na 6000 rubli licząc po 4%.

Rozwiązanie. W tych 6000 rubli mieści się kapitał pierwiastkowy z procentem trzech letnim składanym po 4%.

Zadanie przeto zamienić się daje na takie: Jaka to summa oddana na procent składany zamienia się po 3ch latach na 6000 r. licząc po 4%?

Ponieważ dochodząc w co się zamieni kapitał po upływie pewnego czasu, potrzeba kapitał dany pomnożyć przez ułamek, którego licznikiem będzie liczba 100 z dodaną stopą procentową, a mianownikiem sama liczba 100, tyle razy wziętym za mnożnik ile lat w obrocie ma pozostawać kapitał; a zatém summa wekslowa 6000 rubli powstała z pomnożenia summy, jaką dłużnik odebrał, przez ułamek $\frac{104}{100}$ wzięty 3 razy za mnożnik. Oznaczywszy tę szukaną summę przez x, to:

$$6000 \text{ rub.} = x \times \tfrac{104}{100} \times \tfrac{104}{100} \times \tfrac{104}{100}$$

Te dwie ilości równe podzieliwszy przez $\frac{104}{100} \times \frac{104}{100} \times \frac{104}{100}$ otrzymam, że $\frac{6000}{\frac{104}{100} \times \frac{104}{100} \times \frac{104}{100}} = x$ a z tego, że $x = 5333$ rublom i 97,81 kopiejkom.

I tak bankier eskontując ten weksel wypłaci posiadaczowi onego 5333 rubli 97 kopiejek.

Zagadnienia.

1). Ile się odtrąci zewnątrz od wekslu na 3600 r. po 6%? (odp. 216 r.).

2). Ile się odtrąci wewnątrz od wekslu na 3600 r. po 6%? (odp. 203,77 rubli).

3). Ile wypłaci bankier dziś za weksel na 3780 rubli płatny za dni 90 przy stopie 5% zewnątrz? (odp. 3732,75 rubli).

4). Ile wypłaci bankier dziś za weksel na 3780 rub. płatny za 90 dni przy stopie 5% wewnątrz? (odp. 3733,33 rubli).

5). Posiadacz wekslu na 3646 rubli z terminem 9cio miesięcznym, potrzebując pieniędzy zgadza się na odtrącenie zewnątrz 6% procentu. Ile odbierze? (odp. 3488 rub. $99\frac{109}{209}$ kop.).

6). Ile odtrącą wewnątrz od wekslu na 1100 rubli przy stopie 4%, jeżeli weksel miał być za rok wypłaconym? (odp. 42 rub. 31 kop.).

7). Od tegoż wekslu zewnątrz ile odtrącą? (odp. 44 rubli).

8). Za weksel wypłacony przed terminem otrzymano 1056 rubli. Jak wielka była summa wekslowa jeżeli odtrącano $2\frac{1}{2}$%? (odp. 1077 r. 55 kop.).

9). Gdyby ktoś chciał zaraz spłacić dług wekslowy wynoszący 8400 rubli; ileż potrzebuje oddać odtrącając po 5% wewnątrz? (odp. 8000 rubli).

10). Za tenże weksel rachując eskont zewnątrz ile wypadnie zapłacić? (odp. 7980 rubli).

11). Mam wierzycielowi za 8 miesięcy oddać 5400 rubli. Gdy zaś żąda abym teraz zapłacił odtrąciwszy po 8% zewnątrz; ileż mu mam zapłacić? (odp. 4968 rub.).

12). Dłużnik mający za 7 miesięcy i dni 20 zapłacić 7200 złotych, chce się zaraz z téj należytości uiścić, wytrącając zewnątrz procent po 6%; jakąż summę winien oddać wierzycielowi? (odp. 6924 rub.).

13). Weksel na 14184 ruble przedstawiony do eskontowania na 40 dni przed terminem, ile jest wart po potrąceniu $\frac{1}{2}$% na miesiąc? (odp. 14089,44 rubli).

14). Pewien wojskowy mając potrzebę pieniędzy udaje się do bankiera prosząc o zeskontowanie 2ch weksli, jeden na 6000 rubli płatny za 25 miesięcy, drugi na 27000 rubli płatny za 4 miesiące, bankier odtrąca wewnątrz 2% na miesiąc, ileż ten wojskowy za swe weksle odbierze gotówką? (Procenta tu proste liczyć się będą), (odp. za 1szy odbierze 4000 r., a za 2gi 25000 rubli).

15). Weksel wystawiony na summę 14400 rubli płatny za 7 miesięcy i 20 dni, ile wart dziś po wytrąceniu 6% zewnątrz? (odp. 13868 rub. 38 kop.).

16). Wieleż odtrącić należy od summy wekslowéj 8400 rubli z terminem 8 miesięcy i 2 dni po 8%, zewnątrz? (odp. 7944,53 rubli).

17). Eskontując weksel roczny na 8286 rubli odtrącono 276 r. 20 kop.; po ileż od sta odtrącano? (odp. $3\frac{1}{3}\%$).

18). Pewien obywatel obowiązany płacić wieczystego dochodu 2200 rubli od kapitału 11,000 rubli, chciałby spłacić w 2 lata i dochód i kapitał rocznemi ratami. Jak wielką być musi każda rata? Liczyć się tu ma procent składany. (odp. 7200 rubli).

19). Proponują uiszczenie się z długu 3310 rub. w 3ch równych ratach w końcu każdego roku wypłacanych; kapitał oddany jest na procent składany po 10%; jak wielka ma być każda rata? (odp. 1331 rubli).

20). Ile wart dziś weksel wystawiony na summę 2592 ruble z terminem 3ch letnim przy stopie 5% (odp. 2254,78 rub.).

21). Jeżeli bankier zgadza się eskontować weksel na 2808 rubli płatny za 3 lata i 5 miesięcy odtrącając po 5% zewnątrz; ile posiadacz wekslu odbierze? (odp. 2328,50 rubli).

Rozdział V.

Reguła Spółki albo proporcyonalnego podziału.

§ 61.

Zdarza się często że dwie albo więcéj osób łączą się w towarzystwo celem odniesienia korzyści z jakiegoś przedsiebierstwa handlowego lub przemysłowego, na które majątek jednéj osoby byłby niewystarczającym. Kiedy czas rozwiązania spółki nadejdzie, dzielą pomiędzy siebie kapitał pozostały; rozumie się że wielkość summy jaką wtedy otrzymuje każdy ze spólników jest odpowiednią do kapitału jaki w tém przedsiebierstwie umieścił.

Zadaniem przeto reguły spółki jest podanie sposobów podzielenia danéj summy odpowiednio do dwóch lub więcéj dauych ilości.

a) Reguła odpowiedniego czyli proporcyonalnego podziału.

§ 62.

1. **Przykład.** Liczbę 540 podzielić na 3 części odpowiednio do liczb 2, 3 i 5.

Rozumowanie. To znaczy, że liczbę 540 mamy rozłożyć na 3 działy, z których pierwszy ma w sobie zawierać takich równych części 2, jakich drugi 3 a trzeci 5 zawierać w sobie będą; czyli że liczbę 540 podzielić mamy na $2+3+5=10$ części równych i z tych dwie cząstki będą stanowić dział 1, trzy cząstki dział 2, a pięć cząstek dział 3.

Rozwiązanie. Kiedy więc mamy liczbę 540 podzielić na 10 części równych; to wynajdziemy 1 taką cząstkę dzieląc 540 przez 10 co da 54. Zatem:

Dział	1	będzie	$54\times2=108$
„	2	„	$54\times3=162$
„	3	„	$54\times5=270$
Sprawdzenie			540.

§ 63.

Liczby takie jak 2, 3, 5 stosownie do których dzielimy daną liczbę, zowią się *częściami normalnemi*, a summa ich jaką w tym razie jest 10 zowie się *summą normalną*.

§ 64.

Jeżeli części normalne są ułamkami lub całkowitemi z ułamkami, należy je przez sprowadzenie do jednakowych mianowników i opuszczeniu tychże, zamienić na liczby całe;

i odpowiednio do tych liczb w sposób powyżéj wskazany podzielić liczbę daną.

§ 65.

2. **Przykład.** Liczbę 12654 podzielić na 3 części, odpowiednie liczbom $\frac{5}{6}$, $3\frac{1}{4}$ i $\frac{2}{3}$.

Rozwiązanie.

Włączmy całość 3 w ułamek $\frac{1}{4}$, a sprowadziwszy te ułamki do jednakowego mianownika otrzymany $\frac{60}{72}$, $\frac{234}{72}$, $\frac{48}{72}$; skróćmy następnie te ułamki przez 6 a będzie $\frac{10}{12}$, $\frac{39}{12}$, $\frac{8}{12}$. A że każdy z tych ułamków tyle razy jest większy lub mniejszy od drugiego, ile razy i licznik jego jest większy lub mniejszy od licznika drugiego ułamku; to opuściwszy mianowniki, zadanie powyższe zamieni się na następujące:

Liczbę 12654 podzielić na części odpowiednie liczbom 10, 39 i 8. Tu postępując podobnież jak w przykładzie poprzednim będzie:

$10+39+8=$summie normalnéj 57 a zatém

$$\text{Dział } 1=\frac{12654}{57}\times 10=2220$$

$$\text{Dział } 2=\frac{12654}{57}\times 39=8658$$

$$\text{Dział } 3=\frac{12654}{57}\times 8=1776$$

Ogół sprawdzający 12654.

§ 66.

Z tego takie prawidło wyprowadzamy na wynajdywanie działów odpowiednich danym liczbom: Summę daną dzielimy przez summę normalną, a iloraz ztąd wypadły mnożymy przez każdą część normalną z osobna; tak otrzymane iloczyny będą szukanemi działami.

Reguła Spółki.

§ 67.

3. **Przykład**. Trzech spólników złożyło się na dokonanie pewnego przedsiębierstwa; 1 dał 40000 rubli, 2gi 35000 r. a 3ci 45000 rub., zarobili w ogóle 15840 r. Jakaż część zysku przypada na każdego z nich?

Wypisuję zadanie tak:

Kapitał 1szy 40000 r. zysk 15840 r.
„ 2gi 35000 r.
„ 3ci 45000 r.

Rozwiązanie. Ponieważ zysk 15840 r. wydały wszystkie 3 kapitały złożone przez spólników. trzeba więc przedewszystkiém wiedzieć jaka była summa ogólna. Dodawszy więc do siebie 40000 r., 35000 r. i 45000 r., otrzymamy że summa ogólna kapitałów umieszczonych w przedsiębierstwie wynosi 120000 rubli.

Widzimy tu jasno że celem tego zadania jest rozdzielenie summy 15840 na 3 części odpowiednie do liczb: 40000, 35000 i 45000. A zatém rozwiązujemy w sposób podany w przykładzie pierwszym téj reguły; to jest:

Część $1 = \frac{15840}{120000} \times 40000 = 5280$ r.

Część $2 = \frac{15840}{120000} \times 35000 = 4620$ r.

Część $3 = \frac{15840}{120000} \times 45000 = 5940$ r.

Ogół sprawdzający 15840 r.

Część na 3go przypadającą możnaby wynaleźć przez odjęcie summy 2ch pierwszych części od ogólnego zysku, jednak dla przekonania się czy działanie bez błędu było wykonane, lepiéj jest dochodzić jéj w taki sam sposób jak i poprzednich.

W podobny téż sposób wynajdujemy cząstkowe kapitały składane przez spólników mając wiadome summę użytą na

*

przedsiębierstwo i części zysku jakie każdy ze spólników otrzymał.

§ 68.

4. **Przykład.** Z trzech spólników którzy przed rozpoczęciem przedsiębierstwa złożyli 120000 rubli, pierwszy zarobil 5280 rubli, drugi 4620 rub., trzeci 5940 rub.; z jakąż summą każdy z nich do spółki przystąpił?

Zysk 1go 5280 r. kapitał ogólny 120000 r.
„ 2go 4620 r.
„ 3go 5940 r.

Ponieważ wniosek każdego ze spólników opowiada wielkości jego zysku; przeto w tym zadaniu summę wniosków 120000 r. mamy podzielić na 3 części odpowiednie do liczb 5280, 4620 i 5940. Co się rozwiązuje w sposób podany przy pierwszym przykładzie.

Tu summą normalną jest summa zysków $5280+4620+5940=15840$.

Zatém wniosek 1go jest $\frac{120000}{15810}\times5280=40000$ r.
„ 2go „ $\frac{120000}{15840}\times4620=35000$ r.
„ 3go „ $\frac{120000}{15840}\times5940=45000$ r.

Summa sprawdzająca 120000 r.

A więc 1szy wniósł 40000, 2gi 35000 a 3ci 45000 r.

§ 69.

Jeżeli pieniądze złożone przez spólników na przedsiębierstwo niejednakowy czas pozostawały w towarzystwie, to przez przyprowadzenie summ do jednakowego czasu, zadanie zamieni się na takie jak powyższe.

§ 70.

5. **Przykład.** Osoby 3 złożyły się w ten sposób: że kapitał pierwszéj 3000 rubli pozostawał 6 lat w przedsiębier-

stwie, kapitał drugiéj 4000 rub. zostawał w niém przez lat 5, a trzeciéj przez czas cały, to jest lat 9; ileż dla każdéj z tych trzech osób przypadnie z ogólnego zysku 3300 rubli?

Rozumowanie.

Uważam że 3000 rubli przez 6 lat tyle przynosi korzyści, co 6 razy większy kapitał przez rok jeden, to jest $3000 \times 6 = 18000$ r.

Podobnież i 4000 rub. przez lat 5 tyle da korzyści co 5 razy większa summa przez rok, zatém tyle co $4000 \times 5 = 20000$ rubli.

Także i 8000 rub. przez lat 9 tyle dadzą zysku co 9 razy większy kapitał przez rok, a więc tyle co $8000 \times 9 = 72000$ rubli.

Zadanie zatém zamienia się na powyższe, to jest: Jeżeli części ogólnego kapitału jaki spólnicy złożyli na przedsiębierstwo były: 1a 18000, 2ga 20000, 3a 72000 rubli; ileż każdy dostanie z ogólnego zysku 3300 rubli?

Kapitał 1go 18000 r. zysk ogólny 3300 r.
„ 2go 20000 r.
„ 3go 72000 r.

Summa normalna 110000 r.

Przeto podług prawidła § 66 będzie:

$$\text{Zysk 1go } \frac{3300}{110000} \times 18000 = \frac{3300 \times 18000}{110000} = 540 \text{ r.}$$

$$\text{„ 2go } \frac{3300}{110000} \times 20000 = \frac{3300 \times 20000}{110000} = 600 \text{ r.}$$

$$\text{„ 3go } \frac{3300}{110000} \times 72000 = \frac{3300 \times 72000}{110000} = 2160 \text{ r.}$$

Summa sprawdzająca 3300 r.

A więc zysk 1go jest 540, 2go 600 a 3go 2160 rubli.

Spólnicy podnoszą niekiedy swe kapitały lub ich części ze spółki podczas trwania przedsiębierstwa; dodają również w różnych perjodach pewne kwoty do już wniesionych: *np.*

§ 71.

Gdyby zapytano: ile każda z dwóch osób A i B ma dostać ze wspólnego zysku 9600 rubli; jeżeli w handel 3 lata trwający, A włożyła 5680 rubli, ale po 15 miesiącach przyłożyła 1000 rubli, w 8 miesięcy późniéj wycofała 500 rubli. B zaś włożyła 6000 rubli ale po roku odebrała 1500 r.?

Tu podobnież jak w poprzednim przykładzie sprowadzamy składki do jednakowego czasu.

Obliczmy naprzód osobę A: kapitał jéj 5680 rubli pozostając przez 15 miesięcy we spółce przyniósł tyle korzyści co 15 razy większy kapitał przez miesiąc, to jest tyle co $5680 \times 15 = 85200$ rub. ale że późniéj przyłożyła 1000 rubli, przez następne przeto 8 miesięcy miała w towarzystwie i poprzednie 5680 rub. i 1000 rubli czyli razem 6680 rub. które tyle dały zysku co 8 razy większy kapitał przez 1 miesiąc, to jest tyle co $6680 \times 8 = 53440$ rub.

Po $15+8$ czyli po 23 miesiącach trwania spółki podniosła 500 rubli, zatém już tylko kapitał jéj $6680-500=6180$ rub. pozostawał przez resztę czasu trwania spółki to jest przez 3 lata czyli 36 miesięcy bez 23 miesięcy to jest 13 miesięcy, i wydał przez ten czas tyle korzyści co 13 razy większy kapitał przez 1 miesiąc, to jest: $6180 \times 13 = 80340$ rubli. Kapitał więc jaki osoba A miała w obrocie przez 3 lata równa się: $85200+53440+80340=218980$ rubli pozostających przez jeden miesiąc w obrocie.

Przystąpmy teraz do obliczenia osoby B; ta do ogólnéj składki dała 6000 rubli, które bez żadnéj zmiany przez rok czyli 12 miesięcy pozostawały w towarzystwie, taką przeto korzyść przyniosły jak 12 razy większy kapitał przez 1 miesiąc to jest tyle co $6000 \times 12 = 72000$ r. Ale że po roku podniosła z kassy 1500 rubli więc przez resztę czasu trwania spółki to jest przez 2 lata czyli 24 miesiące już tylko 4500 rubli w spółce posiadała, i te tyle dały zysku co 24 razy większy kapitał przez 1 miesiąc, czyli tyle co $4500 \times 24 = 108000$ rub. Korzyści zatém z kapitału jaki do spółki złożyła równają się korzyściom z kapitałów $72000 + 108000 = 180000$ rubli pozostawionych na miesiąc w przedsiębierstwie.

A więc to zadanie da się tak przedstawić: Podzielić zyskiem 9600 rubli dwie osoby A i B, z których pierwsza włożyła do handlu 218980 r. a druga 180000 r.?

Tu summą normalną jest:

$218980 + 180000 = 398980$ rubli a zatém

części osoby A jest $\frac{9600}{398980} \times 218980 = 5268{,}95$ r.

„ „ B „ $\frac{9600}{398980} \times 180000 = 4331{,}05$ r.

Summa sprawdzająca 9600 r.

o Akcjach.

§ 72.

W wielkich przedsiębierstwach przemysłowych lub handlowych, jakiemi są drogi żelazne, kanały, kopalnie kruszców, budowy mostów i t. p., projekta i anszlagi pokazują jaka summa nakładowa jest przewidywaną; summa ta dzieli się na części równe *akcjami* zwane. Każdy kto nabywa takie akcje za gotówkę, staje się *akcjonarjuszem* i ma prawo do udziału w korzyściach, jakie to przedsiębierstwo przynosi korzyść zaś czyli procent od takiéj akcji nazywa się *dywidendą*.

Akcje mogą być odprzedawane lub nabywane podobnie jak inne papiery publiczne, a wartość ich zależy od procentu (dywidendy), jaki akcja przynosi w chwili gdy jest sprzedawaną; wartości akcyj są zwykle w gazetach ogłaszane.

§ 73.

7. **Przykład**. Towarzystwo przemysłowe którego wspólny kapitał 8000000 rubli powstał z 8000 akcji po 1000 rubli

wypłaca rocznie każdemu akcjonarjuszowi dywidendę w ilości 67,50 rub. od 1 akcji; jaka jest cena akcji?

Rozwiązanie. Cena akcji musi być równa kapitałowi który będąc ulokowany na 5% przynosi 67,50 rubli procentu. A zatém kiedy 5 jest procentem od 100 r.

to 1 „ „ „ $\frac{100}{5}$

a 67,50 „ „ „ $\frac{100}{5}\times 67{,}50=1350$ rub.

Cena więc 1000 rublowéj akcji przy takiéj dywidendzie jest 1350 rubli; wtedy mówią że akcje podniosły się do 1350 rubli.

§ 74.

Rozłożenie podatków gruntowych zasadzające się na dochodach z majątków jest również działaniem tego rodzaju.

Przypuśćmy że oznaczono naprzód summę całkowitą jakiéj potrzeby rządu wymagają. Ministerstwo skarbu rozkłada tę summę na Gubernie odpowiednio do przypuszczalnych dochodów z tychże.

Każda Gubernia summę na siebie przeznaczoną dzieli na powiaty z których jest złożoną, ale także odpowiednio do domniemanych z tychże dochodów.

Summa jaką ma płacić powiat, rozkłada się na gminy, zawsze jednak odpowiednio do dochodów z tychże gmin.

Nakoniec gmina, jako składająca się z pewnéj liczby własności, tak w domach jako téż w gruntach, łąkach, lasach, fabrykach i t. p. których dochody są nieocenione, dzieli podatek między właścicieli odpowiednio do dochodów z ich posiadłości i to jest ostatecznym działaniem opodatkowania.

§ 75.

8. **Przykład**. Gmina, któréj różne posiadłości nieruchome dają dochodu około 520000 rubli, ma płacić podatku 22880 rubli. Chcą oznaczyć stopę opłaty tego podatku, to

jest ile się go ma pobierać od 1go rubla potém od 2ch rubli nastepnie od 3ch rubli i t. d. dochodu.

Ponieważ 520000 rubli ma wydać 22880 rubli podatku przeto:

1 rubel wyda $\frac{22880}{520000}=0,044$ rub. $=$ 4,4 kop.

2 ruble wydadzą $2\times0,044=0,088$ rub. $=$ 8,8 kop.

3 „ „ $3\times0,044=0,132$ rub. $=$ 13,2 kop.

Toż samo działanie daje się zastosować przy rozkładzie ilości ludzi, jaka się ma wziąść do wojska z każdéj gminy.

Zagadnienia.

1). Liczbę 75 podzielić na trzy części odpowiednie liczbom $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$? (odp. $33\frac{8}{13}$, $23\frac{1}{13}$, $17\frac{4}{13}$).

2). Znaleźć 2 liczby których by summa była równa 192 i które by odpowiadały liczbom $\frac{3}{4}$ i $\frac{5}{6}$. (odp. $90\frac{18}{19}$ i $101\frac{1}{19}$).

3). Dwie osoby złożyły na wspólny zarobek, jedna 1000 rubli, a druga 2000 rub. Na końcu roku zyskały 600 rubli; ileż z tego zysku na każdą z nich przypadnie? (odp. na 1ą 200 r. a na 2ą 400 r.).

4). Trzy osoby złożyły się na 9000 rubli; jedna dała 2000, druga 3000, trzecia 4000 rubli; zyskały zaś 360 rubli; ileż z tego zysku na każdą osobę przypadnie? (odp. na 1ą 80, na 2ą 120 a na 3ą 160 rubli).

5). Zebrało się towarzystwo handlowe złożone z 4ch osób; pierwsza dała 2500 r. druga 3000 r., 3cia 4000 r., 4ta 4500 rubli. Chcą się przy rozwiązaniu spółki podzielić zyskiem wynoszącym 3500 rubli; po ileż każdy dostanie? (odp. 1y 625, 2gi 750, 3ci 1000 a 4ty 1125 rubli).

6). Trzech uczni napisało 576 stronnic; pierwszy zajmował się pisaniem 70 godzin, drugi 54, a trzeci 68. Ileż stronnic napisał każdy z nich, jeżeli wszyscy pisali z jednakową prędkością? (odp. 1y 210, 2gi 162, 3ci 204).

7). Pewien Pan zapisał trzem służącym swoim 6000 rubli, z tym warunkiem aby ich podzielono stosownie do lat jakie u niego przebyli. Jeden z nich służył lat 8, drugi 6, trzeci 10. Ileż każdy z nich otrzymał? (odp. 1y 2000 r., 2gi 1500 r. a 3ci 2500 rubli).

8). W trzech szufladach znajduje się 1776 rubli. Ile pieniędzy w każdéj, jeżeli 1ej tyle dziesięciorublowych papierków, ile w drugiéj pięciorublowych i ile w trzeciéj rubli? (odp. w 1ej 1110 r. w 2ej 555 r w 3ej 111 rubli).

9). Zbankrutowany kupiec N pozostawiwszy 18104 rubli i 40 kop. w kassie ucieka; czterech kredytorów jego, jeden z prawem do 2454 rub. 25 kop., drugi z wekslami na 5800 r. 75 k., trzeci na 3000 r. 25 kop., czwarty nakoniec któremu winien tyle co 3em pierwszym, stają do działu. Ileż na każdego z nich przypadnie z téj pozostałości? (odp. na 1go 1963, 40 k.; na 2go 4688,60 r.; na 3go 2400,20 r.; na 4go 9052,20 r.).

10). Dwóch kurjerów w tym samym czasie wyjeżdza na spotkanie jeden drugiego z dwóch przeciwnych miejsc A i B, odległych od siebie na 730 wiorst. Ileż wiorst przejedzie każdy do spotkania, jeżeli jadący z A ujeżdża $8\frac{1}{4}$ wiorst w tym samym czasie, jak jadący z B ujeżdża $5\frac{1}{2}$ wiorst? (odp. 1szy 438 a 2gi 292 wiorst).

11). Do kadzi prowadzą 3 rury. Pierwsza napełnia ją w 9u, druga w 13tu a trzecia w 8 godzinach. W ile godzin napełni się beczka, jeżeli woda będzie puszczona ze wszystkich trzech rur razem? (odp. w $3\frac{2}{3}$ godzin).

12). Dwie rury prowadzą wodę do beczki: pierwsza może napełnić ją w 34 minutach a druga w 15; trzecią zaś dolną rurą wypróżnia się beczka w 2 godziny. Jak prędko napełni się tu beczka wodą, jeżeli wszystkie 3 rury razem będą otwarte? (odp. w 10 minut).

13). Jeżeli 3ch spólników z kapitałem 9000 rubli rozpocząwszy pewną spekulacyą, tyle na niéj zyskali że jeden dostał

80, 2gi 120 a 3ci 160 rubli; ileż każdy z nich złożył do spółki? (odp. 1y 2000, 2gi 3000 a 3ci 4000 r.).

14). Trzech księgarzy wydrukowało wspólnym nakładem 1200 egzemplarzy dzieła, wydali na to 10860 rubli, po wydrukowaniu podzielili się egzemplarzami odpowiednio do summ, jakie każdy z nich dał do spółki. I tak 1szy dostał 450 egzemplarzy, 2gi 370 a trzeci wziął pozostałe 380. Jak wiele każdy z nich dał na nakład tego dzieła? (odp. 1y 4072,50 r., 2gi 3348,50 r., 3ci 3439 rubli).

15). Dwóch jubilerów, z których jeden włożył w kupno diamentów 2000 dukatów, a drugi 3400 dukatów traci na tym interesie 1300 dukatów. Jak wielką szkodę poniósł każdy z nich? (odp. 1y $481\frac{26}{54}$, 2gi $818\frac{28}{54}$ duk.).

16). Za wykopanie rowu ugodzono się zapłacić 1550 rubli. Przez pierwsze 12 dni kopało 22 ludzi, ale gdy się przekonali że nie ukończą na termin, przybrali jeszcze 15 ludzi, z którymi wspólnie jeszcze 28 dni pracowali. Ileż należy wydać z téj summy pierwszym a ile drugim? (odp. pierwszym 1039 r. $53\frac{11}{13}$ kop. drugim zaś 510 r. $46\frac{2}{13}$ kop.).

17). Proch do strzelania używany składa się z 1ej części saletry, $3\frac{3}{16}$ części węgla i $\frac{1}{8}$ siarki; ile trzeba wziąść tego wszystkiego, aby zrobić 50 funtów prochu? (odp. saletry $11\frac{41}{69}$ ℔, węgla $36\frac{66}{69}$ ℔, siarki $1\frac{31}{69}$ ℔).

18). Z pewnego zysku wynoszącego 860 rub. osoba A ma dostać $\frac{1}{8}$, B $\frac{2}{5}$, C $\frac{1}{4}$, a D resztę; jakaż jest ta reszta i ile każdemu przypadnie? (odp. D weźmie $\frac{9}{40}$; dostaną zaś A $107\frac{1}{2}$, B 344, C 215, D $193\frac{1}{2}$ rubli).

19). Na zakupienie kawy 988 ℔ kupiec A dał $\frac{1}{3}$ ceny, B $\frac{1}{4}$ a C 240 rubli. Ileż dali kupcy A i B i ile każda z tych osób dostanie ℔ kawy? (odp. A dał 192 r., B 144 r,; A otrzyma $329\frac{1}{2}$ ℔ kawy, B 247 ℔ a C $411\frac{1}{2}$ ℔).

20). Trzy gatunki towaru posłano do pewnego miasta. Gatunku *a* $14\frac{1}{2}$ centnarów, *b* $18\frac{3}{4}$, *c* 25 $\frac{5}{8}$. Koszta podróży wynosiły $176\frac{5}{8}$ rubla; o ile przez to każdy z tych towarów będzie droższy? (odp. *a* o $43\frac{1}{2}$, *b* o $56\frac{1}{4}$, *c* o $76\frac{7}{8}$ rubli).

21). Rozdzielono 3660 rubli między 30 mężczyzn, 34 kobiet i 16 dzieci. Dział kobiety, 3 razy większy od działu dziecięcia, był równy $\frac{15}{21}$ działu mężczyzny; po ileż się dostało każdemu? (odp. męczyznie 63, kobiecie 45, a dziecięciu 15).

22). Wyznaczono z kassy ogniowéj na wspomożenie 4ch pogorzelców $642\frac{1}{2}$ rub. Dom A zaasekurowany był na 850 rub. B na 945 r., C na 600 r. D na 255 r.; ileż każdy z nich otrzyma? (odp. A $206\frac{18}{212}$, B $229\frac{25}{212}$, C $145\frac{100}{212}$. D $61\frac{175}{212}$).

23). Trzech ma się podzielić 158 rublami pierwszy powinien dostać $\frac{1}{2}$, drugi $\frac{1}{3}$, a trzeci $\frac{1}{6}$ część. Ileż na każdego przypada? (odp. na 1o 79 r. na 2o $52\frac{2}{3}$ a na 3go $26\frac{1}{3}$ r.).

24). Trzéj kupcy wkładają dla wspólnego handlu; pierwszy 1000 r. na 4 lata, 2gi 1200 r. na 6 lat, trzeci 400 r. na 8 lat. Zyskują razem 2880 r.; ileż każdy z tego otrzyma? (odp. 1y 800 r., 2gi 1440 r. 3ci 640 r.).

25). Trzech spólników zyskało 1250 rubli na pewnéj spekulacyi. Pierwszy włożył w nią 3000 rubli na 6 miesięcy, drugi 4000 rub. na 8 miesięcy, a 3ci 2000 rubli na 10 miesięcy. Ileż każdemu z nich dostanie się z ogólnego zysku? (odp. pierwszemu 321,43; drugiemu 571,43; a trzeciemu 357,14 rubli).

26). Spółka z 3ch osób złożona zarobiła na przedsiębierstwie 3000 rubli. Pierwszy złożył 200 rubli, drugi 450 a trzeci 800; lecz pierwszy wycofał swój kapitał po 8 miesiącach, drugi po 6ciu, a trzeci odebrał swoje po 10 miesiącach. Ile każdy z nich dostanie z ogólnego zysku? (odp. 1y $516\frac{12}{93}$, 2gi $870\frac{90}{93}$, 3ci $1612\frac{84}{93}$ rubli).

27). Dwóch kupców zawierają spółkę handlową. A łoży na towary 400 rubli, a po 6 miesiącach dodaje 100 r. B zaś łoży 800 r. a po 4 miesiącach odbiera z nich 200 r. Po skończonym roku mają zarobku 1200 rubli; Jak wiele z tego zysku każdy wziąść powinien (odp. 1y $497\frac{23}{41}$ a 2gi $702\frac{18}{41}$), 28). Trzech handlarzy wołów najęli pastwisko od obywatela na 4 letnie miesiące za 165 rubli. Pierwszy miał na niém wołów 170 przez 56 dni, drugi 140 wołów przez 74 dni, trzeci 180 wołów przez 52 dni. Ileż każdy z nich ma zapłacić? (odp. 1y $53\frac{427}{731}$, 2gi $58\frac{437}{731}$, 3ci $52\frac{598}{731}$).

29). Trzech spólników handlując przez 15 miesięcy zyskali 200000 rubli. Pierwszy dał na handel 172000 rub. na końcu 4go miesiąca przydał 20000 rubli; drugi złożył na początku 120000 rubli, w 6 miesięcy potém przydał 100000 rub., a na początku 9 miesiąca wycofał 20000 rub.; trzeci zaś przystąpił do handlu w końcu 2go miesiąca z kapitałem 200000 rubli. W pierwszych 2ch miesiącach stracili 14800 rubli, w ostatnim miesiącu ponieśli także stratę 5800 rubli. Ileż na każdego z nich przypadnie korzyści i straty? (odp. po strąceniu straty zyskali 1szy 59204,90, 2gi 62503,79, 3ci 72519,98 rubli).

Rozdział VI.

