Jeometrya
Kurosz
N° 76. u. J. J.

II. F. ff.

Vinroze

JEOMETRYA

ELEMENTARNA.

DLA

SZKOŁ WYDZIAŁOWYCH

I PODWYDZIAŁOWYCH.

UŁOZONA

PRZEZ ONUFREGO LEWOCKIEGO

CZŁONKA KOMMISSYI RZĄDOWÉY WYZNAŃ RELIGIYNYCH I OŚWIECENIA PUBLICZNEGO WIZYTATORA JENERALNEGO JNSTYTUTOW NAUKOWYCH.

Wydanie drugie.

WARSZAWA.

W DRUKARNI K. R. W. R.

1830.

Za pozwoleniem Cenzury Rządowéy.

PRZEDMOWA.

*rzepisany plan nauk dla szkół wy-
ziałowych, oddawna czuć dawał po-
ebę elementarney Jeometryi, którab y
teoryi łączyła praktykę, i tak była
ótką, iżby w tych szkołach zupełnie
ończyć się mogła.*

*Tey potrzebie, żadne z dzieł w ięzyku
skim, iak np. Jeometrya Euklidesa,
zandra i Lacroix zaradzić dotąd nie-
gło,* naprzód *dlatego: że dzieła te
ymuią samą tylko teoryą;* powtóre,
*każde z nich, pomimo zalet sobie wła-
vych, zawieraiąc niektóre prawdy tru-
em i długim sposobem dowiedzione, inne
nie maiące prawie żadnego przysto-
vania, tak iest obszerne, iż w szkołach
działowych, choćby nawet od klassy
rwszey zaczynane, wyłożyćby się cał-
vicie nie dało.*

*eometrya praktyczna X. Zaborowskie-
nie odpowiada także zamiarowi tych
ół, iuż ze względu na obszerność dzie-
iuż dlatego, że nie obeymuie wykła-
teoryi.*

Z tych powodów, wziąwszy w pomoc dzieła wspomnionych autorów tudzież Bezouta, Lemoina, Ozanama, Belavena, i Lefevra, ułożyłem ninieysze dzieło, zawieraiące wszystkie główne prawdy elementarney ieometryi, ściśle, i nayprościey ile być może dowiedzione, i do praktyki zastosowane. Dzieło to, iak mniemam, zdoła dostatecznie usposobić uczniów szkół wydziałowych do słuchania wyższych części matematyki, i przygotować ich do wszelkich powołań technicznych, iakieby sobie po ukończeniu tych szkół, obrać chcieli.

Wypadało mi wykład teoryi przedzielać zastosowaniami dlatego, aby z nich korzystać mogli i tacy uczniowie, którzy zawód szkolny częstokroć w klassie III kończyć zwykli. Starałem się przytém, w całym ciągu dzieła utrzymać związek między prawdami, i dowodzenia ich opierać na poprzedzaiących: żeby uczący się, przy nabywaniu praktycznych wiadomości, idąc w teoryi za pasmem porządnych i ścisłych rozumowań, mogli przez nie stopniowo rozwiiać swoie poięcie, i kształcić władze umysłowe.

POCZĄTKI JEOMETRYI

XIĘGA I.

ROZDZIAŁ I.

Opisania (definicye).

I. Wszystkie rzeczy podpadaiące pod zmysły są *rozciągłe;* toiest maią trzy wymiary: *długość, szerokość* i *wysokość.*

Przedmiotem Jeometryi iest mierzenie *rozciągłości.*

Lubo rozciągłość ma zawsze trzy wspomnione wymiary, można iednak uważać w niey ieden tylko z nich, albo dwa razem.

II. Długość uważana bez szerokości nazywa się *liniią;* taka np. iest długość drogi, sznura, i t. d.

Końce linii zowią się *punktami.* Punkt nie ma żadney rozciągłości.

III. *Liniia prosta,* iestto naykrótsza odległość iednego punktu od drugiego. Tab. 1.

IV. Wszelka liniia AEB, która nie iest prosta, iak liniia AB, ani złożona z liniy prostych czyli łamana, iak liniia ACDB, nazywa się *liniia krzywa.* Fig. 1.

