ARYTMETYKA

NAPISANA PRZEZ

K. GRUBECKIEGO.

Wydanie trzecie poprawne.

WARSZAWA,
Nakładem Aleksandra Lewińskiego Księgarza.
Przy ulicy Miodowéj, pod Filarami.

1867.

Дозволено Цензурою.

Варшава 10 Августа 1867 года.

w Drukarni J. Jaworskiego.

SPIS RZECZY.

ROZDZIAŁ I.

O liczbach, systemie dziesiątkowym liczb i liczeniu.

1. Każda rzecz pod zmysły nam podpadająca, nazywa się ciałem. Jesteśmy ustawicznie otoczeni ciałami i postrzegamy: że one mają pewną długość, szerokość, wysokość lub grubość, czyli jedném słowem rozciągłość i prawie wszystkie mają pewien ciężar. Wiemy że nie wszystkie ciała są sobie równe, ale jedne z nich bywają większe od drugich, i nie wszystkie także są jednakowo ciężkie, ale jedne z nich bywają cięższe od drugich i w tym nawet częstokroć przypadku, chociaż dwa ciała bywają jednakowéj rozciągłości.

2. Wymiary rozciągłości jako też i ciężar, mogą być w każdym ciele powiększane lub pomniejszane, a wszystko to, cokolwiek daje się powiększyć lub zmniejszyć, nazywamy w Arytmetyce *wielkością* albo *iłością* (величина). Zachodzi tu jednakże zaraz pytanie: jakim sposobem oceniać będziemy tę wielkość? Oto nie inaczéj, jak tylko porównywając ją z inną znaną nam wielkością tegoż samego z nią gatunku. I tak: ażeby przekonać się o długości jakiego ciała, porównać je potrzeba z długością nam znaną, np. z arszynem. Sam wzrok jednak nie doprowodzi nas do wypadku prawdziwego, i jedynie tylko drogą praktyczną cel ten osiągnąć możemy; mianowicie przykładając naprzemian arszyn do długości danego ciała; i ile razy arszyn da się przyłożyć do danéj długości, tyle razy taż długość większa będzie od długości arszyna, czyli tyle arszynów zawierać będzię długość danego ciała.

Ażeby ocenić ciężar ciała, trzeba go podobnież porównać z ciężarem znanym np. z funtem. Tu znowu cel ten osiągniemy drogą tylko praktyczną, szukając ile funtów potrzeba, żeby razem wzięte, wyrównywały ciężarowi ciała danego, a wypadek ztąd otrzymany, da nam dopiéro jasne wyobrażenie o ciężarze ciała.

3. Wielkość taka, jaką jest arszyn w pierwszym a funt w drugim przykładzie, służący do ocenienia innéj wielkości tegoż samego z nią gatunku, nazywa się w Arytmetyce *jednością* (единица), a wypadek z takowego porównania otrzymany, *liczbą* (число).

Jedności bywają dwojakie: naturalne i sztuczne czyli umówione, np. człowiek, drzewo, kamień i t. d. są to jedności naturalne, a arszyn, funt, korzec, rubel i t. d., są jedności umówione.

Każda wielkość może być zarazem jednością i liczbą, np. rubel jest jednością gdy jest w jednéj sztuce, przestaje zaś być nią, i zamienia się na liczbę, gdy go zmienimy na kopiejki, a każda kopiejka stanowi wtedy osobną jednostkę, dopóki ją tylko nie zmienimy na drobniejszą jeszcze monetę. Podobnież stado koni jest jednością, zliczone zaś pojedyncze sztuki w stadzie będące, dają liczbę.

Liczba więc będąc wypadkiem porównania wielkości z jednością, *oznacza zbiór jedności tego samego Gatunku.*

4. Gdy do jedności dołączamy jedność, otrzymamy dwie jedności; gdy do dwóch jedności dołączamy znowu jedność, otrzymamy trzy jedności, i tak następnie dołączając ciągle po jedności, za każdym razem otrzymywać będziemy inny zbiór tychże jedności czyli inną liczbę. Ale człowiek, który od Stwórcy otrzymał dar mowy w celu udzielania drugim myśli swoich, szlachetnie dumny z darów Bozkich, które wywyższyły go nad inne stworzenia, z postępem czasu dążył do przekazania czynów swoich, potomności; i w tym to celu znakami widomemi chciał dać poznać następcom swoje pomysły. Temi właśnie znakami widomemi są litery, które spajając i łącząc z sobą, formujemy wyrazy składające naszą mowę. Podobnież i w Arytmetyce na oznaczanie liczb mamy także znaki widome, które otrzymaliśmy w spuściźnie od Arabów, a te są następujące: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.

Znak 1 jeden, oznacza jednę jedność.
— 2 dwa, oznacza zbiór dwóch jedności.
— 3 trzy, oznacza zbiór trzech jedności.
— 4 cztery, oznacza zbiór czterech jedności.
— 5 pięć, oznacza zbiór pięciu jedności.
— 6 sześć, oznacza zbiór sześciu jedności.
— 7 siedm, oznacza zbiór siedmiu jedności.
— 8 ośm, oznacza zbiór ośmiu jedności.
— 9 dziewięć, oznacza zbiór dziewięciu jedności.
— 0 zero, oznacza że niema żadnego zbioru jedności.

Otóż, jak 24 liter wystarczają nam do napisania wszystkiego o czem tylko pomyślimy, tak podobnież powyższe dziesięć znaków są dostateczne do napisania największego nawet zbioru jedności, a to dla tego, że wartość każdego znaku od dwóch rzeczy zależną robimy.

1) raz od jego figury czyli kształtu; 2) drugi raz od miejsca, na którém go napiszemy.

Wartość znaków od ich formy, jest nigdy niezmienna. I tak: znak 9 zawsze największą, znak 1 zawsze najmniejszą liczbę oznacza.

(Wartość znaków zależna od miejsca, jest wprawdzie zmienna ale niedowolna,) lecz według pewnego prawa zmieniająca się a to w ten sposób, że każda jedność napisana o jedno miejsce daléj ku lewéj ręce, ma wartość dziesięć razy większą od tejże jedności napisanéj na miejscu poprzedzającém. I na tém to założeniu opierając się, wytłumaczymy to tak niepodobne na pozór do wykonania zadanie, iżby za pomocą tylko dziesięciu znaków, można było oznaczać wszelki, choćby największy zbiór jedności.

I tak: do 9 dołączywszy 1, otrzymamy zbiór dziesięciu jedności czyli jeden dziesiątek, do napisania którego użyjemy dwóch znaków: 0 (zera) i 1 (jedności), pisząc ten ostatni przed pierwszym; to jest tak: 10. W liczbie téj zero nie oznacza żadnego zbioru jedności, znak zaś 1 który sam napisany oznacza jednę jedność, lecz napisany na miejscu drugiém, według założenia wart jest dziesięć razy więcéj, czyli oznacza zbiór dziesięciu jedności.

Gdy do dziesiątka dołączymy dziesiątek, otrzymamy dwa dziesiątki czyli dwadzieścia; a że do napisania jednego dziesiątka, użyliśmy znaku 1 umieszczonego na drugiém miejscu, zatem do napisania zbioru dwóch dziesiątków, użyjemy znaku 2, pisząc go na tém samém miejscu co i poprzedzający, to jest tak: 20.

Gdy do dwóch dziesiątków dołączymy jeszcze dziesiątek, otrzymamy zbiór trzech dziesiątków czyli trzydzieści, które napiszemy w taki sam znowu sposób, używając do tego znaku 3 i 0, to jest 30.

Podobynym sposobem rozumując, dojdziemy że:

zbiór czterech dziesiątków czyli czterdziestu jedności, napisze się tak 40.

zbiór pięciu dziesiątków czyli pięćdziesięciu jedności, napisze się tak 50.

zbiór sześciu dziesiątków czyli sześćdziesięciu jedności, napisze się tak 60.

zbiór siedmiu dziesiątków czyli siedmdziesięciu jedności, napisze się tak 70.

zbiór ośmiu dziesiątków czyli ośmdziesięciu jedności, napisze się tak 80.

zbiór dziewięciu dziesiątków czyli dziewięćdziesięciu jedności, napisze się tak 90.

Jeżeli do zbioru dziewięciu dziesiątków, dołączymy jeszcze jeden dziesiątek, otrzymamy zbiór dziesięciu dziesiątków czyli sto, a do napisania go użyjemy dwóch zer i znaku 1, pisząc ten ostatni na trzeciém miejscu, t. j. tak 100.

Bo i w saméj rzeczy: znak 1 napisany na drugiém miejscu, oznaczał zbiór dziesięciu jedności czyli jeden dziesiątek; napisany więc na trzeciém miejscu, to jest, o jedno miejsce dalej ku lewéj ręce, według założenia wart będzie dziesięć razy więcéj, t. j. oznaczać będzie zbiór dziesięciu dziesiątków czyli sto.

Zatém, chcąc oznaczyć zbiór dwóch set, czyli dwudziestu dziesiątków, czyli dwustu jedności, napiszemy tak 200.

Do oznaczenia zbioru trzech set, czyli trzydziestu dziesiątków, czyli trzystu jedności, napiszemy tak 300.

Do oznaczenia zbioru czterech set, czyli czterdziestu dziesiątków, czyli czterystu jedności, napiszemy tak 400.

Do oznaczenia zbioru pięciu set, czyli pięćdziesięciu dziesiątków, czyli pięciu set jedności, napiszemy tak 500.

Do oznaczenia zbioru sześciu set, czyli sześćdziesięciu dziesiątków, czyli sześciu set jedności, napiszemy tak 600.

Do oznaczenia zbioru siedmiu set, czyli siedmdziesięciu dziesiątków, czyli ośmiu set jedności, napiszemy tak 700.

Do oznaczenia zbioru ośmiu set, czy ośmdziesięciu dziesiątków, czyli ośmiu set jedności, napiszemy tak 800.

Do oznaczenia zbioru dziewięciu set, czyli dziewięćdziesięciu dziesiątków, czyli dziewięciu set jedności, napiszemy tak 900.

Jeżeli do dziewięciu set, dołączymy jedno sto, otrzymamy dziesięć set, czyli tysiąc, który oznaczy się pisząc znak 1 na czwartém miejscu, pozostałe trzy miejsca zapełniając zerami, to jest 1000.

Bo i w saméj rzeczy: znak 1, napisany na trzeciém miejscu, oznaczał jedno sto; napisany więc o jedno miejsce daléj ku lewéj ręce, to jest na czwartém miejścu, według założenia, wart być musi dziesięć razy więcéj, to jest dziesięć set, czyli tysiąc.

Zatém zbiór dwóch tysięcy, napiszemy tak 2000
— trzech tysięcy 3000
— czterech tysięcy 4000
— pięciu tysięcy. 5000
— sześciu tysięcy 6000
— siedmiu tysięcy 7000
— ośmiu tysięcy. 8000
— dziewięciu tysięcy 9000

A w podobny sposób jak dotąd rozumując, dojdziemy że:

Zbiór dziesięciu tysięcy, napisze się tak. 10000
— dwudziestu tysięcy 20000
— trzydziestu tysięcy 30000
— czterdziestu tysięcy. 40000
— pięćdziesięciu tysięcy 50000
— sześćdziesięciu tysięcy 60000
— siedmdziesięciu tysięcy. . . . , 70000
— ośmdziesięciu tysięcy 80000
— dziewięćdziesięciu tysięcy 90000
— stu tysięcy. 100000

Zbiór	dwustu tysięcy	200000
—	trzystu tysięcy	300000
—	czterystu tysięcy.	400000
—	pięciuset tysięcy.	500000
—	sześciuset tysięcy.	600000
—	siedmiuset tysięcy	700000
—	ośmiuset tysięcy	800000
—	dziewięciuset tysięcy	900000
—	tysiąca tysięcy, czyli 1-go miliona.	1000000
—	dwóch milionów	2000000
—	trzech milionów	3000000
—	dziewięciu milionów	9000000
—	dziesięciu milionów	10000000
—	dziewięćdziesięciu milionów .	90000000
—	stu milionów.	100000000
—	dziewięciuset milionów	900000000
—	tysiąca milionów, czyli: jednego miliarda	1000000000
—	dwóch miliardów	2000000000
—	dziewięciu miliardów	9000000000
—	dziesięciu milardów	10000000000
—	stu miliardów	100000000000
—	dziewięciuset miliardów .	900000000000
—	tysiąca miliardów	1000000000000
	i t. p. *).	

Zastanowiwszy się nad tém, cośmy powiedzieli o tworzeniu liczb wyższych od dziewięciu pierwszych, postrzeżemy:

1. Że dziesiątki wyrażone są dwoma, sta trzema, tysiące czterema, dziesiątki tysięcy pięcioma, sta tysięcy sześcioma, miliony siedmioma, dziesiątki milionów ośmioma, sta milionów dziewięcioma, miliardy dziesięcioma znakami. Czyli rachując od prawej ku lewéj ręce, liczby oznaczające zbiory dziesiątków, są umiesz-

---

*) Dawniéj 1,000 milionów zwano bilionem, 1,000 bilionów trylionem, 1,000 trylionów, kwatrylionem i t. p. lecz dziś nazwy te nie są w użyciu.

czone na drugiém miejscu, liczby oznaczające zbiory set na trzeciém, zbiory tysięcy na czwartém i t. p.

2. Znak 0, chociaż sam napisany, nie oznacza żadnego zbioru jedności, lecz dopisany do liczby, zwiększa jéj wartość dziesięć razy: bo w takim razie wszystkie znaki téj liczby przesuną się, że tak powiem i stać będą o jedno miejsce daléj ku lewéj ręce, a z tego zarazem wypada:

3. Że dopisanie dwóch zer do liczby, zwiększa jéj wartość 100 razy; dopisanie trzech zer, zwiększa jéj wartość 1000 razy i t. p.

Dla napisania zbioru jedności i dziesiątków jedną liczbą, potrzeba liczbę oznaczającą jedności, napisać na pierwszém, a liczbę oznaczającą dziesiątki na drugiém miejscu, np. sześćdziesiąt pięć, piszemy 65; bo i w saméj rzeczy, znak 6 umieszczony na drugiém miejscu, oznacza zbiór sześciu dziesiątków, a znak 5 na pierwszem, zbiór pięciu jedności. Dla napisania zbioru jedności, dziesiątków i set jedną liczbą, potrzeba liczbę oznaczającą jedności, napisać na pierwszém, oznaczającą dziesiątki na drugiém, a oznaczającą sta, na trzeciém miejscu; np. pięćset ośmdziesiąt cztery, piszemy 584. Bo w saméj rzeczy: znak 5 na trzeciém miejscu, oznacza zbiór pięciu sét; znak 8 na drugiém miejscu, oznacza zbiór ośmiu dziesiątków; a znak 4 na pierwszém, oznacza zbiór czterech jedności.

Wszystkie dalsze liczby ulegają w napisaniu temu samemu prawu; i tak:

Dajemy, że mamy do napisania sześćdziesiąt cztery tysiące pięćdziesiąt dziewięć. Pamiętając że dziesiątki tysięcy piszą się na piątém miejscu, tysiące na czwartem, sta na trzeciém, dziesiątki na drugiém, a jedności na pierwszém, z łatwością napiszemy 64,059. Tu na trzeciém miejscu umieściliśmy zero, bo w danéj liczbie nie było żadnego zbioru set *).

---

*) Znaki używane przez dawnych Rzymian na oznaczenie liczb są:
I, II, III, IIII lub IV, V, VI, VII, VIJI, VIIII lub IX, X, XI, etc.
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11,
XX, XXI, etc. XXX, XXXX, lub XL, L, LX, LXX, etc. LXXXX
20, 21, 30, 40, 50, 60, 70,

5. Liczenie uczy dwóch rzeczy:

1) Każdą wymówioną liczbę, znakami oznaczać.

2. Każdą znakami oznaczoną liczbę, wymawiać.

Pierwszy cel osiągnęliśmy w poprzedzającym numerze, co się zaś tyczy celu drugiego, zważmy co następuje:

Jeżeli liczby są małe, to umiejętność napisania ich, podaje zarazem sposoby ich czytania; np. 59, liczba ta jest dwuznakowa, 5 na drugiém miejscu oznacza zbiór pięciu dziesiątków, 9 na pierwszém miejscu oznacza zbiór dziewięciu jedności; zatém cała liczba przeczyta się pięćdziesiąt dziewięć.

Podobnym sposobem liczba 375 przeczyta się trzysta siedmdziesiąt pięć, liczba 407 przeczyta się czterysta siedm i t. p.

Jeżeli liczby są duże, natenczas potrzeba je rozdzielić na oddziały zawierające po trzy znaki, zaczynając od prawéj ku lewéj ręce. Zdarzyć się może, że ostatni oddział mniéj niż trzy znaki zawierać będzie. Oznaczenie każdego oddziału jakimkolwiek sposobem jest dowolne np. takie:

35, 893, 214, 537;

albo takie: 35|893|214|537.

W pierwszym oddziale będą jedności, dziesiątki, sta; w drugim toż samo z dodatkiem tysięcy; w trzecim także jedności, dziesiątki, sta z dodatkiem milionów i t. p.

Czytanie rozpocząć od najwyższego oddziału to jest od lewéj ręki, nadając każdemu znakowi nazwisko zależne od jego kształtu i od miejsca na którém jest napisany; i tak powyższa liczba przeczyta się: trzydzieści pięć miliardów, ośmset dziewięćdziesiąt trzy milionów, dwieście czternaście tysięcy, pięćset trzydzieści siedm.

6. Liczba oznaczająca gatunek rzeczy, t. j. mająca nazwisko jakiéj rzeczy, zowie się liczbą *imienną* (именованное число) (mianowaną), np. 5 gruszek, 9 książek, 18 łokci i t. p. Liczba nieoznaczająca żadnego gatunku rzeczy, t. j. niemająca nazwiska,

---

lub XC, C, CC, ect. D, DC, etc. M, etc.
90, 100, 200, 500, 600, 1000.

Liczba np. 1787, ich znakami tak wyraziłaby się: MDCCLXXXVII.

zowie się liczbą *bezimienną* czyli *bezwzględną* (отвлеченное число) (ogólną) np. 7 a niewiadomo czego.

7. Gdy liczba jest zbiorem całych jedności, zowie się liczbą *całkowitą* (цѣлое число) np. 5 całych jabłek; lecz jeżeli jabłko rozdzielimy na ilekolwiek części równych, i weźmiemy jednę lub kilka takich części, wtedy liczba wyrażająca zbiór tych części, zowie się liczbą *ułamkową* (дробь).

8. Z jednych liczb powstają czyli tworzą się inne liczby w dwojaki sposób: albo przez ich powiększanie, albo przez ich zmniejszanie.

Powiększać liczbę możemy dwojakim sposobem, t. j. dodając do niéj nierówną lub równą jéj liczbę.

W obudwóch razach jedną drogą postępować możemy; lecz drugi przypadek doprowadza nas do wielu skróceń, z tego więc powodu odróżniamy tu dwa działania: *dodawanie* i *mnożenie*, z których drugie t. j. mnożenie, będzie tylko skróconém dodawaniem.

Pomniejszać liczbę możemy także dwojakim sposobem, t. j. odejmując od niéj drugą mniejszą liczbę raz tylko lub kilka razy. Tu podobnież w obudwóch razach postępować możemy jednakową drogą, lecz drugi przypadek doprowadza nas do wielu skróceń, z tego powodu rozróżnić możemy dwa działania: *odejmowanie* i *dzielenie*, z których drugie, będzie tylko skróconém, odejmowaniem.

9. Dla pokazania, że dwie liczby mają być do siebie dodane, używa się znaku (+), który się czyta *więcéj* (плюсъ) np. 5+1 znaczy, ze do liczby 5 dodać liczbę 1, a przeczyta się 5 więcéj 1.

Dla pokazania że dwie liczcy mają być od siebie odjęte, używa się znaku (—), który się czyta *mniéj* (минусъ) np. 9—1 znaczy, że od liczby 9 odjąć liczbę 1, a przeczyta się 9 mniéj 1.

Dla pokazania, że dwie liczby mają być przez siebie mnożone, używa się znaku (×) lub (.) np. 3×2 lub 3.2, znaczy, że liczba 3 ma być pomnożona przez 2.

Dla pokazania, że dwie liczby mają być przez siebie dzielone, używa się znoku (:) np. 8:4, znaczy, że liczba 8 ma być podzielona przez liczbę 4. Dzielenie to można jeszcze wskazać innym sposobem a mianowicie: $\frac{3}{4}$

Dla pokazania, że dwie ilości są równe sobie, używa się znaku (=). które się czyta *równe* (равно) np. 5+1=6, przeczyta się 5 więcéj 1 równe 6.

10. Arytmetyka (аритметика) jestto umiejętność, podająca nam sposoby, jak z liczb znanych nieznane wynaleść możemy, czyli jestto nauka o liczbach.

ROZDZIAŁ II.

Działania z liczbami całkowitemi.

DODAWANIE.

11. Dodawanie (сложеніе) jestto działanie mocą którego łączymy w jednę liczbę ilekolwiek liczb jednego gatunku. Liczby dane do dodawania nazywają się *dodajne* (слогаемыя), a wypadek z działania otrzymany *zbiorem*, *ogółem* albo *summą* (сумма).

Działanie to można podzielić na trzy przypadki: na dodawanie liczb *jednoznakowych*, *dwuznakowych* i *wieloznakowych*.

12. Dodawanie liczb jednoznakowych. Dajmy że do liczby 5 mamy dodać liczbę 3. Ponieważ liczba 3 jest zbiorem trzech jedności, t. j. 1+1+1, zatém do liczby 5 dodać liczbę 3, to znaczy do 5 dodać trzy razy jedność; gdy więc do 5 dodamy jednę jedność, otrzymamy 6; gdy do tego dodamy drugą jedność, otrzymamy 7; gdy do tego dodamy trzecią jedność, otrzymamy 8, liczbę szukaną.

Z tego więc widzimy, że dodawanie jest tylko doliczaniem po jedności do danéj liczby. Ale sposób taki postępowania byłby nieco za długi, dla liczb większych wielce mozolny i w praktyce prawie niepodobny do wykonania, a dodawanie niczém nie różniłoby się od prostego liczenia, gdy tymczasem ono ma być jego skróconém działaniem. Umiejętność zatém dodawania polega głównie na tém, ażeby nabyć dostatecznéj wprawy w łączeniu przynajmniéj jednoznakowych liczb; do czego doprowadzi nas dokładne wyuczenie się poniżéj umieszczonéj tablicy.

Liczby dodajne.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

W pierwszym rzędzie u góry i w pierwszym po lewéj ręce, umieszczone są liczby dodajne; a ogół któréjkolwiek liczby pierwszego rzędu górnego złączonéj z którąkolwiek liczbą pierwszego rzędu umieszczonego po lewéj ręce, znajduje się na przecięciu się rzędów z tych liczb wychodzących. I tak: ogół liczb 6 i 4 znajduje się na przecięciu się rzędów wychodzących z 6 i 4, gdzie umieszczona jest liczba 10, będąca żądanym ogółem liczb danych.

Ogółów tych należy uczyć dzieci na rzeczach zmysłowych, zaraz jak tylko myśléć poczną, aby młodocianego ich umysłu zbytecznie nie utrudzać i naukę zamienić w przyjemną zabawę.

13. Dodawanie liczb dwuznakowych. Przypadek ten mieści w sobie łączenie liczby dwuznakowéj z jednoznakową i dwuznakowéj z dwuznakową.

Dajmy że do liczby 28 mamy dodać liczbę 6.

Liczba 28 składa się z 2 dziesiątków i 8 jedności; 8 jedności i 6 jedności daje 14 jedności, czyli 1 dziesiątek i 4 jedności; do tego dołączywszy 2 dziesiątki, otrzymamy 3 dziesiątki i 4 jedności czyli 34.

Działanie to przedstawi się w taki sposób:

$$\begin{array}{lr} & 28 \\ & 6 \\ \hline \text{Ogół} & 34. \end{array}$$

Objaśnienie. 6 jedności i 8 jedności daje 14 jedności czyli 1 dziesiątek i 4 jedności; 4 jedności podpisuję pod jednościami, a 1 dziesiątek dodaję do 2 dziesiątków, co daje 3 dziesiątki, który to ogół podpisuję pod dziesiątkami. Zatém szukanym ogółem jest 34.

Ażeby więc do liczby dwuznakowéj, dodać jednoznakową, potrzeba je napisać pod sobą, pamiętając, żeby jedności były podpisane pod jednościami, i podkreślić je poziomą liniją. Następnie dodać do siebie jedności i gdy ogół ich wypadnie większy od 9, rozdzielić go na dziesiątki i jedności, same jedności podpisać pod jednościami a dziesiątki wprost do dziesiątków dodać.

Chcąc do liczby dwuznakowéj dodać dwuznakową, postępuję w podobny sposób; i tak: dajmy że do liczby 47 mamy dodać 28.

Liczba 47 składa się z 4 dziesiątków i 7 jedności, a liczba 28 z 2 dziesiątków i 8 jednosci; ogół z jedności daje 15 jedności czyli 1 dziesiątek i 5 jedności, ogół z dziesiątków daje 6 dziesiątków; 6 dziesiątków a 1 dziesiątek z ogółu jedności, daje 7 dziesiątków i pozostałe 5 jedności, razem 7 dziesiątków i 5 jedności, czyli 75.

Działanie to przedstawi się w taki sposób:

$$\begin{array}{lr} & 47 \\ & 28 \\ \hline \text{Ogół} & 75. \end{array}$$

Objaśnienie. 8 jedności i 7 jedności, daje 15 jedności czyli 1 dziesiątek i 5 jedności; 5 jedności podpisuję pod jednościami, a 1 dziesiątek dodaję do dziesiątków; 1 dziesiątek pozostały z ogółu jedności a 2 dziesiątki, daje 3 dziesiątki, a jeszcze 4 dziesiątki daje 7 dziesiątków, które podpisuję pod dziesiątkami. Zatém szukanym ogółem jest 75.

Ażeby więc do liczby dwuznakowéj dodać dwuznakową, potrzeba dane liczby podpisać pod sobą tak, aby jedności były umieszczone pod jednościami, a dziesiątki pod dziesiątkami i podkréślić je poziomą liniją. Potém dodawszy do siebie jedności, jeśli ich ogół większy jest od 9, rozdzielić go na dziesiątki i jedności, same jedności podpisać pod jednościami a dziesiątki wprost do dziesiątków dodać.

Inne przykłady.

Dodać do siebie następujące liczby dwuznakowe:

23	49	85	75
18	57	23	24
34	36	74	37
19	Ogół 142.	38	72
Ogół 94		Ogół 220.	Ogół 208.

14. Dodawanie liczb wieloznakowych. Dajmy że mamy dodać do siebie następujące liczby wieloznakowe: 3765+786+5609+1853. Działanie odbywamy podobnym sposobem jak w poprzedzającym przypadku. Wzór jego tak się przedstawi:

$$\begin{array}{lr} & 3765 \\ & 786 \\ & 5609 \\ & 1853 \\ \hline \text{Ogół} & 12013 \end{array}$$

Objaśnienie. 3 jedności a 9 jedności, daje 12 jedności, a 6 jedności, daje 18 jedności, a 5 jedności, daje 23 jedności, czyli 2 dziesiątki i 3 jedności; 3 jedności podpisuję pod jednościami a 2 dziesiątki dodaję do dziesiątków: 2 dziesiątki z ogółu jedności pozostałe a 5 dziesiątków daje 7 dziesiątków, a 0 dziesiątków daje 7 dziesiątków, a 8 dziesiątków daje 15 dziesiątków, a 6 dziesiątków daje 21 dziesiątków, czyli 2 set i 1 dziesiątek; 1 dziesiątek podpisuję pod dziesiątkami a 2 set dodaję do set: 2 set z ogółu dziesiątków pozostałe a 8 set daje 10 set, a 6 set daje 16 set, a 7 set daje 23 set, a 7 set daje 30 set, czyli 3 tysiące i 0 set; 0 set podpisuję pod stami, a 3 tysiące dodaję do tysięcy: 3 tysiące z ogółu set pozostałe a 1 tysiąc, daje 4 tysiące, a 5 tysięcy daje 9 tysięcy, a 3 tysiące daje 12 tysięcy, które podpisuję pod tysiącami. Zatém szukanym ogółem liczb danych jest 12013.

Z tego widzimy: że, *aby dodać ile kolwiek liczb do siebie, potrzeba liczby dodajne wypisać jedne pod drugiemi tak, aby jedności były umieszczone pod jednościami, dziesiątki pod dziesiątkami, sta pod stami i t. d. i podkreślić je linijką poziomą. Następnie dodać do siebie jedności i jeśli ich ogół większy od 9, rozdzielić go na dziesiątki i jedności, jedności podpisać pod jednościami, dziesiątki zaś tego ogółu wprost do dziesiątków dodać; gdy znów ogół dziesiątków jest większy od 9, rozdzielić go na dziesiątki i dziesiątki dziesiątków czyli sta, same dziesiątki podpisać pod dziesiątkami a dziesiątki dziesiątków czyli sta dodać do set i t. p. ostatni zaś ogół wypisać taki jaki był otrzymany.*

Uwaga. Dodawanie odbywać możemy na liczbach jednego tylko gatunku.

15. Sprawdzenie. (повѣрка v. проба) czyli przekonanie się o prawdziwości wypadku z działania, jest niezbędne. Na to mamy podane rozmaite sposoby:

Sposób 1. Jeżeli dodawanie było wykonane z dołu do góry, potrzeba toż samo działanie powtórzyć dodając z góry na dół; jeżeli ogóły w obu razach wypadną też same, znakiem to będzie że działanie wykonane było bez błędu. Gdyby zaś wypadki nie zgadzały się, należy powtórzyć też same działanie.

Sposób 2. Po wykonaniu działania, wypisać po szczególe ogóły z jedności, dziesiątków, set i t. d. pamiętając aby jedności były napisane pod jednościami, dziesiątki pod dziesiątkami i t. d. następnie dodać je do siebie, to jeżeli ich ogół będzie taki sam jak ogół pierwiastkowo otrzymany, znakiem będzie że działanie wykonane bez błędu. Albo: znaleźć ogóły każdego rzędu po szczególe zaczynając od porządku najwyższego, t. j. jeśli njwiększa liczba jest czteroznakowa, to naprzód zrobić ogół z tysięcy, następnie z set, dziesiątków i jedności, ogóły te wypisać pod sobą we właściwym porządku i dodać do siebie, to jeśli działanie dobrze wykonane, ostatni ogół powinien być taki sam, jak ogół pierwiastkowo otrzymany, np:

	3562
	7839
	647
	5278
Ogół	17326.

Sprawdzenie.

A.		B.	
26	ogół jedności,	15	ogół tysięcy,
20	ogół dziesiątków,	21	ogół set,
21	ogół set,	20	ogół dziesiątków,
15	ogół tysięcy,	26	ogół jedności,
17326	zgodno.	17326	zgodno.

Jest więcéj jeszcze sposobów sprawdzania, niektóre z nich późniéj poznamy.

Dodawanie od lewéj ku prawéj ręce byłoby bardzo niedogodne, ale jednakże zawsze możliwe. Sprawdzenie pod lit. B umieszczone, może nam zarazem podać sposób takiego dodawania. Dodawanie od prawéj ku lewéj, lub od lewéj ku prawéj ręce, wtedy jest tylko równie dogodne, gdy ogóły pojedyncze nie przechodzą dziewięciu.

Zagadnienia.

1. Na jednéj jabłoni było jabłek 475, na drugiéj 529, na trzeciéj 387, na czwartéj 326; ileż było jabłek na wszystkich razem jabłoniach? (*Odpowiedź* 1717 jabłek).

2. Jedna sztuka sukna kosztowała 95 rubli, druga 87 rubli, trzecia 64 rubli, czwarta 65 rubli, piąta 79 rubli; ile kosztowały wszystkie sztuki razem? (*Odp.* 390 rubli.)

3. Rossya Europejska ma ludności obojéj płci 54,092,000 dusz, a przestrzeni 90,117 mil kwadratowych; Królestwo Polskie ma mieszkańców 4,850,000, a przestrzeni 2,320 mil kwadratowych; w Wielkiém Księstwie Finlandzkiem liczba mieszkańców wynosi

1,525,000, a przestrzeń 6,844 mil kwadratowych. Dowiedzieć się ile jest ludności i ile przestrzeni w Rossyi Europejskiéj łącznie z Królestwem Polskiém i Wielkiém księstwem Finlandzkiém? (*Odp.* 60,467,000 ludności, 99,281 mil kwadratowych).

4. Pewien kupił dwie wsie: za jednę zapłacił 27,894 rubli, a za drugą 58,637 rubli; sprzedawszy je potém, zyskał 8,659 rubli. Za ileż obie wsie sprzedał? (*Odp.* za 95,190 rubli).

5. Ojciec zaspokoiwszy główne potrzeby syna uczęszczającego do szkół, przy wyjezdném dał mu do ręki na drobne wydatki pewną ilość pieniędzy. A ponieważ był to chłopiec od dzieciństwa przyzwyczajony do porządku, każdy więc swój wydatek najskrupulatniéj zapisywał w osobnej na to przeznaczonéj książeczce, w któréj wyczytać można było co następuje: że dwie liber papieru, ołówek i paczkę piór 68 kopiejek; za kałamarz i atrament 23 kopiejek; za geometryją 40 kopiejek; za wypisy polskie 35 kop.; dla biednych 15 kop.; na pierniki 12 kop.; za laskę laku 5 kop. Ileż dostał od ojca pieniędzy, jeśli mu w woreczku zostało jeszcze 37 kop.? (*Odp.* dostał 235 kopiejek, czyli 2 ruble i 35 kopiejek).

6. Dowiedzieć się ile jest rubli w trzech woreczkach, jeśli w pierwszym jest ich 87, w drugim 35 rublami więcéj jak w pierwszym, a w trzecim tyle ile w tamtych dwóch razem? (*Odp.* 418 rubli).

7. Po upływie lat 18 będę miał lat tyle, ile ich teraz mój brat liczy. Kiedy więc dziś skończyłem lat 12, ileż lat może mieć mój brat? (*Odp.* 30 lat).

8. Jeżeli na rachunek ciążącego na mnie długu zapłacę 5,867 rubli, to zostanę tylko dłużnym 986 rubli. Ile więc wynosił cały mój dług? (*Odp.* 6,853 rubli).

9. Kupiec sprzedał swój towar za 3,874 rubli, i na téj sprzedaży stracił 527 rubli. Ileż kosztował go towar? (*Odp.* 4,401 rubli).

10. Zawieziono do magazynu różnemi czasy następujące ilości mąki: 2,656 czećwierci, 1587 czećwierci, 896 czećwierci, 5,304 czećwierci, 689 czećwierci, ileż ogółem znajduje się obecnie mąki w pomienionym magazynie, jesli przed tém było już w nim 4,568 czećwierci? (*Odp.* 15,700 czećwierci).

11. Pewien zamożny obywatel nabył od sąsiada dobra, z warunkiem spłacenia ich w sześciu nierównych ratach. Pierwsza rata wynosić miała 3 915 rubli, każda zaś następująca 300 rublami większa od raty poprzedzającéj. Za jakąż summę kupione były dobra i ile każda rata wynosiła? (*Odp.* dobra kupione były za 27 900 rubli; pierwsza rata wynosiła 3 915, druga 4 215, trzecia 4 515, czwarta 4 815, piąta 5 115, szósta 5 415 rubli).

12. Kupiec zakupił towaru za 3 854 rubli; jeżeli na nim chce zyskać 569 rubli, za ileż go sprzedać powinien? (*Odp.* za 4 423 rub.).

13. Ojciec miał lat 25 wówczać kiedy mu się syn urodził; ileż więc ma lat dziś, kiedy syn ma lat 37? (*Odp.* ma lat 62).

14. Pewien mieszkaniec stolicy wydał w przeciągu jednego roku na życie 378 rubli, na mieszkanie 280 rubli, na odzienie 196 rubli, na inne drobne wydatki 128 rubli; po zrobionym zaś obrachunku, zostało mu jeszcze 18 rubli. Ileż wynosił roczny jego dochód? (*Odp.* 1 000 rubli).

15. Trzech ludzi rozdzieliło między siebie pewną summę pieniędzy w ten sposób: że na jednego z nich wypadło 865 rubli, na drugiego 276 rubli więcéj jak na pierwszego, na trzeciego zaś tyle ile na tamtych dwóch razem; pozostałe zaś od podziału 34 ruble za wspólną umową rozdane zostały między biednych. Ile wypadło na każdego z nich i jaka była cała summa? (*Odp.* na pierwszego wypadło 865 rubli, na drugiego 1 141 rubli, na trzeciego 2 006 rubli, cała zaś summa wynosiła 4 046 rubli).

16. Pewien zamożny obywatel umierając bezdzietnie, testamentem rozporządził swoim majątkiem w następujący sposób: na założenie szpitala dla biednych w pobliskiem miasteczku summę 38 500 rubli; na Instytut moralnie zaniedbanych dzieci 13 600 rubli; na dom dla starców w Kalwaryi, miasteczka położonego w okolicy Warszawy 7 800 rubli, na nowy Zakład Ś. Marty w Warszawie 5 460 rubli; dla Towarzystw Dobroczynności w Warszawie i Lublinie po 4 800 rubli; na Instytut Głuchoniemych 6 350 rubli; nadto 3 200 rubli do równego podziału między 80 gospodarzy w jego majętności zostających, i pozostałe 400 rubli na jednorazowe wsparcie dla biednych. Ileż ogółem wynosił jego majątek? (*Odpowiedź.* 84 910 rubli).

ODEJMOWANIE.

16. Odejmowanie (вычитаніе), jestto działanie, za pomocą którego dowiadujemy się: ilą jednościami jedna liczba jest większa lub mniejsza od drugiéj; albo, jaka zachodzi różnica między dwiema liczbami tego samego gatunku; albo, ile się zostanie po wzięciu pewnéj liczby jednostek z danéj drugiéj liczby.

Wypadek z działania otrzymany, nazywa się *różnicą* lub *resztą* (остатокъ). Różnicą wtenczas, gdy się pytamy ilą jednościami jedna liczba jest większa lub mniejsza od drugiéj, np. osoba A. ma 5 jabłek, a osoba B. 3 jabłek; ile jabłek więcéj ma osoba A od osoby B?—Resztą zaś, gdy się pytamy, ile się pozostanie po wzięciu pewnéj liczby jednostek z drugiéj danéj liczby. np. osoba A ma 5 jabłek, i z tych dała osobie B 3 jabłek; ileż się jéj jeszcze pozostanie?

Liczba od któréj mamy odjąć drugą, nazywa się *odjemną* (уменьшаемое), liczba zaś którą odjąć mamy, nazywa się *odjemnikiem* (вычитаемое).

Właściwie, odejmowanie jest tylko skróconém odliczaniem po jedności od danéj liczby, i tak: gdybyśmy od liczby 5 mieli odjąć 3, to znaczy, od 5 odjąć trzy z kolei jedności; odjąwszy jednę jedność, pozostanie 4; od téj liczby odjąwszy drugą jedność, pozostanie 3; nakoniec od 3 odjąwszy trzecią jedność, pozostanie 2 na resztą żądaną.

Odejmowanie więc jest działaniem odwrotnem dodawania (Nr. 12).

Rzecz widoczna, że powyższy sposób postępowania, zwłaszcza dla liczb większych, byłby nader mozolny i niekiedy nawet niepodobny do wykonania; ażeby więc odnieść korzyść z działania, należy przedewszystkiém nabyć wprawy w wynajdowaniu różnic liczb jednoznakowych i dwuznakowéj nieprzechodzącéj 20 z jednoznakową, do czego posłuży tablica pod Nr. 12 umieszczoną.

Chcąc wymienioną tablicę zastosować do wynajdowania różnic, potrzeba liczbę oznaczającą ogół uważać za odjemną, jednę z liczb dodajnych ogółowi odpowiednich za odjemnik, to w takim razie druga liczba dodajna, będzie różnicą, np. w tablicy umieszczone jest, że 5 i 9 daje 14, zatém od 14 odjąwszy 5, pozostanie 9, albo od 14 odjąwszy 9, pozostanie 5.

17. *Ażeby znaleść różnicę liczb ilukolwiek znakowych, należy liczbę mniejszą podpisać pod większą tak, aby jedności były umieszczone pod jednościami, dziesiątki pod dziesiątkami, sta pod stami i t. d. i podkreślić je poziomą linją. Potém jedności odejmować od jedności, dziesiątki cd dziesiątków, sta od set i t. p.*

W odejmowaniu jednakże natrafić możemy na trzy przypadki: 1º znak odjemnika jest mniejszy od odpowiedniego znaku odjemnéj; 2º znak odjemnika jest równy odpowiedniemu znakowi odjemnéj; 3º znak odjemnika jest większy od odpowiedniego znaku odjemnéj. Wszystkie te przypadki objaśnimy na następujących przykładach:

Przykład 1. Dajmy że mamy znaleść różnicę liczb 4 256 i 2 854; podpisawszy je pod sobą wiadomym sposobem i wykonawszy działanie, będzie:

$$\begin{array}{rr} & 4256 \\ & 2854 \\ \hline \text{Różnica} & 1402 \end{array}$$

Objaśnienie. 4 jedności odjąwszy od 6 jedności, pozostanie 2 jedności, które podpisujemy pod jednościami; 5 dziesiątków odjąwszy od 5 dziesiątków, pozostanie 0 dziesiątków, które podpisujemy pod dziesiątkami; 8 set od 2 set odjąć nie można, w tym więc celu z 4 tysięcy biorę 1 tysiąc czyli 10 set, które dołączone do 2 set, uczynią 12 set, od tych teraz odjąwszy 8 set, otrzymamy 4 set, które podpisujemy pod stami; nakoniec 2 tysiące odjąwszy już tylko od 3 tysięcy, bo 1 tysiąc dołączyliśmy do set, otrzymamy na resztę 1 tysiąc. Szukana więc różnica liczb danych jest 1 402.

Przykład 2. Znaleść różnicę liczb 508 i 269.

Działanie przedstawi się podobnymże sposobem, to jest:

$$\begin{array}{rr} & 508 \\ & 269 \\ \hline \text{Różnica} & 239 \end{array}$$

Objaśnienie. Tu widzimy, że 9 jedności od 8 jedności odjąć nie można, należałoby więc wziąść z dziesiątków jeden dziesiątek czyli 10 jedności, które złączone z 8 jednościami, uczyniłyby 18 jedności, od których następnie odejmowalibyśmy 9 jedności; lecz na miejscu dziesiątków jest umieszczone 0, co pokazuje, że w odjemnéj nie ma wcale dziesiątków; w tym więc celu udajemy się do set i z 5 bierzemy jedno sto, czyli 10 dziesiątków i te myślą mieścimy w miejscu zera; teraz dopiero z 10 dziesiątków bierzemy 1 dziesiątek, czyli 10 jedności, do których dołączywszy 8 jedności, otrzymamy 18 jedności, a od tych odjąwszy 9 jedności, pozostanie 9 jedności które piszemy pod jednościami; 6 dziesiątków odjąwszy nie już od 0 dziesiątków, lecz od pozostałych w myśli 9 dziesiątków, otrzymamy 3 dziesiątki, które pod dziesiątkami podpisujemy; nakoniec 2 set odjąwszy od 4 set, bo z 5 było wzięte jedno sto, pozostanie 2 sta, które pod stami podpisujemy, i tym sposobem szukaną różnicą liczb danych jest 239.

Przykład 3. Jaka reszta pozostanie, gdy od liczby 48 003, odejmiemy liczbę 5 346.

	48003
	5346
Reszta	42657

Objaśnienie. 6 jedności od 3 jedności odjąć nie można, należy więc wziąść z kolumny dziesiątków w odjemnéj jeden dziesiątek, lecz że dziesiątków jest 0, udajemy się do set, i tych jest także 0, udajemy się więc aż do tysięcy i z 8 bierzemy 1 tysiąc czyli 10 set: z 10 set wziąwszy jedno sto, pozostałe 9 set mieścimy myślą w miejscu zera set, a że jedno sto wzięte, znaczy 10 dziesiątków, z których wziąwszy 1 dziesiątek, pozostałe 9 dziesiątków mieścimy myślą na miejscu 0 dziesiątków, jeden zaś dziesiątek wzięty czyli 10 jedności dołączamy do 3 jedności; tym więc sposobem z 8 tysięcy zrobiło się 7 tysięcy, z 0 set zrobiło się 9 set, z 0 dziesiątków, 9 dziesiątków, a z 3 jedności 13 jedności; pamiętając to, przystępujemy teraz do odejmowania, mówiąc: 6 jedności od 13 jedności, pozostanie 7 jedności; 4 dziesiątków od 9 dziesiątków, 5 dziesiątków; 3 set od 9 set, 6 set; 5 tysięcy od 7 tysięcy, 2 tysiące; 4 dziesiątków tysięcy od których nie ma żadnego dziesiątka tysięcy odjąć, dopisujemy w reszcie bez żadnéj odmiany na właściwém miejscu. Szukaną więc resztą jest 42 657.

18. Jeżeli wszystkie znaki odjemnéj, są większe od odpowiednich znaków odjemnika, wtedy odejmowanie bez popełnienia błędu, równie łatwo da się odbyć zaczynając od lewéj ręki ku prawéj, lub od prawéj ku lewéj; lecz jeżeli między znakami odjemnéj są takie, które są mniejsze od odpowiednich znaków odjemnika, wtedy odbywając działanie od jedności porządku najwyższego, t. j. od lewéj ręki ku prawéj, natrafiamy na pewne trudności. Oto jest wzór takiego działania:

$$\begin{array}{lr} & 67382 \\ & 25935 \\ \hline & 42 \\ & 145 \\ & 47 \\ \hline \text{Różnica} & 41447 \end{array}$$

Objaśnienie. 2 dziesiątków tysięcy od 6 dziesiątków tysięcy, pozostaje 4; 5 tysięcy od 7 tysięcy, pozostaje 2; lecz 9 set od 3 set odjąć nie można, bierzemy więc z 7 tysięcy 1 tysiąc, czyli 10 set, które dołączamy do 3 set, co daje 13 set, od tych odjąwszy 9 set, pozostanie 4 set; zważmy jednak, że przy odejmowaniu set musieliśmy z 7 tysięcy, wziąść 1 tysiąc, liczba więc 7 zamieniła się na 6, zatém 5 nie od 7 lecz od 6 odejmować należałoby, co powinno dać na resztę 1, nie zaś 2, poprawić więc należy błąd popełniony z odejmowania poprzedzającéj kolumny, przekreślając poprzednio znalezione 2, i w miejscu jej pisząc prawdziwy wypadek 1; i t. p.

Odejmowanie odbywać możemy na liczbach jednego gatunku.

19. **Sprawdzenie** czyli przekonanie się, że działanie było wykonane bez błędu, jest niezbędne. Na to mamy podane dwa sposoby, które są uzasadnione na następującéj prawdzie:

Różnica lub reszta otrzymana z odejmowania, jest dopełnieniem liczby mniejszéj do liczby większéj, np. gdy od 8 odejmiemy 5, wypadnie na resztę 3, która pokazuje zarazem ile jednosci potrzeba dodać do liczby mniejszéj 5, t. j. do odjemnika, aby otrzymać liczbę większą 8, t. j. odjemną; dla tego też mówimy, że 3 jest dopełnieniem liczby 5 do 8, jako też i odwrotnie, liczba 5 jest dopełnieniem 3 do 8. Zatém odjemna, odjemnik i reszta są w takim między sobą związku, że ogół z odjemnika i reszty daje liczbę równającą się odjemnéj, a odjemnik jest różnicą między odjemną i resztą; z tego więc wypada:

1. Jeżeli działanie wykonane bez błędu, to do odjemnika dodana reszta lub różnica, powinna dać na ogół liczbę taką samą, jaką jest odjemna.

2. Od odjemnéj odjąwszy resztę lub różnicę, otrzymać powinniśmy liczbę taką, jaką jest odjemnik.

Oto są dwa sposoby postępowania w celu sprawdzenia odejmowania.

Sposób 1.

42587 odjemna
29379 odjemnik
———
13208 reszta lub różnica
29379
———
42587 odjemna.

Sposób 2.

42587 odjemna
13208 reszta lub różnica
———
29379 odjemnik.

Własności liczb w odejmowaniu.

20. Gdy do odjemnéj dodamy pewną liczbę jedności, niezmieniając odjemnika, reszta lub różnica powiększy się tylą jednościami, ile było dodanych do odjemnéj: bo ten sam odjemnik odjęty od powiększonéj odjemnéj, wyda resztę większą od pierwotnéj; np.

Mam 18 rubli, i z tych wydaje 5 rubli, pozostaje mi jeszcze 13 rubli, a jeżelibym miał o 6 rubli więcéj, t. j. 24 rubli i z tych wydał tyleż co i pierwéj, t. j. 5 rubli, pozostałoby mi 19 rubli, t. j. o 6 rubli więcéj jak pierwotnie. Co tak się przedstawi.

$$\begin{array}{r} 18 \\ 5 \\ \hline 13 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 18+6=24 \\ 5 \\ \hline 19 \text{ czyli } 13+6. \end{array}$$

21. Gdy do odjemnika dodamy pewną liczbę jedności, niezmieniając odjemnéj, reszta lub różnica pomniejszy się tylą jednościami, ile było dodanych do odjemnika: bo tak powiększony odjemnik, odjęty od téj saméj odjemnéj, wyda resztę mniejszą od pierwotnéj; np.

Mam 12 rubli, i z tych wydaję 5 rubli, pozostaje mi jeszcze 7 rubli; a jeżelibym wydał o 3 ruble więcéj t. j. 8 rubli, pozostałoby mi 4 ruble, t. j. o 3 ruble mniéj. Co tak się przedstawi:

$$\begin{array}{r} 12 \\ 5 \\ \hline 7 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 12 \\ 5+3=\ 8 \\ \hline 4 \text{ czyli } 7-3. \end{array}$$

22. Gdy do odjemnéj i do odjemnika dodamy po jednakowéj liczbie jedności, reszta lub różnica nie zmieni się: bo ilą jednościami reszta lub różnica zostanie powiększona od zwiększenia odjemnéj, tyląż jednościami zostanie pomniejszona od powiększenia odjemnika; np.

Mam 16 rubli, i z tych wydaję 4 ruble, pozostaje mi 12 rubli; lecz jeżelibym miał o 2 ruble więcéj, t. j. 18 rubli i z tych wydał o 2 ruble więcéj jak pierwotnie, t. j. 6 rubli, pozostałoby mi także 12 rubli. Co tak się przedstawi:

$$\begin{array}{r} 16 \\ 4 \\ \hline 12 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 16+2=18 \\ 4+2=\ 6 \\ \hline 12. \end{array}$$

23. Gdy odjemną zmniejszymy pewną liczbą jedności, nie zmieniając odjemnika, reszta lub różnica pomniejszy się tylą jednościami, ilą jednościami zmniejszyliśmy odjemną: bo ten sam odjemnik odjęty od zmniejszonéj odjemnéj, wyda resztę mniejszą od pierwotnéj; np.

Mam 20 rubli, i z tych wydaję 8 rubli, pozostaje mi 12 rubli; jeżeli zaś mam o 5 rubli mniéj, t. j. 15 rubli i z tych wydaję także 8 rubli, pozostaje mi 7 rubli, t. j. o 5 rubli mniéj jak pierwotnie. Co tak się przedstawi:

20	20—5=15
8	8
12	7 czyli 12—5.

24. Gdy odjemnik zmniejszymy pewną liczbę jedności, niezmieniając odjemnéj, reszta lub różnica powiększy się tylą jednościami, ilą jednościami zmniejszyliśmy odjemnik: bo zmniejszony odjemnik odjęty od téj saméj odjemnéj, wyda resztę większą od pierwotnéj; np.

Mam 16 rubli i z tych wydaję 6 rubli, pozostaje mi 10 rubli; lecz jeżelibym wydał o 2 ruble mniéj, t. j. 4 ruble, pozostałoby mi 12 rubli, t. j. o 2 ruble więcéj jak pierwotnie. Co tak się przedstawi:

16	16
6	6—2= 4
10.	12 czyli 10+2.

25. Gdy odjemną i odjemnik zmniejszymy jednakową liczbą jedności, reszta lub różnica wypadnie taka jak pierwotnie: bo ilą jednościami reszta lub różnica zostanie pomniejszoną od zmniejszenia odjemnéj, tyląż jednościami zostanie powiększoną od zmniejszenia odjemnika; np.

Mam 14 rubli, i z tych wydaję 5 rubli, pozostaje mi 9 rubli, lecz jeżeli będę miał o 2 ruble mniéj; t. j. 12 rubli i wydam też o 2 ruble mniéj, t. j. 3 ruble, pozostanie mi 9 rubli, t. j. tyle, ile pierwotnie. Co tak się przedstawi:

14	14—2=12
5	5—2= 3
9	9

Sprawdzenie dodawania przez odejmowanie.

26. **Sposób 3.** Dajmy, że mamy w jedną liczbę zebrać następujące liczby:

634
1862
4579
385
7460
5
2460
22
-260
24
- 20
20
- -

Dodawszy zwyczajnym sposobem zaczynając od jednostek pojedynczych, otrzymamy na ogół 7460. Odbywajmy teraz dodawanie od jednostek najwyższych jak w obecnym przypadku od tysięcy:

Ogół tysięcy jest 5, które odjąwszy od 7 460 pozostanie 2 460; ogół set jest 22, które odjąwszy od 2 460, pozostanie 260; ogół dziesiątków jest 24, które odjąwszy od 260, pozostanie 20, ogół jedności jest 20, które odjąwszy od poprzedzających 20, nic nie pozostaje, co jest dowodem, że działanie było wykonane bez błędu.

Zamiast wypisywania tych cząstkowych ogółów jakimi w obecnym przykładzie są: 5, 22, 24, 20, można zaraz po ich otrzymaniu, odejmować ch w myśli od odpowiedniej reszty, a to w ten sposób:

634	5	tysięcy od 7 tysięcy, zostaje 2.
1862	22	set od 24 set, zostaje 2.
4579	24	dziesiątków od 26 dziesiątków, zostaje 2.
385	20	jedności od 20, nic nie zostaje.
7460.		

27 **Sposób 4.** Przykład ten sam:

Liczba 7460 jest ogółem z czterech liczb 634+1862+4579+385. Przekreślmy którąkolwiek z tych czterech liczb, a trzy pozostałe dodajmy do siebie, otrzymamy na ogół liczbę, która od pierwszego ogółu widocznie różnić się będzie o liczbę w powtórném dodawaniu opuszczoną. Jeżeli więc pierwsze i drugie dodawanie dobrze było wykonane, to po odjęciu tych dwóch ogółów od siebie, na resztę koniecznie wypadnie liczba przekreślona.

Oto wzór działania:

```
   6 3 4
 -1-8-6-2-
 4 5 7 9
   3 8 6
 -------
 7 4 6 0  pierwszy ogół,
 5 5 9 8  drugi ogół,
 -------
 1 8 6 2  różnica równająca się liczbie przekreślonéj.
```

Zagadnienia.

1. Za pewną liczbę sztuk sukna, zapłacono 348 rubli, które sprzedano za 376 rubli; czy zyskano lub stracono i ile?

Wskazanie działania. Z liczb podanych w zagadnieniu widocznie pokazuje się że zyskano, bo więcéj pieniędzy wzięto za sukno, niżeli to sukno kosztowało. Zyskano zaś tyle, ile rubli więcéj wzięto jak zapłacono; czyli tyle, ilą jednościami liczba 376 większa od liczby 348. A ponieważ odejmowanie uczy dowiadywać się, ilą jednościami jedna liczba jest większa lub mniejsza od drugiéj (Nr. 16); z tego więc powodu dla znalezienia zysku, potrzeba od liczby 376 odjąć liczbę 348.

Rozwiązanie.

376—348 = 28 rubli zysku.

```
         376
         348
         ---
Różnica   28.
```

2. Pewna osoba wychodząc do miasta za sprawunkami, miała 125 rubli w woreczku; powróciwszy do domu, zrobiła obrachunek, z którego dowiedziała się, że wydała 89 rubli. Ileż więc powinno jéj zostać w woreczku pieniędzy?

Wskazanie działania. Zagadnienie dąży do tego, ażeby znaleść liczbę, która pozostanie po wzięciu 89 rubli ze 125 rubli. A ponieważ odejmowanie uczy dowiadywać się, ile się pozostanie po wzięciu pewnéj liczby jednostek, z drugiéj danéj liczby (Nr. 16); zatém chcąc rozwiązać zagadnienie, potrzeba od liczby 125 odjąć liczbę 89.

Rozwiązanie.

125—89 = 36 rubli.

```
        125
         89
        ---
Reszta   36.
```

3. Ojciec ma lat 58, syn jego ma lat 19; ile lat miał ojciec przy urodzeniu syna? (*Odp.* 39 lat).

4. Uczeń mając od rodziców przysłanych 135 jabłek, rozdał z nich swoim kolegom 67 jabłek; ileż mu więc jeszcze pozostało? (*Odp.* 68 jabłek).

5. Pewna osoba mająca całego majątku 5 860 rubli, winna jest 1289 rubli. Ile jéj zostanie po spłaceniu długu? (*Odp.* 4571 rubli).

6. Kupiec sprzedawszy swój towar za 1 296 rubli, zyskał na téj sprzedaży 278 rubli. Ile kosztował go towar? (*Odp.* 1 018 rubli).

7. Znaleść liczbę, do któréj dodana liczba 5 876, daje na ogół 10,000? (*Odp.* liczbą szukaną jest 4 124).

8. Znakomity matematyk Newton, urodził się w 1642 roku, a umarł w 1727. Ileż lat żył? (*Odp.* żył lat 85).

9. Alexander I Cesarz Rossyjski wstąpił na tron 1801 r. mając lat 23; umarł zaś 1825 r. Ileż więc lat panował i ile lat żył? (*Odp.* panował lat 24; żył lat 47).

10. Zygmunt I Król Polski urodził się roku 1467, a ojciec jego Kazimierz Jagielończyk umarł 1492 r. w tymże czasie kiedy Ameryka była odkrytą. Ile lat miał Zygmunt kiedy została Ameryka odkrytą? (*Odp.* miał lat 25).

11. Wiara Chrześcijańska wprowadzoną została do Polski przez Mieczysława I roku 965, a do Litwy przez Władysława Jagiełłę roku 1387. Ile lat upłynęło między temi dwoma epokami? (*Odp.* 422 lat).

12. Najwyższą dotąd wymierzoną górą jest Dhawalagiri czyli Dhalagir, należąca do łańcucha gór himalajskich, na północnéj granicy Indyj wschodnich; wysokość jéj ma 26 340 stóp. Chimborazo najwyższa z gór w łańcuchu Andów w Ameryce Południowéj, ma 20 100 stóp wysokości. Jaka jest różnica wysokości tych dwóch gór. (*Odp.* 6 240 stóp).

13. Za najwyższą z gór Pirenejskich miano dotąd Montperdu 10 500 stóp wysoką, do Francyi należącą; lecz przekonano się teraz, że szczyt Anethou na górze Maladetta na granicy Francyi, w ziemi należącéj do Aragonii, jest najwyższy, bo ma 10 720 stóp. Jaka między niemi zachodzi różnica w wysokości? (*Odp.* 220 stóp).

14. Według jednego ze statystyków francuzkich ogół ziemi we Francyi uprawnéj i zasiewanéj pszenicą, żytem, jęczmieniem, gryką, owsem i t. d., wynosi 15 500 000 hektarów; uprawa zaś 250 gatunków wina zajmuje 2 700 000 hektarów. Ileż więc według liczb podanych więcéj użytéj jest ziemi pod zasiew zboża, jak pod uprawę wina? (*Odp.* 12 800 000 hektarów).

15. Dwie osoby wniosły do pewnego handlu 23 585 rubli, z których 14 679 rubli należało do pierwszéj. Ile powinna jeszcze wnieść druga, ażeby jéj kapitał był równy kapitałowi pierwszéj? (*Odp.* osoba druga wnieść jeszcze powinna 5 773 rubli).

16. Ojciec podzielił swój majątek wynoszący 38 425 rubli między dwóch synów; starszemu dał 23 637 rubli, młodszemu resztę. Potrzeba znaleść o ile syn młodszy dostał mniéj do starszego? (*Odp.* syn młodszy dostał 8 849 rubli mniéj od starszego).

17. Powierzchnia kuli ziemskiéj ma 9 282 600 mil kwadratowych; ląd stały zajmuje tylko 2 425 000 mil kwadratych; jakąż więc przestrzeń zajmuje woda? (*Odp.* woda zajmuje przestrzeń 6 857 000 mil kwadratowych).

18. Średnica równika ziemskiego wynosi 12 033 wiorst, a średnica księżyca 3 276 wiorst. Dowiedzieć się o ile równik ziemski większy od równika księżyca? (*Odp.* 8757 wiorst).

19. Odległość między Petersburgiem i Moskwą wynosi 698 wiorst, a między Petersburgiem i Astrachaniem 2 100 wiorst. Jakaż jest odległość między Moskwą i Astrachaniem? (*Odp.* 1 402 wiorst).

20. Powierzchnia gubernii Nowogrodzkiéj ma 11 153 520 dziesiatyn, a Czerniechowskiéj 5 034 960 dziesiatyn. Jaka zachodzi różnica w powierzchniach pomienionych gubernij? (*Odp.* 6 118 560 dziesiatyn).

21. Jeżelibym mógł zkąd dostać 650 rubli, w takim razie spłaciłbym dług wynoszący 2 347 rubli i pozostałoby mi jeszcze 26 rubli. Ileż więc mam pieniędzy? (*Odp.* 1 723 ruble).

22. Kupiec sprzedał swój towar, który go kosztował 547 rubli, za taką cenę, że jeżeliby dostał za niego 197 rubli więcéj, wtedy zyskałby na nim tyle, ile go ów towar kosztował. Za ileż rubli sprzedał towar? (*Odp.* za 897 rubli).

23. Liczbę 16 854 rozdzielić na pięć części w ten sposób: żeby część pierwsza była 1 359, druga równała się różnicy między pierwszą i trzecią, trzecia 4 142, a czwarta mniejsza od drugiéj o 387. Jakaż będzie część druga, czwarta i piąta? (*Odp.* druga 2 783 czwarta 2 396, piąta 6 174).

24. Ogół dwóch liczb równy jest 15 307, mniéjsza z nich jest 2 869, czemu jest równa liczba większa? (*Odp.* liczba większa 12 438).

25. Różnica dwóch liczb równa się 5 638, większa z nich jest 23 500, jakaż jest mniejsza? (*Odp.* liczba mniejsza jest 17 862).

26. Co się zrobi z różnicą liczb 87 000 i 14 564 jeżeli do większéj dodamy liczbę 1 245, a od mniejszéj odejmiemy 928? (*Odp.* różnica powiększy się 2 173 jednościami).

27. Co się zrobi z różnicą liczb 13 500 i 728, jeżeli od większéj odejmiemy 1 368, a do mniejszéj dodamy 307? (*Odp.* różnica zmniejszy się 1 675 jednościami).

28. Co się zrobi z różnicą liczb 2 367 i 8 209, jeżeli do większéj dodamy 806, a do mniejszéj 298? (*Odp.* różnica powiększy się 508 jednościami).

29. Jaka zmiana zajdzie w róznicy liczb 58 003 i 7 589, jeśli od większéj odejmiemy 6 375, a od mniejszéj 2 486? (*Odp.* różnica zmniejszy się 3 889 jednościami).

30. Cztery osoby otrzymały w spadku pewną summę. Jedna z nich otrzymała 4 375 rubli, druga 1690 rubli więcéj od pierwszéj, trzecia 945 rublami mniéj od drugiéj; część zaś przypadająca na czwartą, jest ogółem części drugiéj i trzeciéj zmniejszonym częścią przypadającą na pierwszą osobę. Ile rubli wynosił cały spadek? (*Odp.* 22 370 rubli).

31. Pewien kapitalista widząc, że procent jaki mu przynosi jego kapitał oddany w obce ręce, jest za mały i niewystarczający na utrzymanie domu i edukacyi dzieci, postanowił kupić dobra ziemskie. Zważywszy jednak, że do zakupienia dóbr wystawionych na sprzedaż, a oszacowanych na 34 740 rubli, brakuje mu 7 490 rubli, a do kupna innych z wolnéj ręki nie dostaje mu 3 570 rubli, zaniechał swój zamiar, i w miejsce dóbr ziemskich kupił dwa domy w Warszawie, za które zapłacił 4 820 rublami mniéj od oszacowanéj wartości dóbr drugich. Ile posiadał pienię-

dzy i ile za dwa domy zapłacił? (*Odp.* posiadał 27 250 rubli; za dwa domy zapłacił 26 000 rubli).

32. Dwaj dłużnicy razem są winni 50 000 rubli. Jeden z nich winien 26 458 rubli, drugi resztę całego długu. Jeżeli dłużnik drugi zapłacił już na rachunek swego długu 5 860 rubli, to ileż został jeszcze dłużnym? (*Odp.* został dłużnym 17 682 rubli).

33. Pewna osoba posiadająca 6 345 rubli, idzie w zakład z drugą osobą o 560 rubli. Ile mieć będzie gdy wygra, a ile gdy przegra zakład? (*Odp.* jeżeli wygra mieć będzie 6 905 rubli, jeżeli zaś przegra, wtedy mieć będzie 5 785 rubli).

34. Pewien przedsiębierca prowadzący trojaki handel, włożył z początkiem roku w pierwszy 3 450 rubli, w drugi 12 500 rubli, w trzeci 8 460 rubli. W końcu roku po zrobionym obrachunku okazało się, że na pierwszym stracił 895 rubli, na drugim zyskał 3 400 rubli, na trzecim stracił 540 rubli i nadto poniósł ogółem wydatku 1 247 rubli. Jakiż więc kapitał posiadał w końcu roku? (*Odp.* posiadał kapitał 25 128 rubli).

MNOŻENIE.

28. Wyżéj (Nr. 8) powiedzieliśmy już, że każdą liczbę powiększać można dwojakim sposobem: dodając do niéj nierówną lub równą jéj liczbę. Drogi postępowania w obu razach, mogą być jednakowe: bo równie pierwszy jak i drugi przypadek wykonać możemy dodawaniem; np.