Reguła Mięszaniny albo połączenia (Aliage).

(Правило смѣшенія).

§ 76.

Mieszaniną zowiemy połączenie ciał płynnych lub sypkich ze sobą; łączenie zaś jednych kruszców z drugiemi za pomocą roztapiania nazywa się z francuzkiego aliażem.

§ 77.

Reguła mięszaniny albo aliażu ma dwa rodzaje zagadnień do rozwiązania; w pierwszych idzie oto aby znaleźć średnią wartość mięszaniny, znając liczbę rzeczy do niéj wchodzących i cenę każdéj z osobna; w drugich zaś zachodzi pytanie, jaka ilość każdéj ze składowych rzeczy wchodzi do mięszaniny, gdy wiadomą nam jest po szczególe cena tych rzeczy i całkowita wartość mięszaniny.

Zagadnienia Igo gatunku.

§ 78.

1. **Przykład**. Zmięszano 80 kwart wina po 50 kopiejek kwarta ze 100 kwartami innego wina po 35 kop. kwarta; jaka jest wartość 1 kwarty takiéj mięszaniny?

Rozwiązanie. Dowiaduję się najprzód ile kosztuje wszystko wino wchodzące do mięszaniny; i tak:

80 kwart po 50 kop. warte $80 \times 50 = 40$ r.
100 „ „ 35 „ „ $100 \times 35 = 35$ r.

zatém 180 kwart téj mięszaniny warte 75 r.
a jedna kwarta jest warta 180 razy mniéj czyli $\frac{75}{180} = 42$ kop.

§ 79.

2. **Przykład**. Stopiono razem 3 gatunki srebra: jednego 2 funty po 80 rubli; drugiego $1\frac{1}{2}$ funta po 60 rubli, a trzeciego 3 funty po 50 rubli funt; ileż wart funt w ten sposób zmięszanego srebra?

Rozwiązanie.

2 funty po 80 r. warte $2 \times 80 = 160$ r.
$1\frac{1}{2}$ funta „ 60 „ „ $1\frac{1}{2} \times 60 = 90$ r.
3 funty „ 50 „ „ $3 \times 50 = 150$ r.

a więc $6\frac{1}{2}$ funta tego srebra warte 400 rubli.

Zatém 1 funt wart $6\frac{1}{2}$ razy mniéj to jest $\frac{400}{6\frac{1}{2}} = 61\frac{7}{13}$ rubli.

Uwaga. Jeżeli do mięszaniny wchodzi materjał który sam z siebie nie ma żadnéj wartości, to wartość jego nie dodaje się do summy ogólnéj.

§ 80.

3. **Przykład**. Pewien kupiec dolał do pełna wodą 250 garcową beczkę a w któréj było jeszcze 175 garncy wina po 2,40 rubli garniec; ile wart garniec takiéj mięszaniny?

Rozwiązanie.

175	garncy wina	po 2,40 r.	warte	$175 \times 2{,}40 = 420$ r.
250-175=75	„ wody	„ 0	„	„ 0
Ogół 250	„ mięszaniny	wart		„ 420 r.

a zatém 1 garniec wart $\frac{420}{250} = 1{,}68$ rubli.

Reguły téj używa się również dla znalezienia liczby średniéj z pomiędzy kilku innych, jakie wypadły z doświadczeń, spostrzeżeń i t. p. a które nie zgadzają się z sobą.

§ 81.

4. **Przykład**. Z pewnéj armaty wystrzelono na próbę 4 razy, 1y raz kula przeleciała 720 sążni, 2gi raz 810, 3ci raz 760 a 4ty raz 796 sążni. Znaleźć średnią odległość na jaką bije ta armata.

Rozwiązanie. Dochodzę jaka jest summa sążni jaką wszystkie 4 kule przeleciały.

$$\begin{array}{r} 720 \\ 810 \\ 760 \\ 796 \\ \hline 3086 \end{array} \text{ sążni.}$$

Kiedy te 4 kule razem przeleciały 3086 sążni to średnia odległość na jaką bije ta armata, musi być 4 razy mniejszą od 3086 sążni czyli

$$\frac{3086}{4} = 771{,}5 \text{ sążni.}$$

Podamy tu jeszcze sposób wynalezienia terminu wekslowego (l'echeance).

§ 82.

5. **Przykład**. Bankier posiadający 4 weksle jakoto:

1en na 2500 rub. płatny za 90 dni
2gi „ 1600 „ „ „ 128 „
3ci „ 4000 „ „ „ 150 „
4ty „ 2000 „ „ „ 40 „

Chce zamienić te weksle na jeden obejmujący ogólną ich wartość 10100 rubli; za ile dni weksel taki powinien być płatny?

Rozwiązanie.

$$2500 \times 90 = 225000 \text{ r.}$$
$$1600 \times 128 = 204800 \text{ r.}$$
$$4000 \times 150 = 600000 \text{ r.}$$
$$2000 \times 40 = 80000 \text{ r.}$$

Summa wekslowa 10100 ogół 1109800 | 10100
998 | $109\frac{89}{101}$
89

Objaśnienie 2500 r. przez 90 dni tyle przyniosą korzyści, co 90 razy większy kapitał czyli 225000 przez 1 dzień; tak samo daléj rozumując otrzymam następne 3 summy to jest 204800, 600000, 80000. Dodawszy potém te 4 ilości do siebie rozumuję tak: jeżeli 1109800 rubli w jednym dniu przynoszą pewną korzyść, to 10100 rub. tęż samą korzyść w dłuższym czasie przyniosą i to w tyle razy dłuższym ile razy 10100 są mniejsze od 1109800 r. Uskuteczniwszy dzielenie otrzymam, że 10100 r. tęż samą korzyść przyniosą w $109\frac{81}{101}$ dniach. Przeto termin wekslu na jaki bankier chce zamienić 4 swoje weksle będzie $109\frac{81}{101}$ dni.

Zagadnienia 2go gatunku.

§ 83.

Zagadnienia należące do reguły mięszaniny drugiego rodzaju, to jest w których mając wiadome ceny różnych gatunków i cenę średnią, dochodzimy ilości jakie brać mamy z każdego gatunku, bywają *niewyznaczone* albowiem wydać mogą nieskończoną liczbę odpowiedzi. Przykłady najlepiéj nam to objaśnią.

§ 84.

1. **Przykład**. W jakim stosunku trzeba mieszać 2 gatunki wina z których jedno warte 45 kop. a drugie 33 kop. za kwartę, aby otrzymać mięszaninę wartości po 40 kop. kwarta?

Wypisuję zadanie tak:

Cena mięszaniny	ceny wina		różnice na odwrót
40 kop.	45 kop.	-5	7
	33 kop.	+7	5

Różnica między ceną wina 1go gatunku a ceną mięszaniny jest 45 k.—40 k.=5 kop., różnica między ceną 2go gatunku wina a ceną mięszaniny jest 40—33=7 kop. Napisawszy te różnice na odwrót przed cenami wina, rozumuję tak:

Sprzedając po 40 kop. kwartę traci się na kwarcie wina 1go gatunku 5 kop., na każdéj zaś kwarcie 2go gatunku gdy się ją po 40 kop. sprzedaje jest zysku 7 kop. Z tego się pokazuje że wina 1go gatunku musi być więcéj w mięszaninie, dla tego że strata jaka się na niém ponosi jest mniejszą od zysku jaki daje 2gi gatunek. A kiedy strata na 1ym gatunku jest 5 kop. a zysk na drugim 7 kop., to 1go gatunku musi się brać tyle razy więcéj ile razy 7 jest większe od 5, czyli co na jedno wychodzi, jeżeli 1go gatunku bierze się 7 kwart to 2go 5 kwart wziąść potrzeba.

§ 85.

Skład mięszaniny oznaczony jest zazwyczaj wykazaniem składowych części zawartych w jednostce mięszaniny. I tak mięszając 7 kwart jednego gatunku z 5ma kwartami drugiego, otrzymujemy 12 kwart mięszaniny. Jedna zatém kwarta mięszaniny formuje się z $\frac{7}{12}$ pierwszego i z $\frac{5}{12}$ drugiego gatunku.

Możemy tu podług woli brać 2, 3, 4, 5, i t. d. razy więcéj kwart każdego gatunku wina dla utworzenia 24, 48, 60 i t. d. kwart mięszaniny. Z tego powodu, jeżeli szukamy liczby kwart odpowiednich każdemu gatunkowi, zagadnienie będzie niewyznaczone; gdy zaś idzie nam tylko o znalezienie stosunku w jakim te składowe części mięszać mamy z sobą, zagadnienie będzie wyznaczone, albowiem stosunek pozostaje niezmiennie 7 i 5.

§ 86.

2. **Przykład**. Mając dwa gatunki wina: jednego kwarta po 45 kop., drugiego po 30 kop., chcemy utworzyć 150 kwart wina po 40 kop. kwarta; ileż na to trzeba wziąść 1go gatunku a ile drugiego?

Postępując jak w poprzednim przykładzie: dojdziemy, że dla utworzenia jednéj kwarty mięszaniny, trzeba wziąść $\frac{7}{12}$ pierwszego gatunku i $\frac{5}{12}$ drugiego. Dla utworzenia przeto 150 kwart takiéjże mieszaniny, należy wziąść każdego gatunku 150 razy więcéj, to jest:

1go wina $150 \times \frac{7}{12} = \frac{150 \times 7}{12} = 87,5$ kwart

2go „ $150 \times \frac{5}{12} = \frac{150 \times 5}{12} = 62,5$ „

Ogół sprawdzający 150 kwart.

§ 87.

Kwart

3. **Przykład**. Ile trzeba domięszać wina po 45 kop. kwarta do 28 kwart wina po 33 kop. kwarta, aby utworzyć wino wartości po 40 kop. za kwartę?

Postępując jak wyżéj, dojdziemy: że dla zrobienia żądanéj mięszaniny należy brać droższego 7 a tańszego 5 kwart; kiedy więc na 5 kwart tańszego trzeba brać 7 kwart droższego wina, to na 1 kwartę tańszego należy wziąść piątą część 7u kwart czyli $\frac{7}{5}$ droższego gatunku; a na 28 kwart tańszego wina muszę wziąść 28 razy więcéj, czyli 28 razy po $\frac{7}{5}$, to jest $\frac{28\times7}{5}=39{,}2$ kwarty.

Sprawdzenie.

	39,2 kwart	po 45 kop.	kosztują	17,63 rubli
	28 „	„ 33 „	„	9,24 „
a więc	67,2 „	mięszaniny	„	26,87 rubli

a zatém 1 kwarta mięszaniny kosztuje $\frac{26{,}87}{67{,}2}=40$ kop.

§ 88.

4. **Przykład**. Ile kwart wody należy dolać do 125 kwart wina po 50 kop. kwarta, aby cenę jego zniżyć do 42ch kopiejek za kwartę?

Wodę, jakto już było mówione, uważa się za wino na cenę 0 kop. za kwartę i zadanie rozwiązuje się jak powyższe:

Cena mieszaniny	ceny wina	różnice odwrotnie
42 kop.	50 kop.	42
	0 kop.	8

Z tego widzimy że dla otrzymania żądanéj mięszaniny należy do 42 kwart wina dolać 8 kwart wody.

A więc utworzyć 1 kwartę wina takiego, należy dodać wody 42 razy mniéj czyli $\frac{8}{42}$. A do utworzenia 125 kwart téj mięszaniny, należy dolać 125 razy więcéj wody czyli $125\times\frac{8}{42}$ $=\frac{125\times8}{42}=23{,}8$ kwart.

Rozwiążmy jeszcze kilka przykładów reguły aliażu.

§ 89.

5. **Przykład.** Mosiądz tworzy się ze stopienia razem 30 funtów cynku z 70 funtami miedzi. Funt miedzi wart 45 kop. a funt cynku 20 kopiejek; jakaż jest wartość mosiądzu?

Rozwiązanie. Kiedy 1 funt miedzi kosztuje 45 kop. to 70 funtów miedzi będą kosztować . . 70×45 k.$=31{,}50$ r.
a dla podobnéj przyczyny
30 funtów cynku będą kosztować . . 30×20 k.$=6{,}00$ rub.

a zatém 100 funtów mosiądzu kosztować będzie 37,50 rub.

Jeden zaś funt mosiądzu musi kosztować 100 razy mniéj czyli $\frac{37{,}50}{100}=37{,}5$ kopiejek.

§ 90.

6. **Przykład.** Stopiono razem dwie sztaby srebra jednę 92ej próby ważącą 30 funtów, drugą 80 próby ważącą 20 funtów. Jakaż będzie próba tego aliażu?

Uwaga. Próbą nazywamy stosunek czystego złota lub srebra do całéj ilości mięszaniny. Czyste złoto i srebro jest u nas 96 próby. Złoto do wyrobów jubilerskich używane w skutek ukazu naszego Rządu musi być 56éj, 72éj, 84éj i 94éj próby; srebro zaś tylko 84éj próby: to znaczy, że na jeden funt czyli na 96 zołotników mięszaniny winno się znajdować złota 56, 72, 84, lub 94 zołotników a 84 zołotników srebra; reszta zaś jest dodatkiem, który przy złocie jest srebrem lub miedzią a przy srebrze najczęściéj miedzią. Objaśniwszy, to możemy przystąpić do rozwiązania tego i następnych zadań odnoszących się do reguły aliażu.

1sza sztaba która w 1 funcie ma 92 zołotniki czystego srebra, w 30 funtach zawiera go . . $92 \times 30 = 2760$ zołot.

2ga sztaba mając w 1 funcie 80 zołotników czystego srebra, w 20 funtach zawiera go . . $80 \times 20 = 1600$ zołot.

Utworzona zaś z połączenia tych 2ch sztab mięszanina a ważąca $30+20 = 50$ funtów, zawiera czystego srebra . . . . 4360 zołot.

A więc 1 funt tejże zawierać go w sobie musi 50 razy mniéj to jest: $\frac{4360}{50} = 87\frac{1}{5}$ zołotników co znaczy że próba téj mięszaniny jest $87\frac{1}{5}$.

§ 91.

7. **Przykład.** Złotnik posiadający dwojakie srebro to jest 95 i 76 próby, w jakim stosunku mięszać je powinien dla otrzymania srebra przepisanej 84 próby?

Rozwiązanie.

Tu postępować będziem jak w przykładzie 1ym téj reguły. Piszemy próby obu gatunków srebra, a próbę mającą się otrzymać z lewéj strony; porównawszy zaś próby danego srebra z próbą mięszaniny wypisujemy różnice odwrotnie, to jest:

Próba mięszaniny	próby	różnice
84	95	8
	76	11

Musi on przeto 8 części 1go gatunku połączyć z 11stą częściami 2go gatunku srebra, a otrzymane srebro będzie żądanéj próby. Jakoż w saméj rzeczy czystego srebra zawiera się:

w 8mu zołotnikach 1go gatunku $8 \times 95 = 760$ części
w 11tu „ 2go „ $11 \times 76 = 836$ „

a więc w 19tu zołotnikach mięszaniny jest 1596 części czystego srebra; w jednym przeto zołotniku zawiera się $\frac{1596}{19} = 84$ części czystego srebra czyli że to nowo otrzymane srebro jest 84éj próby.

§ 92.

8. **Przykład**. Do sztaby srebrnéj 94 próby, ważącéj 60 funtów, ile trzeba dodać miedzi aby zniżyć próbę do 84? Zadanie to rozwiązać się daje w podobny sposób jak pokazano w przykładzie 4tym téj reguły. Miedź tu uważa się za srebro próby 0; będzie zatém:

Próba mięszaniny	próby	różnice odwrotnie
84	94	84
	0	10

A więc do utworzenia żądanéj mięszaniny należy wziąść 84 funtów srebra 94 próby i 10 funtów miedzi.

To na 1 funt srebra trzeba wziąść $\frac{10}{84}$ funt. miedzi

a na 60 funtów „ „ „ $\frac{10 \times 60}{84} = 7\frac{1}{2}$ funt. miedzi.

Wskażemy teraz sposób rozwiązywania tego rodzaju zagadnień, jeżeli do mięszaniny wchodzić będzie 3 lub więcéj gatunków.

§ 93.

9. **Przykład**. Pewien kupiec chce zmięszać 3 gatunki wina, jedno na 80 kopiejek, drugie na 65 kopiejek a trzecie na 45 kopiejek kwarta, w ten sposób aby kwarta zmięszanego wina wypadła mu na 50 kopiejek; Ileż kwart z każdego gatunku wziąść powinien do utworzenia téj mięszaniny?

Porównywać tu będziemy po 2 gatunki jeden wyższy, drugi niższy od ceny średniéj; zmięszajmy przeto naprzód gatunek pierwszy z drugim, a potém pierwszy z trzecim za pomocą poprzednio podanych sposobów, a otrzymamy:

1sze żądana cena	ceny wina		2gie żądana cena	ceny wina	
50 k.	80 k.	5	50 k.	80 k.	20
	45 k.	30		30 k.	30

Tworząc tedy wino na 50 kopiejek kwarta z 2ch gatunków, jednego na 80 kop. drugiego na 45 kop. kwarta, muszę 5 kwart droższego zmięszać z 30 kwartami tańszego.

Tworząc znowu tejże ceny wino z 2ch gatunków, jednego na 80 kop. drugiego na 30 kop. kwarta, potrzebuję 20 kwart droższego zmięszać z 30 kwartami tańszego.

Jasną więc jest rzeczą, że te dwie mięszaniny połączone z sobą utworzą wino, które będzie warte po 50 kop. kwarta, albowiem wchodzi do niego:

1go	gatunku	$20+5=25$ kwart
2go	„ . . .	30 „
3go	„ . . .	30 „

a że 25	kwart	1go	gat.	po	80	kop.	warte	2000	kop.
30	„	2go	„	„	45	„	„	1350	„
30	„	3go	„	„	30	„	„	900	„
więc 85	„	powstałéj ztąd mięszaniny					„	4250	kop.

a 1 kwarta tejże warta $\frac{4250}{85}=50$ kop.

Gdyby nam wiadomą była liczba kwart mięszaniny, to liczbę tę podzielibyśmy stosownie do znalezionych liczb 20, 30, 30.

§ 94.

10. **Przykład**. Pewien jubiler posiadając złoto 4ch różnych prób: 96téj, 90téj, 87éj, 82éj, chciałby z niego otrzymać złoto 88éj próby; jaką ilość ma wziąść z każdego z wymienionych gatunków?

Zadanie to rozkładam podobnież na 2 zadania, porównywając 1szy gatunek jako wyższy z 3im jako niższym, i 2gi jako wyższy z 4tym jako niższym od szukanego gatunku 88éj próby.

$$88 \begin{cases} 96 & 1 \\ 87 & 8 \end{cases} \qquad\qquad 88 \begin{cases} 90 & 6 \\ 82 & 2 \end{cases}$$

Te 2 mięszaniny połączone z sobą dadzą mi złoto żądanéj 88éj próby, w skład którego wchodzić będzie złota 96éj próby część 1, 87éj próby części 8, 90téj próby części 6 a 82éj próby części 2.

Zagadnienia.

1). Pewien Pan mięsza dwa gatunki tabaki, to jest 30 funtów Marokko po 75 kop. funt, z 10 funtami Holenderki po 45 kop. funt; ileż go będzie kosztować funt takiéj mięszaniny? (odp. $67\frac{1}{2}$ kop.).

2). Handlarz mający dwojakie żyto, jednego 15 korcy po 14 złotych korzec, drugiego 20 korcy po 12 złotych korzec, mięsza te oba gatunki razem; poczemuż musi sprzedawać korzec téj mięszaniny? (odp. po $12\frac{6}{7}$ zł.).

3). Mięszają 40 wiader wina po 7 rubli wiadro z 50 wiadrami wina po 9 rubli garniec; jakaż będzie cena téj mięszaniny? (odp. 8 rub. $11\frac{1}{9}$ kop.).

4). Do 780 garncy okowity, któréj garniec kupowano po 75 kop. dolano 520 garncy wody; po ileż wypada garniec utworzonéj z tego wódki? (odp. po 39 kop.).

5). Do 100 garncy okowity, po 75 kop. garniec, dolano $66\frac{2}{3}$ garncy wody; po ile wypada garniec powstałéj ztąd wódki? (odp. po 45 kop.).

6). Zmięszano 3 gatunki herbaty, to jest 3 funty po 15 rubli, 5 funtów po 9 rubli i 10 funtów po 7 rubli za funt; Ileż wart funt w ten sposób zmięszanéj herbaty? (odp. $8\frac{1}{18}$ r.).

7). Zmięszano w fabryce tytoń 4ch gatunków, a mianowicie: 12 funtów pierwszego gatunku po 88 kop. funt, 37 funtów drugiego gatunku po 85 kop., 25 funtów trzeciego gatunku po 70 kop. i 38 czwartego gatunku po 65 kop. funt. Ileż wart funt téj mięszaniny? (odp. $75\frac{3}{16}$ kop.).

8). Zrobiono mięszaninę z dwóch gatunków herbaty; pierwszego gatunku wzięto 45 funtów a drugiego 24 funty. Po ile brać można za funt téj mięszaniny, jeżeli funt pierwszego gatunku kosztuje 8 rub. 50 kop. a drugiego 12 rub. i jeżeli przy tém chcą 100 r. zarobić? (odp. 11 r. $16\frac{2}{3}$ kop.).

9). 24 funty srebra $83\frac{1}{3}$ próby stopiono z 36 funtami 70téj próby; jakaż jest próba tak stopionego srebra? (odp. $75\frac{1}{3}$).

10). Stapiają w mennicy razem 3 łuty złota 92éj próby, $2\frac{1}{2}$ łuta 88éj i $1\frac{1}{2}$ zołotnika 80éj próby; jakiéj próby będzie to stopione złoto? (odp. $89\frac{1}{3}$).

11). Dolawszy do 125 butelek wina, z których każda po 85 kopiejek kosztuje 25 butelek wody; ile będzie kosztować butelka téj mieszaniny? odp. $70\frac{5}{6}$ kop.).

12). Jakiéj próby srebro powstało ze stopienia 3 funtów czystego srebra z $41\frac{1}{7}$ zołotnikami miedzi? (odp. 84 próby).

13). Jeżeli przy stopieniu, do 5 funtów czystego srebra dodano $1\frac{64}{96}$ funtów miedzi; jakiéj próby otrzymano srebro? (odp. $73\frac{1}{2}$).

14). Stopiwszy 5 funtów srebra 84 próby z $3\frac{4}{5}$ funtami srebra 60 próby i $\frac{1}{5}$ funta miedzi; jakiéj próby otrzymano srebro? (odp. 72éj).

15). Złotnik topi 3 sztuki srebra: pierwsza waży 2 funty i jest 84 próby, druga 88éj próby waży 3 funty, a trzecia będąca 94 próby waży 4 funty; jakiéj próby będzie mięszanina? (odp. $87\frac{7}{9}$).

16). Pewien kupiec zakupił raz 50 czetwerty pszenicy po 6 rubli, drugi raz 78 czetwerty po 6 r. 50 kop., trzeci raz 62 czetw. po 6 r. 25 kop., czwarty raz 100 czetw. po 6 rub. 75 kop., piąty raz 19 czetw. po 7 rub. czetwert. Jeżeli zsypie tę pszenicę razem, po ile mu wypadnie czetwert? (odp. po 6 r. $44\frac{2}{3}$ k.).

17). Jeżeli do roboty chińskich dzwonków, tam—tam albo gong nazywanych, używają spiżu powstałego ze zlania 8 części miedzi i 2 części cyny, to gdy funt miedzi kosztuje 37 kop., a funt cyny 99 kop., ile warte 5 funtów tego spiżu? (odp. 2 r. 47 k.).

18). Ze stopienia 2 części cynku z 3 częściami miedzi otrzymuje się spiż biały zwany srebrem chińskiém, kiedy funt cynku wart 11 kop. a funt miedzi 37 kop., ile warte 3 funty srebra chińskiego? (odp. $79\frac{4}{5}$ kop.).

19). Do 150 wiader okowity 10 próby dolano 500 wiader wódki $5\frac{1}{2}$ próby trzymającéj; jakiéj będzie próby otrzymana ztąd wódka? (odp. $6\frac{7}{13}$).

20). Z 1008 garncy okowity 10téj próby, ile będzie wódki 6 próby? (odp. 1680 garncy).

21). Pewien obywatel wypotrzebował w swych karczmach przez rok 48000 wiader okowity 10téj próby, którą kupował po 2 r. 10 kop. wiadro. Sprzedając wiadro wódki 6téj próby po 2 ruble i 10 kopiejek, ile dochodu przyniosła mu propinacya? (odp. 67200 rub.).

22). Znaleźć wspólny termin wypłaty trzech weksli z których jeden wystawiony na 515 rubli z terminem 1no miesięcznym, drugi na 515 rubli płatny za 3 miesiące, trzeci na 600 rubli z 4ro miesięcznym terminem? (odp. 3 miesiące $3\frac{111}{133}$ dni).

23). Jaki będzie wspólny termin wypłaty dwóch weksli na 700 rubli z terminem 28 dniowym jednego, a drugiego na 1200 rubli z terminem 45io dniowym? (odp. $38\frac{14}{19}$ dni).

24). Pewien Bankier chce eskontować w Banku 1go Stycznia następujące weksle: 1en na 5000 rubli płatny 16 Stycznia, 2gi na 8000 r. płatny 20 Lutego, 3ci na 10000 r. płatny 21 stycznia, 4ty 12000 r. płatny 31 Stycznia, 5ty 4000 r. płatny 26 Stycznia; jaki jest wspólny termin wypłaty tych weksli? (odp. 29 dni).

25). Oddano trzy kapitały na procent i otrzymano z nich różne korzyści, pierwszy kapitał 56458 rubli i 58 kopiejek przyniósł 3105,2208 rub. procentu; drugi 30648 rub. 56 kop. dał procentu 2574,47904 rubli, a trzeci 36450 rubli wydał 1579,50 rub. procentu. Znaleźć średnią stopę procentu jaką te kapitały przyniosły? (odp. $5\frac{67}{90}$).

26). Chce ktoś zmięszać tytoń tak aby go funt kosztował 1 rubel i 20 kop. Ileż do téj mięszaniny trzeba wziąść tytoniu którego funt kosztuje 1,30 rubli i drugiego po 1,05 rubli funt? (odp. 1go $\frac{3}{5}$ funta, 2go $\frac{2}{5}$ funta).

27). Aby otrzymać 3 pudy herbaty po 8,50 rub. funt, biorą dla zmięszania dwa gatunki herbaty, pierwszego funt kosztuje 9 rubli, drugiego 7,80 rubli. Ile trzeba wziąść na to z każdego gatunku? (odp. 1go 70, 2go 50 funtów).

28). Dla utworzenia kompozycyi użyto dwóch metali, pierwszego na cenę 69 rub. a drugiego 47 rub. za funt. W jakim stosunku należy zlać te metale aby sprzedając po 50 r. funt zarabiać po rublu na funcie? (odp. 1go $\frac{1}{11}$, 2go $\frac{10}{11}$).

29). Z dwóch gatunków prochu, z których pierwszy wart 85 kop. za funt, a drugi 69 kop. za funt, trzeba zrobić 10 funtów mięszaniny wartości 75 kop. za funt; ileż z każdego gatunku prochu brać na to należy? (odp. 1go $3\frac{3}{4}$, 2go $6\frac{1}{4}$ funta).

30). Pewien kupiec sprzedaje gorszy szafran po 50 złotych funt a lepszy po 62 złote. Cena szafranu stanęła po 55 złotych funt. Jakże ma mięszać te 2 gatunki aby mógł bez szkody po 55 złotych funt sprzedawać? (odp. gorszego 7 a lepszego 5 części).

31). W 10 funtach srebra 72éj próby ile jest srebra a ile miedzi? (odp. czystego srebra $7\frac{1}{2}$ funta a miedzi $2\frac{1}{2}$ funta).

32). Chcąc otrzymać 1 pud i 15 funtów kawy po 30 kop. funt, i mając dwa jéj gatunki jeden na 32,5 a drugi na 26 kopiejek; po ile funtów należy brać z każdego gatunku? (odp. z 1go $33\frac{11}{13}$ a z 2go $21\frac{2}{13}$ funta).

33). Dla otrzymania 500 wiader wódki 6téj próby ile trzeba wziąść okowity 10téj próby, a ile wódki 4téj próby? (odp. okowity $166\frac{2}{3}$ a wódki $333\frac{1}{3}$ wiader).

34). Potrzeba ze srebra $83\frac{1}{2}$ próby i srebra 70 próby zrobić 25 funtów mięszaniny 80 próby. Ileż funtów srebra trzeba wziąść z każdego gatunku? (odp. 1go $18\frac{3}{4}$ a 2go $6\frac{1}{4}$ funtów).

35). Do 250 funtów miedzi po cenie 43 kopiejki ile potrzeba domięszać cyny po cenie 1 rubel i 24 kop., aby otrzymać bronz wartości 60 kop. za funt? (odp. $66\frac{13}{32}$ funtów).

36). Do 50 pudów miedzi po cenie 16,40 rubli za pud, ile potrzeba dodać ołowiu którego pud kosztuje 2,40 rubli; aby pud spiżu przez to zlanie otrzymanego kosztował 15,94 rubli? (odp. $1\frac{21}{29}$ funtów).

37). Zamówiony dzwon wagi 80 pudów ma być ulany ze spiżu złożonego z cyny po cenie 1,24 rubli funt i miedzi po cenie 40 kop. za funt. Ileż potrzeba wziąść każdego z tych metali aby funt dzwonu kosztował 49,8 kopiejek? (odp. miedzi $61\frac{1}{7}$ a cyny $18\frac{6}{7}$ pudów).

38). Mamy zmięszać trzy gatunki herbaty tak aby funt 8,50 rubli wynosił, pierwszego gatunku funt kosztuje 9 rub., drugiego 7,80 rubli a 3go 6 rubli. Ileż trzeba wziąść z każdego gatunku dla utworzenia żądanéj mięszaniny? (odp. 1go 32, 2go 5 i 3go 5 części).

39). W jakim stosunku należy mięszać 5 gatunków kawy 1éj na 50 kop., 2éj na 28 kop., 3éj na 45 kop., 4téj na 23 kop., 5éj na 18 kop. funt, aby otrzymać kawę po cenie 30 kop. za funt? (odp. 1éj 2 ℔, 2éj 20 ℔, 3éj 19 ℔, 4téj 15 ℔, 5téj 15 ℔).

40). W dzwonie ważącym 88 pudów, którego funt wart 60 kop. ile jest miedzi, cyny i srebra, kiedy funt miedzi wart 40 kop., funt cyny 1,24 ruble, a funt srebra 23 ruble? (odp. Miedzi 86 pudów i $19\frac{273}{293}$ funtów, cyny zaś i srebra po $30\frac{10}{293}$ funtów).

41). Funt spiżu użytego na odlanie armaty ważącéj 88 pudów kosztuje 60 kop.; srebra jest w nim 2 funty, ileż miedzi i cyny, jeżeli funt miedzi 40 a funt cyny 1,24 ruble płacono, funt zaś srebra 23 ruble kosztuje? (odp. miedzi 68 pudów i 13,72 funty a cyny 19 pudow i 24,28 funtów).

42). Mając okowitę 10téj próby i wódkę 4téj próby, ile wziąść trzeba każdéj z nich, aby otrzymać 500 wiader wódki 6téj próby? (odp. 1éj $166\frac{2}{3}$ a 2éj $333\frac{1}{3}$ wiader).

43). Do 400 garncy okowity $11\frac{1}{2}$ próby i tyleż garncy wódki $7\frac{1}{2}$ próby, ile trzeba dolać wody, aby otrzymać wódkę 6téj próby? (odp. $466\frac{2}{3}$ garncy).

44). Do 6 garncy okowity 10 próby, 2 garncy araku $9\frac{1}{2}$ próby i 4 garnce rumu trzymającego $6\frac{3}{4}$ próby; ile wody dolać należy dla otrzymania rumu 8 próby? (odp. $1\frac{1}{13}$ garnca).

45). Pewien mając 5 gatunków tytoniu 1en na 4,30 rubli, 2gi na 390 rub., 3ci na 3,20 rub., 4ty na 3 rub., 5ty na 2,80 rub. funt, utworzył z niego 100 funtów mieszaniny, a sprzedając funt takowéj po 3,50 rubli stracił 12 rubli. Ileż brał tytoniu z każdego gatunku do téj mięszaniny? (odp. 1go $5\frac{25}{31}$ ℔, 2go $30\frac{30}{31}$ ℔, 3go $29\frac{21}{31}$ ℔, 4go $16\frac{24}{31}$ ℔, 5go $16\frac{24}{31}$ ℔).

46). Stopiwszy razem 5 funtów czystego srebra z jednym funtem i 64 zołotnikami miedzi, jakiéj próby otrzymamy srebro? (odp. 72éj).