Z opisania linii prostey wypada:

1ód *że liniia krzywa AEB, albo liniia łamana ACDB, iest dłuższa od linii prostey AB;* 2re *że miara prawdziwą odległości dwóch* *punktów iest liniia prosta, która ie łączy;* 3cie, *że od iednego punktu do drugiego, iedną tylko liniią prostą poprowadzić można;* 4te *że dwa punkta oznaczaią położenie linii prostey, a zatem dwie liniie proste, gdy maią dwa końce* spólne, *przystaią do siebie.*

V. *Powierzchnia* iestto rozciągłość, maiąca długość i szerokość, bez wysokości czyli grubości; taką powierzchnią iest np: pole, płac ogrodu, i t. d.

VI. *Płaszczyzna* nazywa się ta powierzchnia, na którey położona liniia prosta, i w różne strony obracana, zawsze dotyka się tey powierzchi we wszystkich swoich punktach. Do takiey powierzchni zbliża się np. powierzchnia dobrze wygładzoney tablicy, zwierciadła wypolorowanego, i t. d.

VII. Wszelka powierzchnia która nie iest płaska, ani złożona z powierzchni płaskich, zowie się *powierzchnią krzywą*; taka iest np. powierzchnia góry, kuli, i t. d.

VIII. *Bryłą* nazywa się to, co ma trzy wymiary rozciągłości; i tak kamień, góra, stół, i t. d., są bryłami. Bryły iedne są ograniczone powierzchniami płaskiemi, drugie krzywemi, inne iednemi i drugiemi razem. Można zatem uważać powierzchnie za granice brył, liniie za granice powierzchni, a punkta za granice liniy.

IX. Liniia prosta iest miarą wszelkich liniy.

Mierzyć liniią, iestto dochodzić ile razy mieści się w niey liniia prosta wzięta za iedność, czyli za miarę, iaką iest np. łokieć. Miary liniiowe używane pospolicie są: sznur, sążeń, łokieć i t. d.

X. *Okrąg koła*, iestto liniia krzywa Fig. 2. ADBEA, maiąca na tey samey płaszczyznie, wszystkie punkta równo oddalone od punktu C wewnątrz tey linii położonego, który zowie się *środkiem*.

Płaszczyzna tą liniią krzywą zamknięta nazywa się *kołem*.

XI. Część iakakolwiek okręgu koła zowie się *łukiem*.

Można uważać okrąg koła iako zakreślony końcem linii prostey CB, obracaiącey się na tey samey płaszczyznie około punktu C, póki nie powróci na mieysce z którego rozpoczęła swóy obrót.

XII. Każda z liniy prostych CA, CD, i t. d. ze środka C do okręgu koła poprowadzonych zowie się *promieniem*.

Wszelka liniia prosta AB, przechodząca przez środek koła, i wspieraiąca się dwoma końcami na iego okręgu, nazywa się *średnica*.

Z opisania XI. wypada, że wszystkie promienie koła są równe sobie; i że wszystkie iego średnice są dwa razy większe od promienia, a przeto są równe między sobą.

XIII. *Kąt*, iestto nachylenie się ku sobie Fig. 3. dwóch liniy prostych AB, AC, spotykaiących się w iednym punkcie A; ten punkt zowie się *wierzchołkiem* kąta, a liniie AB, AC są iego *ramionami*.

Kąt czyta się iedną głoską A, przy wierzchołku iego położona, albo trzema głoskami BAC, lub CAB, bacząc na to, aby głoska położona przy wierzchołku wymowioną była we środku.

Fig. 4. XIV. Gdy liniia prosta AB, spotykaiąc drugą liniią prostą CD, czyni z nią kąty przyległe BAC, BAD, równe, każdy z tych kątów zowie się *prostym*, a liniia *prostopadła* do linii CD.

Fig. 5. XV. Każdy kąt BAC mnieyszy od kąta prostego, nazywa się *kątem ostrym*; a każdy kąt DEF większy od kąta prostego, zowie się *kątem rozwartym*.

XVI. *Figura płaska*, iestto płaszczyzna ze wszech stron liniiami zamknięta.

Pewniki.