1) $5+7+4=16$ 1) $45+18+47+69=179$

2) $8+8+8=24$ 2) $234+234+234+234=936$

Pierwszy przypadek wykonywać możemy za pomocą li tylko dodawania, lecz drugi doprowadza nas do ważnych skróceń, które obecnie będą przedmiotem naszéj uwagi. Ile razy więc tylko wypadnie szukać ogółu z dwóch lub ilukolwiek liczb równych tyle razy użyjemy do tego osobnego działania *mnożeniem* (умноженіе) zwanego. I tak: chcąc oznaczyć, że liczba 5 ma być trzy razy wziętą za liczbę dodajną (Nr. 11), zamiast pisać $5+5+5$, piszemy 5×3 (Nr. 9) i odwrotnie 5×3 znaczy, że liczba 5 ma być powtórzoną, czyli wziętą 3 razy, t. j. $5+5+5$.

Z tego więc jasno widzimy, *że mnożenie liczb całkowitych jestto* *działanie, za pomocą którego jednę liczbę powtarzamy tyle razy, ile druga dana liczba zawiera w sobie jedności.*

Liczby dane do mnożenia, nazywają się *czynnikami* (производитель). Liczba ta, którą powtarzamy, nazywa się *mnożną* (множимое), liczba zaś pokazująca ile razy pierwsza ma być powtórzoną, nazywa się *mnożnikiem* (множитель); wydatek z działania otrzymany, *iloczynem* (произведение).

29. Mnożenie liczb ilukolwiek znakowych jak później zobaczymy, doprowadza się do mnożenia liczb jednoznakowych; ażeby więc osiągnąć korzyść z mnożenia, należy przedewszystkiém wyuczyć się na pamięć iloczynów z liczb jednoznakowych, do czego posłużyć może poniżéj umieszczona tablica filozofa greckiego Pitagoresa.

Tablica Pitagoresa.

Czynniki.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Ażeby ułożyć powyższą tablicę, potrzeba: w pierwszym wierszu u góry i w pierwszym po lewéj ręce wypisać kolejno liczby 1, 2, 3 i t. d. aż do 9, następnie w drugim wierszu licząc od góry, wypisać liczby znajdujące się w wierszu pierwszym; do liczb wiersza drugiego dodać odpowiednie liczby wiersza pierwszego i tym sposobem powstanie wiersz trzeci, do liczb wiersza trzeciego dodać odpowiednie liczby wiersza pierwszego i tym sposobem powstanie wiersz czwarty; do liczb wiersza czwartego dodać odpowiednie liczby wiersza pierwszego, utworzy się wiersz piąty i tak następnie do utworzenia każdego następującego wiersza, potrzeba do liczb wiersza poprzedzającego dodać odpowiednie liczby wiersza pierwszego.

Liczby wiersza pierwszego od góry i pierwszego z lewéj strony są czynnikami, których odpowiednie iloczyny znajdują się we wszystkich innych kolumnach. I tak: chcąc znaleść iloczyn z liczb 5 i 6 posuwamy jednym palcem po wierszu zaczynającym się od liczby 5 umieszczonéj z lewéj strony, a drugim palcem po wierszu zaczynającym się od liczby 6 umieszczonéj u góry, i w miejscu spotkania się palców, znajdziemy umieszczoną liczbę 30, która jest szukanym iloczynem danych czynników; albo jednym palcem posuwamy po wierszu zaczynającym się od liczby 6, umieszczonéj z lewéj strony, a drugim palcem po wierszu zaczynającym się od liczby 5 umieszczonéj u góry, to przy spotkaniu się palców natrafimy na liczbę tęż samą t. j. 30. Z tego więc widzimy, że iloczyn z 6 przez 5, t. j. $5 \times 6 = 6 \times 5$, co znaczy, że 5 wzięte 6 razy, wyda taki sam ogół co 6 wzięte 5 razy. Prawda ta daje się wysłowić w tem sposób: *zmiana miejsc czynników nie robi zmiany w iloczynie.* Prawdę tę możnaby jeszcze sposobem zmysłowym tak objaśnić: wypiszmy w jednym wierszu 5 kresek i takich wierszy napiszmy 6.

$$\begin{array}{cccccccc}
| & | & | & | & | & \quad & 5 & \\
| & | & | & | & | & & 5 & \\
| & | & | & | & | & & 5 & \\
| & | & | & | & | & & 5 & \quad 5\times 6-30. \\
| & | & | & | & | & & 5 & \\
| & | & | & | & | & & \underline{5} & \\
 & & & & & & 30 &
\end{array}$$

Ogół tych kresek daje liczbę 30, która jest iloczynem z 5 przez 6. Wypisawszy zaś w jednym wierszu 6 kresek i takich wierszy napisawszy 5.

$$\begin{array}{ccccccr} | & | & | & | & | & | & 6 \\ | & | & | & | & | & | & 6 \\ | & | & | & | & | & | & 6 \\ | & | & | & | & | & | & 6 \\ | & | & | & | & | & | & 6 \\ \cline{7-7} & & & & & & 30 \end{array} \qquad 6\times5=30.$$

Ogół tych kresek daje liczbę 30, która jest iloczynem z 6 przez 5, zatem $5\times6=6\times5$. c. t. b. d.

30. Powyższa tablica podaje tylko sposób wynajdowania iloczynów liczb jednoznakowych, ażeby zaś wykryć drogę postępowania do wynajdowania iloczynów z liczb ilukolwiek znakowych za pomocą mnożenia, rozważmy z całą przytomnością umysłu uwagi, które nas do tego działania doprowadzą:

Uwaga 1. Liczbę 1 pomnożyć przez 10, znaczy 1 wziąść, czyli powtórzyć 10 razy t: j. $1+1+1+1+1+1+1+1+1+1$; że zaś zbiór dziesięciu jedności tworzy 1 dziesiątek, zatém liczba 1 pomnożona przez 10, daje na iloczyn 1 dziesiątek czyli 10. *Każda więc jedność pomnożona przez* 10, *daje na iloczyn* 1 *dziesiątek.*

Uwaga 2. Ażeby znaleść iloczyn z 5 przez 10, zważmy że liczba 5 jest zbiorem pięciu jedności, a ponieważ każda jedność pomnożona przez 10, daje na iloczyn 1 dziesiątek, zatém pięć takich jedności da na iloczyn 5 dziesiątków, czyli 50. Podobnież 8 pomnożone przez 10, da na iloczyn 8 dziesiątków czyli 80 i t. p.

Uwaga 3. Liczbę 10 (1 dziesiątek) pomnożyć przez 10, znaczy 1 dziesiątek wziąść, czyli powtórzyć 10 razy; że zaś zbiór 10 dziesiątków tworzy 1 sto, zatém liczba 10 pomnożona przez 10, daje na iloczyn 1 sto, czyli 100. *Każdy więc dziesiątek pomnożony przez* 10, *daje na iloczyn 1 sto.*

Uwaga 4. Ażeby znaleść iloczyn z 60 przez 10, zważmy że liczba 60 jest zbiorem 6 dziesiątków, a ponieważ każdy dziesiątek pomnożony przez 10, daje na iloczyn 1 sto, zatem 6 takich dziesiątków da na iloczyn 6 set, czyli 600. Podobnież 90 (9 dziesiątków) pomnożone przez 10, daje na iloczyn 9 set, czyli 900 i t. p.

Uwagi te podobnym sposobem rozciągnąć możemy co do set, tysięcy, dziesiątków tysięcy i t. d.

Z uwag tych wyprowadzamy następujące prawdy:

A.

1⁰ *Każda liczba jedności pomnożona przez* 10, *daje na iloczyn takąż samą liczbę dziesiątków*, np. 4×10 daje na iloczyn 4 dziesiątków, czyli 40; 9×10 daje na iloczyn 9 dziesiątków, czyli 90 i t. p.

2⁰ *Każda liczba dziesiątków pomnożona przez* 10, *daje na iloczyn takąż samą liczbę set*, np. 30×10 czyli 3 dziesiątków $\times$ 10, daje na iloczyn 3 set, czyli 300; 70×10 czyli 7 dziesiątków $\times$ 10, daje na iloczyn 7 set, czyli 700 i t. p.

3⁰ *Każda liczba set pomnożona przez* 10, *daje na iloczyn takąż samą liczbę tysięcy*, np. 600×10 czyli 6 set $\times$ 10, daje na iloczyn 6 tysięcy, czyli 6000; 800×10 czyli 8 set $\times$ 10, daje na iloczyn 8 tysięcy, czyli 8000 i t. p.

i t. d.

Albo:

1⁰ *Ażeby liczbę jedności pomnożyć przez 10, potrzeba też liczbę jedności napisać na miejscu dziesiątków, czyli o jedno miejsce dalej ku lewéj ręce, co uskutecznimy przez dopisanie zera do danéj liczby jedności.*

2⁰ *Ażeby liczbę dziesiątków pomnożyć przez 10, potrzeba daną liczbę dziesiątków napisać na miejscu set, czyli o jedno miejsce daléj ku lewéj ręce, co uskutecznimy przez dopisanie zera do danych dziesiątków.*

3⁰ *Ażeby liczbę set pomnożyć przez 10, potrzeba daną liczbę set napisać na miejscu tysięcy, czyli o jedno miejsce dalej ku lewej ręce, co uskutecznimy przez dopisanie zera do danych set i t. p.*

4⁰ *Ażeby liczbę złożoną z jedności, dziesiątków, set i t. d. pomnożyć przez 10, potrzeba liczbę jedności napisać na miejscu dziesiątków, liczbę dziesiątków na miejscu set liczbę set. na miejscu tysięcy i t. p., co uskutecznimy przez dopisanie zera do danéj liczby* np. $357\times10=3\,570$; $2\,435\times10=24\,350$.

B.

1⁰ *Każda liczba jedności pomnożona przez 100, daje na iloczyn takąż samą liczbę set*, np. 5×100 daje na iloczyn 5 set, czyli 500.

2⁰ *Każda liczba dziesiątków pomnożona przez 100, daje na ilo-*

czyn takąż samą liczbę tysięcy, np. 60×100 czyli 6 dziesiątków×100 daje na iloczyn 6 tysięcy, czyli 6 000.

3⁰ *Każda liczba set pomnożona przez 100, daje na iloczyn takąż samą liczbę dziesiątków tysięcy*, np. 400×100 czyli 4 set × 100, daje na iloczyn 4 dziesiątków tysięcy, czyli 40 000.

i t. d.

Albo:

1⁰ *Ażeby liczbę jedności pomnożyć przez 100, potrzeba daną liczbę napisać na miejscu set, czyli o dwa miejsca daléj ku lewéj ręce, co uskutecznimy przez dopisanie dwóch zer do danéj liczby jedności.*

2⁰ *Ażeby liczbę dziesiątków pomnożyć przez 100, potrzeba daną liczbę dziesiątków napisać na miejscu tysięcy, czyli o dwa miejsca daléj ku lewéj ręce, co uskutecznimy przez dopisanie dwóch zer do danych dziesiątków.*

3⁰ *Ażeby liczbę set pomnożyć przez 100, potrzeba daną liczbę set napisać na miejscu dziesiątków tysięcy czyli o dwa miejsca daléj ku lewéj ręce, co uskutecznimy przez dopisanie dwóch zer do danych dziesiątków i t. d.*

4⁰ *Ażeby liczbę złożoną z jednosci, dziesiątków, set i t. d. pomnożyć przee 100, potrzeba liczbę jedności napisać na miejscu set, liczbę dziesiątków na miejscu tysięcy, liczbę set na miejscu dziesiątków tysięcy i t. p. co uskutecznimy przez dopisanie dwóch zer do danéj liczby;* np. 287×100=28 700; 5 834×100=583 400.

Obowiązkiem każdego uczącego rozciągnąć powyższe prawdy do tysięcy, dziesiątków tysięcy, i t. d. i z tych dopiero wyciągnąć ogólną zasadę, że:

5⁰ *Ażeby jakąbądź liczbę pomnożyć przez 10, 100, 1 000 i t. d. czyli przez 1 z pewną liczbą zer, potrzeba tylko do danéj liczby dopisać tyle zer, ile ich jest napisanych po jedności.*

Uwaga 5. Dajmy, że mamy znaleść iloczyn z 8 przez 30. Ponieważ liczba 30 jest zbiorem 3 dziesiątków, ażeby więc liczbę 8 pomnożyć przez zbiór 3 dziesiątków, dosyć jest tęż liczbę 8 pomnożyć przez 1 dziesiątek t. j. przez 10, a następnie potroić iloczyn ztąd otrzymany, czyli pomnożyć przez 3; że zaś zmiana miejsc czynników nie robi zmiany w iloczynie (Nr. 29), czyli porządek wykonywanych mnożeń nie zmienia wartości iloczynu, żeby więc ułatwić działanie i zarazem wyprowadzić ztąd jakąś zasadę, zamiast mnożenia liczby 8 przez 10, a iloczynu z nich przez 3, mnożymy 8 przez 3, co daje 24, a do iloczynu dopisujemy zero (prawda 5 pod literą B). Z czego wyprowadzamy następującą zasadę:

1° *Jeżeli jeden z czynników jest zakończony zerem, należy wykonać mnożenie tak, jak gdyby zera nie było, a do iloczynu opuszczone zero dopisać.*

A podobną drogą postępując równie łatwo dojdziemy, że:

2° *Jeżeli jeden z czynników zakończony dwoma lub więcéj zerami, wykonać mnożenie niezważając na zera, a w otrzymanym iloczynie dopisać tyle zer, ile ich było w danym czynniku.* A z tego zarazem wypada:

3° *Jeżeli oba czynniki są zakończone zerami, wykonać mnożenie nie zważając na zera, a w otrzymanym iloczynie dopisać tyle zer, ile ich było w obu czynnikach.*

Przykłady:

1) Znaleść iloczyn z 6×70; mówię: 6 razy 7 daje 42, do tego dopisawszy zero, otrzymuję 420.

2) Znaleść iloczyn z 4×900; mówię: 4 razy 9 daje 36, do tego dopisawszy zer dwa, otrzymuję 3 600.

3) Znaleść iloczyn z $5 \times 6\,000$; mówię: 5 razy 6 daje 30, do tego dopisawszy zer trzy, otrzymuję 30 000.

4) Znaleść iloczyn z 40×800; mówię: 4 razy 8 daje 32, do tego dopisawszy zer trzy, otrzymuję 32 000 i t. d.

Uwaga 6. Dajmy, że mamy daną liczbę 478 pomnożyć przez 3, czyli dodać tę liczbą 3 razy napisaną, będzie:

$$\begin{array}{r} 478 \\ 478 \\ \underline{478} \\ \text{Ogół } 1434 \end{array}$$

Według podanych zasad w dodawaniu, potrzeba znaleść ogół jedności, potém ogół dziesiątków, a w końcu ogół set. Ogół jedności $8+8+8$ czyli 8×3 co czyni 24, t. j. 2 dziesiątki i 4 jedności; ogół dziesiątków jest $7+7+7$ czyli 7×3, co czyni 21, t. j. 2 set i 1 dziesiątek; ogół set jest $4+4+4$ czyli 4×3, co czyni 12, t. j. 1 tysiąc i 2 set: ogół zatém cały wynosi 1 434.

Ponieważ mnożyć jedną liczbę przez drugą jestto powtórzyć ją tyle razy, ile druga liczba nazwana mnożnikiem, zawiera w sobie jedności, albo co na jedno wychodzi, daną liczbę wypisać tyle razy, ile druga ma w sobie jedności, i następnie liczby te zupełnie sobie równe do siebie dodać; przeto widzimy, że dana liczba jedności, a następnie dziesiątków, set i t. d. muszą być w szczególności powtarzane tyle razy, ile mnożnik zawiera w sobie jedności: zatém żeby sobie ułatwić działanie, zamiast wypisywania podanym sposobem danéj liczby pod sobą, wprost zaczniemy od powtarzania czyli mnożenia każdéj w szczególności liczby jedności, dziesiątków, set i t. d. przez liczbę wskazaną mnożnikiem, a z iloczynami cząstkowemi postępować tak, jak to było już wskazane przy dodawaniu. Oto jest wzór postępowania:

$$\begin{array}{rl} 478 & \text{mnożna} \\ 3 & \text{mnożnik} \\ \hline 1434 & \text{iloczyn.} \end{array}$$

Objaśnienie. 8 jedności powtórzone 3 razy dają 24 jedności czyli 2 dziesiątki i 4 jedności, 4 jedności podpisujemy pod jednościami, a 2 dziesiątki zachowujemy do dziesiątków; 7 dziesiątków powtórzone 3 razy, dają 21 dziesiątków, a 2 dziesiątki pozostałe, razem 23 dziesiątków, czyli 2 set i 3 dziesiątki, 3 dziesiątki podpisujemy pod dziesiątkami, a 2 set do set zachowujemy; 4 set powtórzone 3 razy, daje 12 set, a 2 set pozostałe z dziesiątków, razem 14 set, które podpisujemy pod stami. Iloczynem więc danych czynników jest 1 434, liczba taka sama, jaką poprzednio otrzymaliśmy.

Przykład 2. $3\,209 \times 5 = 16\,045$.

$$\begin{array}{rr} & 3209 \\ & 5 \\ \hline \text{Iloczyn} & 16045 \end{array}$$

Objaśnienie. 9 jedności 5 razy powtórzone, dają 45 jedności, czyli 4 dziesiątki i 5 jedności, 5 jedności podpisujemy pod jednościami a 4 dziesiątki zachowujemy do dziesiątków; 0 dziesiątków 5 razy powtórzone dają 0 dziesiątków, a pozostałe 4 dziesiątki z jedności, razem 4 dziesiątki, które pod dziesiątkami podpisujemy; 2 set 5 razy powtórzone dają 10 set czyli 1 tysiąc i 0 set, 0 set podpisujemy pod stami, a 1 tysiąc zachowujemy do tysięcy; 3 tysiące powtórzone 5 razy, dają 15 tysięcy, a 1 tysiąc z set pozostały, razem 16 tysięcy, które pod tysiącami podpisujemy; żądanym więc iloczynem danych czynników jest 16 045.

Przykład 3. 326×800=260 800.

	326
	8
Iloczyn	2608

Objaśnienie. Liczbę 326 mnożymy przez 8, a do iloczynu ztąd otrzymanego dopisujemy dwa zera (Nr. 30, uwaga 5).

Przykład 4. 73 800×4 000=295 200 000.

	738
	4
Iloczyn	2952

Objaśnienie. Liczbę 738 mnożymy przez 4, a do otrzymanego iloczynu pięć zer dopisujemy. (Nr. 30, uwaga 5).

Uwaga 7. Dajmy, że mamy do pomnożenia 648 przez 27.

Rozłóżmy liczbę 27 na 20 i 7. Znajdźmy iloczyn z 648 przez 20 i 648 przez 7; iloczyny te dodajmy do siebie, a otrzymamy na ogół liczbę, która będzie żądanym iloczynem z 648 przez 27. Bo i w saméj rzeczy: ażeby liczbę 648 pomnożyć przez 27, potrzebaby ją wypisać 27 razy i liczby te zupełnie sobie równe do siebie dodać; albo co na jedno wychodzi: liczbę 648 wypisać 20 razy i znaleść ogół, i też liczbę 648 osobno wypisać 7 razy i znaleść ogół, a następnie ogóły te do siebie dodać.

Na téj zasadzie działanie przedstawi się w następujący sposób:

	648	
	27	
648× 7. .	4536	pierwszy iloczyn cząstkowy.
648×20. .	12960	drugi iloczyn cząstkowy.
Iloczyn	17496	ogół iloczynów cząstkowych.

Przykład 2. Liczbę 1 253 pomnożyć przez 684.

W tym celu liczbę 684 rozkładamy na 600, 80 i 4 i znajdujemy iloczyny z 1 253 przez 4, 1 253 przez 80 i 1 253 przez 600, a następnie iloczyny cząstkowe dodajmy do siebie.

	1253	
	684	
1253× 4 . . .	5012	pierwszy iloczyn cząstkowy.
1253× 80 . .	100240	drugi iloczyn cząstkowy.
1253×600 . .	751800	trzeci iloczyn cząstkowy.
Iloczyn	857052	ogół iloczynów cząstkowych.

Działanie to jednakże może być uproszczone: bo zamiast mnożyć 1 253 przez 80, można mnożyć tylko przez 8, pamiętając ażeby ostatni znak iloczynu ztąd otrzymanego, był podpisany pod dziesiątkami pierwszego iloczynu cząstkowego, gdyż nie przez 8, lecz przez 80 właściwie mnożyć należało, zero więc opuszczone po 8, umieszczone byłoby w iloczynie na miejscu jedności, a opuszczając go, należy miejsce na niego zostawić. Podobnież, zamiast mnożyć 1253 przez 600, można mnożyć tylko przez 6, pamiętając ażeby ostatni znak otrzymanego iloczynu był podpisany pod stami. Na tej zasadzie powyższy przykład się przedstawi:

	1253
	684
1253×4.	5012
1253×8.	10024
1253×6.	7518
Iloczyn	857052

Ogólne prawo na mnożenie ilukolwiek znakowych liczb całkowitych.

Dane dwie liczby do mnożenia podpisują się zwykle pod sobą tak, ażeby jedności były podpisane pod jednościami, dziesiątki pod dzisiątkami, sta pod stami i t. d. i podkreślają się poziomą liniją.

1) Przez liczbę jedności znajdujących się w mnożniku mnoży się cała mnożna, a iloczyn ztąd otrzymany we właściwym porządku podpisuje się pod linijką, co będzie pierwszym cząstkowym iloczynem.

2) Przez liczbę dziesiątków znajdujących się w mnożniku, mnoży się cała mnożna, o otrzymany ztąd drugi ilrczyn cząstkowy podpisuje się pod liczbą dziesiątków będących w pierwszym iloczynie cząstkowym.

3) Przez liczbę set znajdujących się w mnożniku, mnoży się cała mnożna a otrzymamy ztąd trzeci cząstkowy iloczyn, podpisuje się pod stami drugiego iloczynu cząstkowego i t. d.

W końcu wszystkie cząstkowe iloczyny dodają się do siebie, a ogół z nich będzie iloczynem żądanym.

Uwaga 8. Tu mimo woli nastręcza się jeszcze uwaga, jak postąpić, jeżeli między znakami mnożnika znajduje się zero; oto przykład takiego przypadku:

	4278
	307
	29946
	12834
Iloczyn	1313346

Objaśnienie. Pierwszy iloczyn cząstkowy powstaje z pomnożenia 4278 przez 7 jedności mnożnika. Do utworzenia drugiego iloczynu cząstkowego, należałoby 4278 mnożyć przez 0 dziesiątków mnożnika, lecz w iloczynie otrzymujemy 0, opuszczamy więc to, a przystępujemy wprost do mnożenia 4278 przez 3 set mnożnika, ale iloczyn ztąd otrzymany, podpisujemy pod stami pierwszego iloczynu cząstkowego.

31. Jeżeli jest danych do mnożenia więcéj jak dwa czynników, natenczas iloczyn dwóch którychkolwiek czynników mnożymy przez trzeci, ztąd otrzymany iloczyn, mnożymy przez czynnik czwarty i t. d. co samo z siebie jest rzeczą widoczną.

Przykład. $507 \times 320 \times 206$.

507		104442
206		320
3042		2088840
1014		313326
104442	Iloczyn żądany	33421440

32. Jeżeli dane liczby do mnożenia są bezwzględne (Nr. 6), obojętną jest rzeczą wiedzieć, która z nich jest mnożną a która mnożnikiem, lecz jeżeli oznaczają gatunki rzeczy podanych w zagadnieniu, wiadomość ta jest koniecznie potrzebną; bo iloczyn z nich otrzymany, takiego będzie gatunku, jakiego gatunku jest mnożna.

Wiadomość tę odsyłamy do sposobu rozwiązywania zagadnień, które są umieszczone przy końcu tego działania. W samém działaniu jednakże należy przyjąć za ogólną zasadę, ażeby większy czyn nik pisać u góry a pod nim dopiéro czynnik mniejszy (Nr. 29), bo takie wypisanie w wielu przypadkach ułatwia po części działanie.

33. Sprawdzenie działania polega na téj zasadzie, że zmiana miejsc czynników nie zmienia wartości iloczynu (Nr. 29); jeżeli więc po wykonaniu działania zmienimy miejsce czynników, t. j. pierwszy weźmiemy za drugi, a drugi za pierwszy i wykonamy działanie, wypadki otrzymać powinniśmy też same; np. $349 \times 56 = 56 \times 349 = 19544$.

	349			56
	56			349
	2094			504
	1745			224
Iloczyn	19544			168
			Iloczyn	19544 zgodno.

Niektóre skrócenia w mnożeniu.

34. Podane tu skrócone sposoby mnożenia opierają się na dwóch następujących prawdach:

1. *Jeżeli jeden z dwóch danych czynników, rozłożymy na dwie liczby, którychby ogół równał się czynnikowi rozłożonemu, to iloczyn z danych czynników jest równy ogółowi iloczynów otrzymanych z pomnożenia czynnika nierozłożonego przez obie liczby czynnika rozłożonego;* np.

Mamy znaleść iloczyn z 8×9. Czynnik 9 rozłóżmy na $6+3$, natenczas iloczyn z 8×9 równy będzie ogółowi iloczynów z 8×6 i 8×3, t. j. $8 \times 9 = 8 \times 6 + 8 \times 3 = 48 + 24 = 72$. Bo w saméj rzeczy: iloczyn z 8×9, mieści w sobie liczbę 8 wziętą 9 razy; iloczyn z 8×6, mieści też liczbę 8 wziętą 6 razy; a iloczyn z 8×3, mieści liczbę 8 wziętą 3 razy: zatém ogół iloczynów z 8×6 i 8×3 mieści w sobie liczbę 8 wziętą 9 razy, czyli tyle, ile iloczyn z 8×9. (Prawda ta już wytłumaczoną była w N-rze 30, uwadze 7).

2. *Jeżeli jeden z dwóch danych czynników, rozłożymy na dwie liczby, którychby różnica równała się czynnikowi rozłożonemu, to wtedy iloczyn z danych czynników równy jest różnicy iloczynów z czynnika nierozłożonego, przez obie liczby czynnika rozłożonego*; np.

Mamy znaleść iloczyn z 6×5. Czynnik 5 rozłóżmy na $8-3$; więc iloczyn z 6×5 równy jest różnicy iloczynów z 6×8 i 6×3, t. j. $6 \times 5 = 6 \times 8 - 6 \times 3 = 48 - 18 = 30$. Bo iloczyn z 6×5 mieści w sobie

5 razy wziętą liczbę 6; iloczyn z 6×8 mieści też liczbę 6, 8 razy wziętą, a iloczyn z 6×3 mieści w sobie 3 razy liczbę 6; jeżeli więc od iloczynu mieszczącego w sobie 8 razy liczbę 6, odejmiemy iloczyn mieszczący 3 razy też liczbę 6, koniecznie wypadnie na resztę liczba która mieścić w sobie będzie 5 razy liczbę 6.

Na tych dwóch prawdach tłumaczymy następujące skrócone sposoby mnożenia:

35. Skrócone mnożenie, gdy jeden z czynników równy któréjkolwiek z liczb: 11, 101, 1001, 10001 i t. p., które to liczby dają, się rozłożyć na $10+1$, $100+1$, $1000+1$, $10000+1$ i t. d.

Przykład 1. 427×11; $11=10+1$.
427×10. . . . 4270
427×1. . . . 427
Ogół 4697 iloczyn z 427×11.

Przykład 2. 529×101; $101=100+1$.
529×100. . . . 52900
529×1 529
Ogół 53429 iloczyn z 529×101

Przykład 3. 786×1001; $1001=1000+1$.
786×1000. 786000
786×1. 786
Ogół 786786 iloczyn z 786×1001.

i t. p.

36. Skrócone mnożenie, gdy jeden z czynników, złożony z samych dziewiątek np. 9, 99, 999 i t. d., które to liczby dają się rozłożyć na $10-1$, $100-1$, $1000-1$ i t. d.

Przykład 1. 645×9; $9=10-1$.
645×10. . . . 6450
645×1. . . . 645
Różnica 5805 iloczyn z 645×9.

Przykład 2. 357×99; $99=100-1$.
357×100. . . . 35700
357×1. 357
Różnica 35343 iloczyn z 357×99.

Przykład 3. 2458×999; 999=1000—1.
2458×1000. . . 2458000
2458×1. 2458
Różnica 2455542 iloczyn z 2458×999.
i t. p.

37. Skrócone mnożenie, gdy jeden z czynników złożony z dziewiątek prócz jedności porządku najniższego np. 94, 997, 9996 i t. p., które to liczby dają się rozłożyć na 100—6, 1000—3, 10000—4 i t. d.

Przykład 1. 583×96; 96=100—4.
583×100. . . . 58300
583×4. 2332
Różnica 55968 iloczyn z 583×96.

Przykład 2. 1346×998; 998=1000—2.
1346×1000. . . . 1346000
1346×2. 2692
Różnica 1343308 iloczyn z 1346×998.
i t. p.

38. Skrócone mnożenie, gdy jeden z czynników złożony z dziewiątek prócz jedności porządku najwyższego: np. 19, 29, 699, 4999 i t. p., które to liczby dają się rozłożyć na 20—1, 30—1, 700—1, 5000—1 i t. d.

Przykład 1. 3458×19; 19=20—1.
3458×20. . . . 69160
3458×1. 3458
Różnica 65702 iloczyn z 3458×19.

Przykład 2. 5637×699; 699=700—1.
5637×700. . . . 3945900
5637×1. 5637
Różnica 3940263 iloczyn z 5637×699.

Przykład 3. 438×3999; 3999=4000—1.
438×4000. . . 1752000
438×1. 438
Różnica 1751562 iloczyn z 438×3999.
i t. p.

Inne jeszcze skrócone sposoby mnożenia umieszczone są po dzieleniu, jako na tem działaniu opierające się.

Przykłady dla wprawy.

1) $232 \times 27 = ?$ . . . . (6264)
2) $2073 \times 248 = ?$ . . . . (514104)
3) $7532 \times 907 = ?$ . . . . (6831524)
4) $2039 \times 1008 = ?$ . . . . (2055312)
5) $77054 \times 193 = ?$ . . . . (14871422)
6) $3504 \times 69 = ?$ . . . . (241776)
7) $73 \times 6007 = ?$ . . . . (438511)
8) $11005 \times 909 = ?$ . . . . (10003545)
9) $10700 \times 1275 = ?$ . . . . (13642500)
10) $1200 \times 2750 = ?$ . . . . (3300000)
11) $2739 \times 547 = ?$ . . . . (1498233)
12) $72049 \times 4708 = ?$ . . . . (339206692)
13) $12020089 \times 3467 = ?$ . . . . (41673648563)
14) $12880921 \times 3589 = ?$ . . . . (46229625469)
15) $5092 \times 937 \times 4086 = ?$ . . . . (19495139544)
16) $9207 \times 490 \times 5607 \times 10000 = ?$ . . . . (252955880100000)

ZAGADNIENIA.

1. Za pewną sztukę płótna zapłacono 38 rubli; ileż zapłacić należy za 127 sztuk tego samego gatunku płótna?

Wskazanie działania. Kiedy za 1 sztukę płótna płacą 38 rubli, to za 2 sztuk zapłacą 2 razy po 38 rubli, za 3 sztuk 3 razy po 38 rubli: więc za 127 sztuk zapłacą 127 razy po 38 rubli; należałoby więc 38 rubli wypisać 127 razy, a następnie liczby te zupełnie sobie równe do siebie dodać, albo krócéj 38 rubli pomnożyć przez 127 (Nr. 28). W dodawaniu, liczba 38 rubli wypisana 127 razy, tworzyłaby liczby dodajne, liczba zaś 127 byłaby tylko skazówką pokazującą ile razy liczba pierwsza ma być wypisaną; z dwóch więc liczb podanych w zadaniu, jedna tylko 38, może oznaczać gatunek rzeczy czyli może być liczbą imienną, druga bowiem 127 chociaż w zadaniu oznacza gatunek rzeczy, w działaniu jednak jest tylko powyżéj wymienioną skazówką i zamienia się koniecznie na liczbę bezwzględną. Liczba dodajna 38 rubli w mnożeniu przybiera nazwisko mnożnéj; liczba 127 nazwisko mnożnika; a ponieważ ogół jest zawsze takiego gatunku, jakiego gatunku są liczby dodajne, a ogół przybiera w mnożeniu nazwisko iloczynu, z tego więc względu iloczyn jest takiego gatunku, jakiego gatunku jest mnożna.

Rozwiązanie.

38×127=4826 rubli.

127. . . mnożnik (liczba bezwzględna)
38. . . mnożna (liczba imienna)
1016
381
4826 iloczyn (takiego gatunku jakiego mnożna).

2. Jeżeli w jednym dniu zrobić może robotnik 25 stóp pewnéj roboty, ileż zrobi stóp téjże saméj roboty w dniach 13, pracując z równąż gorliwością?

Wskazanie działania. Kiedy robotnik w 1 dniu wykonywa 25 stóp pewnéj roboty, to w 2 dniach wykona 2 razy po 25 stóp, w 3 dniach 3 razy po 25 stóp, więc w 13 dniach wykona 13 razy po 25 stóp; należy więc pracę dzienną t. j. 25 stóp wypisać 13 razy i liczby te zupełnie sobie równe do siebie dodać, czyli 25 stóp powtórzyć 13 razy, a otrzymamy liczbę stóp pracy 13-dniowéj. Pamiętając na to co się w poprzedzającem zagadnieniu mówiło i rozważywszy to co się w tém zagadnieniu już powiedziało, możemy od razu twierdząco wyrzec, że z liczb podanych w zagadnieniu, liczba 25 stóp jest możną i jest liczbą imienną, a liczba 13 jest mnożnikiem i liczbą bezwzględną.

Rozwiązanie.

25×13=325 stóp.

25. . . mnożna (liczba imienna)
13. . . mnożnik (liczba bezwzględna).
75
25
325. . . iloczyn (takiego gatunku jakiego mnożna).

3. Pewna summa pieniędzy podzieloną została między 586 ludzi. Jak wielką była ta summa, jeżeli na każdego wypadło 57 kopiejek? (*Odpow.* 33402 kop. czyli 334 rub. i 2 kop.)

4. Jaka odległość Moskwy od Irkucka, kiedy podróżujący pieszo uchodząc 45 wiorst dziennie, w 118 dniach odbywa całą drogę? (*Odp.* odległość Moskwy od Irkucka wynosi wiorst 5310).

5. Robotnik zarabiający 75 kop. dziennie, ile dostanie za 189 dni pracy? (*Odp.* dostanie 14175 kop. czyli 141 rub. 75 kop).

6. Jaki jest ogół z liczby 6789 wypisanéj 347 razy? (*Odp.* szukanym ogółem jest liczba 2355783).

7. Kupiec spłacił swój dług 189 arszynami płótna. Ile cały jego dług wynosił, kiedy arszyn płótna liczył po 35 kop? (*Odp.* cały dług wynosił 6615 kopiejek czyli 66 rubli i 15 kopiejek).

8. Towarzystwo z 45 osób złożone, zyskało na pewném przedsiębierstwie tyle, że każda ze stowarzyszonych osób dostała liczbę rubli wyrównywającą liczbie osób do spółki należącéj. Jakiż więc był zysk ogólny? (*Odp.* 2025 rubli).

9. Kupiono 327 sztuk materyi jedwabnéj, płacąc 108 rubli za każdą; ileż zapłacono za wszystko? (*Odp.* 35316 rubli).

10. Do pewnego użytku kupiono 12587 arszynów płótna, po 38 kop., i 6089 arszynów innego gatunku płótna, dwa razy droższego od pierwszego. Ile zapłacono za pierwszy, a ile za drugi gatunek płótna? (*Odp.* za 1-szy 4783 rubli 6 kop.; a za 2-gi 4627 rub. 64 kop.)

11. Ile będzie zołotników w 3928 funtach, kiedy funt ma 96 zołotników? (*Odp.* 377088 zołotników).

12. Dowiedzieć się ile znajduje się werszków w 375 sztukach płótna, kiedy w każdéj sztuce jest 29 arszynów? (*Odp.* 174000 werszków).

13. Ile jest garncy w 1947 czećwierciach, wiedząc że jedna czećwierć ma 64 garncy? (*Odp.* 124608 garncy).

14. Ile książek obejmuje bibljoteka złożona z 28 szaf, kiedy w każdéj szafie jest 9 pułek, a każda pułka mieści 47 książek? (*Odpowiedź* 11844 książek).

15. Urzędnik mający 3500 rubli rocznéj pensyi, wydaje miesięcznie 256 rubli, odkładając resztę na nieprzewidziane trafić się mogące wydatki. Ileż będzie miał oszczędzonych pieniędzy po latach 5? (*Odp.* 2140 rubli).

16. Pewna osoba w przeciągu 256 dni przeżyła czwartą część całego kapitału jaki posiadała, wydając 8 rubli dziennie. Ileż wynosił cały jéj kapitał i jaka pozostała jéj jeszcze ilość pieniędzy? (*Odp.* cały kapitał wynosił 8192 rub., pozostało jéj więc 6144 rub.)

17. Kupiec sprzedawszy 895 arszynów sukna za 4475 rubli, zyskał na każdym arszynie 80 kop. Dowiedzieć się ile kosztowało sukno i ile ta sprzedaż przyniosła ogółem zysku? (*Odp.* sukno kosztowało kupca 3759 rub., zysk zaś ogółem wynosił 716 rubli).

18. Kapitał 4780 rubli oddany został na procent na lat 10; przez pierwsze 3 lata przynosił procentu po 8 kop. rocznie od rubla, a przez następne lata po 6 kop. rocznie od rubla. Dowiedzieć się ile powyżéj wymieniony kapitał przyniósł procentu za lat 10? (*Odp.* 315480 kop. czyli 3154 rub. 80 kop. procentu).

19. Kto oszczędza dziennie 23 kopiejek, ile oszczędzi w tygodniu, ile w całym roku, to jest w 52 tygodniach, a ile oszczędności mieć będzie w 20 latach? (*Odp.* w tygodniu 1 rubel 61 kop., w roku 83 rub. 72 kop., a w 20 latach 1674 rub. 40 kop).

20. Kto zmarnuje tylko 2 kop. dziennie, ile zmarnuje w ciągu całego swego życia, licząc rok po 365 dni, przypuściwszy że żył lat 58? (*Odp.* 423 rub. 40 kop).

21. Pewien gospodarz wiejski zakupił 528 owiec, płacąc po 2 ruble za owcę, 8 wołów po 28 rub., 15 krów po 21 rubli. Za resztę pieniędzy to jest za 387 rubli wybudował stajnię i oborę Ileż więc wydał pieniędzy na wszystko? (*Odp.* wydał 1982 rub.).

22. Ile zapłacić potrzeba za 278 korcy i 3 garnce pszenicy, wiedząc że garniec kosztuje 28 kopiejek? (*Odp.* zapłacić potrzeba 249172 kop. czyli 2491 rub. 72 kop.).

23. Do pewnego handlu zakupiono wina 23 beczek, każda o 275 kwartowych butelkach. Po przelaniu go do mniejszych beczek, mieszczących w sobie tylko po 45 butelek, sprzedano w krótkim czasie 47 takowych beczek. Ileż butelek wina pozostało jeszcze do rozprzedania? (*Odp.* 4210 butelek).

24. Przy pewnéj fabryce było w kassie tyle pieniędzy, że jeżeliby z niéj codziennie płacono 12 robotnikom po 48 kopiejek a 15 robotnikom po 32 kop. to pieniądze w niéj znajdujące się wystarczyłyby na opłacanie pomienionych robotników przez 145 dni. Ileż więc ta kassa posiadała pieniędzy? (*Odp.* 153120 kop. czyli 1531 rubli 20 kop.).

25. Spółka jedwabnicza założona w Warszawie, podejmuje się rozwijać oprzędy, biorąc po 5 kop. za łut rozwiniętego jedwabiu

w nitki od 7 do 8 oprzędów grube. Ile więc wypadnie zapłacić za rozwinięcie w jedwab' 25 funtów oprzędu? (*Odp.* 4000 kop. czyli 40 rubli).

26. Ile zapłacić wypadnie za dobra obejmujące ornego pola 456 włók, lasu 203 włók i łąk 54 włók, jeżeli włókę ornego pola ugodzono po 527 rubli, włókę lasu po 996 rubli, a włókę łąk po 285 rubli? (*Odp.* zapłacić wypadnie 457890 rubli).

27. Pewna osoba zakupiła 246 korcy pszenicy płacąc 6 rubli 30 kop. za korzec. Po oczyszczeniu jéj otrzymała czystego ziarna 156 korcy i resztę pośledniéj pszenicy. Pierwszą sprzedała po 8 rub. 50 kop. korzec, drugą po 5 rubli 10 kop. korzec. Czy zyskała lub straciła i ile, wiedząc że na koszta oczyszczenia wydała 25 rubli? (*Odp.* zyskała 210 rubli 20 kop.)

28. Znaleść liczbę, któréj część szósta uczyni 3459? (*Odp.* tą liczbą jest 20754).

29. Znaleść liczbę, któréj część piąta powiększona liczbą 1024, uczyni 3369? (*Odp.* tą liczbą jest 11725).

30. Znaleść liczbę, któréj część czwarta zmniejszona liczbą 527, uczyni 964? (*Odp.* tą liczbą jest 5964).

31. Znaleść iloczyn trzech czynników 657, 1427, 8259? (*Odp.* tym iloczynem jest 7743134601).

32. Znaleść iloczyn czterech czynników: 9207, 490, 5607, 10000? (*Odp.* tym iloczynem jest 252955880100000).

DZIELENIE.

39. Czwarte z kolei działanie jest *dzielenie* (дѣленie), które ma na celu dowiadywanie się, ile razy jedna liczba mieści w sobie drugą, czyli z ilu liczb mniejszych składa się liczba większa.

Ażeby dowiedzieć się, ile razy większa liczba mieści w sobie mniejszą liczbę, należy liczbę mniejszą odejmować od większéj dotąd, dopóki można; ile więc razy liczba mniejsza da się odjąć od większéj, z tylu liczb mniejszych składać się będzie liczba większa np.

Dajmy że mamy dowiedzieć się, ile razy liczba 20 mieści w sobie liczbę 5, czyli z ilu piątek składa się liczba 20; postępujemy sposobem następującym:

$$\begin{array}{rl} 20 & \\ 5 & \text{raz} \\ \hline 15 & \\ 5 & \text{drugi raz} \\ \hline 10 & \\ 5 & \text{trzeci raz} \\ \hline 5 & \\ 5 & \text{czwarty raz} \\ \hline 0 & \end{array}$$

Z tego przykładu widzimy, że liczba 5 daje się 4 razy odjąć od liczby 20; wnosimy więc, że liczba 20, mieści w sobie 4 razy liczbę 5, czyli że liczba 20 składa się z 4-ch piątek.

W taki sposób wykonywając dzielenie, działanie byłoby powolne i pracowite, zwłaszcza gdy różnica między danemi liczbami jest znacznie wielka; zobaczymy więc, jak sobie tak długi sposób postępowania ułatwimy, i jaką drogą do takowego skrócenia dojdziemy. Przedewszystkiém jednakże dla łatwiejszego zrozumienia rzeczy, podobnie jak i w trzech poprzedzających działaniach, na liczby dane i z nich wynalezione, nadamy pewne stałe nazwiska; i tak: odjemna przyjmie nazwisko *dzielnéj* (дѣлимое); odjemnik kilkakrotnie od odjemnéj odejmowany, nazwisko *dzielnika* (дѣлитель); wypadek z działania otrzymany nazwisko *ilorazu* (частное). W danym przykładzie, liczba 20 jest dzielną, liczba 5 dzielnikiem, a 4 ilorazem. Działanie więc dzielenia będzie tylko skróconém działaniem odejmowania.

40. Zastanowiwszy się nad działaniem poprzedzającego przykładu, postrzegamy, że liczba ilorazu jest liczbą odciągań dzielnika od dzielnéj do zupełnego jéj wyczerpania; zatém, liczba ilorazu jest złożoną z tylu jednosci, ile dzielników mieści się w dzielnéj; odbywając więc potém działanie na odwrót, t. j. wypisując dzielnik tyle razy, ile jest jedności w ilorazie, ogół z tak wypisanego dzielnika utworzyć powinien liczbę równającą się dzielnéj, czyli powtórzywszy dzielnik liczbą wskazaną ilorazem, iloczyn dać powinien liczbę taką samą, jaką jest dzielna.

Jeżeli więc dzielnik kilkakrotnie od dzielnéj odejmowany.

przyprowadza ją w końcu do zera; czyli, jeżeli dzielnik całkowicie mieści się w dzielnéj, wtedy *dzielna równa iloczynowi z dzielnika przez iloraz.*

Jeżeli zaś dzielna nie zostanie przyprowadzoną do zera, lecz pozostanie w niéj reszta, od któréj dzielnika odjąć już nie można; czyli jeżeli dzielnik nie mieści się całkowicie w dzielnéj: wtedy *dzielna równa się iloczynowi z dzielnika przez iloraz, powiększonemu liczbą jedności w pozostałéj reszcie.*

Przykłady na oba przypadki.

1) $12 : 4 = 3$ iloraz. 2) $30 : 8 = 3$ iloraz z resztą 6.

12 dzielna	4	30	8
4 dzielnik	4	8	8
8	4	22	8
4 dzielnik	$12 = 4 \times 3$	8	$24 = 8 \times 3$
4		14	$8 \times 3 + 6 = 30.$
4 dzielnik		8	
0		6 reszta od któréj nie można odjąć dzielnika.	

Widzimy więc, że dzielenie jest działaniem wprost przeciwném mnożeniu.

Zasadzając się na powyższéj prawdzie, możemy dzieleniu takie jeszcze dać określenie:

Dzielenie jestto działanie, za pomocą którego wynajdujemy taką liczbę, która pomnożona przez jednę z dwóch danych, wyda na iloczyn liczbę drugą.

41. Rozdzielenie danéj liczby na pewną liczbę części równych, osiągamy także przez dzielenie: bo tu ogół części składowych tworzyć powinien daną liczbę, więc liczba tych części pomnożona przez ich wielkość, daje daną liczbę; zadanie zatém zdąża do tego: jak z dwóch liczb danych znaleść trzecią, która pomnożona przez jednę z nich daje na iloczyn drugą.

Zatém iloraz z działania otrzymany nietylko może pokazywać, ile razy jedna liczba mieści w sobie drugą; lecz może także oznaczać jak wielkie są części składowe danéj liczby, rozdzielonéj na żądaną liczbę części równych.

42. Określenie dzielenia w Nrze 40 podane, ułatwia sposób wyuczenia się na pamięć ilorazów, gdy dzielna jest liczbą jedno lub dwuznakową, dzielnik jednoznakową; do czego użyć można tablicy Pitagoresa, uważając iloczyny w niéj umieszczone za dzielne, jedne czynniki, za dzielniki, drugie zaś odpowiednie im czynniki, za ilorazy. I tak: wiedząc z tablicy mnożenia, że 7×8 daje na iloczyn 56; twierdzę, że liczba 56 uważana już jako dzielna zawiera w sobie 8 siódemek lub 7 ósemek; czyli, ilorazem liczby 56 podzielonéj przez 7, jest liczba 8; a ilorazem z téjże liczby 56 podzielonéj przez 8, jest liczba 7 i t. d.

Albo też: dla znalezienia ilorazu z podzielenia liczby 72 przez 9; mnożymy kolejno liczbę 9 przez 1, 2, 3, ... aż natrafimy na taką liczbę 8, która pomnożona przez 9, daje w iloczynie dzielną 72 i wtedy twierdzimy: że ilorazem liczb danych jest liczba 8 i t. d.

Jeżeliby zaś dzielna, będąc liczbą nie większą od dwuznakowéj, nie zawierała się w pomienionéj tablicy, należy ją rozłożyć na dwie liczby, z którychby jedna była podzielną w zupełności przez dany dzielnik, druga była mniejszą od dzielnika; np. dajmy że mamy liczbę 50 podzielić przez 8. Znając dokładnie iloczyny umieszczone w tablicy, zaraz poznamy, że liczba 50 nie jest w zupełności podzielną przez dzielnik 8: w tym więc celu rozkładamy ją na $48+2$; 48 zawiera w sobie 6 ósemek, zatém szukanym ilorazem jest liczba 6 z resztą 2 i t. d.

43. Nabywszy dostatecznéj wprawy w wyszukiwaniu ilorazów liczb jedno i dwuznakowych dzielonych przez liczbę jednoznakową, przystępujemy z kolei do wykrycia sposobu działania, kiedy dzielna jest liczbą ilukolwiek znakową, dzielnik jednoznakową.

Dla lepszego zrozumienia całego sposobu postępowania, weźmiemy przykład mnożenia: ażeby zaś nie zatrzeć śladu działań, wypiszemy w nim każdy cząstkowy iloczyn osobno.

	854
	6
1-szy cząstkowy iloczyn z 4 (jedności) $\times$ 6 . . .	24
2-gi cząstkowy iloczyn z 5 (dziesiątków) $\times$ 6 . . .	30
3-ci cząstkowy iloczyn z 8 (set) $\times$ 6.	48
Iloczyn	5124

Z działania tego widzimy, że iloczyn 5124 mieści w sobie następujące części: 1) 6 razy wzięte 4 jedności, 2) 6 razy wzięte

5 dziesiątków i 3) 6 razy wzięte 8 set; czyli składa się z trzech iloczynów cząstkowych, powstałych z pomnożenia znaków jedności, dziesiątków i set mnożnéj przez liczbę jedności mnożnika. Gdyby więc teraz dany był iloczyn 5124 i jeden z czynników np. 6, a trzeba było wynaleść drugi czynnik nieznany, zadanie dążyłoby do znalezienia takiéj liczby, któréj jedności, dziesiątki, sta . . . . mnożone po szczególe przez liczbę 6, dały na iloczyn 5124. A ponieważ w liczbie 5124, uważanéj już jako dzielna, znak 5 umieszczony na czwartém miejscu oznacza zbiór tysięcy; szukamy więc naprzód takiéj liczby tysięcy, która pomnożona przez dzielnik 6, dałaby na iloczyn 5 tysięcy. Zważywszy jednak, że najmniejsza liczba tysięcy jest 1 tysiąc, który pomnożony przez dzielnik 6, daje na iloczyn liczbę 6 tysięcy, większą od liczby tysięcy będącéj w dzielnéj, wnosimy: że szukany iloraz nie zawiera w sobie żadnego znaku tysięcy. Dla téj przyczyny 5 tysięcy zamieniamy na sta, co czyni 50 (set), do których dołączywszy 1 sto będące w dzielnéj, otrzymamy razem 51 (set): szukamy więc znowu, takiéj liczby set, która pomnożona przez dzielnik 6, dałaby na iloczyn 51 (set). Przechodząc pamięcią wszystkie iloczyny z 6 przez 1, 2, 3, . . . znajdujemy w reszcie że 6×8 daje na iloczyn liczbę 48 mniejszą od 51, zaś 6×9 daje na iloczyn liczbę 54 większą od 51; wnosimy: że liczba 8 jest znakiem set szukanego ilorazu. Iloczyn z 8 (set) przez 6, t. j. 48 (set) odjąwszy od 51 (set), pozostanie 3 (set): zatém 6 w 51 mieści się razy 8 z resztą 3. Do reszty 3 (set) dopisawszy pozostałe znaki dzielnéj, otrzymamy liczbę 324. Ponieważ liczba 5124 mieści w sobie trzy iloczyny cząstkowe, jak to zaraz z pierwszego znalezionego znaku na iloraz, twierdząco powiedzieć możemy; więc liczba 324 jako reszta otrzymana z odjęcia pierwszego iloczynu cząstkowego od głównéj dzielnéj, mieści w sobie dwa pozostałe iloczyny cząstkowe t. j. 6 razy wzięte dziesiątki i 6 razy wzięte jedności szukanego ilorazu. Ażeby znaleść znak dziesiątków ilorazu, 3 set reszty zamieniamy na dziesiątki, co czyni 30 (dziesiątków), do których dołączywszy 2 (dziesiątki) głównéj dzielnéj, otrzymamy 32 (dziesiątków). Przebiegając znowu wszystkie iloczyny z 6 przez 1, 2, 3, . . . znajdujemy wreszcie, że 6×5 daje na iloczyn liczbę 30, mniejszą od 32, zaś 6×6 daje na iloczyn liczbę 36, większą od 32; wnosimy: że liczba 5 jest szukanym znakiem dziesiątków ilorazu. Iloczyn z 5 (dziesiątków)

przez 6 t. j. 30 (dziesiątków) odjąwszy od 32 (dziesiątków), pozostanie 2 (dziesiątki); zatém 6 w 32 mieści się razy 5 z resztą 2. Do reszty 2 dopiszmy pozostały znak głownéj dzielnéj, otrzymamy liczbę 24 zawierającą już tylko jeden iloczyn cząstkowy t. j. 6 razy wzięty znak jedności ilorazu; że zaś 6×4 daje na iloczyn 24; zatém 4 jest szukanym znakiem jedności. Otrzymany więc iloraz z podzielenia 5124 przez 6, składa się: z 8 set, 5 dziesiątków, 4 jedności, czyli jest liczbą 854.

Dopiero opisane działanie, przedstawi się w następujący sposób:

Wzór działania.

Dzielna 5124	6 Dzielnik	6×1=6
48		6×2=12
32	854 Iloraz	6×3=18
30		6×4=24
24		6×5=30
24		6×6=36
0		6×7=42
		6×8=48
		6×9=54

Objaśnienie wzoru działania z krótkiém zebraniem opisu powyższego. Z prawéj strony dzielnéj umieszczamy dzielnik, odgradzając go od niéj linijką pionową i nadto podkreślamy go linijką poziomą, pod którą piszemy kolejno wynajdowane znaki ilorazu. Poczém przystępujemy wprost do działania, mówiąc: 6 w 5 nie mieści się, co dowodzi że w ilorazie nie będzie żadnego znaku tysięcy; przybieramy więc następujący znak dzielnéj i mówimy: 6 w 51 mieści się razy 8, które piszemy w miejscu powyżéj wskazaném t. j pod dzielnikiem; iloczyn z 8 ×6 t. j. 48 piszemy pod liczbą 51 i wykonywamy odejmowanie. Do otrzymanéj reszty 3 dopisujemy następny znak 2 i powstałą ztąd liczbę 32 uważamy za nową dzielną, mówiąc: 6 w 32 mieści się razy 5, które piszemy w ilorazie obok 8; iloczyn z 6×5 t. j. 30 podpisujemy pod tą drugą cząstkową dzielną 32 i uskuteczniamy odejmowanie. Do otrzymanéj reszty 2 dopisujemy pozostały jeszcze znak dzielnéj t. j. 4 i liczbę 24 uważamy za trzecią cząstkową dzielną, mówiąc: 6 w 24 mieści się razy 4, które piszemy w ilorazie po znaku 5; iloczyn z 6×4 t. j. 24 podpisujemy pod tą trzecią cząstkową dzielną 24 i uskuteczniamy odejmowanie. A że na resztę otrzymaliśmy zero, znakiem to jest że liczba 6 w zupełności mieści się w liczbie 5124.

Otrzymany z działania iloraz uczy: (Nr. 41) 1º że liczba 5124 mieści w sobie 854 szóstek; 2º że rozdzieliwszy 5124 na 6 równych części, wielkość każdéj szóstéj części téj liczby jest równa 854; 3º że liczba 5124 jest 854 razy większą od liczby 6; 4º że jeżeli liczba 5124 jest iloczynem dwóch czynników, z których jeden równy 6, to drugi czynnik musi być równy 854.

Uwaga 1. Do powyżej wskazanego sposobu mówienia przy wykonaniu działania, wtedy dopiero należy z dziećmi przystąpić, gdy na wieloliczných przykładach udowodnić potrafią sposób postępowania na początku niniejszego numeru podany.

Uwaga 2. Jeżeli zastanowimy się nad sposobem działania w mowie będącego, postrzeżemy: że reszta pozostająca np. z tysięcy, zamienia się na sta; reszta z set zamienia się na dziesiątki; reszta z dziesiątków zamienia się na jedności. Postępowanie to tłumaczy nam powód, dla którego rozpoczynając działanie szukamy naprzód znaku jedności porządku najwyższego, nie zaś przeciwnie; bo obrawszy sobie drogę odwrotną t. j. szukając naprzód znaku jedności porządku najniższego, a następnie znaku dla dziesiątków, set, tysięcy i t. d., resztę pozostałą z jedności wypadłoby zamieniać na dziesiątki, resztę z dziesiątków na sta i t. d. co jest niepodobieństwem.

Uwaga 3. Po dopisaniu ostatniego znaku główéj dzielnéj do reszty przedostatniéj i wykonaniu dzielenia, działanie się kończy, chociażby ostatnią resztą była jakakolwiek liczba nie zero.

Uwaga 4. Jeżeli którabądź reszta większa od dzielnika, wzięty znak na iloraz jest za mały. Jeżeli zaś iloczyn z otrzymanego znaku na iloraz przez dzielnik, większy od odpowiedniej cząstkowej dzielnéj, wzięty znak na iloraz jest za wielki.

Uwaga 5. Jeżeli do któréjkolwiek reszty dopisany odpowiedni znak głównéj dzielnéj, wyda na cząstkowę dzielną liczbę mniejszą od dzielnika, wtedy na iloraz piszemy zero.

44. Przystępujemy teraz do przypadku dzielenia, w którym dzielnik jest liczbą złożoną z kilku znaków. Dajmy więc że mamy 14624 podzielić przez 32.

Wzór działania.

Dzielna 14624	32 Dzielnik	32×1= 32
128	457 Iloraz	32×2= 64
182		32×3= 96
160		32×4=128
224		32×5=160
224		32×6=192
0		32×7=224
		32×8=256
		32×9=288

Objaśnienie. Ponieważ w dzielnéj 14624 znak 1 umieszczony na piątém miejscu, oznacza zbiór dziesiątków tysięcy, szukamy więc naprzód takiéj liczby dziesiątków tysięcy, przez którą mnożony dzielnik 32, dałby na iloczyn 1 dziesiątek tysięcy, co jest niepodobieństwem; wnosimy więc: że szukany iloraz nie będzie zawierał w sobie dziesiątków tysięcy. Z tego więc względu 1 dziesiątek tysięcy zamieniamy na jedności tysięcy i do nich dołączamy 4 tysiące dzielnéj, co razem daje 14 tysięcy; szukamy więc znowu takiéj liczby tysięcy, przez którą mnożony dzielnik 32, wydałby na iloczyn 14 tysięcy, co jest także niepodobieństwem: wnosimy więc: że iloraz nie będzie zawierał jedności tysięcy. I dla tego 14 tysięcy zamieniamy jeszcze na sta i dołączamy do nich 6 set dzielnéj, co daje razem 146 set; szukając liczby set, przez którą mnożony dzielnik 32, dałby w iloczynie 146 set, czyli mnożąc kolejno dzielnik 32 przez 1, 2, 3, . . znajdujemy wreszcie, że 32 × 4=128 iloczyn mniejszy od 146 a 32×5=160 iloczyn większy od 146; wnosimy więc: że szukanym znakiem set ilorazu jest 4, który piszemy we właściwém miejscu pod dzielnikiem. Odjąwszy 128 od 146, pozostanie 18; zatém 32 w 146 mieści się razy 4 z resztą 18. Pozostałą resztę 18 set, zamieniamy na dziesiątki i dodajemy do nich jeszcze 2 dziesiątki głównéj dzielnéj, czyli co na jedno wychodzi, do reszty 18, dopisujemy następujący znak dzielnéj 2, otrzymamy 182 dziesiątków; szukając znowu takiego znaku dla dziesiątków, przez który mnożony dzielnik 32, wydałby w iloczynie 182, znajdujemy że 32×5=160 i 32×6=192; wnosimy więc: że liczba 5 jest szukanym znakiem dziesiątków, który piszemy obok znalezionego już znaku 4 w ilorazie. Odjąwszy 160 od 182, pozostanie 22; zatém 32 w 182 mieści się razy 5 z resztą 22.

Do pozostałéj reszty 22, dopisawszy pozostały znak dzielnéj 4, otrzymamy 224 trzecią cząstkową dzielną; ażeby tu znowu dowiedzieć się ile razy 32 mieści się w 224, mnożymy kolejno 32 przez 1, 2, 3, ... a znalazłszy że $32 \times 7 = 224$, wnosimy: że szukanym znakiem jedności dla ilorazu jest 7, które piszemy obok 45 we właściwém miejscu. Ilorazem więc liczb danych jest 457.

45. Ogólna zasada działania liczb całkowitych.

Wzór działania.

```
Dzielna 13284381 | 6823 Dzielnik
         6823    |------
        -------  | 1947 Iloraz
         64613   |
         61407
        -------
          32068
          27292
         -------
           47761
           47761
          -------
               0
```

1. W danym przykładzie dzielna złożona z ośmiu, dzielnik z czterech znaków. Ażeby dowiedzieć się z ilu znaków składać się będzie iloraz, należy odbyć rozumowanie w poprzedzającym numerze podane; albo też krócéj: z lewéj strony dzielnéj odciąć tyle znaków, ile ich jest w dzielniku, jeżeli pierwszy znak dzielnéj większy od pierwszego znaku dzielnika; lub z lewéj strony dzielnéj odciąć o jeden znak więcéj od liczby znaków będących w dzielniku, jeżeli pierwszy znak dzielnéj mniejszy od pierwszego znaku dzielnika; natenczas liczba odcięta w dzielnéj będzie pierwszą cząstkową dzielną, a nazwisko zależne od miejsca ostatniego znaku odciętego, będzie nazwiskiem dla pierwszego znalezionego znaku na iloraz. W podanym przykładzie, pierwszy znak dzielnéj mniejszy od pierwszego znaku dzielnika, bo pierwszym znakiem dzielnéj jest 1, a pierwszym znakiem dzielnika jest 6; zatém w dzielnéj należy odciąć na pierwszą cząstkową dzielną znaków pięć, bo ich jest cztery w dzielniku; a ponieważ ostatni znak odcięty 4 umieszczony jest na miejscu jedności tysięcy, więc też pierwszy znak znaleziony na iloraz, oznaczać będzie jedności tysięcy, czyli iloraz złożony będzie z czterech znaków.

2. Ażeby się przekonać, ile razy 6823, pomieści się w pierwszéj cząstkowéj dzielnéj 13284, należałoby dzielnik 6823 mnożyć kolejno przez 1, 2, 3, . . . jakto już na przykładzie poprzedzającego numeru było pokazane. Postępowanie to jednak może być znacznie uproszczone i doprowadzone do dzielenia liczb takich, których ilorazy na pamięć odgadnąć możemy, a mianowicie: przypuszczając na chwilę, że w miejsce 8, 2, 3, dzielnika są zera i w miejsce 2, 8, 4, cząstkowéj dzielnéj są także zera, pozostaną nam tylko do uważania liczby 13 i 6; 6 tysięcy w 13 tysiącach pomieści się razy 2, lecz gdy się wrócimy myślą do liczb prawdziwych dzielnéj i dzielnika, postrzeżemy, że dzielnik 6823 powtórzony dwa razy, da więcéj jak 13284, bo po 6 tysiącach dzielnika następuje 8 set, które wzięte dwa razy, dają już 1600; z tego więc przekonywamy się, że 6823 w 13284 pomieści się tylko raz jeden, co od razu można było odgadnąć, zważywszy, że dzielnik 6825 jest większy od pół-siódma tysiąca, zamiast więc dzielenia 13 tysięcy przez 6 tysięcy, należało dzielić przez 7 tysięcy. Otrzymany na iloraz znak 1, oznaczający tysiące, piszemy we właściwém miejscu pod dzielnikiem, a następnie iloczyn z 6823 przez 1 odejmujemy od 13284 i resztę ztąd otrzymaną 6461 tysięcy, zamieniamy na sta, dołączając do nich 3 set głównéj dzielnéj, co razem da na drugą cząstkową dzielną 64613 set.

3. Ażeby dojść ile razy 6823 mieści się w 64613, robotę znowu skracamy uważając, dla podobnéj przyczyny co i poprzedno, ile razy 6 tysięcy czyli raczéj 7 tysięcy mieści się w 64 tysiącach; iloraz ztąd otrzymany 9 oznaczający sta piszemy po 1 w ilorazie. Iloczyn z 6823 przez 9 odejmujemy od 64613 i resztę 3206 set zamieniamy na dziesiątki dołączając jednocześnie 8 dziesiątków głównéj dzielnéj co razem daje 32068 dziesiątków na trzecią cząstkową dzielną.

4. Podobnym sposobem dowiadujemy się, że 6823 w 32068 mieści się razy 4, które piszemy zaraz po 9 w ilorazie, a następnie robimy iloczyn z 6823 przez 4, który odejmujemy od 32068. Resztę 4776 dziesiątków zamieniamy na jedności dołączając 1 jedność głównéj dzielnéj, co daje 47761 jedności na czwartą cząstkową dzielną.

5. Nakoniec 6823 w 47761 mieści się razy 7, które piszemy w ilorazie po 4. Iloczyn z 6823 przez 7 odejmujemy od 47761 i otrzymujemy na resztę zero, co jest dowodem, że 6823 zupełnie mieści się w 13284381.

46. Jeżeli z dzielenia liczb przez siebie, na ostatnią resztę otrzymamy zero, mówimy że dzielna jest przez swój dzielnik podzielną. Liczbę dającą się bez reszty dzielić przez drugą liczbę, zowiemy *liczbą wielokrotną;* liczbę zaś będącą dzielnikiem zupełnym téj liczby wielokrotnéj, *cząstką wielokrotną.*

47. Prawda pod numerem 40 umieszczona, podaje sposób sprawdzenia działania. *Jeżeli więc dzielenie całkowicie i bez błędu wykonane zostało, wtedy iloczyn z dzielnika i ilorazu dać powinien liczbę równającą się dzielnéj; jeżeli zaś z dzielenia otrzymamy resztę, wtedy do iloczynu z dzielnika przez iloraz dodawszy tę resztę, ogół dać powinien liczbę równającą się dzielnéj.*

Przykłady.		**Sprawdzenie.**
1) 7935048	387	20504
774	20504	387
1950		143528
1935		164032
1548		61512
1548		7935048 zgodno.
0		

		Sprawdzenie.
2) 296276424	70458	70458
281832	4205	4205
144444		352290
140916		140916
352824		281832
352290		296275890
534 reszta.		534
		296276424 zgodno.