47). Jeżeli 15 funtów srebra 84téj próby stopimy z 2ma funtami i 40 zołotnikami miedzi, jakiéj próby otrzymamy srebro? (odp. 72éj).

48). Jeżeli stopimy 5 funtów srebra 84téj próby z $3\frac{1}{4}$ funtami srebra 60 próby i $\frac{1}{5}$ funta miedzi, jakiéj próby srebro otrzymamy? (odp. 72éj próby).

49). Do 16 funtów srebra 84téj próby i 10 funtów srebra 66téj próby, ile miedzi dodać potrzeba, aby otrzymać srebro 72éj próby? (odp. $1\frac{5}{6}$ funta).

CZĘŚĆ DRUGA.

Rozdział I.

O potęgach i pierwiastkach.

§ 95.

Potęgą jakiéj liczby zowiemy iloczyn powstały z pomnożenia téj liczby przez siebie samą pewną liczbę razy. I tak:

Pierwszą potęgą jakiejkolwiek liczby jest taż sama liczba; np. pierwszą potęgą 3ch jest 3.

Drugą potęgą liczby jest iloczyn z tejże liczby przez siebie samą; np. drugą potęgą, czyli kwadratem 3ch jest $3 \times 3 = 9$

Trzecią potęgą czyli sześcianem liczby jest iloczyn z tejże saméj liczby wziętéj za czynnik trzy razy. I tak trzecią potęgą czyli sześcianem 3ch jest $3 \times 3 \times 3 = 27$.

Czwartą potęgą liczby jest iloczyn z tejże liczby wziętéj cztery razy za czynnik, a więc czwartą potęgą 3ch jest $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$

I tak następnie.

§ 96.

Wielkość potęgi wskazuje mniejsza cyfra po prawéj stronie, nieco wyżéj nad liczbą potęgowaną umieszczona. Ta cyfra oznaczająca potęgę nazywa się *wykładnikiem potęgi.* I tak dla oznaczenia drugiéj potęgi 9ciu, piszemy 9^2 wymawiając 9 do drugiéj potęgi albo 9 kwadrat. Trzecią potęgę 9ciu oznaczamy przez 9^3 a wymawiamy 9 do trzeciéj potęgi albo 9 sześcian i t. d.

Liczba przy któréj nie umieszczono wykładnika oznacza potęgę pierwszą.

§ 97.

Liczba z któréj powstaje potęga nazywa się pierwiastkiem potęgi. Znakiem pierwiastku jest $\sqrt{}$, (początkowa litera łacińskiego wyrazu *radix*). W rozwartości tego znaku pisze się wykładnik pierwiastku. I tak $\sqrt[3]{}$, znaczy pierwiastek trzeciéj potęgi, to jest że liczba pod tym znakiem będąca powstała ze swego pierwiastku trzy razy za czynnik użytego np. $\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3\times3\times3}=3$;

Znak $\sqrt{}$ pozostawiony bez wykładnika oznacza pierwiastek drugiéj potęgi czyli kwadratowy, to jest że liczba pod tym znakiem będąca powstała ze swego pierwiastku wziętego 2 razy za czynnik, np. $\sqrt{9}=\sqrt{3\times3}=3$.

Pierwiastek trzeciéj potęgi zowią zwykle pierwiastkiem sześciennym.

Z tego pojmujemy że $3=\sqrt{9}=\sqrt[3]{27}$ i t. d.

Rozdział II.

O podnoszeniu do kwadratu.

§ 98.

Wiadomo nam już że kwadrat liczby jakiéj jest to iloczyn z tejże liczby przez siebie samą. Dla otrzymania więc kwadratu z jakiéj liczby dość jest tęż liczbę pomnożyć przez siebie samą.

Zatém kwadraty pierwszych dziesięciu liczb są następujące:

liczby	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,
ich kwadraty	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81,	100.

Liczby pierwszego szeregu są pierwiastkami kwadratowemi liczb drugiego szeregu.

§ 99.

Żeby zaś z kwadratów liczb wielocyfrowych powrócić do ich pierwiastków, czyli jak się zwykle mówi, z kwadratu wyciągnąć pierwiastek kwadratowy, trzeba koniecznie poznać skład kwadratu.

Dojdźmy przeto z czego się składa kwadrat summy dwóch liczb $7+5$.

Ponieważ kwadrat liczby powstaje z pomnożenia téj liczby przez siebie samą, zatém

$$(7+5)^2=(7+5)\times(7+5)$$

wykonajmy wskazane mnożenie

$$\begin{array}{r} 7+5 \\ 7+5 \\ \hline 7\times5+5\times5 \\ 7\times7+5\times7. \\ \hline 7\times7+2.7\times5+5\times5 \end{array}$$

a że $7\times7=7^2$ także $5\times5=5^2$ przeto w poprzednio otrzymany iloczyn wstawiwszy te ważności 7^2 i 5^2 zamiast 7×7 i 5×5 będzie:

$$7^2+2.7\times5+5^2.$$

to znaczy że $(7+5)^2=7^2+2$ razy $7\times5+5^2$.

§ 100.

Przypatrzywszy się temu ostatniemu wypadkowi widzimy że: *kwadrat summy dwóch ilości składa się z trzech części* 1) *z kwadratu części pierwszéj* 2) z podwójnego iloczynu części pierwszéj przez drugą i 3) z kwadratu części drugiéj.

§ 101.

Ponieważ każdą liczbę dwucyfrową, to jest złożoną z dziesiątków i jedności, jako summę dwóch liczb uważać można, z których jednę wyrażać będą dziesiątki a drugą jedności, zatém i kwadrat takiéj liczby zawierać w sobie będzie też same trzy części składowe co kwadrat summy dwóch liczb; to jest 1) *kwadrat z dziesiątków* 2) *podwójny iloczyn dziesiątków przez jedności* i 3) *kwadrat z jedności* np. $35^2 = (30+5)^2 = 30^2 + 2.30 \times 5 + 5^2$.

§ 102.

Oznaczywszy dziesiątki przez a, a jedności przez b otrzymamy ogólną formułę na kwadrat:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2a \times b + b^2.$$

§ 103.

W powyższéj formule ponieważ $b^2 = b \times b$ zatém

$$(a+b)^2 = a^2 + 2\ a \times b + b \times b.$$

Tu widzimy że b mnoży raz $2a$, drugi raz b, czyli że b mnoży $2\ a+b$, a więc zamiast wyrażenia $2\ a \times b + b \times b$ mogę napisać $(2.\ a+b) \times b$, co się nazywa *wyrzucić wspólny czynnik za nawias*. Wstawiwszy to wyrażenie $(2a+b) \times b$ w skład kwadratu, otrzymamy że:

$$(a+b)^2 = a^2 + (2\ a+b) \times\ b$$

a więc $35^2 = 30^2 + (2.30+5) \times 5$.

Zamiast więc poprzednich trzech części kwadratu można wziąść dwie następne: 1) kwadrat dziesiątków, 2) iloczyn z podwojonych dziesiątków i jedności przez jedności.

§ 104.

Każdą liczbę wielocyfrową uważać możemy jako złożoną z dziesiątków i jedności, albowiem dziesiątkami są wszystkie jéj cyfry po lewéj stronie jedności położone; przeto i skład kwadratu liczby wielocyfrowéj jest tenże sam co i dwucyfrowéj.

§ 105.

Weźmy dla przykładu liczbę 524. Liczbę tę rozłożyć można na 520 i 4 zatém:

$$524^2=520^2+(2.520+4)\times4=274576$$

Ponieważ 520 rozłożyć się również daje na 500 i 20 przeto:

$$520^2=500^2+(2.500+20)\times20.$$

Wstawmy tę ważność za 520^2 w skład kwadratu 524, a otrzymamy że:

$$524^2=500^2+(2.500+20)\times20+(2.520+4)\times4=274576.$$

§ 106.

Podobnież postępując, dojdziemy, że

$$\begin{aligned}7894^2=7000^2&+(2.7000+800)\times800\ +\\&+(2.7800+\ 90)\times90\ +\\&+(2.7890+\ 4)\times4.\end{aligned}$$

§ 107.

Rozwijając kwadraty wielocyfrowe zwykle opuszczamy zera na końcu składowych części stojące; przy podpisywaniu przeto iloczynów cząstkowych jednych pod drugiemi, należy dobrze uważać na porządek cyfr, aby się nie omylić co do miejsca jakie zajmować powinny.

§ 108.

1. **Przykład.** Podnieść do kwadratu liczbę 56.

$$56^2=50^2+(2.50+6)\times6.$$

$$\begin{array}{lrr} & 50^2=5 & .\ 5=25\ .\ . \\ (2.50+6)\times6 & =106 & .\ 6=\ 636 \\ \hline \text{a więc } 56^2= & .\ \ .\ \ . & 3136. \end{array}$$

Objaśnienie.

Kwadrat z dziesiątków wydaje sta, przeto kwadrat z 5 dziesiątków wyda 25 set. Dwie kropki po 25 oznaczają opuszczone zera. Iloczyn z podwójnych dziesiątków przez jedności wydaje jedności, ztąd $106 \times 6 = 636$ jednościom.

§ 109.

2. **Przykład.** Podnieść do kwadratu liczbę 78094.

78094^2		
7	. 7 =	49 . .
148	. 8 =	1184 . .
1560	. 0 =	. . . .
15609	. 9 =	140481 . .
156184	. 4 =	624736
		60|98|67|28|36

Objaśnienie.

Pierwszy iloczyn 49 oznacza 49 set milionów, gdyż kwadrat z 7 dziesiątek tysięcy daje na wypadek sta milionów. Drugi iloczyn 1184 stanowią miliony zatém cyfry o dwa miejsca niższe co do porządku od set milionów, ten bowiem iloczyn powstał z pomnożenia 148 tysięcy przez 8 tysięcy.

Trzeci iloczyn dziesiątki tysięcy powstał z pomnożenia 1560 set przez 0 set, miejsce więc tego iloczynu jest zastąpione zerami. Czwarty iloczyn 140481 wyraża sta, to jest liczby o dwa miejsca niższe od dziesiątków tysięcy; ten bowiem iloczyn powstał z pomnożenia 15609 dziesiątków przez 9 dziesiątków. Nakoniec piąty iloczyn 624736 zawiera jedności, jako wypadek z pomnożenia 156184 jednostek przez 4 jednostki. Widzimy tu że w pierwszym przedziale otrzymanego kwadratu, to jest w 60 mieści się kwadrat pierwszéj cyfry pierwiastku; w pierwszych zaś czterech cyfrach 6098 tegoż, mieści się kwadrat dwóch pierwszych cyfr pierwiastku, to jest $78^2 = 6084$. Także i w trzech pierwszych przedziałach 609867 znajduje się kwadrat z trzech pierwszych cyfr pierwiastku, to jest $780^2=608400$ i t. d. Różnice tu zachodzące powstają z tego, że następne części kwadratu zawierają w sobie cyfry tego samego porządku co poprzednie.

§ 110.

Uważamy nadto że za przybyciem każdéj nowéj cyfry do pierwiastku przybywa ich dwie do kwadratu, zatém kwadrat obejmuje dwa razy tyle cyfr lub o jedną mniéj, niż liczba z któréj powstał; o jedną zaś mniéj dla tego że kwadrat pierwszéj cyfry jeżeli nią jest 1, 2 lub 3 może być jednocyfrowy. To się jeszcze w ten sposób daje objaśnić: ponieważ kwadrat 10 jest 100 a $100^2=10000$, $1000^2=1000000$ i t. d. przeto kwadrat liczby dwucyfrowéj jako większéj od 10 a mniejszéj od 100 może być 3 lub 4 cyfrowy; kwadrat zaś liczby trzech cyfrowéj jako większéj od 100 a mniejszéj od 1000 może być pięcio lub sześciocyfrowy i tak następnie.

§ 111.

Z tych przeto uwag wynika, że kwadrat każdéj liczby zawiera w sobie dwa razy tyle cyfr lub o jedną mniéj niż ich było w pierwiastku.

§ 112.

Dojdźmy teraz różnicy pomiędzy kwadratami dwóch liczb różniących się od siebie o jedność, np. różnicy między 7^2 i 8^2.

$$8^2=(7+1)^2$$

zatém

$$8^2=7^2+(2.7+1)\times 1$$

a że $(2.7+1)\times 1=2.7+1$

przeto $8^2=7^2+2.7+1$

a więc różnicę między 8^2 i 7^2 stanowi $2.7+1$. To jest że różnica między kwadratami dwóch liczb różniących się od siebie o jedność, równa się dwa razy wziętéj liczbie mniejszéj więcéj jedność.

§ 113.

Mając przeto kwadrat jednéj liczby łatwo znajdziemy kwadrat liczby następnéj. Żeby mieć np. kwadrat 11, dość jest do 10^2 czyli 100 dodać $2.10+1=21$ co da $100+21=121$.

§ 114.

Ułamki dziesiętne podnosimy do kwadratu tak jak liczby całkowite to jest bez względu na przecinki, tylko w otrzymanym kwadracie odcinamy 2 razy tyle cyfr na dziesiętne ile ich było w pierwiastku.

Gdyż mnożąc ułamek dziesiętny przez siebie musimy odciąć w iloczynie tyle cyfr na dziesiętne, ile ich jest w obu czynnikach; a że w tym razie każdy z czynników ma jednakową ilość cyfr dziesiętnych, przeto odcinamy w kwadracie dwa razy tyle cyfr na dziesiętne ile ich było w jednym czynniku, czyli pierwiastku.

§ 115.

3. **Przykład**. *Podnieść do kwadratu ułamek dziesiętny* 2,504.

Rozwiązanie.

Postępując jak wyżéj otrzymuję na kwadrat liczby całkowitéj 2504, liczbę 6270016, a że w danéj liczbie były trzy cyfry dziesiętne, to w kwadracie musi ich być sześć, a więc

$$2,504^2=6,270016.$$

§ 116.

4. **Przykład**. *Podnieść do kwadratu ułamek dziesiętny* 0,00036.

Rozwiązanie.

$36^2 = 1296$

zatém $0{,}00036^2 = 0{,}0000001296$.

§ 117.

Kwadrat ułamku zwyczajnego równa się kwadratowi z licznika podzielonemu przez kwadrat z mianownika.

Mnożąc bowiem dla otrzymania kwadratu ułamek dany przez siebie samego, musimy dla otrzymania iloczynu, mnożyć licznik przez licznik a mianownik przez mianownik np.

$$\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5 \times 5}{6 \times 6} = \frac{5^2}{6^2} = \frac{25}{36}$$

$$\text{także} \quad \left(2\tfrac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{11}{4}\right)^2 = \frac{11^2}{4^2} = \frac{121}{16} = 7\tfrac{9}{16}.$$

§ 118.

Podnosząc do kwadratu ułamki wielocyfrowe lepiéj jest ułamek zamienić na dziesiętny, i w téj dopiéro postaci podnieść go do kwadratu.

Rozdział III.

O wyciąganiu pierwiastku kwadratowego.

§ 119.

Wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z jakiéj liczby, znaczy wynaleźć liczbę, któraby podniesiona do kwadratu wydała liczbę daną.

§ 120.

Jeżeli liczba z któréj pierwiastek wyciągnąć chcemy, jest mniejsza od 100, to znając kwadraty pierwszych dziewięciu liczb zaraz otrzymamy jéj pierwiastek, lub tenże najbliższego mieszczącego się w niéj kwadratu, np. $\sqrt{64}=8$; najbliższy zaś kwadrat mieszczący się w 45iu jest 36 a pierwiastek jego 6, i pozostaje reszta 9.

§ 121.

Żeby zaś poznać sposoby wyciągania pierwiastku kwadratowego dwu lub więcéj cyfrowego, rozwiążmy następujące zadania:

1. **Przykład.** *Wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z liczby* 4587.

$$
\begin{array}{rll}
 & \sqrt{45.87}=67 & \\
a^2= & \underline{36} & 6^2=36 \\
 & 98.7 & \\
(2.a+b)b= & \underline{889} & 2.6=120+7=127.7=889. \\
 & 98 &
\end{array}
$$

Ponieważ liczba dana jest więcéj niż dwucyfrowa przeto jest kwadratem liczby więcéj niż jednocyfrowéj; pierwiastek jéj przeto składać się musi z jedności i dziesiątków. Wiadomo nam zaś, że kwadrat taki składa się z dwóch części, to jest: 1) kwadratu dziesiątków i 2) z iloczynu podwojonych dziesiątków więcéj jedności, przez jedności. Pierwsza część kwadratu z dziesiątków jako sta wyrażający, zawierać się tylko może w 45 stach danéj liczby; oddzielam więc kropką 45 od pozostałéj części 87 tego kwadratu. Największy kwadrat jaki się mieści w 45 jest 36, a pierwiastek jego 6; pierwiastek 7 byłby za wielkim, gdyż kwadrat jego 49 jest większy od 45. Zatém pierwiastkiem szukanym jest 60, lub liczba większa od 60, ale mniéjsza od 70; jedném słowem cyfrą dziesiątek szukanego pierwiastku jest 6.

Znając już dziesiątki pierwiastku, jeżeli od danéj liczby odejmiemy kwadrat tych dziesiątek 3600, otrzymamy na resztę

987; w reszcie téj mieścić się musi pozostała część kwadratu to jest $(2.a+b)\ b$ czyli iloczyn z podwojonych dziesiątków i jedności, przez jedności. Tę część kwadratu na dwie rozłożyć można, to jest na $2a\times b+b^2$, czyli na iloczyn z podwojonych dziesiątków przez jedności i na kwadrat z jedności; a że iloczyn z podwojonych dziesiątków przez jedności, czyli $2a\times b$, najmniéj z dziesiątków składać się może, przeto iloczyn ten w samych tylko 98 dziesiątkach liczby 987 zawierać się musi, oddzielam więc kropką ostatnią cyfrę 7 i dzielę 98 czyli $2a\times b$ przez $2a$, to jest przez podwojone dziesiątki 6, czyli przez $2\times 6=12$, a na b czyli na jedności pierwiastku a otrzymamy 7.

Ażeby się przekonać czy wynaleziona na jedności cyfra 7 jest dokładną, dodaję ją do podwojonych dziesiątek czyli 120, przez co otrzymam $2a+b=127$. Te 127 czyli summę podwojonych dziesiątków i jedności mnożę przez jedności, to jest przez 7, a otrzymam całą drugą część kwadratu, to jest $(2.a+b)b$, czyli podwojony iloczyn dziesiątków więcéj jedności przez jedności, a tym jest liczba 889. Iloczyn ten 889 odejmuję od 987, otrzymam na resztę 98. Gdybym na jednostki spróbował wziąść 8, wtedy iloczyn 1024 w sposób powyższy otrzymany, jako większy od 887 nie mógłby być odjętym od téj liczby. To mię przekonywa że pierwiastkiem największego kwadratu zawartego w liczbie 4587 jest 67 z resztą 98.

§ 122.

2. **Przykład**. *Wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z liczby* 458732.

$$
\begin{array}{rl}
\sqrt{458732} = & 677 \\
36 & 6^2 \\
\hline
98.7 & \\
889 & 2.6=12,(120+7)7=889 \\
\hline
983.2 & \\
9429 & 2.67=134,(1340+7)7=9429. \\
\hline
403 &
\end{array}
$$

Tu rozumujemy jak wyżéj. Ponieważ liczba dana jest więcéj niż dwucyfrowa, przeto pierwiastek jéj jest więcéj niż jednocyfrowy, a zatém składa się z jedności i dziesiątków, kwadrat zaś dziesiątków jako najmniéj sta wyrażać mogący zawierać się będzie tylko w stach téj liczby to jest w 4587, oddzielam więc kropką ostatnie dwie cyfry 32, jako kwadratu dziesiątków nie obejmujące.

Idzie więc teraz oto, aby wyciągnąć pierwiastek z największego kwadratu zawartego w liczbie 4587. Pierwiastek téj liczby jako więcéj niż dwucyfrowéj, musi być więcéj niż jednocyfrowy, a zatém składa się z pewnéj liczby jedności i pewnéj liczby dziesiątków. Otrzymamy dziesiątki pierwiastku odejmując największy kwadrat zawarty w 45 stach, od tychże 45. Powtarzając rozumowanie poprzedniego paragrafu, znajdziemy że 67 jest pierwiastkiem największego kwadratu jaki w sobie obejmuje liczba 4587, przytém 98 reszty nam pozostanie. A zatém pierwiastek liczby 458732 składa się z 67 dziesiątków i pewnéj liczby jedności, którą mam jeszcze wynaleźć.

Jeżeli od liczby danéj odejmiemy kwadrat 67 dziesiątków pozostanie nam jeszeze 98 set, a z dołączonemi 32 jednościami dadzą nam liczbę 9832, w któréj musi się zawierać podwójny iloczyn z dziesiątków przez jedności i kwadrat z jedności; podwójny iloczyn z dziesiątków przez jedności jako najmniéj dzięsiątki wyrażający może się tylko mieści w 983 dziesiątkach téj reszty, oddzieliwszy więc kropką te dziesiątki od ostatniéj cyfry 2, dzielę je przez podwojone 67 dziesiątków, to jest przez 134 co mi da na iloraz 7. Próbuję te 7 dodając je do 134 dziesiątków, czyli pisząc je obok 134 i mnożąc te 1347 przez 7; ponieważ iloczyn ztąd otrzymany 9429 jest mniejszy od 9832 zatém cyfra 7 jest dobrą. Pierwiastkiem przeto największego kwadratu zawartego w liczbie 458732 jest 677 z resztą 403.

W ten sam sposób rozumuje się i działa gdy liczba więcéj niż trzy cyfry w pierwiastku mieć będzie.

§ 123.

3. **Przykład.** Wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z liczby 23609881.

$$\sqrt{23.60.98.81}=4859$$

16	$4^2=16$
76.0	
70 4	$(2.40+8)8=88\times8=704$
56.98	
48 25	$(2.48+5)5=965\times5=4825$
8738.1	
8738 1	$(2.485+9)9=9709\times9=87381$
0	

Liczba dana jest więcéj niż dwucyfrowa przeto pierwiastek jéj z dziesiątków i jedności składać się będzie.

Kwadrat z dziesiątków tylko w liczbie 236098 set zawierać się może; oddzielam więc kropką ostatnie dwie cyfry 81, jako jedności tylko pierwiastku obejmować mogące. Mam zatém wyciągnąć pierwiastek z największego kwadratu zawartego w liczbie 236098.

Lecz ta liczba 236098 jest także więcéj niż dwucyfrowa przeto i jéj pierwiastek z dziesiątków i jedności składać się może; kwadrat zaś z dziesiątków tylko w 2360 stach téj liczby może być zawarty, oddzielam więc kropką dwie ostatnie jéj cyfry 98, jako jedności tylko pierwiastku téj liczby obejmować mogące. Mam teraz wyciągnąć pierwiastek tylko z liczby 2360.

Widząc zaś że i ta liczba jest więcéj niż dwucyfrowa wnoszę że i pierwiastek jéj z dziesiątków i jedności składać się musi; kwadrat zaś z dziesiątków tylko w 23 stach téj liczby zawierać się może; oddzielam więc kropką dwie ostatnie jéj cyfry 60, jako dziesiątków pierwiastku obejmować nie mogące.

Wyciągając pierwiastek z 23, otrzymam 4 na pierwszą liczbę pierwiastku. Do reszty 7, pozostałéj po odjęciu $4^3=16$ od 23, składam następny rząd 60, co mi da 760, oddzielam kropką ostatnią cyfrę. Podwajam otrzymane 4 dziesiątki pierwiastku, co mi daje 8, dzielę przez nie 76; iloraz ztąd otrzymamy 8 piszę obok podwojonych dziesiątków 8 i sprawdzam tę nową cyfrę pierwiastku mnożąc 88 przez 8, co da iloczyn 704; te 704 odjęte od 760, dadzą na resztę 56, do których spuszczam następny rząd 98.

Postępując ciągle jak wyżéj, otrzymuję na pierwiastek liczbę 4859 bez reszty.

§ 124.

Działanie to przedstawić można krócéj, w ten sposób:

$$
\begin{array}{ll}
\sqrt{23.60.98.81}=4859 & \\
\quad 7\,60 & 88 \\
\quad\quad 5698 & 965 \\
\quad\quad\quad 87381 & 9709 \\
\quad\quad\quad\quad 0 &
\end{array}
$$

Wypisuje się tylko mnożne wprost odpowiednich dzielnych; prócz tego opuszczają się iloczyny cząstkowe.

§ 125.

Uwaga. Liczby wypadłe z dzielenia wtedy będą dobremi wyrazami pierwiastku:

1) Kiedy odejmowanie daje się wykonać; co dowodzi że nie są za wielkie.

2) Kiedy reszta otrzymana jest mniejsza od podwojonego już znalezionego pierwiastku powiększonego o 1, co pokazuje że ta cyfra nie jest za małą. Albowiem (§ 112) różnica między kwadratami dwóch liczb różniących się od siebie o jedność, równa się dwa razy wziętéj liczbie mniejszéj powiększonéj jednością.

Z tych ostatnich paragrafów takie na wyciąganie pierwiastków kwadratowych wyprowadzamy prawidło:

§ 126.

Aby wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z liczby całkowitéj, dzieli się tę całkowitę na rzędy dwucyfrowe od prawéj ku lewéj stronie. Liczba rzędów jest liczbą cyfr pierwiastku szukanego.

Potém zaczynając od lewéj strony odejmujemy największy kwadrat jaki obejmować może pierwszy przedział do cyfr tegoż przedziału, a pierwiastek tego kwadratu piszemy na prawéj stronie danéj liczby przy znaku równości.

Do reszty z powyższego odjęcia wypadłéj dopisujemy rząd następny, i oddzielamy kropką ostatnią cyfrę. Podwajamy otrzymany pierwiastek i napisawszy go wprost liczby poprzedniéj dzielimy lewą część kropką oddzieloną, przez podwojone dziesiątki pierwiastku. Iloraz z tego otrzymany piszemy z prawéj strony liczby pierwiastkowéj i obok podwojonych dziesiątków. Tak utworzoną liczbę mnożymy przez otrzymany drugi wyraz pierwiastku, a iloczyn jaki ztąd powstanie odejmujemy od liczby z reszty poprzedzającéj i spuszczonego rzędu uformowanéj.

Do reszty z tego odjęcia otrzymanéj, spuszcza się następny rząd, co daje liczbę z którą się postępuje jak poprzednio. Działanie to odbywa się dotąd, póki wszystkie rzędy nie będą spuszczone.

Jeżeli na końcu żadnéj reszty nie otrzymamy, to znaczy że liczba dana jest zupełnym kwadratem; jeżeli zaś jest reszta, będzie ona nadmiarem liczby całéj napisanéj w pierwiastku.

Na zasadzie tego prawidła rozwiążmy zadania następujące, przedstawiając działania w jak najkrótszym sposobie.

§ 127.

4. **Przykład**. *Wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z liczby* 2287679245496I

$$\sqrt{22.87.67.92.45.49.61} = 4782969$$

68.7	87
786.7	948
2839.2	9562
92684.5	95649
660044.9	956586
86093361	9565929

" " "

§ 128.

5. **Przykład**. *Wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z liczby* 532378109

$$\sqrt{5.32.37.81.09} = 23073$$

132	43
3378.1	4607
153209	46143
14780	

W tym przykładzie po dopisaniu trzeciego rzędu 37 obok reszty drugiéj 3, nie można było podzielić 33 dziesiątków przez podwójny pierwiastek już znaleziony, to jest przez 46, na iloraz przeto stanowiący trzecią cyfrę pierwiastku napisaliśmy 0, i spuściwszy rząd następny, odbywamy działanie jak wyżéj.

§ 129.

Przypatrzywszy się kwadratom liczb całkowitych od 1 do 10, widzimy, że między jedno i dwucyfrowemi liczbami 9 jest tylko takich które są zupełnemi kwadratami innych liczb całkowitych. Pozostałych zaś kwadratami są liczby całkowite z ułamkami.

§ 130.

Często z samego widoku poznać można, która z liczb wielocyfrowych nie jest zupełnym kwadratem, główniejsze pod tym względem poznaki są następujące.

1) *Gdy liczba będąc parzystą nie daje się podzielić przez* 4. Wiadomo bowiem, że wszelka parzysta liczba jest przez 2 podzieloną, przeto kwadrat jéj powinien się dzielić przez $2^2=4$ bez reszty.

2) *Gdy będąc nieparzystą, zmniejszona o jedność nie dzieli się przez* 4. Różnica bowiem między kwadratami liczb różniących się od siebie o jedność równa się dwa razy wziętéj liczbie mniejszéj więcéj jedność. Mniejsza zaś podwojona, jako zawsze parzysta, dzieli się przez 4.

3) *Gdy będąc przez 3 lub 5 podzielną nie daje się podzielić przez 9 lub 25.* I tak liczba $324=18^2$ daje się dzielić przez 3 i $9=3^2$. Podobnież $1025=45^2$ jest podzielną tak przez 5 jakotéż i $25=5^2$. Liczby zaś 363 i 465 jakkolwiek przez 3 i 5 podzielne nie są zupełnemi kwadratami, gdyż nie można ich dzielić przez 9 i 25.

4) *Jeżeli liczba kończy się na 5 a niema 2 za przedostatnią cyfrę.* Wiadomo bowiem, że dwie ostatnie cyfry zawierają kwadrat z jedności, czyli jak tu kwadrat z 5, podwójny zaś iloczyn z dziesiątków przez jedności jako tylko z set złożony, nie powiększy liczby dziesiątków kwadratu. Dla tego też liczba 565 nie jest zupełnym kwadratem.

5) *Gdy się kończy na nieparzystą liczbę zer lub cyfr dziesiętnych.* Każda bowiem liczba kończąca się zerami, albo dziesiętnemi cyframi, ma w kwadracie podwójną ich ilość. Z tego powodu 5000 ani 3,405 nie są zupełnemi kwadratami.

6) *Gdy się kończy na 2, 3, 7, 8.* Albowiem znane kwadraty pierwszych dziesięciu cyfr kończą się na 1, 4, 5, 6, 9, 0.

§ 131.

Gdy liczba całkowita nie jest zupełnym kwadratem to niema takiéj liczby ułamkowéj, któraby podniesiona do kwadratu wydała téż samą liczbę.

Dla objaśnienia tego weźmiemy liczbę 28, nie będącą zupełnym kwadratem. Ta liczba zawiera się między dwoma kwadratami zupełnemi 25 i 36; a takiéj całkowitéj liczby niema, któraby podniesiona do kwadratu wydała liczbę 28; liczba 5 podniesiona do kwadratu jest zamała, a liczba 6 zawielka. Ale czy między 5 i 6 nie istnieje jaka liczba ułamkowa, któréjby kwadrat jak raz 28 stanowił? Przypuszczam że taką jest $5\frac{4}{7}$; ułamek $\frac{4}{7}$ nie daje się skrócić. Włączmy całość w ułamek a będzie $\frac{39}{7}$, ułamek ten także skrócić się nie da, gdyż po wyciągnięciu z niego całości otrzymamy napowrót $5\frac{4}{7}$. Liczba ta podniesiona do kwadratu da $(\frac{39}{7})^2$, wyrażenie to będzie również ułamkowe, kiedy bowiem wyrazy 39 i 7 były względem siebie pierwszemi liczbami, to i kwadraty z nich powstałe także liczbami pierwszemi względem siebie być muszą. Otrzymany przeto wypadek jako ułamkowy nie może być równy całkowitéj 28. Żadne więc wyrażenie ułamkowe nie może być zupełnym pierwiastkiem liczby całkowitéj nie będącéj zupełnym kwadratem.

§ 132.

Pierwiastki kwadratów niezupełnych nazywają się *niewspółmiernemi.* Można jednak otrzymać je tak zbliżone do prawdziwych, ile tego ścisłość rachunku wymaga. Stopień przybliżenia pierwiastku oznacza się zwykle w ułamku dziesiętnym.

§ 133.

Chcąc np. otrzymać pierwiastek przybliżony o $\frac{1}{100}$, trzeba do liczby, z któréj pierwiastek wyciągać zamierzamy, dodać dwie pary zer, co znaczy, żeśmy tę liczbę przez 10000 pomnożyli; pierwiastek zaś przez to stanie się 100 razy większym, aby go więc rzeczywistym zrobić, dzielimy go przez 100, to jest odcinamy dwie jego cyfry z prawéj strony.

§ 134.

6. **Przykład**. *Z liczby 87567 wyciągnąć pierwiastek kwadratowy, przybliżony mniéj niż o* $\frac{1}{100}$.

$$\sqrt{8.75.67.00.00} = 295,91$$

4 75	49
34 67	585
54200	5909
101900	59181
42719	

Przez dodanie 4ch zer do kwadratu powiększyliśmy go 10000 razy, zatém pierwiastek 29591 jest 100 razy za wielki, należy go więc 100 razy zmniejszyć, co się dokona przez odcięcie w nim dwóch cyfr, to jest 91 na dziesiętne.