I. Dwie ilości równe trzeciey, są równe sobie.

II. Gdy do równych ilości dodane będą ilości równe, wypadną stąd summy równe.

III. Gdy od równych ilości odięte będą ilości równe, pozostaną różnice równe.

IV. Gdy do nierównych ilości dodane będą ilości równe, wypadną summy nierówne.

V. Gdy od nierównych ilości odięte będą ilości równe, wypadną różnice nierówne.

VI. Dwie linii, albo dwie powierzchnie, są równe sobie, gdy przeniesione iedna na drugą, przystaią we wszystkich punktach do siebie.

VII. Wszystkie kąty proste są równe sobie.

Uwaga. Dla skrócenia, używać tu niekiedy będziemy znaków arytmetycznych, których znaczenie obiaśniamy. I tak:

$A=B$ znaczy że A iest równe B.

$A<B$ wyraża że A iest mnieysze od B.

$A>B$ znaczy że A większe od B.

Znak $+$ skazuie dodawanie i czyta się *więcey*.

Znak — wyraża odciąganie i czyta się *mniey*; i tak A + C wyraża summę ilości A i B, zaś A — B oznacza różnicę ilości A i B, czyli resztę, która zostaie po odciągnieniu B od A.

Znak X skazuie mnożenie; i tak A X B wyraża iloczyn z A pomnożonego przez B.

Wyrażenie A X (B+C — D) oznacza iloczyn z A przez ilość B + C — D. Gdyby zaś wypadło mnożyć A+B przez A—B+C, oznaczylibyśmy wypadły stąd iloczyn przez (A+B) X (A—B+C); wszystko, co iest w nawiasie zamknięte uważa się za iedną ilość.

W trzech pierwszych Xięgach zastanawiać się będziemy nad figurami płaskiemi, czyli nakreślonemi na powierzchni płaskiey.

1. *Twierdzenie.*

Wszelka liniia prosta CD, spotykaiąc drugą liniią prostą AB, czyni z nią dwa kąty przyległe ACD, DCB, których summa iest równa dwóm kątóm prostym. Fig. 6.

Bo z punktu C, wystawiwszy sobie poprowadzoną inną liniią prostą CE, czyniącą z liniią AB, kąty przyległe ACE, ECB, równe, każdy z tych kątów będzie prosty (opis. XIV); a że kąt ACD=ACE+ECD, więc, dodawszy do obu stron kąt DCB, będzie ACD + DCB=ACE + ECD+DCB, (pew. II); iest zaś kąt ACE prosty, a dwa kąty ECD, DCB składaią drugi kąt prosty, więc summa kątów ACD, DCB równa iest dwóm kątóm prostym.

Wniosek I. Gdy dwa kąty przyległe ACD, DCB, razem wzięte czynią dwa kąty proste, wtedy ramiona ich zewnętrzne AC, CB, składaią iedną i tęż samą liniią prostą AB.

Fig. 7. *Wniosek* II. Wszystkie kąty po sobie idące, BAC, CAD, DAE, EAF, utworzone z iedney strony linii prostey BF, razem wzięte, czynią dwa kąty proste; gdyż summa ich równa się summie dwóch kątów przyległych BAC, CAF.

2. *Twierdzenie.*

Fig. 8. *Dwie linije proste AB, DE, przecinaiące się z sobą w iakimkolwiek punkcie C, czynią kąty w wierzchołku przeciwległe równe sobie; toiest, będzie kąt ACD=ECB i kąt ACE=DCB.*

Bo kąt DCA+ACE=2 kątóm prostym (twier. 1); kąt ACE+ECB=2 kątom prostym: więc DCA + ACE =ACE +ECB (pew. I); odiąwszy spólnie kąt ACE, pozostanie kąt DCA=ECB (pew. III). Podobnie dowieśdź można, że kąt ACE=DCB.

Wniosek. Gdy każdy z dwóch kątów DCA, ECB, z kątem trzecim ACE, czyni summę równą dwóm kątóm prostym; dwa kąty DCA, ECB są równe sobie.

Uwaga. Dwie liniie proste AB, DE, przecinaiące się w punkcie C, tworzą przy tym punkcie 4 kąty, których summa waży 4 kąty proste; bo dwa kąty ACE, BCE razem wzięte, ważą dwa kąty proste; i dwa drugie ACD, DCB tyleż ważą.