Przykłady dla wprawy.

1) 765436 : 2=? . . . . (382718).
2) 8758915 : 5=? . . . . . . (1751783).
3) 35650032 : 11=? . . . . . . (3240912).
4) 3107220 : 12=? . . . . . . (258935).
5) 272240 : 83=? . . . . . . (3280).
6) 7450204 : 76=? . . . . . . (98029).

7) 107365 : 197=? . . . . . . (545).
8) 169332 : 548=? . . . . . . (309).
9) 170593 : 789=? . . . . . . ($216\frac{169}{789}$). (zob. N-r 9).
10) 978520 : 297=? . . . . . . ($3294\frac{202}{297}$).
11) 127562 : 1283=? . . . . . ($99\frac{545}{1283}$).
12) 4764250 : 475=? . . . . . (10030).
13) 85123860 : 905=? . . . . . (940612).
14) 339206692 : 4708=? . . . . (72049).
15) 42326109125 : 3485=? . . . (12145225).
16) 41385831579 : 2459=? . . . (11964681).
17) 41673648563 : 3467=? . . . (12020089).
18) 95943120 : 8970=? . . . (10696).

Podzielność liczb.

48. Własność dająca poznać czy dana liczba da się bez reszty podzielić przez inne liczby, zowie się *podzielnością* (ДѢЛИМОСТЬ) liczb. Ograniczymy się tutaj podaniem zasad podzielności przez niektóre liczby.

49. *Liczba jest podzielną przez 2, jeżeli kończy się zerem lub znakiem podzielnym przez 2, to jest parzystym.* Znaki zaś podzielne przez dwa są: 2, 4, 6 i 8.

Objaśnienie. Dajmy że mamy liczbę 5638.

Dana liczba jako złożona z 563 dziesiątków i 8 jedności może być tak napisana 10+10+10+10..... (563 razy)...+8. A ponieważ każde 10 jest podzielne przez 2, więc ażeby dana liczba była podzielną przez 2, potrzeba tylko żeby znak jedności był przez 2 podzielny, to jest żeby liczba kończyła się zerem lub znakiem parzystym. Jakoż w saméj rzeczy 5638 : 2=2819.

50. *Liczba jest podzielną przez 5, jeżeli ostatnim znakiem jest zero lub 5.*

Objaśnienie. Dajmy że mamy liczbę 2365.

Rozłożywszy ją na 236 dziesiątków i 5 jedności, możemy ją tak napisać 10+10+10..... (236 razy)...+5.

A ponieważ każdy dziesiątek jest podzielny przez 5, więc ażeby dana liczba była podzielną przez 5, potrzeba żeby znak jedności był przez 5 podzielny, co tylko wtedy być może, jeżeli tym znakiem jest zero lub 5. Jakoż w saméj rzeczy 2365 : 5=473.

51. *Liczba jest podzielną przez 4, jeżeli jest zakończona dwoma zerami, albo jeżeli ostatnie jéj dwa znaki składają liczbę podzielną przez 4.*

Objaśnienie. Niech daną liczbą będzie 5724. Liczba ta jako złożona z 57 set i 24 jedności, może być tak napisana: 100+ +100.... (57 razy)...+24. Każde 100 jest podzielne przez 4 i daje w ilorazie 25, więc żeby dana liczba była podzielną przez 4, potrzeba żeby się kończyła dwoma zerami albo ostatnie jéj dwa znaki składały liczbę podzielną przez 4; a ponieważ ostatnie dwa znaki składają liczbę 24 podzielną przez 4, więc téż i liczba 5724 jest podzielną przez 4. Jakoż 5724 : 4=1431.

52. *Liczba jest podzielną przez 25, jeżeli kończy się dwoma zerami, albo jeżeli ostatnie jéj dwa znaki składają liczbę podzielną przez* 25. Np. 3200 : 25=128; 13475 : 25=539.

Dowodzenie takież jak podzielności przez 4.

53. *Liczba jest podzielną przez 8, jeżeli kończy się trzema zerami, albo jeżeli ostatnie jéj trzy znaki składają liczbę przez 8 podzielną.*

Objaśnienie. Niech będzie dana liczba 46184.

Rozłozywszy ją na 46 tysięcy i 184 jedności, możemy ją tak napisać: 1000+1000+.... (46 razy)....+184. Każdy 1000 jest podzielny przez 8 i daje w ilorazie 125 i ostatnia liczba 184 jest podzielną przez 8 i daje w ilorazie 23; więc ażeby dana liczba była przez 8 podzielną, potrzeba żeby była zakończona trzema zerami, albo żeby jéj trzy ostatnie znaki jak w danym przykładzie 184, składały liczbę przez 8 podzielną. Jakoż 46184 : 8=5773.

54. *Liczba jest podzielną przez 9, jeżeli ogół jéj znaków jest podzielnym przez 9.*

Objaśnienie. Daną liczbą niech będzie 1485.

Ogół jéj znaków 1+4+8+5=18 jest podzielnym przez 9; potrzeba okazać, że w takim razie i dana liczba jest przez dziewięć podzielną.

Dzieląc 10, 100, 1000, czyli jedność zakończoną ilukolwiek zerami przez 9, otrzymujemy na ostatnią resztę 1, dzieląc 20, 200, 2000, czyli 2 zakończone ilukolwiek zerami, przez 9 otrzymujemy na ostatnią resztę 2 i w ogólności dzieląc przez 9 liczbę pojedynczą, zakończoną zerami, otrzymujemy na ostatnią resztę też liczbę pojedynczą. Bo i w saméj rzeczy: liczbę np. 100 rozłożywszy na 99+1, to liczba 99 podzielna przez 9 a liczba 1 nie podzielna przez 9, więc sto dzielone przez 9, daje na ostatnią resztę 1; zatém liczba 400 jako złożona ze 100+100+100+100 czyli 99+99+99++99+1+1+1+1+ czyli 99+99+99+99+4, dzielona przez 9, daje na ostatnią resztę 4 i t. p.

Wróciwszy się do danéj liczby 1458, rozłóżmy ją na 1000++400+80+5, a następnie na 999+1+99+99+99+99+4+9++9+9+9+9+9+9+9+8+5, czyli umieściwszy liczby podzielne przez 9 obok siebie, a liczby niepodzielne przez 9 także obok siebie, zamiast danéj liczby otrzymamy ogół liczb 999+99+99+99+99+9+9+9+9+9+9+9+9+1+4+8+5; ogół ten jest wtedy podzielnym przez 9 jeżeli ogół liczb niepodzielnych, jest przez 9 podzielny; a ponieważ liczbami niepodzielnemi są to znaki, składające liczbę daną 1485, więc liczba wtedy jest podzialną przez 9, jeżeli ogół jéj znaków jest przez 9 podzielny. Jakoż 1485 : 9=165.

55. *Liczba jest podzielną przez 3, jeżeli ogół jéj znaków jest przez 3 podzielnym;* np. liczba 1815 jest podzielną przez 3, gdyż ogół jéj znaków 1+8+1+5=15 jest przez 3 podzielnym. Jakoż w saméj rzeczy 1815 : 3=605. Dowodzenie takież samo jak podzielności przez 9.

56. *Liczba zakończona zerem, jest podzielną przez* 10, *zakończona dwoma zerami, jest podzielną przez* 100 *i t. d. Nadto: ażeby liczbę zakończoną zerem, podzielić przez* 10, *potrzeba tylko zero od danéj liczby odmazać; ażeby liczbę zakończoną dwoma zerami podzielić przez* 100, *potrzeba dwa zera od danéj liczby odmazać i t. p.*

Objaśnienie. Bo ażeby liczbę pomnożyć przez 10 (Nr. 30, uwaga 4, litery A i B), potrzeba liczbę jedności, napisać na miejscu dziesiątków, liczbę dziesiątków na miejscu set i t. d., czyli do danéj liczby dopisać zero, więc każdą, liczbę zakończoną na zero, uważać można za iloczyn z liczby przed zerem napisanéj przez 10, zatém liczba zerem zakończona (iloczyn) podzielona przez czynnik 10, wydać powinna na iloraz czynnik drugi t. j. liczbę przed zerem napisaną i t. p.

57. *Jeżeli liczba jest podzielną przez drugą liczbę będącą iloczynem z dwóch lub więcéj liczb, wtedy jest podzielną przez każdy z czynników dzielnik składających.*

Objaśnienie. Liczba np. 273 podzielna przez 21, daje w ilorazie 13; potrzeba okazać, że taż liczba 273 jest zarazem podzielną przez 7 i 3, bo $21=7\times3$. Jakoż w saméj rzeczy: zamiast liczby 273 napiszemy $21+21+21+\ldots$ 13 razy (Nr. 28); każda z tych liczb jest podzielną przez 7 i przez 3, zatém i dana liczba 273 jest podzielną przez 7 i 3. I przeciwnie *jeżeli liczba jest podzielną przez dwie inne liczby, wtedy jest podzielną przez ich iloczyn*, to jest będąc podzielną przez 2 i 3, jest zarazem podzielną przez 2×3 t. j. przez 6; będąc podzielną przez 3 i 5 jest przez 3×5 t. j. przez 15 i t. d.

Przykłady dla wprawy.

1. Z liczb: 3706, 4215, 7230, 14078, które są podzielne przez 2, a które przez 5.

2. Z liczb: 1348, 7375, 810900, 10324, 516450, które są podzielne przez 4, a które przez 25.

3. Z liczb: 7125, 45136, 1302, 57303, 32769, które są podzielne przez 3, które przez 8, a które przez 9.

Podział liczb na pierwotne i pochodne.

58. Liczba nie dzieląca się bez reszty przez żadną inną liczbę prócz przez jedność i przez samą siebie, zowie się *pierwszą* (первое) albo *pierwotną;* liczba zaś dzieląca się bez reszty przez inną jakąbądź liczbę, zowie się *niepierwszą* albo *pochodną*.

I tak: liczby 1, 2, 3, 5 7, i t. d. są pierwotnemi; a liczby 4, 6, 8, 9, 12, i t. d. są pochodnemi.

Ułożenie tablicy liczb pierwotnych nie przedstawia żadnych trudności. I tak: dajmy że chcemy mieć wszystkie pierwotne liczby do 100. W tym celu, wypisujemy porządkiem właściwym wszystkie liczby nieparzyste do 100, zachowując między niemi tylko jednę liczbę parzystą 2, jako liczbę pierwotną, a otrzymamy szereg liczb 1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, i t. d. niepodzielnych przez 2 oprócz 2. Ażeby w tym szeregu wyrzucić wszystkie liczby podzielne przez 3, wykreślamy z niego 3-cią liczbę od 3 t. j. 9, potém 3-cią liczbę od 9 t. j. 15, 3-cią liczbę od 15 t. j. 21 i t. d. Dla wyrzucenia wszystkich liczb podzielnych przez 5, wykreślamy 5-tą liczbę od 5 t. j. 15, potem 5-tą liczbę od 15 t. j. 25, 5-tą od 25 t. j. 35 i t. d.

Podobnież wyrzucić należy liczby podzielne przez 7, 11, 13, i t. d. a pozostałe nie wykreślone liczby 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, przedstawią szereg liczb pierwotnych do 100.

59. Daną liczbą niech będzie 461; chcemy się przekonać jaką jest ta liczba, pierwotną czy pochodną.

Widzimy że dana liczba nie jest podzielną przez 2, 3, 5 (Nr. 49, 54, 50) dzielimy ją więc kolejno przez następujące liczby pierwotne 7, 11, 13, 17, 19, 23 i przekonywamy się, że przez żadną z nich nie jest podzielną liczba 461. Dokąd jednakże należy odbywać to działanie? Zdawałoby się że kolejno przez wszystkie liczby pierwotne mniejsze od danéj liczby 461; ale zastanowiwszy się głębiéj nad rzeczą, przekonamy się, że ostatnim dzielnikiem będzie liczba 23, bo przez nią podzielona liczba 461 daje na iloraz liczbę 20 mniejszą od dzielnika 23, a to jest dostateczną skazówką, że liczba 461 nie będąc podzielną przez żadną liczbę włącznie do 23, nie jest także podzielną przez liczbę od 23 większą. I rzeczywiście: ponieważ liczba 461 nie jest podzielną przez żadną liczbę pierwotną włącznie do 23, więc nie jest téż podzielną i przez żadną pochodną liczbę mniejszą od 23 (Nr. 57); pozostaje tylko do okazania, że 461 nie jest podzielne przez żadną liczbę większą od 23. Przypuściwszy bowiem, że 461 jest podzielne przez liczbę pierwotną większą od 23 np. przez 29; w takim razie otrzymalibyśmy iloraz mniejszy od 23, bez reszty, przez który to iloraz byłaby podzielną liczba 461, a co być nie może, bo powyżéj okazaliśmy, że 461 nie jest podzielne przez liczbę mniejszą od 23; przypuszczenie więc byłoby niedorzeczne, zatém liczba 461 nie będąc także podzielną przez żadną liczbę większą od 23, jest liczbą pierwotną.

60. Liczbę 252 rozłożyć na czynniki pierwotne.

```
252 | 2
    | 126 | 2
    |     | 63 | 3
    |     |    | 21 | 3
    |     |    |    | 7.
```

Zatem $252 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7$.

Objaśnienie. Opierając się na własnościach podzielności liczb (Nr. 48), liczbę 252 dzielimy przez 2 i otrzymujemy na iloraz 126, zatém $252 = 2 \times 126$ (Nr. 40)... Jeden z czynników t. j. 2 jest liczbą pierwotną, lecz drugie 126 jest liczbą pochodną; dzielimy więc 126 przez 2 i otrzymujemy w ilorazie 63, zatém $126 = 2 \times 63$ a $252 = 2 \times 2 \times 63$.

Z tych trzech czynników czynnik 63 jest liczbą pochodną dającą się dzielić przez 3, wykonawszy dzielenie otrzymujemy na iloraz 21, więc $63 = 3 \times 21$, a $252 = 2 \times 2 \times 3 \times 21$. Z tych czterech czynników, czynnik 21 daje się podzielić przez 3, odbywamy więc dzielenie i otrzymujemy na iloraz 7, liczbę już pierwotną, zatém $21 = 3 \times 7$, a $252 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7$ wszystkie czynniki pierwotne danéj liczby.

61. Liczbę 13650 rozłożyć na czynniki pierwotne.

$$\begin{array}{r|l} 13650 & 2 \\ \hline 6825 & 3 \\ \hline 2275 & 5 \\ \hline 455 & 5 \\ \hline 91 & 7 \\ \hline 13. & \end{array}$$

Zatém $13650 = 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 13$.

Objaśnienie. Liczba 13650 jest podzielną przez 2 i daje w ilorazie 6825, zatém $13650 = 2 \times 6825$.

Liczba 6825 nie jest podzielną przez 2, lecz jest podzielną przez 3; wykonawszy dzielenie otrzymujemy na iloraz 2275, zatém $6825 = 3 \times 2275$ a liczba dana $13650 = 2 \times 3 \times 2275$. Liczba 2275 jest podzielną przez 5, uskuteczniamy więc dzielenie i otrzymujemy w ilorazie 455, zatém $2275 = 5 \times 455$ a $13650 = 2 \times 3 \times 5 \times 455$. Liczbę 455 dzielimy jeszcze przez 5 i otrzymujemy w ilorazie 91, zatém $455 = 5 \times 91$ a $13650 = 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 91$. Liczba 91 już nie jest podzielną przez 5, dzielimy więc ją przez następujące liczby, pierwotne i widzimy że jest podzielną przez 7; wykonawszy dzielenie otrzymujemy w ilorazie 13 liczbę już pierwotną, zatém $91 = 7 \times 13$ a $13650 = 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 13$.

62. Liczbę 1941 rozłożyć na czynniki pierwotne.

$$\begin{array}{r|l} 1941 & 3 \\ \cline{2-2} & 647 \end{array}$$

Zatém $1941 = 3 \times 647$.

Objaśnienie. Liczba 1941 nie jest podzielną przez 2, lecz jest podzielną przez 3, wykonywamy dzielenie i otrzymujemy w ilorazie 647, zatém $1941 = 3 \times 647$. Dzieląc 647 kolejno przez inne liczby pierwotne, przekonywamy się że ona sama jest liczbą pierwotną (Nr. 59); z tego więc wnosimy że dana liczba 1941 składa się z dwóch tylko czynników pierwotnych.

63. Rozkładanie mniejszych liczb na czynniki pierwotne, może być z łatwością wykonywane przez uczniów na pamięć, opierając się na iloczynach liczb jednoznakowych, np. 20 jest iloczynem z 4×5 a 4 iloczynem 2×2 zatém $20 = 2 \times 2 \times 5$.

Dajmy że mamy liczbę 120; widzimy że ona jest iloczynem z 12×10, a że $12 = 2 \times 2 \times 3$ a $10 = 2 \times 5$, zatém $120 = 2 \times 2 \times 3 \times 2 \times 5$, albo zmieniwszy porządek czynników, będzie $120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$ i t. d.

Przykłady dla wprawy.

1) Z liczb: 107, 677, 527, 979, które są pierwotne, a które pochodne.

2) Liczby: 27720, 1274, 2085, 55055, 8550 rozłożyć na czynniki pierwotne.

3) Liczby: 1925, 12900, 15015, 51597 rozłożyć na czynniki pierwotne.

Największy wspólny dzielnik.

64. Każda liczba jest podzielną przez samą siebie, zatém rozłożywszy daną liczbę na czynniki pierwotne, (Nr. 60) każdy z czynników będzie dzielnikiem zupełnym danéj liczby (Nr. 57). Jeżeli więc z dwóch liczb danych, każdą rozłożymy na czynniki pierwotne, wtedy te z czynników, które do obu liczb wchodzą, zowią się *wspólnemi dzielnikami* (общій дѣлитель), a iloczyn z nich *największym wspólnym dzielnikiem* (наибольшій общій дѣлитель).

65. Niech dane będą dwie liczby 924 i 1638 dla których znaleść chcemy największy wspólny dzielnik. W tym celu, rozłożywszy obie liczby na czynniki pierwotne, (Nr. 60) otrzymamy:

$924 = 2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 11$; $1638 = 2 \times 3 \times 3 \times 7 \times 13$.

Czynniki pierwszéj liczby są dzielnikami dla liczby 924; czynniki drugiéj liczby są dzielnikami dla liczby 1638 (Nr. 64), zatém czynniki 2, 3, 7, które do obu liczb wchodzą są również dzielnikami zupełnemi dla jednéj jak i drugiéj liczby, słusznie więc zowiemy je wspólnemi dzielnikami liczb 924 i 1638. Kiedy zaś liczby 924 i 1638 są podzielne przez liczby 2, 3, 7, więc są zarazem podzielne przez ich iloczyn $\underline{2 \times 3 \times 7}$ t. j. przez 42 (Nr. 57), który to iloczyn jest największym wspólnym dzielnikiem dla liczb danych 924 i 1638. Jakoż w istocie, podzieliwszy 924 i 1638 przez 42, otrzymane na iloraz liczby 22 i 39 nie mają już żadnego wspólnego dzielnika i zowią się pierwszemi względem siebie.

66. Znaleść największy wspólny dzielnik dla liczb: 234, 2925, 18018.

$234 = 2 \times 3 \times 3 \times 13$	$234 : 117 = 2$
$2925 = 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 13$	$2925 : 117 = 25.$
$18018 = 2 \times 3 \times 3 \times 7 \times 11 \times 13$	$18018 : 117 = 154.$

$3 \times 3 \times 13 = 117$ największy wspólny dzielnik.

Objaśnienie. Rozłożywszy dane liczby na czynniki pierwotne, widzimy że wspólnemi ich dzielnikami są liczby 3 i 13. A ponieważ czynnik 3 w każdéj liczbie dwa razy się powtarza, więc téż i największy wspólny dzielnik powinien zawierać w sobie liczbę 3 dwa razy wziętą na czynnik. Jakoż $3 \times 3 \times 13 = 117$ jest największym wspólnym dzielnikiem, bo dane liczby podzielone przez 117 dają w ilorazach liczby 2, 25, 154 nie mające już żadnego wspólnego dzielnika.

67. Podamy tu jeszcze sposób wyszukiwania największego wspólnego dzielnika dla dwóch liczb sposobem powszechnie używanym.

Niech będą dane dwie liczby 1482 i 513. Największy ich wspólny dzielnik nie może być większym od liczby mniejszéj z dwóch danych, bo nie podzieliłby mniejszéj liczby 513. Mniejsza liczba dzieli samą siebie bez reszty: więc, jeżeli dzieli także bez reszty drugą liczbę 1482, wtedy będzie nie tylko wspólnym lecz największym dzielnikiem.

Podzieliwszy 1482 przez 513:

$$\begin{array}{r|l} 1482 & 513 \\ \underline{1026} & 2 \\ 456 & \end{array}$$

otrzymujemy w ilorazie 2, a w reszcie 456. Zatém liczba 513 nie jest największym dzielnikiem, bo nie dzieli bez reszty liczby 1482; największy więc wspólny dzielnik musi być mniejszym od 513.

Ponieważ iloczyn z dzielnika przez iloraz, powiększony pozostałą resztą, wydaje dzielną (Nr. 40), więc $1482=513\times2+456$. I tak, zamiast liczb 1482 i 513, możemy wziąść pod rozwagę liczby $513\times2+456$ i 513.

Dzielnik dzielący bez reszty liczbę 513, podzieli także bez reszty liczbę 513, powtórzoną 2 razy: lecz ażeby podzielił bez reszty całą liczbę $513\times2+456$, potrzeba niezbędnie żeby dzielił 456 bez reszty, dzielnik więc ten nie może być większym od 456. Liczba 456 dzieli samą siebie bez reszty: więc jeżeli dzieli bez reszty obie liczby $513\times2+456$ i 513, i będzie największym wspólnym dzielnikiem.

Podzieliwszy 513 przez 456:

$$\begin{array}{r|l} 513 & 456 \\ \underline{456} & 1 \\ 57 & \end{array}$$

otrzymujemy w ilorazie 1, a w reszcie 57. I tak, liczba 456 nie jest największym dzielnikiem; bo nie dzieląc bez reszty liczby 513, nie podzieli téż i całéj liczby $513\times2+456$; największy więc wspólny dzielnik musi być mniejszym od 456.

A że dzielna $513=456\times1+57=456+57$ (Nr. 40) więc dane liczby 1482 i 513 czyli liczby $513\times2+456$ i 513 mogą być wyrażone liczbami $456+57+456+57+456$ i $456+57$. Tu podobnież jak poprzednio dowodzę, że największy dzielnik dla liczb danych nie może być większym od 57. Jeżeli więc liczba 57, która dzieli samą siebie bez reszty, podzieli także bez reszty liczbę 456, to podzieli zarazem liczby $456+57+456+57+456$ i $456+57$ czyli liczby 1482 i 513 i będzie największym ich wspólnym dzielnikiem.

Jakoż wykonawszy dzielenie:

$$\begin{array}{r|l} 456 & 57 \\ \underline{456} & 8 \\ 0 & \end{array}$$

Widzimy, że 57 dzieli liczbę 456 bez reszty, jest więc największym wspólnym dzielnikiem liczb danych.

Z całego tego sposobu postępowania taką możemy wyprowadzić ogólną zasadę do wyszukiwania największego wspólnego dzielnika dla danych dwóch liczb:

Większą liczbę z dwóch danych, dzielmy przez liczbę mniejszą i jeżeli dzielenie wykona się bez reszty, to liczba mniejsza będzie szukanym największym wspólnym dzielnikiem. Jeżeli zaś z dzielenia otrzymamy resztę, wtedy liczbę mniejszą, dzielmy przez tę pierwszą resztę i jeżeli dzielenie wykona się bez reszty, reszta pierwsza będzie największym dzielnikiem. Jeżeli zaś z tego powtórnego dzielenia otrzymamy resztę, natenczas działanie daléj się prowadzi, dzieląc resztę pierwszą przez resztę drugą; i podobnież znowu jeżeli dzielenie wykona się całkowicie, reszta druga będzie szukanym największym dzielnikiem. Jeżeli zaś z dzielenia otrzymamy resztę, postępujemy jak wyżéj dotąd, dopóki nie otrzymamy takiéj liczby na resztę, któraby w zupełności podzieliła resztę poprzedzającą, to wtedy ta reszta będzie największym wspólnym dzielnikiem dla liczb danych.

Oto wzór całego działania:

	1482	2 pierwszy iloraz.		
	1026	513	1 drugi iloraz.	
Pier. reszta	456	456	456	8 trzeci iloraz.
Druga reszta		57	456	57 najwięk. wspólny dzielnik.
Ostatnia reszta			0	

Rzecz widoczna, że jeżeli ostatnim dzielnikiem będzie liczba 1, to i największym wspólnym dzielnikiem będzie jedność, czyli dane liczby nie będą wtedy miały żadnego wspólnego dzielnika i zwać się będą pierwszemi względem siebie.

Przykłady dla wprawy.

Znaleść największy wspólny dzielnik dla liczb:

1) 143 i 637; największym wspólnym dzielnikiem jest 13.

2) 125, 675 i 1125; największym wspólnym dzielnikiem jest 25.

3) 480, 2040 i 4620; największym wspólnym dzielnikiem jest 60.

4) 126, 434, 728 i 3710; największym wspólnym dzielnikiem jest 14.

5) 1386 i 5698; największym wspólnym dzielnikiem jest 154.

6) 65038 i 167462; największym wspólnym dzielnikiem jest 62.

7) 8364 i 40180; największym wspólnym dzielnikiem jest 164.

8) 211758 i 366096; największym wspólnym dzielnikiem jest 174.

Najmniejsza wielokrotna.

68. *Jeżeli dane liczby nie mają wspólnych dzielników,* (Nr. 64) *wtedy iloczyn z nich jest najmniejszą dla nich liczbą wielokrotną* (Nr. 46). I tak: dla liczb 2, 5, 7, najmniejszą liczbą wielokrotną (наименьшее кратное число) jest liczba 70 będąca iloczynem z $2\times5\times7$; dla liczb 14, 15, 11, najmniejszą wielokrotną jest liczba 2310 będąca iloczynem z $14\times15\times11$ i t. d.

Ażeby znaleść najmniejszą wielokrotną dla liczb mających wspólne dzielniki, rozkładamy je na czynniki pierwotne, z pomiędzy których wybieramy po razu te czynniki, które się po razu tylko zawierają w danych liczbach, a inne po tyle razy, ile razy najwięcéj zawierają się w jednéj z liczb danych; iloczyn utworzony z tak wybranych czynników będzie żądaną najmniejszą wielokrotną. Jakoż w saméj rzeczy: niech będą dane liczby 15, 180, 36 i 120.

$15=3\times5$

$180=2\times2\times3\times3\times5$

$36=2\times2\times3\times3$

$120=2\times2\times2\times3\times5$

$2\times2\times2\times3\times3\times5=360$ najmniejsza wielokrotna.

$360 : 15=24$; $360 : 180=2$; $360 : 36=10$; $360 : 120=3$.

Objaśnienie. Rozłożywszy dane liczby na czynniki pierwotne, widzimy że temi czynnikami są liczby 2, 3 i 5, z których składać się także powinna najmniejsza wielokrotna; lecz ażeby ta najmniejsza wielokrotna zadość czyniła warunkom, potrzeba żeby zawierała w sobie wszystkie czynniki każdéj po szczególe z liczb danych, co wtedy nastąpić może jeżeli w niéj liczba 2 trzy razy, liczba 3 dwa razy, a liczba 5 raz wziętą będzie za czynnik: bo gdyby jedna z liczb pierwotnych 2, 3, 5, mniéj razy nad liczbę podaną była wziętą za czynnik, natenczas iloczyn tworzący najmniejszą wielokrotną, nie byłby wielokrotnym względem wszystkich liczb danych.

Przykłady dla wprawy.

Znaleść najmniejszą wielokrotną dla liczb:

1) 12 i 30; najmniejszą wielokrotną jest 60.
2) 3, 21 i 28; najmniejszą wielokrotną jest 84.
3) 5, 15 i 24; najmniejszą wielokrotną jest 120.
4) 6, 8, 10, 15 i 21; najmniejszą wielokrotną jest 840.
5) 5, 9 i 25; najmniejszą wielokrotną jest 225.
6) 8, 12, 32 i 96; najmniejszą wielokrotną jest 96.
7) 6, 9, 15, 20 i 24; najmniejszą wielokrotną jest 360.
8) 24, 39 i 104; najmniejszą wielokrotną jest 312.
9) 5, 18, 45 i 180; najmniejszą wielokrotną jest 180.
10) 3, 7, 42 i 75; najmniejszą wielokrotną jest 1050.
11) 20, 65 i 96; najmniejszą wielokrotną jest 6240.
12) 14, 35 i 100; najmniejszą wielokrotną jest 700.
13) 9, 15, 306 i 408; najmniejszą wielokrotną jest 6120.

Własności liczb w mnożeniu i dzieleniu.

69. *Jeżeli jeden z dwóch czynników pomnożymy przez pewną liczbę, to iloczyn powiększy się tyle razy, ile liczba mnożąca ów czynnik zawiera w sobie jedności; i przeciwnie powiększając iloczyn, powiększamy tyleż razy jeden z jego czynników np.*

$$18 \times 5 = 90$$
$$(18.\ 3) \times 5 = 54 \times 5 = 270$$
$$90 \times 3 = 270.$$

Objaśnienie. Bo 18 pomnożyć przez 5 to tož samo co 18 wypisać 5 razy i liczby te zupełnie sobie równe do siebie dodać, t. j. $18+18+18+18+18=90$. Gdybyśmy zaś w miejsce wypisywania 18-stu, wypisali tyleż razy liczbę 3 razy większą od 18, jaką jest liczba 54, ogół tych liczb wydać też powinien liczbę 3 razy większą od liczby 90 poprzednio otrzymanéj. Jakož $18 \times 3 + 18$

$\times 3+18\times 3+18\times 3+18\times 3=54+54+54+54+54=270=90\times 3$.

Z tego wnosimy: *ażeby iloczyn dany w czynnikach powiększyć, dosyć jest tyleż razy powiększyć jeden z jego czynników.*

70. *Jeżeli jeden czynnik pomnożymy przez pewną liczbę, a drugi czynnik przez inną liczbę, wtedy iloczyn powiększy się tyle razy, ile zawiera w sobie jedności iloczyn z liczb mnożących dane czynniki. Np.*

$13\times 7=91$

$(13.\ 2)\times(7.\ 3)=26\times 21=546.$

$91\times 6=546.$

Objaśnienie. Z pomnożenia 13×7 otrzymujemy na iloczyn 91. Zamiast pierwszego czynnika 13 mamy 13×2, a zamiast drugiego czynnika 7, mamy 7×3, czyli zamiast mnożenia 13 przez 7, mamy mnożyć iloczyn 13×2 przez iloczyn 7×3; wskazując więc tylko działania danych iloczynów w czynnikach, otrzymujemy na iloczyn $13\times 2\times 7\times 3$ czyli, zmieniwszy miejsce czynników (N. 29), otrzymamy $13\times 7\times 2\times 3=13\times 7\times 6=91\times 6$ nowy iloczyn widocznie 6 razy większy od iloczynu pierwotnego.

71. *Jeżeli jeden z dwóch czynników podzielimy przez pewną liczbę, wtedy iloczyn pomniejszy się tyle razy, ile liczba dzieląca ów czynnik zawiera w sobie jedności; i przeciwnie: zmniejszając iloczyn, zmniejszamy tyleż razy jeden z jego czynników. Np.*

$20\times 3=60.$

$(20:5)\times 3=4\times 3=12.$

$60:5=12.$

Objaśnienie. Bo 20×3 to toż samo co $20+20+20$; chcąc zaś żeby ogół ztąd otrzymany był 5 razy mniejszym, potrzeba tyleż razy wypisać liczbę 5 razy mniejszą od 20, t. j. $4+4+4=4\times 3$ iloczyn 5 razy mniejszy od iloczynu z 20×3.

Z tego wnosimy: *ażeby iloczyn dany w czynnikach podzielić przez liczbę która jest cząstką wielokrotną* (Nr. 46) *jednego z nich, nie potrzeba szukać iloczynu, lecz dosyć jest ów czynik wielokrotny podzielić przez tę liczbę, zostawiając inne czynniki niezmienne, np.*

1) $18\times 5:6=3\times 5=15.$

$90:6=15$

2) $7\times 15\times 2:5=7\times 3\times 2=24.$

$210:5=42$

72. *Jeżeli dzielną pomnożymy przez pewną liczbę, nie zmieniając* *dzielnika, wtedy iloraz powiększy się tyle razy, ile zawiera jedności liczba mnożąca dzielną.* Bo i w saméj rzeczy: dzielna jest iloczynem z dzielnika przez iloraz (N. 40), skoro więc iloczyn powiększa się zatém jeden z danych czynników tyleż razy powiększyć się powinien (N. 69), ponieważ jeden z czynników t. j. iloraz powiększy się tyle razy, ile razy powiększony jest iloczyn t. j. dzielna. Np.

$$40:5=8.$$
$$(40\times3):5=120:5=24$$
$$8\times3=24.$$

73. *Jeżeli dzielną podzielimy przez pewną liczbę nie zmieniając dzielnika, wtedy iloraz pomniejszy się tyle razy, ile zawiera jedności liczba dzieląca dzielną.* Jakoż dzielna jest iloczynem z dzielnika przez iloraz (N. 40), skoro więc iloczyn pomniejsza się, zatém jeden z danych czynników tyleż razy pomniejszyć się powinien: (N. 71), a ponieważ jeden z czynników t. j. dzielnik zostaje ten sam, zatém drugi czynnik t. j. iloraz pomniejszy się tyle razy, ile razy pomniejszony jest iloczyn t. j. dzielna. Np.

$$120:12=10.$$
$$(120:5):12=24:12=2.$$
$$10:5=2.$$

74. *Jeżeli dzielnik pomnożymy przez pewną liczbę, zostawiając tę samą dzielną, wtedy iloraz pomniejszy się tyle razy, ile zawiera jedności liczba mnożąca dzielnik.* Jakoż, dzielna jest iloczynem z dzielnika przez iloraz (N. 40), skoro więc wartość iloczynu t. j. dzielna nie zmienia się, a jeden z czynników t. j. dzielnik zostaje powiększony, zatém drugi czynnik t. j. iloraz tyleż razy pomniejszyć się musi. Np.

$$72:9=8.$$
$$72:(9\times2)=72:18=4.$$
$$8:2=4.$$

75. *Jeżeli dzielnik podzielimy przez pewną liczbę, zostawiając tę samą dzielną, wtedy iloraz powiększy się tyle razy, ile zawiera jedności liczba dzieląca dzielnik.* Jakoż dzielna jest iloczynem z dzielnika przez iloraz (N. 40); skoro więc wartość iloczynu t. j. dzielna nie zmienia się, a jeden ż czynników t. j. dzielnik zostaje pomniejszony, zatém drugi czynnik t. j. iloraz tyle razy powiększyć się musi. Np.

$$250:50=5$$
$$250:(50:2)=250:25=10.$$
$$5\times 2=10.$$

76. *Jeżeli dzielną i dzielnik pomnożymy przez jednakową liczbę, iloraz nie zmieni się.* Bo dzielna jest iloczynem z dzielnika przez iloraz; powiekszając zaś iloczyn, powiększamy tyleż razy jeden z jego czynników (Nr. 69); skoro więc iloczyn t. j. dzielną, i jeden z czynników t. j. dzielnik mnożymy przez tę samą liczbę, zatém drugi czynnik t. j. iloraz pozostaje niezmienny. Np.

$$315:15=21.$$
$$(315\times 3):(15\times 3)=945:45=21,$$

77. *Jeżeli dzielną i dzielnik podzielimy przez jednakową liczbę, iloraz nie zmieni się.* Bo dzielna jest iloczynem z dzielnika przez iloraz; zmniejszając zaś iloczyn, zmniejszamy tyleż razy jeden z jego czynników (Nr. 71); skoro więc iloczyn t. j. dzielną i jeden z czynników t. j. dzielnik dzielimy przez jednakową liczbę, drugi zatém czynnik t. j. iloraz pozostaje ten sam. Np.

$$180:60=3$$
$$(180:5):(60:5)=36:12=3.$$

Przykłady dla wprawy.

1. Jaka zajdzie zmiana w iloczynie dwóch liczb, jeżeli jednę z nich powiększymy 53235 razy, a drugą zmniejszymy 45 razy? *(Odp.* Iloczyn powiększy się 1183 razy).

2. Jaka zajdzie zmiana w iloczynie dwóch liczb, jeżeli jednę powiększymy 749 razy, a drugą 5067 razy? *(Odp.* Iloczyn powiększy się 3795183 razy.)

3. Jaka zajdzie zmiana w iloczynie dwóch liczb, jeżeli jednę powiększymy 36 razy, a drugą zmniejszymy 50724 razy? *(Odp.* Iloczyn zmniejszy się 1409 razy).

4. Jaka zajdzie zmiana w ilorazie, jeżeli dzielną powiększymy 4914 razy a dzielnik 63 razy? (*Odp.* Iloraz powiększy się 78 razy).

5. Jaka zajdzie zmiana w ilorazie, jeżeli dzielną powiększemy 1739 razy, a dzielnik zmniejszymy 758 razy? *Odp.* Iloraz powiększy się 1318162 razy.)

6. Jaka zmiana zajdzie w ilorazie jeżeli dzielną zmniejszymy

973 razy, a dzielnik powiększymy 5674 razy? (*Odp.* Iloraz zmniejszy się 5520802 razy).

7. Jaka zmiana zajdzie w ilorazie, jeżeli dzielną zmniejszymy 74564 razy, a dzielnik 28 razy? (*Odp.* Iloraz zmniejszy się 2663 razy).

Ważniejsze skrócenia w mnożeniu i dzieleniu niektórych liczb całkowitych.

78. Podane tu skrócenia w mnożeniu polegają na rozbiorze jednego z czynników na części wielokrotne (Nr. 46) względem 10, 100, 1000 i t. d. Przedewszystkiem jednakże należy sobie przypomnieć (Nr. 30 uwagi, 1, 2, 3 i 4): że, chcąc jaką bądź liczbę pomnożyć przez 10, 100, 1000 i t. d. czyli przez jedność zakończoną zerami, potrzeba tylko do danéj liczby dopisać tyle zer, ile ich jest napisanych po jedności.

79. Liczba 5 jest połową dziesięciu: więc, *ażeby daną liczbę pomnożyć przez 5, mnożymy ją przez 10, (czyli dopisujemy do niéj z prawéj strony zero), i otrzymanego iloczynu bierzemy połowę.* Bo liczba 10 jest dwa razy większą od 5; więc mnożąc daną liczbę przez 10, otrzymujemy na iloczyn liczbę dwa razy większą od iloczynu z téj saméj liczby przez 5, (Nr. 69) zatém wziąwszy pierwszego iloczynu połowę, otrzymamy iloczyn drugi.

Przykład $7863 \times 5.$

$(7863 \times 10 \ldots\ldots$ 78630

$(78630:2) \ldots\ldots$ 39315 iloczyn z $7863 \times 5.$

80. Liczba 25 jest czwartą częścią stu: więc, *ażeby daną liczbę pomnożyć przez 25 mnożymy ją przez 100 (czyli dopisujemy do niéj z prawéj strony dwa zer), i tego iloczynu bierzemy część czwartą.* Bo liczba 100 jest cztery razy większą od 25; więc mnożąc daną jaką bądź liczbę przez 100, otrzymujemy w iloczynie, liczbę 4 razy większą od iloczynu z téj saméj liczby przez 25 (Nr. 69), zatém biorąc pierwszego iloczynu część czwartą, otrzymujemy iloczyn drugi.

Przykład. $3586 \times 25.$

(3586×100)....358600.

(358600:4)....89650 iloczyn z 3586×25.

81. Liczba 50 jest połową stu: więc, *ażeby daną liczbę pomnożyć przez 50, mnożymy ją przez 100 i tego iloczynu bierzemy połowę.* Bo liczba sto jest dwa razy większą od 50; więc mnożąc daną liczbę przez sto, otrzymujemy w iloczynie liczbę dwa razy większą od iloczynu téj saméj liczby przez 50 (Nr. 69), zatém biorąc pierwszego iloczynu połowę, otrzymujemy iloczyn drugi.

Przykład. 4537×50

(4537×100).... 453700

(453700 : 2).... 226850 iloczyn z 4537×50.

82. Liczba 125 jest ósmą częścią tysiąca: więc, *ażeby daną liczbę, pomnożyć przez 125, mnożymy ją przez 1000 i tego iloczynu bierezmy część ósmą.* Bo liczba 1000 jest 8 razy większą od 125; więc mnożąc daną liczbę przez 1000, otrzymujemy w iloczynie liczbę 8 razy większą od iloczynu téj saméj liczby przez 125 (Nr. 69), zatém biorąc pierwszego iloczynu część ósmą, otrzymujemy iloczyn drugi.

Przykład. 5873×125

(5873×1000).... 5873000

(5873000 : 8).... 734125 iloczyn z 5873×125.

83. Liczba 15 daje się rozebrać na 10+5. Pomnożyć więc daną jakąbądź liczbę przez 15, jestto pomnożyć ją przez 10 a potém przez 5 i oba te iloczyny do siebie dodać (Nr. 34). A ponieważ mnożyć liczbę przez 10, jestto dopisać do niéj z prawéj strony zero, a mnożyć przez 5, jestto wziąść połowę iloczynu przez 10, więc, *ażeby jakąbądź liczbę pomnożyć przez 15, dopisujemy do niéj z prawéj strony zero, liczby tak otrzymanéj bierzemy połowę, którą dodajemy do liczby poprzedzającéj, a ogół będzie iloczynem żądanym.*

Przykład. 1597×15

(1579×10 15790

(15790 : 2 7895

Ogół 23685 iloczyn z 1579×15.

84. Następujące skrócenia, przy odbywaniu działania w mnożeniu, wskazujemy już tylko w przykładach, albowiem sposoby ich tłumaczenia opierają się na tychże zasadach, które posłużyły do objaśnienia skróceń umieszczonych w numerach poprzedzających.

1) Liczba 35 daje się rozebrać na 25+10.

Przykład.	6359×35
(6359×100)....	635900
(635900 : 4).....	158975
(6359×10)....	63590
Ogół	222565 iloczyn z 6259×35.

2) Liczba 45 daje się rozebrać na 50—5.

Przykład.	32579×45
(32579×100	3257900
(3257900 : 2)....	1628950
(1628950 : 10)....	162895
Różnica	1466055 iloczyn z 32579×45

3) Liczba 55 daje się zozebrać na 50+5.

Przykład.	17136×55
(17136×100)....	1713600
(1713600 : 2)....	856800
(856800 : 10)....	85680
Ogół	942480 iloczyn z 17136×55

4) Liczba 75 daje się rozebrać na 50+25.

Przykład.	25713×75
(25713×100)....	2571300
(2571300 : 2)....	1285650
(1285650 : 2)....	642825
Ogół	1928475 iloczyn z 25713×75

5) Liczba 95 daje się rozebrać na 100—5.

Przykład.	72513×95.
(72513×100)...	7251300
(725130 : 2)....	362565
Różnica	6888735 iloczyn z 72513×95

6) Liczba 18 daje się rozebrać na 20—2.

Liczba 20 jest piątą częścią stu, a 2 jest dziesiątą częścią 20.

Przykład.	1457×18
(1457×100)	145700
$(143700 : 5)$	29140
$(29140 : 10)$	2914
Różnica	26226 iloczyn z 1457×18.

7) Liczba 115 daje się rozebrać na $100+10+5$.

Przykład.	$156327 \times 15.$
(156327×100)	15632700
(156327×10)	1563270
$(1563270 : 2)$	781635
Ogół	17977605 ilo. z 156327×115.

8) Liczba 135 daje się rozebrać $100+25+10$.

Przykład.	37587×135
(37587×100)	3758700
3758700 : 4)	939675
(37587×10)	365870
Ogół	5074245 iloczyn z 37587×135.

9) Liczba 145 daje się rozebrać na $100+50-5$.

Przykład.	$25343 \times 145.$
(25343×100)	2534300
$(2534300 : 2)$	1262150
Ogół	3796450
$(1262150 : 10)$	126215
Różnica	3670235 iloczyn z 25343×145.

10) Liczba 118 daje się rozebrać na $100+20-2$.

Przykład.	$21435 \times 118.$
(21435×100)	2143500
$(2143500 : 5)$	428700
Ogół	2572200
$(428700 : 10)$	42870
Różnica	2529330 iloczyn z 21435×118.

11) Liczba 155 daje się rozebrać na $100+50+5$.

Przykład. 73124×155.

(73124×100)	7312400
(7312400 : 2)	3656200
(3656200 : 10)	365620

Ogół 11334220 iloczyn z 73124×155.

12) Liczbą 175 daje się rozebrać na 100+50+25

Przykład. 31453×175

(31453×100)	3145300
(3145300 : 2)	1572650
(1572650 : 2)	786325

Ogół 5504275 iloczyn z 31453×185.

13 Liczba 180 daje się rozebrać na 100+50+25+5.

Przykład. 52319×180.

(52319×100)	5231900
(5231900 : 2)	2615950
(2615950 : 2)	1307975
(2615550 : 10)	261595

Ogół 9417420 iloczyn z 52319×180.

14) Liczba 185 daje się rozebrać na 100+50+25+10.

Przykład. 4359×185.

(4359×100)	435900
(435900 : 2)	217950
(217950 : 2)	108975
(4359×10)	43590

Ogół 806415 iloczyn z 4359×185

15) Liczba 585 daje rozebrać na 500+50+25+10.

Przykład. 29136×585.

29136×1000)	29136000
(29136000 : 2)	14568000
(14568000 : 10)	1456800
(1456800 : 2)	728400
(29136×10)	291360

Ogół 17044560 iloczyn z 29136×585.

16) Liczba 584 daje się rozebrać na 500+50+25+10—1.

Przykład.	93547×584.
(93547×1000)....	93547000
$(93547000 : 2)$....	46773500
$(46773500 : 10)$...	4677350
$(4677350 : 2)$....	2338675
(94547×10)....	935470
Ogół	54274995
(93547×1)........	93547
Różnica	54631448 iloczyn z 93547×584.

Sądzę że podane przykłady są dostateczne do dania uczniom wyobrażenia, jaką drogą należy postępować, kiedy jeden z czynników daje się rozebrać na liczby wielokrotne względem 10, 100, 1000 i t. d.

85. *Ażeby liczbę podzielić przez* 10, 100, 1000 *i t. d. czyli przez jedność zakończoną zerami, potrzeba tylko z prawéj strony téj liczby odciąć przecinkiem tyle znaków ile jest zer umieszczonych po jedności: wtedy liczba złożona ze znaków położonych z lewéj strony przecinka będzie ilorazem, a liczba, złożona ze znaków położonych z prawéj strony przecinka, będzie resztą.*

Dajmy że mamy liczbę 43578 do podzielenia przez 100. Daną liczbę jako złożoną z 435 set i 78 jedności, możemy tak napisać: 100+100+... (435 razy)...+78. Każde 100 jest podzielne przez 100 i daje w ilorazie 1, zatém 435 set podzielone przez 100, da w ilorazie 435; pozostaje więc jeszcze do podzielenia liczba 78, która nie jest podzielną przez 100. Zatém liczba 43578 podzielona przez 100, daje na iloraz liczbę 435, a na resztę 78.

Podobnym sposobem okazalibyśmy: że z podzielenia 1459 przez 10, otrzymamy na iloraz liczbę 145 a na resztę 9; z podzielenia 78065 przez 1000, otrzymamy na iloraz liczbę 78, a na resztę 65; z podzielenia 63400 przez 100, otrzymamy na iloraz liczbę 634 bez reszty i t. p.

86. *Ażeby liczbę podzielić przez* 5, *mnożymy ją przez* 2, *a iloczyn ztąd otrzymany dzielimy przez* 10, *(czyli odcinamy z prawéj strony jeden znak przecinkiem).*

Mnożąc bowiem daną liczbę przez 2 zwiększamy dzielną 2 razy, ale i dzielnik zwiększamy także 2 razy, bo nie dzielimy przez 5 lecz przez 10 t. j. przez liczbę 2 razy większą: iloraz więc otrzymany z dzielenia liczb 2 razy większych będzie taki sam jakibyśmy otrzymali dzieląc wprost dane liczby przez siebie (Nr. 76).

Przykład. 17865 : 5

$$\frac{17865}{\begin{array}{r}2\\ \hline 3573{,}0\end{array}}$$

Zatém 3573 jest ilorazem z liczby 17865 podzielonéj przez 5.

87. *Ażeby liczbę podzielić przez* 25, *mnożymy ją przez* 4 *a iloczyn ztąd otrzymany dzielimy przez* 100, *(czyli odcinamy z prawéj strony dwa znaki przecinkiem).*

Mnożąc bowiem daną liczbę przez 4, zwiększamy dzielną 4 razy, ale i dzielnik zwiększamy także 4 razy, bo nie dzielimy przez 25 lecz przez 100 t. j. przez liczbę 4 razy większą: zatém iloraz z dzielenia liczb 4 razy większych będzie taki sam jakibyśmy otrzymali dzieląc wprost dane liczby przez siebie (Nr 76).

Przykład. 42375 : 25

$$\frac{42375}{\begin{array}{r}4\\ \hline 1695{,}00\end{array}}$$

Więc 1795 jest szukanym ilorazem.

88. *Ażeby liczbę podzielić przez* 50, *mnożymy ją przez* 2, *a otrzymany iloczyn dzielimy przez* 100.

Tłumaczenie takież jak w numerze 86.

Przykład. 24650 : 50

$$\frac{24650}{\begin{array}{r}2\\ \hline 493{,}00\end{array}}$$

Więc 493 jest szukanym ilorazem.

89. *Ażeby liczbę podzielić przez* 125, *mnożymy ją przez* 8, *a otrzymany iloczyn dzielimy przez* 1000, *(czyli odcinamy z prawéj strony trzy znaki przecinkiem).*

Mnożąc bowiem daną liczbę przez 8 zwiększamy 8 razy dzielną, ale i dzielnik zwiększamy 8 razy, bo nie dzielimy przez 125 lecz przez 1000 t. j. przez liczbę 8 razy większą: skoro więc dzielna i dzielnik zwiększone zostały 8 razy, iloraz zmieniony nie będzie (Nr. 76)

Przykład.

$$\frac{\frac{241875 : 125}{241875}}{\ \ 8\ \ }$$
$$1935,000$$

Zatém 1935 jest szukanym ilorazem.

90. *Ażeby liczbę podzielić przez* 15, *dzielimy ją przez* 5, *(sposobem podanym w Nr. 86) i otrzymanego ilorazu bierzemy część trzecią.* Bo liczba 15 jest 3 razy większą od 5: więc dzieląc liczbę daną przez 5, otrzymujemy iloraz 3 razy większy od ilorazu z podzielenia téj saméj liczby przez 15 (Nr. 75); zatém biorąc część trzecią ilorazu pierwszego, otrzymujemy iloraz drugi.

Przykład.

$$\frac{61245 : 15}{61245}$$
$$\frac{\quad 2 \quad}{12249,0 : 3 = 4083 \text{ iloraz szukany}}$$

91. *Ażeby liczbę podzielić przez* 75, *dzielimy ją przez* 25, *(sposobem podanym w Nr. 87) i otrzymanego ilorazu bierzemy część trzecią.* Bo liczba 75 jest 3 razy większą od 25: więc dzieląc daną liczbę przez 25, otrzymujemy na iloraz liczbę 3 razy większą od ilorazu z podzielenia téj saméj liczby przez 75 (Nr. 75); zatém biorąc pierwszego ilorazu część trzecią, otrzymujemy iloraz drugi.

Przykład

$$\frac{309225 : 75}{309225}$$
$$\frac{\quad 4 \quad}{12369,00 : 3 = 4123 \text{ iloraz szukany.}}$$

92. *Jeżeli dane liczby do działania mają wspólne czynniki, to należy pierwéj te wspólne czynniki wyrzucić a potém dopiéro przystąpić do działania.* Tym bowiem sposobem postępując, dzielenie liczb większych sprowadzamy do dzielenia liczb mniejszych, czém znacznie upraszczamy i ułatwiamy samo działanie bez zmiany wartości ilorazu (Nr. 77). Podane zasady podzielności liczb posłużą do dowiadywania się jakie wspólne czynniki obejmować mogą dane liczby. Przykład lepiéj tę rzecz objaśni.

Dajmy, że mamy liczbę 1278225 do podzielenia przez 2925. Podzieliwszy obie liczby przez 9, otrzymamy:

142025 : 325

Podzieliwszy przez 5:

28405 : 65

Podzieliwszy jeszcze przez 5.

5681 : 13=437 iloraz
52
48
39
91
91
0.

Wykonawszy zaś dzielenie zwyczajnym sposobem:

1278225 | 2925
11700 | 437 iloraz.
10822
8775
20475
20475
0.

otrzymujemy iloraz ten sam co powyżéj.

Z tego wnieść możemy: *jeżeli obie liczby dzielna i dzielnik są zakończone zerami, to można zawsze od obu po jednakowéj liczbie zer odkreślić i potém wykonywać działanie na liczbach pozostałych.* Bo odkreślając od dzielnéj np. trzy zer zmniejszamy ją przez to razy 1000 (Nr. 85) i odkreślając w dzielniku trzy zer, zmniejszamy go także razy 1000: zatém iloraz z dzielenia liczb tysiąc razy mniejszych będzie taki sam, jakibyśmy otrzymali dzieląc wprost dane liczby przez siebie (Nr. 77).

Przykład. Znaleść iloraz z liczby 90440000 podzielonej przez 17000. Określiwszy pierwéj po trzy zer od obu liczb, dzielenie ich zamieniamy na dzielenie liczb 90440 przez 17.

```
90440 : 17=5320 iloraz.
85
 54
 51
  34
  34
   0.
```

Jeżeli zaś sam tylko dzielnik będzie zakończony na zera, to wtedy opuszczamy te zera w dzielniku, a w dzielnéj z prawéj strony odcinamy przecinkiem tyle znaków ile było zer w dzielniku i odbywamy dzielenie na liczbach pozostałych, dla znalezienia ilorazu, a po skończoniu działania, odcięte znaki w dzielnéj podpisujemy do reszty z działania otrzymanéj dla utworzenia reszty zupełnéj.

Przykład. 5346739 : 47000

```
5346,739 : 47=113 iloraz szukany.
47
 64
 47
 176
 141
  35739 reszta do podzielenia przez 47000.
```

Zagadnienia.

93. Wszystkie zagadnienia do dzielenia liczb całkowitych odnoszące się, dają się sprowadzić do dwóch przypadków: 1° jeżeli obiedwie liczby dane w zadaniu są jednego gatunku; 2° jeżeli obiedwie liczby są różnego gatunku. Obadwa te przypadki w pierwszych dwóch podanych zagadnieniach starać się będziemywyjaśnić.

Zagadnienie 1. Za 4488 rubli ile dostać można funtów herbaty, kiedy za funt żądają 12 rubli?

Wskazanie działania. Ażeby się dowiedzieć, ile dostaniemy funtów herbaty za 4488 rubli, kiedy za jeden funt żądają 12 rubli, należałoby 12 rubli odejmować od 4488 rubli dotąd, dopóki można, mówiąc za każdym razem, że bierzemy wartość jednego funta herbaty. Ile więc razy 12 rubli da się odjąć od 4488 rubli, albo krócéj, ile razy 12 pomięści się w 4488 (Nr. 39) tyle funtów herbaty otrzymamy za 4488 rubli.

Rozwiązanie.

4488 : 12=374 funtów.

```
4488 | 12
36   |-----
---- | 374 funtów
 88
 84
----
  48
  48.
----
   0.
```

Zagadnienie 2. Za 45 garncy wina zapłacono 405 rubli ileż płacono za garniec?

Wskazanie działania. Jeżeliby za 45 garncy wina zapłacono 45 rubli, wtedy garniec wypadałby po rublu; jeżeliby za 45 garncy zapłacono 2 razy po 45 rubli czyli po 90 rubli, wtedy garniec wypadałby po 2 ruble; jeżeliby za 45 garncy zapłacono 3 razy po 45 rubli czyli 135 rubli, wtedy garniec wypadałby po 3 ruble i t. p. A ponieważ za 45 garncy zapłacono 405 rubli, więc ażeby się dowiedzieć po ile wypada jeden garniec, potrzeba tylko odszukać ile razy powtórzyć należy 45 rubli, aby otrzymać 405 rubli. Działanie zatém dąży do znalezienia takiéj liczby, która pomnożona przez mniejszą 45 wydać powinna na iloczyn liczbę większą 405, a że to jest właśnie celem działania dzieleniem zwanego (Nr. 40 i 41) więc dzieląc 405 przez 45 znajdziemy cenę jednego garnca wina.

Rozwiązanie.

405 : 45=9 rubli

```
405 | 45
405 |----
--- |  9
  0
```

Uwagi. Z powyższego widzimy: że jeżeli liczby w zadaniu są różnego gatunku, wtedy iloraz bywa tego gatunku, jakiego gatunku jest dzielna; przeciwnie zaś jeżeli liczby w zadaniu są jednego gatunku, wtedy iloraz bywa takiego gatunku, jakiego gatunku wymagają warunki zagadnienia.

3. Jaką jest liczba, która pomnożona przez 108, daje w iloczynie 1143936? (*Odp.* tą liczbą jest 10592) (zob. Nr. 40.)

4. Jaką liczbą należy rozmnożyć liczbę 876, ażeby w iloczynie otrzymać 1188732? (*Odp.* liczbą 1357.)

5. Podzieliwszy 39372 rub. na 68 równych części, jak wielka będzie jedna część? (*Odp.* 579 rubli.) (zob. Nr. 41.)

6. Kupiono srebra za 19652 rub. płacąc 68 rubli za funt. Ile kupiono funtów srebra? (*Odp.* 289 funtów).

7. Jeżeli w 27 dniach chcemy odbyć drogę wynoszącą 776 wiorst, to po ile wiorst dziennie uchodzić nam wypada? (*Odp.* po 28 wiorst dziennie).

8. Ile dni potrzeba do przebycia drogi wynoszącéj 1824 wiorst, jeżeli dziennie 57 wiorst ujeżdzać będziemy? (*Odp.* dni 32).

9. Za 234 pudów cukru zapłacono 2808 rubli; po ile płacono pud? (*Odp.* po 12 rubli).

10. Pewnéj liczbie robotników zapłacomo 54 rubli. Ile było robotników, kiedy każdy dostał 45 kopiejek? (*Odp.* 120 robotników).

11. Wojsko składające się z 32088 ludzi, ma być podzielone na 42 równe batalijony; ile ludzi powinno być w każdym batalijonie? (*Odp.* 764 ludzi).

12. Za 125 dni pracy, 18 robotnikom zapłacono 687 rubli 50 kopiejek, czyli 78750 kopiejek. Po ile ugodzony był jeden robotnik dziennie? (*Odp.* po 35 kopiejek).

13. Ile razy, skazówka pokazująca minuty, prędzéj się obraca, od skazówki pokazującéj godziny? (*Odp.* 12 razy).

14. Za dobra mające przestrzeni 3718 dziesiatyn, zapłacono 131284 rubli; po ile wypada jedna dziesiatyna? (*Odp.* po 38 rubli).

15. Z dwóch miejsc odległych od siebie 765 wiorst, wychodzi dwóch posłańców A i B; posłaniec A uchodzi 4 wiorsty na godzinę, a B 5 wiorst na godzinę. Ile godzin iść będą na przeciw siebie do czasu spotkania się, i ile każdy z nich ujdzie? (*Odp.* iść będą 85 godzin; posłaniec A przejdzie 340 wiorst, a B 425 wiorst).

16. W jakim czasie podróżny odbędzie drogę z Petersburga do Nowogroda, mającą 175 wiorst długości; jeżeli dziennie tylko 5 godzin przeznacza na podróż, a potrzebuje 12 minut do przejścia jednéj wiorsty? (*Odp.* dni 7.)

17. Kupiec zamówił w fabryce 216 sztuk sukna, każda o 37 arszynach, po 5 rubli za arszyn, dając zadatku 8560 rubli. Po dostawieniu sukna kupcowi, dwunasta jego część okazała się nie dobra, i z tego względu odesłaną została napowrót do fabryki. Do-

wiedzieć się ile arszynów sukna kupiec u siebie zatrzymał i ile za nie należy się od niego jeszcze pieniędzy? (*Odp.* kupiec zatrzymał u siebie 7326 arszynów, a został dłużnym fabryce 28070 rubli.)

18. W trzech woreczkach znajdowało się po pewnéj liczbie rubli. Jeżeli do pierwszego woreczka dołożymy jeszcze 218 rubli, a do trzeciego 427 rubli, to we wszystkich trzech będzie po jednakowéj liczbie rubli, a ogół ich złoży liczbę 7536. Dowiedzieć się ile było rubli w każdym woreczku? (*Odp.* w 1-ym było 2294, w 2-im 2512, w 3-im 2085 rubli.)

19. Kupiec wymienia 1491 arszynów sukna na płótno; arszyn sukna kosztuje 6 rub., arszyn płótna 25 kop.; dowiedzieć się ile dostanie płótna za sukno? (*Odp.* dostanie 35784 arszynów płótna.)

20. Z 51840 zołotników srebra, ile można mieć półmisków, z którychby każdy ważył 5 funtów? (*Odp.* można mieć 108 półmisków.)

21. W handlu win zmięszano trzy gatunki wina: pierwszego gatunku 28 butelek, po 50 kop. butelka, drugiego 17 butelek, po 75 kop. butelka, trzeciego 35 butelek, po 95 kop. butelka. Dowiedzieć się jaka będzie cena jednéj butelki wina po zmięszaniu? (*Odp.* cena jednéj butelki mięszaniny wynosi 75 kopiejek.)

22. Towarzystwo złożone z 13 osób założyło spółkę, celem rozpoczęcia pewnego przedsiębierstwa. Każda z pomienionych osób złożyła jednakową sumę, co utworzyło razem kapitał 6942 rubli Przy rozwiązanu spółki, po zrobieniu obrachunku, pokazało się, że oprócz włożonego kapitału, było zysku ogółem 3094 rub. Dowiedzieć się jaki kapitał kazda z osób złożyła i ile miała po rozwiązaniu spółki? (*Odp.* każda osoba złożyła 534 rub., a po rozwiązaniu spółki miała 772 rub.)

23. Kupiono 4 sztuki płutna za 1218 rubli, płacąc 6 rubli za arszyn. Kiedy w pierwszéj sztuce było 47 arszynów, w drugiéj 49 arszynów, w trzeciéj 53 arszynów, to ile było w czwartéj sztuce? (*Odp.* w czwartéj sztuce było 54 arszynów).

24. Dwóch podróżnych o jednym czasie wyjechało z dwóch różnych miejsc, jeden z Petersburga, drugi z Kijowa i jadąc naprzeciw siebie, 15-go dnia spotkali się w drodze. Jeżeli jeden z podróżnych przebywał dziennie wiorst 38 to ile wiorst dziennie przebywał drugi podróżny, wiedząc, że odległość między powyżéj wymienionemi miastami wynosi 1245 wiorst. (*Odp.* drugi przebywał 45 wiorst dziennie.)

25. Za 56 czećwierci pszenicy zapłacono 448 rubli; za 672 czećwierci tego samego gatunku pszenicy i po téj saméj cenie, ile wypadnie zapłacić? (*Odp.* 5376.)

26. Za 56 czećwierci pszenicy zapłacono 448 rubli; za 48384 rubli ile kupimy czećwierci pszenicy po téj saméj jak pierwsza cenie? (*Odp.* kupimy 6048 czećwierci.)

27. Pewna żywność wystarczyła na dni 288 dla 23 ludzi, dla ludzi 96 na ile dni taż sama żywność wystarczy? (*Odp.* na 72 dni.)

28. Za 8645 kwart mąki, ile wypadnie zapłacić, wiedząc że korzec tego samego gatunku mąki kosztuje 6 rub. 40 kop.? (*Odp.* wypadnie zapłacić 432 rub. 25 kop.)

29. Pewien handlarz zbożowy zakupił 13440 korcy żyta, płacąc 450 kop. za korzec. W ciągu roku sprzedał czwartą część po 480 kop. korzec, piątą część po 500 kop., ósmą część po 490 kop., dwunastą część po 520 kop., resztę po 510 kop. Ile na téj sprzedaży zyskał? (*Odp.* zyskał 6563 rub. 20 kopiejek.)

30. Ile fur parokonnych potrzeba, aby zwieść od razu z pola 1360 mendli zboża, wiedząc że na jednę furę zabrać można 1 kopę i 1 mendel? (*Odp.* 272 fur.)

31 Do wyładowania berlinki zawierającéj w sobie 43470 pudów zboża, najęto 27 ludzi, z których każdy wynieść mógł dziennie 135 pudów. Po 6 dniach dla prędszego wyładowania statku najęto jeszcze 13 równie silnych ludzi. W ilu dniach statek wyładowanym został? (*Odp.* w 10 dniach.)

32. Kupiec zakupił białych chustek do nosa za 32 rub. 40 kop., z nich w pewnym czasie sprzedał dwa tuziny za 15 rub. 60 kop. z zyskiem 20 kop. na każdéj chustce. Ile było kupionych chustek? (*Odp.* 27 chustek kupionych.)

33. Pewien kapitalista posiadający 125474 rubli, kupił posiadłość mającą 2357 dziesiatyn przestrzeni, płacąc 26 rubli za dziesiatynę. Po pewnym czasie przykupił do niéj sąsiedni majątek zawierający 1704 dziesiatyn przestrzeni, płacąc 23 rubli za jednę dziesiatynę. Za resztę pieniędzy jakie mu pozostały po zapłaceniu dwóch pierwszych majętności, dokupił jeszcze od swego sąsiada kawał ziemi płacąc 28 rubli za dziesiatynę. Ile więc przestrzeni obejmował cały jego majątek? (*Odp.* cały jego majątek obejmował 4956 dziesiatyn.)