Aby zaś z danéj liczby wyciągnąć pierwiastek przybliżony o $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$ i t. d. mnożymy tę liczbę przez kwadrat z 1000 lub 10000, to jest dodajemy do niéj w pierwszym razie 6 a w drugim 8 zer, po wyprowadzeniu zaś pierwiastku odcinamy w nim w pierwszym razie 3 a w drugim 4 cyfry na dziesiętne.

§135.

W ogólności przeto: *Wyciąganie pierwiastku kwadratowego przybliżonego polega na tém, że liczbę daną mnożymy i dzielimy przez kwadrat z mianownika ułamku wyrażającego przybliżenie; to jest: dopisując do liczby danéj dwa razy tyle zer co ma ten ułamek i dając jéj za mianownik jedność z taką samą ilością zer ileśmy ich do liczby dopisali. Potém wyciągamy pierwiastek osobno z licznika i z mianownika.*

§ 136.

7. **Przykład**. *Wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z 35 przybliżony o $\frac{1}{1000}$ prawie.*

$$\text{Kiedy } 35 = \frac{35 \times 1000^2}{1000^2} = \frac{35 \times 1000000}{1000000} = \frac{35000000}{1000000}$$

$$\text{to } \sqrt{35} = \sqrt{\frac{35000000}{1000000}} = \frac{\sqrt{35000000}}{1000} = \frac{5916}{1000} = 5{,}916.$$

Sposób ten przybliżenia zastosować się daje i wtenczas, gdy stopień przybliżenia pierwiastku dany jest w ułamku zwyczajnym.

§ 137.

8. **Przykład**. *Wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z 28 przybliżony mniéj niż na $\frac{1}{12}$*

$$\sqrt{28} = \sqrt{\frac{28 \times 12^2}{12^2}} = \frac{\sqrt{28 \times 12^2}}{12} = \frac{\sqrt{4032}}{12} = \frac{63}{12}$$

z przybliżeniem mniéj niż na $\frac{1}{12}$; albowiem wartość pierwiastku zawiera się między $\frac{63}{12}$ a $\frac{64}{12}$, ułamki te różnią się od siebie o $\frac{1}{12}$, a pierwiastek liczby 28 mniéj się od nich różni, niż te ułamki między sobą.

Wyciąganie pierwiastku kwadratowego z ułamków zwyczajnych.

§ 138.

Jeżeli oba wyrazy ułamku są zupełnemi kwadratami, otrzymujemy pierwiastek ułamku, wyciągając go z obu jego wyrazów. I tak pierwiastek kwadratowy ułamku $\frac{25}{49}$ jest $\frac{5}{7}$.

§ 139.

Kiedy tylko mianownik ułamku jest zupełnym kwadratem, to wyciągnąwszy pierwiastek największego kradratu zawartego w liczniku znajdziemy dwa ułamki, których kwadraty będą w sobie zawierać dany ułamek. Mając naprzykład wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z ułamku $\frac{28}{49}$; ponieważ licznik jego zawiera się między 5^2 i 6^2, przeto kwadraty ułamków $\frac{5}{7}$ i $\frac{6}{8}$ obejmują ułamek dany $\frac{28}{49}$.

§ 140.

Jeżeli zaś mianownik ułamku nie jest zupełnym kwadratem, to można go nim zrobić mnożąc oba wyrazy ułamku przez mianownik.

np. $\sqrt{\frac{3}{7}}=\sqrt{\frac{3\times7}{7\times7}}=\sqrt{\frac{21}{49}}=$między $\frac{4}{7}$ a $\frac{5}{7}$

Pierwiastek zatém ułamku $\frac{3}{7}$ zawarty jest między $\frac{4}{7}$ i $\frac{5}{7}$.

§ 141.

Jeżeli zaś mianownik nie będąc zupełnym kwadratem, daje się jednak rozłożyć na dwa czynniki, z których jeden jest zupełnym kwadratem, wtedy, dla skrócenia roboty mnożą się oba wyrazy ułamku przez ten czynnik, przez co mianownik staje się zupełnym kwadratem.

np. $\sqrt{\frac{4}{27}}=\sqrt{\frac{4}{9\times3}}=\sqrt{\frac{4\times3}{9\times3^2}}=\sqrt{\frac{12}{3^2\times3^2}}=\frac{3{,}464}{9}=0{,}384.$

§ 142.

Mając wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z całości połączonéj z ułamkiem, należy przedewszystkiém włączyć całość w ułamek.

§ 143.

Najlepiéj zaś ułamki zwyczajne, z których mamy wyciągnąć pierwiastek, zamieniać na dziesiętne i z tych dopiéro podanym sposobem pierwiastki otrzymywać.

Wyciąganie pierwiastku kwadratowego z ułamków dziesiętnych.

§ 144.

9. **Przykład**. Wyciągnąć pierwiastek z liczby dziesiętnéj 45,8732.

Liczba ta równa się ułamkowi zwyczajnemu $\frac{458732}{10000}$ którego mianownik jest zupełnym kwadratem liczby 100. Wyciągając pierwiastek z największego kwadratu zawartego w liczbie 458732 otrzymamy 677; kiedy więc licznik zawarty iest między kwadratami liczb 677 i 678, to ułamek dany zawierać się będzie między kwadratami dwóch ułamków $\frac{677}{100}$ i $\frac{678}{100}$, każdy przeto z dwóch ułamków 6,77 i 6,78 jest pierwiastkiem liczby 45,8732 przybliżonym mniéj niż o $\frac{1}{100}$.

§ 145.

Kiedy mianownik dziesiętnego ułamku, nie jest zupełnym kwadratem, to jest kiedy ułamek niema parzystéj liczby cyfr dziesiętnych, w takim razie dodaje mu się z prawéj strony jedno zero. Gdyby np. chciano wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z liczby 45,873; dodaję zero i wyciągam pierwiastek z liczby 45,8730; co mi da również 6,77 z przybliżeniem o $\frac{1}{100}$.

Z tego wyprowadzamy następujące prawidło:

*

Żeby wyciągnąć pierwiastek kmadratowy z liczby dziesiętnéj mającéj parzystą liczbę cyfr dziesiętnych, znosi się przecinek, i wyciąga się pierwiastek tak jak z liczby całkowitéj; w otrzymanym dopiéro pierwiastku odcina się na dziesiętne połowę liczby cyfr, jaka była w kwadracie.

§ 146.

Dodamy tu jeszcze sposób wyciągania pierwiastku z wielkiéj liczby, przybliżonego mniéj niż o jedność.

10. **Przykład.** *Wyciągnąć pierwiastek kwadratowy przybliżony mniéj niż o jedność z liczby* 8649928056778.

$$\sqrt{8.64.99.28.05.67,78} = 2941076$$

```
4 64                    49
  22 99                 584
     63 28              5881
       4 47 05 67 78  :  5882000=076
        35 31 67 78
            2 47 78
```

Liczbę 8649928056778 dla skrócenia nazywam N. Z liczby rzędów na jakie ta liczba podzieloną została wnoszę, że pierwiastek jéj z siedmiu cyfr składać się będzie. Wynalazłszy pierwsze cztery cyfry pierwiastku to jest 2941 uważam je za dziesiątki pierwiastku szukanego; resztujące zaś trzy niewiadome mi jeszcze cyfry pierwiastku, uważam za jedności tegoż, i oznaczam je jako niewiadome przez x.

Liczba dana N jako kwadrat pierwiastku, którego dziesiątkami jest liczba 2941 a jednościami x, równa się $(2491+x)^2$ a zatém:

N jako $(2491+x)^2=2491^2+2.2491\times x+x^2$ odjąwszy z obu stron po 2491^2 będzie:

$N-2491^2=2.2491\times x+x^2$

Dzielę obie strony przez 2.2491 a otrzymam $\frac{N-2491^2}{2.2491^2}$ $=x+\frac{x^2}{2.2491}$

Odjąwszy zaś z obu stron po $\frac{x^2}{2.2491}$ będzie, że $x=\frac{N-2491^2}{2.2491}-\frac{x^2}{2.2491}$.

Że zaś $N-2491^2$ jestto reszta kwadratu danego 8649928056778 pozostała po odjęciu od niego kwadratu z liczby 2491 uważanéj za dziesiątki pierwiastku; téj więc reszcie podzielonéj przez podwojone dziesiątki czyli 2.2491 zmniejszonéj o $\frac{x^2}{2.2491}$, czyli o kwadrat z jedności podzielony przez podwojone dziesiątki, ma się równać x. czyli pozostałe 3 cyfry pierwiastku szukanego.

A że ułamek $\frac{x^2}{2.2491}$ jest mniejszy od jedności, albowiem licznik x^2 najwięcéj z 6 cyfr składać się może, gdyż samo x 3 cyfry tylko przedstawia, mianownik zaś 2.2491 czyli 2.2491000 z 7 cyfr jest złożony; przeto ułamek $\frac{x^2}{2.2491}$ jako właściwy jest mniejszy od jedności, zatém przez opuszczenie go będzie:

$x=\frac{N-2491^2}{2.2491}$ za małe mniéj niż o jedność.

Otrzymamy więc wartość na $N-2491^2$ gdy spuściwszy do reszty 447 pozostałe 3 rzędy kwadratu, resztę podzielimy przez podwojone dziesiątki, czyli przez 2.2491000=5882000. Po dokonaniu tego działania otrzymujemy wartość na x czyli 3 ostatnie cyfry pierwiastku 076.

A zatém $\sqrt{8649928056778}=2491076$ z przybliżeniem mniéj niż o jedność.

Takie więc na to prawidło podać możemy:

§ 147.

Gdy więcéj niż połowa cyfr pierwiastku kwadratowego jest już wyprowadzona, pozostałe cyfry łatwo się znajdą z przybliżeniem mniéj niż o jedność, jeżeli pozostałą resztę wraz ze spuszczonemi do niéj pozostałemi cyframi kwadratu podzielimy przez podwójny pierwiastek już znaleziony, biorąc jego cyfry podług właściwéj ich porządkowéj wartości.

Na zasadzie tego rozwiążmy następujące zadanie:

§ 148.

11. **Przykład**. *Wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z liczby* 946785300185437.

$$\sqrt{946785300185437}=30769860$$

```
  4678                607
   42953              6146
     607700           6152
       53939185437 :  61538000=860
         570878543
            16505437
```

Zadania.

Podnieść do kwadratu.

1) $4859^2=23609881$

2) $5083^2=25836889$

3) $19459^2=378652681$

4) $59049^2=3486784401$

5) $723456^2=523388583936$

6) $4194304^2=17592186044416$

7) $6953810^2 = 48355473516100$

8) $19531250^2 = 381469726562500$

9) $543081069^2 = 294937047506182761$.

10) $387420489^2 = 150094635296999121$.

11) $(\frac{6}{7})^2 = \frac{36}{49}$ 16) $5,4^2 = 29,16$

12) $(\frac{8}{9})^2 = \frac{64}{81}$ 17) $87,64^2 = 7680,7696$

13) $(2\frac{3}{5})^2 = 6\frac{19}{25}$ 18) $0,12^2 = 0,0144$

14) $(7\frac{3}{5})^2 = 57\frac{19}{25}$ 19) $0.0006^2 = 0,00000036$.

15) $(\frac{546}{2345})^2 = \frac{298116}{5499025}$ 20) $0,0507^2 = 0,00257049$.

Wyciągnąć pierwiastek kwadratowy.

1) $\sqrt{1024} = 42$ 6) $\sqrt{5317636} = 2306$

2) $\sqrt{7569} = 87$ 7) $\sqrt{76807696} = 8764$

3) $\sqrt{1681} = 41$ 8) $\sqrt{378652681} = 19459$

4) $\sqrt{119025} = 345$ 9) $\sqrt{16677181699666569} = 129140163$.

5) $\sqrt{43264} = 208$ 10) $\sqrt{150094635296999121} = 387420489$.

Wyciągnąć pierwiastek przybliżony

11)	mniéj	niż o $\frac{1}{1000}$	z liczby	87567	= 295,917
12)	„	„	„	5	= 2,236
13)	„	„	„	20	= 4,472
14)	„	„	„	2576	= 50,754
15)	„	$\frac{1}{100000}$	„	149	= 12,20655
16)	„	$\frac{1}{1000}$	z ułamku	$\frac{1}{3}$	= 0,577
17)	„	„	„	$\frac{1}{21}$	= 0,218
18)	„	„	„	$4\frac{3}{23}$	= 2,029
19)	„	„	„	$14\frac{3}{7}$	= 3,798
20)	„	„	„	$12\frac{3}{5}$	= 3,549
21)	„	$\frac{1}{10000}$	z ułamku	$\frac{5}{7}$	= 0,8451
22)	„	„	„	$65\frac{43}{47}$	= 8,1187
23)	„	„	„	$7\frac{3}{4}$	= 2,7838
24)	„	o $\frac{1}{1000}$	„	$\frac{5}{7}$	= 0,88191
25)	„	o 1	„	$\frac{1}{2}$	= $\frac{353}{500}$
26)	„	o $\frac{1}{12000}$	„	$\frac{2}{3}$	= $\frac{29393}{36600}$

27) o $\frac{1}{2000}$ „ $25\frac{2}{3}$ $= 5\frac{397}{6000}$

28) o $\frac{4}{15}$ z liczby 10 $= 3\frac{3}{20}$

29) o $\frac{3}{7}$ „ 2 $= 1\frac{8}{21}$

30) o $\frac{3}{14}$ z ułamku $\frac{3}{5}$ $= \frac{27}{35}$

31) o $\frac{7}{13}$ „ $\frac{6}{7}$ $= \frac{84}{91}$

32) o $\frac{1}{1000000}$ z liczby 7 $= 2,645184$

33) o $\frac{1}{10000}$ z ułamku 0,02 $= 0,1414$

34) o $\frac{1}{100000}$ „ 0,1 $= 0,31623$

35) „ „ 6,006 $= 2,45071.$

Wyciągnąć pierwiastek kwadratowy przybliżony mniéj niż o jedność z liczb:

36) 22876792455851=4782969

37) 965001045006700143289=31064465970

38) 7085430018587430125=2661865890.

39) 64000150000064000000=8000009749.

Monety miary i wagi zagraniczne w porównaniu z Ruskiemi.

MONETY.

Austryja.

Talar konwencyjny = 2 guldeny . . . . . = 1,300 rubli.
Gulden lub *złoty Reński* = 100 centów, = 60 krajcerów = 240 fenigów . . . . . . = 0,650 „
Dukat cesarski . . . . = 2,871 „
Dukat węgierski . . . . = 2,881 „
Suwerendor = 800 krajcerów . . . . = 8,666 „

Anglija.

Krona = 5 szyllingów. . . . . = 1,524 „
Szylling = 12 pensów . . . . = 0,305 „
Pens = 4 fartingi . . . . = 0,025 „
Gwinea = 21 szyllingów . . . . = 6,107 „
Saweren = 20 szyllingów . . . . = 6,406 „
Funt szterling równa się sowerenowi.

Bawaryja i Wirtemberg.

Species taler . . . . = 1,290 „
Kronen taler . . . . = 1,415 „
Kopfsztig = 24 krajcerom . . . . = 0,210 „
Karolin = 11 guldenom . . . . = 6,340 „

Wenecyja.

Talero = 10 lier	= 2,167 rubli.
Lira = 20 soldów	= 0,217 „
Sold = 5 centów	= 0,011 „
Suwern = 40 lir	= 8,507 „
Czekino	= 2,890 „

Hamburg.

Rajshstaler (banko) = 3 merki	= 1,444 „
Marka = 16 szyllingów	= 0,481 „
Szylling	= 0,030 „
Dukat cesarski	= 2,860 „

Danija.

Dollar = 3 marki	= 0,703 „
Marka = 16 szyllingów	= 0,234 „
Species dukat	= 2,871 „
Christiansdor	= 5,051 „

Hiszpanija.

Piastr = 20 realów	= 1,348 „
Real = 34 marawedis.	= 0,067 „
Pistol.	= 4,938 „

Neapol i Sycylija.

Dukato = 5 skudi	= 1,063 „
Skudi = 20 greni	= 0,213 „
Opczetta.	= 3,145 „

Niderlandy.

Efimek = 2 guldeny	= 1,336	rubli.
Gulden = 20 stiwerów (100 centów) . . .	= 0,668	„
Stiwer = 4 diujty	= 0,033	„
Dukat	= 2,863	„

Portugalija.

Krusado = 12 realów	= 0.715	„
Real = 40 rejsów	= 0,059	„
Milrejs	= 1,327	„

Prussy.

Talar = 24 starym lub 30 nowym groszom .	=0,9125	„
Grosz = 12 fenigów	=0,0304	„
Frydrychsdor	= 4,968	„

Rzym.

Skudo = $3\frac{1}{3}$ testoni	= 1,347	„
Testoni = 3 paoli	= 0,449	„
Paoli	= 0,149	„
Czekino	= 2,857	„

Saksonija.

Rajchstaler	= 0,975	„
Speciestaler = 24 grosze	= 1,275	„
Grosz = 12 fenigów	= 0,054	„
Augustdor	= 5,053	„

Turcyja.

Piastr = 40 parasów . . . . = 0,125 rubli.

Francyja.

Frank = 20 susów (sous)=100 centimów . =0,250228 „
Sus = 5 centimów . . . . =0,012511 „
Luidor = 20 franków . . . . = 4,84313 „

Szwajcaryja.

Frank = 10 bacenów . . . . = 0,375 „
Bacen = 4 krajcery . . . . = 0,037 „
Luidor (stary). . . . . = 6,003 „

Szwecyja.

Rajstaler = 48 szyllingów . . . . = 1,429 „
Szylling = 12 fenigów . . . . = 0,040 „
Dukat . . . . = 2,833 „

Miary długości.

Austryja.

Łokieć (elle) = 1,0956354 arszy. = 1,35278 daw. łokci pols.
Stopa (schuh) = 12 calom = 1,037099 stóp russ. = 1,097577 daw. stóp pols.

Cal = 12 linij.
Fanst = 4 cale.
Ingenier-ruthe = 12 schuh, dzieli się na 10 części stopami zwanych.
Sążeń (klafter) = 6 stóp = 6,222594 stóp russ. = 6,585462 daw. stóp pols.
Mila = 4000 sążni = 7,11102 wiorst.
Jeden stopień równika = 14,67 milom austryjackim.

Anglija.

Jard = 3 stopy (foot) = 3 stop. rus. = 1,5875 daw. łok. pols.
Stopa = 12 cali, *cal* = 12 linij, *linija* = 12 sekund, sekunda = 12 tercyi.
Pol albo *Percz* (pearche) = $5\frac{1}{2}$ jardów = $16\frac{1}{2}$ stóp rus.
Fetem (fathom) = 2 jardy.
Mila angielska = 8 Furlongów = 1,5086 wiorst.
Furlong = 40 pol.
Mila morska = 1,7386 wiorst.
Jeden stopień równika = 60 milom angiel. morskim.

Danija.

Łokieć . . . . . = 0,88221 arszy. = 1,0632 daw. łok. pols.
Stopa ($\frac{1}{10}$ ruthe) = 1,029 stóp rus.
Mila . . . . . = 7,0606 wiorstom.
Jeden stopień równika = 14,77 milom duńskim.

Hiszpanija.

War kastylski . = 2,363 stóp rus.
Stopa . . . . . = 0,9273 stóp rus.
Mila . . . . . = 6,6238 wiorstom rus.
Jeden stopień równika = 15,75 milom hiszpańskim.

Neapol.

Palmo . . . . = 0,86216 stóp rus.
Mila włoska . . . . . = 1,7386 wiorst.
Jeden stopień równika . = 60 milom włoskim.

Niderlandy.

Stopa . . . . = 0,9665 stóp rus.
Łokieć . . . . = 0,9702 arszynom.
Mila (godzina) . . . . = 5,3082 wiorstom.
1 stopień równika . . = 19,65 milom holenderskim.
Mila morska . . . . . = 5,2106 wiorst.
1 stopień równika . . = 20 milom mors. holenderskim.

Portugalija.

Stopa . . . . = 1,11083 stopom rus.
Mila . . . . = 5,8006 wiorstom.
1 stopień równika . . = 18 milom portugalskim.

Prussy.

Stopa pruska albo reńska = 12 cali = 1,029721 st. rus. = 1,089767 daw. stop pols.
Łokieć berliński (elle) = $25\frac{1}{2}$ cali = 0,9385 arszynom = 1,131 daw łok. pols.
Pręt mierniczy = 12 stóp.
Sążeń = 6 stóp.
Mila = 2000 prętów . = 7,2666 wiorstom.
1 stopień równika . . = 14,35 milom prusskim.

Rzym.

Palmo . . . . = 0,7329 stop rus.
Stopa . . . . = 0,9665 stopom rus.
Mila . . . . = 1,383 wiorstom.
1 stopień równika . . = 75,45 milom rzymskim.

Saksonija.

Stopa ($\frac{1}{6}$ hlaftern) . . = 0,9293 stopom rus.
Łokieć drezdeński . . = 0,7945 arszynom.
Mila . . . . = 8,4966 wiorstom.
1 stopień równika . . = 12,28 milom saskim.

Turcyja.

Wielki pik . . . . . = 2,19583 stop rus.
Dra-stambulin . . . = 2,1255 stop rus.
Mila (bori) . . . . . = 1,294 wiorstom.
Mila morska . . . = 1,294 wiorstom.
1 stopień równika . . = 66,62 bori = 84,85 milom tureckim morskim.

Francyja.

Jednostką miar jest *metr;* jestto jedna dziesięcio milionowa część czwartéj części południka ziemi, zatém cały południk ma 40 milionów metrów długości.

Metr . . . = 3,28899166 stopom rus.
= 1,40 649 arszynom.
= 1,736111 łokciom daw. pols.

Większe miary długości są wielokrotnościami dziesiętnemi metra, nazwiska ich utworzono, dodając wyrazy greckie: Deka dziesięć, hecto sto, kilo tysiąc, miria dziesięć tysięcy. Mniejsze zaś miary są dziesiętnemi częściami metra i tworzą się przez dodanie łacińskich wyrazów: Deci dziesiąta część, Centi setna część, Mili tysiączna część i tak:

Miriametr = 10000 metrom = 32889.9166 stopom rus.

Kilometr = 1000 metrom = 3288,99166 stopom rus. = 0,9397119 wiorstom.

Hektometr = 100 metrom.

Dekametr = 10 metrom.

Decimetr = $\frac{1}{10}$ metra.

Centimetr = $\frac{1}{100}$ metra.

Milimetr = $\frac{1}{1000}$ metra.

Mila francuzka = 4444.4444 metrom = 4.1766 wiorstom.

Mila morska = 5555.5555 metrom.

1 stopień równika = 24.97 milom francuzkim, a 20 milom fran. morskim.

Szwecyja.

Łokieć . . . . = 0,8345 arszynom.

Stopa ($\frac{1}{16}$ ruthe) . . . = 0,97383 stop. rus.

Mila . . . . = 10,0302 wiorstom.

1 stopień równika . . . = 10.40 milom szwedzkim.

Szwajcaryja.

Mila . . . . = 7,8514 wiorstom.

1 stopień równika . . . = 13,29 milom szwajcarskim.

Wagi.

Austryjacki funt = 1,369 fun. rus. = 8645 gramom angielsk.
Stein = 20 funtów, *centnar* = 100 ℔. *karch* = 400 ℔.
Angielski funt (pound) = 12 uncyjom = 1,108 ℔ rus. = 7000 gramom angielsk. 73 gram 1 Zolot.
Kwarter = 28 funtów.
Hundretweit = 4 kwartery,
Ten = 20 hundretwajtom.
Drezdeński i Lipski funt = 1,140 ℔ rus. = 7202 gram. an.
Duński funt = 1,222 ℔ rus. = 7720 gramom angielsk.
Francuzki kilogram = 2,443 ℔ rus. = 15434 gr. ang.
Hamburgski funt = 1,184 ℔ rus. = 7476 gr. ang.
Hiszpański funt = 1,124 ℔ rus. = 7101 gr. ang.
Hollenderski nowy funt = 2,443 ℔ rus. = 15434 gr. ang.
Neapolitański (Cantaro wielki) = 2,177 ℔ rus. = 13753 gr. ang.
Portugalski funt = 1,121 ℔ rus. = 7083 gr. ang.
Prusski funt = 2 marki = 32 łuty = 128 drachm = 1,141 funtów rus. = 7218 gr. ang.
Centnar = 100 funt.
Schiflast = 4000 funt.
Rzymski (lira = 12 unc.) = 0,828 ℔ rus. = 5231 gr. ang.
Russki funt = 6316 gr. ang.
Szwedzki wittuałowy = 1,039 ℔ rus. = 6563 gr. ang.
Wenecki ciężki = 1,166 ℔ rus. = 7363 gr. ang.
Turecki (okka) = 3 szeki = 3,141 ℔ rus. = 19830 gr. ang.

Miary objętości.

Austryja.

Miary rzeczy sypkich są:
Muth = 30 metzen = 8,79639 czetwerty = 14,4139 korcy pols. daw.

Metzen = na dawną polską miarę 1 ćwierć 7 garcy i 1,5 kwarty prawie.

Metzen dzieli się na 4 Viertele, 8 Achtli, 16 Massel.

Massel = 0,9609 dawnego garnca polskiego.

Massel dzieli się na 2 halbemassel, 4 futtermassel i 8 becher.

Miarą płynów jest:

Mass = 4 seidel = 8 pfiff = 0,11513 wiadrom russkim a dawnym polskim 1 kwarcie i 1,66 kwaterkom.

Eimer (wiadro) = 41 Mas = 4,72068 wiadrom rus. = 14,50387 daw. garn. pols.

Anglija.

Jednostką miar objętości jest *Gelln* (Galon) to jest 10 ℔ dystylowanéj wody = 1,3917 garncy rus.

Do ciał sypkich:

Kworter (quarter) = 8 buszil = 64 gellny = 1,386 czetwerty = 2,271 daw. korcy pols.

Buszil (buschels) = 4 Pek (Peiks) = 8 gellnów, Pek = 2 gellny.

Gelln = 4 kwarty = $5\frac{1}{2}$ nowych kwart pols.

Kwarta = 2 pinty = $1\frac{3}{8}$ nowych kwart pols.

Lod (load) = 5 kworterów = 6,930 czetwerty = 11,355 daw. korcy pols.

Do mierzenia kartofli, węgla, ryb, wapna używa się:

Ten (tun = 2 Paip = 252 Gelln = 5,414 czetwerty.

Do mierzenia piwa służy:

Bit (Butt) = 3 berril = 108 geln. = $150\frac{1}{2}$ garncy russ.

Berril (barrel) = 2 kilderkin = 39 gelln. = $30\frac{1}{6}$ garncy rus.

Kilderkin = 2 Ferkiny (firkins) = $19\frac{1}{2}$ gelln.

Ferkin = 72 pinty.

Pinta jest $\frac{1}{8}$ gelna zatém = $2\frac{3}{4}$ nowym kwaterkom polskim.

Francyja.

Litre czyli decimetr sześcienny jest jednostką miar francuzkich, równa się on 1éj kwarcie, większe i mniejsze miary objętości są:

Mirialitre = 10000 litrów = 47,6774 czetwerty.
Kilolitre = 1000 „ = 4,76774 „
Hectolitre = 100 „ = 0,476774 „
Decalitre = 10 „ = 0,0476774 „
Decilitre = $\frac{1}{10}$ „ = 0,00476774 „
Centilitre = $\frac{1}{100}$ „ = 0,000476774 „
Mililitre = $\frac{1}{1000}$ „ = 0,0000476774 „

Do mierzenia drzewa opałowego, kamieni, węgla i t. p. używa się *stère* czyli metr sześcienny. Większą miarą jest decastère = 10 sterów, a mniejszą *decistere* $\frac{1}{10}$ stera, centistere $\frac{1}{100}$ stera, milistère $\frac{1}{1000}$ stera.

Prussy.

Miary zboża są:

Szefel = 4 firtel = 16 metzen = 1,953 czetweryków = $\frac{2}{5}$ daw. korca pols.

Większą miarą jest:

Winspel = 2 Malter = 24 Szefli = 5,859 czetwerty.

Łaszt ma 3 Winsple = 17,577 czetwerty, ale przy mierzeniu owsa i jęczmienia liczą na łaszt 2 winsple.

Nasze zboże mierzy się w Prussach na Winsple po 25 szefli = 10 daw. korcy polskich.

Miary wina są:

Oxhoft = 1½ ohm = 3 wiadra pruskie.

Wiadro = 2 ankrom = 5,59022 ruskim wiadrom = 17,17554 daw. garncom pols.

Miary powierzchni czyli kwadratowe.

Austryja.

Jednostką miar powierzchni w Austryi jest:

Joch = 1264,335 sażenom □ russ. = 308,39 daw. prętom □ pols.

Joch = Metzen = 1600 sążni □ = 400 prętom □ Austryjackim.

Anglija.

Jednostką miar kwadratowych Angielskich jest Eker (Acre) = 4 Fardingdil = 160 pol. □ = 4840 jardom □ = 888,908 sażenom □ rus. = 216,83 daw. prętom □ pols.

Większe miary kwadratowe są:

Jardowlend (Yard of land) = 30 ekerów.

Hajdowlend (Hide of land) = 100 ekerów.

Mila □ . . . . = 640 ekerów.

Francyja.

Jednostką miar kwadratowych jest *Are* czyli dehcimetr kwadratowy = 21 sażenom □, 47 stopom □ i 61,91 calom □ russkim = 5,3583 daw. prętom polskim.

Większe i mniejsze miary są:

Miriare = 10000 arów.

Kiliare = 1000 „

Hectare = 100 „

Decare = 10 „

Deciare = $\frac{1}{10}$ ara.

Centiare = $\frac{1}{100}$ „

Miliare = $\frac{1}{1000}$ „

Grunta większe mierzą się zwykle na hectary.

Prussy.

Jednostką tych miar jest morg magdeburgski = 560,888 sażeni □ rus. = 180 daw. prętów □ polskich.

Włóka (Hufe) = 30 morgom.

TABLICE PORÓWNAWCZE

JEDNOSTEK MIAR I WAG EUROPEJSKICH.

1) Miary łokciowe.

Łokcie	Anglija	Austryja	Hiszpanja	Francyja	Frankfurt	Genewa	Hamburg	Neapol	Prussy	Rossyja	
Anglija	100 yard.	117,342	107,821	91,428	167,051	365,965	159,566	43,344	137.087	128,503	Anglija
Austryja	85,200	100 ellen.	91,886	77,916	142,362	311,876	135,984	36,939	116,827	109,511	Austryja
Hiszpanja	92,746	108,830	100 vuras	84 796	154,935	339,425	147.992	40.201	127,143	119,182	Hiszpanja
Francyja	109,374	128,342	117,929	100 metr.	182.712	400,272	174,525	47,409	149,939	140.550	Francyja
Frankfurt	59,862	70.243	64.543	54,730	100 ellen.	219,069	95,520	25,948	82,063	76,924	Frankfurt
Genewa	27,325	32,064	29,461	24.983	45,648	100 palm.	43,602	11,844	37,439	35,114	Genewa
Hamburg	62,669	73,538	67,571	57.298	104,690	229,347	100 ellen.	27,164	85,912	80,532	Hamburg
Neapol	230,710	270.720	248 750	210,936	385,386	844,310	368,130	100 kan.	316,270	296,470	Neapol
Prussy	72,945	85,596	78,651	66,693	121,857	266,958	116,397	31,619	100 ellen.	93.738	Prussy
Rossyja	77,818	91,314	83,905	71,148	129,998	284,787	124,173	33,739	106,680	100 arsz.	Rossyja

2) Miary ciał ciekłych.

	Anglija	Austryja	Hiszpanja	Francyja	Frankfurt	Genewa	Hamburg	Neapol	Prussy	Rossyja	
Anglija	100 gall.	320,980	28,840	454,190	53,33	305,940	501,850	624,770	396,670	286,210	Anglija
Austryja	31,154	100 mass.	8,985	141,501	78,924	95,315	156,348	194,645	123,580	89,167	Austryja
Hiszpanja	346,700	1112,900	100 arrob.	1574,800	878,400	1060,700	1740,200	2166,300	1375,500	992,400	Hiszpanja
Francyja	22,016	70,670	6,350	100 litr.	55,775	67,360	110,492	137,547	87,335	63,015	Francyja
Frankfurt	39,473	126,705	11,385	179,289	100 mess.	120,769	198,102	246,607	156,582	112,979	Frankfurt
Genewa	32,684	104,915	9,427	148,456	82,801	100 pint.	164,032	204,197	129,653	93,550	Genewa
Hamburg	19,926	63,959	5,747	90,504	50,478	69,982	100 kwar.	124,486	79,41	57,031	Hamburg
Neapol	16,006	51,378	4,617	72,703	40,549	48 973	80,328	100 karaf.	63,492	45,814	Neapol
Prussy	25,209	80,919	7,271	114,501	63,864	77,128	126,516	157,493	100 kwar.	72,153	Prussy
Rossyja	34,938	112.148	10,077	158,691	88,510	106,894	175,342	218,275	138,593	100 krusz.	Rossyja

3) Wagi handlowe.