W ogólności, gdy ilekolwiek liniy prostych CA, CB, i t. d. (fig. 8 bis), spotyka się z sobą w iednym punkcie C; summa wszystkich po sobie idących kątów ACB, BCD, DCE, ECF, FCA, będzie równa 4 kątóm prostym. Bo poprowadziwszy przez punkt C dwie liniie do siebie prostopadłe, utworzą się 4 kąty proste, zaymuiące tęż samą przestrzeń co i kąty ACB, BCD, i t.d

ROZDZIAŁ II.

O ROWNOSCI TROYKĄTOW.

Opisania.

I. Płaszczyzna trzema liniiami zamknięta, zowie się *tróykatem*.

II. Tróykąt, uważany co do boków, nazywa się *równoboczny*, gdy ma trzy boki równe (fig. 10); *równoramienny*, gdy ma dwa boki równe (fig. 9); *róznoboczny* gdy ma trzy boki nierówne (fig. 11).

III. Tróykąt, uważany co do kątów, nazywa się *prostokątny* gdy ma kąt ieden prosty; *ostrokątny*, gdy ma trzy kąty ostre; *rozwartokątny*, gdy ma kąt ieden rozwarty.

W tróykącie prostokątnym, bok AC przeciwległy kątowi prostemu zowie się *przeciwprostokątną* (fig. 11).

3. Twierdzenie.

Dwa tróykąty ABC, DEF są równe sobie, gdy maią dwa boki odpowiednie równe, i kąty zawarte temi bokami równe; toiest, gdy bok AB=DE, AC=DF, i kąt A=D, będzie tróykąt ABC=DEF. Fig:12

Jakoż wystawiwszy sobie tróykąt ABC położony na trókącie DEF, tak, aby punkt A padł na punkt D, i bok AB poszedł po boku DE, padnie i punkt B na punkt E, gdyż bok AB=DE z założenia; i bok AC padnie na bok DF, gdyż kąt A=D; nadto, ponieważ bok DF=AC, więc punkt C padnie na punkt F, a zatem i liniia prosta BC przystanie do linii EF (opis. IV), i cały tróykąt ABC przystanie do tróykąta DEF, i będzie mu równy (pew. VI).

Wniosek. Z tego, że trzy rzeczy w dwóch tróykątach są równe, toiest, że kąt A=D, bok AB=DE, i bok AC=DF, wypada: że trzy inne także są równe sobie, toiest, kąt B=E, kąt C=F, i bok BC=EF.

4. *Twierdzenie.*

Fig.12 *Dwa tróykąty ABC, DEF, maiące po iednym boku równym, i po dwa kąty przyległe temu bokowi odpowiednie równe, są równe sobie: to iest, gdy bok BC=EF, kąt B=E, a kąt C=F; będzie tróykąt ABC = DEF.*

Albowiem przeniosłszy tróykąt ABC na tróykąt DEF, tak, aby punkt B padł na punkt E, a bok BC poszedł po boku EF, padnie i punkt C na punkt F, gdyż bok BC=EF; nadto, ponieważ kąt B=E, więc bok AB weźmie kierunek DE, tak, że punkt A znaydzie się w iakimkolwiek punkcie linii ED. Podobnie, dla równości kąta C z kątem F, liniia CA weźmie kierunek FD, i punkt A znaydzie się w którymkolwiek punkcie boku FD; punkt więc A, znayduiąc się razem na dwóch liniiach ED, DF, znaydować się musi na ich spólnem przecięciu D, zatem dwa tróykąty ABC, DEF, przystaną do siebie i będą sobie równe (pew. VI).

Wniosek. Z tego, że w dwóch tróykątach trzy rzeczy są równe, toiest że BC=EF, B=E, C=F, wypada, że trzy inne są także równe, toiest bok AB=DE, AC=DF, kąt D=A.

5. *Twierdzenie.*

Fig.12 *W każdym tróykącie ABC, bok którykolwiek BC, iest mnieyszy od summy dwóch innych boków AB, AC.*

Bo bok BC, iest naykrótszą odległością punktu B od punktu C (opis. III); więc bok BC iest mnieyszy od BA+AC.