34 Kupiec sprzedał beczkę wina zawierającą 345 butelek za 217 rub. 35 kop. Po pewnym czasie sprzedał drugą beczkę za 164 rub. 92 kop. biorąc za każdą butelkę 13 kop. więcéj od ceny butelki pierwszéj beczki. Ile butelek mieściło się w drugiéj beczce? *(Odp.* 217 butelek.)

35. Kupiono 5 arszynów aksamitu po 4 rub. 46 kop. arszyn, 12 arszynów płótna po 67 kop. i 8 arszynów sukna. Po ile płacono arszyn sukna, wiedząc że na wszystko wydano 54 rub. 34 kop.? *(Odp.* arszyn sukna płacono po 3 ruble.)

36. Do 165 garncy okowity po 75 kop. garniec, dolano trzecią część wody. Po ile należy sprzedawać garniec tak otrzymanéj wódki, żeby na każdym garncu okowity zyskać 13 kopiejek? *(Odp.* garniec wódki należy sprzedawać po 66 kopiejek.)

37. Pewien ekonom zapłacił 42 rub. 12 kop. żniwiarzom złożonym z mężczyzn i kobiet. Wiadomo tylko, że 69 mężczyznom w liczbie ogólnéj żniwiarzy znajdującym się zapłacił 24 rub. 84 kop. a resztę płacił kobietom dając każdéj po 32 kop. Ile było kobiet użytych do żniwa i po czemu każdemu mężczyźnie płacono? *(Odp.* kobiet było 54, każdy mężczyzna brał po 36 kop.)

38. Towarzystwo z 34 osób złożone, zarobiło na pewnéj spkulacyi 1500 rubli, którym to zyskiem dzielą się w taki sposób, że 15 osób dostaje po pewnéj liczbie rubli, 12 osób po dwa razy tyle co poprzednie, a pozostałe 7 osób po trzy razy tyle co pierwsze. Po ileż dostanie jedna osoba z każdego oddziału? *(Odp.* osoba z 1-go oddziału po 25 rub., z 2-go po 50 rub., z 3-go po 75 rub.)

39. Pewien spekulant dostawił różnemi czasy do fabryki cukru 5864 sztuk drzewa, rachując sztukę po 2 rub. 25 kop. Na rachunek należytości wziął 12559 rub. za resztę zaś ma mieć przysłany cukier, licząc funt po 25 kop. Ile dostanie funtów cukru? *(Odp.* 2540 funtów.)

40. Zmięszano dwa gatunki owsa: lepszego 85 czećwierci po 4 ruble 20 kop. czećwierć; poślednejszego 65 czećwierci po 3 rub. 40 kop. czećwierć. Po ile należy sprzedawać jednę czećwierć mięszaniny, ażeby na wszystkiém zyskać 31 rubli? *(Odp.* po 4 ruble 6 kop. czećwierć.)

ROZDZIAŁ III.

Liczby wielorakie.

94. Liczba złożona z kilku różnéj wielkości liczb imiennych, w takim związku z sobą będących, że pewna ilość jedności jednéj, tworzy jednę jedność drugiéj, zowie się liczbą *wieloraką* (составное число); np. 5 sażeni+2 arszyny+13 werszek. Cała ta liczba zowie się wieloraką, albowiem: 16 werszek tworzy 1 arszyn, a 3 arszyny tworzy 1 sażeń. Zbiór zaś liczb 12 rubli+5 czećwierci+18 zołotników razem uważanych, nie jest liczbą wieloraką, bo jednostki tych liczb nie mają żadnego między sobą związku i nie mogą być zamieniane jedne na drugie.

Wiedząc podział każdego gatunku jedności, możemy zawsze liczbę wieloraką zamienić na jednogatunkową i jednogatunkową z mniejszych jednostek złożoną, na wieloraką, jak to zaraz na kilku przykładach wyjaśnimy.

Przykład 1. Liczbę wieloraką: 5 pudów+14 funtów+57 zołotników, zamienić na zołotniki.

Ponieważ w pudzie jest funtów 40, więc w 5 pudach jest ich $40\times5=200$, do których dodawszy dane w liczbie wielorakiéj 14 funtów, otrzymamy razem 214 funtów. Wiedząc znowu że w funcie jest 96 zołotników, zamieniamy funty na zołotniki mnożąc 214 przez 96 i otrzymujemy 20544 zołotników, do których dodawszy 57 zołotników danych w liczbie wielorakiéj, otrzymamy razem 20601 zołotników. Zatém 5 pudów+14 funtów+57 zołotników=20601 zołotników.

Przykład 2. Liczbę 20601 zołotników zamienić na liczbę wieloraką.

Wiedząc że w funcie jest 96 zołotników, dzielimy 20601 przez 96 i otrzymujemy na iloraz 214 funtów a na resztę 57 zołotników (Nr. 93); zatém 20601 zołotników=214 funtów+57 zołotników· wiedząc znowu że w pudzie jest 40 funtów, dzielimy 214 przez 40 i otrzymujemy na iloraz 5 pudów a na resztę 14 funtów; zatém 20601 zołotników=5 pudów+14 funtów+57 zołotników.

Z powyższego więc widzimy, że możemy zawsze uniknąć działań z liczbami wielorakiemi, zamieniając je na liczby jednogatunkowe; zważywszy jednakże na dogodności i ułatwienia jakie nam one przynoszą w celu otrzymania żądanych wypadków, założyliśmy sobie objaśnić sposoby odbywania działań z temiż liczbami.

Przykłady dla wprawy.

1. Liczba wieloraka 12 berkowców+7 pudów+39 funtów++13 zołotników, ile ma zołotników? (*Odp.* 491437 zołotników).

2. Liczba wieloraka 4 beczek+15 wiader+4 krużek, ile ma czarek? (*Odp.* 17540 czarek).

3. Liczba wieloraka 12 włók+25 morgów+213 prętów kwadratowych, ile ma prętów kwadratowych? (*Odp.* 115713 prętów kwadratowych).

4. Liczba wieloraka 9 czećwierci+5 czećwierzyków+7 garncy, ile ma garncy? (*Odp.* 623 garncy).

5. Liczba wieloraka 23 łokci+3 ćwierci+5 cali, ile ma cali? (*Odp.* 575 cali).

6. Liczbę 8347 sażeni kwadratowych zamienić na liczbę wieloraką wyrażającą dziesiatyny i sażenie kwadratowe. (*Odp.* 3 dziesiatyny+1147 sażeni kwadratowych).

7. Liczbę 547 werszek zamienić na liczbę wieloraką wyrażającą sażenie, arszyny i werszki. (*Odp.* 11 sażeni+1 arszyn+3 werszki).

8. Liczbę 3259 kwart zamienić na liczbę wieloraką wyrażającą korce, ćwierci, garnce i kwarty. (*Odp.* 25 korcy+1 ćwierć +6 garncy+3 kwart).

Dodawanie liczb wielorakich.

95. W dodawaniu liczb wielorakich należy mieć na uwadze, że dodawane być mogą do siebie tylko te liczby wielorakie, których jednostki główne, to jest najwyższego podziału, czy wyrażone w liczbach danych, czy też domyślne, są jednakowe.

Przykład 1. Dajmy że mamy zebrać razem następujące liczby wielorakie:

	12 pud.	+23 funt.	+45 zoł.
	18 „	+16 „	+26 „
	8 „	+43 „	+17 „
	5 „	+13 „	+53 „
Ogół	45 pud.	+16 funt.	+45 zołot.

Objaśnienie działania. Szukamy takiéj liczby, któraby zawierała w sobie tyle pudów, funtów i zołotników, ile ich jest razem we wszystkich danych liczbach wielorakich, a cel ten osiągniemy, zbierając w jednę liczbę osobno pudy, osobno funty i osobno zołotniki. Żeby zaś to działanie jak można najdogodniéj wykonać, wypisujemy dane liczby wielorakie jedne pod drugiemi tak, żeby liczby imienne tegoż samego nazwania były pod sobą napisane i zaczynamy od dodawania liczb, których jednostki są najmniejsze, jak w obecnym razie, od zołotników. Z dodania zołotników, otrzymujemy 141 zołotników, które czynią 1 funt i 45 zołotników, z tego więc względu 45 zołotników podpisujemy pod zołotnikami, a 1 funt do funtów dodajemy. W danych liczbach wielorakich jest funtów 95 a 1 funt otrzymany z zołotników, razem 96 funtów, czyli 2 pudy i 16 funtów. Funtów 16 podpisujemy pod funtami, a 2 pudy dodajemy do pudów; 2+5+8+18 +12=45 pudów. Zatém szukanym ogółem jest 45 pud.+16 funt. +45 zołotników.

Przykład 2.

	25 duk.	+ 8 złp.	+14 gr.
	17 „	+12 „	+23 „
	9 „	+14 „	+18 „
	5 „	+16 „	+26 „
Ogół	58 duk.	+16 złp.	+21 gr.

Ogół tych czterech liczb wielorakich znaleźliśmy następującym sposobem. Naprzód zebraliśmy liczby, których jednostki są najmniejsze, to jest grosze i tych było 81 czyli 2 złp. 21 gr.; 21 gr. podpisaliśmy pod groszami a 2 złp. dodaliśmy do 16 złp.+14 złp.+12 złp.+8 złp. co uczyniło razem 52 złp. czyli 2 duk. 16 złp.; 16 złp. podpisaliśmy pod złotemi a 2 dukaty dodaliśmy do dukatów, co uczyniło razem 58 dukatów, które pod dukatami podpisaliśmy.

ZAGADNIENIA.

1. Pewien obywatel posiada trzy folwarki: pierwszego rozległość wynosi 135 dziesiatyn i 1340 sażeni kwadratowych; drugiego 207 dziesiatyn 518 sażeni kwadratowych i 39 stóp kwadratowych; trzeciego 189 dziesiatyn, 2045 sażeni kwadratowych i 28 stóp kwadratowych. Ile ma rozległości cały jego majątek? (*Odp.* 532 dziesiatyn, 1504 sażeni kwadratowych i 18 stóp kwadratowych).

2. Do magazynu różnemi czasy zwieziono następujące ilości mąki: raz 235 czećwierci, 6 czećwierzyków, 5 garncy; drugi raz 68 czećwierci, 5 czećwierzyków, 7 garncy; trzeci raz 104 czećwierci i 6 garncy; czwarty raz 6 czećwierzyków i 6 garncy; piąty raz 47 czećwierci i 5 czećwierzyków. Ile ogółem mąki znajdowało się w magazynie (*Odp.* 457 czećwierci i 1 czećwierzyk).

3. Do składu papieru nadesłano z fabryki: raz 95 ryz, 18 liber i 10 arkuszy; drugi raz 27 ryz, 15 liber i 14 arkuszy; trzeci raz 16 ryz i 22 arkuszy; czwarty raz 13 liber i 19 arkuszy; piąty raz 5 ryz i 8 liber; szósty raz 12 liber i 20 arkuszy; siódmy raz 3 ryz, 12 liber i 9 arkuszy. Ile papieru nadesłała fabryka do składu? (*Odp.* 150 ryz, 1 librę i 22 arkuszy.) 12 arkuszy

4. Wyprawiony został transport z żelazem na czterech wozach: wiedząc że na pierwszym wozie było żelaza 28 pudów, 36 funtów i 29 łutów; na drugim 30 pudów, 19 funtów i 27 łutów; na trzecim 35 pudów i 19 funtów; na czwartym 29 pudów i 25 łutów. Ileż ważył cały transport żelaza? (*Odp.* 123, pudów, 36 funtów i 17 łutów).

5. Przy kopaniu studni, zaraz pierwszego dnia wykopano 5 sażeni sześciennych i 132 stóp sześciennych; drugiego dnia 7 sażeni sześciennych, 120 stóp sześciennych i 1570 cali sześciennych; trzeciego dnia 13 sażeni sześciennych i 1480 cali sześciennych; czwartego dnia 4 sażeni sześciennych 189 stóp sześciennych i 859 cali sześciennych. Ileż wykopano ziemi w przeciągu tych dni czterech? (*Odp.* 30 sażeni sześciennych, 100 stóp sześciennych i 453 cali sześciennych).

6. W pewnéj fabryce płacono robotnikom tygodniowo co każdą sobotę; jakoż pierwszéj soboty wypłacono 46 rubli, 3 czećwiertaki, 2 grzywienniki i 7 kopiejek; drugiéj soboty 52 rubli, 1 czećwiertak, 1 grzywiennik i 8 kopiejek; trzeciéj soboty 37 rubli, 2 czećwiertaki i 5 kopiejek; czwartéj soboty 43 rubli, 2 grzywienniki i 6 kopiejek; piątéj soboty 39 rubli, 3 czećwiertaki i 2 grzywienniki; szóstéj soboty 28 rubli, 2 czećwiertaki, 2 grzywienniki i 9 kopiejek. Ile zapłacono robotnikom w tych sześciu tygodniach? *(Odp.* 249 rubli).

7. Piwowar sprzedał piwa jednego dnia 18 beczek, 23 wiader i 8 kružek; drugiego dnia 12 beczek, 34 wiader i 5 kružek; trzeciego dnia 15 beczek i 7 kružek; czwartego dnia 33 beczek i 29 wiader; piątego dnia 28 beczek, 39 wiader i 8 kružek; szóstego dnia 14 beczek, 13 wiader i 9 kružek; siódmego dnia 20 beczek, 27 wiader i 4 kružek. Ile sprzedał piwa przez cały tydzień? *(Odp.* 144 beczek, 9 wiader i 1 krużkę).

8. W jednym folwarku wysiano: żyta 58 czećwierci i 7 garncy; pszenicy 102 czećwierci, 6 czećwierzyków i 5 garncy, owsa 12 czećwierci, 5 czećwierzyków i 6 garncy; jęczmienia 53 czećwierci, 2 czećwierzyki i 4 garncy. W drugim folwarku wysiano: żyta 87 czećwierci, 5 czećwierzyków i 6 garncy; pszenicy 46 czećwierci, 4 czećwierzyki i 3 garncy; owsa 23 czećwierci, 7 czećwierzyków i 5 garncy; jęczmienia 67 czećwierci, 3 czećwierzyki i 4 garncy. W trzecim folwarku wysiano: żyta 123 czećwierci, 5 czećwierzyków i 2 garncy; pszenicy 32 czećwierci i 6 czećwierzyków; owsa 32 czećwierci, 2 czećwierzyki i 1 garniec; jęczmienia 18 czećwierci i 3 garncy. Ileż wysiano po szczególe żyta, pszenicy, owa i jęczmienia we wszystkich trzech folwarkach? *(Odp.* we wszystkich trzech razem folwarkach wysiano: żyta 269 czećwierci, 3 czećwierzyki i 7 garncy; pszenicy 182 czećwierci i 1 czećwierzyk; owsa 68 czećwierci, 7 czećwierzyków i 4 garncy; jęczmienia 138 czećwierci, 7 czećwierzyków i 3 garncy).

9. Kupiono dwie sztuki płótna: pierwsza miała długości 45 arszynów i 14 werszek i za nią zapłacono 15 rubli i 49 kop.; druga obejmowała 5 arszynów i 12 werszek więcéj od pierwszéj i za nią téż zapłacono 1 rub. i 85 kop. więcéj jak za pierwszą. Ile kupiono płótna i ile za nię razem zapłacono? *(Odp.* Kupiono pło-

tna 97 arszynów i 8 werszek, a zapłacono za nię 32 rubli i 83 kopiejek).

10. Jeometra obliczywszy powierzchnią przez siebie pomierzonego gruntu, znalazł, że: grunta dworskie obejmowały 458 dziesiatyn i 1580 sażeni kwadratowych; łąki dworskie 238 dziesiatyn i 1496 sażeni kwadratowych; grunta włościańskie 589 dziesiatyn i 648 sażeni kwad.; łąki włościańskie 186 dziesiatyn i 580 sażeni kwad.; zabudowania dworskie wraz z ogrodami 130 dziesiatyn i 480 sażeni kwad.; zabudowania włościańskie wraz z ogrodami 250 dziesiatyn, 2300 sażeni kwad. i 32 stóp kwad.; las 259 dziesiatyn, 500 sażeni kwad. i 42 stóp kwad.; nieużytki i drogi 107 dziesiatyn, 56 sażeni kwad. i 27 stóp kwad.; staw 2 dziesiatyn, 68 sażeni kwad. i 35 stóp kwad. Ile wynosiła powierzchnia pomienionéj majętności? (*Odp.* 2222 dziesiatyn, 510 sażeni kwad. i 38 stóp kwadratowych).

11. Pewien właściciel ziemski zebrał żyta: z jednego pola 56 kóp, 3 mendli i 12 snopów; z drugiego pola 37 kóp, 2 mendli i 14 snopów; z trzeciego pola 75 kóp, 1 mendel i 8 snopów; z czwartego pola 27 kóp i 12 snopów. Ile wynosił cały zbiór żyta? (*Odp.* 197 kóp, 1 mendel i 1 snop).

12. Pewien zapytany, ile ma lat? odpowiedział: miałem lat 6, miesięcy 8 i dni 12 kiedy zacząłem chodzić do szkół, w których pozostawałem przez lat 9, miesięcy 6 i dni 25; po ukończeniu zaś szkół wstąpiłem zaraz do służby, w któréj pozostaję już lat 15, miesięcy 4 i dni 24. Ileż ma lat? (*Odp.* Ma lat 31 i miesięcy 8).

Odejmowanie liczb wielorakich.

96. Odejmowanie podobnież jak dodawanie odbywać się może tylko na tych liczbach wielorakich, których jednostki główne są jednakowe.

Przykład 1. Znaleść różnicę dwóch liczb wielorakich: 18 sażeni+3 stóp+10 cali i 6 sażeni+5 stóp+4 cali.

	18 sażeni	+3 stóp	+10 cali
	6 „	+5 „	+ 4 „
Różnica	11 „	+5 „	+ 6 „

Objaśnienie działania. Dla znalezienia różnicy dwóch liczb wielorakich, należy liczbę mniejszą napisać pod większą tak, żeby liczby imienne tego samego nazwiska były pod sobą umieszczone, poczém zacząć odejmowanie od liczb których jednostki są najmniejsze, jak w obecnym przykładzie od cali: 4 cali od 10 cali zostaje 6 cali, które piszemy pod calami; 5 stóp od 3 stóp odjąć nie można, w tym przeto celu z 18 sażeni bieżemy 1 sażeń czyli 7 stóp i dodajemy je do 3 stóp, co uczyni razem 10 stóp, od tych dopiero 10 stóp odjąwszy 5 stóp, zostaje 5 stóp które umieszczamy we właściwém miejscu pod stopami; nakoniec 6 sażeni odjęte nie już od 18 lecz od 17 sażeni, zostaje 11 sażeni, które piszemy pod sażeniami. Zatém różnica liczb podanych wynosi 11 sażeni+5 stóp+6 cali.

Przykład 2. Pewna osoba urodziła się roku 1803 dnia 23 Stycznia o godzinie 5 po południu, minucie 14, umarła zaś roku 1856 dnia 14 Lutego o godzinie 9 z rana minucie 35. Ile żyła lat, miesięcy, dni, godzin i minut?

Objaśnienie. Żeby rozwiązać zadanie, wypada naprzód obliczyć ile upłynęło lat, miesięcy, dni, godzin i minut od Narodzenia Chrystusa tak do śmierci téj osoby, jako téż i do jéj urodzenia, natenczas różnica między temi liczbami będzie przeciągiem czasu życia téj osoby na ziemi. W tym przeto celu uważam naprzód, że ta osoba umarła w Lutym roku 1856, zatém od Narodzenia Chrystusa do jéj śmierci upłynęło całkowitych lat 1855; umarła w Lutym więc na rok 1856 upłynął 1 miesiąc; umarła 14 Lutego, na drugi przeto miesiąc upłynęło całkowitych dni 13; umarła o godzinie 9 z rana, minucie 35, zatém na dzień czternasty upłynęło godzin 9 i minut 34. Takim samym zupełnie sposobem znaleźlibyśmy, że od Narodzenia Chrystusa do narodzenia téj osoby, upłynęło lat 1802, dni 22, godzin 17 i minut 13. Wiedząc to, wypisujemy znalezione liczby pod sobą i odbywamy działanie sposobem podanym w przykładzie poprzedzającym.

NB. Dzień liczyliśmy po 24 godzin a jego początek od północy.

Rozwiązanie.

	1855 lat	+1 mies.	+13 dni	+ 9 god.	+34 min.
	1802 „	+0 „	+22 „	+17 „	+13 „
Różnica	53 lat	+0 mies.	+21 dni	+16 god.	+21 min.

ZAGADNIENIA.

1. Ze sztuki materyi trzymającéj 18 arszynów i 7 werszek, sprzedano 12 arszynów i 13 werszek; ile pozostało jeszcze do sprzedania? (*Odp.* 5 arszynów i 10 werszek).

2. Kupiec sprowadził do swego handlu 14 pudów cukru: z tych sprzedał raz 25 funtów i 39 zołotników; drugi raz 5 funtów i 32 zołotników; trzeci raz 18 funtów i 15 zołotników: czwarty raz 34 funtów i 8 zołotników. Ile mu pozostało cukru? (*Odp.* 11 pudów, 37 funtów i 2 zołotniki).

3. Właściciel gruntowy zebrał z pola 189 czećwierci i 5 czećwierzyków kartofli, z których sprzedał zaraz 105 czećwierci, 7 czećwierzyków i 5 garncy. Ile mu pozostało kartofli do własnego użytku? (*Odp.* 83 czećwierci, 5 czećwierzyków i 3 garncy).

4. Do pewnéj drukarni dostarczono 590 ryz papieru, z których w ciągu dwóch pierwszych miesięcy zadrukowano 135 ryz, 18 liber i 20 arkuszy; w ciągu drugich dwóch miesięcy 103 ryz, 12 liber i 18 arkuszy; w ciągu trzecich dwóch miesięcy 147 ryz, 13 liber i 5 arkuszy. Ile pozostało jeszcze papieru? (*Odp.* 202 ryz, 15 liber i 5 arkuszy).

5. Zebrano z pola jęczmienia 497 kóp, 1 mendel i 12 snopów; z tych po pewnym czasie wymłócono 289 kóp, 2 mendle i 13 snopów. Ile jeszcze pozostało jęczmienia do wymłócenia? (*Odp.* 207 kóp, 2 mendle i 14 snopów).

6. Piotr Wielki Cesarz rossyjski urodził się dnia 12 Czerwca 1672 roku, umarł zaś dnia 9 Lutego 1725 roku. Ile żył lat, miesięcy i dni? (*Odp.* Żył lat 52, miesięcy 7 i dni 28).

7. Napoleon I. Cesarz Francuzów urodził się na wyspie Korsyce dnia 15 Sierpnia 1769 roku; umarł 5 Maja 1821 roku na wyspie Ś-éj Heleny. Ile żył lat, miesięcy i dni? (*Odp.* Żył lat 51, miesięcy 8 i dni 20).

8. Aleksander I Cesarz rossyjski urodził się dnia 23 Grudnia 1777 roku, wstąpił na tron 24 Marca 1801 roku a umarł 1 Grudnia 1825 roku. Ile lat, miesięcy i dni żył a ile panował? (*Odp.* Żył lat 47, miesięcy 11 i dni 8; panował zaś lat 24, miesięcy 8 i dni 7).

9. Ziemia odbywa drogę około słońca w 365 dniach, 5 godzinach, 48 minutach i 48 sekundach; a księżyc do odbycia obrotu swego około ziemi potrzebuje 27 dni, 7 godzin, 43 minut i 30

sekund. Ile czasu więcéj potrzebuje ziemia do swego obrotu od księżyca? (*Odp.* 337 dni, 22 godzin, 5 minut i 18 sekund).

10. Ile wykopano już rowu, mającego mieć długości 3 wiorsty, 139 sażeni i 2 stopy, jeżeli pozostaje jeszcze do wykopania 437 sażeni, 5 stóp i 10 cali? (*Odp.* 2 wiorsty, 201 sażeni, 3 stóp i 2 cale).

11. Sztuka sukna wynosząca 38 arszynów, zmniejszyła się po zestąpieniu o 1 arszyn i 7 werszek; ileż jest tego sukna po zestąpieniu? (*Odp.* 36 arszynów i 9 werszek).

12. Pewne pole wydało zboża kóp 28, mendli 2 i snopów 6, z którego zwieziono do spichrza kóp 19, mendli 3 i snopów 8. Ileż pozostaje do zwiezienia? (*Odp.* 8 kóp, 2 mendle i 13 snopów).

13. Ojciec urodził się roku 1812, dnia 12 Marca, a syn jego urodził się roku 1854, dnia 17 Marca. W którym roku, miesiącu i dniu, syn będzie tak stary, jak ojciec był przy urodzeniu syna? (*Odp.* Dnia 22 Stycznia 1896 roku).

14. Pewien urodził się 1825 roku, dnia 3 Kwietnia, o godzinie 6 z rana, minucie 27, a umarł 1847 roku, dnia 5 Marca, o godzinie 5 po południu, minucie 15. Ile żył lat, miesięcy, dni, godzin i minut. (*Odp.* Żył lat 21, miesięcy 11, dni 2, godzin 10 i minut 47).

15. Na składzie znajdowało się zboża 42 łastów, 5 czećwierci i 6 czećwierzyków: z tych sprzedano raz 2 łasty i 8 czećwierci; drugi raz 7 czećwierci, 5 czećwierzyków i 6 garncy; trzeci raz 10 czećwierci i 5 garncy; czwarty raz 6 czećwierci, 4 czećwierzyków i 4 garnce. Ile pozostało? (*Odp.* Pozostało 37 łastów, 9 czećwierci, 3 czećwierzyków i 1 garniec).

Mnożenie liczb wielorakich.

97. W mnożeniu liczb wielorakich natrafiamy na trzy przypadki:

1° Jeżeli mnożna jest liczbą wieloraką, a mnożnik liczbą jednogatunkową.

2° Jeżeli mnożna jest liczbą jednogatunkową a mnożnik liczbą wieloraką.

3° Jeżeli mnożna i mnożnik są liczbami wielorakiemi.

Sposoby postępowania we wszystkich powyższych przypadkach okażemy na następujących zagadnieniach.

PRZYPADEK I.

98. Mnożna liczbą wieloraką; mnożnik jednogatunkową.

Zagadnienie 1. Ile wypadnie zapłacić za 348 pudów wosku, wiedząc że jeden pud ugodzono po 3 dukaty, 13 złp. i 18 groszy?

Rozwiązanie. Kiedy jeden pud ugodzono po 3 duk., 13 złp. i 18 groszy, więc za 348 pudów wypadnie zapłacić 348 razy więcéj po 3 duk.; 13 złp. i 18 gr. Zagadnienie więc to moglibyśmy rozwiązać albo przez dodawanie, albo przez mnożenie: w pierwszym razie, należałoby wartość jednego puda to jest 3 dukaty, 13 złp. i 18 gr. wypisać 348 razy i liczby te zupełnie sobie równe do siebie dodać, a na ogół otrzymalibyśmy wartość 348 pudów; w drugim razie należałoby każdą po szczególe z liczb składających mnożną, pomnożyć przez 348, a następnie otrzymane złote i grosze zamienić na dukaty i te cząstkowe iloczyny do siebie dodać a ogół z nich będzie wypadkiem żądanym. Jakoż:

$$\begin{array}{l}
3 \text{ duk.} \times 348 = \quad . \quad . \quad . \quad 1044 \text{ duk.} \\
13 \text{ złp.} \times 348 = 4528 \text{ złp.} = 251 \text{ duk.} + 6 \text{ złp.} \\
18 \text{ gr.} \times 348 = 6264 \text{ gr.} = 11 \text{ duk.} + 10 \text{ złp.} + 24 \text{ gr.} \\
\hline
\text{Ogół } 1306 \text{ duk.} + 16 \text{ złp.} + 24 \text{ gr.}
\end{array}$$

Możnaby jeszcze powyższe zagadnienie i wszystkie jemu podobne rozwiązać innym sposobem, a mianowicie zamieniając liczbę wieloraką na jednogatunkową i odbywać działanie tak, jak to było już powiedziane przy mnożeniu liczb jednogatunkowych. Zamianę zaś tę moglibyśmy znowu uskutecznić dwojako, to jest wyrażając całą liczbę wieloraką w jednostkach gatunku najniższego, jak w obecnym razie w groszach, albo w jednostce gatunku najwyższego jak w obecnym razie w dukacie i tym sposobem dać początek dwom nowym sposobom rozwiązywania. Lecz że oba te sposoby, również jak i dwa poprzedzające wymagają wiele pracy i marnotrawstwa czasu, z tego więc względu w praktyce rzadko kiedy używane bywają. Najdogodniejszy sposób rozwiązywania podobnych zagadnień jest rozbiorowy, który chcąc dać poznać, wskazujemy naprzód samo działanie a potém takowe wyjaśniamy.

Wzór działania.

	Mnożna	3 duk+13 złp.+18 gr.		
	Mnożnik 348			
	po 3 duk.	1044 duk.		
po 13 złp.	po 9 złp.	174 „		
	po 3 złp.	58 „		
	po 1 złp.	19 „	+ 6 złp.	
po 18 gr.	po 15 gr.	9 „	+ 12 „	
	po 3 gr.	1 „	+ 16 „	+24 gr.
		1306 duk.+	16 zł.+	24 gr.

Objaśnienie. Jeżelibyśmy pud płacili tylko po 3 dukaty natenczas za 348 pudów zapłacilibyśmy 348 razy więcéj po 3 duk. czyli 1044 duk., co stanowi pierwszy cząstkowy iloczyn. A ponieważ pud płacimy jeszcze po 13 złp., więc za 348 pudów zapłacimy jeszcze 348 razy po 13 złp.; żeby zaś ten iloczyn wypadł odrazu wyrażony w dukatach, w tym przeto celu 13 złp. rozkładamy na cząstki wielokrotne względem jednego dukata (Nr. 46) to jest na 9+3+1 i mówimy: skoro pud płacimy po 9 złp. czyli po pół dukata, więc za 348 pudów zapłacimy 348 pół dukatów czyli 174 dukatów, co stanowi drugi cząstkowy iloczyn. Zważywszy że 3 złp. jest trzecią częścią 9 złp., więc płacąc pud po 3 złp., zapłacimy trzecią część tego co zapłaciliśmy płacąc po 9 złp.; a ponieważ płacąc pud po 9 złp. zapłaciliśmy 174 duk. zatém płacąc po 3 złp. zapłacimy trzecią część 174 duk. to jest 58 duk., co stanowi trzeci cząstkowy iloczyn. Skoro znowu pud płacimy po 1 złp., który jest trzecią częścią 3 złp., więc za 348 pudów zapłacimy jeszcze trzecią część tego co zapłaciliśmy płacąc po 3 złp.; a ponieważ płacąc pud po 3 złp., za 348 pudów zapłaciliśmy 58 duk., zatém płacąc po 1 złp., zapłacimy trzecią część 58 duk. to jest 19 duk.+6 złp., co stanowi czwarty cząstkowy iloczyn. Pozostaje więc już tylko do obliczenia, ile się zapłaci za 348 pudów płacąc pud po 18 gr. W tym przeto celu 18 gr. rozkładamy na cząstki wielokrotne względem jednego złotego, to jest na 15+3. Ponieważ płacąc pud po 1 złp., za 348 pudów zapłaciliśmy 19 duk.+6 złp., więc płacąc po 15 gr. czyli po połowie złotego, zapłacimy połowę 19 duk.+6 złp. to jest 9 duk.+12 złp., co stanowi piąty cząstkowy iloczyn. I podobnież, skoro 3 grosze jest piątą częścią 15 groszy, a płacąc pud po 15 gr. za 348 pudów zapłaciliśmy 9 dukatów+12 złp. więc płacąc tylko po 3 gr. zapłacimy piątą część 9 duk.+12 złp. to jest 1 duk.+16 złp.+24 gr., co stanowi szósty i zarazem ostatni cząstkowy iloczyn. Dodawszy teraz wszystkie cząstkowe iloczyny do siebie, otrzymamy na ogół 1306 duk.+16 złp.+24 gr. szukaną wartość 348 pudów wosku.

Uwaga. Przy odbywaniu działania sposobem rozbiorowym, często zdarza się że potrzeba brać danéj liczby połowę, część trzecią, czwartą i t. d. jak to mogliśmy już postrzedz w powyżéj opisaném zagadnieniu. Zwracamy więc uwagę uczących, żeby takowe cząstkowe działania wykonywane były przez uczniów z pamięci, do czego nauczyciel wprawiać ich należycie powinien. Chociaż rzecz ta właściwie należy do rachunków pamięciowych, przy których podobne działania wyjaśniają się, sądzimy jednakże że nie będzie nam wzięte za złe, że pomnąc na zupełny brak dzieł traktujących o tym nowym rodzaju rachunków tak ważnych przy wykładzie początkowych wiadomości z arytmetyki, i mając wzgląd na dobro kształcącéj się młodzieży, poświęcimy tu chwil kilka na pokazanie sposobu wykonywania takowych działań z pamięci. Dajmy że mamy znaleść piątą część 165, w tym przeto celu liczbę 165 rozkładamy sobie w pamięci na 100+50+15; piąta część 100 jest 20, piąta część 50 jest 10, a piąta część 15 jest 3, zebrawszy przeto wypadki otrzymane, będziemy mieli 20+10+3=33, zatém piątą częścią liczby 165 jest 33. Dajmy że mamy wziąść trzecią część 588; liczbę 588 rozkładamy w pamięci na 300+270+18, trzecia część 300 jest 100, trzecia część 270 jest 90 a trzecia część 18 jest 6, zatém trzecia część 588 jest 100+90+6 czyli 196. Tym więc sposobem z łatwością potrafimy brać żądaną część danéj chociażby największéj liczby, rozkładając ją na liczby wielokrotne względem danego dzielnika. Dajmy jeszcze jeden przykład: znaleść trzecią część 49 duk.+13 złp.; 49 dukatów rozkładamy sobie w pamięci na 30+18+1, trzecia część 30 jest 10, trzecia część 18 jest 6, więc rszem 10+6 czylii 16 duk. pozostał jeszcze jeden dukat czyli 18 złp. które złączone z 13 złp. danemi w liczbie wielorakiéj utworzą razem 31 złp.; te 31 złp. rozkładamy znowu na 30+1 trzecia część 30 złp. jest 10 złp., a trzecia część 1 złp. jest 10 gr. zatém trzecia część 49 duk.+13 złp. jest 16 duk.+10 złp.+10 gr.

Zagadnienie 2. Jeżeli głowa cukru waży 24 funtów, 26 łut. i 2 zołot.; ileż ważyć będą 1238 głów tego samego gatunku i téj saméj wagi cukru?

Wzór działania.

	Mnożna	24 funt.+26 łut.+2 zołot.	
	Mnożnik	1238	
		4952	
		2476	
	po 24 funt.	29712 funt.	
po 26 łut.	po 16 łut.	619 „	
	po 8 łut.	309 „	+ 16 łut.
	po 2 łut.	77 „	+ 12 „
	po 2 zołot.	25 „	+ 25 „ + 1 zołot.
		30743 fun.	+ 21 łut. + 1 zołot.

Objaśnienie. Jeżeliby głowa cukru ważyła tylko 24 funtów, natenczas 1238 głów ważyłyby $24 \times 1238 = 29712$ funtów, co stanowi pierwszy cząstkowy iloczyn. A ponieważ każda głowa waży jeszcze po 27 łutów, więc ażeby się dowiedziéć o ile jeszcze więcej ważyć będą 1238 głów, liczbę 26 łutów rozkładamy na 16+8+2, z których liczba 16 łutów jest połową funta, 8 łutów połową 16 łutów, a 2 łuty czwartą częścią 8 łutów. Jeżeliby głowa cukru ważyła 1 funt, wtedy 1238 głów ważyłyby 1238 funtów; kiedy więc głowa cukru waży 16 łutów czyli pół funta, to 1238 głów ważą 1238 pół funtów czyli 619 funtów, co stanowi drugi cząstkowy iloczyn. Kiedy głowa cukru ważyła 16 łutów, natenczas 1238 głów ważyły 619 funtów, skoro więc głowa cukru waży 8 funtów, przeto 1238 głów ważą połowę 619 funtów to jest 309 funtów+16 łutów, co stanowi trzeci cząstkowy iloczyn. I podobnież: wiedząc że 2 łuty są czwartą częścią 8 łutów; dla znalezienia ile ważyć będą 1238 głów, kiedy jedna głowa waży 2 łuty, należy wziąść czwartą część 309 funtów+16 łutów, co daje 77 fun.+12 łut. na czwarty cząstkowy iloczyn. Dotąd obliczyliśmy ile ważą 1238 głów cukru, kiedy jedna waży 24 funtów i 26 łutów, pozostaje więc do obliczenia ile ważyć jeszcze będą 1238 głów, skoro każda waży jeszcze 2 zołotniki. W tym przeto celu uważam, że 2 zołotniki są trzecią częścią 2 łutów, bierzemy więc trzecią część 77 fun.+12 zoł. co daje 25 fun.+25 łut.+1 zołot. na piąty i zarazem na ostatni cząstkowy iloczyn. Zebrawszy teraz wszystkie cząstkowe iloczyny, otrzymujemy na ogół 30743 fun. +21 łut.+1 zołot. liczbę będącą odpowiedzą na pytanie.

PRZYPADEK II.

99. Mnożna liczbą jednogatunkową; mnożnik wieloraką.

Zagadnienie 1. Ile się zapłaci za 5 pudów, 32 funtów i 24 łutów herbaty, któréj pud kosztuje 280 rubli?

Zagadnienie to możemy rozwiązać dwojakim sposobem.

Sposób pierwszy. Liczbę wieloraką 5 pudów, 32 funtów i 24 łutów zamieniamy na jednogatunkową wyrażoną w jednostkach gatunku najniższego, to jest w łutach, i znajdujemy że tych łutów jest 7448. Następnie powiadamy, że jeżeliby łut téj herbaty kosztował 280 rubli, natenczas 7448 łutów kosztowałyby 280 $\times$7448=2085440 rubli; a ponieważ nie za 1 łut płacimy 280 rubli, lecz za 1 funt czyli za 1280 łutów, więc liczyliśmy 1280 razy drożéj, zatém iloczyn 2085440 rubli jest 1280 razy większy od prawdziwego, trzeba go przeto zmniejszyć 1280 razy czyli przez 1280 podzielić, co uskuteczniwszy otrzymamy na iloraz 1629 rubli, 25 kop. szukaną wartość 5 pud., 32 fun. i 24 łut. herbaty.

Sposób drugi powszechnie używany.

Wzór działania.

	Mnożna	280 rub.
	Mnożnik	5 pud.+32 fun.+24 łut.
	za 5 pud.	1400 rub.
za 32 funt.	za 20 funt.	140 „
	za 10 funt.	70 „
	za 2 funt.	14 „
za 24 łut.	za 16 łut.	3 „ + 50 kop.
	za 8 łut.	1 „ + 75 kop.
		1629 rub.+ 25 kop.

Objaśnienie. Kiedy pud herbaty kosztuje 280 rubli, więc 5 pudów kosztuje 280×5 czyli 1400 rubli co stanowi pierwszy cząstkowy iloczyn. Żeby się dowiedzieć ile zapłacimy za 32 funtów herbaty, liczbę 32 rozkładamy na 20 fun.+10 fun.+2 fun., z których 20 funtów jest połową puda, 10 fun. połową 20 fun. a 2 fun. piątą częścią 10 funtów. Skoro więc pud płacimy po 280 rubli, przeto za 20 fun. jako za połowę puda zapłacimy połowę 280 rub. to jest 140 rub. co stanowi drugi cząstkowy iloczyn. Skoro za 20 fun. płacimy 140 rub. przeto za 10 fun. zapłacimy połowę 140 rubli to jest 70 rub., co stanowi trzeci cząstkowy iloczyn. Skoro za 10 fun. płacimy 70 rub. przeto za 2 fun. zapłacimy piątą część 70 rubli to jest 14 rub., co stanowi czwarty cząstkowy iloczyn. Pozostaje jeszcze do obliczenia, ile zapłacimy za 24 łutów; w tym przeto celu 24 łutów rozkładamy na 16 łutów+8 łutów. Ponieważ 16 łutów są czwartą częścią 2 fun., a za 2 fun. płacimy 14 rub., więc za 16 łut. zapłacimy czwartą część 14 rub. czyli 3 ruble+50 kop., co stanowi piąty cząstkowy iloczyn. A kiedy za 16 łut. płacimy 3 rub.+50 kop., przeto za 8 łutów zapłacimy połowę 3 rub.+50 kop. to jest 1 rub.+75 kop., co stanowi szósty cząstkowy iloczyn. Po dodaniu wszystkich cząstkowych iloczynów do siebie, otrzymujemy na ogół 1629 rub.+25 kop. wartość 5 pudów+32 funtów+24 łutów herbaty.

Zagadnienie 2. Za 16 włók, 24 morgów i 186 prętów kwadratowych, ile wypadnie zapłacić, płacąc za włókę 450 rubli?

Wzór działania.

Mnożna 450 rub.
Mnożnik 16 włók+24 mor.+185 pręt. kw.

		2700		
		450		
	za 16 włók	7200	rub.	
za 24 mor.	za 15 mor.	225	„	
	za 6 mor.	90	„	
	za 3 mor.	45	„	
za 186 pręt.	za 150 pręt.	7	„	+50 kop.
	za 30 pręt.	1	„	+50 „
	za 6 pręt.	-	„	+30 „
		7569	rub.	+30 kop.

Objaśnienie. Mnożymy 450 rub. to jest wartość jednéj włóki przez 16 i znajdujemy, że za 16 włók zapłacić należy 7200 rub., co stanowi pierwszy cząstkowy iloczyn. Następnie 24 morgów rozkładamy na 15 morg.+6 morg.+3 morg.; za 15 morg. zapłacimy połowę tego co za włókę, t. j. połowę 450 rub. co daje 225 rub. na drugi cząstkowy iloczyn. Za 6 morg. zapłacimy piątą część tego co za włókę, to jest piątą część 450 rub., co daje 90 rub. na trzeci cząstkowy iloczyn. Za 3 morg. zapłacimy połowę tego co za 6 morg. to jest połowę 90 rub. co daje 45 rub. na czwarty cząstkowy iloczyn. W końcu żeby się dowiedzieć ile za 186 pręt. zapłacimy, 186 pręt. rozkładamy na 150 pręt.+30 pręt.+6 pręt. Za 150 pręt zapłacimy szóstą część tego co za 3 morg., to jest szóstą część 45 rub. co daje 7 rub.+50 kop. na piąty cząstkowy iloczyn. Za 30 pręt. zapłacimy piątą część tego co za 150 pręt., to jest piątą część 7 rub.+50 kop. co daje 1 rub. +50 kop. na szósty cząstkowy iloczyn. Za 6 pręt. zapłacimy piątą część tego co za 30 pręt., to jest piątą część 1 rub.+50 kop. co daje 30 kop. na siódmy cząstkowy iloczyn. Ogół z tych siedmiu cząstkowych iloczynów daje 7569 rub.+30 kop. wartość szukaną dla 16 włók, 24 morg. i 186 pręt. kwad.

PRZYPADEK III.

100. Mnożna i mnożnik liczbami wielorakiemi.

Zagadnienie 1. Ile wypadnie zapłacić za 23 czećwierci, 6 czećwierzyków i 5 garncy pszenicy, któréj czećwierć kosztuje 5 rubli i 76 kopiejek?

Wzór działania.

Mnożna 5 rub.+76 kop.
Mnożnik 23 czećw.+6 czećk+5 garn.

za 23 czećw.	po 5 rub.	115 rub.		
	po 50 kop.	11 „	+50	kop.
	po 25 kop.	5 „	+75	„
	po 1 kop	—	23	„
za 6 czećwk.	za 4 czećk.	2 rub.	+88	kop.
	za 2 czećk.	1 „	+44	„
za 5 garncy	za 4 garnce	—	36	„
	za 1 garniec	—	9	„
		137 rub.	+ 25	kop.

Objaśnienie. Uważamy naprzód jakoby kupiono tylko 23 czećwierci. Gdyby czećwierć płacono po 5 rubli, natenczas za 23 czećwierci zapłaconoby 115 rubli. Ale że czećwierć płaci się nie tylko po 5 rubli, ale jeszcze i po 76 kop., w tym przeto celu 76 kop. rozkładamy na 50 kop.+25 kop.+1 kop. Za 23 czećwierci po 50 kop. czyli po pół rubla zapłacimy 23 pół rublów czyli 11 rub.+50 kop. Za 23 czećwierci po 25 kop. zapłacimy połowę 11 rub.+50 kop., to jest 5 rub.+75 kop. Za 23 czećwierci po 1 kop. zapłacimy 23 kop. Obliczamy teraz, ile się zapłaci za 6 czećwierzyków, rozkładając je na 4 czećwierzyki i 2 czećwierzyki. Za 4 czećwierzyki zapłacimy połowę tego co za czećwierć, to jest połowę 5 rub.+76 kop. co daje 2 rub.+88 kop.; a za 2 czećwierzyki połowę 2 rub.+88 kop. co daje 1 rub.+44 kop. Nakoniec żeby się dowiedzieć, ile zapłacimy za 5 garncy, rozkładamy je na 4 garnce+1 garniec. Za 4 garnce zapłacimy czwartą część tego co za 2 czećwierzyki to jest czwartą część 1 rub.+44 kop. co daje 36 kop.; a za 1 garniec czwartą część 36 kop. to jest 9 kop. Zebrawszy wypadki częściowo otrzymane, znajdujemy na ogół 137 rub.+25 kop. szukaną wartość 23 czećwierci, 6 czećwierzyków i 5 garncy.

Zagadnienie to również jak wszystkie jemu podobne, moglibyśmy także rozwiązywać sposobami podanemi w przypadku drugim, to jest wyrażając obie liczby wielorakie w jednostkach gatunku najniższego albo w jednostce gatunku najwyższego, lecz obu tych sposobów nie radzilibyśmy używać jako wymagających dłuższego czasu.

ZAGADNIENIA.

1. Jeżeli za jeden rubel dostajemy tasiemki 12 arszynów i 6 werszek, to ileż téj saméj tasiemki dostaniemy za 25 rubli? (*Odp.* 309 arszynów i 6 werszek).

2. Ile wypadnie zapłacić za 37 arszynów sukna, którego arszyn kosztuje 3 ruble i 85 kopiejek? (*Odp.* 142 rub. 45 kopiejek).

3. Pewna liczba ludzi spożyła w jednym dniu mąki 12 cze-

ćwierci, 5 czećwierzyków i 6 garncy; taż sama liczba ludzi, w tym samym stosunku spożywając dziennie, ile spożyje za dni 348? (*Odp.* 4426 czećwierci i 1 czećwierzyk).

4. Pewien gospodarz wysiał pszenicy 287 czećwierci, 3 czećwierzyki i 5 garncy: po omłocie pokazało się że jedno ziarno zasiane wydało 15. Ile było pszenicy po omłóceniu całego zbioru? (*Odp.* 4311 czećwierci, 6 czećwierzyków i 3 garnce).

5. Jeżeli jednemu robotnikowi należy się 5 talarów, 4 złp. i 17 groszy; ileż razem należéć się będzie 87 robotnikom, którzy tęż samą co pierwszy pracę ukończyli? (*Odp.* 501 talarów, 1 złp. i 9 groszy).

6. Ile kosztować będzie 35 sążni pewnéj roboty, wiedząc że sążeń kosztuje 2 duk., 15 złp. i 25 groszy? (*Odp.* 100 duk., 14 złp. i 25 groszy).

7. Ile wyjdzie sukna na 180 mundurów, kiedy na jeden mundur wychodzi 1 arszyn i 13 werszek? (*Odp.* 326 arszynów i 4 werszek).

8. Ile jest arszynów i werszek w 45 sztukach materyi jedwabnéj, wiedząc że w każdéj sztuce jest 12 arszynów i 5 werszek? (*Odp.* 554 arszynów i 1 werszka).

9. Przywieziono do magazynu 132 worków mąki, z których 105 ważyły po 6 pudów, 25 funtów i 8 łutów, reszta zaś po 6 pudów, 12 funtów i 12 łutów. Ileż ważyła wszystka mąka? (*Odp.* 866 pudów, 25 funtów i 12 łutów).

10. Ile potrzeba miedzi do odlania 13 dzwonów, jeżeli w każdym ma być miedzi 27 pudów, 5 funtów, 24 łutów i 1 zołotnik? (*Odp.* 352 pudów, 34 funtów, 28 łutów i 1 zołotnik).

11. Jaką drogę przejdzie podróżny w 8 dniach, jeżeli na godzinę uchodzi 4 wiorsty, 81 sażeni i 2 arszyny; przypuściwszy że 12 godzin dziennie przeznacza na podróż? (*Odp.* 399 wiorst i 340 sażeni).

12. Jeżeli pud herbaty kosztuje rubli 90, ile się zapłaci za 5 pudów, 35 funtów i 16 łutów? (*Odp.* 529 rub., 87 kop. i 1 deneżka).

13. Ile się zapłaci za dobra obejmujące 2709 dziesiatyn i 850 sażeni kwadratowych, jeżeli jednę dziesiatynę ugodzono po 54 rubli? (*Odp.* 146305 rubli, 17 kop. i 1 deneżka).

14. Kupując dobra obejmujące 128 włók, 18 morgów i 125 prętów kwadratowych, zgodzono się płacić 450 rubli za jednę włókę. Ile za te dobra zapłacono? (*Odp.* 57876 rub. i 25 kopiejek).

15. Kupiono 29 arszynów i 5 werszek materyi jedwabnéj, płacąc 8 rubli za arszyn. Ile za nią zapłacono? (*Odp.* 234 rub. i 50 kopiejek).

16. Kupiono 5 czećwierci, 5 czećwierzyków i 3 garnce pszenicy, płacąc 8 rubli za czećwierć. Ile za tę pszenicę zapłacono? (*Odp.* 45 rub., 37 kop. i 1 deneżkę).

17. Do składu materyałów piśmiennych nadesłano papieru 15 ryz, 6 liber i 12 arkuszy, którego ryza kosztuje 9 rubli. Ile ogółem ma wartości ten papier? (*Odp.* 137 rubli, 92 kopiejek i 1 deneżkę).

18. Pewien handlarz zboża, miał zysku na każdéj czećwierci sprzedanéj pszenicy 2 rub. i 36 kop. Na 257 czećwierciach, 4 czećwierzykach i 4 garncach, ile zarobił? (*Odp.* 607 rub., 80 kop. i 1 deneżkę).

19. Na obicie mebli kupiono 23 arszynów i 11 werszek adamaszku, płacąc za arszyn 1 rub. i 80 kop. Ile za adamaszek zapłacono? (*Odp.* 42 rub., 63 kop., 1 deneżkę i 1 połuszkę).

20. Kupiono 65 pudów i 27 funtów wosku, płacąc za pud 10 rubli i 40 kop. Ile za ten wosk zapłacono? (*Odp.* 683 rub. i 2 kopiejek).

21. Za sukna łokci 19, ćwierci 3 i cali 5 dawnéj miary, ile wypadnie zapłacić, jeżeli za łokieć żądają 2 duk., 8 złp. i 12 gr.? (*Odp.* 49 duk., 4 złp., 4 gr. i pół).

22. Do składu wódek zakupiono okowity 10-éj próby 12 wiader i 7 kružek, płacąc po 6 rubli i 60 kop. za wiadro. Ile zapłacono za tę okowitę? (*Odp* 81 rub. i 51 kopiejek).

23. Rzeźnik zakupił na jarmarku 5 wieprzy, 3 wołów i 9 baranów. Ile na to wydał pieniędzy, jeżeli wieprza płacił po 18 rubli i 67 kop., wołu po 47 rubli i 14 kop., a barana po 2 ruble i 80 kop? (*Odp.* 259 rub. i 97 kopiejek).

24. Ile zapłacono za 12 postawów sukna, wiedząc że w każdym postawie jest 38 arszynów i 5 werszek, i że arszyn ugodzono po 5 rubli i 30 kop.? (*Odp.* 2436 rub., 67 kop. i 1 deneżkę.)

25. Obywatelowi N. przysłany został rachunek od kupca warszawskiego za wybrane u niego następujące towary: 124 funtów i 8 łutów cukru po 28 kop. funt; 5 funtów herbaty po 4 rub. i 27 kop.; 36 funtów i 16 łutów rodzynków po 42 kop. funt; 16 funtów i 8 łutów migdałów po 27 kop funt; wina węgierskiego 18 garncy i 3 kwarty po 12 rubli i 40 kop. garniec; araku 7 garncy i 2 kw. po 5 rub. i 60 kop. garniec; oliwy 2 garnce i 1 kw. po 3 rub. i 73 kop. garniec. Ileż więc ogółem należy się kupcowi pieniędzy za wybrane u niego towary przez pomienionego obywatela? (*Odp.* 348 rub., 72 kop., 1 deneżkę i 1 połuszkę).

26. W sklepie bławatnym sprzedano w ciągu tygodnia następujące towary: atłasu w ciężkim gatunku 12 arszynów i 4 werszek po 3 ruble i 20 kop. arszyn; mory 3 arszynów i 12 werszek po 2 rub. 50 kop. arszyn; mantyny 25 arszynów i 8 werszek po 1 rub. 69 kop. arszyn; aksamitu 5 arszynów i 3 werszek po 3 rub. 36 kop arszyn; adamaszku jedwabnego 13 arszynów i 5 werszek po 2 rub. 84 kop. arszyn; adamaszku wełnianego 17 arszynów i 4 werszek po 1 rub. 72 kop. arszyn; materyi wełnianéj 9 arszynów i 12 werszek po 1 rub. 50 kop. arszyn; koronki brabanckiéj 11 arszynów i 4 werszek po 6 rub. 75 kop. arszyn; koronki francuzkiéj 5 arszynów i 4 werszek po 2 rub. 50 kop. arszyn; koronki brukselskiéj 7 arszynów i 6 werszek po 4 rub. 44 kop. arszyn; 3 szale francuzkie po 75 rub. 40 kop. jeden; 2 szale koronkowe po 53 rub. 67 kop. jeden; wstążki atłasowéj 18 arszynów po 49 kop.; wstążki morowéj 33 arszynów po 75 kop.; wstążki mantynowéj 28 arszynów po 53 kop.; sztukę weby za 45 rub.; batystu szkockiego 20 arszynów po 2 rub. 25 kop.; 3 tuzinów chustek webowych po 1 rub. 43 kop jedna; tuzin chustek fularowych, z których 6 po 2 rub. 20 kop., a resztę po 2 rub. 80 kop.; tiulu brukselskiego 17 arszynów i 7 werszek po 1 rub. 84 kop. arszyn; gazy 13 arszynów i 7 werszek po 48 kop. arszyn. Ile razem utargowano w ciągu tego tygodnia? (*Odp.* 904 rub., 97 kop. i 1 deneżkę.)

Dzielenie liczb wielorakich.

101. Dzielenie liczb wielorakich rozdzielamy na dwa przypadki:

1. Jeżeli dzielna i dzielnik są tego samego gatunku pod względem ich głównych jednostek.

2. Jeżeli dzielna i dzielnik są różnego gatunku pod względem ich głównych jednostek.

PRZYPADEK I.

102. Jeżeli dzielna i dzielnik są tego samego gatunku pod względem ich jednostek głównych, wtedy należy obie liczby wielorakie zamienić na jednogatunkowe, wyrażając je w jednostkach gatunku najniższego, jaki wchodzi w skład obu liczb danych, następnie liczby ztąd otrzymane podzielić przez siebie, a iloraz według warunków zagadnienia otrzymany, będzie odpowiedzią na pytanie:

Zagadnienie 1. Ile można mieć łyżek z 41 funtów, 8 łutów i 2 zołotników srebra, wiedząc że na każdą łyżkę potrzeba srebra 4 łuty i 2 zołotniki?

Wzór działania.

```
     41
     32                          4
    ----                         3
     82                        --------
    123                        12+2=14 zołot.
  --------
   1312+8=1320
              3
          ----------
          3960+2=3962 zołot.
        3962 | 14
         28  |-----
        ---- |283 łyżek.
         116
         112
        ----
          42
          42
        ----
```

Objaśnienie działania. Zamieniwszy obie liczby wielorakie na jednogatunkowe, znajdujemy, że 41 funt.+8 łut.+2 zołot. =3962 zołotnikom, a 4 łut.+2 zołot.=14 zołotnikom. Zadanie więc możemy teraz wysłowić w ten sposób: ile otrzymamy łyżek z 3962 zołotników, kiedy na jednę potrzeba 14 zołotników; z natury przeto zadania wynika, że ile razy 14 zołot. da się odjąć od 3962 zołot. czyli ile razy 14 pomieści się w 3962, tyle będzie łyżek (Nr. 93). Dzieląc zatém 3962 przez 14, znajdujemy na iloraz liczbę 283, będącą odpowiedzią na pytanie.

Zagadnienie 2. Sażeń pewnéj roboty kosztuje 2 rub. i 66 kop.; za 63 rub. i 27 kop. ile otrzymamy sażeni téj saméj roboty?

Wzór działania.

63 rub.+27 kop.=6327 kop.; 2 rub.+66 k.=266 k.

$$
\begin{array}{r|l}
6327 & 266 \\
\underline{532} & \overline{23 \text{ saż.}+5 \text{ stóp}+6 \text{ cali.}} \\
1007 & \\
\underline{798} & \\
209 & \\
\underline{7} & \\
1463 & \\
\underline{1330} & \\
133 & \\
\underline{12} & \\
266 & \\
\underline{133} & \\
1596 & \\
\underline{1596} & \\
0 &
\end{array}
$$

Objaśnienie działania. Zamieniwszy obie liczby wielorakie na kopiejki, możemy zadanie w ten sposób wysłowić: ile otrzymamy sażeni za 6327 kopiejek, kiedy jeden sażeń kosztuje 266 kopiejek. Należałoby więc 266 kop. odejmować od 6327 kop. dotąd, dopóki można, i za każdym odjęciem powiedzieć, że bierzemy wartość jednego sażenia; ile więc razy 266 kop. da się odjąć od 6327 kop. czyli ile razy 266 pomieści się w 6327, tyle otrzymamy sażeni (Nr. 93). Jakoż dzieląc 6327 przez 266, otrzymujemy na iloraz 23 sażeni, a na resztę 209 kop. Żeby się teraz dowiedzieć ile jeszcze dostaniemy stóp téj roboty za pozostałe 209 kop. należałoby pierwéj obliczyć po ile kopiejek wypada jedna stopa téj roboty. A ponieważ sażeń téj roboty kosztuje 266 kop., przeto wartość jednéj stopy będzie siódmą częścią 266 kop.; dzieląc więc teraz 209 kop. przez wartość jednéj stopy, to jest przez siódmą część 266 kop. na iloraz otrzymamy liczbę stóp jaką otrzymamy za pozostałe 209 kopiejek. Zważywszy jednak że przy takiém postępowaniu rzadko kiedy uniknąć możemy działań z ułamkami, przeto w miejsce dzielenia 209 przez siódmą część 266, dzielimy liczbę 7 razy większą od 209, to jest 1463 przez 266 i otrzymujemy na iloraz 5 stóp, a na resztę 133. Dla podobnéj przyczyny, żeby znaleść ile jeszcze otrzymamy cali, pozostałą resztę 133 mnożymy przez 12 a iloczyn 1596 dzielimy przez 266 i znajdujemy 6 cali na iloraz. Więc za 63 rub. i 27 kop. otrzymamy 23 saż.+5 stóp+6 cali.

PRZYPADEK II.

103. Dzielna i dzielnik są różnego gatunku pod względem ich głównych jednostek.

Zagadnienie 1. 18 czynszowników posiada przestrzeń mającą 61 dziesiatyn i 570 sażeni kwadratowych. Ile wypada na jednego czynszownika?

Wzór działania.

<table>
<tr><td>61 dzies.+570 saż. kw.</td><td>18</td></tr>
<tr><td>54</td><td>3 dzies.+965 saż. kw.</td></tr>
<tr><td>7</td><td></td></tr>
<tr><td>2400</td><td></td></tr>
<tr><td>16800</td><td></td></tr>
<tr><td>570</td><td></td></tr>
<tr><td>17370 saż. kw.</td><td></td></tr>
<tr><td>162</td><td></td></tr>
<tr><td>117</td><td></td></tr>
<tr><td>108</td><td></td></tr>
<tr><td>90</td><td></td></tr>
<tr><td>90</td><td></td></tr>
<tr><td>0</td><td></td></tr>
</table>

Objaśnienie działania. Kiedy 18 czynszowników posiada przestrzeń wynoszącą 61 dziesiatyn i 570 sażeni kwadratowych, więc jeden czynszownik posiada 18 razy mniéj, czyli 18-tą część 61 dziesiatyn i 570 sażeni kwadratowych; należy więc liczbę wieloraką 61 dziesiatyn i 570 sażeni kwadratowych podzielić przez 18. Dzieląc naprzód 61 dziesiatyn przez 18, otrzymujemy 3 dziesiatyn na iloraz, a na resztę 7 dziesiatyn, które zamieniamy na sażenie kwadratowe mnożąc 7 przez 2400 .Do 16800 sażeni kw. dodawszy 570 sażeni kw. danych w liczbie wielorakiéj, ogół ten dzielimy przez 18 i otrzymujemy 965 sażeni kw. na iloraz, a zero na resztę. Szukanym przeto ilorazem jest 3 dziesiatyn i 965 sażeni kwadratowych.

Zagadnienie 2. Za 13 pudów i 19 funtów pewnego towaru zapłacono 1870 rub. i 33 kopiejek. Po ile wypada funt tego towaru?

Zamieniwszy 13 pudów i 19 funtów na funty, znajdujemy że tych funtów jest 539. A ponieważ za 539 funtów zapłacono 1870 rub. i 33 kop., więc za jeden funt wypada zapłacić 539 razy mniéj; należy przeto 1870 rub. i 33 kop. podzielić przez 539.

Wzór działania.

1870 rub.+33 kop.	539
1617	3 rub.+47 kop. wartość jednego funta.
253	
100	
25300	
33	
25333 kop.	
2156	
3773	
3773	
0	

Zagadnienie 3 Za 23 czećwierci 6 czećwierzyków i 5 garncy pszenicy, zapłacono 259 rub. i 25 kop. Po ile wypada czećwierć téj pszenicy?

Czećwierci 23, czećwierzyków 6 i garncy 5 zamieniwszy na garnce, znajdujemy że tych garncy jest 1525. Skoro 1525 garncy kosztują 259 rub. i 25 kop., przeto jeden garniec kosztuje 1525 razy mniéj; podzieliwszy więc 259 rub. i 25 kop. przez 1525, na iloraz otrzymamy wartość jednego garnca. A że nie pytamy się w zadaniu o cenę garnca, lecz o cenę czećwierci, należałoby więc otrzymaną wartość jednego garnca pomnożyć przez liczbę garncy w czećwierci, to jest przez 64. Chcąc zaś żeby iloraz wypadł od razu 64 razy większy, potrzeba pierwéj dzielną 259 rub.+25 kop. pomnożyć przez 64, a potém dopiero podzielić przez 1525 (Nr. 72).

Wzór działania.

```
                 259 rub.+25 kop.
                  64
               ─────────────
                1036
               1554
               ─────────
               16576 rub.
po 25 kop.{po 20 kop. 12  „ +80 kop.
          {po  5 kop.  3  „ +20  „
               ─────────────
                16592   „ + -  „  | 1525
                1525              |─────────────────
                ─────             | 10 rub.+88 kop.
                  1342
                     100
                  ──────
                  134200
                  12200
                  ──────
                   12200
                   12200
                   ─────
                       0
```

Zagadnienie 4. Za 49 włók, 20 morgów i 150 prętów kwadratowych gruntu, zapłacono 13287 duk., 9 złp. i 17 gr. Po czemu płacono za włókę?

Wzór działania.

```
49 włók
 30
──────
1470+20=1490 morg.
          300
     ─────────
     447000+1500=44715 pręt. kwad.
```

```
                13287 duk.+9 złp.+17 gr.
                 9000
               119583000 duk.
   po  9 złp.     4500  „
   po  1 złp. . . . . . . . . 500 duk. liczba pomocnicza.
   po 15 gr.       250  „
   po  1 gr.        16  „ +12 złp.
   po  1 gr.        16  „ +12  „
                119587783 duk.+6 złp. | 447150
                 894300               | 267 duk.+8 złp. wartość
                 3015778                          jednéj włóki.
                 2682900
                  3328783
                  3130050
                   198733
                       18
                  1589864
                  198733
                  3577194
                        6
                  3577200 złp.
                  3577200
                        0.
```

ZAGADNIENIA.

1. Z 3 pudów 30 funtów i 6 łutów miedzi, ile można odlać naczyń, jeżeli każde naczynie ma ważyć 5 funtów i 18 łutów? (*Odp.* 27 naczyń).

2. Wiedząc że w jednéj srebrnéj łyżce jest czystego srebra 5 zołotników i 32 doli; ileż mieć można takich łyżek z jednego funta czystego srebra? (*Odp.* 18 łyżek).

3. Najęto pewną liczbę robotników, którym po ukończeniu całéj roboty zapłacono 1137 rubli i 50 kop. Ileż było robotników, jeżeli każdy dostał 12 rubli i 50 kopiejek? (*Odp.* 91 robotników).

4. Jakiego czasu potrzeba do przebycia 996 wiorst i 32 sażeni koleją żelazną, jeżeli na godzinę ujeżdżać będziemy 62 wiorst i 127 sażeni? (*Odp.* 16 godzin).

5. Na ile dni wystarczy 10 berkowców, 2 pudy i 30 funtów chleba dla 137 ludzi, dając każdemu po 3 funtów dziennie? (*Odp.* Na dni 10).

6. Ile dostaniemy ryz, liber i arkuszy papieru za 22 rubli i 32 kop., płacąc za arkusz 2 kopiejki? (*Odp.* Dostaniemy 2 ryz, 6 liber i 12 arkuszy).

7. Na uszycie 89 koszul wyszło płótna 422 arszynów i 12 werszek. Po ile płótna wypada w przecięciu na jednę koszulę? (*Odp.* 4 arszyny i 12 werszek).