	Anglija	Austryja	Hiszpanja	Francyja	Frankfurt	Genewa	Hamburg	Neapol	Prussy	Rossyja	
Anglija	100 funt.	80,973	98,577	45,355	96,941	129,997	93,629	50,902	97,016	110,876	Anglija
Austryja	123,497	100 funt.	121,740	56,012	119,719	160,542	115,629	62,862	119,813	136,929	Austryja
Hiszpauja	101,443	82,142	100 fuut.	46,009	98,339	131,872	94,980	51,635	98,416	112,476	Hiszpanja
Francyja	220,481	178,531	217,348	100 kilog.	213,736	286,619	206,434	112,229	213,903	244,462	Francyja
Frankfurt	103,156	83,528	101,688	46,786	100 funt.	134,098	96,583	52,507	100,078	114,375	Frankfurt
Genewa	76,924	62,288	75,829	34,889	74,570	100 funt.	72,023	39,156	74,629	85.291	Genewa
Hamburg	106,806	86,483	105,285	48,441	103,537	138,843	100 funt.	54,366	103,618	118,421	Hamburg
Neapol	196,454	159,076	193,657	89,102	190,594	255,383	183,938	100 rotoli	190,594	217,822	Neapol
Prussy	103,074	83,463	101,608	46,750	99,921	133,944	96,507	52,467	100 funt.	114,285	Prussy
Rossyja	90,190	73,030	88,907	40,906	87,431	117,244	84,444	45,908	85,500	100 funt.	Rossyja

SPIS PRZEDMIOTÓW.

Część I.

Część II.

CZĘŚĆ TRZECIA.

O Stosunkach i Proporcyjach.

Rozdział I.

O stosunkach.

O stosunkach w ogólności.

§ 149.

Porównanie ze sobą dwóch wielkości tegoż samego gatunku nazywa się stosunkiem.

Porównywając wielkości staramy się dowiedzieć o ile jedna z nich jest większa lub mniejsza od drugiej, albo też ile razy jedna wielkość jest większa lub mniejsza od drugiej. Uważamy np. że 18 jest większe od 6 o 12 jednostek, albo też że 18 jest 3 razy większe od 6, i na odwrot że 6 jest mniejsze od 18 o 12 jednostek, albo znowu że 6 jest 3 razy mniejsze od 18.

Pierwszy sposób porównania zowiemy *stosunkiem arytmetycznym albo różnicowym*, gdyż nam idzie o różnicę między dwiema wielkościami; drugi zaś zowie się stosunkiem *geometrycznym albo ilorazowym*, ponieważ dochodzimy, ile razy jedna wielkość mieści się w drugiej, czyli szukamy ilorazu.

Z tego wynika, że stosunek jest dwojaki: różnicowy i ilorazowy i że:

stosunek różnicowy pokazuje nam o ile jedna liczba jest większa lub mniejsza od drugiej,

a stosunek ilorazowy pokazuje ile razy jedna ilość jest większa lub mniejsza od drugiej.

O stosunku różnicowym czyli arytmetycznym.

Własności stosunku różnicowego.

§ 150.

Ponieważ stosunek różnicowy oznacza różnicę, a tej dochodzimy za pomocą odejmowania, przeto dla oznaczenia stosunku różnicowego używa się znak odejmowania (—), który kładziemy między liczbami porównywanemi; i tak stosunek różnicowy między 9 i 5 wyraża się przez 9—5 a wymawia się 9 do 5.

Ilości porównywane takie jak 9 i 5 zowiemy *wyrazami stosunku różnicowego.* Pierwsza z tych ilości 9 zowie się *poprzednikiem* a druga 5 *następnikiem.* Różnica zaś 4 zachodząca pomiędzy wyrazami stosunku 9—5 zowie się *wykładnikiem stosunku różnicowego.*

§ 151.

Jasną przeto jest rzeczą że większy wyraz stosunku różnicowego jest równy mniejszemu powiększonemu o wykładnik, to jest w stosunku 9—5, 9=5+4; i odwrotnie mniejszy wyraz jest równy większemu zmniejszonemu wykładnikiem, to jest 5=9—4.

Jeżeli do któregokolwiek z wyrazów stosunku dodamy jaką liczbę, to wykładnik stosunku się odmieni; wziąwszy np. stosunek 18—7 którego wykładnikiem jest 11, dodajmy do pierwszego wyrazu 2, to z otrzymanego stosunku 20—7 mającego za wykładnik 13 widzimy, że i wykładnik także się o 2 powiększył. Jeżeli zaś do mniejszego wyrazu 7 dodamy 2, to ze stosunku 18—9, którego wykładnikiem jest 9 widzę że wykładnik zmniejszył się o 2; kiedy zaś do obu wyrazów stosunku dodamy po jednakowej liczbie np. po 3, to w otrzymanym stosunku 21—10, wykładnik pozostał ten sam co i w stosunku danym 18—7; o ile bowiem powiększył się wykładnik przez dodanie 3 do wyrazu większego, o tyle się zmniejszył przez dodanie tejże ilości do wyrazu mniejszego.

Podobnież gdy odejmiemy od obu wyrazów stosunku różnicowęgo po jednakowej liczbie, wykładnik stosunku się nie odmieni, np. jeżeli od obu wyrazów stosunku 18—7 odejmiemy po 5, to otrzymanego stosunku 15—4 wykładnikiem będzie także 11.

A zatém, *jeżeli do obu wyrazów stosunku różnicowego dodamy, lub od tychże odejmiemy po jednakowej liczbie wykładnik stosunku się nieodmieni.*

O stosunkach ilorazowych czyli geometrycznych.

Własności stosunku ilorazowego.

§ 152.

W stosunku ilorazowym, jak już wyżéj powiedziano, idzie nam o to, ile razy jedna ilość jest większa lub mniejsza od drugiej; szukamy przeto ilorazu, ten zaś wynajduje się za pomocą dzielenia, z tego też powodu za znak stosunku ilorazowego przyjęto znak dzielenia (:); i tak wyrażenie 15 : 3 oznacza stosunek 15 do 3. Stosunek ilorazowy wyrazić można również w postaci ułamku pisząc $\frac{15}{3}$, gdyż jak nam wiadomo ułamek jest znakiem niedokonanego dzielenia, w którym licznik jest dzielną a mianownik dzielnikiem.

Porównywając zaś odwrotnie 3 do 15, co się wyrazi przez 3 : 15 lub $\frac{3}{15}$, stosunek względem poprzedniego 15 : 3 będzie *odwrotnym*.

Liczby 3 i 15, które tu porównywamy nazywają się *wyrazami stosunku ilorazowego*, z tych pierwszy zowie się *poprzednikiem* a drugi *następnikiem stosunku ilorazowego;* iloraz 5 powstały z podzielenia wyrazu większego 15 przez mniejszy 3 nazywa się *wykładnikiem.*

*

§ 153.

Wnosić z tego łatwo że wyraz większy stosunku ilorazowego jest równy mniejszemu pomnożonemu przez wykładnik, to jest w stosunku 15 : 3, $15=3\times5$;

i na odwrot wyraz mniejszy jest równy większemu podzielonemu przez wykładnik, to jest $3=15 : 5$.

§ 154.

Jeżeli wyraz większy stosunku ilorazowego czyli dzielną pomnożymy przez jakąkolwiek liczbę, to wykładnik czyli iloraz się powiększy; mając np. stosunek 18 : 3 którego wykładnikiem jest 6, pomnożywszy 18 przez 2 otrzymamy 36 : 3, wykładnik tego stosunku 12 jest 2 razy większy od poprzedniego.

Jeżeli zaś wyraz mniejszy to jest dzielnik pomnożymy przez jakąkolwiek liczbę, to wykładnik się zmniejszy; np. w tymże stosunku 18 : 3, pomnożywszy 3 przez 2, wykładnikiem otrzymanego stosunku 18 : 6 będzie 3, to jest liczba 2 razy mniejsza od poprzedniej.

Gdy więc oba wyrazy stosunku ilorazowego pomnożymy przez jednakową liczbę, to wykładnik się nie odmieni: np. pomnożywszy oba wyrazy stosunku 18 : 3 przez 2, wykładnikiem stosunku 36 : 6 także będzie 6; albowiem o ile razy wykładnik powiększył przez pomnożenie wyrazu większego, tyle razy się zmniejszył przez pomnożenie wyrazu mniejszego.

Podobnie okazać można że wykładnik się nie zmieni, jeżeli oba wyrazy stosunku ilorazowego podzielimy przez jednakową liczbę, gdyż ile razy się zmniejszy wykładnik przez podzielenie wyrazu większego, tyle razy się powiększy przez podzielenie wyrazu mniejszego.

Z tego wynika że:

pomnożywszy lub podzieliwszy oba wyrazy stosunku ilorazowego przez jednakową liczbę wykładnik tego stosunku się nie odmieni.

Taż sama własność stosunku ilorazowego objaśnić się daje własnością ułamku. Stosunki ilorazowe jak nam wiadomo, wyrażać można w postaci ułamku, a pomnożywszy lub podzieliwszy oba wyrazy ułamku przez jednakową liczbę, wartość ułamku się nie zmieni, tu zaś wartość ułamku jest wykładnikiem: przeto i oba wyrazy stosunku ilorazowego pomnożywszy lub podzieliwszy przez jednakową liczbę nie zmienimy wartości stosunku.

§ 155.

Z tego powodu i wszelkie uproszczenia jakie dają się robić w ułamkach przez dzielenie mogą być dokonywane na stosunkach; takim sposobem stosunek 360 : 270 gdy oba jego wyrazy podzielimy przez 10 a potém przez 9 zamieni się na 4 : 3.

§ 156.

Jeżeli oba wyrazy stosunku są ułamkami, to żeby je zamienić na liczby całe, sprowadza się do jednakowego mianownika, że zaś liczniki wyrażają części jednakowej wielkości, przeto i stosunek między licznikami zachodzący jest tenże sam co i pomiędzy ułamkami danemi; np. $\frac{3}{4} : \frac{5}{12}$ sprowadziwszy do jednakowego mianownika będzie $\frac{36}{48} : \frac{20}{48}$; oba wyrazy tego stosunku mnożę przez 48, przez to mianowniki się zniosą i otrzymamy stosunek z samych liczników 36 : 20, wykładnikiem którego będzie $\frac{36}{20}$.

Zresztą i przez podzielenie danych ułamków tenże sam wykładnik otrzymamy, albowiem $\frac{3}{4} : \frac{5}{12} = \frac{3 \times 12}{4 \times 5} = \frac{36}{20}$.

Jeżeli jeden z wyrazów stosunku jest liczbą całą a drugi ułamkiem, to liczbę całą zamienia się na ułamek z mianownikiem jaki ma wyraz ułamkowy i postępuje się jak wyżej, np. $3 : \frac{5}{6} = \frac{18}{6} : \frac{5}{6} = 18 : 5 = \frac{18}{5}$.

Tu również z podzielenia wprost 3 przez $\frac{5}{6}$ wypadnie tenże sam wykładnik, albowiem $3 : \frac{5}{6} = \frac{3 \times 6}{5} = \frac{18}{5}$.

§ 157.

Stosunki które po doprowadzeniu do najkrótszego wyrażenia mają jednakowe wyrazy nazywamy równemi; np. stosunki 32 : 40 także 28 : 35 są sobie równe, gdyż oba wyrazy pierwszego podzielone przez 8, a drugiego przez 7 wydadzą tenże sam stosunek 4 : 5.

§ 158.

Jeżeli więc odpowiednie wyrazy dwóch lub więcej stosunków równych dodamy do siebie, to dwie otrzymane summy utworzą tenże sam stosunek, albowiem każdy wyraz tak otrzymanego stosunku zawierać w sobie będzie też same czynniki co i wyrazy stosunków dodajnych, i po uproszczeniu doprowadzimy go do takiego samego wyrażenia; np. mając stosunki

	32 : 40	po skróceniu	4 . 5
	28 : 35	„ „	4 : 5
	36 : 45	„ „	4 : 5
dodajmy poprzedniki i następniki do siebie a otrzymamy	96 : 120	„ „	4 : 5

§ 159.

Jeżeli stosunek którego wyrazy są liczbami wielkiemi nie daje się skrócić, to można go otrzymać tak przybliżonym o ile tylko dokładność rachunku wymaga, a to następującym sposobem.

Niech będzie stosunek 3425 : 14297, dzielę oba wyrazy przez wyraz mniejszy 3425 i za pomocą liczb dziesiętnych otrzymuję 1 : 4, 1743065. . .

Mnożąc kolejno oba wyrazy tego stosunku przez 2, 3, 4, 5,. . . 9, 10. . . . . 100 otrzymamy następujące przybliżone stosunki:

1 : 4	10 : 42	100 : 417
2 : 8	20 : 83	200 : 835
3 : 12	30 : 125	300 : 1252
4 : 16	40 : 167	400 : 1670
5 : 20	50 : 209	500 : 2087
6 : 25	60 : 250	600 : 2504
7 : 29	70 : 292	700 : 2922
8 : 33	80 : 334	800 : 3339
9 : 37	90 : 375	900 : 3757

Dodając teraz odpowiednie wyrazy jednego ze stosunków drugiej kolumny do każdego ze stosunków pierwszej kolumny, otrzymam tyle stosunków przybliżonych, ile się podoba; znajdę więc:

11 : 46	21 : 87
12 : 50	22 : 91
13 : 54 etc.	23 : 95 etc.

Podobnież stosunki 3-ej kolumny dodane do stosunków pierwszej dadzą:

101 : 421	110 : 459
102 : 425	120 : 500
103 : 429	130 : 542
104 : 433 etc.	140 : 584 etc.

Rozdział II.

O proporcjach.

O proporcyjach w ogólności.

§ 160.

Proporcyja jest to połączenie z sobą dwóch stosunków równych i jednogatunkowych. Ponieważ stosunki mogą być dwojakiego rodzaju to jest różnicowe i ilorazowe, przeto i proporcyja może być dwojaka: *różnicowa*, jeżeli łączymy z sobą stosunki różnicowe i *ilorazowa*, jeżeli się składa ze stosunków ilorazowych.

§ 161.

Ponieważ każdy stosunek składa się z dwóch liczb, zatém proporcyja jako z dwóch stosunków złożona musi mieć cztery liczby które się zowią *wyrazami proporcyi.* Pierwszy i czwarty wyrazy nazywają się *skrajnemi* a drugi i trzeci *średniemi*, prócz tego pierwszy i trzeci są *poprzednikami* a drugi i czwarty *następnikami.*

Proporcyje 13—6=11—4 lub 21 : 7=42 : 14 czytamy 13 do 6 jak 11 do 4-ch i podobnież 21 do 7 jak 42 do 14-tu.

§ 162.

Tu jeszcze należy zrobić uwagę, że w proporcyjach różnicowych

$$13-6=11-4$$
$$3-9=2\tfrac{1}{2}-8\tfrac{1}{2}$$

pierwszy wyraz o taką ilość jest większy lub mniejszy od drugiego, o jaką trzeci wyraz jest większy lub mniejszy od czwartego, dla tego że różnice, to jest wykładniki, w obu stosunkach są równe.

§ 163.

Tak samo i w proporcyjach ilorazowych

$$21 : 7=42 : 14$$
$$5 : 20=3 : 12$$

Pierwszy wyraz tyle razy jest większy lub mniejszy od drugiego, ile razy trzeci jest większy lub mniejszy od czwartego, dla tego że wykładniki w obu stosunkach są jednakowe.

O proporcyi różnicowej czyli arytmetycznej.

Główna własność proporcyi różnicowéj.

§ 164.

Ponieważ w proporcyi różnicowej poprzedniki mogą być większe lub mniejsze od swych następników, zastanowić się zatém wypada nad obu przypadkami.

1). Jeżeli poprzedniki są większe od swych następników, weźmy proporcyją

$$15-7=13-5.$$

Ogół wyrazów skrajnych 15+5 tej proporcyi składa się z pierwszego i czwartego wyrazu, pierwszy wyraz 15 jako większy w 1-ym stosunku (§ 151) jest równy drugiemu 7 powiększonemu o wykładnik 8, to jest $=7+8$, wstawmy tę ważność za wyraz pierwszy a będzie

Ogół skrajnych $15+5=7+8+5$.

to jest że ogół skrajnych=wyrazowi 2-u+wykładnik+wyraz 4-ty

Ogół wyrazów średnich 7+13 składa się z wyrazów 2-go i 3-go, ale trzeci wyraz 13 jako większy w 2-im stosunku, równa się czwartemu powiększonemu o wykładnik, to jest $=5+8$; wstawmy podobnież tę ważność za wyraz trzeci, a będzie:

Ogół średnich $7+13=7+5+8$.

to jest, że ogół średnich = wyrazowi 2-u+wyraz 4-ty+wykł.

Z tego widzimy że ogół wyrazów skrajnych i ogół wyrazów średnich z tychże samych części się składają, a więc muszą być sobie równe.

2-i przypadek: Jeżeli poprzedniki są mniejsze od swych następników; np.

$$7-15=5-13.$$

Ogół wyrazów skrajnych 7+13 składają wyrazy 1-y i 4-ty, aże 4-ty wyraz 13 jako większy od swego poprzednika 5 składa się z wyrazu 3-o 5 i wykładnika 8, przeto zamiast 4-o wyrazu wziąwszy jego wartość 5+8 będzie:

Ogół skrajnych $7+13=7+5+8$
to jest, że ogół wyr. skrajnych = wyrazowi 1-u + wyr. 3-i + wykł.

Podobnym sposobem okażemy, że i ogół średnich temu samemu się równa.

Kiedy zaś i w tym razie ogół wyrazów skrajnych i ogół wyrazów średnich składają się z tych że samych części, przeto muszą być sobie równe.

Stąd wyprowadzamy tę główną własność proporcyi różnicowej, *że w każdej proporcyi różnicowej ogół wyrazów skrajnych jest równy ogółowi wyrazów średnich.*

Wynajdywanie niewiadomych w proporcyi różnicowej.

§ 165.

Zasadzając się na głównej własności proporcyi różnicowej łatwo znajdziemy jeden z jej wyrazów, jeżeli 3 pozostałe są nam wiadome.

Jeżeli w danej proporcyi różnicowej niewiadomym jest wyraz czwarty, który oznaczymy przez x; np.

$$18-9=14-x.$$

rozumujemy tak:

Ponieważ ogół wyrazów skrajnych jest równy ogółowi wyrazów średnich, a tu widzę że ogół średnich $9+14=23$ przeto i ogół skrajnych musi być także równy 23, a że jeden skrajny jest 18, więc drugi musi być resztą wynikłą z odjęcia 18 od 23 czyli 5; otrzymamy zatem proporcyją

$$18-9=14-5.$$

Można jeszcze wynaleść niewiadomy czwarty wyraz proporcyi różnicowej, zasadzając się na tém, że o ile 1-y wyraz jest większy od 2-o, o tyle i 3-ci wyraz musi być większy od 4-go. Ponieważ 18 jest większe od 9 o 9, przeto i 14 od x musi być większe o 9, gdy więc od 14 odejmiemy 9, otrzymamy 5 na wyraz czwarty niewiadomy.

Weźmy teraz proporcyją różnicową, w której jeden z wyrazów średnich np. 3-ci jest niewiadomym

$$18-9=x-5$$

Tu widzę że ogół skrajnych jest 23, zatém i ogół średnich musi być także 23 aże wiadomy jeden średni jest 9, przeto drugi średni musi być resztą wypadłą z odjęcia 9 od 23, zatém 14 jest szukanym 3-cim wyrazem; będzie więc:

$$18-9=14-5.$$

Podobnie postępując wyprowadzimy, że w proporcyi różnicowej, jeżeli od ogółu skrajnych odejmiemy wyraz trzeci, otrzymamy 2-i, a odjąwszy wyraz 4-ty od ogółu średnich otrzymamy 1-y.

Z tego wszystkiego wynika następujące prawidło: *Jeżeli w proporcyi różnicowej jeden z wyrazów skrajnych jest niewiadomy, to dla wynalezienia go należy od ogółu średnich odjąć wyraz skrajny wiadomy; jeżeli zaś niewiadomym jest wyraz średni, to dla znalezienia go odejmuje się wiadomy średni od ogółu skrajnych.*

O proporcyi różnicowej ciągłej.

§ 166.

Czasami w proporcyi różnicowej średnie wyrazy są jednakowe, np.

$$15-20=20-25.$$

W takim razie proporcyja nazywa się *ciągłą* a każdy ze średnich jej wyrazów zowie się *średnio arytmetycznie proporcyjonalnym.*

Proporcyje tego rodzaju piszą się jeszcze w ten sposób

$$\div 15-20-25 \div$$

§ 167.

Bacząc na to, że w proporcyi różnicowej ciągłej wyrazy średnie są sobie równe, więc na zasadzie głównej własności proporcyi różnicowej, że ogół wyrazów skrajnych równy ogółowi wyrazów średnich; wyprowadzamy że: *w proporcyi różnicowej ciągłej ogół wyrazów skrajnych jest równy średniemu podwojonemu czyli pomnożonemu przez 2.*

Zatém w powyższej proporcyi

$$15+25=20\times 2.$$

§ 168.

Z tego wynika:

1). *Aby znaleść którykolwiek ze skrajnych wyrazów proporcyi różnicowej ciągłej, należy odjąć skrajny wiadomy od podwojonego średniego.*

$$\text{np. } \div 15-20-x \div$$

$$x=20\times 2-15=25$$

2). *Żeby zaś znaleść średni wyraz ciągłej proporcyi należy ogół skrajnych podzielić przez 2.*

$$\text{np. } \div 15-x-25$$

$$x=\frac{15+25}{2}=\frac{40}{2}=20.$$

§ 169.

Na tém ostatniém prawidle zasadza się dochodzenie średniej arytmetycznej ilości dla kilku danych liczb.

Jeżeli dla wynalezienia średniej arytmetycznie proporcyjonalnej dla dwóch liczb danych, dzielimy ogół tychże przez dwa, czyli przez liczbę wyrazów, to: *dla wynalezienia średniej arytmetycznie proporcyjonalnej kilku ilości, dzielimy ogół tychże przez ich liczbę.*

Gdy np. dla następujących danych ilości 25, 32, 48 13, 62 potrzeba wynaleść średnią liczbę, dodajemy te ilości do siebie, a ogół ztąd powstały 180, dzielimy przez liczbę tych ilości to jest przez 5.

będzie przeto 180 : 5=56.

Tak otrzymany iloraz 56 jest średnio arytmetycznym wyrazem dla tych 5-ciu ilości.

O proporcyi ilorazowej czyli jeometrycznej.

§ 170.

Główna własność proporcyi ilorazowej jest ta: *że iloczyn wyrazów skrajnych jest równy iloczynowi wyrazów średnich.*

Dowodzenie

Niech będzie proporcyja

$$20 : 5 = 32 : 8.$$

Ponieważ (§ 153) większy wyraz stosunku ilorazowego jest równy mniejszemu pomnożonemu przez wykładnik, przeto w danej proporcyi w miejsce 20 i 32 mogę wstawić 5×4 i 8×4 a będzie

$$5\times4 : 5 = 8\times4 : 8$$ z tego otrzymuję

na iloczyn skrajnych $5\times4\times8$

a na iloczyn średnich $5\times8\times4$

Ponieważ oba te iloczyny składają się z tychże samych czynników 4, 5, 8; zatém w proporcyi ilorazowej iloczyn wyrazów skrajnych jest równy iloczynowi wyrazów średnich.

Własność tę mogę jeszcze dowieść drugim sposobem.

Powiedzieliśmy (§ 152) że stosunki ilorazowe można wystawić w kształcie ułamku, zatém tęż samą proporcyją 20 : 5=32 : 8 mogę napisać tak

$$\frac{20}{5} = \frac{32}{8}$$

Co po sprowadzeniu do jednakowego mianownika daje

$$\frac{20\times8}{5\times8} = \frac{32\times5}{5\times8}$$

te ilości równe pomnożywszy przez 5×8, mianowniki się zniosą i będzie

$$20\times8 = 32\times5$$

co nas również przekonywa o prawdzie głównej własności proporcyi ilorazowej.

§ 171.

Własność ta jest tak ważną przez swe zastosowania, iż niezbędném jest przekonać, że ona ma miejsce jedynie w proporcyi ilorazowej.

Jeżeli cztery liczby napisane obok siebie nie zostają z sobą w proporcyi, natenczas iloczyn skrajnych nie będzie równy iloczynowi średnich.

Dowodzenie

Niech będą cztery liczby 6, 4, 20, 15; wykładnik stosunku ilorazowego 6 : 4 jest $\frac{6}{4}$, a stosunku 20 : 15 jest $\frac{20}{15}$; mogę przeto iloczynem z $4\times\frac{6}{4}$ zastąpić 6, a 20 iloczynem z $15\times\frac{20}{15}$, i napisać te 4 liczby w tym samym porządku, to jest:

$$4\times\tfrac{6}{4},\ 4,\ 15\times\tfrac{20}{15},\ 15.$$

Tu widzę że iloczyn skrajnych $4\times\frac{6}{4}\times15$ nie jest równy iloczynowi średnich $4\times15\times\frac{20}{15}$, chociaż mają po dwa czynniki 4 : 15 jednakowe, gdyż trzecie ich czynniki $\frac{6}{4}$ i $\frac{20}{15}$ nie są sobie równe.

§ 172.

Odwrotnie: *Jeżeli cztery liczby napisane obok siebie są takie, że iloczyn wyrazów skrajnych jest równy iloczynowi średnich, to cztery te liczby stanowią proporcyją.*

Dowodzenie.

Gdyby takie liczby nie tworzyły proporcyi, natenczas iloczyn wyrazów skrajnych nie mógłby być równy iloczynowi wyrazów średnich, co by się sprzeciwiało założeniu.

§ 173.

Na zasadzie tej głównej własności proporcyi ilorazowej *można w każdej proporcyi zmieniać miejsca wyrazom tak skrajnym. jak i średnim, przestawiać wyrazy stosunków i same stosunki, a proporcyja zawsze będzie dobrą.*

To nam podaje ośm sposobów napisania proporcyi.

I tak mając proporcyją:	$3 : 9 = 2 : 6$	(1)
Zmieniwszy miejsce średnim otrzymuję	$3 : 2 = 9 : 6$	(2)
Przestawiwszy stosunki będzie:	$9 : 6 = 3 : 2$	(3)
Zmieniwszy miejsce średnim jest:	$9 : 3 = 6 : 2$	(4)
Przestawiam znów stosunki	$6 : 2 = 9 : 3$	(5)
Zmieniam miejsce średnim	$6 : 9 = 2 : 3$	(6)
Przestawiam jeszcze stosunki	$2 : 3 = 6 : 9$	(7)
Zmieniam znowu miejsce średnim	$2 : 6 = 3 : 9$	(8)

W tych wszystkich proporcyjach widzimy, że iloczyn wyrazów skrajnych jest równy iloczynowi średnich, albowiem zawsze 2 i 9 także 6 i 3 są średniemi lub skrajnemi.

§ 174.

Z głównej własności proporcyi ilorazowej wynika jeszcze to: *że można mnożyć lub dzielić poprzedniki lub następniki przez jednakową liczbę, a proporcyja pozostanie dobrą* np. w proporcyi

$$3 : 9 = 2 : 6.$$

Mnożąc poprzedniki przez 5, będzie

$$3 \times 5 : 9 = 2 \times 5 : 6$$

Tu widzę, że pomnożywszy poprzednik 1-o stosunku 3 przez 5, powiększyłem tém samém i iloczyn skrajnych 5 razy, a mnożąc poprzednik 2-go stosunku 2 przez 5 iloczyn znowu średnich 5 razy się powiększył. Przeto iloczyn skrajnych zawsze jest równy iloczynowi średnich.

Również w proporcyi

$$15 : 28 = 30 : 56$$

podzieliwszy poprzedniki przez 5 będzie:

$$\tfrac{15}{5} : 28 = \tfrac{30}{5} : 56.$$

I tu podobnież dzieląc poprzednik 1-o stosunku 15 przez 5, zmniejszyłem iloczyn skrajnych 5 razy, a dzieląc poprzednik

2-o stosunku 30 przez 5, zmniejszyłem iloczyn średnich 5 razy; pozostał więc iloczyn skrajnych równym iloczynowi średnich, proporcyja zatém nie przestała być dobrą.

Tak samo okazać można, że mnożąc lub dzieląc następniki przez jednakową liczbę proporcyja będzie dobrą.

§ 175.

Wiadomo nam z własności stosunków ilorazowych (§ 154), że pomnożywszy lub podzieliwszy oba wyrazy stosunku przez jednakową liczbę, wykładnik się nie odmieni, a więc *pomnożywszy lub podzieliwszy oba wyrazy jednego stosunku proporcyi ilorazowej, albo też wszystkie wyrazy proporcyi przez jednakową liczbę, wykładniki się nie odmienią.*

np. w proporcyi:

$$15 : 28 = 30 : 56$$

pomnożywszy oba wyrazy 1-o stosunku przez 5 będzie:

$$15 \times 5 : 28 \times 5 = 30 : 56$$

albo też pomnożywszy oba wyrazy 2-o stosunku przez 5 otrzymam:

$$15 : 28 = 30 \times 5 : 56 \times 5.$$

Podobnież podzieliwszy oba wyrazy 1-o stosunku przez 5 mamy

$$\tfrac{15}{5} : \tfrac{28}{5} = 30 : 56.$$

lub znowu oba wyrazy 2-o stosunku podzieliwszy przez 5 będzie:

$$15 : 28 = \tfrac{30}{5} : \tfrac{56}{5}$$

Nakoniec raz pomnożywszy, a drugi raz podzieliwszy wszystkie wyrazy proporcyi przez 5 otrzymamy:

$$15 \times 5 : 28 \times 5 = 30 \times 5 : 56 \times 5$$

$$\tfrac{15}{5} : \tfrac{28}{5} = \tfrac{30}{5} : \tfrac{56}{5}.$$

We wszystkich tych przypadkach widzę, że jakakolwiek zmiana zaszła w iloczynie skrajnych, takaż sama zaszła i w iloczynie średnich, przeto proporcyja pozostała dobrą; nadto, ponieważ w każdym z tych przypadków ile razy się powiększył lub zmniejszył poprzednik, tyle razy również powiększył się lub zmniejszył następnik, przeto i wykładnik się nie odmienił.

§ 176.

Najważniejszym jednak wynikiem głównej własności proporcyi ilorazowej jest ten, że można zawsze wynaleść czwarty wyraz proporcyi której trzy wyrazy są wiadome, a to podług następującego prawidła któremu dano nazwę *reguły trzech.*

Żeby oznaczyć wyraz czwarty proporcyi ilorazowej której trzy wyrazy są wiadome, jeżeli wyraz niewiadomy jest skrajnym, należy iloczyn średnich rozdzielić przez wyraz skrajny wiadomy, a iloraz ztąd wypadły będzie skrajnym szukanym; gdy zaś niewiadomym jest wyraz średni, wtedy iloczyn skrajnych dzieli się przez średni wiadomy, a iloraz ztąd otrzymany będzie średnim szukanym.

Dowodzenie. Niech będzie proporcyja

$$15 : 28 = 30 : x$$

Ponieważ te cztery wyrazy stanowią proporcyją, przeto iloczyn skrajnych $15 \times x$ musi być równy iloczynowi średnich $28 \times 30 = 840$; skrajnym więc niewiadomym musi być taka liczba która pomnożona przez 15 da na iloczyn 840, musi nią być zatém iloraz powstały z podzielenia 840 przez 15, czyli że $x = \frac{840}{15} = 56$.

Podobnież wziąwszy proporcyją

$$13 : 39 = x : 12$$

Wiém że iloczyn średnich $39 \times x$ musi być równy iloczynowi skrajnych 13×12; a że $13 \times 12 = 156$, przeto wyraz niewiadomy musi być liczbą, która pomnożona przez 39 da na iloczyn 156, będzie nią przeto iloraz wypadły z podzielenia 156 : 39, to jest 4.

§ 177.