6. *Twierdzenie.*

Jeżeli z punktu O, obranego wewnątrz Fig. 13 *tróykąta ABC, poprowadzone są do końców iednego boku BC, dwie liniie proste OB, OC; będzie summa tych liniy mnieysza od summy dwóch innych boków BA, AC*

Bo przedłużywszy bok BO, do spotkania się z bokiem AC w punkcie D, będzie liniia OC<OD+DC (twier. 5.); do tych ilości nierównych dodawszy spólnie BO, będzie BO+OC<OD+DC+OB (pew. IV.), czyli BO+OC<BD+DC. Dla podobney przyczyny, będzie BD<AB+AD; dodawszy spólnie DC, będzie BD+DC<BA+AC, Aże okazaliśmy, że BO+OC<BD+DC, więc tem bardziey iest BO+OC<BA+AC.

7. *Twierdzenie.*

Jeżeli dwa boki AB, AC, tróykąta ABC, Fig. 14 *są równe dwom bokom DE, EF tróykąta EDF, i ieżeli kąt BAC zawarty między pierwszemi bokami, iest większy od kąta DEF zawartego między bokami drugiemi; mówię, że i bok trzeci BC pierwszego tróykąta, będzie większy od boku trzeciego DF tróykąta drugiego*

Albowiem położywszy tróykąt DEF na tróykąt ABC, tak, aby bok EF przystał do boku AC, zdarzyć się może, że punkt D, padnie wewnątrz tróykąta ABC, albo na bok iego BC, lub zewnątrz tróykąta ABC.

W tym przypadku, gdy punkt D pada wewnątrz tróykąta ABC, będzie podług twierdzenia poprzedzaiącego AD+DC<AB+BC; Fig. 14

odiąwszy z iedney strony AD, z drugiey AB=AD, pozostanie bok DC, czyli równy mu DF<BC (pew. V).

Fig. 15 W 2gim przypadku, gdy punkt D pada na bok BC, iest oczywista, że BC> DC=DF.

Fig. 16 W 3cim przypadku, gdy punkt D pada zewnątrz tróykąta ABC; będzie AB< BO+OA (twier. 5), i DC<DO+OC; zatem AB+DC<BC+DA. Odiąwszy z iedney strony AB, z drugiey DA=AB, pozostanie DC<BC (pew. V).

8. *Twierdzenie odwrotne.*

Fig. 14 *Jezeli dwa boki AB, AC tróykąta ABC, są równe dwóm bokom DE, EF, tróykąta EDF, lecz bok trzeci BC pierwszego tróykąta, iest większy od boku trzeciego DF drugiego tróykąta; będzie i kąt BAC przeciwległy bokowi BC, większy od kąta DEF przeciwległego bokowi DF.*

Bo gdyby nie był kąt BAC>DEF, byłby kąt BAC=DEF, lub BAC<DEF; w pierwszym więc razie, byłby bok BC=DF (twier. 3), w drugim zaś razie, byłby bok BC<DF (twier. 7); aże iedno i drugie sprzeciwiałoby się założeniu, zatem i kąt BAC>DEF.

9. *Twierdzenie.*

Fig. 12 *Dwa tróykąty ABC, DEF, maiące trzy boki odpowiednie równe trzem bokom, są równe sobie: toiest, gdy bok AB=DE, AC=DF i BC=EF, będzie kąt A=D, B=E, C=F, i tróykąt cały ABC=DEF.*

Albowiem gdyby był kąt A>od kąta D, ponieważ bok AB=DE, AC=DF, byłby więc bok BC>EF (tw. 7); podobnie, gdyby był kąt A<od kąta D, byłby bok BC<EF; aże

bok BC=EF z założenia, więc kąt A nie może być ani większy, ani mnieyszy od kąta D, iest więc iemu równy. Podobnym sposobem okazać można, że kąt B=E, i kąt C=F; zatem będzie tróykąt ABC=DEF.

Uwaga. Widzimy tu, że kąty równe A i D, leżą na przeciw boków równych BC, EF.

10. *Zagadnienie.*

Daną liniią prostą AB, podzielić na dwie równe części. Fig. 17

Z końców linii AB, promieniem większym od połowy linii AB, kreślę dwa łuki przecinaiące się w punkcie C, tudzież dwa drugie łuki przecinaiące się w punkcie D, i prowadzę liniią CD, która podzieli liniią AB, na dwie równe części w punkcie F. Gdyż poprowadziwszy liniie AC, CB, AD, DB: dwa tróykąty ACD, CDB, maiące bok AC=CB, bok AD=DB z wykreślenia, i bok CD spólny, są równe sobie (twier. 9), zatem kąt ACD=DCB. Dwa więc tróykąty ACF, BCF, maiące bok AC=CB, bok CF spólny, i kąty równe przy C, są równe sobie (twier. 3), zatem iest bok AF=FB; więc liniia AB, w punkcie F podzielona iest na dwie równe części.