8. 25 worków mąki waży 205 pudów, 3 funtów i 4 łutów, ile waży jeden worek téj mąki, jeżeli we wszystkich workach jest jéj jednakowa ilość? (*Odp.* 8 pudów, 8 funtów i 4 łutów).

9. Za 23 dni pracy zapłacono robotnikowi 22 rub. i 8 kop.; po ile mu wypada jedna godzina pracy, przypuściwszy że pracował dziennie po 8 godzin? (*Odp.* Po 12 kop. godzina).

10. Za sztukę sukna zawierającą 36 arszynów zapłacono 136 rubli i 8 kop. Po czemu wypada arszyn? (*Odp.* Po 3 rub. i 78 kopiejek).

11. W 48 funtach, 8 łutach i 2 zołotnikach wagi handlowéj, ile jest funtów aptekarskich, wiedząc że funt aptekarski waży 84 zołotników, a uncya 7 zołotników? (*Odp.* 55 funtów i 2 uncyj).

12. Za 23 beczek, 6 wiader i 5 krużek wina zapłacono 3502 rub. i 17 kop. Po czemu wypada jedno wiadro? (*Odp.* Po 3 rub. i 78 kopiejek).

13. Za 53 dziesiatyn, 900 sażeni kwadratowych i 8 arszynów kwadratowych grnntu, zapłacono 23058 rub. i 16 kop. Po czemu płacono jednę dziesiatynę? (*Odp.* Po 432 rubli).

14. Za 2 pudy, 24 funtów i 24 łutów herbaty zapłacono 314 rubli i 25 kop. Po czemu wypada jeden funt? (*Odp.* Po 3 ruble).

15. Zakupiono dla wojska mąki 114 berkowców, 8 pudów i 29 funtów, za 1378 rubli i 47 kop. Po ile płacono jeden pud téj mąki? (*Odp.* Po 1 rublu i 20 kopiejek).

16. Do pewnego pensyonu zakupiono 12 sztuk sukna za 2908 rubli i 50 kop. Po ile wypada arszyn tego sukna, jeżeli w każdéj sztuce było 86 arszynów i 9 werszek? (*Odp.* Arszyn tego sukna wypada po 2 rub. i 80 kopiejek).

17. Do handlu zakupiono 325 sztuk chustek fularowych za 685 rubli i 75 kop.; przy sprzedaży zaś brano 31 rubli i 20 kop. za każdy tuzin. Ileż zyskiwano na każdéj chustce? (*Odp.* Zyskiwano 49 kop. na każdéj chustce).

18. Jeżelibym miał dziewięć razy więcéj pieniędzy jak ich dziś mam i nadto 27 rub. i 95 kop., wtedy byłbym w posiadaniu 3263 rub. i 9 kop. Ileż mam dziś pieniędzy? (*Odp.* Mam 359 rubli i 46 kopiejek).

19. Robotników 23 w przeciągu 16 dni wykopali ziemi 360 sażeni sześciennych i 24 stóp sześciennych. Ile dziennie jeden robotnik zarabiał, jeżeli za każdą stopę sześcienną płacono 2 kopiejki? (*Odp.* Jeden robotnik zarabiał dziennie 96 kopiejek).

20. W czterech workach znajdowało się mąki 21 pudów i 28 funtów. Mąka w pierwszym worku była czwartą częścią wszystkiéj mąki; w worku drugim było jéj mniéj 8 łutami od téj ilości, jaka była w pierwszym worku; w trzecim zaś było 1 pudem, 3 funtami i 12 łutami mniéj od téj znowu ilości, jaka była w worku drugim. Potrzeba się dowiedzieć, ile mąki było w worku czwartym? (*Odp.* 6 pudów, 20 funtów i 28 łutów).

21. Przednie koło pocztowéj karety miało 5 arszynów i 4 werszek obwodu, a tylne 6 arszynów i 12 werszek. Ileż obrotów więcéj zrobi od tylnego w rozległości 63 wiorst i 378 sażeni (*Odp.* Koło mniejsze zrobi 4048 obrotów więcéj od tylnego).

22. W dwóch sztukach płótna jest 785 arszynów i 4 werszek. Pierwsza sztuka mieści w sobie dwa razy więcéj płótna jak druga. Ile jest płótna w pierwszéj, a ile w drugiéj sztuce? (*Odp.* W pierwszéj sztuce jest 523 arszynów i 8 werszek: w drugiéj 261 arszynów i 12 werszek).

23. Summa 3389 rub. i 97 kop. ma być podzielona między ojca, matkę i troje dzieci, w ten sposób że dział ojca ma być 3 razy większy od działu matki, a dział każdego dziecka piątą częścią działu matki. Ile dostanie ojciec, ile matka, i ile każde dziecko? (*Odp.* Ojciec dostanie 2210 rubli i 85 kop.; matka 736 rub. i 95 kop.; a dziecko 147 rub. i 39 kopiejek).

24. Dwóch kupców zakupiło razem 186 beczek i 12 wiader oleju. Ile każdy z nich kupił, jeżeli po podziale, okazało się, że pierwszy miał o 6 beczek i 28 wiader więcéj od drugiego?

(*Odp.* Pierwszy kupił 96 beczek i 20 wiader; drugi 89 beczek i 32 wiader).

25. W dwóch skrzyniach jest 13 pudów i 29 funtów herbaty. Jeżelibyśmy z pierwszéj skrzyni przełożyli do drugiéj 8 funtów i 13 łutów, to wtedy w obu skrzyniach byłaby jednakowa ilość herbaty. Ile jest herbaty w pierwszéj a ile w drugiéj skrzyni? (*Odp.* W pierwszéj 7 pudów, 2 funty i 29 łutów; w drugiéj 6 pudów, 26 funtów i 3 łutów).

26. Kupiec mięsza trzy gatunki herbaty: pierwszego gatunku 24 funtów i 24 łutów po 5 rubli funt; drugiego 19 funtów i 8 łutów po 6 rubli funt; trzeciego 16 funtów i 12 łutów po 4 ruble funt. Po ile ma sprzedawać jeden funt mięszaniny, żeby na wszystkiém zyskać 9 rubli i 20 kopiejek? (*Odp.* Funt po 5 rubli i 20 kopiejek).

27. W jakim czasie można zemlić mąkę z 2150 czećwierci, 5 czećwierzyków i 1 garnca żyta; jeżeli to żyto będzie mielone w trzech młynach; wiedząc że młyn pierwszy codziennie może zemlić 16 czećwierci 5 czećwierzyków i 4 garncy, młyn drugi w takimże czasie 14 czećwierci, 4 czećwierzyków i 6 garncy, a młyn trzeci 9 czećwierci, 2 czećwierzyki i 3 garnce? (*Odp.* W 53 dniach).

28. Za 8 arszynów i 10 werszek sukna zapłacono 29 rubli i 26 kop., za 25 arszynów i 9 werszków tego samego gatunku sukna i po téj saméj cenie, ile wypadnie zapłacić? (*Odp.* 88 rubli 99 kopiejek).

29. Pewien handlarz zakupił 125 czećwierci i 5 czećwierzyków mąki, płacąc 8 rubli i 48 kopiejek za czećwierć. Po ile ma spezedawać jednę czećwierć, żeby zyskać na wszystkiém 28 rubli, wiedząc nadto że sprowadzenie téj mąki kosztowało go 12 rubli i 20 kopiejek? (*Odp.* Czećwierć po 8 rubli i 80 kopiejek).

ROZDZIAŁ IV.

Ułamki zwyczajne.

104. Wiemy że dzielenie liczb całkowitych nie zawsze daje się wykonać bez reszty. Jakoż dzieląc 19 przez 6, otrzymujemy na iloraz 3 a na resztę 1. Prawdziwy iloraz powinien być większy od 3, gdyż 6×3 daje w iloczynie liczbę 18 mniejszą od dzielnéj (Nr. 40); a mniejszy od 4, gdyż 6×4 daje liczbę 24 większą od dzielnéj: iloraz więc szukany jest zawarty między liczbami 3 i 4 czyli równy jest 3 jedościom i pewnéj części jedności. Ażeby znaleść tę część jedności, potrzeba pozostałą z dzielenia resztę podzielić na sześć części równych i wziąść jednę taką część. W danym przykładzie na resztę otrzymaliśmy liczbę 1, którą podzieliwszy na sześć równych części, bierzemy jednę taką część, t. j. szóstą część jedności; zatém prawdziwy iloraz z podzielenia 19 przez 6, jest równy 3 jednościom i jednéj szóstéj części jedności.

Jeżelibyśmy zaś z dzielenia na ostatnią resztę otrzymali liczbę większą od jedności, w takim razie należałoby każdą jedność téj reszty, podzielić na tyle równych części, ile jest jedności w dzielniku, i z każdéj tak podzielonéj jedności wziąść jednę taką część. I tak, dajmy że otrzymaliśmy na ostatnią resztę liczbę 4 do podzielenia przez 6. Podzieliwszy każdą jedność na sześć równych części, otrzymamy szóste części jedności, a z każdéj z 4 jedności wziąwszy jednę szóstą część, otrzymamy cztery szóstych części jedności. A ponieważ jedności téj saméj liczby są sobie równe, zatém dosyć jest jednę tylko jedność podzielić na sześć równych części, i z téj jedności wziąść cztery takich szęści, a otrzymamy wielkość takąż samą, to jest cztery szóstych części jedności.

Jednę część lub zbior kilku części jedności na równe części podzielonéj, zowiemy ułamkiem (дробь).

105. Do oznaczenia prawdziwéj wartości ułamku, potrzeba wiedzieć wielkość jednéj części i liczbę tych części. Wielkość jednéj części oceniamy, wiedząc ile ich jest w całéj jedności, czyli na ile równych części jedność podzielona.

Liczbę pokazującą wielkość jednéj części jedności na równe części podzielonéj, zowiemy *mianownikiem* (знаменатель), liczbę zaś pokazującą ile jest takich części *licznikiem* (числитель). Licznik i mianownik razem uważane, zowiemy *wyrazami ułamku*. W czytaniu ułamku wymawiamy pierwéj liczbę licznika, a potem liczbę mianownika, stosując ją do rzeczownika części, np. *pięć dziewiątych* zamiast *pięć dziewiątych części jedności*.

106. Każdy ułamek możemy dwojako pojmować: jako jedna lub kilka części jednéj jedności na równe części podzielonéj; albo jako pewna część jednéj lub kilku jedności: np. ułamek *cztery piątych*, może być uważany jako zbiór czterech części jedności podzielonéj na pięć równych części; albo jako piąta część czterech edności i wtedy wyrażałby iloraz z podzielenia liczby 4 przez 5. To dwojakie pojmowanie ułamku nie zmienia wcale jego wartości; bo jeżeli powyższy ułamek oznaczać będzie część rubla, to jakkolwiekbądź będziemy go uważali, zawsze wartość jego będzie 80 kopiejek: jakoż wartość piątej części rubla jest 20 kopiejek, zatém wartość czterech takich części jest 80 kopiejek i piąta część 4 rubli, czyli 400 kopiejek jest także 80 kopiejek.

Uważanie ułamku za iloraz z dzielenia liczby licznika przez liczbę mianownika, podało sposób wyrażania ułamków temi samemi znakami co liczby całe. W tym więc celu, piszemy naprzód liczbę licznika, podkreślamy ją linijką poziomą (Nr. 9), pod którą umieszczamy liczbę mianownika; np. ułamek *sześć siódmych* jako wyrażający iloraz z dzielenia liczby 6 przez 7, napiszemy tak: $\frac{6}{7}$. W takim kształcie ułamek napisany, zowie się *zwyczajnym*, albo dwuwyrazowym.

Porównywając ułamek z dzieleniem, widzimy, że *licznik jest dzielną, mianownik dzielnikiem, sam zaś ułamek ilorazem.*

107. Sam wyraz *ułamek* jako wzięty od słowa *ułamać*, powinien oznaczać ilość mniejszą od jedności i tak jest w istocie, jeżeli licznik mniejszy od mianownika; lecz nie zawsze z działań ułamkowych otrzymujemy ułamki takiéj postaci: wyrażenie więc ułamkowe może niekiedy oznaczać ilość równą lub większą od jedności. Z tego względu ułamki uważając, rozdzielamy je na *właściwe* i *niewłaściwe*, t. j. na właściwie noszące nazwisko ułamków i na niewłaściwie noszące nazwisko ułamków.

Ułamkiem właściwym (правильная дробь) zowiemy ułamek wyrażający ilość mniejszą od jedności, a takim jest zawsze, kiedy licznik mniejszy od mianownika np. $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{1}{17}$, $\frac{5}{24}$ i t. p.

Ułamkiem niewłaściwym (неправильная дробь) zowiemy ułamek wyrażający ilość równą lub większą od jedności. Ułamek wyraża ilość równą jedności, jeżeli jego licznik równy mianownikowi; np. $\frac{4}{4}$, $\frac{9}{9}$, $\frac{15}{15}$, $\frac{24}{24}$; jeżeli zaś licznik większy od mianownika, wtedy ułamek wyraża ilość większą od jedności np. $\frac{8}{3}$, $\frac{12}{4}$, $\frac{24}{5}$ i t. p.

108. *Z dwóch ułamków mających jednakowe mianowniki ten jest większy, którego licznik jest większy: a z dwóch ułamków mających jednakowe liczniki, ten jest większy, którego mianownik mniejszy.*

Co do 1°. Dajmy że są dane do porównania dwa następujące ułamki: $\frac{8}{15}$ i $\frac{4}{15}$. Mianowniki jednakowe pokazują, że części niemi wyrażone w obu ułamkach są równe, zatém wielkość tego ułamku jest większa, w którym liczba tych części jest większa: a ponieważ liczba tych części jest wyrażona licznikami, więc twierdzenie dowiedzione.

Ztąd wnosimy: *jeżeli dwa ułamki mają jednakowe mianowniki, a nierówne liczniki, to ile razy licznik ułamku pierwszego, jest większy od licznika ułamku drugiego, tyleż razy wielkość ułamku pierwszego jest większa od wielkości ułamku drugiego.* Chcąc przeto dany ułamek powiększyć 2, 3, 4 i t. d. razy, potrzeba tylko tyleż razy powiększyć licznik tego ułamku; chcąc zaś wielkość danego ułamku zmniejszyć 2, 3, 4 i t. d. razy, potrzeba tylko tyleż razy zmniejszyć jego licznik.

Co do 2°. Dajmy że są dane do porównania dwa następujące ułamki: $\frac{5}{12}$ i $\frac{5}{24}$. W ułamkach tych mianowniki nie są jednakowe, więc części niemi wyrażone są nierówne i te z nich są większe, których jest mniéj w całéj jedności, czyli które powstały z podzielenia jedności na mniéj równych części: a ponieważ liczba tych części wyrażona licznikami w obu ułamkach jest jednakowa, więc wielkość tego ułamku jest większa, którego części są większe, czyli którego mianownik mniejszy.

Ztąd wnosimy: *jeżeli dwa ułamki mają jednakowe liczniki a nierówne mianowniki, to ile razy mianownik ułamku pierwszego jest mniej-*

szy od mianownika ułamku drugiego, tyleż razy wielkość ułamku pierwszego większa jest od wielkości ułamku drugiego. Chcąc przeto dany ułamek powiększyć 2, 3, 4 i t. d. razy, potrzeba tylko tyleż razy zmniejszyć jego mianownik; chcąc zaś wielkość danego ułamku zmniejszyć 2, 3, 4 i t. d. razy, potrzeba tylko tyleż razy powiększyć jego mianownik.

A zatém, każdy ułamek można powiększyć dwojakim sposobem: kiedy pomnożymy licznik nie zmieniając mianownika, albo kiedy podzielimy mianownik nie zmieniając licznika i każdy ułamek można pomniejszyć dwojakim sposobem: kiedy podzielimy licznik, zachowując ten sam mianownik, albo kiedy pomnożymy mianownik, zachowując ten sam licznik. A z tego zarazem wypada: że jeżeli oba wyrazy ułamku pomnożymy lub podzielimy przez jednakową liczbę, wielkość ułamku nie odmieni się.

109. Własności ułamków podane w numerze poprzedzającym, mogą być także wyłożone z własności ilorazu (Nr. 72, 73, 74, 75, 76, 77) wychodząc z téj uwagi, że licznik jest dzielną, mianownik dzielnikiem, sam zaś ułamek ilorazem (Nr. 106).

1^0 *Jeżeli licznik pomnożymy przez pewną dowolną liczbę jedności, nie zmieniając mianownika, wielkość ułamku powiększy się tyle razy, ile liczba mnożąca licznik, zawiera w sobie jedności.* Jakoż licznik jest dzielną; a ile razy dzielna zostanie powiększona, tyle razy iloraz się zwiększy, (Nr. 72); że zaś tym ilorazem jest ułamek, zatém ułamek się powiększy; np. $\frac{3\times4}{13}=\frac{12}{13}$.

2^0 *Jeżeli mianownik pomnożymy przez pewną dowolną liczbę jedności, nie zmieniając licznika, wielkość ułamku zmniejszy się tyle razy ile liczba mnożąca mianownik, zawiera w sobie jedności.* Jakoż mianownik jest dzielnikiem; a ile razy powiększony zostanie dzielnik, tyle razy iloraz się zmniejszy (Nr. 74); że zaś tym ilorazem jest ułamek, zatém ułamek się pomniejszy; np. $\frac{5}{6\times13}=\frac{5}{78}$.

3^0 *Jeżeli licznik i mianownik pomnożymy przez jednakową liczbę jedności, wielkość ułamku zostanie taż sama.* Jakoż licznik jest dzielną, mianownik dzielnikiem: a że mnożąc dzielną i dzielnik jednakową liczbą jedności, nie zmieniamy wartości ilorazu (Nr. 76), a tym ilorazem jest sam ułamek, więc wielkość ułamku nie odmieni się; np. $\frac{4\times5}{7\times5}=\frac{20}{35}$

4^0 *Jeżeli licznik podzielimy przez pewną dowolną liczbę jedności,* *nie zmieniając mianownika, wielkość ułamku pomniejszy się tyle razy, ile liczba dzieląca licznik zawiera w sobie jedności.* Jakoż licznik jest dzielną; zmniejszając zaś dzielną, zmniejszamy tyleż razy iloraz (Nr. 73); a że tym ilorazem jest ułamek, więc wielkość ułamku zmniejsza się tyle razy, ile liczba dzieląca licznik, zawiera w sobie jedności; np. $\frac{12:4}{19}=\frac{3}{19}$

5^0 *Jeżeli mianownik podzielimy przez pewną dowolną liczbę jedności, nie zmieniając licznika, wielkość ułamku powiększy się tyle razy, ile zawiera jedności liczba dzieląca mianownik.* Jakoż mianownik jest dzielnikiem; zmniejszając zaś dzielnik, tém samém powiększamy tyleż razy iloraz (Nr. 75); a że tym ilorazem jest sam ułamek, więc wielkość ułamku powiększa się tyle razy, ile zawiera w sobie jedności liczba dzieląca mianownik; np. $\frac{4}{15:3}=\frac{4}{5}$

6^0 *Jeżeli licznik i mianownik podzielimy przez jednakową liczbę jedności, wielkość ułamku nie zmieni się.* Jakoż licznik jest dzielną, mianownik dzielnikiem: a ponieważ dzieląc dzielną i dzielnik jednakową liczbą jedności, nie zmieniamy wartości ilorazu (Nr. 77), a tym ilorazem jest ułamek, więc ułamek nie odmieni się; np. $\frac{18:6}{30:6}=\frac{3}{5}$.

110. Pomnąc, że wyrażenie ułamkowe jest ilorazem z liczby licznika przez liczbę mianownika, (Nr. 106) możemy w każdym ułamku niewłaściwym z łatwością wynaleść liczbę jedności, której tenże ułamek jest równy: co aby osiągnąć, dosyć jest tylko wykonać wskazane dzielenie licznika przez mianownik. Działanie to zowiemy *wyciągnięciem całości z ułamku;* np.

$$\frac{20}{5}=4,\ \frac{38}{7}=5\frac{3}{7};\ \frac{8}{8}=1$$

111. *Ażeby całość wyrazić w postaci ułamku z danym mianownikiem, potrzeba tę całość pomnożyć przez dany mianownik i iloczyn ztąd otrzymany, napisać za licznik, a za mianownik podpisać mianownik dany.* Jakoż liczba 15 wyrażona w postaci ułamku z mianownikiem 8, daje $\frac{15\times8}{8}=\frac{120}{8}$. Bo liczbę 15 wyrazić w postaci ułamku z mianownikiem 8, jestto dowiedzieć się, ile ósmych części ma liczba 15. A skoro jedność ma ósmych części 8, zatém 15 jedności, ma ich 15 razy więcéj, to jest 8×15 czyli 120 ósmych części; więc $15=\frac{15\times8}{8}=\frac{120}{8}$

112. *Ażeby liczbę całkowitą z należącym do niéj ułamkiem wyrazić w postaci jednego ułamku, potrzeba do iloczynu z liczby całkowitéj* *przez mianownik dodać licznik i pod ogółem podpisać mianownik ułamku.* I tak $14\frac{5}{9}$ wyrażone w postaci jednego ułamku, daje $\frac{14\times9+5}{9}$ czyli $\frac{131}{9}$. Albowiem 14 wyrażone w postaci ułamku z mianownikiem 9 daje $\frac{14\times9}{9}=\frac{126}{9}$ (Nr. 111); liczba więc całkowita zawiera w sobie 126 dziewiątych części jedności, a należący do niéj ułamek 5 takichże dziewiątych części jedności, więc liczba całkowita z ułamkiem zawierają w sobie razem 126+5, czyli 131 dziewiątych części jedności czyli $\frac{131}{9}$.

113. *Ażeby liczbę ułamkową imienną zamienić na liczbę imienną gatunku niższego, potrzeba licznik danego ułamku, pomnożyć przez liczbę zamiany, a otrzymany iloczyn podzielić przez mianownik; albo: liczbę zamiany podzielić przez mianownik, a atrzymany iloraz pomnożyć przez licznik.*

Przykład 1. $\frac{4}{5}$ funta zamienić na łuty.

$$\frac{4\times32}{5}=\frac{128}{5}=25\frac{3}{5}$$

Odp. $\frac{4}{5}$ funta czyni łutów $25\frac{3}{5}$.

Objaśnienie. Ułamek $\frac{4}{5}$ funta wyraża iloraz z podzielenia 4 funtów na 5 równych części. Ażeby więc wykonać to dzielenie i otrzymać iloraz wyrażony w łutach, potrzeba pierwéj 4 funty zamienić na łuty, mnożąc 4 funty przez liczbę zamiany 32, a następnie otrzymaną liczbę łutów 128, podzielić przez 5, co daje w ilorazie $25\frac{3}{5}$ żądaną liczbę łutów.

Przykład 2. $\frac{5}{6}$ łokcia zamienić na cale.

$$24 : 6=4; \quad 4\times5=20$$

Odp. $\frac{5}{6}$ łokcia, czyni cali 20.

Objaśnienie. Bo $\frac{5}{6}$ łokcia oznacza 5 części łokcia podzielonego na 6 równych części; a ponieważ cały łokieć ma w sobie cali 24, więc każda szósta część łokcia mieć ich będzie 4, zatém 5 takich części zawierać w sobie będzie cali 5 razy więcéj t. j $4\times5=20$ cali.

Uwaga. Drugiego sposobu działania wtedy tylko dogodnie jest użyć, kiedy liczba zamiany jest wielokrotną względem liczby mianownika.

114. *Azeby liczbę całkowitą imienną wyrazić w ułamku gatunku wyższego, potrzeba daną liczbę napisać za licznik, a liczbę zamiany za mianownik.*

Przykład. 23 kopiejek wyrazić w ułamku rubla.

$$23 \text{ kop.} =\frac{23}{100} \text{ rubla.}$$

Objaśnienie. Bo jedna kopiejka jest $\frac{1}{100}$ częścią rubla, 2 kopiejki są $\frac{2}{100}$ rubla, 3 kopiejki są $\frac{3}{100}$ rubla, zatém 23 kop. są $\frac{23}{100}$ rubla.

Dla téj saméj przyczyny: 9 funtów wyrażone w ułamku puda, dadzą $\frac{9}{40}$ puda; 15 garncy w ułamku czećwierci, dadzą $\frac{15}{64}$ czećwierci; 5 stóp w ułamku sażenia, dadzą $\frac{5}{7}$ sażenia i t. d.

115. *Ażeby liczbę ułamkową imienną wyrazić w ułamku gatunku wyższego, potrzeba mianownik danego ułamku pomnożyć przez liczbę zamiany, zachowując ten sam licznik.*

Przykład. $\frac{5}{6}$ werszki, wyrazić w ułamku arszyna.

$$\frac{5}{6\times16}=\frac{5}{96} \text{ arszyna.}$$

Objaśnienie. Albowiem szóstych części werszki jest 6 w całéj werszce, więc w arszynie jako w ilości 16 razy większéj od jednéj werszki, jest ich 16 razy więcéj, t. j. 6×16 czyli 96, to znaczy że każda $\frac{1}{6}$ część werszki jest $\frac{1}{96}$ częścią arszyna, zatém $\frac{5}{6}$ werszki są $\frac{5}{96}$ arszyna.

Dla téj saméj przyczyny: $\frac{2}{3}$ złp. wyrażone w ułamku talara dadzą $\frac{2}{3\times6}=\frac{2}{18}$ talara; $\frac{3}{4}$ pręta w ułamku sznura, dadzą $\frac{3}{4\times10}=\frac{3}{20}$ sznura; $\frac{5}{6}$ garnca w ułamku czećwierzyka, dadzą $\frac{5}{6\times8}=\frac{5}{48}$ czećwierzyka i t. d.

Przykłady dla wprawy.

1. Znaleść iloraz z liczby 5364 podzielonéj przez 19. (*Odp.* tym ilorazem jest liczba $282\frac{6}{19}$).

2. Znaleść iloraz z liczby 25378 podzielonéj przez 157. (*Odp.* szukanym ilorazem jest liczba $161\frac{101}{157}$).

3. Między ułamkami: $\frac{5}{18}, \frac{16}{18}, \frac{7}{18}, \frac{12}{18}, \frac{9}{18}, \frac{3}{18}$, który jest największy a który najmniejszy? (*Odp.* największym ułamkiem jest $\frac{16}{18}$, najmniejszym zaś $\frac{3}{18}$).

4. Między ułamkami: $\frac{8}{15}, \frac{8}{20}, \frac{8}{11}, \frac{8}{30}$, który jest największy, a który najmniejszy? (*Odp.* ułamek $\frac{8}{11}$ największy a $\frac{8}{30}$ najmniejszy).

5. Wielkość ułamków: $\frac{5}{8}, \frac{6}{11}, \frac{3}{17}, \frac{2}{13}$ powiększyć 3 razy. (*Odp.* ułamkami 3 razy większami są: $\frac{15}{8}, \frac{18}{11}, \frac{9}{17}, \frac{6}{13}$).

6. Ułamki: $\frac{2}{19}$, $\frac{5}{72}$, $\frac{13}{207}$, $\frac{11}{56}$, powiększyć 8 razy. (*Odp.* ułamkami 8 razy większemi są: $\frac{16}{19}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{104}{207}$, $\frac{11}{7}$).

7. Ułamki: $\frac{36}{37}$, $\frac{15}{17}$, $\frac{27}{31}$, $\frac{13}{24}$ zmniejszyć 9 razy. (*Odp.* ułamkami 9 razy mniejszemi są: $\frac{4}{37}$, $\frac{15}{153}$, $\frac{3}{31}$, $\frac{13}{216}$).

8. Liczby: 29, 105, 43, 87, wyrazić w postaci ułamków z mianownikiem 14, czyli dowiedzieć się, ile każda po szczególe z liczb danych zawiera w sobie 14 tych części? (*Odp.* temi ułamkami są: $\frac{406}{14}$, $\frac{1470}{14}$, $\frac{602}{14}$, $\frac{1218}{14}$).

9. Wyciągnąć całości z następujących ułamków niewłaściwych: $\frac{1725}{15}$, $\frac{5352}{12}$, $\frac{297}{15}$, $\frac{5029}{107}$. (*Odp.* szukanemi całościami są 115, 446, 27, 47).

10. W ułamkach niewłaściwych: $\frac{217}{39}$, $\frac{729}{41}$, $\frac{6327}{91}$, $\frac{71025}{987}$, oddzielić całość od ułamku. (*Odp.* dane ułamki równają się: $5\frac{22}{39}$, $17\frac{32}{41}$, $69\frac{48}{91}$, $71\frac{948}{987}$).

11. Liczby: $14\frac{5}{8}$, $145\frac{2}{9}$, $67\frac{12}{31}$, $5803\frac{101}{437}$, wyrazić w postaci ułamków. (*Odp.* szukanemi ułamkami są: $\frac{117}{8}$, $\frac{1307}{9}$, $\frac{2089}{31}$, $\frac{2534012}{437}$).

12. Ułamek korca $\frac{13}{15}$ zamienić na garnce (*Odp.* szukana liczba garncy jest $27\frac{11}{15}$).

13. Ułamek $\frac{3}{5}$ puda, ile czyni funtów? (*Odp.* czyni funtów 24).

14. Ułamek $\frac{8}{13}$ czećwierci, ile czyni czećwierzyków (*Odp.* czyni czećwierzyków $4\frac{12}{13}$).

15. Wiader $18\frac{4}{7}$ zamienić na kružki. (*Odp.* szukana liczba kružek jest $185\frac{5}{7}$).

16. Ułamek $\frac{23}{30}$ morgi ile czyni prętów kwadratowych. (*Odp.* czyni prętów kwadratowych 230).

17. Morgów 13 wyrazić w ułamku włóki. (*Odp.* szukany ułamek włóki jest $\frac{13}{30}$).

18 Saženi kwadratowych 1207 wyrazić w ułamku dziesiatyny (*Odp.* ułamkiem dziesiatyny jest $\frac{1207}{2400}$).

19. Ułamek $\frac{47}{59}$ funta wyrazić w ułamku puda. (*Odp.* szukanym ułamkiem puda jest $\frac{47}{2360}$).

20. Ułamek $\frac{34}{97}$ saženia wyrazić w ułamku wiorsty. (*Odp.* ułamkiem wiorsty jest $\frac{34}{48500}$.

21. Liber $13\frac{4}{5}$ wyrazić w ułamku razy. (*Odp.* szukanym ułamkiem ryzy jest $\frac{69}{100}$

22. Zołotników $27\frac{3}{4}$ wyrazić w ułamku funta. (*Odp.* szukanym ułamkiem funta jest $\frac{111}{384}$).

23. Ułamek $\frac{5}{7}$ łokcia ile czyni ćwierci i cali? (*Odp.* czyni ćwierci 2 i cali $5\frac{1}{7}$).

24. Ułamek czećwierci $\frac{7}{9}$ ile czyni czećwierzyków i garncy? (*Odp.* czyni czećwierzyków 6 i garncy $1\frac{7}{9}$).

Upraszczanie ułamków.

116. Wielkość ułamku nie odmienia się, jeżeli oba jego wyrazy pomnożymy przez jednakową liczbę (Nr. 108 i 109); z tego więc względu jednę i też samą wielkość możemy przedstawiać rozmaicie. Tak np. mnożąc licznik i mianownik ułamku $\frac{4}{5}$ kolejno przez liczby 2, 3, 4, 5 i t. d. otrzymamy:

$$\frac{8}{10},\ \frac{12}{15},\ \frac{16}{20},\ \frac{20}{25},\ \frac{24}{30},\ \frac{28}{35},\ \frac{32}{40},\ \frac{36}{45}\ \text{i t. d.}$$

Wielkość każdego z tych ułamków jest równa ułamkowi $\frac{4}{5}$, zawsze jednak dogodniéj i łatwiéj oceniamy wielkość ułamku $\frac{4}{5}$, bo wyrazy jego oznaczone są mniejszemi liczbami, od wszystkich innych równą z nim wartość mających ułamków.

Dogodność ta była zachętą do szukania sposobów, za pomocą których możnaby było, nie odmieniając wielkości ułamków, wyrażać ich mniejszemi liczbami i na tych właśnie sposobach polega *upraszczanie ułamków* (сокращение дробей).

Chcąc uprościć ułamek, potrzeba oba jego wyrazy, to jest licznik i mianownik podzielić przez jednakową liczbę, od czego jak wiadomo wielkość ułamku nie odmieni się. (Nr. 108 i 109). Ażeby więc ułamek uprościć, potrzeba niezbędnie żeby jego wyrazy były podzielne przez jednakowe liczby; w przeciwnym bowiem razie, jeżeli wyrazy składające ułamek, są pierwszemi względem siebie (Nr. 67), ułamek taki w prostszéj postaci wyrażonym być nie może.

Niech dany będzie do uproszczenia ułamek $\frac{1512}{2268}$.

Z cech podzielności liczb poznajemy, że obie liczby 1512 i 2268 są podzielne przez 4 (Nr. 51), dzieląc więc oba wyrazy danego ułamku przez 4, otrzymamy ułamek 4 razy mniejszemi liczbami przedstawiony, czyli uproszczony przez 4. Jakoż:

$$\frac{1512}{2268} \overset{4}{=} \frac{378}{567}$$

Lecz ułamek $\frac{378}{567}$ daje się także uprościć, bo składające go wyrazy 378 i 567 są podzielne przez 9 (Nr. 55); jakoż w saméj rzeczy:

$$\frac{378}{567} \overset{9}{=} \frac{42}{63}$$

W tym znowu nowym ułamku, liczby 42 i 63 są podzielne przez 3 (Nr. 54), zatem:

$$\frac{42}{63} \overset{3}{=} \frac{14}{21}$$

Otrzymany ułamek $\frac{14}{21}$ widocznie daje się uprościć przez 7, bo oba jego wyrazy 14 i 21 są przez 7 podzielne; jakoż:

$$\frac{14}{21} \overset{7}{=} \frac{2}{3}$$

Wyrazy tego ułamku są już pierwszemi względem siebie (Nr. 67), zatém najprostszą postać danego ułamku $\frac{1512}{2268}$, przedstawi ułamek $\frac{2}{3}$

117. Ułamek $\frac{2355}{35325}$ uprościć, czyli przyprowadzić do najprostszéj postaci.

Dany ułamek daje się naprzód uprościć przez 3, bo liczby 2355 i 35325, są przez 3 podzielne (Nr. 54).

$$\frac{2355}{35325} \overset{3}{=} \frac{785}{11775}$$

Otrzymamy ułamek $\frac{785}{11775}$, daje się także uprościć bo liczby 785 i 11775 są podzielne przez 5 (Nr. 50).

$$\frac{785}{11775} \overset{5}{=} \frac{157}{2355}$$

Cechy podzielności liczb pokazują, że liczba 157 będąca licznikiem ułamku $\frac{157}{2355}$ nie jest podzielną przez żadną z liczb pierwotnych 2, 3, 5; zatém ułamek $\frac{157}{2355}$ przez żadną z tych liczb uproszczonym być nie może. Ażeby się zaś przekonać czy ten ułamek nie da się uprościć przez inne jeszcze liczby, dla których cech podzielności nie znamy, dzielimy naprzód licznik kolejno przez następujące liczby pierwotne (Nr. 58) 7, 11, 13 i t. d.

Z dzielenia tego przekonywamy się, że w istocie liczba 157 nie jest podzielną ani przez 7, ani przez 11, ani przez 13; lecz w dzieleniu 157 przez 12 otrzymujemy na iloraz 12, liczbę mniejszą od dzielnika, co jest oznaką, że 157 nie jest także podzielne przez żadną liczbę większą od 13 i jest liczbą pierwotną (Nr. 59). W takim razie pozostaje nam jeszcze jedna droga, to jest dowiedzieć się czy też mianownik nie jest przez licznik podzielnym: jakoż w istocie dzieląc 2355 przez 157 otrzymujemy w ilorazie liczbę 15 bez reszty; zatem ułamek $\frac{157}{2355}$ daje się uprościć przez 157.

$$\frac{157}{2355} \overset{\overset{157}{\smile}}{=} \frac{1}{15}$$

Najprostszą więc postać ułamku $\frac{2355}{35325}$, przedstawia ułamek $\frac{1}{15}$.

118. Dajmy jeszcze, że mamy do uproszczenia ułamek $\frac{1386}{5355}$. Rozłożywszy obie liczby 1386 i 5355 na czynniki pierwotne (Nr. 60 i następne), otrzymamy: $1386 = 2 \times 3 \times 3 \times 7 \times 11$, $5355 = 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 17$. Wyrzuciwszy z nich wspólne czynniki, t. j. 3 dwa razy powtórzone i 7, pozostanie 2×11 z pierwszéj liczby, a 5×17 z drugiéj liczby, czyli 22 i 85; liczby te są 63 razy mniejszemi od liczb 1386 i 5355 składających ułamek dany; zatém ułamek dany może być przedstawiony 63 razy mniejszemi liczbami, to jest liczbami 22 i 85. Jakoż:

$$\frac{1836}{5355} \overset{\overset{63}{\smile}}{=} \frac{22}{85}$$

Wyrazy otrzymanego ułamku $\frac{22}{85}$ są pierwszemi względem siebie, bo z samego działania widocznie pokazuje się, że liczby 22 i 85, czyli 2×11 i 5×17, nie mają żadnych wspólnych czynników; zatém ułamek $\frac{22}{85}$ w prostszéj jeszcze postaci przedstawionym być już nie może.

119. Przy upraszczaniu ułamków należy przyjąć za ogólną zasadę, że jeżeli wyrazy składające ułamek, nie są podzielone przez liczby 2, 3, 5, 7, 11, a więc zarazem przez liczby 4, 6, 8, 9, 10, 12 i t. d., na które mniéj więcéj mamy podane cechy podzielności, w takim razie potrzeba dla obu liczb, t. j. licznika i mianownika poszukać największego wspólnego dzielnika, podanego w numerze 67. Jakoż dajmy, że mamy ułamek $\frac{11513}{20329}$, którego wyrazy pozornie zdają stę nie mieć żadnych wspólnych dzielników, jednakże szukając dla nich największego wspólnego dzielnika zobaczymy, że liczba 29 jest ich wspólnym dzielnikiem; i tym sposobem dojdziemy do najprostszéj postaci danego ułamku, którą przedstawi ułamek $\frac{397}{701}$.

Przykłady dla wprawy.

1) Ułamki: $\frac{54}{252}$, $\frac{84}{294}$, $\frac{625}{1375}$, uprościć czyli przyprowadzić do najprostszéj postaci. (*Odp.* szukanemi ułamkami są: $\frac{3}{14}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{5}{14}$).

2) Ułamki: $\frac{8400}{28800}$, $\frac{1860}{8308}$, $\frac{5508}{5724}$, przyprowadzić do najprostszéj postaci. (*Odp.* temi ułamkami są: $\frac{7}{24}$, $\frac{15}{67}$, $\frac{51}{53}$).

3) Ułamki: $\frac{5644}{7276}$, $\frac{44880}{113520}$, $\frac{5238}{40122}$, przyprowadzić do najprostszéj postaci. (*Odp.* temi ułamkami są: $\frac{83}{107}$, $\frac{17}{43}$, $\frac{97}{743}$).

4) Ułamki: $\frac{14625}{183375}$, $\frac{511}{1387}$, $\frac{2793}{94031}$ przyprowadzić do najprostszéj postaci. (*Odp.* temi ułamkami są: $\frac{13}{163}$, $\frac{7}{19}$, $\frac{3}{101}$).

5) Ułamki: $\frac{21643}{119507}$, $\frac{15418}{93694}$, $\frac{800633}{936601}$ przyprowadzić do najprostszéj postaci. (*Odp.* temi ułamkami są: $\frac{23}{127}$, $\frac{13}{79}$, $\frac{1319}{1543}$).

Sprowadzanie ułamków do jednakowych mianowników.

120. Chcemy tu wyłożyć sposoby postępowania, według których ułamki z różnemi mianownikami, zawsze można zamienić na inne ułamki z jednakowemi mianownikami, bez odmiany ich wielkości.

Niech będą dane dwa ułamki $\frac{5}{7}$ i $\frac{8}{9}$ do zamiany na inne którychby mianowniki były jednakowe, lecz wielkości niemi przedstawione były też same, jakie przedstawiają ułamki dane.

W tym celu, jeżeli oba wyrazy ułamku pierwszego $\frac{5}{7}$ pomnożymy przez mianownik ułamku drugiego, otrzymamy ułamek $\frac{45}{63}$, którego wielkość jest taż sama jaką przedstawia ułamek $\frac{5}{7}$

(Nr. 108 i 109); mianownik zaś tym sposobem otrzymanego ułamku $\frac{45}{63}$, jest iloczynem z mianowników danych ułamków.

I podobnież, pomnożywszy obadwa wyrazy ułamku drugiego przez mianownik ułamku pierwszego, nie odmienimy wielkości tegoż ułamku; mianownik zaś tym sposobem otrzymanego ułamku $\frac{56}{63}$ będzie także iloczynem z mianowników danych ułamków. Więc mianowniki otrzymanych ułamków, jako iloczyny z tych samych czynników powinny być jednakowe w obu ułamkach, a same ułamki co do wielkości równe ułamkom danym. Zatém:

Chcąc dwa ułamki sprowadzić do jednakowych mianowników, potrzeba licznik i mianownik pierwszego ułamku pomnożyć przez mianownik drugiego ułamku, a licznik i mianownik ułamku drugiego przez mianownik ułamku pierwszego.

121. Dajmy że mamy teraz trzy ułamki, $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{8}$ i $\frac{4}{6}$ sprowadzić do jednakowych mianowników.

W tym celu, obadwa wyrazy ułamku $\frac{1}{3}$ mnożymy przez iloczyn z mianowników dwóch innych ułamków, t. j. przez iloczyn z 8×9 czyli przez 72; a otrzymamy ułamek $\frac{72}{216}$, którego mianownik jest iloczynem ze wszystkich trzech mianowników danych ułamków; nadto wielkość otrzymanego ułamku $\frac{72}{216}$ jest równa ułamkowi $\frac{1}{3}$ (Nr. 108 i 109).

Podobnież oba wyrazy ułamku $\frac{5}{8}$ mnożymy przez iloczyn z mianowników dwóch innych ułamków, to jest przez iloczyn z 3×9 czyli przez 27, nie odmienimy przez to wielkości tegoż ułamku, a w miejsce niego otrzymamy ułamek $\frac{135}{216}$, którego mianownik będzie także iloczynem ze wszystkich trzech mianowników danych ułamków.

Pomnożywszy obadwa wyrazy trzeciego ułamku $\frac{4}{9}$ przez iloczyn z mianowników dwóch innych ułamków, t. j. przez iloczyn z 3×8 czyli przez 24, wielkość tegoż ułamku nie odmieni się i otrzymamy równy mu ułamek $\frac{96}{216}$, którego mianownik jest iloczynem ze wszystkich trzech mianowników danych ułamków.

Tym więc sposobem w miejsce danych ułamków, $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{8}$ i $\frac{4}{9}$ otrzymaliśmy trzy inne równe im ułamki: $\frac{72}{216}$, $\frac{135}{216}$, i $\frac{96}{216}$, których mianowniki koniecznie muszą być jednakowe, bo są iloczynami z tych samych czynników (Nr. 29).

Działanie to przedstawi się w następujący sposób:

$$\frac{1}{3},\ \frac{5}{8},\ \frac{4}{9} = \frac{72}{216},\ \frac{135}{216},\ \frac{96}{216}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1\times8\times9}{3\times8\times9} = \frac{72}{216}$$

$$\frac{5}{8} = \frac{5\times3\times9}{8\times3\times9} = \frac{135}{216}$$

$$\frac{4}{9} = \frac{4\times3\times8}{9\times3\times8} = \frac{96}{216}$$

Albo krócéj:

$$\overset{72}{\frac{1}{3}},\ \overset{27}{\frac{5}{8}},\ \overset{24}{\frac{4}{9}} = \frac{72}{216},\ \frac{135}{216},\ \frac{96}{216}$$

W taki sam sposób postępując z czterema, pięcioma i ilukolwiek ułamkami, taką możemy wyprowadzić ogólną zasadę:

Ażeby ilekolwiek ułamków sprowadzić do jednakowych mianowników, potrzeba licznik i mianownik każdego po szczególe ułamku, pomnożyć przez iloczyn ze wszystkich mianowników pozostałych ułamków.

122. Chociaż na zasadach podanych w dwóch poprzedzających numerach, zawsze można ułamki sprowadzić do jednakowych mianowników; jednakże: jeżeli mianowniki danych ułamków mają wspólne czynniki, a więc tém samém nie są liczbami pierwszemi względem siebie, w takim razie postępując innym sposobem, ten sam cel osiągniemy, lecz otrzymujemy ułamki w prostszych postaciach od tych, jakiebyśmy otrzymali postępując według zasad ogólnych w numerach 120 i 121 podanych.

Sposoby te, które niejako skróconemi nazwaćby można, rozdzielamy na dwa przypadki:

1. Jeżeli między mianownikami danych ułamkow, znajduje się mianownik, który jest wielokrotnym (Nr. 46) dla wszystkich innych pozostałych mianowników, to ten mianownik wielokrotny może być wspólnym mianownikiem dla wszystkich mających się otrzymać ułamków, równych ułamkom danym, jak to zaraz na przykładzie zobaczymy.

Przykład. Przyprowadzić do jednakowych mianowników cztery następujące ułamki: $\frac{9}{24}, \frac{7}{8}, \frac{5}{12}, \frac{3}{4}$.

Mianownik 24, jest wielokrotnym dla wszystkich po szczególe mianowników; więc wszystkie ułamki, mogą być przyprowadzone do mianownika 24. Jakoż: ażeby ułamek $\frac{7}{8}$ zamienić na inny z mianownikiem 24, potrzeba znaleść taką liczbę, przez którą pomnożony mianownik 8 wydałby na iloczyn liczbę 24. Liczbę tę łatwo znajdziemy dzieląc 24 przez 8, (Nr. 40), a otrzymamy na iloraz liczbę 3, przez którą pomnożywszy obadwa wyrazy $\frac{7}{8}$, otrzymamy $\frac{7}{8} = \frac{7 \times 3}{8 \times 3}$ czyli $\frac{21}{24}$ ułamek z żądanym mianownikiem.

Podobnym sposobem znajdziemy: że ażeby ten sam cel osiągnąć z ułamkiem $\frac{5}{12}$, potrzeba oba jego wyrazy pomnożyć przez 2; jakoż $\frac{5}{12} = \frac{5 \times 2}{12 \times 2} = \frac{10}{24}$ i nakoniec oba wyrazy ułamku $\frac{3}{4}$ pomnożyć przez 6; jakoż $\frac{3}{4} = \frac{3 \times 6}{4 \times 6} = \frac{18}{24}$.

Ułamki więc dane: $\frac{9}{24}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{3}{4}$ zamienione zostały na cztery inne, tęż samą z niemi wielkość mające, t. j. na $\frac{9}{24}$, $\frac{21}{24}$, $\frac{10}{24}$, $\frac{18}{24}$.

Działanie to przedstawić można w następujący sposób:

$$\frac{9}{24},\ \frac{7}{8},\ \frac{5}{12},\ \frac{3}{4},\ = \frac{9}{24},\ \frac{21}{24},\ \frac{10}{24},\ \frac{18}{24}$$

$$24 : 8 = 3;\ \frac{7 \times 3}{8 \times 3} = \frac{21}{24}$$

$$24 : 12 = 2;\ \frac{5 \times 2}{12 \times 2} = \frac{10}{24}$$

$$24 : 4 = 6;\ \frac{3 \times 6}{4 \times 6} = \frac{18}{24}$$

Albo krócéj:

$$\overset{\underset{\smile}{1}}{\frac{9}{24}},\ \overset{\underset{\smile}{3}}{\frac{7}{8}},\ \overset{\underset{\smile}{2}}{\frac{5}{12}},\ \overset{\underset{\smile}{6}}{\frac{3}{4}} = \frac{9}{24},\ \frac{21}{24},\ \frac{10}{24},\ \frac{18}{24}$$

Żeby pokazać korzyść tego sposobu postępowania, dosyć jest tylko też same cztery ułamki sprowadzić do jednakowych mianowników sposobem ogólnym, natenczas w miejsce danych ułamków otrzymalibyśmy cztery następujące:

$$\frac{3456}{9216},\ \frac{8064}{9216},\ \frac{3840}{9216},\ \frac{6912}{9216}$$

2. Jeżeli między mianownikami danych ułamków nie ma mianownika wielokrotnego dla innych, lecz mianowniki mają wspólne czynniki t. j. nie są liczbami pierwszemi względem siebie: natenczas wyszukuje się najmniejsza wielokrotna (Nr. 68) dla wszystkich mianowników, która może być wspólnym mianownikiem dla otrzymać się mających ułamków. Przykłady lepiéj tę rzecz wyjaśnią.

Przykład 1. Sprowadzić do jednakowych mianowników następujące ułamki: $\frac{7}{12}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{13}{18}$.

Rozłożywszy mianowniki na czynniki pierwotne (Nr. 63), otrzymamy:

$$12=2\times2\times3;\ 15=3\times5;\ 18=2\times3\times3.$$

Najmniejsza wielokrotna, czyli raczéj wspólny mianownik dla otrzymać się mających ułamków składać się będzie z czynników 2, 3 i 5, ponieważ z tych tylko czynników składają się mianowniki danych ułamków; nadto dwa pierwsze czynniki, t. j. 2 i 3 powinny być dwa razy powtórzone (Nr. 68), bo czynnik 2 w mianowniku 12, a czynnik 3 w mianowniku 18, po dwa razy się powtarzają. Więc iloczyn z $2\times2\times3\times3\times5=180$, mieści w sobie wszystkie czynniki każdego po szczególe z mianowników danych ułamków; zatém wszystkie ułamki, mogą być przyprowadzone do mianownika 180. I w saméj rzeczy, dla sprowadzenia ułamku $\frac{7}{12}$ do mianownika 180, potrzeba odszukać takiéj liczby, która przez 12 pomnożona wydaje 180, co znajdziemy dzieląc 180 przez 12 (Nr. 40). Lecz zważywszy, że $180=2\times2\times3\times3\times5$ a $12=2\times2\times3$, nie widzimy potrzeby dzielenia 180 przez 12, bo dosyć jest tylko ze 180 odkreślić czynniki składające mianownik 12, natenczas pozostałe czynniki 3×5 czyli 15, utworzą tę właśnie liczbę, przez którą mnożona liczba 12 wydaje 180.

Pomnożywszy więc oba wyrazy ułamku $\frac{7}{12}$ przez 15, otrzymamy $\frac{7}{12}=\frac{7\times15}{12\times15}=\frac{105}{180}$. A podobnym sposobem znajdziemy, że dla sprowadzenia dwóch pozostałych ułamków do tegoż mianownika 180, potrzeba oba wyrazy ułamku $\frac{4}{15}$ pomnożyć przez 12, a oba wyrazy ułamku $\frac{13}{18}$ przez 10; jakoż:

$$\frac{4}{15}=\frac{4\times12}{15\times12}=\frac{48}{180},\ \frac{13}{18}=\frac{13\times10}{18\times10}=\frac{130}{180}$$

Więc zamiast ułamków $\frac{7}{12}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{13}{18}$, otrzymaliśmy równe im ułamki $\frac{105}{180}$, $\frac{48}{180}$, $\frac{130}{180}$ z jednakowemi mianownikami; gdy tym czasem postępując sposobem ogólnym (Nr. 120 i 121) otrzymalibyśmy $\frac{1890}{3240}$, $\frac{864}{3240}$, $\frac{2340}{3240}$.

Przykład 2. Sprowadzić do jednakowych mianownków następujące ułamki: $\frac{13}{40}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{9}{20}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$.

Zważywszy, że mianowniki 4, 5, 10 i 20 mieszczą się jako czynniki w mianowniku 40, a 3 i 6 mieszczą się w 12; z tego więc względu szukamy najmniejszéj wielokrotnéj tylko dla mianowników 40, 9 i 12, bo ta będzie zarazem wielokrotną dla liczb 5, 20, 6, 10, 3 i 4 (Nr. 57). Rozkładamy więc na czynniki pierwotne, tylko mianowniki 40, 9 i 12 (Nr. 63).

$$40=2\times2\times2\times5;\ 9=3\times3;\ 12=2\times2\times3.$$

Zatém najmniejszą wielokrotną będzie $2\times2\times2\times3\times3\times5=360$. Ażeby ułamek $\frac{13}{40}$ sprowadzić do mianownika 360, mnożymy oba jego wyrazy przez 9 i otrzymujemy $\frac{13}{40}=\frac{13\times9}{40\times9}=\frac{117}{360}$.

Dla podobnéj przyczyny $\frac{7}{9}=\frac{7\times40}{9\times40}=\frac{280}{360}$; $\frac{11}{12}=\frac{11\times30}{12\times30}=\frac{330}{360}$; $\frac{4}{5}=\frac{4\times72}{5\times72}=\frac{288}{360}$; $\frac{9}{20}=\frac{9\times18}{20\times18}=\frac{162}{360}$; $\frac{1}{6}=\frac{1\times60}{6\times60}=\frac{60}{360}$; $\frac{3}{10}=\frac{3\times36}{10\times36}=\frac{108}{360}$; $\frac{2}{3}=\frac{2\times120}{3\times120}=\frac{240}{360}$; $\frac{1}{4}=\frac{1\times90}{4\times90}=\frac{90}{360}$.

Zatém w miejsce danych ułamków: $\frac{13}{40}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{9}{20}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$ otrzymaliśmy równe im ułamki $\frac{117}{360}$, $\frac{280}{360}$, $\frac{330}{360}$, $\frac{288}{360}$, $\frac{162}{360}$, $\frac{60}{360}$, $\frac{108}{360}$, $\frac{240}{360}$, $\frac{90}{360}$.

Przykłady dla wprawy.

Sprowadzić do jednakowych mianowników:

1) $\frac{5}{9}, \frac{8}{11}$ . . . . $\left(\frac{55}{99}, \frac{72}{99}\right)$

2) $\frac{5}{8}, \frac{3}{4}$ . . . . $\left(\frac{5}{8}, \frac{6}{8}\right)$

3) $\frac{7}{12}, \frac{5}{24}$ . . . . $\left(\frac{14}{24}, \frac{5}{24}\right)$

4) $\frac{13}{20}, \frac{19}{75}$ . . . . $\left(\frac{195}{300}, \frac{76}{300}\right)$

5) $\frac{17}{90}, \frac{105}{234}$ . . . . $\left(\frac{221}{1170}, \frac{525}{1170}\right)$

6) $\frac{3}{7}, \frac{2}{5}, \frac{9}{13}$ . . . . $\left(\frac{195}{455}, \frac{182}{455}, \frac{315}{455}\right)$

7) $\frac{4}{9}, \frac{5}{16}, \frac{2}{5}, \frac{6}{7}$ . . . . $\left(\frac{2240}{5040}, \frac{1575}{5040}, \frac{2016}{5040}, \frac{4320}{5040}\right)$

8) $\frac{7}{15}, \frac{3}{5}, \frac{13}{30}, \frac{2}{3}$ . . . . $\left(\frac{14}{30}, \frac{18}{30}, \frac{13}{30}, \frac{20}{30}\right)$

9) $\frac{9}{40}, \frac{7}{8}, \frac{101}{120}, \frac{5}{6}, \frac{17}{20}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}$. $\left(\frac{27}{120}, \frac{105}{120}, \frac{101}{120}, \frac{100}{120}, \frac{102}{120}, \frac{90}{120}, \frac{48}{120}\right)$

10) $\frac{11}{18}, \frac{3}{4}, \frac{7}{20}, \frac{1}{3}, \frac{5}{12}$ . . . . $\left(\frac{110}{180}, \frac{135}{180}, \frac{63}{180}, \frac{60}{180}, \frac{75}{180}\right)$

11) $\frac{9}{14}, \frac{13}{42}, \frac{11}{20}, \frac{8}{9}$ . . . . $\left(\frac{810}{1260}, \frac{390}{1260}, \frac{693}{1260}, \frac{1120}{1260}\right)$

12) $\frac{5}{21}, \frac{4}{9}, \frac{3}{7}, \frac{9}{28}, \frac{1}{4}, \frac{5}{6}$ . . . . $\left(\frac{60}{252}, \frac{112}{252}, \frac{108}{252}, \frac{81}{252}, \frac{63}{252}, \frac{210}{252}\right)$

13) $\frac{7}{45}, \frac{1}{5}, \frac{13}{90}, \frac{5}{20}, \frac{19}{60}, \frac{3}{20}$ . . . . $\left(\frac{84}{540}, \frac{108}{540}, \frac{78}{540}, \frac{100}{550}, \frac{171}{540}, \frac{81}{540}\right)$

14) $\frac{2}{15}, \frac{3}{20}, \frac{7}{30}, \frac{5}{12}, \frac{1}{6}, \frac{2}{3}$ . . . . $\left(\frac{8}{60}, \frac{9}{60}, \frac{14}{60}, \frac{25}{60}, \frac{10}{60}, \frac{40}{60}\right)$

Dodawanie ułamków zwyczajnych.

123. Dodawanie ułamków jest działaniem podającém sposoby łączenia kilku ułamków w jeden ułamek, któregoby wielkość wyrównywała wielkościom wyobrażoném danemi ułamkami.

Rzecz jasna, że tylko równe wielkości możemy dodawać do siebie. Bo jakto już przy dodawaniu liczb wielorakich widzieliśmy, że liczbę wyobrażającą arszyny do liczby werszek dodawać pierwéj nie możemy, dopóki liczbę arszynów nie zamienimy na odpowiednią liczbę werszek w danéj liczbie arszynów zawierających się: tak podobnież dzieje się z ułamkami. Lecz dodawanie ułamków przedstawia nam inną trudność; bo kiedy liczby całkowite oznaczają już ten sam gatunek, wprost dodawać je do siebie możemy, gdy tymczasem w dodawaniu ułamków nie dość jest tego jednego warunku, potrzeba bowiem jeszcze żeby części niemi wyrażone, były jednakowe. A ponieważ wielkość tych części przedstawiona jest mianownikami, z tego więc wnosimy, że dodawanie ułamków wymaga dwóch warunków, t. j. żeby ułamki oznaczały jeden gatunek i nadto pojedyncze części niemi wyrażone, były równe, czyli żeby ułamki miały jednakowe mianowniki.

Wiadomości dotąd o ułamkach wyłożone, są dostateczne do zachowania obudwu warunków: zasady bowiem w numerze 113 i 115 umieszczone, posłużyć mogą do sprowadzenia ułamków do jednakowego gatunku, gdyby pierwszy warunek nie był zachowanym; zasady zaś wytłumaczone w numerach 120, 121 i 122, podają sposoby sprowadzania ułamków do jednakowych mianowników. Pozostaje więc tylko okazać sposób dodawania ułamków z jednakowemi mianownikami.

124. I w tym celu dajmy, że mamy do siebie dodać następujące ułamki: $\frac{5}{13}, \frac{4}{13}, \frac{3}{13}$.

Mianowniki jednakowe pokazują, że pojedyncze części niemi wyrażone są równe; wszystkie bowiem ułamki, przedstawiają trzynaste części jedności. Liczby tych części wyrażone są ich licznikami; a ponieważ trzynastych części jedności w pierwszym ułamku jest 5, w drugim 4 a w trzecim 3, zatém w trzech ułamkach razem jest ich 5+4+3 czyli 12. Wszystkie więc te trzy ułamki razem wzięte, jako oznaczające 12 trzynastych części jedności, mogą być wyrażone ułamkiem $\frac{12}{13}$ który będzie ich ogółem.

Z tego więc jasno widzimy, że dodawanie ułamków z jednakowemi mianownikami (a temu warunkowi zawsze zadość uczynić można), sprowadza się do dodawania ich liczników, pamiętając tylko, aby otrzymany ogół z liczników, nie uważać za zbiór całych jedności, lecz za zbiór części jedności wyrażonych mianownikami.

Zatém: *ażeby dodać ułamki z jednakowemi mianownikami, potrzeba dodać liczniki i pod ogółem podpisać mianownik wspólny, i jeżeli wypadnie ułamek niewłaściwy, oddzielić całość od ułamku; dodawanie zaś ułamków z różnemi mianownikami, nie może być inaczéj dokonane jak doprowadzając je pierwéj do mianowników jednakowych.*

Przykład 1. Znaleść ogół ułamków $\frac{14}{15}, \frac{7}{15}, \frac{8}{15}, \frac{4}{15}$

$$\frac{14}{15}+\frac{7}{15}+\frac{8}{15}+\frac{4}{15}=\frac{33}{15}=2\overbrace{\tfrac{3}{15}}^{3}=2\frac{1}{5} \text{ ogół.}$$

Przykład 2. Znaleść ogół ułamków $\frac{7}{10}, \frac{18}{30}, \frac{5}{6}, \frac{13}{15}, \frac{2}{3}$

$$\overbrace{\frac{7}{10}}^{3}+\overbrace{\frac{18}{30}}^{1}+\overbrace{\frac{5}{6}}^{5}+\overbrace{\frac{13}{15}}^{2}+\overbrace{\frac{2}{3}}^{10}=\frac{21}{30}+\frac{18}{30}+\frac{25}{30}+\frac{26}{30}+\frac{20}{30}=\overbrace{\frac{110}{30}}^{10}=\frac{11}{3}=2\frac{2}{3} \text{ ogół.}$$

Przykład 3. Znaleść ogół ułamków $\frac{19}{24}, \frac{5}{8}, \frac{9}{14}, \frac{17}{20}, \frac{3}{7}, \frac{1}{4}, \frac{11}{12}$.

$24=2\times2\times2\times3$; $14=2\times7$; $20=2\times2\times5$.

$2\times2\times2\times3\times5\times7=840$ mianownik wspólny.

$$\overbrace{\frac{19}{24}}^{35}+\overbrace{\frac{5}{8}}^{105}+\overbrace{\frac{9}{14}}^{60}+\overbrace{\frac{17}{20}}^{20}+\overbrace{\frac{3}{7}}^{120}+\overbrace{\frac{1}{4}}^{210}+\overbrace{\frac{11}{12}}^{70}=\frac{665}{840}+\frac{525}{840}+\frac{540}{840}+\frac{714}{840}+\frac{360}{840}+\frac{210}{840}+\frac{770}{840}=$$

$$=\overbrace{\frac{3784}{840}}^{8}=\frac{473}{70}=6\frac{53}{70} \text{ ogół szukany.}$$

125. Często zachodzi potrzeba dodawać ułamki pomięszane z całościami, w takim razie oddzielenie dodajemy całości a oddzielenie ułamki i jeżeli z dodania ułamków wypadnie ułamek niewłaściwy, wyprowadzamy z niego całość, którą dołączamy do ogółu poprzednio z całości otrzymanego.

Przykład 1. Znaleść ogół $15\frac{14}{19}+8\frac{11}{19}+13\frac{5}{19}+6\frac{13}{19}$.

$15\frac{14}{19}+8\frac{11}{19}+13\frac{5}{19}+6\frac{13}{19}=42+\frac{43}{19}=42+2\frac{5}{19}=44\frac{5}{19}$ ogół.

Przykład 2. Znaleść ogół $24\frac{2}{3}+18\frac{1}{5}+10\frac{4}{7}+5\frac{1}{2}$.

$\overbrace{24\frac{2}{3}}^{70}+\overbrace{18\frac{1}{5}}^{42}+\overbrace{10\frac{4}{7}}^{30}+\overbrace{5\frac{1}{2}}^{105}=57+\frac{140}{210}+\frac{42}{210}+\frac{120}{210}+\frac{105}{210}=57+\frac{407}{210}=57+1\frac{197}{210}=58\frac{197}{210}$ ogół.

Przykład 3. Znaleść ogół $6\frac{5}{7}$ arsz. $+4\frac{13}{14}$ wersz.

$6\frac{5}{7}$ arsz. $=6\times16$ wersz. $+\frac{5\times16}{7}$ wer. $=96+\frac{90}{7}=96+12\frac{6}{7}=108\frac{6}{7}$ wer. (Nr. 113).

$108\frac{6}{7}+4\frac{13}{14}=112+\frac{12}{14}+\frac{13}{14}=112+\frac{25}{14}=112+1\frac{11}{14}=113\frac{11}{14}$ wersz.

Przykłady dla wprawy.

1) $\frac{5}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{8}+\frac{7}{8}+\frac{3}{8}+\frac{6}{8}=?$ . . . . $(3\frac{1}{8})$

2) $\frac{5}{12}+\frac{7}{12}+\frac{1}{12}+\frac{3}{12}+\frac{4}{12}+\frac{11}{12}+\frac{6}{12}+\frac{8}{12}=?$ . . . . $(3\frac{3}{4})$

3) $\frac{5}{8}+\frac{7}{16}+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\frac{7}{8}=?$ . . . . $(3\frac{3}{16})$

4) $\frac{5}{8}+\frac{7}{12}+\frac{7}{15}+\frac{1}{2}+\frac{4}{5}+\frac{2}{3}=?$ . . . . $(4\frac{29}{102})$

5) $\frac{1}{10}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{7}{9}=?$ . . . . $(2\frac{77}{180})$

6) $\frac{3}{4}+\frac{7}{12}+\frac{4}{9}+\frac{1}{2}+\frac{5}{18}=?$ . . . . $(2\frac{5}{9})$

7) $\frac{3}{5}+\frac{7}{8}+\frac{9}{10}+\frac{3}{20}=?$ . . . . $(2\frac{21}{40})$

8) $\frac{4}{15}+\frac{7}{12}+\frac{9}{20}+\frac{4}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{7}{10}=?$ . . . . $(3\frac{13}{60})$

9) $\frac{23}{48}+\frac{1}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{12}+\frac{9}{16}+\frac{29}{36}+\frac{5}{9}=?$ . . . . $(4\frac{5}{72})$

10) $\frac{8}{9}+\frac{7}{30}+\frac{16}{45}+\frac{15}{24}+\frac{6}{60}+\frac{15}{18}+\frac{24}{36}+\frac{39}{40}=?$ . . . . . . $(4\frac{16}{90})$

11) $8\frac{2}{3}+5\frac{1}{2}+9\frac{4}{5}+6\frac{6}{7}=?$ . . . . $(30\frac{173}{210})$

12) $28\frac{19}{27}+35\frac{13}{24}+76\frac{73}{80}+145\frac{11}{36}+98\frac{12}{25}+32\frac{103}{120}+13\frac{115}{108}=?$. $(431\frac{9359}{10800})$

13) $425\frac{17}{20}+364\frac{3}{5}+807\frac{9}{10}+206\frac{33}{40}+62\frac{7}{8}=?$ . . . . . $(1868\frac{1}{20})$

14) $37\frac{14}{25}+98\frac{43}{50}+143\frac{13}{15}+\frac{5}{6}+\frac{2}{3}=?$ . . . . $(281\frac{59}{75})$

15) $23\frac{25}{33}+16\frac{34}{45}+18\frac{21}{22}+30\frac{7}{18}+26\frac{19}{36}+48\frac{32}{55}+28=?$ . . $(192\frac{1913}{1980})$.