Proporcyje ilorazowe mają jeszcze inne własności, znacznie ułatwiające rozwiązywanie zagadnień. Własności te są następujące:

2-gą własnością *proporcyi ilorażowéj jest: że summa czyli ogół lub różnica wyrazów 1-o stosunku tak się ma do swego poprzednika lub następnika, jak ogół lub różnica wyrazów drugiego stosunku do swego poprzednika lub następnika.*

Dowodzenie. Weźmy proporcyją

$$20 : 5 = 32 : 8.$$

Dodawszy następnika każdego stosunku do swego poprzednika będzie:

$$20+5 : 5 = 32+8 : 8$$

Widzę tu że każdy z poprzedników zawiera w sobie o jednego następnika więcéj, wykładniki zatém w obu stosunkach są równe, zatém i proporcyja dobrą być musi.

Jeżeli w obu stosunkach tejże samej proporcyi odejmiemy następnika od jego poprzednika, będzie

$$20-5 : 5 = 32-8 : 8$$

Tu spostrzegam że oba poprzedniki zawierają w sobie o jednego następnika mniéj, wykładniki zatém w obu stosunkach są równe, przeto i proporcyja jest dobrą.

W proporcyi

$$20 : 5 = 32 : 8$$

zmieniwszy miejsce wyrazom stosunków, będzie:

$$5 : 20 = 8 : 32$$

Poprzednio już dowiedliśmy że ogół wyrazów 1-o stosunku tak się ma do swego następnika, jak ogół wyrazów 2-o stosunku do swego następnika; a zatém w tej proporcyi będzie

$$5+20 : 20 = 8+32 : 32.$$

Co porównawszy z daną proporcyją

$$20 : 5 = 32 : 8$$

przekonamy się o prawdzie, że tak się ma ogół wyrazów pierwszego stosunku do swego poprzednika, jak ogół wyrazów 2-o stosunku do swego poprzednika.

Podobnież w proporcyi:

$$5 : 20 = 8 : 32$$

na zasadzie dowiedzionej prawdy, że tak się ma różnica wyrazów 1-o stosunku do swego następnika, jak się ma różnica wyrazów 2-o stosunku do swego następnika będzie:

$$5-20 : 20=8-32 : 32.$$

Z porównania tej proporcyi z daną

$$20 : 5=32 : 8$$

wyprowadzamy, że tak się ma różnica wyrazów 1-o stosunku do swego poprzednika, jak różnica wyrazów 2-o stosunku do swego poprzednika.

§ 178.

W tych czterech proporcyjach

$$20+5 : 5=32+8 : 8$$
$$20+5 : 20=32+8 : 32$$
$$20-5 : 5=32-8 : 8$$
$$20-5 : 20=32-8 : 32$$

zmieniwszy miejsce średnim otrzymamy:

$$20+5 : 32+8= 5 : 8$$
$$20+5 : 32+8=20 : 32$$
$$20-5 : 32-8= 5 : 8$$
$$20-5 : 32-8=20 : 32$$

gdy te cztery ostatnie proporcyje porównany z daną

$$20 : 5=32 : 8$$

wyprowadzimy

3-ą własność *proporcyi ilorazowej, to jest: że tak się ma ogół lub różnica wyrazów 1-o stosunku do ogółu lub różnicy wyrazów drugiego stosunku jak poprzednik lub następnik 1-o stosunku do poprzednika lub następnika 2-o stosunku.*

§ 179.

Weźmy jeszcze proporcyją

$$20 : 5=32 : 8$$

zmieniwszy miejsce średnim będzie:

$$20 : 32=5 : 8$$

Na poprzednich zasadach utwórzmy 4 następne proporcyje:

$$20+32 : 32=5+8 : 8$$
$$20+32 : 20=5+8 : 5$$
$$20-32 : 32=5-8 : 8$$
$$20-32 : 20=5-8 : 5$$

W tych proporcyjach zmieńmy miejsce wyrazom średnim a otrzymamy:

$$20+32 : 5+8=32 : 8$$
$$20+32 : 5+8=20 : 5$$
$$20-32 : 5-8=32 : 8$$
$$20-32 : 5-8=20 : 5$$

Z porównania tych czterech proporcyi z daną $20 : 5 = 32 : 8$ wyprowadzamy

4-ą własność proporcyi ilorazowej, że: *tak się ma ogół lub różnica poprzedników, do ogółu lub różnicy następników, jak którykolwiek poprzednik do swego następnika.*

§ 180.

Własność ta daje się rozciągnąć na tyle stosunków ile się podoba, a więc:

Z ilukolwiek stosunków będzie złożona proporcyja, zawsze ogół lub różnica poprzedników tak się będzie miała do ogółu lub różnicy następników, jak którykolwiek poprzednik do swego następnika.

Dowodzenie.

Niech będą stosunki równe:

$$3 : 12=4 : 16=5 : 20=7 : 28.$$

Wziąwszy tylko dwa pierwsze stosunki, to podług (§ 179) że tak się ma ogół lub różnica poprzedników do ogółu lub różnicy następników jak którykolwiek poprzednik do swego następnika będzie:

$$3+4 : 12+16=4 : 16$$
$$3-4 : 12-16=4 : 16$$

Zamiast 4 : 16 wstawiam równy mu stosunek 5 : 20 i otrzymam:

$$3+4 : 12+16=5 : 20$$
$$3-4 : 12-16=5 : 20$$

Zastosowawszy do tych proporcyi powyższą własność będę miał proporcyje:

$$3+4+5 : 12+16+20=5 : 20$$
$$3-4-5 : 12-16-20=5 : 20$$

Zamiast stosunku 5 : 20 biorę równy mu stosunek 7 : 28, a będzie:

$$3+4+5 : 12+16+20=7 : 28$$
$$3-4-5 : 12-16-20=7 : 28$$

I znowu na zasadzie powyższej własności otrzymam:

$$3+4+5+7 : 12+16+20+28=7 : 28$$
$$3-4-5-7 : 12-16-20-28=7 : 28$$

Tu zamiast stosunku 7 : 28 mogę wziąść którykolwiek z równych mu stosunków.

§ 181.

Widzimy w § 179 że proporcyje.

$$20+32 : 5+8=32 : 8$$
$$20-32 : 5-8=32 : 8$$

mają drugie stosunki jednakowe, przeto pierwsze ich stosunki muszą także być równe, a połączone z sobą dadzą dobrą proporcyją, będzie zatém:

$$20+32 : 5+8=20-32 : 5-8$$

Co porównane z daną proporcyją

$$20 : 5=32 : 8$$

da nam wyprowadzić

5-tą własność proporcyi ilorazowej że: *tak się ma ogół poprzedników do ogółu następników, jak różnica poprzedników do różnicy następników.*

§ 182.

Podobnież (§ 179) w dwóch proporcyjach:

$$20+5 : 32+8=5 : 8$$
$$20-5 : 32-8=5 : 8$$

widzimy: że drugie stosunki są jednakowe, zatém pierwsze muszą być sobie równe i połączone z sobą dadzą dobrą proporcyją.

$$20+5 : 32+8=20-5 : 32-8 \quad (A)$$

Z porównania tej proporcyi z daną

$$20 : 5=32 : 8$$

wyprowadza się

6-ta własność proporcyi ilorazowej to jest że: *ogół wyrazów 1-o stosunku, tak się ma do ogółu wyrazów 2-go stosunku, jak różnica wyrazów 1-go stosunku, do różnicy wyrazów 2-go stosunku.*

§ 183.

W powyższéj proporcyi *(A)* zmieniwszy miejsce wyrazom średnim i porównawszy powstałą ztąd proporcyją z daną 20 : 5=32 : 8 będziemy mieli

$$20+5 : 20-5=32+8 : 32-8$$

a z tego otrzymujemy

7-ą własność proporcyi ilorazowej że: *ogół wyrazów 1-go stosunku tak się ma do ich różnicy, jak ogół wyrazów drugiego stosunku do różnicy tychże.*

§ 184.

8-a własność proporcyi ilorazowej jest: *jeżeli odpowiednie wyrazy kilku proporcyi pomnożymy przez siebie, to iloczyny ztąd wypadłe dadzą także dobrą proporcyją.*

Dowodzenie

Weźmy np. trzy proporcyje:

$$2 : 5=6 : 15$$
$$4 : 7=8 : 14$$
$$3 : 11=9 : 33$$

Wiadomo nam już, że stosunki dają się wyrazić w kształcie ułamków, mogę przeto dane proporcyje w ten sposób wystawić

$$\frac{2}{5}=\frac{6}{15}$$
$$\frac{4}{7}=\frac{8}{14}$$
$$\frac{3}{11}=\frac{9}{33}.$$

pomnożywszy odpowiednio te równości przez siebie, iloczyny ztąd wypadłe będą widocznie równe, a zatém

$$\frac{2\times4\times3}{5\times7\times11}=\frac{6\times8\times9}{15\times14\times33}$$

Wystawiwszy to w formie zwyczajnej proporcyi będzie:

$$2\times4\times3 : 5\times7\times11=6\times8\times9 : 15\times14\times33$$

co było do okazania.

O Proporcyi ilorazowej ciągłej.

§ 185.

Proporcyją ilorazową ciągłą zowiemy taką proporcyją, której wyrazy średnie są jednakowe, np. $12 : 6=6 : 3$; przez skrócenie piszemy ją tak $\div\!\div\ 12 : 6 : 3\ \div\!\div$ lecz wymawiamy zawsze 12 do 6 jak 6 do 3-ch.

W tym wypadku również iloczyn skrajnych jest równy iloczynowi średnich.

Każdy ze średnich wyrazów nazywa się *średnio jeometrycznie proporcyjonalnym.*

Wyprowadzone poprzednio prawidła dla proporcyj ilorazowych mogą również być zastosowane do proporcyi ilorazowej ciągłej, zrobimy tu jednak tę uwagę że:

Wyraz średni proporcyi jeometrycznej jest równy pierwiastkowi kwadratowemu z iloczynu wyrazów skrajnych. Aby się o tém przekonać weźmy proporcyją:

$$4 : 8=8 : 16$$

Ponieważ $8^2=4\times16$, zatém $8=\sqrt{4\times16}=8$.

O Skracaniu wyrazów proporcyi ilorazowej.

§ 186.

Powyżej (§ 175) dowiedliśmy że wykładnik stosunku ilorazowego się nie odmieni, jeśli oba wyrazy stosunku podzielimy przez jednakową liczbę, przytém i to, że podzieliwszy poprzedniki lub następniki przez jednakową liczbę, proporcyja nie przestanie być dobrą. Na tych zasadach dokonywają się skracania wyrazów proporcyj.

Weźmy np. proporcyją:

$$36 : 24 = 39 : x$$

tu widzę, że oba wyrazy 1-o stosunku są podzielne przez 12, otrzymam przeto:

$$3 : 2 = 39 : x$$

Uważam jeszcze, że poprzedniki dają się dzielić przez 3, będzie więc:

$$1 : 2 = 13 : x$$

Oczywistą jest rzeczą, że z tej ostatniej proporcyi daleko dogodniéj wyprowadzić wyraz 4-ty niż z poprzedniej.

§ 187.

Na tej samej zasadzie zamieniamy ułamkowe wyrazy proporcyi na całkowite, np.

$$\tfrac{3}{4} : \tfrac{2}{3} = \tfrac{5}{6} : x$$

Wyrazy pierwszego stosunku sprowadzam do jednego mianownika i opuszczam mianowniki (§ 156); a będzie:

$$9 : 8 = \tfrac{5}{6} : x$$

zamieniam całkowitą 9 na ułamek z mianownikiem 6 i opuszczam mianowniki w poprzednikach, co mi da

$$54 : 8 = 5 : x.$$

§ 188.

W podobny też sposób uwalniam proporcyją od ułamków dziesiętnych; np.

$$0{,}04 : 2{,}3 = 5{,}186 : x$$

Mnożę oba wyrazy 1-o stosunku przez 100 (§ 175); a będzie:

$$4 : 230 = 5{,}186 : x$$

W tej znowu proporcyi mnożę poprzedniki przez 1000 i otrzymam.

$$4000 : 230 = 5186 : x.$$

Przykłady dla wpraw.

Wynaleść niewiadomą x w następujących proporcyjach:

1). $7 : 8 = 21 : x \quad (x=24)$

2). $10 : 35 = x : 255 \quad (x=72\tfrac{6}{7})$

3). $144 : x = 740 : 370 \quad (x=72)$

4). $x : 28 = 2 : 8 \quad (x=7)$

5). $3\tfrac{1}{2} : x = 4\tfrac{1}{2} : 1 \quad (x=\tfrac{7}{9})$

6). $\tfrac{3}{4} : 5 = \tfrac{6}{7} : x \quad (x=5\tfrac{15}{21})$

7). $0,3 : x = 0,48 : 0,9 \quad (x=\tfrac{9}{16})$

8). $18,2 : 54,60 = x : 1,80 \quad (x=\tfrac{3}{5})$

9). $2\tfrac{1}{2} : 3\tfrac{3}{5} = 250 : x \quad (x=360)$

10). $3\tfrac{2}{3} : 0,4 = \tfrac{5}{7} : x \quad (x=\tfrac{6}{77}$

11). $4,20 : x = 21 : 0,6 \quad (x=\tfrac{3}{25})$

12). $x : 2\tfrac{1}{2} = 2,50 : 2,60 \quad (x=4\tfrac{17}{52})$

13). $\tfrac{1}{2} : \tfrac{1}{8} = 2\tfrac{1}{4} : x \quad (x=\tfrac{9}{16})$

14). $3\tfrac{1}{4} : x = 8\tfrac{2}{3} : 4\tfrac{1}{5} \quad (x=39)$

15). $548 : 12\tfrac{1}{2} = x : \tfrac{2}{5} \quad (x=4\tfrac{48}{125})$

16). $1\tfrac{1}{2} : x = 2\tfrac{1}{3} : 3\tfrac{1}{4} \quad (x=2\tfrac{5}{56})$

17). $1,2 : 3,6 = x : 3,9 \quad (x=13)$

18). $x : \tfrac{5}{6} = 0,5 : \tfrac{4}{7} \quad (x=\tfrac{35}{48})$

19). $8 : 0,3 = \tfrac{3}{4} : x \quad (x=\tfrac{9}{320})$

20). $15 : 60 = x : \tfrac{3}{5} \quad (x=\tfrac{3}{20})$

21). $1\tfrac{2}{3} : x = 3 : 4\tfrac{2}{7} \quad (x=2\tfrac{8}{21})$

22). $5 : 3 = x : 3,2 \quad (x=5\tfrac{1}{3})$

23). $0,03 : 0,3 = 5,01 : x \quad (x=50,1)$

24). $∺\ 5 : 20 : x\ ∺ \quad (x=80)$

25). $∺\ 4 : x : 9\ ∺ \quad (x=6)$

26). $∺\ 3\tfrac{1}{2} : 2 : x\ ∺ \quad (x=1\tfrac{1}{7})$

27). $∺\ \tfrac{3}{8} : 12\tfrac{3}{4} : x\ ∺ \quad (x=433\tfrac{1}{2})$

28). $\tfrac{1}{2} : \tfrac{5}{6} = \tfrac{3}{7} : x \quad (x=1\tfrac{5}{21})$

29). $0{,}3 : 5 = x : 33{,}5$ $(x=2{,}01)$

30). ∺ $3 : 4 : x$ ∺ $(x=5\frac{1}{3})$

31). $5 : 1{,}8 = x : 72$ $(x=200)$

32). $x : 1\frac{1}{2} = 2\frac{1}{2} : 1\frac{1}{4}$ $(x=3)$

33). $\frac{1}{4} : \frac{1}{2} = x : 6$ $(x=3)$

Rozdział III.

Zastosowania proporcyj

Reguła Trzech.

§ 189.

Przy rozwięzywaniu matematycznych zagadnień zastanawiąmy się najczęściej nad dwiema ilościami, które tak od siebie zależą, że jeżeli jedna z nich powiększa się pewną liczbę razy, i druga jednocześnie takąż liczbę razy powiększyć się musi; o takich ilościach mówimy, że się różnią od siebie w tym samym stosunku, albo inaczej że są do siebie proporcyonalne.

Wartość naprzykład zboża zależy od ilości tegoż. Jeżeli kupujemy dwa razy więcéj to i summa pieniędzy, jaką za nie płacimy, będzie dwa razy większa; kupując zaś ilość trzy razy większą, i summa pieniędzy trzy razy większą być musi; jedném słowem, wartość zboża zależy od jego ilości, czyli jest proporcyonalną do ilości.

§ 190.

Zdarza się jednak, że kiedy jedna ilość powiększa się pewną liczbę razy, druga zależna od niej ilość staje się takąż liczbę razy mniejszą; w tym razie mówimy, że dwie ilości są do siebie w stosunku odwrotnym, czyli że są odwrotnie proporcyonalne.

Naprzykład ilość zboża jaką kupić można za oznaczoną summę zależy od ceny korca lub czećwierci: jeżeli korzec lub czećwierć zboża kosztuje dwa razy więcéj, to za tęż samą ilość pieniędzy dwa razy mniéj zboża dostanie; jeżeli cena takiéjże miary jest trzy razy większa, to za oznaczoną summę trzy razy mniéj dostaniemy zboża. Z tego widzimy, że ilość zboża jaką kupić można za oznaczoną summę jest w odwrotnym stosunku do ceny miary na jaką się kupuje.

§ 191.

Trafia się też często że ilość szukana zależy od kilku innych. I tak ciężar sztaby metalowéj pewnéj grubości zależy od długości i szerokości tej sztaby.

Jeżeli długość jest dwa razy większa, to i ciężar jej dwa razy większy być musi. Podobnież jeżeli szerokość sztaby jest dwa razy większa przy tej samej długości, ciężar jej także będzie dwa razy większy. Ciężar więc powiększa się lub zmniejsza w tym samym stosunku co długość i szerokość.

Ciężar sztaby zawisłym jest również od jej grubości, jeżeli sztaba jest dwa razy grubsza przy tej samej długości i szerokości, to i ciężar jej będzie dwa razy większy. Ciężar zatém sztaby jest proporcyonalny do jej długości, szerokości i grubości.

§ 192.

Podobnież długość drogi jaką wysypać można, zależy od ilości posiadanych kamieni i od wymaganej grubości warstwy.

Mając dwa razy więcéj kamieni można wysypać podwójną ilość drogi, jeżeli grubość warstwy jest taż sama. Ale gdy grubość warstwy będzie dwa razy większa, taż sama ilość kamieni wystarczy na usypanie dwa razy mniejszej długości drogi. Przeto długość usypanej drogi jest w tym samym stosunku z ilością kamieni, ale z grubością warstwy pozostaje w stosunku odwrotnym.

§ 193.

Żeby rozwiązać zagadnienia podobnego rodzaju, należy mieć dane trzy liczby z którychby dwie były jednego z sobą gatunku a trzecia innego, szukana zaś czwarta liczba powinna być tego gatunku, jakiego jest wyraz trzeci i pozostawać z nim w tymże samym stosunku w jakim pozostają dwie pierwsze między sobą.

§ 194.

Już (w § 178) wzmiankowaliśmy, że prawidło podług którego do trzech danych liczb wynajdujemy czwartą proporcyjonalną nazywa się *Regułą trzech*, i że prawidło to jest najważniejszym wynikiem tej głównej własności proporcyi: że iloczyn wyrazów skrajnych jest równy iloczynowi wyrazów średnich. Jeżeli niewiadomym jest wyraz skrajny, to należy iloczyn wyrazów średnich podzielić przez skrajny wiadomy a na iloczyn otrzymamy wyraz skrajny niewiadomy. Kiedy zaś szukamy wyrazu średniego w takim razie, iloczyn skrajnych podzielony przez średni wiadomy, wyda na iloraz średni wyraz szukany.

Przystąpmy więc do rozwięzywania zagadnień za pomocą tego prawidła.

§ 195.

1. **Przykład.** Kupiono 7 czećwierci pszenicy za 45 rubli, ileż wypadnie zapłacić za 16 czećwierci tego samego gatunku pszenicy?

Rozumowanie.

Widoczną jest rzeczą, że ile razy większą jest ilość pszenicy którą kupić chcemy, tyle razy więcéj zapłacić za nią należy. Ile razy przeto 7 czećwierci są mniejsze od 16 czećwierci, tyle razy 45 rubli, wartość 7 czećwierci, są mniejsze od niewiadomej wartości 16 czećwierci.

Mamy przeto dwa stosunki równe, to jest 7 czećwierci do 16 czećwierci i 45 rubli do x rubli, można więc z nich ułożyć następną proporcyą:

$$\begin{array}{cccc} \text{cz.} & \text{cz.} & \text{rub.} & \text{rub.} \\ 7 & : 16 = & 45 & : x \end{array}$$

a z tego na zasadzie prawidła reguły trzech,

$$x = \frac{16 \times 45}{7} = 117\tfrac{1}{7} \text{ rubli.}$$

Działanie to przedstawia się w ten sposób:

$$\begin{array}{r|l} 7 : 16 = 45 : x & \\ 16 & \\ \hline 270 & \\ 45 & \\ \hline 720 & 7 \\ 12 & \overline{117\tfrac{1}{7}} \\ \hline 50 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

Zatém 16 korcy kosztują $117\tfrac{1}{7}$ rubli.

§ 196.

Dla ułatwienia roboty należy przedewszystkiém dokonać wszelkie możebne uproszczenia w proporcyi.

2. **Przykład.** Jeżeli za 3180 korcy pszenicy zapłacono 19080 rubli, za 36288 rubli ile kupimy pszenicy?

Rozumowanie.

Im większa jest summa rubli tym więcéj za nią dostanie pszenicy, stosunek tu jest prosty; ile razy przeto wartość wiadomej liczby korcy 19080 rubli jest mniejsza od 36288 rubli, tyle razy i 3180 korcy są mniejsze od szukanej liczby korcy, mamy więc proporcyą:

$$\begin{array}{cccc} \text{r.} & \text{r.} & \text{k.} & \text{k.} \\ 19080 & : 36288 = & 3180 & : x \end{array}$$

Podzieliwszy poprzedniki przez 10 będzie

$$\begin{array}{cccc} \text{r.} & \text{r.} & \text{k.} & \text{k.} \\ 1908 & : 36288 = & 318 & : x \end{array}$$

Dzielę wyrazy 1-o stosunku przez 9

$$\begin{array}{cccc} \text{r.} & \text{r.} & \text{k.} & \text{k.} \\ 212 & : 4032 = & 318 & : x \end{array}$$

i jeszcze też wyrazy przez 4.

$$\begin{array}{cccc} \text{r.} & \text{r.} & \text{k.} & \text{k.} \\ 53 & : 1008 = & 318 & : x \end{array}$$

Uważam że poprzedniki dają się skrócić przez 53, zatém:

$$\begin{array}{cccc} \text{r.} & \text{r.} & \text{k.} & \text{k.} \\ 1 & : 1008 = & 6 & : x \end{array}$$

a z tego

$$x = \frac{1008 \times 6}{1}$$

czyli $x = 6 \times 1008 = 6048$ korcy.

Szukana przeto ilość korcy jest 6048.

W obu podanych zagadnieniach niewiadoma ilość, stanowiąca czwarty wyraz proporcyi, odpowiadała drugiemu, a jednogatunkowy z nią trzeci wyraz odpowiadał wyrazowi pierwszemu proporcyi. To jest w 1-ym zagadnieniu szukana liczba rubli odpowiadała liczbie 16 czećwierci jaką za te pieniądze można było kupić, tak samo jak i trzeci wyraz 45 odpowiadał pierwszemu wyrazowi proporcyi czyli 7-u korcom.

Z tego widzimy, że w tém zagadnieniu niewiadoma z wiadomą tego samego gatunku zostaje w prostym stosunku z pozostałemi dwoma danemi wyrazami; ale nie zawsze tak bywa.

§ 197.

3. **Przykład.** Na jakąś suknią wychodzi $4\frac{1}{4}$ łokci sukna szerokiego na $1\frac{7}{8}$ łokcia: ileż potrzeba kupić sukna na $2\frac{1}{8}$ łokcia szerokiego aby wystarczyło na takąż samą suknią?

Rozumowanie.

Im szersze sukno tym go mniéj wyjdzie na tęż samą suknią. Ile razy przeto szerokość $2\frac{1}{8}$ łokcia jest większą od szerokości $1\frac{7}{8}$, tyle razy i $4\frac{1}{4}$ łokcia długości sukna jest większa od szukanej długości sukna; to jest

$$\begin{array}{cccc} \text{Sz.} & \text{Sz.} & \text{Dł.} & \text{Dł.} \\ 2\frac{1}{8} : & 1\frac{7}{8} = & 4\frac{1}{4} : & x \end{array}$$

Włączam całkowite w ułamki

$$\begin{array}{cccc} \text{Sz.} & \text{Sz.} & \text{Dł.} & \text{Dł.} \\ \frac{17}{8} : & \frac{15}{8} = & \frac{17}{4} : & x \end{array}$$

mnożę wyrazy 1-o stosunku przez 8

$$17 : 15 = \frac{17}{4} : x$$

Podzieliwszy poprzedniki przez 17 będzie

$$1 : 15 = \frac{1}{4} : x$$

a z tego

$$x = 15 \times \frac{1}{4} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4} \text{ łokciom.}$$

W tym przykładzie niewiadoma liczba i wiadoma tegoż samego gatunku są w odwrotnym stosunku do pozostałych wyrazów

§ 198.

4. **Przykład.** 48 Robotników potrzebowało 20 dni do wykonania pewnej roboty, chcąc tęż samą robotę ukończyć w 15 dniach ilu potrzeba użyć robotników?

R.	Dn.
48	20
x	15

Rozumowanie.

Ponieważ w mniejszym czasie życzymy sobie ukończyć tę robotę, przeto więcéj robotników użyć nam wypadnie. Ile razy przeto 15 dni są mniejsze od 20 dni tyle razy i liczba 48 robotników jest mniejsza od niewiadomej liczby tychże; będzie zatém proporcya

$$\begin{matrix} d. & & d. & & r. & & r. \\ 15 & : & 20 & = & 48 & : & x. \end{matrix}$$

Upraszczam pierwszy stosunek dzieląc jego wyrazy przez 5

$$3 : 4 = 48 : x$$

Poprzedniki dzielę przez 3.

$$1 : 4 = 16 : x.$$

z tąd

$$x = 4 \times 16 = 64 \text{ robotnikom.}$$

Trzeba więc 64 robotników do ukończenia tejże roboty w 15 dniach.

§ 199.

Na zasadzie poprzedniego, możemy podać następujące prawidła na rozwiązywanie zagadnień podobnego rodzaju.

1. *Wypisać zadanie tak aby ilości tego samego gatunku pod sobą się znajdowały.*

2. *Rozpoznać czy niewiadoma ilość i wiadoma tegoż samego gatunku są w prostym lub odwrotnym stosunku do pozostałych dwóch danych ilości.*

3. *Pamiętać na to, że w jednym stosunku mogą być tylko ilości tegoż samego gatunku.*

4. *Układanie proporcyi zaczynać od drugiego stosunku biorąc za następnik niewiadomą, którą przez x się oznacza, potém pisze się pierwszy stosunek tak, aby następnik jego był większy lub mniejszy od poprzednika, podług tego czy x ma być większe lub mniejsze od swego poprzednika.*

5. *Porobić wszelkie uproszczenia na jakie tylko podzielność liczb pozwala.*

6. *Nakoniec oznaczyć wartość niewiadoméj podług prawideł podanych w § 30.*

Rozwiążmy na zasadzie tego prawidła następujące zagadnienia.

§ 200.

5. **Przykład.** Jedna maszyna zrobiła 34 arszyny materyi w 8 godzinach; ileż będzie potrzebować czasu dla zrobienia 238 arszynów tejże materyi.

Piszę zagadnienie w wymaganym porządku tak:

Ar.	god.
34	8
238	x

Rozumowanie. Im więcéj arszynów materyi ma utkać maszyna, tym więcéj czasu na to potrzebować będzie; przeto wyrazy stosunku drugiego są w prostym stosunku do wyrazów stosunku 1-go. Przytém, ponieważ więcéj arszynów materyi ma utkać maszyna, zatém szukana liczba godzin czyli następnik drugiego stosunku x będzie większy od swego poprzednika 8, więc i następnik 1-go stosunku musi być większy od swego poprzednika;

Układamy przeto proporcyją:

ar. ar. g. g.

$$34 : 238 = 8 : x$$

Upraszczam przez 2 wyrazy 1-go stosunku a będzie

$$17 : 119 = 8 : x$$

Też same wyrazy dzielę przez 17 i otrzymam:

$$1 : 7 = 8 : x$$

ztąd:

$$x = 7 \times 8 = 56 \text{ godzinom.}$$

Zatém do zrobienia 238 arszynów tejże materyi maszyna potrzebuje 56 godzin.

§ 201.

6. **Przykład.** 29 robotników ukończyli pewną robotę w 18 dniach, ile czasu użyje 87 robotników dla dokonania tejże roboty?

r.	d.
29	18
87	x.

Rozumowanie. Im więcéj robotników tym mniéj użyją dni dla wykonania tejże saméj roboty; ztąd widzę że wyrazy stosunku 2-go są w odwrotnym stosunku do wyrazów 1-go stosunku; nadto że niewiadoma x czyli następnik 2-go stosunku będzie mniejszy od swego poprzednika 18, przeto i następnik 1-go stosunku musi być mniejszy od swego poprzednika; będzie więc proporcyja:

$$\overset{\text{r.}}{87} : \overset{\text{r.}}{29} = \overset{\text{d.}}{18} : \overset{\text{d.}}{x}.$$

Upraszczam dzieląc poprzedniki przez 3.

$$\overset{\text{r.}}{29} : \overset{\text{r.}}{29} = \overset{\text{d.}}{6} : \overset{\text{d.}}{x}.$$

A podzieliwszy wyrazy 1-go stosunku przez 29 będzie:

$$1 : 1 = 6 : x$$

ztąd

$$x = 6 \text{ dniom}$$

A więc 87 robotników użyją tylko dni 6 na wykonanie tejże saméj roboty.

§ 202.

7. **Przykład.** Lokomotywa przebywając 10 łokci w 1-ej sekundzie potrzebowała 20 minut na przebycie pewnéj drogi. Ileż czasu potrzebować będzie na przebieżenie tegoż samego odstępu przy prędkości 13 łokci na sekundę?

łok.	min.
10	20
13	x.

Rozumowanie. Wtém zagadnieniu rozważamy prędkość lokomotywy i czas jakiego potrzebuje na przebieżenie tejże samej odległości.

Ubiegając 13 łokci w 1-ej sekundzie będzie potrzebować mniéj czasu na przebycie tejże drogi, stosunek tu będzie odwrotny; widzę przytém że x minut będzie mniejsze od swego poprzednika 20 minut, zatém i następnik 1-o stosunku musi być także mniejszy od swego poprzednika. Taką więc ułożymy proporcyją:

$$13 : 10 = 20 : x$$

ztąd

$$x = \frac{10 \times 20}{13} = \frac{200}{13} = 15\frac{5}{13} \text{ minutom.}$$

Przeto lokomotywa przy prędkości 13 łokci na sekundę przebiegnie tęż przestrzeń w 15 $\frac{5}{13}$ minutach.

§ 203.

8. **Przykład.** Okręt mający w swym magazynie żywności na dni 12, spędzony został wiatrem ze swéj drogi tak dalece, że to może opóźnić jego podróż o dni 18, o ileż z tego powodu należy zmniejszyć dzienną racyją każdego człowieka?

Rozumowanie.

Oznaczam przez 1 dzienną racyją każdego człowieka przed spędzeniem z drogi okrętu, i przez x dzienną racyją

*

każdego z ludzi wtedy gdy podróż ma trwać $12+18=30$ dni.

Racyja szukana będzie tyle razy mniejsza od 1, ile razy czas 12 dni, na który miała wystarczyć, będzie mniejszy od 30 dni na które ma wystarczyć; czyli inaczéj mówiąc racyja każdego człowieka będzie w stosunku odwrotnym do liczby dni jaką ma trwać podróż.

Napiszę więc proporcyją:

$$\begin{array}{cccc} \text{d.} & \text{d.} & \text{r.} & \text{r.} \\ 30 : & 12 = & 1 : & x. \end{array}$$

Wyrazy 1-o stosunku skracam przez 6

$$5 : 2 = 1 : x$$

ztąd

$$x = \tfrac{2}{5} \text{ racyi.}$$

Racyja więc każdego człowieka będzie $\frac{2}{5}$ części poprzedniéj.

Reguła Trzech Złożona.

§ 204.

9. **Przykład.** 40 robotników potrzebowało 24 dni na wykopanie 600 sążni rowu, w iluż dniach 25 robotników wykopie 500 sążni takiegoż samego rowu?

$$\begin{array}{ccc} \text{r.} & \text{sąż.} & \text{dn.} \\ 40 & 600 & 24 \\ 25 & 500 & x. \end{array}$$

Rozumowanie.

Gdyby 25 robotników miało kopać rów także na 600 sążni długi, to na jego wykopanie użyłoby więcéj czasu niż dni 24, i w takim razie x dni byłoby tyle razy większe od 24, ile razy 25 jest mniejsze od 40; z tego widzę że ilość dni jest w stosunku odwrotnym do liczby robotników; mam przeto proporcyją.

$$25 : 40 = 24 : x \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Nie dochodząc wartości x uważam je za wiadomą ilość dni, w jakiej 25 robotników wykopie 600 sążni rowu. Pozostaje mi więc następne zadanie do rozwiązania:

Jeżeli 25 robotników w x dniach wykopało 600 sążni rowu, w iluż dniach wykopią 500 sążni podobnego rowu?

Oznaczam przez x' (wymów x prim) liczbę dni odpowiednią téj nowéj robocie i rozumuję daléj: kiedy 25 robotników wykopało w x dniach 600 sążni rowu, to 500 sążni takiegoż rowu wykopią w krótszym czasie; zatém x' jest mniejsze od swego poprzednika x tyle razy, ile razy 500 jest mniejsze od 600; stosunek przeto między długością rowu a liczbą dni zachodzący jest prosty; mamy więc

$$600 : 500 = x : x' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

pomnożywszy odpowiednie wyrazy proporcyj (1) i (2) przez siebie (§ 186) otrzymamy:

$$600 \times 25 : 500 \times 40 = 24 \times x : x \times x'$$

Zniosłszy czynnik x wspólny obu wyrazom 2-go stosunku i podzieliwszy wyrazy 1-go stosunku przez 100 będzie:

$$6 \times 25 : 5 \times 40 = 24 : x'$$

ztąd

$$x' = \frac{5 \times 40 \times 24}{6 \times 25}$$

Znosząc czynniki wspólne licznikowi i mianownikowi otrzymamy

$$x' = \frac{40 \times 4}{5} = \frac{8 \times 4}{1} = 8 \times 4 = 32 \text{ dniom}$$

A zatém 25 ludzi do wykopania 500 sążni rowu będą potrzebować 32 dni.

§ 205.

10. **Przykład.** 25 uczni może w 12 dniach napisać 2700 stronnic, na każdéj stronnicy po 28 wierszy; w iluż dniach 35 uczni napisze 3600 stronnic, pracując z tąż samą pilnością, jeżeli na każdéj stronnicy mieścić będą tylko po 20 wierszy?

ucz.	dn.	str.	wier.
25	12	2700	28
35	x	3600	20.

Rozumowanie. Przypuszczam że 35 uczni ma także napisać 2700 stronnic mieszcząc na każdéj po 28 wierszy; a że ich jest więcéj, przeto mniéj czasu potrzebować będą i to tyle razy mniéj ile razy jest ich więcéj; x zatém jest mniejsze od swego poprzednika 12; stosunek zaś zachodzący między liczbą uczni a czasem jest odwrotny. Mamy więc proporcyją:

ucz. ucz. dn. dn.

$$35 : 25 = 12 : x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

Uważając x za wiadomą liczbę dni, których 35 uczni użyje do napisania 2700 stronnic mieszcząc po 28 wierszy na każdéj, układam zadanie następujące:

Jeżeli 35 uczni potrzebowało x dni do napisania 2700 stronnic po 28 wierszy na każdéj, iluż dni użyje taż sama liczba uczni dla napisania 3600 stronnic mieszcząc na każdéj po tyleż wierszy? Oznaczam szukaną teraz liczbę dni przez x', i rozumuję: im więcéj mają napisać, tym więcéj czasu zużyją, przeto x' będzie większe od swego poprzednika x; stosunek tu zachodzący jest prosty, mamy zatém

$$2700 : 3600 = x : x' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

Uważając jak wyżéj x' za wiadomą liczbę dni, w któréj 35 uczni napisze 3600 stronnic po 28 wierszy na każdéj, pozostanie mi tylko rozwiązać zagadnienie:

Jeżeli 35 uczni w dniach x' napisze pewną ilość stronnic mieszcząc po 28 wierszy na każdéj, to w iluż dniach napiszą takąż samą liczbę stronnic mieszcząc po 20 wierszy na jednéj?

Im mniéj wierszy będą mieścić na stronnicy tym mniéj czasu na napisanie tychże użyją; przeto ilość dni którą przez x'' oznaczam będzie mniejsza od swego poprzednika x'. Zachodzący tu stosunek między czasem a liczbą wierszy jest prosty; otrzymam więc proporcyją:

$$28 : 20 = x' : x'' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Odpowiednie wyrazy tych 3-ch proporcyi (1), (2) i (3) mnożę przez siebie, a będzie

$$35 \times 2700 \times 28 : 25 \times 3600 \times 20 = 12 \times x \times x' : x \times x' \times x''$$

Podzieliwszy wyrazy 2-go stosunku przez $x \times x'$ otrzymam:

$$35 \times 2700 \times 28 : 25 \times 3600 \times 20 = 12 : x''$$

z tego

$$x'' = \frac{25 \times 3600 \times 20 \times 12}{35 \times 2700 \times 28}$$

Obą wyrazy tego ułamku podzieliwszy przez 5, potém przez 9, następnie przez 4 i nakoniec przez 3, będzie:

$$x'' = \frac{5 \times 4 \times 5 \times 12}{7 \times 3 \times 7} = \frac{5 \times 4 \times 5 \times 4}{7 \times 7} = \frac{400}{49} = 8\tfrac{8}{49} \text{ dniom.}$$

§ 205.

Uwaga. Przypatrzywszy się powyższej wartości:

$$x'' = \frac{25 \times 3600 \times 20 \times 12}{35 \times 2700 \times 28}$$

widzimy, że ona ta może być rozłożona na 2 czynniki główne, z których jednym będzie 12, a drugim ułamek

$$\frac{25 \times 3600 \times 20}{35 \times 2700 \times 28}.$$

To ostatnie wyrażenie można rozłożyć na 3 czynniki to jest:

$$\tfrac{25}{35} \times \tfrac{3600}{2700} \times \tfrac{20}{28}$$

Tu widzę że 1-y czynnik 12 jest liczbą jednogatunkową z niewiadomą, 2-i czynnik $\frac{25}{35}$ jest wykładnikiem odwrotnego stosunku między danemi liczbami uczni; 3-ci czynnik $\frac{3600}{2700}$ jest wykładnikiem prostego stosunku między danemi liczbami stronnic; nakoniec 4-ty czynnik $\frac{20}{28}$ jest wykładnikiem prostego stosunku między danemi liczbami wierszy.

Z tego wyprowadzamy: *że w regule 3-ch złożonéj niewiadomy wyraz jest równy wiadomemu tegoż samego gatunku, rozmnożonemu przez iloczyn ze wszystkich wykładników pozostałych jednogatunkowych stosunków.*

§ 206.

11. **Przykład.** 25 ludzi pracując po 9 godzin dziennie, potrzebowało 12 dni na wykopanie rowu 50 stóp długiego, na 4 stopy szerokiego i na 6 stóp głębokiego; iluż potrzeba będzie użyć ludzi, którzyby pracując po 10 godzin w przeciągu 18 dni, wykopali rów na 100 stóp długi, na 3 stopy szeroki a na 4 stopy głęboki, przytém na ziemi dwa razy trudniejszéj do kopania?

lud.	dn.	god.	dł.	sz.	gł.	tr.
25	12	9	50	4	6	1
x	18	10	100	3	4	2.

Przedstawimy tu w jakim porządku zagadnienia tego rodzaju powinny być wykonywane.

$$\begin{array}{l}
\text{dn.}\quad \text{dn.}\quad \text{lud.}\\
18 : 12 = 25 : x\\
\text{go.}\quad \text{go.}\\
10 : 9 = x : x'\\
\text{dł.}\quad \text{dł.}\\
50 : 100 = x' : x''\\
\text{sz.}\quad \text{sz.}\\
4 : 3 = x'' : x'''\\
\text{gł.}\quad \text{gł.}\\
6 : 4 = x''' : x''''\\
\text{tr.}\quad \text{tr.}\\
1 : 2 = x'''' : x'''''
\end{array}$$

$$18\times10\times50\times4\times6\times1 : 12\times9\times100\times3\times4\times2 = 25\times x\times x'\times x''\times x'''\times x'''' : x\times x'\times x''\times x'''\times x''''\times x'''''.$$

Ilości x, x', x'', x''', x'''' wyrzucają się jako wspólne czynniki; przeto będzie:

$$x''''' = \frac{12\times9\times100\times3\times4\times2\times25}{18\times10\times50\times4\times6\times1.}$$

Po wyrzuceniu wspólnych czynników z obu wyrazów tego ułamku otrzymamy:

$$x'''''=\frac{2\times3\times5}{1}=30 \text{ ludziom.}$$

Do téj roboty przeto potrzeba 30 ludzi.

Przy układaniu powyższych stosunków rozumuję w sposób następujący:

1) Jeżeli 25 robotników kopiąc rów na 50 stóp długi, na 4 szeroki, a na 6 głęboki, ukończyli robotę w 12 dniach, pracując po 9 godzin dziennie; iluż robotników będzie w stanie wykopać tenże rów w dniach 18-tu przy tych samych warunkach?

Im dłużéj tęż samą pracę mają dokonywać tém mniéj trzeba ludzi, przeto x, szukana liczba robotników, jest mniejsze od swego poprzednika 25 robotników; stosunek tu zachodzący między robotnikami a czasem jest odwrotny i ułożymy: $18 : 12 = 25 : x$.

2) Uważając x za wiadomą liczbę robotników potrzebną do wykonania powyższéj roboty w dniach 18, takie rozwięzuję zagadnienie.

Jeżeli x robotników pracując przez dni 18 po 9 godzin wykonali powyższą (N. 1) pracę; iluż potrzeba robotników, aby pracując po 10 godzin dziennie, tęż robotę w tyluż dniach ukończyli?

Im więcéj godzin dziennie mają pracować, tym mniéj trzeba robotników, przeto szukana liczba robotników x' będzie mniejsza od poprzednio znalezionej x robotników, zatém stosunek tu również jest odwrotny; ztąd więc $10 : 9 = x : x'$

3) Uważając znowu x' za wiadomą liczbę robotników, która wskazaną w N. 1 robotę ukończyła w dniach 18 pracując po 10 godzin dziennie, rozwięzuję teraz zadanie:

Jeżeli x' robotników ukończyli rów długi na 50 st. szeroki na 4, głęboki na 6, pracując przez dni 18 po 10 godzin dziennie; to iluż robotników wykopie 100 stóp takiegoż rowu przy tych samych warunkach?

Im dłuższy rów, tym dla jego wykopania w tym samym czasie więcéj trzeba ludzi; przeto niewiadoma x'' jest większa od x'; stosunek zatém między liczbą robotników a długością rowu jest prosty; z tego wynika proporcyja 3-cia: $50 : 100 = x' : x''$

4) Uważając podobnież x'' za wiadomą liczbę robotników, którzy pracując przez 18 dni po 10 godzin dziennie, wykopali rów długi na 100 st., szeroki na 4, głęboki na 6, zadaję sobie pytanie; ilu trzeba robotników aby przy tych samych warunkach wykopali rów tyleż długi i głęboki ale szeroki tylko na 3 stopy?

Im mniéj szeroki rów, tém mniéj trzeba robotników, przeto szukana liczba robotników x''' jest mniejsza od wyżej znalezionej x''; stosunek tu jest prosty; mamy zatém 4-tą proporcyją $4 : 3 = x'' : x'''$.

5) Gdy x''' jest wiadomą liczbą robotników, którzy pracując przez dni 18 po 10 godzin dziennie wykopali rów na 100 st. długi, szeroki na 3, głęboki na 6 stóp, robię znów takie pytanie: iluż trzeba robotników, aby przy innych tych samych warunkach wykopali rów na 4 stopy głęboki?

Im mniejsza ma być głębokość rowu tym mniéj trzeba robotników, przeto liczba x'''' robotników szukanych jest mniejsza od x''' poprzednio znalezionych; stosunek tu zachodzi prosty; otrzymuję zatém $6 : 4 = x''' : x''''$.

6) Jest tu jeszcze warunek, że trudność kopania tego drugiego rowu ma być podwójną w zględem pierwszéj, z tego powodu i liczba ludzi użytych do téj roboty musi być większą.

Pozostaje mi więc jeszcze do rozwiązania to zadanie: jeżeli x'''' robotników pracując przez dni 18 po 10 godzin dziennie wykopali rów długi na 100 st., szeroki na 3, głęboki na 4, przy pojedynczéj trudności; iluż trzeba robotników, aby takiż sam rów wykopali, jeżeli trudność kopania będzie podwójną?

Im większa trudność kopania tym więcéj ludzi trzeba użyć do tejże roboty; szukana zatém liczba robotników x'''''

jest większą od poprzedniej x''''; stosunek tu zachodzący między liczbą robotników a trudnością jest prosty, utworzymy więc ostatnią proporcyją $1 : 2 = x''''$ i x'''''

Uczeń. który dokładnie zrozumiał powyżéj (§ 204) podany sposób rozwiązania reguły trzech składanéj, może daleko prościéj ułożyć sobie proporcyje tym sposobem:

Wypisze naprzód stosunek drugi z wiadoméj i niewiadoméj tegoż samego gatunku, to jest $\overset{r.}{25} : \overset{r.}{x}$, ułoży potém do niego po kolei pierwsze stosunki; co się przedstawi tak:

$$\left.\begin{array}{ccc} \overset{d}{18} & : & \overset{d}{12} \\ \overset{go}{10} & : & \overset{go}{9} \\ \overset{d\text{ł}}{50} & : & \overset{d\text{ł}}{100} \\ \overset{sz}{4} & : & \overset{sz}{3} \\ \overset{g\text{ł}}{6} & : & \overset{g\text{ł}}{4} \\ \overset{tr}{1} & : & \overset{tr}{2} \end{array}\right\} \overset{r.}{25} : \overset{r.}{x}$$

Rozumowanie.

1). Im więcéj dni mają użyć robotnicy na dokonanie téjże saméj roboty, tém ich mniéj potrzeba, przeto x będzie mniejsze od 25, ponieważ zachodzi tu stosunek odwrotny; zatém 1-y stosunek jest 18 : 12.

2). Im więcéj godzin pracują dziennie, aby skończyć w tyluż dniach tęż samą robotę, tym mniéj potrzeba robotników, zatém x jest jeszcze mniejsze od poprzednika; stosunek odwrotny; przeto stosunek godzin jest 10 : 9.

3). Im większą jest długość rowu tym więcéj trzeba robotników, przeto x będzie większe od 25; stosunek prosty; a więc stosunek długości będzie: 50 : 100.

4). Dla wykopania mniéj szerokiego rowu mniéj ludzi potrzeba, zatém x będzie znowu mniejsze; stosunek prosty; przeto stosunek szerokości jest 4 : 3.

5). Im mniéj głęboki rów, tém wykopanie jego mniéj ludzi wymaga; a więc x jest znowu mniejsze i w stosunku prostym z 6 : 4.

6). Nareszcie, gdy trudność kopania jest większa, większa też liczba robotników do kopania tegoż rowu użytą być musi; przeto x tą razą jest większe i w stosunku prostym 1 : 2.

§ 207.

Zrobimy tu jeszcze uwagę, że wszelkie skrócenia lepiéj jest dokonywać zaraz po ułożeniu proporcyj, unika się bowiem przez to mnożeń wielkich liczb przez siebie. Należy tylko, układając proporcyje, pisać je w takim od siebie odstępie, aby skracając wyrazy proporcyi można było je przekreślać a rezultaty skróceń swobodnie umieszczać nad skracanemi wyrazami, np. w tém zagadnieniu gdy zrobimy skrócenia otrzymamy:

$$\left.\begin{array}{llcl} 1). & 18\ (3) & : & 12\ (2)\ (1) \\ 2). & 10\ (5) & : & 9 \\ 3). & 50\ (1) & : & 100\ (2) \\ 4). & 4 & : & 3\ (1) \\ 5). & 6\ (2) & : & 4 \\ 6). & 1 & : & 2 \end{array}\right\} = 25 : x \qquad \left.\begin{array}{ccc} 1 & : & 1 \\ 1 & : & 3 \\ 1 & : & 2 \\ 1 & : & 1 \\ 1 & : & 1 \\ 1 & : & 1 \end{array}\right\} = 5 : x$$

Wytłomaczenie skracań.

Wyrazy 1-o stosunku 18 i 12 dzielę przez 6; wyrazy 3-o stosunku 50 i 100 przez 50; poprzednik 3 w 1-ym stosunku i następ. 9 w 2-im przez 3; poprzednik 4 w 4-ym stosunku i następ. 4 w 5-ym przez 4; poprzednik 6 w 5-ym stosunku i następ. 3 w 4-ym przez 3; poprzednik 2 w 5-ym stosunku i następ. 2 w 6-ym przez 2; poprzednik 10 w 2-im stosunku i następ. 2 w 1-ym przez 2; następnie poprzednik 2-o stosunku 5 i poprzednik ogólnego stosunku 25 przez 5.

Pomnożywszy następnie odpowiednie wyrazy tych skróconych proporcyj przez siebie, otrzymam:

$$1 : 6 = 5 : x$$

ztąd

$$x = 6 \times 5 = 30 \text{ robotnikom.}$$

Reguła Łańcuchowa.

§ 208.

1 Przykład. W Anglii kupiono towaru za 1000 funtów szterlingów; ileż rubli srebrem wypadnie zapłacić za ten towar, jeżeli 5 funtów szterlingów czynią 34 talary pruskie, a 25 talarów pruskich dają za 23 ruble srebrem?

Rozumowanie.

Idzie tu o to, ile 1000 funtów szterlingów uczynią rubli srebrem. Przeto 1000 funtów szter. jest *główną wiadomą*, a ilość rubli jest *główną niewiadomą.* Warunki zadania nie pozwalają nam zamienić wprost tego 1000 funt. szter. na ruble rossyjskie, musimy więc dowiedzieć się najprzód, ile talarów pruskich zawiera się w téj summie i dla tego takie ułożyć zadanie:

Jeżeli 5 funt. szter. czyni 34 talary, to 1000 funt. szter. ile uczyni talarów; mamy zatém proporcyją:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{f.} & & \text{t. p.} & & \text{f.} & & \text{t. p.} \\ 5 & : & 34 & = & 1000 & : & x. \end{array}$$

Uważając x za wiadomą wartość 1000 funtów szterlingów wyrażoną w talarach pruskich, takie znów zadanie przedstawia się nam do rozwiązania:

Jeżeli 25 talarów pruskich równają się 23 rublom ruskim, to x talarów pruskich ile uczyni rubli ruskich? mam więc znowu proporcyją:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{t. p.} & & \text{r.} & & \text{t. p.} & & \text{r.} \\ 25 & : & 23 & = & x & : & x'. \end{array}$$

Pomnożywszy odpowiednie wyrazy tych proporcyj przez siebie, i opuściwszy wspólny czynnik drugiego stosunku x, otrzymam:

$$125 : 782 = 1000 : x'$$

ztąd

$$x' = \frac{782 \times 1000}{125} = \frac{782000}{125} = 6256 \text{ rubli.}$$

A więc za towar wartujący w Anglii 1000 funtów szterlingów należy zapłacić 6256 rubli srebrem.

§ 209.

2 Przykład. 600 złotych monety konwencyjonalnéj ile uczyni frydrychsdorów, jeżeli za 3 złote monety konwencyjonalnéj dają 2 talary, 10 zaś talarów równa się 3 rublom, a 2,70 rubli idzie na 1 dukat, 30 zaś dukatów znaczą 17 frydrychsdorów?

Rozumowanie.

Kiedy 3 złote monety konwencyjonalnéj równają się 2 talarom, to 600 zł. m. kon. będą się równać x talarom, czyli

$$3 \text{ zł. m. k.} : 2 \text{ tal.} = 600 \text{ zł. m. k.} : x \text{ tal.}$$

Kiedy 10 talarów czynią 9 rubli, to x talarów uczynią rubli x', to jest

$$10 : 9 = x : x'.$$

Kiedy 2,70 rubli równają się 1 dukatowi, to x' rubli uczynią dukatów x''; z tego

$$2{,}70 : 1 = x' : x''.$$

Kiedy nakoniec 30 dukatów stanowią 17 frydrychsdorów, to x'' dukatów będą się równać x''' frydrychsdorów, a zatém

$$30 : 17 = x'' : x'''.$$

Zadanie to przedstawia się w ten sposób:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{zł. k.} & & \text{tal.} & & \text{zł. k.} & & \text{tal.} \\ 3 & : & 2 & = & 600 & : & x \\ \text{tal.} & & \text{rub.} & & \text{tal.} & & \text{rub.} \\ 10 & : & 9 & = & x & : & x' \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \text{rub.} & \text{duk.} & \text{rub.} & \text{duk.} \\ 2{,}70 & : 1 = x' & : & x'' \\ \text{duk.} & \text{fryd.} & \text{duk.} & \text{fryd.} \\ 30 & : 17 = x'' & : & x'''. \end{array}$$

Uskuteczniwszy wszelkie skrócenia i pomnożywszy przez siebie odpowiednie wyrazy tych stosunków, a potém podzieliwszy poprzedniki przez 30, otrzymamy:

$$9 : 34 = 20 : x'''$$

ztąd

$$x''' = \frac{34 \times 20}{9} = \frac{680}{9} = 75\tfrac{5}{9} \text{ frydrychsdorów.}$$

Zatém 600 złotych monety konwencyjonalnéj czynią $75\frac{5}{9}$ frydrychsdorów.

Z tego na regułę łańcuchową możemy wyprowadzić następujące prawidło:

Przy układaniu stosunków należy rozpoczynać od ilości tego gatunku, jakiego jest główna wiadoma, a kończyć tak, aby następnik ostatniego stosunku był jednego gatunku z główną niewiadomą; poprzednik zaś każdego z pośrednich stosunków musi być tego samego gatunku, co następnik poprzedniego stosunku.

Reguła Procentu.

a). Procenta proste.

§ 210.

1 Przykład. Jaki będzie procent od kapitału 12648 rubli, umieszczonego na 5% rocznie?

Rozumowanie.

Jeżeli kapitał 100 daje procentu 5, to kapitał 12648 da tyle razy więcéj procentu, ile razy jest większy od 100, zatém x będzie większe i będzie proporcyja.

$$\overset{\text{k.}}{100} : \overset{\text{k.}}{12648} = \overset{\text{p.}}{5} : \overset{\text{p.}}{x}$$

ztąd

$$x = \frac{12648 \times 5}{100} = 632{,}40 \text{ rublom.}$$

§ 211.

2 Przykład. Jaki to kapitał, umieszczony na 5% da procentu 632,40 rubli?

p.	k.
5	100
632,40	x

Rozumowanie.

Kapitał ruchomy musi być tyle razy większy od kapitału wiadomego 100, ile razy procent od niego jest większy od 5; przeto x będzie większe, a zatém (§ 196)

$$\overset{\text{p.}}{5} : \overset{\text{p.}}{632{,}40} = \overset{\text{k.}}{100} : \overset{\text{k.}}{x}$$

ztąd

$$x = \frac{632{,}40 \times 100}{5} = 12648 \text{ rublom.}$$

§ 212.

3 Przykład. Jeżeli kapitał 12648 rubli daje rocznego dochodu 632,40 rubli; na ile od sta został wypożyczony?

k.	p.
12648	632,40
100	x

Rozumowanie.

Jeżeli kapitał 12648 rubli daje rocznie 632,40 procentu, to kapitał 100 rubli da tyle razy mniéj, ile razy jest mniejszy od 12648. Przeto x jest mniejsze od 632,40 r.; będzie więc na zasadzie § 196

$$\overset{\text{k.}}{12648} : \overset{\text{k.}}{100} = \overset{\text{p.}}{632{,}40} : \overset{\text{p.}}{x}$$

ztąd

$$x=\frac{100\times 632{,}40}{12648}=5 \text{ rublom.}$$

§ 213.

4 Przykład. Jaki jest trzechletni dochód od kapitału 12648 rubli, umieszczonego na 5%?

Kiedy kapitał 100 r. daje 5 r. rocznie, to po 3-ch latach da 15, przeto kapitał 12648 po 3-ch latach da tyle razy więcéj, ile razy jest większy od kapitału 100; będzie zatém:

$$100 : 12648 = 15 : x$$

ztąd

$$x=\frac{12648\times 15}{100}=1897.20 \text{ rublom.}$$

§ 214.

5 Przykład. Jeżeli kapitał 12648 rubli dał przez 3 lata 1897,20 rubli procentu; to jakaż była stopa procentowa?

Dochodzimy tu naprzód, ile kapitał 100 wydał procentu przez 3 lata.

Jeżeli kapitał 12648 r. przez 3 lata dał 1897.20 r. procentu, to kapitał 100 rubli da tyle razy mniéj, ile razy jest mniejszy od 12648; będzie więc:

$$12648 : 100 = 1897{,}20 : x$$

ztąd

$$x=\frac{1897{,}20\times 100}{12648}=\frac{1897\cdot 0}{12648}=15 \text{ rublom.}$$

Kiedy zaś 100 w ciągu 3 lat dało 15 procentu, zatém w 1-ym roku da 3 razy mniéj, czyli 5. To znaczy, że stopa procentowa od kapitału wypożyczonego była 5%.

§ 215.

6 Przykład. Jaki jest kapitał, który, umieszczony po 5%, przyniósł po 3-ch latach 1895,20 rubli procentu?

Kiedy 100 daje rocznie 5, to przez 3 lata da 15; zatém ile razy 15 r. procent od kapitału 100 r. jest mniejszy od procentu 1897,20 r., jaki szukany kapitał wydaje, tyle razy 100 jest mniejsze od kapitału szukanego.

Z poprzednich więc zasad wynika:

$$\begin{array}{c} \text{p.} \quad \text{p.} \quad \text{k.} \quad \text{k.} \\ 15 : 1897{,}20 = 100 : x \end{array}$$

a z tego

$$x = \frac{189720}{15} = 12648 \text{ rublom.}$$

A zatém kapitałem szukanym jest 12648 rubli.

§ 216.

7 Przykład. Ile się należy procentu od kapitału 100000 rubli za dni 80, licząc po 5% rocznie?

Aby rozwiązać to zagadnienie, uciekamy się do reguły trzech składanéj i wypisujemy zadanie w ten sposób:

k.		dni		p.
100	przez	365	daje	5
100000		80		x.

Rozumowanie.

Kiedy kapitał 100 rubli daje 5 rubli procentu rocznie, to kapitał 100000 r. przez ten sam czas, da tyle razy więcéj procentu, ile razy jest większy od 100; zatém

$$\begin{array}{c} \text{k.} \quad \text{k.} \quad \text{p.} \quad \text{p.} \\ 100 : 100000 = 5 : x \quad . \ . \ . \ . \quad (1) \end{array}$$

Uważając x za procent roczny od kapitału 100000 r., rozumuję daléj:

Jeżeli wiadomy kapitał przynosi x procentu przez rok czyli 365 dni, to przez 80 dni przyniesie tyle razy mniéj, ile razy 80 jest mniejsze od 365; a więc

$$365 : 80 = x : x' \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (2)$$

Mnożę odpowiednie wyrazy tych proporcyj (1) i (2) przez siebie, a będzie:

$$100 \times 365 : 100000 \times 80 = 5 \times x : x \times x'$$

po uskutecznieniu zaś skróceń:

$$73 : 80000 = 1 : x'$$

z tego

$$x' = \frac{80000}{73} = 1095 \text{ r. } 89\tfrac{3}{73} \text{ kop.}$$

Przeto kapitał 100000 w przeciągu 80 dni da 1095 r. $89\frac{3}{73}$ kop. procentu.

§ 217.

8 Przykład. Ile się należy procentu od kapitału 12648 za 8 miesięcy, przy stopie procentowéj 5% rocznie?

k.	m.	p.
100	12	5
12648	8	x.

Kiedy 100 po 12 miesiącach daje 5 procentu, to 12648 da więcéj zatém

$$\begin{array}{cccc} \text{k.} & \text{k.} & \text{p.} & \text{p.} \\ 100 : & 12648 = & 5 : & x. \end{array}$$

Jeżeli kapitał 12648 przez 12 miesięcy dał procentu x. to przez 8 miesięcy da mniéj; a więc:

$$\begin{array}{cccc} \text{m.} & \text{m.} & \text{p.} & \text{p.} \\ 12 : & 8 = & x : & x'. \end{array}$$

Mnożę odpowiednie wyrazy tych proporcyj przez siebie, a będzie:

$$100 \times 12 : 12648 \times 8 = 5 \times x : x \times x'$$

po skroceniu zaś:

$$50 : 4216 = 5 : x$$

ztąd

$$x = \frac{4216 \times 5}{50} = 421{,}60 \text{ rublom.}$$

8-cio miesięczny przeto procent od kapitału 12658 rubli będzie 421 rubli 60 kopiejek.

§ 218.

9 Przykład. Jaki jest kapitał, który przy stopie procentowéj 4,50% przyniósł 500 rubli po 228 dniach?

*

Kapitał 100 rubli przez 365 dni przyniósł 4,50 rubli
„ x „ „ 228 „ „ 500 „

Rozumowanie.

Przypuśćmy, że kapitał x po roku dał te 500 rubli procentu, a że im większy procent, tém większy musi być kapitał, zatém

$$4{,}50 : 500 = 100 : x.$$

Że zaś te 500 rubli nie były procentem rocznym, tylko za 228 dni, przeto kapitał znaleziony x jest mniejszy od szukanego, bo im w mniejszym czasie kapitał ten sam procent przynosi, tym ten kapitał większym być musi, zatém x' szukane, będzie większe od znalezionego x tyle razy, ile razy 365 dni są większe od 228 dni; będzie więc:

$$228 : 365 = x : x'.$$

Pomnożywszy odpowiednie wyrazy tych proporcyj przez siebie i wyrzuciwszy wspólny czynnik 2-o stosunku x, będzie:

$$4{,}50 \times 228 : 500 \times 365 = 100 : x'$$

ztąd

$$x = \frac{500 \times 365 \times 100}{4{,}50 \times 228} = 17787.50 \text{ rublom.}$$

§ 219.

10 Przykład. Przez ile dni musi procentować na pożyczce kapitał 6875 rubli, aby wydał 72,05 procentu, licząc po 4,25%?

Kapitał 100 rubli przez 365 dni daje 4,25
— 6875 „ „ x „ „ 72,05

Rozumowanie.

Przypuszczam że mam się dowiedzieć w jakim czasie kapitał 6875 r. przyniesie procentu 4,25 r. kiedy kapitał 100 przyniósł tyleż w 365 dniach.

Im większy kapitał tym w mniejszym czasie tenże sam procent przyniesie; przeto będzie:

$$\begin{array}{cccc} \text{k.} & \text{k.} & \text{d.} & \text{d.} \\ 6875 : & 100 = & 365 : & x. \end{array} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Jeżeli kapitał 6875 r. przez dni x przyniósł procentu 4,25; w iluż dniach da procentu 72,05?

Im większy procent ma kapitał wydać, tym więcéj czasu na pożyczce pozostawać musi; zatém

$$\begin{matrix} \text{p.} & & \text{p.} & & \text{d.} & & \text{d.} \\ 4{,}25 & : & 72{,}05 & = & x & : & x' \end{matrix} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Z pomnożenia odpowiednich wyrazów tych proporcyj i skrócenia wypadnie:

$$6875 \times 4{,}25 : 100 \times 72{,}05 = 365 : x'$$

ztąd

$$x = \frac{100 \times 72{,}05 \times 365}{6875 \times 4{,}25} = 90 \text{ dniom.}$$

§ 220.

11 Przykład. Kapitał 6875 rubli wypożyczony na 90 dni przyniósł 72,05 rubli procentu; jakaż była stopa procentowa?

Kapi. 6875 w dniach 90 przyniósł 72,05 r. proc.
„ 100 „ 365 „ x

Rozumowanie.

Jeżeli kapitał 6875 r. w dniach 90 przyniósł 72,05 r. procentu, to kapitał 100 w tymże samym czasie przyniesie mniéj; mamy przeto:

$$\begin{matrix} \text{k.} & & \text{k.} & & \text{p.} & & \\ 6875 & : & 100 & = & 72{,}05 & : & x \end{matrix} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Jeżeli 100 r. po upływie 90 dni przyniosło procentu x, to po roku da więcéj; będzie przeto:

$$90 : 365 = x : x' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Pomnożywszy odpowiednie wyrazy tych proporcyj przez siebie i skróciwszy będzie:

$$6875 \times 90 : 100 \times 365 = 72{,}05 : x'$$

ztąd

$$x' = \frac{100 \times 365 \times 72.05}{6875 \times 90} = 4{,}25 \text{ rublom } \%.$$

§ 221.