ZAGADNIENIA.

1. Do pozłocenia łyżki wyszło złota $\frac{7}{8}$ zołotnika, do pozłocenia tabakierki $\frac{3}{4}$ zołotnika, a do pozłocenia srebrnego kubka $\frac{2}{3}$

zołotnika. Ileż wyszło razem złota do pozłocenia tych trzech rzeczy? (*Odp.* wyszło złota $2\frac{7}{24}$ zołotnika).

2. Do pewnéj kadzi prowadzą wodę cztery rury: pierwsza mogłaby ją napełnić w 20 godzinach; druga w 24 godzinach; trzecia w 30 godzinach, a czwarta w 36 godzinach. Jakaż część téj kadzi napełniona będzie w jednéj godzinie, kiedy woda puszczoną będzie jednocześnie wszystkiemi czterema rurami? (*Odp.* $\frac{11}{72}$).

Wskazanie działania. Objętość kadzi oznaczamy przez jedność, wychodząc z téj uwagi, że każda wielkość może być zarazem jednością i liczbą (Nr. 3). Kiedy woda puszczona pierwszą rurą, w 20 godzinach mogłaby całą kadź napełnić, więc przez jednę godzinę napełni dwudziestą jéj część, czyli $\frac{1}{20}$. Podobnież znajdziemy, że woda drugą rurą puszczona, w przeciągu jednéj godziny napełni $\frac{1}{24}$ część téj kadzi; trzecią rurą $\frac{1}{30}$ część kadzi, a czwartą $\frac{1}{36}$ część kadzi. Zatém ogół ułamków $\frac{1}{20}+\frac{1}{24}+\frac{1}{30}+\frac{1}{36}$ wskaże: jaka część kadzi napełniona będzie przez jednę godzinę, gdy woda puszczoną będzie wszystkiemi czterema rurami.

3. Kupiono trzy sztuki płótna: w pierwszéj było $12\frac{1}{2}$ arszyna, w drugiéj $8\frac{3}{4}$ arszyna, w trzeciéj $7\frac{1}{3}$ arszyna. Ile kupiono arszynów tego płótna? (*Odp.* kupiono arszynów $28\frac{7}{12}$).

4. Pewien właściciel ziemski miał cztery kawały gruntu. Pierwszy zawierał $24\frac{3}{11}$ morgi, drugi $15\frac{7}{8}$ morgi, trzeci $20\frac{3}{4}$ morgi, a czwarty $22\frac{5}{44}$ morgi. Ileż morgów razem posiadał (*Odp.* $83\frac{1}{88}$ morgi.

5. Jedna paka towaru ważyła $7\frac{3}{4}$ centnara, druga $8\frac{4}{9}$ centnara, trzecia $9\frac{5}{18}$ centnara, a czwarta $7\frac{2}{3}$. Ile ważyły wszystkie paki razem? (*Odp.* $32\frac{8}{9}$ centnara).

6. Pewien właściciel ziemski spotrzebował mąki: w Styczniu $10\frac{1}{2}$ czećwierci, w Lutym $14\frac{2}{3}$ czećwierci, w Marcu $12\frac{5}{6}$ czećwierci, w Kwietniu $11\frac{7}{11}$ czećwierci. Ileż spotrzebował mąki przez te cztery miesiące? (*Odp.* $49\frac{7}{12}$ czećwierci).

7. Przedsiębierca za dostawioną żywność do pewnéj twierdzy, wypłacone miał następujące summy: za mąkę $2567\frac{3}{5}$ rubla, za kaszę $1480\frac{7}{12}$ rubla, za mięso $645\ \frac{19}{30}$ rubla, za sól $208\frac{5}{6}$ rubla.

Ileż razem dostał? *(Odp.* 4902 rub. i $43\frac{1}{3}$ kopiejek).

8. W pewnym domu spotrzebowano cukru: w poniedziałek $\frac{5}{8}$ funta, we wtorek $\frac{3}{4}$ funta, w środę $\frac{5}{6}$ funta, w czwartek $\frac{1}{2}$ funta, w piątek $\frac{5}{12}$ funta, w sobotę $\frac{2}{3}$ funta. Ileż w tym czasie razem spotrzebowano cukru? (*Odp.* $4\frac{19}{24}$ funta).

9. Przekupnik kupił trzy faski masła: pierwsza ważyła $25\frac{13}{16}$ funta, druga $34\frac{7}{8}$ funta, trzecia $18\frac{15}{32}$ funta. Ile ważyły wszystkie razem? *(Odp.* ważyły 79 funtów i 5 łutów).

10. Kupiono cztery sztuki sukna: w jednéj sztuce było $35\frac{5}{8}$ arszyna, w drugiéj $29\frac{7}{16}$ arszyna, w trzeciéj $37\frac{3}{4}$ arszyna, a w czwartéj $32\frac{1}{2}$ arszyna. Dowiedzieć się ile było razem wszystkiego sukna? *(Odp.* $135\frac{5}{16}$ arszyna).

11. Do wykonania pewnéj roboty najęto trzech rzemieślników; pierwszy sam robiąc wykończyłby całą robotę w dniach 5, drugi sam także robiąc, wykończyłby ją w dniach 6, a trzeci w dniach 7. Jaką część téj roboty dziennie wszyscy trzéj razem zrobią? (*Odp.* $\frac{107}{210}$ całéj roboty).

12 Dwie osoby idą naprzeciw siebie: pierwsza w 5 godzinach uchodzi 3 mile, druga w 7 godzinach uchodzi 4 mile; ileż się do siebie przybliżają każdéj godziny? *(Odp.* każdéj godziny przybliżają się do siebie o $1\frac{6}{35}$ mili).

13. Wyrachuj mi prędko, ile mam lat, rzekł ojciec do syna. Lat $18\frac{3}{5}$ jestem tu leśniczym, lat $10\frac{1}{4}$ służyłem w wojsku, lat $8\frac{5}{18}$ chodziłem w miejscu urodzenia mego do szkół, a kiedy do szkół oddany zostałem, miałem lat $10\frac{1}{8}$ (*Odp.* ojciec ma lat 47, miesięcy $3\frac{1}{30}$).

14. Znaleść ogół pięciu ułamków, z których pierwszy $\frac{8}{9}$, drugi większy od pierwszego o $\frac{7}{8}$, trzeci większy od drugiego o $\frac{6}{7}$, czwarty większy od trzeciego o $\frac{5}{6}$, i nakoniec piąty większy od czwartego o $\frac{4}{5}$ jedności. (*Odp.* szukanym ogółem jest $12\frac{619}{630}$).

15. Ciało wolno spadające przebiega w pierwszéj sekundzie $15\frac{5}{8}$ stopy, w drugiéj $46\frac{7}{8}$ stopy, w trzeciéj $78\frac{1}{8}$ stopy i t. d. w każdéj następującéj sekundzie $31\frac{1}{4}$ stopy więcéj. Ileż stóp przebieży to ciało w 6 sekundach (*Odp.* $562\frac{1}{2}$ stopy).

16. Największy z dzwonów w Niemczech znajduje się w Wiedniu przy kościele Ś-go Szczepana. Został on ulany z dział zdobytych w wojnie tureckiéj r. 1771. Sam dzwon waży 885 pudów, serce jego $35\frac{35}{48}$ puda, trzonek $162\frac{31}{32}$ puda, a żelazo którém jest przymocowany $208\frac{5}{8}$ puda. Ile waży cały dzwon z oprawą? (*Odp.* $1292\frac{31}{96}$ puda).

Odejmowanie ułamków zwyczajnych.

126. Odejmowanie ułamków jest działaniem podającém sposoby wynajdowania różnicy zachodzącéj między wielkościami danych ułamków.

W odejmowaniu ułamków, podobnież jak w działaniu poprzedzającém, potrzeba niezbędnie żeby zachowane były dwa warunki, to jest, ażeby ułamki oznaczały ten sam gatunek i nadto pojedyncze części niémi wyrażone były równe, czyli mianowniki danych ułamków były jednakowe. A że obu tym warunkom zawsze zadość uczynić można, jak to już widzieliśmy w działaniu poprzedzającém, z tego więc względu pozostaje tylko wykryć drogę postępowania w odejmowaniu ułamków z jednakowemi mianownikami.

I w tym celu, dajmy że mamy znaleść różnicę między dwoma następującemi ułamkami: $\frac{7}{8}$ i $\frac{5}{8}$. Mianowniki jednakowe pokazują że pojedyncze części niemi wyrażone w obu ułamkach są równe i przedstawiają ósme części jedności; więc różnica wielkości całych ułamków, zależy tylko od różnicy liczby tych części oznaczonych licznikami. Ułamek przeto pierwszy różni się od ułamku drugiego o 2 ósmych części jedności i różnica ta może być przedstawiona ułamkiem $\frac{2}{8}$.

Z tego więc widocznie pokazuje się, że odejmowanie ułamków z jednakowemi mianownikami sprowadza się do odejmowania liczników, pomnąc tylko, aby otrzymaną różnicę nie uważać za zbiór całych jedności, lecz za zbiór części wyrażonych mianownikami danych ułamków.

Zatém: *ażeby odjąć od siebie ułamki z jednakowemi mianowni-*

kami, odejmujemy od siebie liczniki i pod różnicą lub resztą podpisujemy mianownik wspólny; ułamków zaś z różnemi mianownikami odejmować nie możemy inaczéj, jak tylko sprowadzając je pierwéj do mianowników jednakowych.

Przykłady.

1) Znaleść różnicę ułamków $\frac{23}{30}$ i $\frac{17}{30}$.

$$\frac{23}{30}-\frac{17}{30}=\frac{\overset{6}{6}}{30}=\frac{1}{5} \text{ różnica.}$$

2) Znaleść różnicę między ułamkami $\frac{7}{8}$ i $\frac{7}{15}$.

$$\frac{7}{8}-\frac{7}{15}=\frac{105}{120}-\frac{56}{120}=\frac{49}{120} \text{ różnica.}$$

3) O ile ułamek $\frac{4}{9}$ garnca jest większym od $\frac{3}{5}$ kwarty?

$\frac{3}{5}$ kwarty $=\frac{3}{5\times4}$ garnca $=\frac{3}{20}$ garnca (Nr. 115)

$\frac{4}{9}-\frac{3}{20}=\frac{80}{180}-\frac{27}{180}=\frac{53}{180}$ garnca, różnica szukana.

127. *Chcąc od liczby całkowitéj odjąć liczbę ułamkową, potrzeba z liczby całkowitéj wziąść jednę jedność i zamienić ją na ułamek wyrażający te same części, jakie przedstawia ułamek dany; następnie, od tak otrzymanego ułamku odjąć ułamek dany, a przed resztą umieścić liczbę całkowitą o jedność zmniejszoną. Np.*

1) $14-\frac{8}{15}=13\frac{15}{15}-\frac{8}{15}=13\frac{7}{15}$ reszta.

2) $67-\frac{25}{349}=66\frac{349}{349}-\frac{25}{349}=66\frac{324}{349}$ reszta.

128. Przy odejmowaniu ułamków pomięszanych z całościami, należy pierwéj uskutecznić odejmowanie ułamków a potém całości. Tu jednak rozróżnić możemy sześć głównych przypadków, które w następujących przykładach pokrótce starać się będziemy wyjaśnić.

1) $26\frac{13}{18}-14\frac{5}{18}=12\frac{8}{18}=12\frac{4}{9}$.

2) $103\frac{3}{4}-82\frac{6}{11}=103\frac{33}{44}-82\frac{24}{44}=21\frac{9}{24}$.

Dwa powyższe przykłady nie przedstawiają żadnéj trudności.

3) $85\frac{3}{7}-36\frac{4}{5}=85\frac{15}{35}-36\frac{28}{35}=84\frac{50}{35}-36\frac{28}{35}=48\frac{22}{35}$.

W tym przypadku zachodzi ta osobliwość, że po sprowadzeniu ułamków do jednakowych mianowników, ułamki jednakże odjąć się nie dadzą od siebie, bo ułamek odjemnéj mniejszym jest od ułamku odjemnika. Dla téj więc przyczyny z 85 całości, należących do mniejszego ułamku $\frac{15}{35}$, bierzemy jednę jedność i tę dodajemy do ułamku $\frac{15}{35}$ co daje $1+\frac{15}{35}=\frac{35}{35}+\frac{15}{35}=\frac{50}{35}$ (Nr. 112.) Zamiast więc liczby $85\frac{15}{35}$ otrzymaliśmy inną tož samo znaczącą, to jest $84\frac{50}{35}$, od któréj odjąwszy $36\frac{28}{35}$, pozostanie $48\frac{22}{35}$ reszta żądana.

4) $16-9\frac{12}{23}=7-\frac{12}{23}=6\frac{23}{23}-\frac{12}{23}=6\frac{11}{23}$.

Tu od liczby całkowitéj mamy odjąć liczbę całkowitą i ułamkową, czyli uskutecznić dwa odejmowania. Odejmujemy więc naprzód całkowitą od całkowitéj, a potém od reszty otrzymanéj ułamek. Jakož 9 odjęte od 16, daje na resztę liczbę 7, od któréj odjąwszy dany ułamek $\frac{12}{23}$, otrzymamy $7-\frac{12}{23}=6\frac{23}{23}-\frac{12}{23}=6\frac{11}{23}$ resztę żądaną.

Przypadek ten možemy jeszcze i tak rozwiązać: $16-9\frac{12}{23}=15\frac{23}{23}-9\frac{12}{23}=6\frac{11}{23}$ wypadek ten sam co powyżéj.

5) $26\frac{7}{9}-12=14\frac{7}{9}$.

Tu od liczby całkowitéj i ułamkowéj mamy odjąć samą tylko liczbę całkowitą; widoczną przeto jest rzeczą, że tę całkowitą odjąć tylko możemy od całkowitéj, dopisując do reszty otrzymanéj ułamek, od którego nic nie mamy odejmować.

6) $34\frac{5}{6}-\frac{7}{13}=34\frac{65}{78}-\frac{42}{78}=34\frac{23}{78}$

Tu od liczby całkowitéj i ułamkowéj mamy odjąć samą tylko liczbę ułamkową; oczywistą więc jest rzeczą, że liczbę ułamkową odejmujemy od ułamkowéj, zachowując całość niezmienną. Jeżeliby zaś ułamek odjemnika nie dał się odjąć od ułamku odjemnéj, natenczas z całości odjemnéj wzięlibyśmy jednę jedność i postąpili z nią tak samo jak w przypadku trzecim.

Przykłady dla wprawy.

1) $\frac{13}{20}-\frac{5}{20}=?$ . . . . . . $(\frac{2}{5})$ 2) $\frac{23}{36}-\frac{11}{36}=?$ . . . . . . $(\frac{1}{3})$

3) $\frac{5}{6}-\frac{4}{11}=?$ . . . . . . $(\frac{31}{66})$ 4) $\frac{8}{11}-\frac{3}{20}=?$ . . . . . . $(\frac{127}{220})$

5) $\frac{25}{48}-\frac{7}{16}=?$ . . . . . . $(\frac{1}{12})$ 6) $\frac{5}{6}-\frac{1}{30}=?$ . . . . . . $(\frac{19}{30})$

7) $\frac{19}{24}-\frac{7}{18}=?$ . . . . . . $(\frac{29}{72})$ 8) $\frac{17}{25}-\frac{2}{15}=?$ . . . . . . $(\frac{41}{75})$

9) $65-\frac{11}{87}=?$ . . . . $(64\frac{76}{87})$ 10) $27-\frac{13}{43}=?$ . . . . $(26\frac{30}{43})$

11) $87\frac{14}{15}-26\frac{2}{15}=?$. $(61\frac{4}{5})$ 12) $36\frac{5}{12}-14\frac{3}{12}=?$ . . $(22\frac{1}{6})$

13) $35\frac{9}{10}-27\frac{12}{17}=?$ . . $(8\frac{33}{170})$ 14) $29\frac{11}{13}-13\frac{5}{23}=?$ . . $(16\frac{188}{299})$

15) $88\frac{3}{4}-59\frac{5}{8}=?$ . . $(29\frac{1}{8})$ 16) $112\frac{5}{6}-58\frac{7}{12}=?$. $(54\frac{1}{4})$

17) $100\frac{7}{15}-33\frac{19}{20}=?$. $(66\frac{31}{60})$ 18) $74\frac{2}{9}-23\frac{11}{18}=?$ . . $(50\frac{1}{18})$

19) $56-12\frac{7}{34}=?$ . . $(43\frac{27}{34})$ 20) $29-16\frac{5}{24}=?$ . . . . $(12\frac{19}{24})$

21) $37\frac{11}{56}-\frac{5}{12}=?$ . . . $(36\frac{131}{168})$ 22) $45\frac{13}{80}-\frac{27}{50}=?$ . . . $(44\frac{249}{400})$

23) $30\frac{2}{21}-\frac{13}{14}=?$ . . . . $(29\frac{1}{6})$ 24) $49\frac{3}{22}-\frac{10}{33}=?$ . . . . $(48\frac{5}{6})$

25) $120\frac{2}{5}-84=?$ . . $(36\frac{2}{5})$ 26) $105\frac{4}{7}-36=?$ . . $(69\frac{4}{7})$

ZAGADNIENIA.

1. Ze sztuczki płótna długiego $14\frac{2}{3}$ arszyna odcięto $5\frac{4}{5}$ arszyna. Ile się zostało? *(Odp.* $8\frac{13}{15}$ arszyna).

2. Ile potrzeba dodać do $7\frac{1}{4}$ ażeby otrzymać $9\frac{1}{8}$? *(Odp.* $1\frac{7}{8}$)

3. Liczba 150 rozdzieloną została na dwie nierówne części; jedna z tych części jest $78\frac{5}{9}$; jaka jest część druga? *(Odp.* $71\frac{4}{9}$*)*.

4. Ogół dwóch liczb równy 320; większa liczba równa $207\frac{4}{15}$; znaleść liczbę mniejszą? *(Odp.* $112\frac{11}{15}$).

5. Właściciel $18\frac{3}{5}$ morgi ziemi, odprzedał sąsiadowi $5\frac{7}{8}$ morgi. Ile mu zostało? *(Odp.* $12\frac{29}{40}$ morgi).

6. Podróżny mający do przebycia $110\frac{3}{4}$ mili w przeciągu dni 8 ujechał $30\frac{4}{5}$ mili. Ile mil pozostało mu jeszcze do przebycia? *(Odp.* $79\frac{19}{20}$ mili).

7. Z głowy cukru, która $27\frac{4}{5}$ funta ważyła, pozostało się $3\frac{5}{8}$ funta. Ile wypotrzebowano? *(Odp.* $24\frac{7}{40}$ funta).

8. W jednéj beczce znajduje się wina $7\frac{3}{4}$ wiadra, w drugiéj $1\frac{3}{10}$ wiadra mniéj niż w pierwszéj, w trzeciéj $2\frac{11}{16}$ wiadra mniéj niż w drugiéj. Ile jest wiader wina w drugiéj, a ile w trzeciéj beczce? *(Odp.* W drugiéj jest $6\frac{9}{20}$ wiadra; w trzeciéj $3\frac{61}{80}$ wiadra).

9. Robotnik pierwszego dnia zrobił $\frac{5}{44}$, a drugiego $\frac{7}{11}$ całej roboty. Jaką część téj roboty zrobił w dwóch dniach i jaka część

jeszcze pozostała do zrobienia? (*Odp.* W dwóch dniach zrobił $\frac{3}{4}$ całéj roboty, pozostało więc do zrobienia $\frac{1}{4}$ część téj roboty.

10. Właścicielowi $26\frac{3}{4}$ morgi ziemi, tak się źle powodziło, że zmuszony był częściami jeden kawał gruntu po drugim sprzedawać; jakoż przed 7 laty sprzedał $3\frac{1}{4}$ morgi, przed 5 laty $4\frac{4}{5}$ morgi, przed 3 laty $3\frac{7}{8}$ morgi, a przed rokiem $1\frac{9}{10}$ morgi. Ile mu jeszcze pozostało? (*Odp.* $12\frac{37}{40}$ morgi).

11. Woda do stawu prowadzona jedném korytem napełniłaby go 4 razy w dniach 5; taż woda innym korytem wypuszczona ze stawu, wypróżniłaby go 3 razy w dniach 4. Jeżeli więc jednocześnie jedném korytem woda wpływa, a drugiem wypływa ze stawu, to jakaż część tego stawu napełniona będzie dnia każdego? (*Odp.* $\frac{1}{20}$.)

Wskazanie działania. W jednym dniu napełni się $\frac{4}{5}$ a wypróżni $\frac{3}{4}$ części stawu; więc taka część stawu tego codziennie wodą napełniona będzie, ile się pozostanie z odjęcia $\frac{3}{4}$ od $\frac{4}{5}$.

12. Do pewnego miejsca wysłany został kurjer przebywający 29 wiorst w każdych 3 godzinach; wkrótce wysłany został drugi Kurjer mający polecenie dogonić pierwszego. Jeżeli kurjer drugi w 4 godzinach ujeżdża 43 wiorst, to ileż co godzina zbliża się do pierwszego? (*Odp.* co godzina zbliża się o $1\frac{1}{12}$ wiorty).

13. Krawiec żąda na surdut $2\frac{5}{6}$ arszyna sukna, na kamizelkę $\frac{2}{5}$ arszyna, na spodnie $1\frac{3}{4}$ arszyna, na płaszcz $7\frac{4}{15}$ arszyna. Dano mu sztukę trzymającą $56\frac{1}{3}$ arszyna. Ileż zwrócić powinien? (*Odp.* $44\frac{2}{12}$ arszyna).

14. U pewnego kupca były wszystkie miary i wagi za małe. Do funta brakowało $2\frac{1}{3}$ zołotnika; do arszyna $\frac{2}{5}$ werszki; do wiadra $\frac{5}{7}$ czarki; do garnca $\frac{1}{25}$ kwarty. Ile zawierała u niego każda z pomienionych miar? (*Odp.* funt zawierał $93\frac{2}{3}$ zołotnika; arszyn $15\frac{3}{5}$ werszki; wiadro $99\frac{2}{7}$ czarki; garniec $3\frac{24}{25}$ kwarty).

15. Trzéj bracia podzielili między siebie $40\frac{3}{4}$ rubla w ten sposób: najstarszy wziął 15 rubli, średni o $1\frac{3}{8}$ rubla mniéj od naj-

starszego, a najmłodszy resztę. Ile dostał średni, a ile najmłodszy? (*Odp.* średni dostał $13\frac{5}{8}$ rubla, a najmłodszy $12\frac{1}{8}$ rubla).

16. Robotnik zrobił pierwszego dnia $\frac{7}{20}$, drugiego dnia $\frac{5}{12}$, a trzeciego dnia $\frac{1}{5}$ całéj roboty. Jaka część téj roboty pozostała do zrobienia? (*Odp.* $\frac{1}{30}$ całéj roboty).

17. Cztery dziewczyny mają wygotować przędzy sztuk 642. I w tym celu pierwsza uprzędła sztuk $178\frac{1}{2}$, druga $112\frac{1}{3}$, trzecia $101\frac{1}{4}$, czwarta $240\frac{3}{4}$. Ile brakuje? (*Odp.* $9\frac{1}{6}$ sztuki).

18. Ze sztuki sukna trzymającéj $40\frac{2}{3}$ arszyna, sprzedano $12\frac{1}{2}$ werszki. Ile zostało? (*Odp.* $39\frac{99}{160}$ arszyna).

19. Kupiono trzy głowy cukru ważące razem 69 funtów. Jeżeli jedna głowa ważyła $23\frac{4}{5}$ funta, a druga $25\frac{1}{2}$ funta, to ile ważyła głowa trzecia? (*Odp.* $19\frac{7}{10}$ funta).

20. Kupiono dwa konie: za jednego zapłacono $143\frac{5}{6}$ rubla, a za drugiego o $45\frac{19}{20}$ rubla mniéj jak za pierwszego. Ile zapłacono za konia drugiego, a ile za oba razem? (*Odp.* Za drugiego $97\frac{53}{60}$ rubla; za oba razem $291\frac{43}{60}$ rubla).

Mnożenie ułamków zwyczajnych.

129. Mnożenie ułamków jest działaniem, mocą którego w taki sposób tworzymy iloczyn z mnożnéj, w jaki sposób mnożnik utworzony został z jedności.

W mnożeniu ułamków rozróżnić możemy trzy główne przypadki.

Przypadek 1. Mnożenie ułamków przez całość.

130. *Ażeby ułamek pomnożyć przez liczbę całą, mnożymy licznik tego ułamku przez liczbę całą, zachowując ten sam mianownik.*

Przykład. $\frac{3}{5}\times 4=\frac{3\times 4}{5}=\frac{12}{5}=2\frac{2}{5}$.

Objaśnienie. Mamy tu z mnożnéj $\frac{3}{5}$ utworzyć iloczyn w taki sposób, w jaki sposób mnożnik 4 utworzony został z jedności. Zważywszy że mnożnik 4 utworzony został z jedności, dodając ją cztery razy wypisaną, to jest $1+1+1+1=4$; przeto postępując tak samo z mnożną $\frac{3}{5}$ jak postępowaliśmy z jednością dla utworzenia mnożnika, znajdziemy żądany iloczyn. W tym więc celu mnożną $\frac{3}{5}$ wypisujemy cztery razy, a ogół z tak wypisanych ułamków będzie iloczynem żądanym; jakoż: $\frac{3}{5}+\frac{3}{5}+\frac{3}{5}+\frac{3}{5}=\frac{3+3+3+3}{5}=\frac{3\times 4}{5}$. A ponieważ 3 jest licznikiem, 4 liczbą całą, a 5 mianownikiem, więc twierdzenie dowiedzione.

Sposób skrócony. *Jeżeli mianownik ułamku i liczba całkowita mają wspólny czynnik, to należy pierwéj wyrzucić z nich ten wspólny czynnik, a potém dopiero przystąpić do działania.*

Przykład. $\frac{7}{12}\times 15 \overset{3}{\smile}\!= \frac{7}{4}\times 5=\frac{7\times 5}{4}=\frac{35}{4}=8\frac{3}{4}$

Objaśnienie. Mamy ułamek $\frac{7}{12}$ do pomnożenia przez 15; gdybyśmy postąpili według zasady poprzednio udowodnionéj, należałoby licznik tego ułamku pomnożyć przez liczbę całą, zachowując ten sam mianownik; wskazując więc tylko to działanie, liczba całkowita 15 weszłaby jako czynnik do licznika i otrzymalibyśmy $\frac{7\times 15}{12}$. Wielkość tego ułamku nie odmieni się, jeżeli obadwa jego wyrazy podzielimy przez jednakową liczbę; podzieliwszy przeto tak licznik jako i mianownik przez 3 (zob. Nr. 71) otrzymamy $\frac{7\times 15:3}{12\ :3}=\frac{7\times 5}{4}=\frac{7}{4}\times 5$. Z tego więc jasno pokazuje się, że mnożenie $\frac{7}{12}\times 15$ zamienia się na mnożenie $\frac{7}{4}\times 5$, co nas uczy, że wyrzucając wspólny czynnik z mianownika i liczby całéj, nie zmieniamy wartości iloczynu.

Korzyść tego skrócenia okaże się widocznie w następujących przykładach.

1) $\frac{103}{180}\times 216 \overset{4}{\smile}\!= \frac{103}{45}\times 54 \overset{9}{\smile}\!= \frac{103}{5}\times 6\ \frac{103\times 6}{5}=\frac{618}{5}=123\frac{3}{5}$

2) $\frac{17}{72}\times 9 \overset{9}{\smile}\!= \frac{17}{8}\times 1=\frac{17}{8}=2\frac{1}{8}$.

3) $\frac{19}{24}\times 48 \overset{24}{\smile}\!= \frac{19}{1}\times 2=19\times 2=38$.

Mnożenie całości z ułamkiem przez całość można uskutecznić dwojakim sposobem:

1. Jeżeli wyrazy ułamku i liczba cała są wyrażone małemi liczbami, natenczas całość z należącym do niéj ułamkiem zamienia-

my na ułamek (Nr. 112) i postępujemy tak jak przy mnożeniu ułamku przez całość.

Przykład. $5\frac{7}{8} \times 9 = \frac{47}{8} \times 9 \frac{423}{8} = 52\frac{7}{8}$.

2. Jeżeli zaś wyrazy ułamku i liczba cała wyrażone są większemi liczbami, wtedy dogodniéj jest odbywać działania szczegółowo t. j. osobno pomnożyć całość przez całość, i osobno ułamek przez całość, to ogół z tak otrzymanych iloczynów będzie iloczynem żądadanym (Nr. 34).

Przykład. $104\frac{68}{127} \times 250 = 104 \times 250 + \frac{68}{127} \times 250 = 26000 + \frac{17000}{127} = 26000 + 133\frac{109}{127} = 26133\frac{109}{127}$.

Przypadek 2. Mnożenie całości przez ułamek.

131. *Ażeby liczbę całą pomnożyć przez ułamek, potrzeba liczbę całą pomnożyć przez licznik ułamku, a pod iloczynem ztąd otrzymanym podpisać mianownik ułamku.*

Przykład. $5 \times \frac{4}{9} = \frac{5 \times 4}{9} = \frac{20}{9} = 2\frac{2}{9}$.

Objaśnienie. Zważywszy że mnożnik $\frac{4}{9}$ utworzony został z jedności przez podzielenie jéj na 9 równych części i wzięcie 4 takich części; więc w taki sam sposób twórzmy iloczyn z mnożnéj 5 postępując z nią tak samo, jak postępowaliśmy z jednością, dla utworzenia mnożnika. W tym przeto celu mnożną 5 dzielimy przez 9, co daje na iloraz $\frac{5}{9}$ (Numer 104) i takich części bierzemy 4, to jest $\frac{5}{9} + \frac{5}{9} + \frac{5}{9} + \frac{5}{9} = \frac{5+5+5+5}{9} = \frac{5 + 4}{9}$. A ponieważ 5 jest liczbą całą, 4 licznikiem, a 9 mianownikiem, więc twierdzenie dowiedzione.

Sposób skrócony. *Jeżeli liczba cała i mianownik ułamku mają wspólny czynnik, to należy pierwéj wyrzucić z nich ten wspólny czynnik, a potém dopiero przystąpić do działania.*

Przykłady.

1) $32 \times \frac{11}{24} \overset{8}{=} 4 \times \frac{11}{3} = \frac{4 \times 11}{3} = \frac{44}{3} = 14\frac{2}{3}$.

2) $63 \times \frac{5}{9} \overset{9}{=} 7 \times \frac{5}{1} = 7 \times 5 = 35$.

3) $18 \times \frac{23}{36} \overset{18}{=} 1 \times \frac{23}{2} = \frac{23}{2} = 11\frac{1}{2}$.

Usprawiedliwienie sposobu postępowania niczem się nie różni od umieszczonego w przypadku pierwszym.

Mnożenie całości przez całość z ułamkiem można uskutecznić dwojakim sposobem:

1. Jeżeli liczba cała i wyrazy ułamku wyrażone są małemi liczbami, wtedy całość z należącym do niéj ułamkiem zamieniamy na ułamek (Nr. 112) i postępujemy tak jak przy mnożeniu całości przez ułamek.

Przykład. $8\times3\frac{4}{11}=8\times\frac{37}{11}=\frac{8\times37}{11}=\frac{296}{11}=26\frac{10}{11}$.

2. Jeżeli liczba cała i wyrazy ułamku wyrażone są większemi liczbami, wtedy dogodniéj jest odbywać działania szczegółowo t. j. całość mnożnéj pomnożyć przez całość mnożnika i całość mnożnéj przez ułamek mnożnika, a ogół z tak otrzymanych iloczynów będzie iloczynem żądanym (Nr. 34).

Przykład. $249\times465\frac{308}{1037}=249\times465+249\times\frac{308}{1037}=115785+\frac{76692}{1037}=115785+73\frac{891}{1037}=115858\frac{891}{1037}$.

Przypadek 3. Mnożenie ułamku przez ułamek.

132. *Ażeby ułamek pomnożyć przez ułamek, mnożymy licznik przez licznik, a mianownik przez mianownik; iloczyn z liczników jest licznikiem, a iloczyn z mianowników mianownikiem szukanego iloczynu.*

Przykład. $\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{2\times3}{5\times4}=\frac{6}{20}$.

Objaśnienie. Mnożnik $\frac{3}{4}$ utworzony został z jedności przez rozdzielenie jéj na 4 równe części i wzięcie 3 takich części; więc w taki sam sposób tworzyć będziemy iloczyn z mnożnéj $\frac{2}{5}$, postępując z nią tak samo, jak postępowaliśmy z jednością dla utworzenia mnożnika. W tym przeto celu mnożną $\frac{2}{5}$ dzielimy na 4 równe części, a następnie bierzemy 3 takich części. Zważywszy że czwarta część $\frac{1}{5}$ jest $\frac{1}{20}$ częścią jedności, czyli $\frac{1}{5\times4}$, więc czwarta część $\frac{2}{5}$ czyli $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$ jest ogółem z $\frac{1}{5\times4}+\frac{1}{5\times4}=\frac{2}{5\times4}$, zatém 3 takich części będzie $\frac{2}{5\times4}+\frac{2}{5\times4}+\frac{2}{5\times4}=\frac{2+2+2}{5\times4}=\frac{2\times3}{5\times4}$ iloczynem żądanym. A ponieważ liczby 2 i 3 są licznikami, a liczby 5 i 4 są mianownikami danych ułamków, więc twierdzenie dowiedzione.

Sposób skrócony. *Jeżeli jeden z liczników, z jednym z mianowników, mają wspólny czynnik, to należy pierwéj wyrzucić z nich ten wspólny czynnik, a potém dopiero przystąpić do działania.*

Przykład. $\frac{32}{37}\times\frac{5}{72}\overset{8}{=}\frac{4}{37}\times\frac{5}{9}=\frac{4\times5}{37\times9}=\frac{20}{333}$.

Objaśnienie. Bo gdybyśmy postąpili według zasady ogólnéj już udowodnionéj, otrzymalibyśmy $\frac{32}{37}\times\frac{5}{72}=\frac{32\times5}{37\times72}$. Podzieliwszy zaś obadwa wyrazy tego ułamku przez 8, (zob. Nr. 71) otrzymamy $\frac{32\times5:8}{37\times72:8}=\frac{4\times5}{37\times9}=\frac{4}{37}\times\frac{5}{9}$. Zatém mnożenie $\frac{32}{37}\times\frac{5}{72}$ zamieniamy na mnożenie $\frac{4}{37}\times\frac{5}{9}$, co nas uczy, że wyrzucając wspólny czynnik, mieszczący się w jednym z liczników, z jednym z mianowników, nie zmieniamy wartości iloczynu.

Mnożenie całości z ułamkiem przez całość z ułamkiem, można wykonać dwojakim sposobem:

1^0 Jeżeli liczby całe i wyrazy ułamku wyrażone są małemi liczbami, w takim razie całości z należącemi do nich ułamkami, zamieniamy na ułamki i postępujemy tak, jak przy mnożeniu ułamku przez ułamek.

Przykłady.

1) $12\frac{3}{5}\times8\frac{7}{9}=\frac{63}{5}\times\frac{79}{9}\overset{9}{=}\frac{7}{5}\times\frac{79}{1}=\frac{553}{5}=110\frac{3}{5}$.

2) $18\frac{2}{7}\times\frac{15}{32}=\frac{128}{7}\times\frac{15}{32}\overset{8}{=}\frac{16}{7}\times\frac{15}{4}\overset{4}{=}\frac{4}{7}\times\frac{15}{1}=\frac{60}{7}=8\frac{4}{7}$.

3) $\frac{19}{30}\times5\frac{10}{13}=\frac{19}{30}\times\frac{75}{13}\overset{15}{=}\frac{19}{2}\times\frac{5}{13}=\frac{95}{26}=3\frac{17}{26}$.

2^0 Jeżeli liczby całe i wyrazy ułamku wyrażone są liczbami większemi, dogodniéj jest wykonywać działania szczegółowo, jak pokazuje przykład poniżéj umieszczony.

Przykład. $359\frac{205}{847}\times1032\frac{568}{783}=370998\frac{233214}{663201}$

Albowiem:

$359\times1032=$ 370488

$\frac{205}{847}\times1032=$ . . . . $249\frac{637}{847}$ . . . . $\frac{498771}{663201}$

$359\times\frac{783}{568}=$ . . . . $260\frac{332}{783}$ . . . . $\frac{281204}{663201}$

$\frac{205}{847}\times\frac{568}{783}=$ . . . . $\frac{116440}{663201}$ . . . . $\frac{116440}{663201}$

$370998\frac{233214}{663201}$ $\qquad \frac{896415}{663201}=1\frac{233214}{663201}$.

Przykłady dla wprawy.

1) $\frac{5}{11}\times20=?$ . . . . . . $(9\frac{1}{11})$
2) $\frac{23}{25}\times17=?$ . . . . . $(15\frac{16}{25})$
3) $\frac{19}{75}\times105=?$ . . . . $(26\frac{3}{5})$
4) $\frac{37}{81}\times36=?$ . . . . . $(16\frac{4}{9})$
5) $\frac{13}{18}\times36=?$ . . . . . (26)
6) $\frac{107}{130}\times260=?$ . . . . (214)
7) $\frac{15}{56}\times8=?$ . . . . . $(2\frac{1}{7})$
8) $\frac{201}{302}\times151=?$ . . . $(100\frac{1}{2})$
9) $8\frac{5}{9}\times15=?$ . . . $(128\frac{1}{3})$
10) $73\frac{17}{48}\times56=?$ . . $(4107\frac{5}{6})$
11) $24\frac{3}{13}\times9=?$ . . . . $(218\frac{1}{13})$
12) $26\frac{1}{7}\times24=?$ . . $(627\frac{3}{7})$
13) $475\frac{103}{207}\times108=?$ $(51353\frac{17}{23})$
14) $8035\frac{407}{524}\times332=?$. $(2667927\frac{114}{131})$
15) $46\times\frac{17}{19}=?$ . . . $(41\frac{3}{19})$
16) $73\times\frac{11}{18}=?$ . . . . $(44\frac{11}{18})$
17) $228\times\frac{101}{156}=?$ . . $(147\frac{8}{13})$
18) $125\times\frac{13}{50}=?$ . . . . $(32\frac{1}{2})$
19) $250\times\frac{67}{125}=?$ . . (134)
20) $160\times\frac{73}{80}=?$ . . . . (146)
21) $75\times\frac{103}{225}=?$ . . $(34\frac{1}{3})$
22) $45\times\frac{97}{180}=?$ . . . . $(24\frac{1}{4})$
23) $16\times12\frac{31}{40}=?$. $(204\frac{2}{5})$
24) $18\times7\frac{14}{27}=?$ . . . $(135\frac{1}{3})$
25) $685\times29\frac{403}{505}=?$ $(20411\frac{65}{101})$
26) $645\times806\frac{207}{315}=?$ $(520293\frac{6}{7})$
27) $\frac{14}{29}\times\frac{27}{53}=?$ . . . . . . $(\frac{378}{1537})$
28) $\frac{103}{215}\times\frac{37}{114}=?$ . . . . . $(\frac{3811}{24510})$
29) $\frac{64}{135}\times\frac{15}{28}=?$ . . . . . . $(\frac{16}{63})$
30) $\frac{75}{77}\times\frac{49}{150}=?$ . . . . . . $(\frac{7}{22})$
31) $\frac{37}{52}\times\frac{27}{37}=?$ . . . . . . $(\frac{27}{52})$
32) $\frac{65}{82}\times\frac{41}{65}=?$ . . . . . . $(\frac{1}{2})$
33) $8\frac{76}{95}\times\frac{25}{44}=?$ . . . . . . (5)
34) $27\frac{13}{35}\times\frac{63}{80}=?$ . . . . $(31\frac{1}{200})$
35) $14\frac{2}{11}\times26\frac{5}{9}=?$ . . $(376\frac{20}{33})$
36) $89\frac{23}{75}\times47\frac{12}{67}=?$ $(4197\frac{2077}{5025})$

ZAGADNIENIA.

1. Kupiono 46 arszynów płótna po $\frac{3}{5}$ rubla arszyn. Ileż za to płótno zapłacono. (*Odp.* $27\frac{3}{5}$ rubla).

Wskazanie działania. Celem zadania jest znaleść wartość 46 arszynów płótna z podanéj wartości jednego arszyna tegoż płótna. Należałoby więc ułamek $\frac{3}{5}$ rubla, t. j. wartość jednego arszyna wypisać 46 razy i ułamki te zupełnie sobie równe, do siebie dodać; albo krócéj $\frac{3}{5}$ pomnożyć przez 46 (Nr. 130).

2. Ile się zapłaci za $\frac{5}{6}$ włóki, kiedy za całą włókę żądają 458 rubli? (*Odp.* $381\frac{2}{3}$ rubla).

Wskazanie działania. Kiedy za całą włókę wypada zapłacić 458 rubli, to za szóstą część włóki wypadnie zapłacić szóstą część 458 rubli, a za 5 takich szóstych części włóki, 5 razy więcéj jak za $\frac{1}{6}$; działanie więc dąży do tego, aby tak postąpić z liczbą 458, jak postępujemy z jednością dla utworzenia $\frac{5}{6}$; a cel ten osiągniemy, jeżeli 458 pomnożymy przez $\frac{5}{6}$ (zob. Nr. 131).

3. Znaleść $\frac{3}{8}$ części liczby 539. (*Odp.* $202\frac{1}{8}$).

Wskazanie działania. Podzieliwszy daną liczbę 539 na 8 równych części, otrzymamy ósme jéj części; więc biorąc trzy takich części, będziemy mieli $\frac{3}{8}$ części liczby danéj. Działanie zatém dąży do tego, aby tak samo postąpić z liczbą 539 dla znalezienia $\frac{3}{8}$ jéj części, jak postąpilibyśmy z jednością dla utworzenia $\frac{3}{8}$; więc na zasadzie umieszczonéj w numerze 131, cel ten osiągniemy mnożąc 539 przez $\frac{3}{8}$.

4. Polecono robotnikowi zrobić $\frac{7}{11}$ całéj roboty w jednéj godzinie; jakąż więc część téj roboty zrobi w $\frac{3}{4}$ godziny? (*Odp.* zrobi $\frac{21}{44}$ całéj roboty).

Wskazanie działania. Dzieląc pracę jednogodzinną, t. j. $\frac{7}{11}$ całéj roboty na 4 równe części, otrzymujemy część roboty wykonanéj przez robotnika w $\frac{1}{4}$ godziny, trzy zatém takie części pokażą jaka część całéj roboty wykonaną będzie w $\frac{3}{4}$ godziny. Z tego więc jasno widzimy, że chcąc znaleść pracę wykonaną przez robotnika w $\frac{3}{4}$ godziny, należy z $\frac{7}{11}$ częściami postąpić tak samo, jak postąpilibyśmy z jednością dla utworzenia $\frac{3}{4}$-ch, co osiągniemy (Nr. 132) mnożąc $\frac{7}{11}$ przez $\frac{3}{4}$.

5. Ile się zapłaci za 29 arszynów taśmy po $\frac{4}{5}$ rubla arszyn? (*Odp.* 23 rubli i 20 kopiejek).

6. Znaleść $\frac{3}{7}$ części liczby $13\frac{1}{9}$. (*Odp.* $5\frac{13}{21}$).

7. Jaką ilość rubli utworzą: trzy piątych 75 rubli złączone z $\frac{2}{3}$-mi tejże summy? (*Odp.* 95 rubli).

8. Polecono robotnikowi zrobić $\frac{5}{9}$ całéj roboty w jednéj godzinie; ileż zrobi w 25 minutach? (*Odp.* $\frac{25}{108}$ całéj roboty).

9. Za wykopanie rowu ugodzono robotnika 213 rubli. Ile mu się zapłaci za $\frac{11}{15}$ całéj roboty? (*Odp.* 156 rubli 20 kopiejek).

10. Ile ma wartości pierścień złoty ważący $\frac{5}{7}$ zołotnika, kiedy 1 zołotnik tego złota wart jest 4 ruble i 56 kopiejek? (*Odp.* wart jest 3 rub. $25\frac{5}{7}$ kopiejek).

11. Urzędnik mający pensyi rocznéj 960 rubli, ile dostanie za lat $2\frac{5}{6}$? (*Odp.* 2720 rubli).

12. Pewien wieśniak miał do przebycia 75 wiorst w przeciągu trzech dni. Jakoż dnia pierwszego uszedł $\frac{3}{10}$ całéj przestrzeni, drugiego $\frac{1}{3}$ téj przestrzeni, trzeciego dnia resztę. Po ile wiorst uchodził dnia każdego? (*Odp.* pierwszego dnia uszedł $22\frac{1}{2}$, drugiego 25, a trzeciego $27\frac{1}{2}$ wiorsty).

13. Ile się zapłaci za $8\frac{2}{3}$ arszyna sukna, kiedy arszyn kosztuje 3 ruble? (*Odp.* 26 rubli).

14. Pewien podróżny który w 4 godzinach uchodzi 3 mile, szedł tylko przez $\frac{2}{3}$ godziny; ileż uszedł? (*Odp.* $\frac{1}{2}$ mili).

15. Ile się zapłaci za 12 arszynów i 8 werszek płótna, kiedy za sztukę zawierającą 75 arszynów żądają 39 rubli? (*Odp.* 6 rubli i 50 kopiejek).

16. Pewna osoba która włożyła w handel 3580 rubli, po pewnym czasie zyskała $\frac{5}{6}$ tego co włożyłą. Ileż więc zyskała i ile odtąd wynosił cały jéj majątek? (*Odp.* Zyskała 2983 rub. $33\frac{2}{3}$ kopiejek, poczém majątek jéj wynosił 6563 rubli $33\frac{2}{3}$ kopiejek).

17. Kupiec otrzymał beczkę cukru zawierającą 38 głów. Jeżeli każda głowa ważyła $28\frac{7}{9}$ funta, ileż ważyły wszystkie? (*Odp.* $1093\frac{5}{9}$ funta).

18. Jeżeli z jednéj włóki płaci się dzierżawy 15 rubli, ile wypadnie zapłacić z $12\frac{3}{4}$ włóki? (*Odp.* $191\frac{1}{4}$ rubla).

19. Kiedy ryza papiéru kosztuje $4\frac{4}{5}$ rubla, ile się zapłaci za $12\frac{3}{8}$ ryzy? (*Odp.* $59\frac{2}{5}$ rubla).

20. Kiedy roczne komorne wynosi 65 rubli i 60 kop., ile wypadnie zapłacić za $\frac{2}{3}$ roku? (*Odp.* 43 rubli, $73\frac{1}{3}$ kopiejek).

21. Z beczki wina wartującego $104\frac{2}{5}$ rubla, sprzedano $\frac{3}{7}$

beczki. Ileż wzięto pieniędzy za sprzedane wino? (*Odp.* 44 rubli, 74 $\frac{2}{7}$ kopiejek).

22. Do pewnéj przędzalni zakupiono lnu 3750 pudów i 10 funtów, z każdego puda utkano płótna arszynów $9\frac{2}{3}$ i sprzedawano arszyn tego płótna po $\frac{4}{5}$ rubla. Ileż otrzymano wszystkiego płótna i ile za nie wzięto pieniędzy? (*Odp.* Otrzymano płótna $36252\frac{5}{12}$ arszyna, za które wzięto 14500 rubli $96\frac{2}{3}$ kopiejek).

23. Gospodarz zakupił 104 owiec, 5 krów i 2 woły; ileż na to wydał pieniędzy, jeżeli płacił owcę po $1\frac{1}{3}$ rubla, krowę po $24\frac{1}{2}$ rubla, a wołu po $32\frac{1}{4}$ rubla. (*Odp.* Wydał $325\frac{2}{3}$ rubla).

24. Sprowadzono trzy paki towaru, oznaczone literami A, B, C, paka A ważyła z opakowaniem $23\frac{1}{2}$ puda; paka B $12\frac{2}{3}$ puda; paka C $21\frac{1}{4}$ puda; samo zaś opakowanie ważyło razem $27\frac{1}{2}$ funta. Ile za cały towar zapłacono, jeżeli pud towaru bez opakowania kosztuje 26 rubli? (*Odp.* Za towar zapłacono 1470 rubli i $62\frac{1}{2}$ kopiejek).

25. Kupiec otrzymał 500 pudów towaru, którego $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$ i $\frac{1}{7}$ część odstąpił trzem swoim znajomym, resztę zaś pozostałą sprzedawał funt po 2 ruble i 50 kopiejek. Ile wziął pieniędzy za resztę towaru? (*Odp.* Za resztę towaru wziął 13690 rubli i $47\frac{13}{21}$ kopiejek).

26. Pewna osoba wzięła z sobą na sprawunki 27 rubli, z których w jedném miejscu wydała $\frac{2}{3}$ tych pieniędzy, w drugiém $\frac{5}{6}$, pozostałych a w trzeciém $\frac{3}{4}$ tego co po dwóch pierwszych sprawunkach pozostało. Ileż jéj zostało jeszcze pieniędzy? (*Odp.* $\frac{3}{8}$ rubla zostało).

27. Pewna dobroczynna osoba, w testamencie rozporządziła $\frac{1}{3}$ częścią swego majątku wynoszącego 20460 rubli w następujący sposób: $\frac{1}{20}$ część téj summy dla biednéj wdowy z kilkorgiem drobnych dziatek bez żadnego prawie sposobu do życia zostającéj; $\frac{1}{4}$ jako wieczysty fundusz dla nauczyciela szkółki parafialnéj; $\frac{2}{5}$ jako takiż fundusz dla dwóch pilnych i wzorowych lecz biednych uczniów kształcących się w jednéj ze szkół publicznych; resztę zaś téj summy na miejscowy szpital. Jakaż summa wypadnie po szczególe na każdy z pomienionych celów? (*Odp.* Summa do rozporządzenia wynosiła 6820 rubli, z któréj wdowie dostało się 341 rubli,

nauczycielowi 1705 rubli; uczniom 2728 rubli; na szpital 2046 rubli).

Dzielenie ułamków zwyczajnych.

133. Chcąc dowieść prawdy ogólnéj, nie dosyć jest rozwiązać prowadzące do niéj zadanie, lecz należy rozwiązać jeszcze zadanie odwrotne t. j. z wynalezionych wypadków powrócić do pierwiastkowo danych w zadaniu, tym bowiem sposobem nabywamy zupełnéj pewności w działaniach, i nadto odkrywamy nowe prawdy roztrząsając przypadki przeciwne pierwszym. W poprzedzającém działaniu wykryliśmy drogę postępowania do znalezienia iloczynu z danych czynników, tu zamierzamy wskazać sposób działania do znalezienia jednego czynnika, gdy iloczyn i drugi czynnik są znane; dzielenie bowiem, jak to już wyżéj (Nr. 40) powiedzieliśmy, jest działaniem wprost przeciwném mnożeniu. W działaniu tém, iloczyn przyjmuje nazwisko dzielnéj, dany czynnik nazwisko dzielnika, czynnik zaś szukany nazwisko ilorazu. Zasadzając się więc na podaném określeniu mnożenia (Nr. 129) twierdzimy, *że dzielna w taki sposób złożona jest z ilorazu, w jaki sposób dzielnik złożony z jedności;* i na tém to określeniu opierając się, postępując drogą odwrotną, wyjaśnimy dzielenie ułamków, które również jak mnożenie rozdzielimy na trzy przypadki.

Przypadek 1. Dzielenie ułamku przez całość.

134. *Ażeby ułamek podzielić przez liczbę całą, potrzeba mianownik tego ułamku pomnożyć przez liczbę całą, zachowując ten sam licznik.*

Przykład. $\frac{3}{7} : 5 = \frac{3}{7 \times 5} = \frac{3}{35}$.

Objaśnienie. Dzielnik 5 złożony jest z 5 jedności, więc dzielna $\frac{3}{7}$ złożona jest z 5 razy wziętego ilorazu; chcąc zatém znaleść iloraz, potrzeba dzielną podzielić na 5 równych części i wziąść jednę taką część, czyli innemi słowy wziąść piątą część $\frac{3}{7}$. A ponieważ piąta część $\frac{1}{7}$ jest $\frac{1}{35}$ częścią jedności czyli $\frac{1}{7 \times 5}$, więc piąta część $\frac{3}{7}$ która się składa z $\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}$ będzie ogółem z $\frac{1}{7\times5}+\frac{1}{7\times5}+\frac{1}{7\times5}=\frac{3}{7\times5}$ czyli ilorazem szukanym.

Sposób skrócony. *Jeżeli licznik ułamku i liczba cała mają wspólny czynnik, to należy pierwéj wyrzucić z nich ten wspólny czynnik, a potém dopiero przystąpić do działania.*

Przykład. $\frac{28}{29}:21\overset{7}{\smile}\!\!=\frac{4}{29}:3=\frac{4}{29\times3}=\frac{4}{87}$.

Objaśnienie. Bo według ogólnéj zasady postępując, należałoby mianownik ułamku pomnożyć przez liczbę całą, zachowując ten sam licznik; wskazując więc tylko działanie, liczba cała wejdzie jako czynnik do mianownika i otrzymamy $\frac{28}{29}:21=\frac{28}{29\times21}$. A podzieliwszy obadwa wyrazy tego ułamku przez 7 (zob. Nr. 71) otrzymamy: $\frac{28:7}{29\times21:7}=\frac{4}{29\times3}=\frac{4}{29}:3$. Zatém dzielenie $\frac{28}{29}:21$ zamienić można na dzielenie $\frac{4}{29}:3$, co nas uczy, że wyrzucając wspólny czynnik z licznika i liczby całéj, nie zmieniamy wartości ilorazu.

Przykłady.

1) $\frac{135}{202}:90\overset{5}{\smile}\!\!=\frac{27}{202}:18\overset{9}{\smile}\!\!=\frac{3}{202}:2=\frac{3}{404}$.

2) $\frac{82}{93}:41\overset{41}{\smile}\!\!=\frac{2}{93}:1=\frac{2}{93}$.

3) $\frac{16}{19}:32\overset{16}{\smile}\!\!=\frac{1}{19}:2=\frac{1}{38}$.

Dzielenie całości z ułamkiem przez całość, sprowadzamy do dzielenia ułamku przez całość, zamieniając całość z należącym do niéj ułamkiem na ułamek, jak to przykład pokazuje.

Przykład. $14\frac{5}{8}:12=\frac{117}{8}:12\overset{3}{\smile}\!\!=\frac{39}{8}:4=\frac{39}{32}=1\frac{7}{32}$.

Przypadek 2. Dzielenie całości przez ułamek.

135. *Ażeby liczbę całą podzielić przez ułamek, potrzeba liczbę całą pomnożyć przez mianownik ułamku i iloczynowi ztąd otrzymanemu dać za mianownik, licznik danego ułamku.*

Przykład. $5:\frac{3}{4}=\frac{5\times4}{3}=\frac{20}{3}=6\frac{2}{3}$.

Objaśnienie. Dzielnik $\frac{3}{4}$ utworzony jest z jedności, przez rozdzielenie jéj na 4 równe części i wzięcie 3 takich części, więc w taki sam sposób powstała dzielna z ilorazu t. j. dzieląc iloraz na 4 części i biorąc 3 takich części, czyli innemi słowy mówiąc, $\frac{3}{4}$ części ilorazu utworzyło dzielną 5. A kiedy $\frac{3}{4}$ części ilorazu tworzy liczbę 5, więc $\frac{1}{4}$ tego ilorazu jako ilość trzy razy mniejsza od $\frac{3}{4}$ utworzy liczbę 3 razy mniejszą od 5 t. j. $\frac{5}{3}$; zatém cały iloraz jako zawierający 4 czwartych części, złoży liczbę będącą ogółem z $\frac{5}{3}+\frac{5}{3}+\frac{5}{3}+\frac{5}{3}=\frac{5+5+5+5}{3}=\frac{5\times 4}{3}$ iloraz szukany.

Sposób skrócony. *Jeżeli liczba cała i licznik ułamku mają wspólny czynnik, to należy pierwéj wyrzucić z nich ten wspólny czynnik, a potém dopiero przystąpić do działania.*

Przykład. $56:\frac{16}{17}\overset{8}{=}7:\frac{2}{17}=\frac{7\times 17}{2}=\frac{119}{2}=59\frac{1}{2}$.

Objaśnienie. Gdybyśmy bowiem postąpili według ogólnéj zasady, lecz wskazując tylko działanie, otrzymalibyśmy $56:\frac{16}{17}=\frac{56\times 17}{16}$. Dzieląc obadwa wyrazy tego ułamku przez 8 (zob. Nr. 71) otrzymamy $\frac{56\times 17\,:\,8}{16\,:\,8}=7:\frac{2}{17}$. Zatém dzielenie $56:\frac{16}{17}$ zamienić można na dzielenie $7:\frac{2}{17}$ bez zmiany wartości ilorazu, czyli wyrzucając wspólny czynnik i t. d.

Przykłady.

1) $120:\frac{132}{133}\overset{4}{=}30:\frac{33}{133}\overset{3}{=}10:\frac{11}{133}=\frac{1330}{11}=120\frac{10}{11}$.

2) $60:\frac{30}{37}\overset{30}{=}2:\frac{1}{37}=\frac{74}{1}=74$.

3) $23:\frac{46}{53}\overset{23}{=}1:\frac{2}{53}=\frac{53}{2}=26\frac{1}{2}$.

Dzielenie całości przez całość z ułamkiem przyprowadzamy do dzielenia całości przez ułamek, zamieniając całość z należącym do niéj ułamkiem na ułamek.

Przykład. $13:5\frac{3}{11}=13:\frac{58}{11}=\frac{143}{58}=2\frac{37}{58}$.

Przypadek 3. Dzielenie ułamku przez ułamek.

136. *Ażeby ułamek podzielić przez ułamek, potrzeba licznik dzielnéj pomnożyć przez mianownik dzielnika, i iloczynowi ztąd otrzyma-*

nemu dać za mianownik iloczyn z mianownika dzielnéj przez licznik dzielnika.

Przykład. $\frac{5}{6} : \frac{2}{3} = \frac{5 \times 3}{6 \times 2} = \frac{15}{12} = 1\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.

Objaśnienie. Dzielnik $\frac{2}{3}$ powstał z jedności przez rozdzielenie jéj na 3 części i wzięcie 2 takich części; więc w taki sam sposób powstała dzielna z ilorazu, t. j. dzieląc iloraz na 3 równe części i biorąc z niego 2 takich części, czyli innemi słowy mówiąc, $\frac{2}{3}$ części ilorazu utworzyło dzielną $\frac{5}{6}$. A kiedy $\frac{2}{3}$ części ilorazu tworzy liczbę $\frac{5}{6}$, więc $\frac{1}{3}$ tegoż ilorazu jako ilość 2 razy mniejsza od $\frac{2}{3}$, utworzy liczbę 2 razy mniejszą od $\frac{5}{6}$, czyli połowę $\frac{5}{6}$ t. j. (Nr. 134) $\frac{5}{12}$, czyli $\frac{5}{6 \times 2}$; zatém cały iloraz, jako zawierający w sobie 3 takich trzecich części, złoży liczbę będącą ogółem z $\frac{5}{6 \times 2} + \frac{5}{6 \times 2} + \frac{5}{6 \times 2} = \frac{5+5+5}{6 \times 2} = \frac{5 \times 3}{6 \times 2}$ iloraz szukany.

Sposób skrócony. *Jeżeli obadwa liczniki lub obadwa mianowniki mają wspólny czynnik, to należy pierwéj wyrzucić z nich ten wspólny czynnik, a potém dopiero przystąpić do działania.*

Przykład. $\frac{5}{18} : \overset{6}{\frac{37}{42}} = \frac{5}{3} : \frac{37}{7} = \frac{5 \times 7}{3 \times 37} = \frac{35}{111}$.

Objaśnienie. Gdybyśmy postąpili według ogólnéj zasady, to wskazując tylko działanie otrzymalibyśmy $\frac{5}{18} : \frac{37}{42} = \frac{5 \times 42}{18 \times 37}$. Podzieliwszy oba wyrazy tego ułamku przez 6 (zob. Nr. 71), otrzymamy $\frac{5 \times 42 : 6}{18 \times 37 : 6} = \frac{5 \times 7}{3 \times 37} = \frac{5}{3} : \frac{37}{7}$. Zatém dzielenie $\frac{5}{18} : \frac{37}{42}$ można zamienić na dzielenie $\frac{5}{3} : \frac{37}{7}$, czyli jeżeli z obu liczników, lub z obu mianowników wyrzucimy wspólny czynnik, nie zmienimy wartości ilorazu.

Przykłady.

1) $\frac{14}{15} : \overset{14}{\frac{28}{33}} = \frac{1}{15} : \overset{3}{\frac{2}{33}} = \frac{1}{5} : \frac{2}{11} = \frac{11}{10} = 1\frac{1}{10}$

2) $\frac{12}{13} : \overset{12}{\frac{12}{25}} = \frac{1}{13} : \frac{1}{25} = \frac{25}{13} = 1\frac{12}{13}$.

3) $\frac{7}{20} : \overset{20}{\frac{9}{20}} = \frac{7}{1} : \frac{9}{1} = \frac{7}{9}$.

Dzielenie całości z ułamkiem przez całość z ułamkiem sprowadzamy do dzielenia ułamku przez ułamek, zamieniając całości z należącemi do nich ułamkami na ułamki.

Przykłady.

1) $37\frac{3}{4} : 13\frac{5}{8} = \frac{151}{4} : \overset{4}{\frac{109}{8}} = \frac{151}{1} : \frac{109}{2} = \frac{302}{109} = 2\frac{84}{109}$.

2) $25\frac{7}{24} : \frac{13}{20} = \frac{607}{24} : \frac{13}{20} \overset{4}{=} \frac{607}{6} : \frac{13}{5} = \frac{3035}{78} = 38\frac{71}{78}$.

Uwaga. Spamiętanie skróceń w obu działaniach mnożenia i dzielenia, nie przedstawi żadnéj trudności, jeżeli przebiegłszy je myślą zechcemy zauważyć, że te wyrazy które mają być przez siebie w działaniu mnożone, nigdy nie mogą być upraszczane. I tak: w mnożeniu ułamku przez całość, lub całości przez ułamek, mnożymy licznik przez liczbę całą, więc w obu tych przypadkach, licznik z całością nie może być upraszczany; dla podobnéj przyczyny w takichże przypadkach dzielenia, liczba cała i mianownik nie mogą być upraszczane. Toż samo postrzeżenie stosuje się do mnożenia i dzielenia ułamków przez siebie.

Przykłady dla wprawy.

1) $\frac{19}{25} : 24 = ?$ . . . $\left(\frac{19}{600}\right)$ 2) $\frac{123}{560} : 47 = ?$ . . $\left(\frac{123}{26320}\right)$

3) $\frac{168}{271} : 216 = ?$ . . $\left(\frac{7}{2439}\right)$ 4) $\frac{260}{281} : 300 = ?$. $\left(\frac{13}{4215}\right)$

5) $\frac{63}{73} : 126 = ?$ . . $\left(\frac{1}{146}\right)$ 6) $\frac{24}{35} : 48 = ?$ . . . . $\left(\frac{1}{70}\right)$

7) $\frac{108}{223} : 54 = ?$ . . $\left(\frac{2}{223}\right)$ 8) $\frac{94}{99} : 47 = ?$ . . . . $\left(\frac{2}{99}\right)$

9) $\frac{143}{157} : 143 = ?$ . . $\left(\frac{1}{157}\right)$ 10) $\frac{327}{429} : 327 = ?$ . . $\left(\frac{1}{429}\right)$

11) $42\frac{5}{7} : 12 = ?$ . . $\left(3\frac{47}{84}\right)$ 12) $37\frac{11}{15} : 58 = ?$ . . $\left(\frac{283}{435}\right)$

13) $29 : \frac{14}{17} = ?$ . . $\left(35\frac{3}{14}\right)$ 14) $49 : \frac{19}{23} = ?$ . . $\left(59\frac{6}{19}\right)$

15) $27 : \frac{45}{67} = ?$ . . $\left(40\frac{1}{5}\right)$ 16) $132 : \frac{84}{95} = ?$ $\left(149\frac{2}{7}\right)$

17) $450 : \frac{225}{307} = ?$. (614) 18) $582 : \frac{194}{203} = ?$. (609)

19) $75 : \frac{300}{317} = ?$. $\left(79\frac{1}{4}\right)$ 20) $36 : \frac{180}{229} = ?$ . . $\left(45\frac{4}{5}\right)$

21) $37 : \frac{37}{40} = ?$ . . . (40) 22) $89 : \frac{89}{93} = ?$ . . (93)

23) $1 : \frac{17}{25} = ?$ . . . . $\left(1\frac{8}{17}\right)$ 24) $1 : \frac{47}{189} = ?$ . . $\left(4\frac{1}{47}\right)$

25) $13 : 43\frac{17}{20} = ?$. $\left(\frac{260}{877}\right)$ 26) $274 : 12\frac{11}{25} = ?$ $\left(22\frac{7}{311}\right)$

27) $\frac{58}{63} : \frac{19}{25} = ?$ . . $\left(1\frac{253}{1197}\right)$ 28) $\frac{47}{58} : \frac{32}{37} = ?$ . . . $\left(\frac{1739}{1856}\right)$

29) $\frac{30}{37} : \frac{60}{61} = ?$ . . . . $\left(\frac{61}{74}\right)$ 30) $\frac{18}{19} : \frac{36}{49} = ?$ . . . $\left(1\frac{11}{38}\right)$

31) $\frac{83}{90} : \frac{28}{45} = ?$ . . . . $\left(1\frac{27}{56}\right)$ 32) $\frac{147}{224} : \frac{65}{112} = ?$ . . $\left(1\frac{17}{130}\right)$

33) $\frac{100}{203} : \frac{75}{92} = ?$ . . . $\left(\frac{368}{609}\right)$ 34) $\frac{504}{593} : \frac{120}{367} = ?$. $\left(2\frac{1777}{2965}\right)$

35) $\frac{84}{175} : \frac{126}{140} = ?$ . . . $\left(\frac{8}{15}\right)$ 36) $\frac{168}{280} : \frac{72}{385} = ?$ . . $\left(3\frac{5}{24}\right)$

37) $14\frac{13}{19} : \frac{23}{35} = ?$. $\left(22\frac{151}{437}\right)$ 38) $25\frac{73}{81} : \frac{18}{29} = ?$. $\left(41\frac{532}{729}\right)$

39) $43\frac{21}{56} : 13\frac{5}{72} = ?$ $\left(3\frac{2100}{6587}\right)$ 40) $82\frac{4}{27} : 21\frac{7}{45} = ?$ $\left(3\frac{1261}{1428}\right)$.