12 Przykład. Znaleść procent od kapitału 12,648 r. umieszczonego na procencie 5% za lat 4 i dni 140.

Zamieniam lata na dnie.

kap. 100 r. przez dni 365 daje 5 r. procentu
„ 12648 „ „ 1600 „ x „

Rozumowanie.

Kapitał 12648 r. przez dni 365 da więcej procentu niż kapitał 100 r., przeto.

$$\begin{matrix} k. & k. & p. & p. \\ 100 : & 12648 = & 5 : & x \end{matrix} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Kiedy kapitał 12648 r. przez dni 365 dał procentu x, to przez 1600 dni da więcéj, zatém.

$$\begin{matrix} d. & d. & p. & p. \\ 365 : & 1600 = & x : & x' \end{matrix} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Pomnożywszy odpowiednie wyrazy tych proporcyj (1) i (2) przez siebie i skróciwszy wyrazy 2-o stosunku przez x otrzymamy:

$$100 \times 365 : 12648 \times 1600 = 5 : x'$$

z tego

$$x' = \frac{12648 \times 1600 \times 5}{100 \times 365} = 2772{,}16 \text{ rublom.}$$

§ 222.

13 Przykład. Odebrano po roku kapitału wraz z procentem 13270,40 rubli; jaki był kapitał a jaki procent, jeżeli liczono po 6%?

Gdy na każde 100 r. kapitału pierwiastkowego przybywa po roku 6 rubli, zatém każde 100 kapitału wypożyczonego zamieniło się po roku na 106 rubli.

Przeto kapitał szukany tyle set rubli w sobie zawiera, ile razy 106 r. mieści się w 13270,40 rublach. Ile razy więc kapitał z procentem 106 r. mieści się w kapitale z procentem 13270,40 r., tyle razy także 100 r. kapitał bez procentu mieści się w szukanym kapitale. Będzie przeto:

kap. z pr. kap. z pr. k. bez pr. k. bez pr.

$$106 : 13270{,}40 = 100 : x$$

ztąd

$$x = \frac{13270{,}40 \times 100}{106} = 12519{,}25 \text{ rublom kapitału.}$$

Chcąc na odpowiedź sam procent otrzymać, rozumuję tak: kiedy w 106 r. kapitału z procentem zawiera się 6 rubli procentu, to w kapitale z procentem 13270,40 rublach zawiera się tyle razy więcéj procentu ile razy 13270.40 jest większe od 106 a więc:

k. z p. k. z p. p. p.

$$106 : 13270{,}40 = 6 : x$$

ztąd

$$x = \frac{13270{,}40 \times 6}{106} = 751{,}15 \text{ rublom.}$$

§ 223.

14 Przykład. Jaki jest kapitał który umieszczony na 5% zamienił się po 6 latach na 6500 rubli?

Rozumowanie.

5% na rok jest toż samo co 5 razy po 6 czyli 30% na 6 lat; przeto każde 100 r. szukanego kapitału po 6 latach zamieniło się na 130 r. otrzymamy więc proporcyją:

$$130 : 6500 = 100 : x$$

a więc

$$x = \frac{6500 \times 100}{130} = 5000 \text{ rublom.}$$

§ 224.

15 Przykład. Osoba A pożyczyła osobie B 480 rubli na 8 miesięcy bez procentu; osoba B pożycza jéj później 640 rubli także bez procentu; jakże długo tą summą może rozporządzać osoba A bez zobopólnéj krzywdy?

Ponieważ osoba B większą summę wypożycza, przeto czas na jaki wypożycza musi być tyle razy mniejszy od 8 miesięcy, ile razy 640 są większe od 480; będzie więc:

$$\begin{array}{cccc} k. & k. & m. & m. \\ 640 : & 480 = & 8 : & x \end{array}$$

a po skróceniu

$$10 : 60 = 1 : x$$

a zatém

$$x = \frac{60}{10} = 6 \text{ miesięcy.}$$

§ 225.

16 Przykład. Gdyby osoba A pożyczywszy osobie B 300 rubli, po 2-ch miesiącach przydała 400 rubli, po 6-iu zaś miesiącach odebrała 200 rubli, nareszcie po 8 miesiącach licząc od daty pierwszéj pożyczki odebrała wszystko; zachodzi pytanie: na jak długo może B dla wywdzięczenia się wypożyczyć tamtej rubli srebrem 600?

Rozumuję tak:

300 rubli przez 2 miesiące dają tén sam zysk co 2 razy większy kapitał czyli rubli 600 przez miesiąc 1; od 2-ch miesięcy do końca 6-o upłynęło 4 miesiące, przez ten czas używała ona tych samych 300 rubli i dodanych 400-tu czyli 700 rubli; a 700 rubli przez 4 miesiące tęż samą korzyść przyniosą jak 4 razy większy kapitał czyli 2800 rubli przez 1 miesiąc. Od 6-u miesięcy do końca 8-go upłynęło 2 miesiące, przez ten czas używała ona tylko 500 rubli, gdyż 200 r. osoba A odebrała, 500 zaś rubli tę korzyść we 2 miesiące przynieść mogą, co 2 razy większa summa czyli 1000 rubli przez 1 miesiąc. Z tego widzę że osoba B tyle zysku z wypożyczonych jéj summ przez osobę A odniosła, jakby od niéj pożyczyła na 1 miesiąc $600 + 2800 + 1000$ razem 4400 rubli.

Zagadnienie przeto zamieniło się na poprzedzające, to jest:

Jeżeli osoba A wypożyczyła osobie B 4400 rubli na 1 miesiąc, na jak długo B może tamtéj pożyczyć 600 rubli, aby jéj tę uczynność wynadgrodzić bez żadnéj krzywdy stron obu?

Rozumując jak poprzednio (§ 225) będzie:

$$600 : 4400 = 1 : x$$

$$x = \tfrac{44}{6} = 7\tfrac{1}{3} \text{ miesiącom.}$$

b). Procenta Składane.

§ 226.

1 Przykład. Na jaką summę zamieni się kapitał 8000 rubli po 4-ch latach, jeżeli go oddamy na procent składany, przy stopie 5%? Dochodzę procentu rocznego od 8000 rubli z proporcyi

k. k. p. p.

$$100 : 8000 = 5 : x$$

ztąd $x = 400$ rublom po 1-ym roku.

Dodawszy te 400 r. do kapitału 8000 r., dochodzę rocznego procentu od 8400 r; a podobnież będzie

$$100 : 8400 = 5 : x$$

z tego $x = 420$ rublom procentu po 2-ch latach.

Dodaję znowu te 420 r. do 8400 r. i szukam procentu rocznego od 8820 r. i otrzymam

$$100 : 8820 = 5 : x$$

tu $x = 441$ r. procentu po 3-ch latach.

I znowu 441 r. dodaję do 8820 r. i dochodzę procentu za 4-ty rok od 9261 rubli; a będzie

$$100 : 9261 = 5 : x$$

z tego $x = 463{,}05$ rublom procentu za rok 4-ty.

Te 463,05 r. doliczone do ostatniego kapitału 9261 rubli utworzą summę 9724,05, w którą zamienił się kapitał 8000 po 4-ch latach będąc oddany na procent składany.

§ 227.

2 Przykład. Rozwiążmy przykład następujący za pomocą tablicy w § 46 umieszczonéj. *Jaki kapitał wypłaci bank* *po 24 latach za 400 rubli złożone w nim na procent składany po 3%.*

Dojdźmy naprzód w co się ta summa zamieni po upływie pierwszych lat 10-ciu, potém po drugich 10 latach a na koniec po ostatnich 4 latach.

Jeżeli za 1000 r. po 10 latach, jak wiemy z tablicy, otrzymamy przy téj stopie 1343,92 r., to za 400 r. otrzymamy tyle razy mniéj, ile razy 400 jest mniejsze od 1000; z proporcyi przeto

$$1000 : 400 = 1343{,}92 : x$$

dowiemy się, że

$$x = 537{,}57 \text{ rubli.}$$

A więc za 1-e 10 lat odbierzemy 537,57 rubli.

Jeżeli zaś 1000 r. po 10 latach daje 1343,92 r., to 537,57 dadzą tyle razy mniéj, ile razy 537,57 jest mniejsze od 1000; a więc:

$$1000 : 537{,}57 = 1343{,}92 : x$$

ztąd.

$$x = 722{,}45$$

Zatém po 20 latach bank wypłaci za 400 r. 722,45 rubli.

Gdy 1000 rubli przez lat 4 zamienia się na 1125,51 r., to zamiast 722,45 r. otrzymamy po 4-ch latach tyle razy mniéj, ile razy 722,45 jest mniejsze od 1000; z proporcyi przeto

$$1000 : 722{,}45 = 1125{,}51 : x$$

wypadnie

$$x = 813{,}12 \text{ rubli.}$$

Zatém 400 r. złożone w banku na procent składany po 3% zamienią się po 24 latach na 813 r. i 12 kopiejek.

Reguła potrącania procentu.

Eskont zewnątrz.

§ 228.

1 Przykład. Posiadacz wekslu na 4780 rubli, płatnego za rok, ile otrzyma zaraz od bankiera przy stopie eskontowej 6%

Rozwiązanie.

Dowiaduję się jaki jest procent roczny od 4780 rubli licząc po 6%; z proporcyi

$$100 : 4780 = 6 : x$$

$$x = 286.80 \text{ rublom.}$$

A więc bankier z summy wekslowéj potrąci 286,80 rub. a posiadaczowi wekslu wypłaci resztę 4493.20 r.

§ 229.

2 Przykład. Jeżeliby posiadacz wekslu na 640 rubli, płatnego za 4 miesiące, chciał zaraz na gotówkę zamienić, a bankier zgadza się go eskontować podług stopy $4\frac{1}{2}$%, ileż straci on na tym wekslu?

Rozwiązanie.

Dowiaduję się jaki jest procent od 100 za 4 miesiące. Ile razy 12 miesięcy są większe od 4-ch, tyle razy i procent roczny $4\frac{1}{2}$ od 100 jest większy od procentu za 4 miesiące; mamy przeto

$$12 : 4 = 4\tfrac{1}{2} : x$$

$$x = \frac{4 \times 4^1/_2}{12} = 1\tfrac{1}{2} \text{ rublom.}$$

Takie teraz zadanie przedstawia nam się do rozwiązania: jeżeli 4 miesięczny procent od 100 jest $1\frac{1}{2}$, to od 640 rubli jak wielki będzie?

Ile razy 640 jest większe od 100 tyle razy i procent szukany jest większy od $1\frac{1}{2}$; zatém będzie:

$$100 : 640 = 1\tfrac{1}{2} : x$$

$$x = \frac{640 \times 1^1/_2}{100} = 9 \text{ r. } 60 \text{ kop.}$$

A więc posiadacz wekslu straci na summie wekslowéj 9 r. 60 kop.

Eskont wewnątrz.

§ 230.

1 Przykład. Posiadacz wekslu na 4780 r. płatnego za rok, ile otrzyma zaraz od bankiera przy stopie procentowéj 6%?

Ponieważ na każde 100 rubli summy wypożyczonéj przyliczono w wekslu 6 r. procentu, przeto każde 106 r. zawarte w summie wekslowéj, równa się 100 rublom w gotowiznie wypłaconéj zaraz. Mamy więc takie zadanie do rozwiązania:

Jeżeli 106 r. przez eskontowanie zamienia się na 100; w cóż się zamieni 4780 rubli? zatém

$$106 : 100 = 4780 : x$$

$$x = 4509{,}43 \text{ r.}$$

W ten sposób potrącono 270,57 rubli, przeto mniéj niż poprzednio o 16,24 rubli.

§ 231.

2 Przykład. Jeżeli posiadacz wekslu na 640 rubli płatnego za 4 miesiące, chce go zaraz na gotówkę zamienić, a bankier zgadza się go eskontować podług stopy $4\frac{1}{2}\%$ ileż straci na tym wekslu?

Doszliśmy poprzednio że procent za 4 miesiące od 100 w tym razie jest $1\frac{1}{2}$.

Zatém na każde 100 r. summy wyrażonej na wekslu przyliczono $1\frac{1}{2}$ rubla. Jeżeli przeto za każde $101\frac{1}{2}$ r. eskontujący bankier wypłaca 100, ileż wypłaci za 640 rubli? Ile razy $101\frac{1}{2}$ r. jest mniejsze od 640 r. tyle też razy i 100 mniejsze od szukanéj summy; będzie zatém:

$$101\tfrac{1}{2} : 640 = 100 : x$$

$$x = 630{,}54 \text{ rublom.}$$

A więc posiadacz wekslu odbierze 630,54 a bankier potrąci 9,46 r.

Reguła proporcyjonalnego podziału.

§ 232.

Przykład. Liczbę 540 podzielić na 3 działy proporcyjonalne do liczb 2. 3 i 5.

Na zasadzie rozumowania podanego w § 62 wyprowadzamy że:

Ile razy summa części $2+3+5=10$ jest większa od 2 części, tyle razy 540 większe od działu 1-o; mamy więc $10 : 2=540 : x=108$

Ile razy 10 jest większe od 3-ch, tyle razy i 540 większe od działu 2-go. będzie więc . . . . $10 : 3=540 : x=162$

Ile razy 10 jest większe od 5, tyle razy i 540 większe od działu 3-o, a zatém: $10 : 5=540 : x=270$

sprawdzenie 540.

Dział 1-y przeto jest 108, dział 2-i 162, dział 3-ci 270.

Reguła spółki.

Przykład. Trzech spólników złożyło się na dokonanie pewnego przedsiębierstwa; 1-y dał 40000 rubli, 2-i 35000 rub. a 3-ci 45000 rub., zarobili w ogóle 15840 rubli; jakaż część zysku przypada na każdego z nich?

Wypisuję zadanie w ten sposób

1-y.	40000 r.	zysk. 15840 r.
2-i.	35000 r.	
3-i.	45000 r.	
	120000.	summa ogólna

Rozwiązanie.

Część zysku 1-o spólnika tyle razy będzie mniejszą od ogólnego zysku 15840 rub., ile razy kapitał 40000 rub., jaki on wniósł do spółki, jest mniejszy od ogólnéj summy 120000 rubli, mamy przeto na zasadzie § 199.

$$120000 : 40000=15840 : x$$

$$\text{albo: } 3 : 1=15840 : x$$

$$\text{ztąd } x=\frac{15840}{3}=5280 \text{ rub.}$$

To jest że część zysku na 1-o przypadająca jest 5280 rub. 2-gi włożył 35000 rub., zatém część zysku jaką dostanie, tyle razy jest mniejsza od ogólnego zysku 15840 rub, ile razy wniosek jego do spółki 35000 rub., jest mniejszy od ogólnego kapitału 120000 rub.

mamy więc

$$120000 : 35000 = 15840 : x$$

$$\text{albo} \quad 24 : 7 = 15840 : x$$

$$\text{ztąd} \quad x = \frac{15840 \times 7}{24} = 4620 \text{ rub.}$$

Zatém część zysku należna 2-mu jest 4620 rub.

Ponieważ 3-i wszedł do spółki z kapitałem 45000, przeto część zysku na niego przypadająca tyle razy jest mniejsza od ogólnego zysku 15840 rub., ile razy i summa jaką złożył do spółki to jest 45000, jest mniejsza od summy ogólnéj 120000 rubli. A więc

$$120000 : 45000 = 15840 : x$$

$$\text{czyli} \quad 8 : 3 = 15840 : x$$

$$\text{z tego} \quad x = \frac{15840 \times 3}{8} = 5940 \text{ rub.}$$

Trzeci zatém otrzymał 5940 rubli.

§ 233.

Przykład. Trzy osoby złożyły się w ten sposób, że kapitał pierwszéj 3000 rub. pozostawał 6 lat w przedsiębierstwie, kapitał 2-éj 4000 rub. zostawał w niém przez lat 5, a 3-ej przez czas cały to jest lat 9, ileż dla każdej z nich przypadnie z ogólnego zysku 33000 rubli?

Uważam że 3000 rubli przez 6 lat tyle przyniesie korzyści, co 6 razy większa summa przez rok, to jest tyle jak $3000 \times 6 = 18000$ rubli.

Również 4000 rub. przez lat 5 tyle da korzyści, co 5 razy większa summa przez rok. zatém tyle co $4000 \times 5 = 20000$ rubli.

Także i 8000 rub. przez lat 9 tyle przyczynią zysku, ile 9 razy większa summa przez rok, a więc tyle co $8000 \times 9 = 72000$ rubli.

Pytanie zatém zamienia się na poprzednie, (§ 232) to jest: jeżeli części ogólnego kapitału jaki wspólnicy złożyli były: 1-a 18000, 2-a 20000, 3-a 72000 rub., ileż każdy dostanie z ogólnego zysku 33000 rubli?

Rozumując jak wyżéj (§ 232) otrzymamy:

110000 : 18000=33000 : x, skąd x = 5400 rub.
110000 : 20000=33000 : x', „ x' = 6000 „
110000 : 72000=33000 : x'', „ x''=21600 „
Sprawdzenie 33000 rub.

Zysk zatém 1-ej jest 5400 r. 2-ej 6000 a 3-ej 21600 rub.

Reguła mięszaniny.

§ 234.

Przykład. Zmięszano 80 kwart wina po 50 kopiejek kwarta, ze 100 kwartami innego wina po 35 kop. kwarta; jaka jest cena kwarty téj mięszaniny?

Rozwiązanie.

Dowiaduję się najprzód, ile kosztuje wszystko wino do mięszaniny wchodzące.

80 kwart po 50 kop. warte 40 rub.
100 „ „ 35 „ „ 35 „
zatém 180 kwart mięszaniny warte 75 rub.

Ile razy przeto 180 kwart są większe od 1-ej kwarty, tyle razy i 75 rub. cena 180 kwart jest większa od ceny 1-ej kwarty; mamy przeto:

$$180 : 1 = 75 : x$$

$$\text{ztąd } x = \tfrac{75}{180} = 0{,}417 \text{ rub.}$$

A zatém cena jednéj kwarty takiéj mieszaniny jest 0,417 rub. czyli blizko 42 kopiejki.

Reguła fałszywego założenia

Reguła fałszywego założenia podaje nam sposoby, jak za pomocą dowolnie obranéj jednéj lub dwóch liczb dojść do prawdziwéj.

Jeżeli założenie wymaga tylko jednego przypuszczenia, wtedy się nazywa *regułą założenia pojedynczego*, gdy zaś wymaga dwóch przypuszczeń zowią ją *regułą założenia podwójnego.*

a) Reguła założenia pojedynczego.

§ 235.

1 Przykład. Znaleść liczbę któréj połowa, trzecia część i piąta dodane do siebie tworzą summę 434.

Rozwiązanie.

Obieram sobie liczbę 60 która jest podzielną jednocześnie przez 2, 3 i 5.

Połowa	60	jest	30
trzecia część	60	„	20
piąta część	60	„	12
		Ogół	62.

Wypadek 62 jest różny od liczby 434.

Układam przeto takie zadanie: ile razy 62 jest mniejsze od 434 tyle razy i 60 jest mniejsze od liczby szukanej. Na zasadzie więc § 53 taką ułożę proporcyją:

$$62 : 434 = 60 : x$$

ztąd

$$x = \frac{434 \times 60}{62} = 420$$

A zatém liczbą żądaną jest 420; albowiem

połowa	420	jest	210
trzecia część	420	„	140
piąta część	420	„	84
		Ogół	434

§ 236.

2 Przykład. Pewną summę podzielono między 4 osoby tak że 1-sza otrzymała $\frac{1}{5}$, druga $\frac{3}{10}$, trzecia $\frac{5}{16}$, czwarta zaś 7500 rubli. Jakąż się summą dzielono?

Rozwiązanie.

Obieram sobie liczbę 80 podzielną przez wszystkie 3 mianowniki to jest przez 5, 10 i 16, a uważając ją za summę jaką się dzielono, wypisuję jak poprzednio:

$\frac{1}{5}$ część 80 jest 16
$\frac{3}{10}$ „ „ „ 24
$\frac{5}{16}$ „ „ „ 25
Ogół 65.

Odjąwszy ten ogół 65 od 80, pozostanie 15, powinno zaś pozostać 7500.

Ile razy przeto 15 jest mniejsze od 7500, tyle razy i 80 jest mniejsze od szukanéj summy; a zatém

$$15 : 7500 = 80 : x$$

z tego

$$x = \frac{7500 \times 80}{15} = 40000 \text{ rublom.}$$

Summa przeto jaką się dzielono jest 40000 rubli.

§ 237.

3 Przykład. Ojciec umierając zapisał 3-m synom swoim 16000 rubli z tym warunkiem, że najstarszy ma dostać dwa razy tyle co drugi, drugi trzy razy tyle co trzeci; ile każdy z nich dostanie?

Przypuszczam że 3-ci dostanie 10, to drugi weźmie 30 a pierwszy 60 rubli, dodawszy zaś do siebie te 3 liczby, ogół ich wyniesie tylko 100 rubli, a powinien wynieść 16000. Na zasadzie przeto rozumowania jak w § 236 będzie:

$$100 : 16000 = 10 : x$$

zatém

$$x = \frac{16000 \times 10}{100} = 1600 \text{ rublom.}$$

Kiedy więc 3-ci bierze 1600 r. to 2-gi weźmie 4800 a 1-y 9600 rubli, co razem stanowi summę 16000 rubli.

b). Reguła podwójnego założenia.

Powiedzieliśmy już że regułę podwójnego założenia zowiemy sposób rozwięzywania zagadnień wymagających dwóch przypuszczeń. Każde z tych przypuszczeń powoduje błąd, póki nie natrafimy na rzeczywistą liczbę. Objaśnią nam to następujące przykłady.

§ 238.

1 Przykład. Liczbę 51 podzielić na 2 liczby, któreby się różniły od siebie o 13.

Rozwiązanie.

Przypuszczam że mniejsza z 2-ch szukanych liczb jest 8, to większa musi być $8+13=21$, aże $8+21=29$, przeto ta summa jest mniejsza od 51 o 22.

Dajmy znowu że mniejsza liczba jest 10, to większa będzie $10+13=23$, a summa tych liczb to jest $10+23=33$ jest mniejszą od 51 o 18.

Piszę te liczby tak

1-e przypuszczenie	8	błąd mniéj	22
2-e przypuszczenie	10	błąd mniéj	18
		Różnica błędów	4.

Mnożę liczbę błędu 1-o 22 przez 2-e przypuszczenie 10, a liczbę błędu 2-o przypuszczenia 18 przez 1-e przypuszczenie 8; co daje mi różnicę

$$22 \times 10 = 220$$
$$18 \times 8 = 144$$
$$76.$$

Podzieliwszy 76 przez różnicę błędów 4, znajduję $\frac{76}{4}=19$ to jest liczbie szukanéj mniejszéj, liczbą zaś większą będzie $19+13=32$. Sprawdzając mamy $19+32=53$. Zagadnienie przeto dobrze jest rozwiązane.

Gdybym zamiast 10 za mniejszą liczbę wziął 20, to większą byłoby 33. Zatém summa 20+33=53 przewyższałaby 51 o 2.; błąd zatém byłby o 2 więcéj i mielibyśmy:

1-e przypuszczenie	8	błąd	mniéj	22
2 „	„ 20	„	więcéj	2
			Summa	24.

Dodawszy do siebie iloczyny

$$22 \times 20 = 440$$
$$2 \times 8 = 16$$
$$\text{Ogół } 456$$

te 456 podzielone przez 24 dadzą $\frac{456}{24} = 19$ tęż samą liczbę mniejszą szukaną.

§ 239.

2 Przykład. Zapłacono 80 rubli za 29 łokci materyi jedwabnéj dwóch gatunków, jeden po 3 ruble, drugi po 2 r. kop. 50 łokieć. Ileż łokci każdego gatunku kupiono?

Rozwiązanie.

Przypuszczam że kupiono 9 łokci 1-go gatunku, zatém drugiego musiało być 20 łokci.

9 łokci po 3 rub $= 3 \times 9 = 27$ rub.
20 „ „ 2,50 „ $= 2,50 \times 20 = 50$ „
Ogół 77 rubli

Więc zamiast 80 rubli otrzymaliśmy 77 r., błąd zatém zachodzi o 3 ruble mniéj.

Przypuszczam znowu że kupiono 11 łokci 1-go gatunku, zatém drugiego musiano kupić 18.

11 łokci po 3 rub. $= 11 \times 3 = 33$ r.
18 „ „ 2,50 „ $= 18 \times 2,50 = 45$ r.
Ogół 78 r.

78 zamiast 80, błąd przeto zachodzi o 2 mniéj

Układam liczby tak:

1-e przypuszczenie	9	błąd	mniéj o	3
2-e „	„ 11	„	mniéj o	2
		Różnica	błędów	1

Odjąwszy od siebie iloczyny

$$3\times 11=33$$
$$2\times 9=18$$

Otrzymam na resztę 15

Co podzielone przez różnicę błędów 1 da $\frac{15}{1}=15$.

Przeto liczba łokci materyi pierwszego gatunku jest 15, a drugiego gatunku 14.

Sprawdzenie. 15×3 rub. $=45$ rub.

$14\times 2{,}50$ r. $=35$ rub.

Ogół 80 rubli

Zadanie to jest dobrze rozwiązane.

Zagadnienia.

1. Znaleść liczbę któréj $\frac{1}{13}$, $\frac{3}{4}$ i $\frac{1}{6}$ czynią razem 17050. (odp. Tą jest 17160).

2. Jaka to liczba któréj $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{16}$ i $\frac{4}{11}$ części czynią 23745? (odp. 28336).

3. Znaleść liczbę któréj $\frac{1}{2}$, $\frac{7}{38}$, $\frac{3}{10}$ i $\frac{4}{100}$ dodane do siebie czynią 1020080. (odp. Tą jest 1292000).

4. Jakiéj to liczby $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{11}$ i $\frac{2}{15}$ części czynią 119704? (odp. 137280).

5. Jakiéj to liczby $\frac{2}{7}$, $\frac{1}{3}$ i $\frac{3}{20}$ części czynią 5491? (odp. 7140).

6). Znaleść liczbę któréj $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ i $\frac{3}{7}$ czynią 808 (Tą jest 840.)

7). Wynaleść taką liczbę któréj $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ i $\frac{1}{6}$ części złożone z sobą uczynią 522, (odp. Tą jest 360).

8. Umierający tak rozporządza majątkiem swoim: najstarszemu synowi przeznacza czwartą część tego majątku, średniemu dziewiątą część tylko, a najmłodszemu $\frac{2}{7}$; przytém żąda aby $\frac{2}{17}$ części rozdano na dobroczynne cele, resztę kapitału pozostawia swéj żonie; jaki jest kapitał żony, jeżeli ogół kapitałów oddanych dzieciom i dobroczynności wynosi 163750 rubli? (odp. 50450 rubli).

9. Pięciu sukcessorów tak się spadkiem podzielili: pierwszy wziął część czwartą, drugi ósmą, trzeci jedenastą, czwarty $\frac{2}{7}$ a piąty 15300 rubli; jak wielki był cały spadek? (odp. 61600 rubli).

10. Pewien lord angielski zapisał synowi swemu $\frac{2}{3}$ części majątku, córce zaś tylko część dwódziestą, prócz tego dwóm biednym krewnym po $\frac{1}{100}$ części, a żonie resztę wynoszącą 12060000 rubli. Jak wielki był cały majątek tego lorda? (odp. 42000000 rubli).

11. Pewną summę podzielono tak między wierzycieli: pierwszy wziął $\frac{2}{5}$ części, drugi $\frac{3}{100}$, trzeci $\frac{4}{21}$, czwarty $\frac{5}{30}$ a piąty 1609200 rubli. Jak wielka była cała summa? (odp. 7560000 rubli).

12. Jeżeli z pewnéj summy dano jednemu $\frac{1}{4}$ część drugiemu $\frac{2}{9}$, trzeciemu $\frac{1}{8}$, czwartemu $\frac{1}{10}$, piątemu $\frac{1}{100}$ a szóstemu 5676 rubli, jak wielką była cała summa? (odp. 21600 r.)

13. Pewien umierając bezdzietnie tak rozporządził swym kapitałem: synowi przyjaciela swego zapisał $\frac{7}{8}$ całego majątku, 28-ą część staremu słudze swemu, setną część stróżowi domu w którym mieszkał, dwóchsetną część przeznaczył ochronce, pięćsetną polecił rozdać żebrakom, 24 ruble pewnemu kalece, a pozostałe 2000 rubli oddał na rozporządzenie Towarzystwu Dobroczynności. Jak wielki był kapitał testatora? (odp. 28000 rubli).

14. Podzielić 55 na dwie części różniące się od siebie o 7 (odp. 1-a 24 a 2-a 31).

15. Liczbę 481 podzielić na dwie części różniące się od siebie o 73. (Odp. 1-a jest 204 a 2-a 277).

16. Liczbę 1751 podzielić na dwie części różniące się od siebie o 321. (Odp. 1-a jest 715 a 2-a 1036).

17. Liczbę 78,9 podzielić na dwie części różniące się od siebie o 7,3. (Odp. 1-ą jest 35,8 a 2-gą 43,1).

18. Liczbę $15\frac{3}{14}$ podzielić na dwie części różniące się od siebie o $3\frac{5}{7}$. (Odp. 1-ą jest $5\frac{3}{4}$ a drugą $9\frac{13}{28}$).

19. Zapłacono 83 ruble za 30 łokci materyi dwóch gatunków płacąc jeden po 4 ruble i 50 kop. a drugi po 3 r. 80 kop. za łokieć. Ile łokci kupiono każdego gatunku? (odp. 1-go 10, drugiego 20 łokci).

20. Odlew pomnika z kompozycyi złożonéj z dwóch metali ważący 41 centnarów kosztował w ogóle 277 rubli 82 kopiejki. Centnar jednego metalu kosztował 3 ruble 75 kopiejek a drugiego 7 rubli 84 kopiejki, za robotę zaś policzono 30 rubli, ile było centnarów każdego z tych dwóch metali? (odp. 1-go 18, 2-go 23).

21. Z trzech posiadaczy kapitału mają pierwszy i drugi 50000 rubli, drugi i trzeci 70000 r., trzeci i pierwszy 60000 r. Ile każdy z nich ma osobno. (Odp. 1-y 20000 r., 2-gi 30000 r., 3-ci 40000 rubli).

22. 4-ch graczy zyskało przy grze 890 rubli, w ten sposób, że drugi o $\frac{1}{8}$ więcéj wygrał niż pierwszy, trzeci wygrał tyle co drugi a czwarty o 90 rubli więcéj od trzeciego. Ile każdy z nich wygrał? (Odp. pierwszy 140, drugi 220, trzeci 220 a czwarty 310 rubli).

23). Gdyby pierwszy z dwóch kupujących dom za 100000 rubli miał połowę pieniędzy drugiego, mógłby sam ten dom nabyć; jeżeliby zaś pierwszy oddał drugiemu trzecią część swego kapitału, to ten ostatni samby ten dom zapłacił. Jaki był kapitał każdego z nich? (Odp. 1-y miał 60000 a drugi 80000 rubli).

24. Na utrzymanie oddziału złożonego z piechoty kawaleryi i kozaków w ogóle liczby 15400 żołnierzy, wydają dziennie 3005 rubli. Jeżeli jeden kawalerzysta kosztuje dziennie 30 kopiejek, jeden kozak 25 kopiejek, a jeden żołnierz pieszy 10 kopiejek, ile w tym oddziele jest każdego z tych trzech gatunków wojska? (Odp. kawaleryi 4700, kozaków 3500, a piechoty 7200).

25. Trzech uczni ma wspólnie 44 książki: drugi z nich ma dwa razy tyle co pierwszy i jeszcze 4, trzeci ma tyle co

obaj pierwsi i jeszcze 6; ile każdy z nich ma książek? (odp. pierwszy 5, drugi 14, a trzeci 25).

26. Liczbę 1000 podzielić w ten sposób na dwie części, aby część pierwsza przewyższała drugą o 49. (Odp. pierwsza część jest $524\frac{1}{2}$ zatém druga $475\frac{1}{2}$).

27. Pewnéj liczbie wojska rozdano 155000 pudów mąki; żołnierzowi pieszemu dawano 2 pudy a konnemu 3 pudy. Było tu piechoty siedm razy więcéj i jeszcze 1000. Ileż było w téj liczbie piechoty a ile kawaleryi? (Odp. kawaleryi 9000 a piechoty 64000).

28. 64000 rublami podzielić trzy osoby tak: aby druga dostała cztery razy tyle co pierwsza, a trzecia dwa razy i $\frac{1}{3}$ tyle co obie pierwsze razem. (Odp. dostaną pierwsza 3840 rubli. druga 15360 rubli. trzecia 44800 rubli).

KONIEC.

SPIS PRZEDMIOTÓW.

Część I.

Część II.

Część III.

50

15 + 35 = 50