ZAGADNIENIA.

1. Liczba 100 jakiéj liczby jest $\frac{5}{7}$ częścią; albo innemi słowy: znaleść liczbę, któréj $\frac{5}{7}$-ch części tworzy liczbę 100? (*Odp.* szukaną liczbą jest 140).

Wskazanie działania. Ułamek $\frac{5}{7}$ jest tu skazówką pokazującą, w jaki sposób z liczby szukanéj tworzy się liczba 100; albo inemi słowy: liczba 100 w taki sposób tworzy się z liczby szukanéj, w jaki sposób ułamek $\frac{5}{7}$ utworzony został z jedności. A ponieważ dzielna w taki sposób złożona jest z ilorazu, w jaki sposób dzielnik złożony z jedności: więc liczba szukana w podaném zadaniu, jest ilorazem z liczby 100 podzielonéj przez $\frac{5}{7}$ (zob. Nr. 133 i 135)

2. Znaleść liczbę, któréj $\frac{1}{3}$ część złączona z $\frac{1}{5}$ i $\frac{1}{7}$ téj liczby, utworzy liczbę 142? (*Odp.* liczbą szukaną jest 210).

Wskazanie działania. Ponieważ $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ i $\frac{1}{7}$ są ułamkami téj saméj liczby, mogą więc być zamienione jednym ułamkiem przedstawiającym tęż samą wielkość i będącym ich ogółem, jakoż: $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}=\frac{71}{105}$. Tym więc sposobem zadanie zamieniliśmy na podobne poprzedzającemu; idzie bowiem o to tylko teraz, ażeby znaleść liczbę, któréj $\frac{71}{105}$ch części tworzy liczbę 142.

3. Znaleść liczbę, która powiększona swemi $\frac{3}{5}$-mi częściami, wyda na ogół liczbę 960? (*Odp.* liczbą szukaną jest 600).

Wskazanie działania. Liczba szukana zawiera 5 piątych swoich części, do których dodane 3 takież piąte części, utworzą 8 piątych części; zatém $\frac{8}{5}$-ch części liczby szukanéj, tworzy liczbę 960. Zadanie więc zamieniliśmy na podobne pierwszemu, idzie bowiem o znalezienie takiéj liczby, któréj $\frac{8}{5}$-ch części tworzy liczbę 960.

4. Pewien spadek rozdzielony został między czterech spadkobierców. Pierwszy z nich otrzymał 94245 rubli, drugi $\frac{1}{7}$ całego spadku, trzeci $\frac{1}{8}$, a czwarty $\frac{4}{13}$ tegoż spadku. Ileż dostał każdy i ile wynosił cały spadek? (*Odp.* cały spadek wynosił 222040 rubli, z których pierwszy dostał 94245 rubli, drugi 31720 rubli trzeci 27755 rubli, czwarty 68320 rubli).

Wskazanie działania. Drugi, trzeci i czwarty ze spadkobierców, według podanych warunków w zadaniu dostali razem: $\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{4}{13}=\frac{419}{728}$ całego spadku. Cały więc spadek podzielonym został na 728 równych części, jakich 419 przypadło na drugiego, trzeciego i czwartego ze spadkobierców; pierwszy zatém dostał resztę, t. j. $\frac{309}{728}$ części całego spadku. A ponieważ wiadomo z zadania, że pierwszy dostał 94245 rubli, więc 94245 rubli jest $\frac{309}{728}$ całego spadku. Ażeby więc znaleść cały spadek, potrzeba odszukać takiéj liczby, któréj $\frac{309}{728}$ch części tworzy liczbę 94245, co znajdziemy takimże sposobem, jaki był podany w zadaniu pierwszém. Wiedząc zaś cały spadek, łatwo jest już dowiedzieć się, ile przypadnie na każdego ze spadkobierców.

5. Służący za niemoralne sprawowanie się, odprawionym został ze służby; lecz według obrachunku za $\frac{5}{6}$ roku służby dostał 55 rubli. Za ileż ugodzony był rocznie? (*Odp.* za 66 rubli).

Wskazanie działania. Według warunków zadania 55 rubli, które służący dostał przy wyjściu ze służby, nie jest płacą roczną lecz $\frac{5}{6}$ch części płacy rocznéj. Zadanie więc dąży do znalezienia takiéj liczby, któréj $\frac{5}{6}$ch części tworzy liczbę 55; co także znajdziemy takimże sposobem, jaki był podany w zadaniu pierwszém.

6. Do wykopania rowu najętych zostało dwóch ludzi: pierwszy z nich ukończyłby tę pracę w 20 dniach, drugi mniéj silny w 25 dniach. Ileż dni potrzebować będą obadwa razem pracując, ażeby rów wykopać? (*Odp.* dni $11\frac{1}{9}$.

Wskazanie działania. Obadwa razem pracując, wykonywają codziennie $\frac{1}{20}+\frac{1}{25}=\frac{9}{100}$ całéj roboty; zatém ile razy praca dzienna mieści się w całéj robocie, którą oznaczamy przez jedność, tyle dni użytych będzie do wykopania całego rowu.

7. Za $\frac{4}{9}$ arszyna sukna zapłacono 2 ruble. Po ile wypada arszyn tego sukna? (*Odp.* po 4 ruble i 50 kopiejek).

Wskazanie działania. Jeżeliby $\frac{4}{9}$-arszyna było połową arszyna, wtedy i 2 ruble byłyby połową wartości całego arszyna; jeżeliby $\frac{4}{9}$ arszyna było trzecią częścią arszyna, natenczas i 2 ruble byłyby trzecią częścią wartości całego arszyna i t. p. a ponieważ $\frac{4}{9}$ arszyna jest $\frac{4}{9}$-częścią całego arszyna, więc też i 2 ruble są $\frac{4}{9}$ częścią szukanéj liczby rubli. Zadanie zatém dąży do znalezienia takiéj liczby, któréj $\frac{4}{9}$-ch części tworzy liczbę 2; podobnie więc jak w zadaniu pierwszym opierając się na zasadzie wyłożonéj w numerze 135, szukaną liczbę rubli znajdziemy, dzieląc 2 ruble przez $\frac{4}{9}$.

8. Podróżny mający do przebycia $918\frac{3}{4}$ wiorsty, ujeżdża dziennie $61\frac{1}{4}$ wiorsty. Ile dni na tę podróż potrzebować będzie? (*Odp.* dni 15).

Wskazanie działania. Odejmując $61\frac{1}{4}$ wiorsty od $918\frac{3}{4}$ wiorsty, za każdym razem powiedzielibyśmy, że bierzemy drogę w 1 dniu odbytą; ile więc razy $61\frac{1}{4}$ da się odjąć od $918\frac{3}{4}$; albo krócéj ile razy $61\frac{1}{4}$ pomieści się w $918\frac{3}{4}$, tyle dni potrzeba będzie do odbycia całéj téj drogi. (Nr. 39 i 93).

9. Złotnik posiada $3\frac{1}{2}$ funta srebra, za które zapłacił 70 rubli. Z $\frac{3}{4}$-tego srebra zrobił 21 kubków a z reszty 14 łyżek. Po ile ma sprzedawać każdy kubek i każdą łyżkę, żeby na srebrze zyskać 23 ruble? (*Odp.* kubek po 3 rub. i $32\frac{1}{7}$ kop.; łyżkę po 1 rub. i $66\frac{1}{14}$ kopiejek).

Wskazanie działania. Żeby na srebrze zyskać 23 ruble, potrzeba 21 kubków i 14 łyżek sprzedać za $70+23=93$ rubli. Więc według warunków podanych w zadaniu, za 21 kubków należy wziąść trzy czwartych części 93 rubli, czyli $\frac{93\times3}{4}$, a za 14 łyżek resztę, t. j. jednę czwartą część 93 rubli, czyli $\frac{93}{4}$. Skoro zaś 21 kubków mają być sprzedane za $\frac{93\times3}{4}$ rubli, a 14 łyżek za $\frac{93}{4}$ rubli, więc za jeden kubek wypada wziąść $\frac{93\times3}{4}:21=\frac{93\times3}{4\times21}$ rubli, a za jednę łyżkę $\frac{93}{4}:14=\frac{93}{4\times14}$ rubli.

Uwaga. Objaśniając sposób działania w kilku powyższych zagadnieniach, ten cel mieliśmy, ażeby uczącym się pokazać drogę postępowania w wykrywaniu działań choćby nieco w zawikłanem zadaniu. Chcąc zaś zostawić im sposobność samodziałalności, umieszczamy wszystkie następujące zagadnienia bez objaśnień, pozostawiając je własnemu ich namysłowi.

10. Użyto $\frac{4}{5}$ czećwierci zboża do zasiania $\frac{3}{4}$ dziesiatyny. Ileż potrzeba będzie czećwierci tegoż zboża do zasiania całej dziesiatyny? (*Odp*, $1\frac{1}{15}$ czećwierci).

11. W funcie prochu znajduje się $\frac{3}{4}$ saletry. Ileż jest saletry w jednym łucie prochu? (*Odp.* $\frac{3}{128}$ funta).

12. Za $\frac{3}{4}$ arszyna sukna czerwonego zapłacono 2 ruble i 40 kop. Po ileż wypada arszyn tego sukna? (*Odp.* po 3 ruble i 20 kopiejek).

13. Znaleść liczbę, która pomnożona przez $1\frac{2}{3}$, daje w iloczynie 12. (*Odp.* $7\frac{1}{5}$ liczba szukana).

14. Sztuka płótna zawierająca 84 arszynów, ma być podzielona na równe części, z którychby każda zawierała $5\frac{2}{4}$ arszyna. Ile będzie tych części z 84 arszynów? (*Odp.* 16.)

15. Wybrukowano $\frac{2}{7}$ ulicy w przeciągu trzech dni. W ilu dniach ukończą całą robotę? (*Odp.* w dniach $10\frac{1}{2}$).

16. Liczba 15 jakiej liczby jest $\frac{3}{7}$ częścią? (*Odp.* liczby 35).

17. Zapłacono 45 rubli za $\frac{3}{17}$ części pewnej roboty. Ile oceniona była cała robota? (*Odp.* 255 rubli).

18. Za $27\frac{1}{2}$ dni roboczych zapłacono malarzowi 110 rubli. Po ile rachowano dzienną pracę? (*Odp.* po 4 ruble).

19. W przeciągu $5\frac{3}{4}$ godzin, koło zrobiło 11,500 obrotów. Ile obrotów wypada na jednę godzinę? (*Odp.* 2000 obrotów).

20. Podróżny, który 6 mil na dzień ujeżdża, ma do przebycia drogę wynoszącą $120\frac{1}{2}$ mil. Ile dni na tę podróż potrzebować będzie? (*Odp.* dni $20\frac{1}{12}$).

21. Czterech robotników ma zrobić $13\frac{1}{2}$ sażenia pewnej roboty; ile więc na jednego przypadnie? (*Odp.* $3\frac{3}{8}$ sażenia).

22. Za sukna arszynów $3\frac{1}{3}$ zapłacono 6 rubli; po czemu przypada arszyn? (*Odp.* po 1 rublu i 80 kop.)

23. Zapłacono 2 ruble i 10 kop. za $\frac{4}{5}$ arszyna sukna, po ile rachowano arszyn? (*Odp.* po 2 rub. i $62\frac{1}{2}$ kop.)

24. Po sprzedaniu raz $\frac{1}{3}$ części, drugi raz $\frac{1}{8}$ części sztuki płótna, pozostała reszta zawierała 32 arszynów. Ile arszynów zawierała cała sztuka? (*Odp.* arszynów $58\frac{12}{13}$).

25. Kapelusznik otrzymał $48\frac{3}{4}$ funta zajęczej sierści (turzycy). Ile kapeluszy z niej robi, jeżeli na każdy $\frac{15}{16}$ funta potrzebuje? (*Odp.* z $48\frac{3}{4}$ funta turczycy, zrobi 52 kapeluszy).

26. Kupiec chcąc wymienić u drugiego kupca sukno na atłas, daje mu $7\frac{3}{4}$ arszyna atłasu, licząc po $3\frac{2}{5}$ rubla za arszyn; ile za nie dostanie sukna, jeżeli kupiec drugi rachuje swoje sukno po $2\frac{9}{10}$ rubla arszyn? (*Odp.* dostanie sukna 9 arszynów i $1\frac{11}{29}$ werszki). NB. Otrzymany ułamek werszki, jako mniejszy od połowy, w praktyce zwykle opuszcza się.

27. Pewien spłaciwszy $\frac{3}{5}$ swego długu, został jeszcze dłużnym $589\frac{3}{4}$ rubla. Ileż był winien pierwiastkowo? (*Odp.* 1474 rubli $37\frac{1}{2}$ kop.)

28. Ze $199\frac{1}{2}$ arszyna płótna uszyto $3\frac{1}{2}$ tuzina koszul. Ile arszynów w przecięciu wypada na jednę koszulę? (*Odp.* $4\frac{3}{4}$ arszyna).

29. Do handlu korzennego sprowadzono $13\frac{3}{4}$ puda kawy, za którą zapłacono $104\frac{1}{2}$ rubla. Po ile potrzeba sprzedać funt téj kawy, aby na każdym funcie zyskać 5 kopiejek? (*Odp.* po 24 kopiejek).

30. Piernikarz kupił $19\frac{5}{12}$ funta miodu, z którego w przeciągu pewnego czasu spotrzebował $4\frac{7}{8}$ funta; po czem dokupił jeszcze $8\frac{1}{8}$ funta. Na jaki czas wystarczy mu ten zapas, jeżeli każdego dnia $\frac{2}{3}$ funta spotrzebuje? (*Odp.* na dni 34).

31. Rubli 6480 ile uczyni talarów, ile złotych reńskich, ile franków; wiedząc że talar równy $\frac{9}{10}$ rubla, złoty reński $\frac{3}{5}$ rubla, a frank równy $\frac{1}{4}$ rubla? (*Odp.* rubli 6480 czyni talarów 7200, złr. 10,800, a franków 25,920).

32. Trzej bracia otrzymali w spadku pewną summę, z któréj pierwszemu przeznaczono $\frac{2}{5}$ całej summy, drugiemu $\frac{7}{20}$ tejże summy, a trzeciemu pozostałą resztę, wynoszącą 1245 rubli i 40 kop. Jak wielka była cała summa; ile dostał pierwszy a ile drugi? (*Odp.* cała

summa wynosiła 4981 rubli i 60 kop., z której pierwszy dostał 1992 rub. i 64 kop., a drugi 1743 rub. i 56 kop.).

33. Znaleść liczbę, z któréj $\frac{1}{2}$ złączona z $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{4}$ tej liczby, wyda na ogół liczbę 39? (*Odp.* szukaną liczbą jest 36).

34. Znaleść liczbę która będąc powiększona swemi $\frac{4}{9}$mi częściami, wyda na ogół liczbę 650. (*Odp.* tą liczbą jest 450).

35. Znaleść liczbę, która będąc zmniejszona swemi $\frac{2}{3}$mi częściami, wyda na resztę 72. (*Odp.* tą liczbą jest 216).

36. Pewien spadek podzielonym został między czterech spadkobierców. Pierwszy z nich otrzymał 3500 rubli, drugi $\frac{1}{9}$ całego spadku, trzeci $\frac{1}{8}$ a czwarty $\frac{5}{12}$ tegoż spadku. Ileż dostał każdy? *Odp.* drugi 1120 rubli, trzeci 1260 rubli, czwarty 4200 rubli).

37. Za pomocą jednéj pompy można wypompować wodę z sadzawki w przeciągu 18 godzin, za pomocą drugiéj w 20 godzinach, a za pomocą trzeciéj w 24 godzinach. Jeżeli więc pompować będziemy wodę wszystkiemi razem pompami, w ilu godzinach wypompuje się woda z pomienionéj sadzawki? (*Odp.* w godzinach $6\frac{42}{53}$),

38. Dwóch kuryerów o jednym czasie wysłanych zostało na przeciw siebie z dwóch różnych miejsc: jeden z Petersburga a drugi z Tyflisu. Pierwszy na godzinę ujeżdża wiorst $17\frac{3}{4}$, a drugi $15\frac{1}{2}$ wiorsty. W iluż godzinach spotkają się, kiedy odległość między temi dwoma miastami wynosi 2582 wiorst? (*Odp.* w godzinach $17\frac{87}{133}$).

39. Pewien kupuje dobra z temi warunkami, że $\frac{3}{4}$ pięciu szóstych części całéj wartości, płaci zaraz, a resztę należącéj się summy wynoszącéj 14,310 rubli po dwóch latach. Za jakąż summę kupione były dobra? (*Odp.* za 38160 rubli).

40. Dwóch ludzi zajmuje się wykonaniem pewnéj roboty. Pierwszy gdyby sam pracował, ukończyłby ją w 8 godzinach, drugi zaś sam pracując, ukończyłby ją w 5 godzinach. Jakaż część téj roboty może być wykonaną w przeciągu jednéj godziny przez obu razem, i w ilu godzinach ukończą całą robotę? (*Odp.* w jednéj godzinie zrobią $\frac{13}{40}$ téj roboty, całą zaś robotę ukończono w $3\frac{1}{13}$ godziny).

41. Sztuka sukna zawierająca $25\frac{1}{4}$ arszyna rozprzedaną została w trzech częściach po jednakowéj cenie. Pierwszym razem sprzedano $\frac{1}{4}$ całéj sztuki, drugim razem $12\frac{1}{2}$ arszyna, trzecim ra-

zem resztę. Za wszystko sukno dostał kupiec 127 rubli. Ileż zapłacił pierwszy, ile drugi i ile trzeci kupujący? (*Odp.* pierwszy 31 rub. i 75 kop.; drugi 62 rub. i $87\frac{13}{101}$ kop.; trzeci 32 rub. i $37\frac{88}{101}$ kop).

42. Urzędnik za $\frac{2}{3}$ roku służby, otrzymał 637 rub. i $23\frac{1}{2}$ kop. Znaleść jego pensyą roczną. (*Odp.* 955 rub. i $85\frac{1}{4}$ kop.).

43. Na rozmaite sprawunki wydałem naprzód połowę swoich pieniędzy, potém $\frac{1}{3}$, a w końcu $\frac{1}{4}$ wszystkich pieniędzy, i tym sposobem nie tylko że wydałem wszystko co miałem, ale jeszcze zadłużyłem się 15 rubli. Ileż wydałem na sprawunki i ile było wszystkich u mnie pieniędzy? (*Odp.* Miałem 180 rubli; wydałem 195 rubli).

44. Wydając dziennie po $18\frac{3}{4}$ rubla w 100 dniach wydałem wszystkie pieniądze. Po ileż dziennie wydawać powinienem, ażeby tych pieniędzy wystarczyło mi na dni 375. (*Odp.* Po 5 rubli).

45. Pewien podróżujący pieszo uchodzi 5 wiorst w $1\frac{1}{2}$ godziny. W ilu dniach przejdzie odległość 408 wiorst, jeżeli każdego dnia $10\frac{1}{5}$ godziny przeznacza na podróż? (*Odp.* W dniach 12).

46. Do przepisania pewnego dzieła najęto trzech pisarzy: pierwszy w jednym dniu może napisać $7\frac{1}{2}$ arkusza, drugi $6\frac{3}{4}$, trzeci 8 arkuszy. W iluż dniach przepiszą 178 arkuszy? (*Odp.* W dniach 8).

47. Za 11 funtów cukru zapłacono 2 rub. i 97 kop. Ile dostanie cukru za 5 rubli i 25 kop.? (*Odp.* 19 funtów i $42\frac{2}{3}$ zołotnika).

48. Za 12 funtów i 12 zołotników pewnego towaru, zapłacono 6 rubli i 12 kop. Ile się zapłaci za 1 pud i 7 funtów tegoż towaru? (*Odp.* 23 ruble i $72\frac{28}{97}$ kop).

49. Droga wynosząca 15 wiorst była przebytą w 4 godzinach i 35 minutach. W jakim czasie można przebyć drogę wynoszącą 12 wiorst i 420 sażeni, idąc z tą samą prędkością? (*Odp.* W 3 godzinach i $55\frac{2}{5}$ minuty).

50. Za 36 butelek wina zapłacono 21 rubli. Ile dostaniemy tego samego gatunku wina za 49 rubli? (*Odp.* Dostaniemy 84 butelek).

51. Do wykonania pewnéj roboty użyto trzech ludzi. Pierwszy wykończyłby ją sam w 12 dniach, robiąc dziennie po 10 godzin; drugi w 15 dniach, robiąc po 6 godzin dziennie; trzeci w 9 dniach, pracując 8 godzin dziennie. Pytamy się 1^0 w jakim czasie cała robota wykończoną będzie, jeżeli wszyscy trzéj ludzie zatrudniać się nią

będą: 2^0 jaką część całéj roboty zrobi w tym czasie każdy. 3^0 ile każdemu z nich stosunkowo do jego pracy zapłacić wypadnie, kiedy cała robota ugodzoną była za 108 rubli? (*Odp.* 1^0 robota ukończoną będzie w 30 godzinach; 2^0 pierwszy zrobi $\frac{1}{4}$, drugi $\frac{1}{3}$, trzeci $\frac{5}{12}$ całéj roboty; 3^0 pierwszy dostanie 27 rub., drugi 36 rub., trzeci 45 rub.).

ROZDZIAŁ V.

Ułamki dziesiętne (десятичная дробь).

137. Ułamkiem dziesiętnym zowiemy każdy ułamek, którego mianownik jest jednością zakończoną jedném, dwoma, trzema i w ogólności ilukolwiek zerami. I tak ułamki $\frac{4}{10}$, $\frac{5}{100}$, $\frac{37}{100}$, $\frac{429}{1000}$, i t. d., zowią się dziesiętnemi.

Rzecz jasna, że wszystkie działania mogą być wykonywane tak samo z ułamkami dziesiętnemi, jak je wykonywaliśmy ze zwyczajnemi, gdyż zasady wyłożone dla ułamków zwyczajnych są ogólne i stosują się do wszystkich ułamków bez względu na liczebną wartość wyrazów je składających: lecz dla ułamków dziesiętnych wyłożymy jeszcze osobne prawa, im tylko właściwe, które posłużą niejako do skróceń i ułatwień działań z niemi odbywanych. Ułatwienia te uzasadnione są na sposobie dogodniejszego wyrażania ułamków dziesiętnych.

138. Cofnąwszy się myślą do początkowych zasad liczenia, na początku niniejszego dzieła umieszczonych (Nr. 4), łatwo przypomnimy sobie, że cała sztuka przedstawienia jakiegokolwiek zbioru jedności, za pomocą dziesięciu znaków w spuściznie od Arabów otrzymanych, polegała na tém założeniu: że wielkość każdego znaku od dwóch rzeczy zależną zrobiliśmy, t. j. od jego kształtu i od miejsca na którém go umieszczamy. Wielkość znaku zależna od jego figury czyli kształtu, jest stała i nigdy się nie odmienia; lecz welkość zależna od miejsca jest zmienna, ale według pewnych praw zmieniająca się i to w ten sposób: że każda jedność umieszczona o jedno miejsce dalej ku lewéj ręce, ma wartość dziesięć razy większą od tejże jedności umieszczonéj na miejscu poprzedzającém. Nadto: ponieważ liczby całe prócz pojedynczych jedności wyrażają zbiory dziesięciu, stu, tysiąca i t. d., jedności, ułamki zaś dziesiętne wyrażają zawsze tylko zbiory dziesiątych, setnych, tysiącznych i t. d., części jedności: z tego więc względu mimowili przychodzimy do wniosku, że ułamki dziesiętne w takiż sam sposób mogą być wyrażane jak liczby całe.

Jakoż: w liczbie np. 111 pierwszy znak z lewéj strony oznacza 1 sto; drugi dziesiątą część jednego sta t. j. 1 dziesiątek; trzeci dziesiątą część poprzedzającego, t. j. jednego dziesiątka czyli 1 jedność. Jeżeli więc po danéj liczbie 111 umieścimy przecinek i po nim napiszemy jeszcze kilka znaków:

$$111{,}111$$

to według tych samych zasad, znaczenie pierwszego znaku umieszczonego po przecinku powinno być dziesięć razy mniejsze od znaku poprzedzającego, t. j. od jedności; znak więc ten oznacza jednę dziesiątą część jedności. Znak drugi jako mający jeszcze dziesięć razy mniejsze znaczenie, oznacza dziesiątą część jednéj dziesiątéj czyli setną część jedności i t. d. Powyżéj więc napisana liczba 111,111 oznacza 1 sto, 1 dziesiątek, 1 jedność, 1 dziesiątą część jedności, 1 setną część jedności i 1 tysiączną część jedności. A ponieważ 1 setna część jedności zawiera w sobie 10 tysiącznych części, a 1 dziesiąta część 10 setnych czyli 100 tysiącznych, a zatém 1 dziesiąta, 1 setne i 1 tysiączna zawierają razem 111 tysięcznych części jedności; z tego więc względu powyższa liczba przeczyta się: 111 jedności i 111 tysiącznych części jedności.

Dajmy jeszcze inny przykład: 3,1056.

Znak 3 oznacza 3 jedności, znak 1 jednę dziesiątą, znak 5 pięć tysiącznych, znak 6 sześć dziesięciotysięcznych. Zrobiwszy ogół z ułamków $\frac{1}{10}+\frac{5}{1000}+\frac{6}{10000}=\frac{1000}{10000}+\frac{50}{10000}+\frac{6}{10000}=\frac{1056}{10000}$ otrzymujemy 1056 dziesięciotysięcznych; więc liczba powyżéj napisana oznacza 3 jedności i 1056 dziesięciotysięcznych.

Z tego wnosimy:

1. *Że ułamki dziesiętne mogą być oznaczone bez mianownika, który jednakże zawsze jest domyślnym.*

2. *Że wielkość części wyrażonych ułamkiem dziesiętnym zależy od liczby znaków. Jeżeli w ułamku dziesiętnym jest jeden tylko znak, wtedy wyraża części dziesiąte; jeżeli dwa, setne; jeżeli trzy, tysiączne i t. d.*

3. *Znaki umieszczone z prawéj strony przecinka oddzielającego liczby całe od części dziesiętnych, składają licznik dziesiętnego ułamku, którego domyślny mianownik jest jednością zakończoną tylu zerami, ile jest znaków umieszczonych po przecinku.*

139. Też same zasady które służyły do czytania, podadzą sposób pisania ułamków dziesiętnych bez mianownika. I tak:

Dajmy że mamy do napisania liczbę $9\frac{47}{100}$.

Ponieważ dana liczba jest złożona z 9 jedności, więc przedewszystkiem należy napisać znak 9 i po nim umieścić przecinek. Ułamek $\frac{47}{100}$ składa się z $\frac{40}{100}+\frac{7}{100}$ czyli $\frac{4}{10}+\frac{7}{100}$, więc z tego powodu zaraz po przecinku należy umieścić znak 4, jako oznaczający zbiór dziesiątych części, a po nim znak 7 jako oznaczający zbiór setnych części. Dana zatém liczba tak się wyrazi: 9,47.

Przykład 2. Jest do napisania ułamek $\frac{83}{1000}$.

Ponieważ nie mamy żadnego zbioru jedności, więc piszemy 0 i po nim umieszczamy przecinek. Uważamy że dany ułamek jako złożony z $\frac{80}{1000}+\frac{3}{1000}$ czyli z $\frac{8}{100}+\frac{3}{1000}$ nie zawiera zbioru części dziesiątych, więc też na ich miejscu t. j. zaraz po przecinku umieszczamy 0, następnie znak 8 jako oznaczający zbiór części setnych, a po niem znak 3 jako oznaczający zbiór części tysiącznych. Zatém $\frac{83}{1000}=0{,}083$.

Przykład 3. Mamy do napisania $\frac{7}{1000}$.

Dany ułamek nie zawiera w sobie ani jedności, ani części dziesiątych, ani setnych: zatém $\frac{7}{1000}=0{,}007$.

Przykład 4. Mamy do napisania $\frac{209}{10000}$.

Dana liczba nie zawiera zbioru jedności, więc piszemy 0 i po nim umieszczamy przecinek. Następnie uważamy że $\frac{209}{10000}=\frac{200}{10000}+\frac{9}{10000}$ czyli $\frac{2}{100}+\frac{9}{10000}$, więc dany ułamek nie zawiera pojedynczych części dziesiątych i tysiącznych tylko setne i dziesięciotysięczne: zatém $\frac{209}{10000}=0{,}0209$.

Z tego wnosimy:

1. *Że w ułamku dziesiętnym powinno być tyle znaków, ile jest w mianowniku umieszczonych zer po jedności.*

2. *Ażeby napisać ułamek dziesiętny w postaci liczb całych, potrzeba tylko po przecinku umieścić licznik, jeżeli w nim jest tyle znaków, ile w mianowniku zer po jedności.*

3. *Jeżeli zaś w liczniku jest mniejsza liczba znaków od liczby zer mianownika, wtedy po przecinku należy pierwéj umieścić tyle zer, ażeby ich liczba wzięta z liczbą znaków licznika wyrównywała liczbie zer mianownika.*

140. Dopisanie ilukolwiek zer z prawéj strony ułamku dziesiętnego nie zmieni w niczém jego wartości; bo ile razy powiększy się przez to licznik, tyleż razy jednocześnie powiększy się domyślny jego mianownik.

Jakoż $6{,}403 = 6{,}4030 = 6{,}40300$; albowiem $6\frac{403}{1000} = 6\frac{4030}{10000} = 6\frac{40300}{100000}$

Na téj zasadzie polega sprowadzanie ułamków dziesiętnych do jednakowych mianowników.

141. Ponieważ wielkość znaków dziesiętnych zależy od miejsc przez nie zajmowanych, więc ze zmianą miejsca przecinka, zmienia się wielkość całéj liczby. I tak:

1. Dajmy że mamy ułamek 0,576. Przeniósłszy przecinek o jeden znak ku prawéj stronie, otrzymamy 5,76. W danym ułamku znak 5 oznacza zbiór części dziesiątych, w otrzymanym zaś zbiór 5 jedności, więc wielkość tego znaku otrzymała 10 razy większe znaczenie. Podobnież się zrobiło ze znakami 7 i 6: pierwszy w danym ułamku oznacza zbiór 7 setnych części, a w otrzymanym zbiór 7 dziesiątych części; drugi w danym ułamku oznacza zbiór 6 tysiącznych części, a w otrzymanym zbiór 6 części setnych. Wielkość zatém całego ułamku powiększyła się 10 razy.

Podobnież dowiedlibyśmy, że w liczbie np. 23,8964 przeniosłszy przecinek o dwa znaki ku prawéj stronie; wielkość całéj liczby powiększy się 100 razy, gdyż wielkość każdego znaku otrzyma 100 razy większe znaczenie; zatém $2389{,}64 = 23{,}8964 \times 100$.

Jeżelibyśmy przecinek przenieśli o 3 znaki ku prawéj stronie, liczba powiększyłaby się 1000 razy i t. d.

Zatém: *ażeby ułamek dziesiętny lub całość z ułamkiem dziesiętnym powiększyć 10, 100, 1000 razy i t. d., potrzeba tylko przenieść przecinek ku prawéj ręce o 1, 2, 3, znaki i t. d. czyli w ogólności o tyle znaków, ile w liczbie mnożącéj znajduje się zer po jedności.*

Więc opuszczając przecinek w ułamku dziesiętnym powiększamy go, odpowiednio liczbie znakom będących po przecinku, t. j. jeżeli w ułamku był jeden znak po przecinku, to przez opuszczenie przecinka ułamek powiększa się 10 razy; jeżeli dwa znaki, to 100 razy i t. d.

2. Dajmy że w ułamku 0,329 przesunęliśmy przecinek o jeden znak ku lewéj ręce t. j. umieściliśmy przecinek przed zerem; znaczenie każdego znaku zmniejszy się 10 razy; zatém i cały ułamek pomniejszy się o 10 razy.

Ażeby więc ułamek dziesiętny zmniejszyć 10 razy, potrzeba tylko przesunąć przecinek o 1 znak ku lewéj ręce i nadto przed przecinkiem umieścić jeszcze zero dla pokazania że nie ma zbioru całych jedności; ułamek zatém 10 razy mniejszy od danego będzie 0,0329.

I podobnież: ażeby ułamek dziesiętny 100 razy pomniejszyć, potrzeba tylko przesunąć przecinek o dwa znaki ku lewéj ręce; jeżeli zaś nie ma tyle znaków, to w miejscu ich piszą się zera i nadto jeszcze 0 przed przecinkiem dla pokazania że nie ma zbioru całych jedności; np. ułamek 0,0745 zmniejszywszy 100 razy, otrzymamy 0,000745.

Zatém: *ażeby ułamek dziesiętny lub całość z ułamkiem dziesiętnym zmniejszyć 10, 100, 1000 razy i t. d. potrzeba tylko przecinek przesunąć ku lewéj ręce o 1, 2, 3 znaki i t. d. czyli w ogólności o tyle znaków, ile jest w dzielniku zer po jedności.*

Zasada dzielenia całéj liczby przez 10, 100, 1000 i t. d. umieszczona w Nr. 85 tu lepiéj się jeszcze wyjaśnia. Tam objaśniliśmy, że liczba umieszczana z lewéj strony przecinka oznacza iloraz, a liczba umieszczona z prawéj strony przecinka resztę; tu dodamy jeszcze że cała liczba oznacza iloraz, tylko znaki przed przecinkiem położone oznaczają zbiory jedności a po przecinku oznaczają części dziesiętne.

142. Nim przystąpimy do działań z ułamkami dziesiętnemi, na zakończenie że tak powiem wstępnych wiadomości o tych ułamkach, objaśnimy jeszcze sposób zamiany jakiegobądź ułamku zwyczajnego na dziesiętny. Z zamiany téj, tę jeszcze odniesiemy korzyść, że ona doprowadzi nas do poznania innéj odmiany ułamków dziesiętnych zwanych dziesiętnemi nieskończonemi.

I w tym celu dajmy, że mamy ułamek $\frac{5}{8}$ do zamiany na dziesiętny, czyli innemi słowy, znaleść ile dany ułamek zawiera w sobie dziesiątych, setnych, tysiącznych części jedności. Zważywszy że każdy ułamek może być uważany jako iloraz z licznika podzielonego przez mianownik (Nr. 106), dzielmy licznik przez mianownik. Lecz że dany ułamek jest właściwym, z dzielenia więc tego otrzymamy w ilorazie na całkowitą zero. Chcąc dowiedzieć się ile iloraz zawiera części dziesiątych, zamieniamy liczbę jedności dzielnéj na liczbę dziesiątych części jedności. Jakoż, jedna jedność ma w sobie 10 dziesiątych części jedności, zatém 5 jedności mieć ich będzie 50; podzieliwszy 50 przez 8, otrzymujemy liczbę 6, którą jako oznaczającą zbiór dziesiątych części ilorazu umieszczamy zaraz po przecinku.

Podobnież dla znalezienia ile iloraz zawiera w sobie części setnych, otrzymaną z dzielenia resztę oznaczającą 2 dziesiąte części jedności, zamieniamy na części setne i ztąd otrzymaną liczbę części setnych dzielimy przez 8. Jakoż, 1 dziesiąta część ma w sobie 10 setnych części, zatém 2 dziesiątych części mieć ich będzie 20, które podzielone przez 8 dają w ilorazie 2; otrzymany znak jako oznaczający zbiór setnych części ilorazu, umieszczamy w ilorazie zaraz po znaku 6.

Dla znalezienia znaku na liczbę tysiącznych części ilorazu: resztę 4 oznaczającą 4 setnych części jedności, zamieniamy na liczbę tysiącznych części, co daje 40 tysiącznych części, które podzieliwszy przez 8 otrzymujemy na iloraz liczbę 5, a na resztę zero; znak 5 jako oznaczający zbiór tysiącznych części ilorazu, umieszczamy w ilorazie po znaku 2 poprzednio otrzymanym. A ponieważ na resztę otrzymaliśmy już zero, zatém działanie się kończy i dany ułamek $\frac{5}{8}=0{,}625$.

Działanie to przedstawi się w następujący sposób:

$$\begin{array}{r l}
50 : 8 = 0{,}625. & \\
\underline{48} & \\
20 & \qquad \frac{5}{8}=0{,}625. \\
\underline{16} & \\
40 & \\
\underline{40} & \\
0. &
\end{array}$$

Przykład 2. Ułamek zwyczajny $\frac{3}{25}$ zamienić na dziesiętny:

$$
\begin{array}{l}
30 : 25 = 0{,}12. \\
\underline{25} \\
\;\;50 \qquad\qquad \frac{3}{25} = 0{,}12. \\
\;\;\underline{50} \\
\;\;\;0.
\end{array}
$$

Ponieważ 25 nie mieści się w 3, piszemy więc na całkowitą zero. Następnie do 3 dopisujemy zero, przez co 3 jedności zamieniamy na części dziesiąte; 30 dziesiątych części dzielimy przez 25 i otrzymujemy na iloraz liczbę 1, który to znak umieszczamy zaraz po przecinku. Do reszty 5 dopisujemy zero, przez co 5 dziesiątych części zamieniamy na 50 setnych części i takowe dzielimy przez 25, a otrzymaną na iloraz liczbę 2 jako oznaczającą części setne, umieszczamy w ilorazie zaraz po znaku 1. A ponieważ na resztę otrzymaliśmy zero, więc działanie się kończy i dany ułamek $\frac{3}{25}=0{,}12$.

Przykład 3. Ułamek zwyczajny $\frac{364}{125}$ zamienić na dziesiętny.

$$
\begin{array}{l}
364 : 125 = 2{,}912. \\
\underline{250} \\
1140 \\
\underline{1125} \\
\;\;\;150 \qquad\qquad \frac{364}{125} = 2{,}912. \\
\;\;\;\underline{125} \\
\;\;\;\;250 \\
\;\;\;\;\underline{250} \\
\;\;\;\;\;0
\end{array}
$$

Przykład ten tém się różni od dwóch poprzedzających, że danym ułamkiem jest ułamek niewłaściwy, z tego więc względu z dzielenia licznika przez mianownik, otrzymaliśmy na całkowitą 2; co się zaś tyczy znaków dziesiętnych, takowe wynajdowane były takimże sposobem jak w przykładach poprzedzających.

Z działań tych wyprowadzamy następujące zasady do zamiany ułamków zwyczajnych na dziesiętne:

1. *Jeżeli dany ułamek jest właściwym, piszemy na całkowitą zero, poczém licznik mnożymy przez* 10 *i iloczyn ten dzielimy przez mianownik, a otrzymany znak na iloraz, umieszczamy zaraz po przecinku. Pomnożywszy przez* 10 *resztę z dzielenia pozostałą, dzielimy ją przez mianownik, pisząc otrzymamy znak na iloraz zaraz po znaku poprzednio*

otrzymanym i jeżeli z tego powtórnego dzielenia pozostanie jeszcze reszta, postępujemy z nią tak samo, jak z resztą poprzedzającą i t. d.

2. *Jeżeli dany ułamek jest niewłaściwym wyciągamy z niego całość, którą piszemy w miejsce zera na całkowitą otrzymać się mającego ułamku dziesiętnego; poczém w wynajdowaniu znaków dziesiętnych postępujemy tą samą drogą jak w zasadzie pierwszéj.*

143. Powyższe przykłady były tak dobrane, że dopisując kolejno po zerze do reszt z dzielenia otrzymywanych, doszliśmy w końcu do tego, że działanie się ukończyło i w zupełności wykonać się dało; jednak nie zawsze ma to miejsce; częstokroć bowiem chociażbyśmy jak najdłużéj działanie pociągnęli, nie osiągniemy rezultatu zupełnego, na resztę ciągle otrzymywać będziemy pewną liczbę całkowitą, oczywiście mniejszą od dzielnika, a iloraz za każdém cząstkowém dzieleniem powiększony jednym znakiem. Dzielenie takie zowie się nieskończoném, a ułamek dziesiętny z takowego dzielenia otrzymany *dziesiętnym nieskończonym;* gdy przeciwnie, ułamek dziesiętny z dzielenia, które się skończyło, zowiemy *dziesiętnym skończonym.*

Rzecz widoczna, że ułamek dziesiętny nieskończony, nigdy w zupełności nie może być równy ułamkowi zwyczajnemu, z którego powstał, z tego też względu taki ułamek dziesiętny przyjmuje jeszcze nazwisko *przybliżonéj wartości.* Ta przybliżona wartość tém więcéj zbliża się do wartości prawdziwéj, im więcéj znaków dziesiętnych obejmować będzie, jak to zaraz na przykładzie zobaczymy.

Przykład. Ułamek zwyczajny $\frac{3}{7}$ zamienić na dziesiętny.

$$\begin{array}{l}
30 : 7 = 0,428571....\\
\underline{28}\\
20\\
\underline{14}\\
60\\
\underline{56}\\
40\\
\underline{35}\\
50\\
\underline{49}\\
10\\
\underline{7}\\
3 \text{ i t. d.}
\end{array}
\qquad \frac{3}{7} = 0,428571....$$

Z zamiany téj otrzymaliśmy ułamek dziesiętny nieskończony, po którym umieściliśmy kilka kropek dla odróżnienia go od dziesiętnego skończonego. Gdybyśmy w ilorazie 0,428571.... zatrzymali dwa pierwsze znaki dziesiętne, opuszczając wszystkie następujące, mielibyśmy przybliżoną wartość 0,42, która od prawdziwéj wartości widocznie byłaby mniejszą więcéj jak o $\frac{8}{1000}$; zatrzymując trzy znaki 0,428 wartość ta byłaby mniejszą od rzeczywistéj więcéj jak o $\frac{5}{10000}$ i t. d. Zatém im więcéj zatrzymujemy znaków w przybliżonéj wartości, tém więcéj zbliżamy się do wartości rzeczywistéj.

Błąd jaki popełniamy, biorąc ułamek 0,42 za ułamek dany, jest mniejszy od $\frac{1}{100}$; albowiem $\frac{3}{7}$ większe od 0,42, a mniejsze od 0,43, a że różnica między 0,42 i 0,43 jest równa $\frac{1}{100}$, więc różnica między 0,42 i $\frac{3}{7}$ mniejsza od $\frac{1}{100}$.

Zastanowiwszy się jeszcze nad temi przybliżonemi wartościami, widzimy: że poprzestając na dwóch pierwszych znakach, popełniamy błąd mniejszy od $\frac{1}{100}$, lecz gdy zwrócimy uwagę na znaki opuszczone, popełnimy błąd jeszcze mniejszy, jeżeli zamiast 0,42 weźmiemy 0,43 ułamek o $\frac{1}{100}$ większy od 0,42. Jakoż różnica między ułamkiem 0,43 i rzeczywistą wartością 0,428571.... widocznie jest mniejsza od różnicy między ułamkiem 0,42 i tąż rzeczywistą wartością, zatém korzystniéj jest wziąść ułamek 0,43 za ułamek dany. Na to możemy podać taką ogólną zasadę: *jeżeli w ułamku dziesiętnym, znak umieszczony zaraz po ostatnim znaku zatrzymanym, jest większy od* 5, *wtedy ostatni znak zatrzymany powiększa się jednością, w przeciwnym razie pozostaje bez żadnéj odmiany.*

144. Z zamiany ułamków zwyczajnych na dziesiętne widzieliśmy już, że jedne z ułamków zamieniają się na dziesiętne skończone, drugie na dziesiętne nieskończone; chcąc wykryć tego przyczynę, szukajmy jéj źródła w różnicy zachodzącéj między dziesiętnym i zwyczajnym ułamkiem. Różnicę tę postrzegamy w mianowniku: jakoż w istocie, mianownik ułamku zwyczajnego może być liczbą jakąkolwiek, mianownik zaś ułamku dziesiętnego musi być zawsze liczbą 10 wzięta raz lub ilekolwiek razy za czynnik. Jeżeli więc mianownik ułamku zwyczajnego jest taką liczbą, która mnożona przez inną, może być zamieniona na liczbę 10 lub na licz-

bę będącą iloczynem z 10, wziętego dwa, trzy, cztéry i t. d. razy za czynnik, z takiego ułamku możemy zawsze otrzymać dziesiętny skończony; w przeciwnym razie otrzymujemy dziesiętny nieskończony.

Zważywszy że liczba 10 jest iloczynem z 2×5, więc i wszelka liczba, która jest iloczynem z 10 wziętego ilekolwiek razy za czynnik, jest zarazem iloczynem z pewnéj liczby dwujek przez tąż samą liczbę piątek; a ponieważ w liczbie złożonéj z jedności i ilekolwiek zer, liczba zer po jedności pokazuje ile razy należy wziąść 10 za czynnik aby tę liczbę utworzyć, a od liczby zer po jedności, zależy liczba znaków umieszczonych po przecinku w dziesiętnym ułamku (Nr. 139); zatém od liczby dwujek lub piątek, z których się składa mianownik ułamku dziesiętnego, zależy liczba znaków po przecinku w tymże ułamku.

Uwagi te upoważniają nas do wyrzeczenia zasad następujących:

1^0 *Ułamek zwyczajny wtedy tylko można zamienić na dziesiętny skończony, jeżeli jego mianownik jest liczbą* 2 *lub* 5, *albo iloczynem złożonym z samych tylko czynników* 2 *i* 5.

2^0 *Otrzymać się mający ułamek dziesiętny skończony, z tylu znaków składać się będzie, z ilu dwujek lub piątek wziętych jako czynniki, złożony będzie mianownik ułamku zwyczajnego.*

3^0 *Jeżeli mianownik ułamku zwyczajnego złożonym będzie nie z samych tylko dwujek lub samych piątek lecz z dwujek i piątek wziętych jako czynniki nie jednakową liczbę razy, wówczas liczba znaków w otrzymać się mającym ułamku dziesiętnym zależną będzie od tego czynnika, który więcéj razy powtórzonym będzie.*

Jakoż, niech danym do zamiany na dziesiętny będzie ułamek $\frac{23}{125}$. Mianownik 125 jest iloczynem z $5\times5\times5$; ażeby więc dany ułamek zamienionym był na dziesiętny, potrzeba niezbędnie żeby każdy z czynników składających jego mianownik, zamienionym został na liczbę 10, co osiągniemy łatwo, mnożąc każdy z pomienionych czynników przez 2, lecz niechcąc zmienić wartości samego ułamku, należy jednocześnie mnożyć jego licznik przez tęż liczbę 2 tyle razy, ile czynników w mianowniku zamieniamy na czynnik 10; zatém $\frac{23}{125}=\frac{23}{5\times5\times5}=\frac{23\times2\times2\times2}{5\times2\times5\times2\times5\times2}=\frac{23\times2\times2\times2}{10\times10\times10}=\frac{184}{1000}$ $=0{,}184$.

Do tego samego także rezultatu dojdziemy, postępując z danym ułamkiem $\frac{23}{125}$, według zasad wyłożonych w numerze 142. I w istocie: szukając części dziesiątych, mnożymy przez 10 licznik danego ułamku $\frac{23}{125}$ czyli $\frac{23}{5\times5\times5}$ i znajdujemy $\frac{23}{125}=\frac{23\times10}{5\times5\times5}$ dziesiętnych, po uproszczeniu zaś obu wyrazów tego ułamku przez 5 otrzymujemy $\frac{23\times10:5}{5\times5\times5:5}=\frac{23\times2}{5\times5}$ dziesiątych (zob. Nr. 71); podobnym sposobem zamieniając ułamek dany na części setne, znajdujemy $\frac{23}{125}=\frac{23\times2\times10}{5\times5}$ setnych a uprościwszy przez 5, otrzymujemy $\frac{23\times2\times10:5}{5\times5:5}$ $=\frac{23\times2\times2}{5}$ setnych; nakoniec zamieniając na części tysiączne, znajdujemy $\frac{23}{125}=\frac{23\times2\times2\times10}{5}$ tysiącznych, a uprościwszy przez 5, ostatecznie otrzymujemy $\frac{23\times2\times2\times10:5}{5:5}=23\times2\times2\times2=184$ tysiącznych. Zatém $\frac{23}{125}=0{,}184$.

145. Z zasad wyłożonych w numerze poprzedzającym wnieść możemy:

Że jeżeli mianownik ułamku zwyczajnego nie jest dwujką ani piątką ani iloczynem z czynników 2 i 5, lecz jakąbądź inną liczbą lub iloczynem z jakichbądź innych czynników albo iloczynem z czynników 2 i 5 i jeszcze innych liczb pierwotnych, wówczas z takowego ułamku powstały dziesiętny, będzie nieskończonym.

Zważywszy że reszty z dzielenia otrzymane, są mniejsze od dzielnika, wnosimy: że przy zamianie ułamków zwyczajnych na dziesiętne, kiedy dzielenie ciągnąć się będzie do nieskończoności, wtedy po odbyciu pewnéj liczby cząstkowych dzieleń, koniecznie przyjdziemy do jednéj z reszt poprzednio już otrzymanéj, zatém w dalszém działaniu do innych kolejno po niéj następujących, wiec zarazem do tych samych znaków ilorazu składających ułamek dziesiętny nieskończony. I w saméj rzeczy $\frac{2}{3}=0,\ 666.....=0{,}6$; $\frac{5}{11}=0{,}4545.....=0{,}45$; $\frac{7}{12}=58333........=0{,}583$ i t. d. Takie ułamki dziesiętne, w których pewna liczba znaków jednakowym porządkiem powraca, zowiemy *zwrotowemi* albo *peryodycznemi*, gromadkę zaś znaków powtarzających się *zwrotem* albo *peryodem*.

Już z powyższych przykładów widzieć możemy, że zwrot zaczynać się może albo zaraz od przecinka albo też dopiero po pewnéj liczbie znaków do zwrotu nie należących. Przyczynę tego szukać nam znowu należy w mianowniku ułamku zwyczajnego, i rozbierając tę rzecz podobnym sposobem jak to czyniliśmy w numerze poprzedzającym, możemy twierdząco wyrzec: *że jeżeli mianownik ułamku zwyczajnego prócz innych czynników zawiera czynnik 2 lub 5, wówczas otrzymamy tyle znaków nie należących do zwrotu, ile razy liczba 2 lub 5 wchodzi jako czynnik do mianownika.*

Ułamki zwrotowe, w których zwroty rozpoczynają się zaraz od przecinka, zowią się *zwrotowemi prostemi;* np. $0{,}\dot{2}\dot{5}$; $6{,}\dot{3}\dot{4}\dot{7}$ i t. d.

Ułamkami zwrotowemi męszanemi nazywamy takie, w których zwroty nie rozpoczynają się zaraz od przecinka ale dopiero po pewnéj liczbie znaków do zwrotu nie należących: np. $0{,}8\dot{5}\dot{3}$; $9{,}74\dot{5}\dot{2}$; $6{,}02\dot{1}\dot{0}\dot{3}$ i t. d.

Uwaga 1. Liczba mających się odbyć cząstkowych dzieleń nim dojdziem do końca zwrotu, powinna być mniejsza od liczby jedności składających mianownik danego ułamku. Bo reszty z dzielenia są zawsze mniejsze od dzielnika, a tym dzielnikiem jest właśnie mianownik ułamku danego.

Uwaga 2. Ułamek $\frac{51}{60}$ da się zamienić na dziesiętny skończony chociaż w mianowniku 60 wchodzi jako czynnik liczba 3, co ztąd pochodzi że taż liczba 3 wchodząc także jako czynnik do licznika może być z obu wyrazów ułamku wyrzuconą. Zasady więc w numerze 144 wyłożone stosują się tylko do ułamków których wyrazy są liczbami pierwszemi względem siebie (Nr. 67).

146. Ułamki zwrotowe powstałe z zamiany ułamków zwyczajnych mających za mianownik dziewiątkę lub liczbę z dziewiątek złożoną, zasługują na szczególną uwagę. I w tym celu zamieniwszy kilka takich ułamków na dziesiętne.

Ponieważ $\frac{1}{9}=0{,}111....=0{,}\dot{1}$.

$\frac{1}{99}=0{,}010101....=0{,}\dot{0}\dot{1}$.

$\frac{1}{999}=0{,}001001001....=0{,}\dot{0}\dot{0}\dot{1}$ i t. d. zatém:

1. *Zwrot złożony jest z tylu znaków, z ilu dziewiątek złożony mianownik.*

2. *Jeżeli licznik ułamku zwyczajnego jest jednością, to pierwsze znaki zwrot składające są zerami, a ostatni jednością.*

Przykłady dla wprawy.

1) Liczby: 0,78543; 23,508; 17,0004507; powiększyć 100 razy. *(Odp.* 78,543; 2350,8; 1700,04507).

2) Liczby: 13,405; 0,0378; 3,05763; zmniejszyć 1000 razy. (*Odp.* 0,013405; 0,0000378; 0,00305763).

3) Liczbę 8235 zmniejszyć kolejno 10, 100, 1000 i 10000 razy. (*Odp.* 823,5; 82,35; 8,235; 0,8235).

4) Ułamek $\frac{3}{8}$ zamienić na ułamek dziesiętny. (*Odp.* 0,375).

5) Ułamek $\frac{7}{16}$ zamienić na ułamek dziesiętny. (*Odp.* 0,4375).

6) Ułamek $\frac{53}{64}$ zamienić na ułamek dziesiętny. (*Odpowiedź*: 0,828125).

7) Ułamek $\frac{43}{125}$ zamienić na ułamek dziesiętny. (*Odp.* 0,344).

8) Ułamek $\frac{51}{120}$ zamienić na ułamek dziesiętny. (*Odp.* 0,425).

9) Ułamek $\frac{7}{250}$ zamienić na ułamek dziesiętny. (*Odp.* 0,028).

10) Ułamek $\frac{6}{11}$ zamienić na ułamek dziesiętny. (*Odp.* $0,\dot{5}\dot{4}$).

11) Ułamek $\frac{19}{27}$ zamienić na ułamek dziesiętny. (*Odp.* $0,\dot{7}0\dot{3}$).

12) Ułamek $\frac{5}{7}$ zamienić na ułamek dziesiętny. (*Odpowiedź*: $0,\dot{7}1428\dot{5}$).

13) Ułamek $\frac{2}{17}$ zamienić na ułamek dziesiętny (*Odpowiedź*: 0,1176470588....).

14) Ułamek $\frac{13}{81}$ zamienić na ułamek dziesiętny (*Odpowiedź*: 0,1604938....).

15) Ułamek $\frac{225}{444}$ zamienić na ułamek dziesiętny. (*Odp* $0,50\dot{6}7\dot{5}$).

16) Ułamek $\frac{11}{12}$ zamienić na ułamek dziesiętny. (*Odp.* $0,91\dot{6}$).

17) Ułamek $\frac{31}{55}$ zamienić na ułamek dziesiętny. (*Odp.* $0,5\dot{0}\dot{9}$).

18) Ułamek $\frac{367}{40}$ zamienić na ułamek dziesiętny. (*Odp.* 9,175).

19) Ułamek $\frac{409}{80}$ zamienić na ułamek dziesiętny. (*Odp.* 5,1125).

20) Ułamek $\frac{29}{1375}$ zamienić na ułamek dziesiętny. (*Odpowiedź*: $0,021\dot{0}\dot{9}$).

21) Ułamek $\frac{7}{313}$ zamienić na ułamek dziesiętny. (*Odpowiedź*: 0,022364217.....).

22) Ułamek $\frac{1}{4115}$ zamienić na ułamek dziesiętny. (*Odpowiedź*: 0,00024301....).

Dodawanie i odejmowanie ułamków dziesiętnych.

147. Ponieważ na sposobie dogodniejszego wyrażania ułamków dziesiętnych polegają ułatwienia w działaniach z temiż ułamkami, jak to już na początku nauki dziesiętnych ułamków wspomnieliśmy, a ten dogodniejszy sposób ich wyrażania uzasadniony na tych samych prawach, które posłużyły do pisania liczb całych, więc i same działania z temi ułamkami nie powinny się różnić od takichże działań liczbom całkowitym właściwych. Jakoż:

Przykład 1. Znaleść ogół 48,385+6,94+0,867+0,5.

Szukanym ogółem powinna być liczba zawierająca tyle części tysiącznych, setnych, dziesiątych i tyle jedności i dziesiątków, ile ich jest we wszystkich razem wziętych liczbach. Najdogodniejszą i najłatwiejszą drogą cel ten osiągniemy, podpisując dane liczby jedne pod drugiemi tak, iżby jedności były umieszczone pod jednościami, części dziesiąte pod dziesiątemi, setne pod setnemi i t. d. jak to pokazuje wzór poniżéj umieszczony.

	48,375
	6,94
	0,867
	0,5
Ogół	56,682

Poczém przystępujemy do działania zaczynając od dodawania części najdrobniejszych t. j. od tysiącznych: 7+5=12 tysiącznych czyli 2 tysiącznych które piszemy pod tysiącznemi i 1 setna którą do setnych dodajemy: 1+6+4+7=18 setnych czyli 8 setnych które piszemy pod setnemi i 1 dziesiąta którą do części dziesiątych dodajemy; 1+5+8+9+3=26 dziesiątych czyli 6 dziesiątych i 2 jedności, 6 dziesiątych piszemy pod dziesiątemi i umieszczamy przed niemi przecinek, a 2 jedności dodajemy do jedności; 2+0+0+6+8=16 jedności czyli 6 jedności które piszemy pod jednościami i 1 dziesiątek który do dziesiątków dodajemy; 1+4=5 dziesiątków. Dane zatém liczby zawierają 2 tysiącznych, 8 setnych 6 dziesiątych i 56 jedności czyli razem 56,682.

Przykład 2. Od liczby 75,38 odjąć 23,456.

Mamy od liczby 75,38 odjąć 6 tysiącznych, 5 setnych, 4 dziesiątych, 3 jedności i 2 dziesiątki. Odejmujemy więc naprzód 6 tysiącznych, potém 5 setnych, następnie 4 dziesiątych i nakoniec 3 jedności i 2 dziesiątki. Chcąc działanie to najdogodniejszym sposobem wykonać, podpisujemy liczbę mniejszą pod większą umieszczając jedności pod jednościami, części dziesiąte pod dziesiątemi, setne pod setnemi i t. d.

$$\begin{array}{r} 75{,}38 \\ 23{,}456 \\ \hline \text{Reszta } 51{,}924 \end{array}$$

Zważywszy że odjemna nie posiada części tysiącznych od których należałoby odjąć 6 tysiącznych odjemnika, w tym przeto celu z 8 setnych bierzemy 1 setnę która zamieniona na części tysiączne daje 10 tysiącznych; otrzymane 10 tysiącznych umieściwszy myślą na miejscu tysiącznych, przystępujemy dopiero do właściwego działania: 6 tysiącznych od 10 tysiącznych zostanie 4 tysiącznych które w reszcie umieszczamy na miejscu tysiącznych; 5 setnych od 7 setnych, zostaje 2 setnych które na miejscu setnych piszemy; 4 dziesiątych od 3 dziesiątych odjąć nie można, bierzemy więc z 5 jedności jednę jedność i takową zamieniamy na części dziesiąte, które z 3 dziesiątemi uczynią 13 dziesiątych, od tych dopiero odjęte 4 dziesiątych, zostanie 9 dziesiątych, które napisawszy na miejscu dziesiątych umieszczamy prze niemi przecinek; nakoniec 23 jedności od 74 jedności zostanie 51 jedności, szukaną zatém resztą jest 51,924.

Chcąc zatém dodać lub odjąć od siebie ułamki dziesiętne lub całości z ułamkami dziesiętnemi: wypisujemy je pod sobą umieszczając jedności pod jednościami, części dziesiąte pod dziesiątemi, setne pod setnemi i t. d. i podkreślamy je linijką poziomą; poczém zaczynamy działanie od części najdrobniejszych, wykonywając go w taki sam sposób jak z liczbami całemi, pomnąc tylko na to, ażeby przecinek oddzielający części dziesiętne we właściwém miejscu umieścić.

Przykłady dla wprawy.

1) 4,09+65,0076+0,985+7,0596=?........................ (77,1422)
2) 0,0045+78,09+495+89,0546+2,9=?........................ (665,0491)
3) 349,8067+45,96+0,087+37+0,9=?........................ (433,7537)
4) 29,7+0,46+9,078+0,2708=?........................ (39,5088)
5) 6,07896+29,709036+5,094+0,85=?........................ (41,731996)
6) 14,96+9,7087+0,00567+87.084=?........................ (111,75837)
7) 41,070895+0,4094+0,79+1,02978=?........................ (52,300075)
8) 6,09+75,7089+0,007+7,4=?........................ (89,2059)
9) 11,92073—3,2069=?........................ (8,71383

10) 30,2—17,0367=?.................................... (13,1633)
11) 238—69,0723=?.................................... (167,9277)
12) 15,023705—8,87046=?.................................... (6,153245)
13) 1,01—09987=?.................................... (0,0113)
14) 65—9,07037=? .... (55,92963)
15) 13,012—12,97503=?.................................... (0,03697)
16) 4,3—2,0725=?.................................... (2,2275)
17) 4,7—19,097+28,19+36,2048—0,46—8,04696=?.............. (41,49084)
18) 4,19—7,093—0,46—9,7234+8,9+75,827=?.................. (71,6406)
19) 14,01—9,3702+4,07694+11,712—9,98=?.................... (10,44874)
20) 0,3571—0,08796+4,167+75,0978+0,07=?.................. (79,60394)
21) 13,02—7,5708+11—9,057+1,7203+—0,965=?.............. (8,1474)
22) 13,039—7,4509—0,8—17,048+18,0879+0,84=?.............. (6,668)

ZAGADNIENIA.

1. Jaka zmiana zajdzie w różnicy dwóch liczb, jeżeli do odjemnéj dodamy 7,678, a od odjemnika odejmiemy 3,0798? *(Odp.* Różnica powiększy się liczbą 10,7578)

2. Z czterech liczb; pierwsza większa od drugiéj 12,27; druga większa od trzeciéj 9,078; trzecia większa od czwartéj 27,9. Dowiedziéć się o ile pierwsza większa od czwartéj? *(Odp.* o 49,248).

3. Znaleść taką liczbę, od któréj jeżeli odejmiemy 0,05927, to na resztę otrzymamy 6,9487. (*Odp.* Liczbą szukaną jest 7,00797).

4. Znaleść liczbę, do któréj dodawszy 3,009278, otrzymamy na ogół 6,01. *(Odp.* Liczbą szukaną jest 3,000722).

5. Znaleść trzy liczby takie: ażeby ich ogół był równy 20,12, ogół dwóch pierwszych 16,0217, a ogół dwóch drugich 13,249. *(Odp.* Liczba pierwsza=6,871, druga=9,1507, trzecia =4,0983).

6. Ogół trzech liczb równy jest 23; liczba pierwsza równa jest 2,096; liczba druga większa od pierwszéj liczbą 7,9076. Znaleść liczbę trzecią. *(Odp.* Liczba trzecia jest 10,9004).

7. Jaka zajdzie zmiana w ogóle trzech liczb: jeżeli jednę powiększymy liczbą 0,2708, drugą zmniejszymy liczbą 2,027, trzecią powiększymy liczbą 0,79? (*Odp.* Ogół tych liczb zmniejszy się 0,9662).

8. Dane są trzy liczby: pierwsza 7,029, druga 12,47 większa od pierwszéj, trzecia 9,06748 mniejsza od drugiéj. Znaleść liczbę drugą i trzecią i ogół wszystkich trzech. *(Odp.* Druga 19,499; trzecia 10,43152; ogół wszystkich trzech liczb 36,95952).

9. Pewien kapitalista kupił dwie wsie i dom: za jednę wieś zapłacił 27569,08 rub., za drugą 19457,29 rub., a za dom 7548,6 rub. Ile wynosił cały jego kapitał, jeżeli pozostało mu jeszcze 16375,97 rub.? (*Odp.* 70950,94 rubla czyli 70950 rubli i 94 kop.

10. Dwie osoby włożyły do pewnego handlu 27102,3 rub., z których 7958,096 rub. należy do pierwszéj; jaką ilością rubli więcéj włożyła druga od pierwszéj? (*Odp.* Osoba druga włożyła więcéj od pierwszéj 11186,108 rubla czyli 11186 rubli i 10,8 kop.

11. Długość sekundowego wahadła w Petersburgu wynosi 994,91 milimetra, a w Paryżu 993,8462 milimetra. Oznaczyć różnicę długości pomienionych sekundowych wahadeł. (*Odp.* Różnica ta wynosi 1,0638 milimetra).

12. Mila siedmio-wiorstowa zawiera 3500 sażeni, mila zaś jeograficzna zawiera 3469,5 sażenia. O ile pierwsza mila większa od drugiéj? (*Odp.* Pierwsza mila większa od drugiéj o 30,5 sażenia).

13. Metr, zasadnicza jednostka miar francuzkich równy jest 3,281 stopy; o ile więc metr jest mniéjszy od sażenia, wiedząc że sażeń zawiera 7 stóp? (*Odp.* Sażeń dłużny od metra o 6,719 stopy).

14. Znaleść obwód trójkąta, wiedząc że jeden bok ma cali 53,7 drugi 47,98 cala, trzeci 85,067 cala. (*Odp.* Obwód tego trójkąta ma cali 186,747).

15. Że sznura trzymającego stóp 115,43 odcięto do pewnego użytku raz 28,896 stopy, a drugi raz 57,09 stopy. Dowiedzieć się ile stóp tego sznura jeszcze pozostało? (*Odp.* 29,444 stóp).

16. Pewna osoba będąc dłużną drugiéj 500 rub. zobowiązała się spłacać ów dług ratami; i tak: jednym razem zapłaciła 147,89 rubla, drugim 57,9 rubla, trzecim 97,08 rubla. Dowiedzieć się ile jeszcze została dłużną? (*Odp.* 197,13 rubla czyli 197 rubli i 13 kop.).

17. Wiadomo z doświadczeń, że powietrze atmosferyczne składa się z kwasorodu, saletrorodu i kwasu węglowego, i że w 100 częściach powietrza znajduje się 21 części kwasorodu i 78,9995 części saletrorodu. Dowiedzieć się ile w 100 częściach powietrza mieści się kwasu węglowego? (*Odp.* 0,0005 części.

18. Stopa sześcienna angielskiéj cyny waży w powietrzu 508,01 funta, zważona zaś w wodzie waży tylko 438,705 funta; ileż cyna traci na swojéj wadze będąc zanurzoną w wodzie? (*Odp.* Traci 69,305 funta).

19. Pal trzymający długości stóp 32,22 wbity był w dno rzeki; jaka jego część znajdowała się w ziemi, wiedząc że głębokość rzeki w tém miejscu wynosiła stóp 25,48, a widzialna część pala nad powierzchnią wody trzymała stóp 4,067? (*Odp.* 2,673 stopy w ziemi).

20. Morg pruski dawniéj magdeburskim zwany zawiera metrów kwadratowych 2552,0518304, a morg austryacki (joch) zawiera metrów kwadratowych 5756,50944. Jaka zachodzi różnica między pruskim i austryackim morgiem? (*Odp.* Morg austryacki większy od pruskiego o 3204,4576096 metrów kwadratowych).

Mnożenie ułamków dziesiętnych.

148. *Mnożenie ułamków dziesiętnych lub całości z ułamkami dziesiętnemi zamieniamy na mnożenie liczb całych, powstałych z opuszczenia przecinków w danych ułamkach, pamiętając żeby w otrzymanym iloczynie odciąć tyle znaków na części dziesiętne, ile ich jest razem we wszystkich danych czynnikach.*

I tak, dajmy że mamy znaleść iloczyn z pomnożenia 24,35 przez 0,087. Opuściwszy przecinki w obu czynnikach, mnożymy 2435 przez 87.

$$\begin{array}{r} 2435 \\ 87 \\ \hline 17045 \\ 19480 \\ \hline \text{Iloczyn } 211845 \end{array}$$

Otrzymany iloczyn 211845 jest 100000 razy większy od iloczynu z 24,35 przez 0,087. Jakoż: opuszczając przecinek w liczbie 24,35, powiększamy ją 100 razy, opuszczając zaś przecinek w liczbie 0,087, powiększamy ją 1000 razy (Nr. 141); zatém iloczyn 2435×87 jest większy od iloczynu 24,35×0,087 tyle razy, ile jedności zawiera iloczyn z liczb mnożących dane czynniki, to jest iloczynem 100×1000 czyli 100000 razy (Nr. 70). Chcąc przeto znaleść iloczyn żądany, potrzeba otrzymaną liczbę 211845, zmniejszyć 100000 razy, co uskutecznimy odcinając w niéj przecinkiem pięć znaków na części dziesiętne (Nr. 141). Zatém 24,35×0,087=2,11845.

Przykłady dla wprawy.

1) 76,054×36,5=? . . . . (2775,971)
2) 0,0072×0,03=? . . . . (0,000216)
3) 0,327×207=? . . . . (67,689)
4) 124×013=? . . . . , ... (16,12)
5) 75,1×3497=? . . . . (262624,7)
6) 125×0,007=? . . . . (0,875)
7) 5,6×3,0001=? . . . . (16,8056)
8) 375×0,073=? . . . . (27,375)
9) 0,013×0,034×2,5=? . . . . (0,001105)
10) 8,03×0,0045×1000=? . . . . (36,135)
11) 0,00235×0,047129=? . . . . . . (0,00011075315)
12) 138,5×7,695708=? . . . . (1065,855558)
13) 0,007853×0,00476=? . . . . (0,00003738028)
14) 0,00123×0,123×0,727=? . . . . . (0,00037825083)
15) 7,695708×3,57×138,5=? . . . . . (3805,10434206)
16) 0,017×0,00563×0,005=? . . . . . (0,00000047855)

ZAGADNIENIA.

1) Ile się zapłaci za 25 sztuk sukna, wiedząc że arszyn tego sukna, płaci się po 2,67 rubla i że w każdéj sztuce jest 38,5 arszyna? (*Odp.* 2569 rub. 87,5 kop.)

2) Długość sekundowego wahadła w Petersburgu wynosi 3,2642 stopy; ile ta długość zawiera milimetrów, wiedząc że jedna stopa ma milimetrów 304,8? (*Odp.* 994,92816 milimetra).

3) Wydając dziennie po 4,18 rubla, w przeciągu 2 lat i 138 dni wydałem dziewiątą część całego kapitału jaki posiadałem. Jaki więc kapitał posiadałem i ile mi jeszcze z niego zostało? (*Odp.* posiadałem 32654 rub. 16 kop., pozostało mi więc 29,025 rub. 92 kop.)

4) Kapitał 8654,50 rubla ile przyniesie procentu za lat 5, wiedząc że jeden rubel przynosi 8 kop. rocznie? (*Odp.* 3461 rub. 80 kop. procentu).

5) Stopa sześcienna wody dystylowanéj w największéj swojéj gęstości waży 69,142857 funta; dowiedzieć się ile waży 20 stóp sze-

ściennych lanego żelaza, wiedząc że ciężar gatunkowy (*) lanego żelaza jest 7,091? (*Odp.* 9805,839979740 funta).

6) Ile waży cal sześcienny platyny, wiedząc z doświadczeń Klaprotha, że ciężar gatunkowy tego metalu jest 20,72 i że ciężar jednego cala sześciennego wody dystylowanej w największéj swojej gęstości waży 3,83 zołotnika? (*Odp.* 79,3576 zołotnika).

7) Ile waży cal sześcienny złota, wiedząc że ciężar gatunkowy tego metalu podłóg Brissona jest 19,26? (*Odp.* 73,7658 zołotnika).

8) Ile waży cal sześcienny merkuryuszu, wiedząc że ciężar

(*) Wiadomo z doświadczeń, że każde ciało zanurzone w wodzie, traci na swoim ciężarze tyle, ile waży woda téj samej objętości co ciało w niéj zanurzone; np. stopa sześcienna złota zważona w powietrzu, waży 1341,814 funta, jeżeli zaś to złoto zanurzymy w wodzie i tak zanurzone zważymy, postrzeżemy że waga jego zmniejszy się o 69,142857 funta, to jest o tyle, ile wynosi waga stopy sześciennéj wody.

Iloraz z podzielenia ciężaru jakiegobądź ciała przez ciężar wody téj samėj objętości co dane ciało, zowie się *ciężarem gatunkowym* tego ciała, który pokazuje, ile razy to ciało jest cięższe od wody. Powyżéj przytoczone prawo, znane pod nazwiskiem prawa Archimedesa, tę nam przedstawia korzyść, że przy wynajdowaniu ciężaru gatunkowego jakiego ciała, nie potrzebujemy ważyć wody téj objętości co dane ciało, bo wiemy że jego waga wyrównywa stracie, jaką na ciężarze ponosi to ciało w niéj zanurzone. Ażeby więc znaleść ciężar gatunkowy danego ciała, ważymy go w powietrzu, i dajmy że waży 26 funtów, następnie zanurzamy go w wodzie, i dajmy że w wodzie waży 24 funtów, strata ta na ciężarze, to jest 2 funty, jest ciężarem wody téjże objętości co ciało; podzieliwszy przeto liczbę 26, t. j. ciężar wody téjże objętości co ciało, otrzymamy na iloraz liczbę 13, będącą ciężarem gatunkowym danego ciała.

Chcąc zaś z podanego ciężaru gatunkowego i objętości ciała, znaleść rzeczywisty jego ciężar, należy wagę wody mieszczącéj się w jednostce sześciennéj, np. 1 calu sześciennym, pomnożyć przez ciężar gatunkowy danego ciała, a znajdziemy ciężar także 1 cala sześciennego tego ciała. Bo i w istocie ciężar gatunkowy ciała pokazuje, ile razy to ciało jest cięższe od wody, więc mnożąc ciężar wody przez podany ciężar gatunkowy ciała, na iloczyn otrzymujemy ciężar ciała téj saméj objętości co woda. Wiedząc zaś ciężar 1 cala sześciennego, łatwo już znaleść ciężar ilukolwiek cali sześciennych a tém samém ciężar ciała danéj objętości.

W doświadczeniach tego rodzaju używa się wody dystyłowanéj (t. j. oczyszczonéj od obcych ciał niewidzialnie w niéj rozpuszczonych i nadających jéj rozmaity ciężar) ostudzonéj do 3°, 33 termometru Reaumura, będącéj podówczas w największéj swojéj gęstości.

gatunkowy tego metalu podług Biota jest 13,58? (*Odp.* 52,0114 złotnika).

9) Ile waży cał sześcienny ołowiu wiedząc z doświadczeń Fischera i Wollastona, że ciężar gatunkowy tego metalu jest 11,35? (*Odp.* 43,4705 złotnika).

10) Ile waży cal sześcienny srebra, wiedząc że ciężar gatunkowy tego metalu podług Klaprotha jest 10,78? (*Odp.* 41,2874 złotnika).

11) Ile waży cal sześcienny bizmutu, wiedząc że ciężar gatunkowy tego metalu podług Brissona jest 9,07? (*Odp.* 34,7381 złotnika).

12) Ile waży cal sześcienny miedzi, wiedząc że ciężar gatunkowy tego metalu podług Hatcheta jcst 8,89? (*Odp.* 34,0487 złotnika).

13) Ile waży cal sześcienny mosiądzu, wiedząc że ciężar gatunkowy mosiądzu podług Brissona jest 8,39? (*Odp.* 32,1337 złotnika).

14) Ile waży cal sześcienny żelaza, wiedząc że ciężar gatunkowy tego metalu podług Bergmana, jest 7,8? (*Odp.* 29,874 złotnika).

15) Ile waży cal sześcienny stali, wiedząc że ciężar gatunkowy stali podłóg Müschenbroecka jest 7,77? (*Odp.* 29,7591 złotnika).

16) Ile waży cal szescienny cyny, wiedząc że ciężar gatunkowy tego metalu podług Bergmana jest 7,26? (*Odp.* 27,8058 złotnika).

17) Ile waży cal sześcienny cynku, wiedząc że ciężar gatunkowy tego metalu jest 6,86? (*Odp.* 26,2738 złotnika).

18) Ile waży wiadro czystego alkoholu, wiedząc że wiadro ma 750 cali sześciennych, a ciężar gatunkowy alkoholu podług Lowitza jest 0,79? (*Odp.* 23 funtów i 61,2750 złotnika).

19) Ile waży kolumna wyciosana z piaskowca, mająca 387 stóp sześciennych objętości, wiedząc że ciężar gatunkowy piaskowca jest 2,56? (*Odp.* 68501,21128704 funta).

20) Ile waży kolumna wyciosana z marmuru kararyjskiego, mająca 2018 cali sześciennych objętości, wiedząc że ciężar gatunkowy

marmuru kararyjskiego podług Brissona jest 2,71? (*Odp.* 218 funtów 17,4274 zołotnika).

21) Odlany został posąg ze spizu, złota, srebra i miedzi; złota znajdowało się w nim 14 cali sześciennych, srebra 5 stóp sześciennych, a miedzi 207 stóp sześciennych. Dowiedzieć się ile wynosi wąga tego posągu, wiedząc że ciężar gatunkowy złota jest 19,26; srebra 10,78 a miedzi 8,89? (*Odp.* 130419 funtów 55,6524 zołotnika).

22) Summa 13508 rubli i 70 kop. wypożyczona po 6 od sta, jaki przyniosła procent po latach 4? (*Odp.* 3242 rub. 8,8 kop.).

Należy pierwéj obliczyć procent roczny od rubla; jakoż kiedy od 100 rubli jest procentu 6 rubli, więc od jednego rubla będzie $\frac{6}{100}$ czyli 0,06 rubla.

23) Summa 26450 rubli i 80 kop. wypożyczona po 5 od sta, jaki przyniesie procent za lat 12? (*Odp.* 15870 rubli 48 kop.)

24) Jaki przyniesie procent za lat 5 kapitał 36500 rubli 75 kop. wypożyczony po 8 od sta? (*Odp.* 14600 rub. 30 kop.)

25) Funtów sterlingów 587,46 ile czyni rubli; wiedząc że funt sterling wart jest 6,22 rubla? (*Odp.* 3654,0012 rubli).

26) Luidorów 435,18 ile czyni rubli, wiedząc że luidor wart jest 5,047 rubla? (*Odp.* 2196 rubli 35,346 kop.)

27) Marków kurant 607,5 ile czyni rubli, wiedząc że marka kurant warta jest 0,382 rubla? (*Odp.* 232 rub. 6,5 kop.)

28) Frydrychsdorów 354,8 ile czyni rubli, wiedząc że frydrychsdor wart jest 5,2 rubla? (*Odp.* 1844 rubli 96 kop.)

29) Za 7 arszynów sukna zapłacono 22,06 rubla. Ile wypadnie zapłacić za 7000 arszynów tego samego gatunku sukna? (*Odp.* 22060 rubli).

30) Kuryer, który w godzinę ujeżdża 17,26 wiorsty, ile ujedzie wiorst w 19 dobach, jeżeli każdéj doby straci 4,08 godziny na zmianę koni? (*Odp.* Przejedzie wiorst 6532,5648).

Dzielenie ułamków dziesiętnych.

149. W dzieleniu ułamków dziesiętnych trzy główne przypadki rozróżnić możemy. 1. Jeżeli tylko w dzielnéj są części dziesiętne a dzielnik liczbą całą. 2. Jeżeli tylko w dzielniku są części dziesiętne a dzielna liczbą całą. 3. Jeżeli w dzielnéj i dzielniku są części dziesiętne. Co do 1° Dajmy że mamy liczbę 168,26 do podzielenia przez 47.

```
168,26 | 47
141    |------
-----  | 3,58
 272   |
 235
-----
  376
  376
-----
   0.
```

Objaśnienie. Z dzielenia 168 jedności przez 47, otrzymujemy 3 jedności na iloraz a liczbę 27 na resztę. Zważywszy że otrzymany znak na iloraz oznacza jedności pojédyncze, przeto po znaku 3 umieszczamy przecinek, a otrzymaną na resztę liczbę 27 zamieniamy na części dziesiąte, co daje 270 dziesiątych, do których dołączywszy 2 dziesiątych dzielnéj, otrzymamy razem 272 dziesiątych. Dzieląc 272 dziesiątych przez 47, otrzymujemy 5 dziesiątych na iloraz, a 37 dziesiątych na resztę. Liczba 37 dziesiątych czyni 370 setnych, które złączone z 6 setnemi dzielnéj dadzą razem 376 setnych. Dzieląc 376 setnych przez 47, otrzymujemy 8 setnych na iloraz a zero na resztę. Zatém ilorazem szukanym liczby 168,26 dzielonéj przez 47, jest liczba 3,58.

Jeżelibyśmy zaś na ostatnią resztę zamiast zera otrzymali jaką inną liczbę, wtedy zamienilibyśmy ją na części tysiączne, dopisując do niéj zero i wykonywali dzielenie, dopóki nie przyszlibyśmy do zera na resztę, lub téż jeżeliby dzielenie znacznie się przeciągało, zatrzymali się na otrzymanych tylu znakach dziesiętnych ileby ścisłość rachunku lub potrzeba tego wymagała.

Przykład 2. Liczbę 11,978 podzielić przez 265.

```
11,978 | 265
1060   |--------
-----  | 0,0452
 1378  |
 1325
-----
  530
  530
-----
   0.
```

Objaśnienie. Z dzielenia 11 jedności przez 265 nie otrzymujemy ani jednéj je dności, przeto w ilorazie na miejscu jednoś piszemy zero i po niém umieszczamy przecinek. Z dzielenia 119 dziesiątych przez 265 nie otrzymujemy także ani jednéj dziesiątéj, na miejscu przeto części dziesiątych ilorazu umieszczamy znów zero. Dzieląc następnie 1197 setnych przez 265, otrzymujemy 4 setnych na iloraz a 137 setnych na resztę. Zamieniwszy 137 setnych na części tysiączne i do nich dołączywszy 8 tysiącznych dzielnéj, otrzymamy 1378 tysiącznych, które podzielone przez 265 dają 5 tysiącznych na iloraz a 53 tysiącznych na resztę. Liczbę 53 tysiącznych zamieniamy na części dziesięciotysiączne, co daje 530 dziesięciotysiącznych i takowe dzielimy przez 265 i otrzymujemy 2 dziesięciotysiączne na iloraz a zero na resztę. Zatém 11,978 : 265 $=$0,0452.

Co do 2° Dajmy że mamy liczbę 78 do podzielenia przez 31,25. Opuściwszy przecinek w dzielniku, dzielimy 78 przez 3125.

```
 7800 | 3125
 6250 |_0,02496
 -----
 15500
 12500
 -----
  30000
  28125
  -----
   18750
   18750
   -----
      0.
```

Otrzymany iloraz 0,02496 jest 100 razy mniejszym od ilorazu szukanego; bo liczbę 78 nie przez 3125, lecz przez liczbę 100 razy mniejszą to jest przez 31,24 dzielić należało (Nr. 74). Żeby więc otrzymany iloraz uczynić prawdziwym potrzeba go powiększyć 100 razy czyli posunąć przecinek o dwa znaki ku prawéj ręce. Zatém 78 : 31,25 $=$ 2,496.

Co do 3° Dajmy że mamy liczbę 36,772 do podzielenia przez 5,8.

Wiemy że iloraz wartości swojéj nie zmieni jeżeli tak dzielną jako i dzielnik pomnożymy przez jednakową liczbę (Nr. 76); pomnożywszy więc obie liczby przez 10, otrzymamy: 36,772 $\times$ 10 $=$ 367,72 i 5,8 $\times$ 10 $=$ 58 (Nr. 141); dzielenie zatém liczby 36,772 przez 5,8, zamieniamy na przypadek pierwszy, to jest na dzielenie liczby 367,72 przez 58.

$$\begin{array}{r|l}
367{,}72 & 58 \\ \cline{2-2}
348 & 6{,}34 \\ \cline{1-1}
197 & \\
174 & \\ \cline{1-1}
232 & \\
232 & \\ \cline{1-1}
0. &
\end{array}$$

Zatém 36,772 : 5,8 = 6,34.

Przykład 2. Liczbę 408,51 podzielić przez 3,026. Pomnożywszy obie liczby przez 1000, otrzymamy: 408,51 × 1000 = 408510 i 3,026 × 1000 = 3026; dzielenie zatém liczb danych zamieniamy na dzielenie liczby 408510 przez 3026.

$$\begin{array}{r|l}
408510 & 3026 \\ \cline{2-2}
3026 & 135 \\ \cline{1-1}
10591 & \\
9078 & \\ \cline{1-1}
15130 & \\
15130 & \\ \cline{1-1}
0. &
\end{array}$$

Zatém 408,51 : 3,026 = 135.

Przykład 3. Liczbę 2,3 podzielić przez 0,586. 2,3 × 1000 = 2300; 0,586 × 1000 = 585.

$$\begin{array}{r|l}
2300 & 586 \\ \cline{2-2}
1758 & 3{,}9249\ldots \\ \cline{1-1}
5420 & \\
5274 & \\ \cline{1-1}
1460 & \\
1172 & \\ \cline{1-1}
2880 & \\
2344 & \\ \cline{1-1}
5360 & \\
5274 & \\ \cline{1-1}
86 & \text{i t. d.}
\end{array}$$

Zatém 2,3 : 0,586 = 3,9249....

Przykład 4. Liczbę 3,01 podzielić przez 0,96. 3,01 × 100 = 301; 0,96 × 100 = 96.

```
301|96
288|3,1354....
 130
  96
  340
  288
   520
   480
    400
    384
     16 i t. d.
```

Zatém 3,01 : 0,96 = 3,1354....

Przykłady dla wprawy.

1) 635,824 : 16 = ? . . . . (39,739)
2) 5,49 : 625 = ? . . . . (0,008784)
3) 0,00458 : 8 = ? . . . . (0,0005725)
4) 0,34 : 15625 = ? . . . . (0,00002176)
5) 0,0123 : 75 = ? . . . . (0,000164)
6) 0,14 : 350 = ? . . . . (0,0004)
7) 0,01 : 160 = ? . . . . (0,0000625)
8) 1,2 : 15 = ? . . . . (0,08)
9) 2,07: 17 = ? . . . . (0,1217....)
10) 1,023 : 28 = ? . . . . (0,036535714....)
11) 785 : 0,59 = ? . . . . (1330,5084745....)
12) 13 : 0,278 = ? . . . . (46,76258....)
13) 147 : 12,58 = ? . . . . (11,6852....)
14) 1 : 0,345 = ? . . . . (2,8985507)
15) 1000 : 0,0025 = ? . . . . (400000)
16) 758 : 0,00047375 = ? . . . . (1600000)
17) 564 : 0,015 = ? . . . . (37600)
18) 0,002876 : 0,25 = ? . . . . (0,011504)
19) 75,294 : 1,8 = ? . . . . (41,83)
20) 3,7458972 : 3,6 = ? . . . . (1,040527)
21) 86,342 : 0,12 = ? . . . . (719,525)
22) 17,035047 : 2,327 = ? . . . . (7,3206046....)

23) 0,71 : 0,0064=? . . . . (110,9375)
24) 175,407 : 7,879=? . . . . (22,2625....)
25) 4,72021 : 0,000001=? . . . . (4720210)
26) 0,9 : 0,815=? . . . . (1,1042....)
27) 0,01 : 0,002756=? . . . . (3,62844....)
28) 2755,7 : 16,21=? . . . . (170)
29) 11,529 : 0,427=? . . . . (27)
30) 288,435 : 2,345=? . . . . (123)

ZAGADNIENIA.

1) Ile jest funtów w kilogramie, wiedząc że funt jest 0,4089 kilograma? (*Odp.* funtów 2,44558476....)

2) Ile jest wiader w hektolitrze, wiedząc że wiadro jest 0,1229 hektolitra? (*Odp.* wiader 8,136696....)

3) Stopa sześcienna platyny waży 1486,6 funta, a stopa sześcienna żelaza 539,747 funta. Dowiedzieć się ile razy platyna cięższa od żelaża? (*Odp.* 2,754.... razy).

4) Ile wypadnie zapłacić za 29,6 funta kawy, kiedy 0,08 funta kosztuje 3,4 kopiejek? (*Odp.* 12 rubli i 58 kopiejek).

5) Na umundurowanie 3125 ludzi potrzeba jest 9700 arszynów sukna szerokiego na 2 arszyny; na umundurowanie téj saméj liczby ludzi ile wyjdzie sukna szerokiego na 1,25 arszyna. (*Odp.* 15520 arszynów).

6) Za 128 arszynów sukna zapłacono 406,28 rubla; ile wypadnie zapłacić za 10000 arszynów tego samego gatunku sukna? (*Odp.* 31740 rubli 62,5 kop.)

7) Pewne naczynie zważone w powietrzu miało wagi 35,02 zołotnika, zważone zaś w wodzie ważyło tylko 29,478 zołotnika. Oznaczyć ciężar gatunkowy tego naczynia? (*Odp.* 6,319....)

8) Kupiec zamienia 517,5 arszyna płótna na sukno; arszyn płótna kosztuje 0,58 rubla a arszyn sukna 2,5 rubla; ileż więc dostanie arszynów sukna za płótno? (*Odp.* 120,06 arszyna).

9) Pewna dobroczynna i zamożna osoba ulokowała na dobrach ziemskich summę 5656,25 rubli, z tym warunkiem, żeby procent od takowéj, licząc 6,4 kop. od rubla, rozdzielonym był na utrzymanie ośmiu biednych familij. Jakąż summę rocznie pobierać będzie każda familia? (*Odp.* po 45 rubli 25 kop.)

10) Zmięszano trzy gatunki herbaty: pierwszego gatunku 13 funtów po 2,85 rubla funt, drugiego 17 funtów po 3,24 rubla unt, trzeciego 10 funtów po 4,20 rubla funt; jaka będzie wartość jednego funta mięszaniny? (*Odp.* funt mięszaniny wypada po 3 rub. 35,325 kop.)

11) Ile potrzeba desek szerokich na 1,2 stopy do wyłożenia podłogi w wozowni długiéj na stóp 106,8, kiedy długość każdéj deski wyrównywa szerokości wozowni? (*Odp.* potrzeba desek 89).

12) Trzech spólników posiadających nierównie kapitały, podzieliło się zyskiem w następujący sposób: jeden otrzymał 0,34 całego zysku, drugi 0,526 tegoż zysku, a trzeci 329,238 rubla. Ile cały zysk wynosił, ile dostał pierwszy a ile drugi? (*Odp.* cały zysk wynosił 2457 rubli, z którego pierwszy dostał 835 rubli 38 kop., a drugi 1292 rubli 38,2 kop.)

13) Robotnik zarabiający dziennie 0,87 rubla wydawał dziennie na utrzymanie 0,45 rubla. W ilu dniach oszczędził 51,66 rubla? (*Odp.* w dniach 123).

14) Jeden robotnik w dniach 4 zrobił 21,08 stopy pewnéj roboty; drugi w dniach 3,5 zrobił 21,245 stopy tejże roboty, a trzeci w dniach 2,8 zrobił 11,55 stopy. Robiąc wspólnie, za ile dni wykończą całą robotę, wynoszącą 433,02 stopy? (*Odpowiedź* w dniach 28).

15) Summa 13750,6 rub. wypożyczona po 6 od sta, jaki przyniesie procent za lat 3 i miesięcy 8? (*Odp.* przyniesie procentu 3025 rubli 13,2 kopiejki).

16) Od pewnéj sumy wypożyczonéj po 8 od sta, odebrano 4483,83 rub. procentu za lat 4 i miesięcy 6; jaka summa wypożyczona była? (*Odp.* 12457 rubli.

17) Dekarów 820,45 ile czynią dziesiatyn; wiedząc że dekar zawiera w sobie 1000 metrów kwadratowych, metr kwadratowy 0,219657 sażeni kwadratowych, a dziesiatyna 2400 sażeni kwadratowych? (*Odp.* czynią 75 dziesiatyn i 217,58565 sażeni kwadratowych.

18) Pewien mieszkaniec Rossyi odziedziczył w Austryi dobra, mające 2000 morgów austryjackich (jochów) rozległości; ile to uczyni dziesiatyn i sażeni kwadratowych, wiedząc że joch zawie-

ra 5756,50944 metrów kwadratowych, a sażeń kwadratowy 4,55208495 metrów kwadratowych? (*Odp.* 1045 dziesiatyn 892,95158 sażeni kwadratowych).

Zamiana ułamku dziesiętnego skończonego, zwrotowego prostego i mięszanego na zwyczajny.

150. Przy odbywaniu połączonych działań z ułamkami zwyczajnemi i dziesiętnemi, często zachodzi potrzeba zamiany jednych na drugie; dla téj więc przyczyny z początkiem zaraz nauki dziesiętnych ułamków, podaliśmy sposób zamiany ułamku zwyczajnego na dziesiętny, a tą samą powodując się myślą, przystępujemy z kolei do zamiany dziesiętnego na zwyczajny. I tak:

151. *Chcąc ułamek dziesiętny skończony zamienić na zwyczajny, dosyć jest tylko napisać go w postaci tegoż ułamku. t. j. wypisać oddzielnie domyślny mianownik i cały ułamek przyprowadzić do postaci najprostszéj na zasadach wyłożonych przy upraszczaniu ułamków; np.*

1) $0,025 = \frac{25}{1000} \overset{25}{=} \frac{1}{40}$.

2) $0,0072 = \frac{72}{10000} \overset{8}{=} \frac{9}{1250}$.

3) $14,19 = 14\frac{19}{100}$.

4) $23,012 = 23\,\frac{12}{1000} \overset{4}{=} 23\,\frac{3}{250}$.

152. *Ażeby ułamek zwrotowy prosty zamienić na zwyczajny, potrzeba cały zwrot napisać za licznik, a za mianownik liczbę złożoną z tylu dziewiątek, ile jest znaków w zwrocie.*

W tym celu weźmy ułamek 0,888..... Ułamek ten można rozłożyć na dwa czynniki, z ktorychby pierwszy był liczbą zwrot składającą, t. j. 8; czynnik drugi znajdziemy, dzieląc 0,888... przez 8, i nim będzie 0,111.... Jakoż $0,888... = 8 \times 0,111....$ A ponieważ ułamek 0,111.... pochodzi od $\frac{1}{9}$ (Nr. 146); więc 0,888..... pochodzi od 8 razy wziętego ułamku $\frac{1}{9}$ to jest od $\frac{8}{9}$.

Zupełnie takim samym sposobem można dowieść że:

$0,565656.... = 56 \times 0,010101... = 56 \times \frac{1}{99} = \frac{56}{99}$;

$0,125125125..... = 125 \times 0,001001001 = 125 \times \frac{9}{999} = \frac{125}{999};$

$0,00280028... = 28 \times 0,000100010001 = 28 \times \frac{1}{9999} = \frac{28}{9999}.$

153. *Ażeby ułamek zwrotowy mięszany zamienić na ułamek zwyczajny, potrzeba od liczby przed zwrotem położonéj i całym zwrotem odjąć liczbę przed zwrotem umieszczoną i resztę tak otrzymaną napisać za licznik, podpisując mu za mianownik tyle dziewiątek, ile zwrot zawiera znaków, po nich zaś tyle zer, ile jest znaków nie należących do zwrotu.*

Dla udowodnienia téj zasady dajmy ułamek 0,354646.... Rozmnożywszy go przez 100, zamieniamy go na zwrotowy prosty 35,4646.... którego wartość w zwyczajnym ułamku wyrażona jest $35\frac{46}{99} = \frac{35 \times 99 + 46}{99}$; lecz ułamek ten jest 100 razy większy od danego, prawdziwa zatém wartość danego ułamku 0,354646... będzie $= \frac{35 \times 99 + 46}{99 \times 100}$ A ponieważ $99 = 100 - 1$, więc $35 \times 99 = 35 \times 100 - 35$ (zob. Nr. 34 i 35); przeto $\frac{35 \times 99 + 46}{99 \times 100} = \frac{35 \times 100 - 35 + 46}{99 \times 100} = \frac{3500 - 35 + 46}{9900} = \frac{3546 - 35}{9900} = 0,354646.....$ to co było do okazania.

Dla téj saméj przyczyny: $0,65252.... \frac{652 - 6}{990} = \frac{646}{990}$,

$0,0145757... = \frac{1457 - 14}{99000} = \frac{1443}{99000} = \frac{481}{33000};$

$16,05888.... = 16\frac{58 - 5}{900} = 16\frac{53}{900}.$

Przykłady dla wprawy.

1) Ułamek dziesiętny 0,548 zamienić na zwyczajny. (*Odp.* $\frac{137}{250}$.)

2) Ułamek dziesiętny 0,7256 zamienić na zwyczajny. (*Odp.* $\frac{907}{1250}$.)

3) Ułamek dziesiętny 12,785 zamienić na zwyczajny. (*Odp.* $12\frac{157}{200}$.)

4) Ułamek dziesiętny 9,03134 zamienić na zwyczajny. (*Odpowiedź,* $9\frac{1567}{50000}$.)

5) Ułamek zwrotowy $0,\dot{3}\dot{6}$ zamienić na zwyczajny. (*Odp.* $\frac{4}{11}$.)

6) Ułamek zwrotowy $0,\dot{0}0\dot{6}$ zamienić na zwyczajny. (*Odp.* $\frac{2}{333}$.

7) Ułamk zwrotowy 13,087 zamienić na zwyczajny. (*Odp.* $13\frac{29}{333}$.)

8) Ułamek zwrotowy 8,351 zamienić na zwyczajny. (*Odp.* $8\frac{13}{37}$.)

9) Ułamek zwrotowy mięszany 0,00151 zamienić na zwyczajny. (*Odp.* $\frac{5}{3300}$.)

10) Ułamek zwrotowy mięszany $14,31\dot{1}\dot{5}$ zamienić na zwyczajny. (*Odp.* $14\frac{1028}{3300}$.)

11) Ułamek zwrotowy mięszany $0,000\dot{4}\dot{5}$ zamienić na zwyczajny. (*Odp.* $\frac{1}{2520}$.)

12) Ułamek zwrotowy mięszany $18,49\dot{0}0\dot{2}$ zamienić na zwyczajny. (*Odp.* $18\frac{18953}{99900}$.)

ROZDZIAŁ VI.

Ułamki ciągłe.

154. Ułamek zwyczajny, którego wyrazy są liczbami pierwszemi względem siebie, nie daje nam jasnego pojęcia o swojéj wielkości, jeżeli wyrazy składające go są liczbami wielkiemi. Dogodność odbywania działań z liczbami mniejszemi aż nadto widoczna i że tak się wyrażę dotykalna, abyśmy choć na chwilę wątpliwość w tym względzie objawić mogli. W rachunkach nie wymagających zbyt wielkiéj ścisłości, gdzie błąd w pewnych częściach jedności mało lub prawie nic nie jest znaczącym, bez zaprzeczenia oszczędzilibyśmy wiele czasu i pracy, jeślibyśmy mogli dane wielkości, zamienić na inne choćby tylko do nich zbliżone, lecz w prostszéj wystawione postaci. I czyliż to nie są dostateczne pobudki zachęcające do szukania sposobów, któreby doprowadzić nas mogły do wynajdywania zbliżonych wartości ułamkom mającym wyrazy dosyć wielkiemi liczbami wyrażone, a nie dającym się uprościć? Częstokroć chwila zastanowienia, lub nagląca potrzeba, rodzi w umyśle, z prawd znanych, nowe prawdy, które bliżéj rozpoznane przynoszą nam olbrzymie korzyści. Nie miejsce tu jest, abyśmy wykazali wszystkie użytki i niezbędną potrzebę w innych gałęziach nauk matematycznych, które osiągamy ze znajomości nowego rodzaju ułamków, o jakich mówić zamierzamy, to bowiem co dotąd już powiedzieliśmy za dostateczne w nauce arytmetyki uważamy, aby przejść do rozpoznania ich własności.

I w tym celu dajmy, że mamy znaleść przybliżoną wartość dla ułamku $\frac{407}{919}$, którego wyrazy są liczbami pierwszemi względem siebie.

Podzieliwszy licznik i mianownik danego ułamku przez jego licznik, otrzymamy $\frac{407}{919}=\frac{1}{\frac{919}{407}}=\frac{1}{2+\frac{105}{407}}$. W mianowniku tego rozwinięcia opuszczając część ułamkową $\frac{105}{407}$, otrzymujemy ułamek $\frac{1}{2}$ większy od danego, bo mianownik 2 mniejszy od $2+\frac{105}{407}$ (Nr. 108); biorąc zaś jedność w miejsce opuszczonego ułamku $\frac{105}{407}$, otrzymalibyśmy $\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}$ ułamek dla podobnéj przyczyny mniejszy od danego: wielkość zatém ułamku $\frac{407}{919}$ jest zawarta między ułamkami $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{3}$ co już daje nam dosyć jasne pojęcie o wartości danego ułamku.

Chcąc znaleść drugą więcéj zbliżoną jeszcze wartość, należy z opuszczonym ułamkiem $\frac{105}{407}$ postąpić tak samo jak z danym; jakoż $\frac{105}{407}=\frac{1}{\frac{407}{105}}=\frac{1}{3+\frac{92}{105}}$, zatém $\frac{401}{919}=\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{92}{105}}}$. Opuściwszy ułamek $\frac{92}{105}$ otrzymalibyśmy $\frac{1}{2+\frac{1}{3}}$ czyli $\frac{1}{\frac{7}{3}}=\frac{3}{7}$ (Nr. 135) drugą przybliżoną wartość, mniejszą od danego ułamku, albowiem $\frac{1}{3}$ większa od $\frac{1}{3+\frac{92}{105}}$ więc $\frac{1}{2+\frac{1}{3}}$ mniejsza od $\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{92}{105}}}$ czyli od $\frac{407}{919}$. Zważywszy że pierwsze przybliżenie $\frac{1}{2}$ jest większe, drugie $\frac{3}{7}$ mniejsze od ułamku danego, wnosimy: że wielkość ułamku $\frac{407}{919}$ zawarta jest między $\frac{1}{2}$ i $\frac{3}{7}$; a ponieważ różnica ułamków $\frac{1}{2}$ i $\frac{3}{7}$ równa jest ułamkowi $\frac{1}{14}$, więc biorąc $\frac{3}{7}$ w miejsce ułamku danego, popełniamy błąd niniejszy od $\frac{1}{14}$.

Rozwinąwszy w podobny sposób ułamek $\frac{92}{105}=\frac{1}{\frac{105}{92}}=\frac{1}{1+\frac{13}{92}}$; zatém $\frac{407}{919}=\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{13}{92}}}}$.

Opuszczając ułamek $\frac{13}{92}$, znajdziemy trzecią przybliżoną wartość $\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{1}}}=\frac{1}{2+\frac{1}{4}}=\frac{4}{9}$ większą ud ułamku danego; albowiem $\frac{1}{1}$ większa od $\frac{1}{1+\frac{13}{92}}$ więc $\frac{1}{3+\frac{1}{1}}$ mniejsza od $\frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{13}{92}}}$, zatém $\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{1}}}$ czyli $\frac{4}{9}$ większa od

$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{13}{92}}}}$ czyli od $\frac{407}{919}$. A ponieważ wartość poprzedzająca $\frac{3}{7}$ jest mniejsza, ta zaś $\frac{4}{9}$ większa od ułamku $\frac{497}{919}$, więc dany ułamek jest zawarty między $\frac{3}{7}$ i $\frac{4}{9}$, a że różnica między temi wartościami równa jest ułamkowi $\frac{1}{63}$, zatem biorąc $\frac{4}{9}$ za ułamek dany, popełniamy błąd mniejszy od $\frac{1}{63}$.

Postępując tak dalej wskazaną drogą ostatecznie otrzymamy.

$$\frac{407}{919} = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{13.}}}}}$$

W rozwinięciu tém opuszczając ułamek $\frac{1}{13}$ pozostanie:

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{7}}}} = \frac{31}{70}$$

czwarta przybliżona wartość mniejsza od danego ułamku. Jeślibyśmy zaś całe rozwinięcie zamienili na ułamek zwyczajny, otrzymalibyśmy ułamek dany $\frac{407}{919}$.

155. Wyrażenie złożone z ułamków zwyczajnych, z których każdy ma za licznik jedność a za mianownik całość z podobnym ułamkiem złączoną, jak tego przykład widzieliśmy w rozwinięciu ułamku zwyczajnego, umieszczonem w numerze poprzedzającym zowiemy *ułamkiem ciągłym* (непрерывная дробь).

Ułamki pojedyncze w skład ułamku ciągłego wchodzące przyjmują nazwisko *ułamków składowych*, mianowniki zaś tych składowych ułamków *mianownikami niezupełnemi* albo *ilorazami niezupełnemi*.

156. Rozpatrzywszy się w sposobie działania zamiany ułamku zwyczajnego na ciągły, postrzegamy: że w takowém podobnie jak przy wyszukiwaniu największego wspólnego dzielnika dla dwóch liczb (Nr. 67), każdy dzielnik staje się dzielną następującego dzielenia, mianowniki wszystkich składowych ułamków są ilorazami tych dzieleń, a liczniki są jednościami.

I tak, przy zamianie ułamku zwyczajnego $\frac{407}{919}$ na ciągły, stopniowo otrzymywaliśmy:

$$\frac{407}{919}=\cfrac{1}{2+\frac{105}{407}}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\frac{92}{105}}}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\frac{13}{92}}}}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{7+\frac{1}{13}}}}}.$$

Licznik pierw szy, również jak wszystkie inne, jest jednością. Mianownik pierwszy 2 powstał z dzielenia 919 przez 407; mianownik drugi 3 powstał z dzielenia poprzedzającego dzielnika 407 przez resztę 105 otrzymaną z pierwszego dzielenia; mianownik trzeci 1 otrzymany z dzielenia reszty pierwszéj 105 przez resztę 92 pozostałą z drugiego dzielenia; mianownik czwarty 7 z dzielenia reszty 92 otrzymanéj w drugiem dzieleniu przez resztę 13 z trzeciego dzielenia i t. d.

Na powyższéj uwadze uzasadniamy prostszy sposób zamiany ułamku zwyczajnego na ciągły: należy bowiem naprzód, jeżeli to jest ułamek właściwy, *podzielić mianownik przez licznik, potém licznik przez pierwszą resztę, resztę pierwszą przez resztę drugą i t. d. dopóki nie otrzymamy na resztę 0; następnie wskazanym sposobem wypisać ułamki składowe, pisząc na miejscach liczników jedności a na miejscach mianowników ilorazy takim porządkiem jak były w działaniu otrzymane. Np.*

Zamieńmy ułamek zwyczajny $\frac{89}{469}$ na ułamek ciągły.

469	5 iloraz pierwszy					
445	89	3 iloraz drugi				
Pierwsza reszta 24	72	24	1 iloraz trzeci			
	Druga reszta 17	17	17	2 iloraz czwarty		
		Trzecia reszta 7	14	7	2 iloraz piąty	
			Czwarta reszta 3	6	3	3 iloraz szósty
				Piąta reszta 1	3	1
					Ostatnia reszta 0	

Zatém $$\frac{89}{469}=\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\frac{1}{3}}}}}}.$$

157. Zamieniając ułamek niewłaściwy na ciągły, otrzymujemy całość i ułamek ciągły; np. niech danym niewłaściwym ułamkiem będzie $\frac{177}{73}$, wyciągamy z niego całość $\frac{177}{73}=2+\frac{31}{73}$, następnie ułamek $\frac{31}{73}$ wiadomym sposobem zamieniamy na ciągły i ostatecznie otrzymujemy:

$$\frac{177}{73}=+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2.}}}}}$$

Przyjęto jest, ażeby na początku ułamku ciągłego umieszczać zawsze liczbę całkowitą chociażby takowa była zerem, jak to już miało miejsce w pisaniu ułamków dziesiętnych. Podług tego rozwinięcie ułamku $\frac{89}{469}$ w ciągły napiszemy tak:

$$\frac{89}{469}=0+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3.}}}}}}$$

158. Przykład. Znaleść wszystkie przybliżone wartości dla ułamku $\frac{122}{409}$.

Rozwijamy naprzód dany ułamek w ułamek ciągły:

$$\frac{122}{409}=0+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{7}}}}}$$

Przybliżone wartości:

1ª jest 0.

2ª $0+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

3ª $0+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}}=0+\cfrac{1}{\frac{7}{2}}=0+\frac{2}{72}=\frac{2}{7}$

4ª $0+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1}}}=0+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\frac{3}{1}}}=0+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3}}=0+\cfrac{1}{\frac{10}{3}}=0+\frac{3}{10}=\frac{3}{10}$

5ª $0+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5}}}}=0+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\frac{6}{5}}}}=0+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\frac{5}{6}}}=0+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\frac{17}{6}}}=0+\cfrac{1}{3+\frac{6}{17}}=0+\cfrac{1}{\frac{57}{17}}=0+\frac{17}{57}$

$=\frac{17}{57}$

6ª $0+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{7}}}}}=0+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\frac{36}{7}}}}}=0+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\frac{7}{36}}}}=0+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\frac{43}{36}}}}=0+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\frac{36}{43}}}=0+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\frac{122}{43}}}=0+$

$+\frac{1}{3+43}=0+\frac{1}{409}=0+\frac{122}{409}=\frac{122}{409}.$

Pierwsza przybliżona wartość $\frac{0}{1}$ jest mniejsza od danego ułamku; druga $\frac{1}{3}$ większa; trzecia $\frac{2}{7}$ mniejsza; czwarta $\frac{3}{10}$ większa; piąta $\frac{17}{57}$ mniejsza; szósta $\frac{122}{409}$ równa danemu ułamkowi (zob. Nr. 154). Z tego więc widzimy: *że przybliżone wartości znajdujące się na miejscach parzystych większe od danego ułamku; wielkość zaś ostatnia otrzymana ze zwinięcia całego ułamku ciągłego w zwyczajny, równa jest danemu ułamkowi.*

159. *Różnica dwóch po sobie następujących przybliżonych wartości równa jest ułamkowi mającemu za licznik jedność, a za mianownik iloczyn z mianowników tych przybliżonych wartości.* Na dowód ten, wypiszemy wszystkie przybliżone wartości otrzymane w numerze poprzedzającym, kolejno jak były wynajdowane różnice każdych dwóch po sobie następujących:

$$\frac{0}{1},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{7},\ \frac{3}{10},\ \frac{17}{57}$$

$$\frac{1}{3}-\frac{0}{1}=\frac{1}{3}-\frac{0}{3}=\frac{1}{3}=\frac{1}{3\times 1}$$

$$\frac{1}{3}-\frac{2}{7}=\frac{7}{21}-\frac{6}{21}=\frac{1}{21}=\frac{1}{3\times 7}$$

$$\frac{3}{10}-\frac{2}{7}=\frac{21}{70}-\frac{20}{70}=\frac{1}{70}=\frac{1}{10\times 7}$$

$$\frac{3}{10}-\frac{17}{57}=\frac{171}{570}-\frac{170}{570}=\frac{1}{570}=\frac{1}{10\times 57}.$$

160. *Błąd jaki popełniamy biorąc jednę z przybliżonych wartości za ułamek dany, mniéjszym jest od różnicy między dwiema po sobie następującemi przybliżonemi wartościami.* Bo i w saméj rzeczy: kiedy ułamek $\frac{122}{409}$ (Nr. 158) jest mniejszy od $\frac{1}{3}$ a większy od $\frac{2}{7}$ więc różnica między jednym z ułamów $\frac{1}{3}$ lub $\frac{2}{7}$ i $\frac{122}{409}$ musi być mniejsza od różnicy między ułamkami $\frac{1}{3}$ i $\frac{2}{7}$ pomiędzy któremi środkuje ułamek $\frac{122}{409}$.

Przykłady dla wprawy.

1) Ułamek $\frac{1947}{3359}$ rozwinąć w ułamek ciągły. (*Odp.* Mianownikami ułamków składowych są: 1, 1, 2, 1, 1, 1, 3, 2, 1, 1, 2, 3)

2) Ułamek $\frac{1177}{3270}$ rozwinąć w ułamek ciągły. (*Odp.* Mianownikami ułamków składowych są: 2, 1, 3, 1, 1, 25, 1, 1, 2).

3) Ułamek $\frac{351}{965}$ rozwinąć w ułamek ciągły. (*Odp.* Mianownikami ułamków składowych są: 2, 1, 2, 1, 87).

4) Liczbę $\frac{338649}{65225}$ rozwinąć w ułamek ciągły. (*Odp.* Prócz całości, mianownikami ułamków składowych są: 5, 4, 1, 4, 5).

5) Znaleść wszystkie przybliżone wartości dla ułamku $\frac{835}{2617}$. (*Odp.* Temi przybliżonemi wartościami są: $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{7}{22}$, $\frac{15}{47}$, $\frac{82}{257}$).

6) Znaleść wszystkie przybliżone wartości dla liczby $\frac{1103}{887}$. (*Od.* Temi przybliżonemi wartościami są: 1, $\frac{5}{4}$, $\frac{46}{37}$, $\frac{97}{78}$, $\frac{143}{115}$, $\frac{240}{193}$).

7) Znaleść przybliżone wartości dla ułamku $\frac{51}{260}$. (*Odp.* Temi przybliżonemi wartościami są: $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{10}{51}$.)

8) Znaleść przybliżone wartości dla liczby $\frac{648}{385}$. (Temi przybliżonemi wartościami są: 1, 2, $\frac{5}{3}$, $\frac{32}{19}$, $\frac{69}{41}$, $\frac{170}{101}$, $\frac{239}{142}$).

9) Dla ułamku $\frac{1001}{7923}$ znaleść przybliżoną wartość prawdziwą do $\frac{1}{100}$. (*Odp.* Tą przybliżoną wartością jest $\frac{11}{87}$.

10) Znaleść wszystkie przybliżone wartości dla ułamku 0,00084. (*Odp.* Temi przybliżonemi wartościami są $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{1190}$ $\frac{2}{2381}$ $\frac{21}{25000}$. NB. Należy pierwéj dany ułamek zamienić na zwyczajny i uprościć.

11) Znaleść wszystkie przybliżone wartości dla liczby 4,00096. (*Odp.* Temi przybliżonemi wartościami są: 4, $\frac{4165}{1041}$, $\frac{4169}{1042}$, $\frac{12503}{3125}$).

12) Liczba 3,1415926 pokazuje przybliżony stosunek okręgu koła do średnicy; oznaczyć pierwsze cztery przybliżone wartości dla téj liczby. (*Odp.* Temi przybliżeniami są: 3, $\frac{22}{7}$, $\frac{333}{106}$ i $\frac{355}{113}$).

13) Znaleść za pomocą ułamków ciągłych przybliżoną wartość dla $\frac{113}{257}$ rubla zatém prawdziwą do $\frac{1}{100}$. (*Odp.* Przybliżona wartość tego ułamku jest $43\frac{28}{29}$ kop.)

Przestrogi przy odbywaniu kilku na raz działań ułamkowych.

161. Jeżeli po dzieleniu ułamków zwyczajnych następować będzie mnożenie albo po mnożeniu dzielenie, to w otrzymanym ilorazie lub iloczynie nie należy wyciągać całości z ułamku niewłaściwego; albowiem przy następującém mnożeniu lub dzieleniu, powtórnie potrzebaby całość z należącym do niéj ułamkiem wyrażać w postaci jednego ułamku: jeżeli zaś po mnożeniu lub dzieleniu, następować będzie dodawanie lub odejmowanie, to z otrzymanego ułamku niewłaściwego dogodniéj jest oddzielić całość od ułamku a potém dopiero wykonywać wskazane działanie.

Przykład. $\{(12\frac{5}{7}:8)\ 3\frac{2}{3}\}-2\frac{5}{12}=3\frac{23}{56}$

$12\frac{5}{7}:8=\frac{89}{7}:8=\frac{89}{56}$

$\frac{59}{56}\times 3\frac{2}{3}=\frac{89}{56}\times\frac{11}{3}=\frac{979}{168}=5\frac{139}{168}$

$5\frac{139}{168}-2\frac{5}{12}=5\frac{139}{168}-2\frac{70}{168}=3\frac{69}{168}=3\frac{23}{56}.$

162. Jeżeli przy dodawaniu i odejmowaniu ułamków zwyczajnych z dziesiętnemi, ułamki zwyczajne będą takiego rodzaju, że dadzą się zamienić na dziesiętne skończone, to niezbędnie należy je zamienić na ułamki dziesiętne, i działanie na ułamkach dziesiętnych wykonywać; jeżeli zaś ułamki zwyczajne nie dadzą się zamienić na dziesiętne skończone, co łatwo jest poznać z ich mianowników, natenczas ułamki dziesiętne należy zamienić na zwyczajne i działanie na ułamkach zwyczajnach wykonywać.

Ułamki zwrotowe należy zawsze zamieniać na ułamki zwyczajne.

Przykład 1. $(14{,}56-3\frac{13}{40}+0{,}0079+6\frac{5}{8}=17{,}8679.$

$\frac{13}{40}=0{,}325;\ 6\frac{5}{8}=6{,}625$

$14{,}56-3{,}335=11{,}235$

$11{,}235+0{,}0079+6{,}625=17{,}8679.$

Przykład 2. $(5{,}08+7\frac{11}{15}+0{,}028)-8\frac{2}{3}=4\frac{131}{750}$

$5{,}08=5\frac{8}{100}=5\frac{2}{25};\ 0{,}028=\frac{28}{1000}=\frac{7}{250}$

$5\frac{2}{25}+7\frac{11}{15}+\frac{7}{250}=12+\frac{60}{750}+\frac{550}{750}+\frac{21}{750}=12\frac{631}{750}$

$12\frac{631}{750}-8\frac{2}{3}=12\frac{631}{750}-8\frac{500}{750}=4\frac{131}{750}.$

163. Przy mnożeniu i dzieleniu ułamków zwyczajnych przez dziesiętne lub dziesiętnych przez zwyczajne nie ma potrzeby zamieniać ułamków zwyczajnych na dziesiętne ani dziesiętnych na zwyczajne, lecz postępować według zasad podanych przy mnożeniu i dzieleniu ułamków zwyczajnych, uważając ułamki dziesiętne za całości; np. $8{,}05\times\frac{7}{9}=\frac{56{,}35}{9}$; $8{,}05:\frac{7}{9}=\frac{72{,}45}{7}$; $\frac{5}{6}\times 0{,}009=\frac{0{,}045}{6}$; $\frac{5}{6}:0{,}009=\frac{5}{0{,}054}$ i t. p. Poczém, jeżeli na tém ma być skończone działanie, albo jeżeli po niém ma następować dodawanie lub odejmowanie, to należy jeszcze wykonać dzielenie licznika przez mianownik; jeżeli zaś ma następować mnożenie lub dzielenie, to otrzymane wyrażenie należy pozostawić w postaci ułamku zwyczajnego.

Przykład 1. $\{(0{,}027:6\frac{4}{5})\times 5\frac{2}{3}\}:100=0{,}000225$

$$0{,}027:6\frac{4}{5}=0{,}027:\frac{34}{5}=\frac{0{,}135}{34}$$

$$\frac{0{,}135}{34}\times 5\frac{2}{3}=\frac{0{,}135}{34}\times\frac{17}{3}=\frac{2{,}295}{102}$$

$$\frac{2{,}295}{102}:100=\frac{0{,}02295}{102}=0{,}000225$$

Przykład 2. $(\{(9\frac{5}{8}+3{,}437):2\frac{3}{5}\}-1\frac{7}{12})\times 2{,}05=7{,}05305128\ldots$

$$9\frac{5}{8}=9{,}625;\quad 9{,}625+3{,}437=13{,}062$$

$$13{,}062:2\frac{3}{5}=13{,}062:\frac{13}{5}=\frac{65{,}31}{13}=\frac{6531}{1300}=5\frac{31}{1300}$$

$$5\frac{31}{1300}-1\frac{7}{12}=5\frac{93}{3900}-1\frac{2276}{3900}=4\frac{3993}{3900}-1\frac{2275}{3900}=3\frac{1718}{3900}$$

$$3\frac{1718}{3900}\times 2{,}05=\frac{13418}{3900}\times 2{,}05=\frac{27506{,}9}{3900}=7{,}05305128\ldots$$

Przykłady dla wprawy.

1) $(\{(9\frac{5}{12}-3\frac{1}{6}):4\}2\frac{3}{4})+18\frac{2}{3}+\frac{5}{8}=?\ \ldots\ldots\ldots\ (23\frac{113}{192})$.

2) $\dfrac{12\frac{5}{9}+(2\frac{1}{3}\times 4\frac{5}{6})}{8:3\frac{1}{5}}=?\ \ldots\ldots\ldots\ 9(\frac{8}{15})$.

3) $\dfrac{(13\frac{5}{8}-2\frac{1}{3})\ (7\frac{11}{30}:\frac{4}{7})}{(1\frac{3}{4}+\frac{5}{6}-\frac{1}{3}):2\frac{1}{2}}=?\ \ldots\ldots\ldots\ (161\frac{1925}{2502})$.

4) $(4\frac{5}{6}\times 5\frac{2}{5})+(6:7\frac{3}{10})+(14\frac{5}{9}-9\frac{7}{15})=?\ \ldots\ldots\ldots\ (32\frac{71}{6570})$

5) $\{(14-9\frac{7}{12})\ 5\frac{1}{6}\}:\{3\frac{5}{8}+7\frac{7}{24}\}=?\ \ldots\ldots\ldots\ (2\frac{71}{786})$.

6) $(\{(8\frac{1}{3}:3\frac{5}{6})2\frac{4}{5}\}\ \frac{1}{12})-\frac{11}{23}=?\ \ldots\ldots\ldots\ (\frac{2}{69})$.

7) $\{(6\frac{3}{8}-4\frac{7}{20}-5\frac{1}{3}+10\frac{11}{30}-7+8\frac{4}{15}):2\frac{4}{5}\}\ 3\frac{2}{7}=?\ \ldots\ldots\ (3\frac{101}{112})$.

8) $(23{,}05-7\frac{5}{16}-(6\frac{9}{25}+3{,}127-\frac{3}{8})=?\ \ldots\ldots\ (6{,}6255)$.

9) $12\frac{3}{50}-4{,}002+3\frac{7}{40}-6{,}0162-\frac{3}{4}=?\ \ldots\ldots\ (4{,}4668)$.

10) $(16-9\frac{3}{7})+7{,}048+4\frac{2}{3}=?\ \ldots\ldots\ldots\ (18\frac{751}{2625})$.

11) $4\frac{7}{15}-5{,}096+13\frac{5}{9}+0{,}468-0{,}4-7\frac{5}{6}=?\ \ldots\ldots\ (5\frac{181}{1125})$.

12) $(19{,}4+15\frac{5}{7})+42{,}3\dot{0}\dot{9}\ldots-25\frac{7}{15})+9{,}3021=?\ \ldots\ (29\frac{587}{707})$.

13) $\{(0{,}06:7\frac{3}{7})\ \frac{5}{9}\}:0{,}001=?\ \ldots\ldots\ldots\ (4{,}487\ldots)$.

14) $\{(5\frac{7}{12}\times 0{,}001):7{,}04\}\ 6\frac{3}{7}=?\ \ldots\ldots\ldots\ (0{,}00327\ldots)$.

15) $\dfrac{\{(14{,}02+7\frac{7}{15}):0{,}0085\}\ 9\frac{1}{3}}{1{,}01}=?\ \ldots\ldots\ (2359320{,}261\ldots)$.

16) $\dfrac{\{(0{,}0625+7\frac{13}{30})\ 8{,}004\}-49{,}0987}{9\frac{2}{7}}=?\ \ldots\ (127049\ldots)$.

PODZIAŁ MIAR, WAG I MONET KRAJOWYCH.

Miary długości czyli linijne.

Zasadniczą jednostką miar długości jest *sażeń*.

Sażeń w handlu dzieli się na 3 arszyny, *arszyn* na 16 *werszków*.

Sażeń w inżynierskich robotach dzieli się na 7 stóp, *stopa* na 12 cali, *cal* na 10 *linij*.

Jeometrowie używają łańcucha, którego długość wynosi 10 sażeni; każdy sażeń składa się z siedmiu ogniw długich na stopę.

Odległości drożne rachują na wiorsty.

Wiorsta ma 500 sażeni.

Miary powierzchni.

Zasadniczą jednostką tych miar jest *sażeń kwadratowy* zawierający 49 stóp kwadratowych, *stopa kwadratowa* zawiera 144 cali kwadratowych, *cal kwadratowy* 100 *linij kwadratowych*.

Dziesiatyna zawiera 2400 sażeni kwadratowych.

Dziesiatyna jest to prostokąt mający długości 60 sażeni a szerokości 40 sażeni, albo mający długości 80 sażeni a szerokości 30 sażeni.

Wiorsta kwadratowa zawiera sażeni kwadratowych 250000.

Miary objętości.

Miary te są trojakiego rodzaju:

1. Służące do obliczania mas ziemi przy robotach grabarskich, kamieni i murów w budowlach, drzewa opałowego i t. p. Tych jednostką zasadniczą jest *sażeń sześcienny* dzielący się na 343 stóp sześciennych; *stopa sześcienna* dzieli się na 1728 cali sześciennych, *cal sześcienny* na 1000 *linij sześciennych*.

2. Służące do mierzenia ciał sypkich; tych jednostką jest *czećwierć* zawierająca w sobie 8 czećwierzyków; *czećwierzyk* zawiera 8 garncy, a *garniec* 4 *kwarty*.

Łaszt zawiera w sobie 12 czećwierci.

3. Służące do mierzenia ciał ciekłych; tych jednostką zasadniczą jest *wiadro*, zawierające 10 krużek, *krużka* zawiera w sobie 10 *czarek*.

Beczka ma w sobie 40 wiader.

Wagi.

a) *Handlowe.*

Jednostką zasadniczą wag jest *funt*, dzielący się na 96 zołotników, a *zołotnik* na 96 *doli*. Funt dzieli się także na 32 łutów, a *łut* na 3 zołotniki.

Berkowiec zawiera 10 pudów; *pud* 40 funtów.

b) *Aptekarskie.*

Funt aptekarski dzieli się na 12 uncyj, *uncya* zawiera 8 drachm; *drachma* 3 skrupuły; *skrupuł* 20 *granów*.

Funt aptekarski równy jest 84 zołotnikom miary handlowéj, uncya zaś 7 zołotnikom tejże miary.

Pieniądze.

Jednostką zasadniczą pieniędzy jest *rubel*, dzielący się na 100 kopiejek.

Monety srebrne w obiegu będące są: rubel, półrubel, sztuki po 25 kopiejek, sztuki po 20 kopiejek, sztuki po 10 i po 5 kopiejek. Półrubel zowie się inaczéj *półtynnikiem;* sztuka mająca 25 kopiejek *czećwiertakiem;* sztuka mająca 20 kopiejek *dwugrzywiennikiem;* sztuka mająca 10 kopiejek *grzywiennikiem;* a sztuka mająca 5 kopiejek *piataczkiem*.

Monetą zaś złotą jest *półimperyał* zawierający 5 rubli srebrnych. W kursie monety złotéj do każdego rubla dodaje się 3 kopiejek, zatém półimperyał płaci się po 5 rubli i 15 kopiejek.

Miary i wagi, które były używane w Królestwie Polskiém.

Miary długości.

Jednostką zasadniczą tych miar był *łokieć*.

Łokieć w handlu dzielił się na 4 ćwierci; *ćwierć* na 6 cali.

W robotach inżynierskich, łokieć dzielił się na 2 stóp, *stopa* na 12 cali; *cal* na 12 linij; *linja* na 2 *milimetry.*

Sążeń zawierał w sobie 3 łokci albo 6 stóp.

Jeometrowie do mierzenia długości, używali *łańcucha*, podzielonego na 10 pręcików, każdy *pręcik* dzielił się na 10 *ławek* albo *cali mierniczych.*

Pręt równał się $7\frac{1}{2}$ łokcia czyli 15 stopom.

Miary powierzchni.

Jednostką zasadniczą tyc hmiar był *łokieć kwadratowy* dzielący się na 4 stopy kwadratowe, każda zaś *stopa kwadratowa* dzieliła się na 144 *cali kwadratowych.*

Sążeń kwadratowy obejmował 9 *łokci kwadratowych* albo 36 *stóp kwadratowych.*

W miernictwie zaś główną jednostką był *pręt kwadratowy. Morg* obejmował 300 prętów kwadratowych, a *włóka* 30 morgów, albo 9000 prętów kwadratowych.

Miary objętości.

1. Do obliczania murów, robót grabarskich, kamieniarskich i t. p. używali *stopy sześciennéj* podzielonéj na 1728 *cali sześciennych. Łokieć sześcienny* obejmował 8 stóp sześciennych. *Sążeń sześcienny* obejmował 27 łokci sześciennych albo 216 stóp sześciennych.

2. Do mierzenia ciał sypkich i ciekłych używali *kwarty.*

Kwarta zawierała 4 kwaterki.

Kwaterka zawierała 2 półkwaterki.

Garniec zawierał 4 kwarty.

Ćwierć zawierała 8 garncy.

Korzec zawierał 4 ćwierci albo 32 garnce.

Beczka zawierała 25 garncy.

Łaszt zawierał 30 korcy.

Rzeczy sypkie mierzyły się na korce, ćwiercie i garnce, rzeczy ciekłe n abeczki, garnce, kwarty i kwaterki. Łaszt był miarą handlową wyłącznie do zboża.

W a g i.

Główną jednostką był *funt.* W handlu rachowano na centnary, kamienie, funty i łuty. *Centnar* zawierał 4 kamienie; *kamień* zawierał 25 funtów; *funt* zawierał 32 łutów.

W aptekarstwie, funt dzielono na 16 uncyj; *uncyą* na 8 drachm, *drachmę* na 3 skrupuły, *skrupuł* na 24 *grany*.

Pieniądze.

Jednostką zasadniczą pieniędzy był *złoty* zawierający 30 *groszy*. Rachowano także na dukaty i talary, lubo te monety były tylko rachunkowe; dukat w złocie liczył się za 20 złotych, dukat w srebrze 18 złotych, talar za 6 złotych.

Rubel obecnie w biegu będący, równy jest 200 groszom.

Podział czasu.

Przeciąg czasu obejmujący 100 lat, zowie się *wiekiem.*

Rok zwyczajny liczy się po 365 dni. Po każdych trzech latach zwyczajnych, następujący rok czwarty zowie się przestępnym i ten ma dni 366. Liczba oznaczająca rok przestępny jest w zupełności podzielna przez 4.

Rok dzieli się jeszcze na 12 miesięcy.

Nie wszystkie miesiące obejmują jednakową liczbę dni i tak: Styczeń, Marzec, Maj, Lipiec, Sierpień, Październik i Grudzień mają po 31 dni; Kwiecień, Czerwiec, Wrzesień i Listopad po 30 dni, a Luty w roku zwyczajnym ma dni 28 a przestępnym 29.

Każde 7 dni zowie się tygodniem. W całym roku jest okrągłą liczbą 52 tygodni.

Dzień czyli właściwie doba, dzieli się na 24 godzin, godzina 60 minut, a minuta na 60 sekund.

Miary handlowe.

W handlu papier sprzedają na bele, ryzy, libry i arkusze.

Bela ma ryz 10; *ryza* liber 20; *libra* arkuszy 24.

Powszechnie przyjęto jest rachować niektóre rzeczy na kopy, mendle i tuziny.

Kopa jest to 60 sztuk; *mendel* jest to 15 sztuk; *tuzin* jest to 12 sztuk.

KONIEC.