11. *Zagadnienie.*

Z punktu D danego na linii prostey AB, wyprowadzić do tey linii prostopadłą. Fig. 18

Biorę DF=DB, i z punktów B i F, tym samym promieniem, kreślę dwa łuki przecinaiące się w punkcie C; punkt C z punktem D łączę liniią CD, która będzie prostopadłą żądaną. Bo poprowadziwszy liniie CB, CF; dwa tróykąty CDB, CDF, maiące bok CD spólny, bok DB=DF, i bok

BC=CF z wykreślenia, są równe sobie (twier. 9), a zatem kąt CDB=CDF; te zaś kąty są przyległe, więc liniia CD iest prostopadła do linii AB. (opis. XIV).

12. *Zagadnienie.*

Fig. 19 *Z punktu C danego za liniią AB, spuścić prostopadła do tey linii.*

Z punktu C, kreślę łuk przecinaiący liniią AB w punktach B i F, z punktów B i F, tym samym promieniem zakreślam dwa łuki przecinaiące się w punkcie G; punkta C i G łączę liniią CG, która będzie prostopadłą żądaną. Bo poprowadziwszy linie FC, CB, FG, BG; tróykąty FCG, BCG, maiące bok CG spólny, bok CF=CB, i FG=GB z wykreślenia, są równe sobie (twier. 9); zatem kąt FCD=DCB. Dwa więc tróykąty CDF, CDB, maiące bok CD spólny, bok CF=CB, i kąty równe przy C, są równe sobie (twier. 3), a w szczególności kąt FDC=BDC; te zaś kąty są przyległe, zatem liniia CD iest prostopadła do linii AB (opis. XIV).

13. *Twierdzenie.*

Fig. 20 *Jeżeli z punktu A wziętego za liniią DE, poprowadzimy do niey prostopadłą AB, tudzież pochyłe AE, AC, AD, do różnych punktów teyże linii: będzie 1ód prostopadła AB krótsza od każdey pochyłey; 2re dwie pochyłe AC, AE, poprowadzone z dwóch stron prostopadłey AB, w odległościach BC, BE równych, są równe sobie; 3cie z dwóch którychkolwiek pochyłych AC i AD, lub AE i AD, ta będzie dłuższa, która iest bardziey od prostopadłey oddalona.*

Bo 1óď. przedłużywszy prostopadłą AB tak, aby było BF=AB, i poprowadziwszy linie FC, BF; dwa tróykąty ABC, CBF, maiące bok CB spólny, bok AB=BF, i kąty przy B proste, są równe sobie (twier. 3), a w szczególności bok AC=CF. Aże liniia prosta ABF iest krótsza od złamaney ACF (twier. 5); zatem AB połowa ABF, iest krótsza od AC połowy ACF; więc prostopadła AB iest krótsza od każdey linii pochyłey.

2re. Założywszy że BE=BC, ponieważ dwa tróykąty ABE, ABC maią nadto bok AB spólny, i kąt ABE=ABC, są zatem równe sobie (twier. 3), więc AE=AC; przeto dwie pochyłe równo oddalone od prostopadłey są między sobą równe.

3e. Ponieważ summa boków AC, CF tróykąta ACF, iest mnieyszą od summy boków AD, DF tróykąta ADF (twier. 6), więc AC połowa ACF, iest krótsza od AD połowy ADF; zatem pochyłe naybardziey oddalone od prostopadłey są naydłuższe.

Wniosek I. Prostopadła AB będąc krótszą od każdey pochyłey, iest prawdziwą odległością punktu A od linii DE.

Wniosek II. Z punktu A wziętego za liniią DE, iedną tylko prostopadłą do tey linii poprowadzić można, gdyż przez dwa punkta A i B iedna tylko liniia prosta przechodzić może.

Wniosek III. Jeżeli liniia prosta CD, ze środka linii AB poprowadzona, iest do teyże linii prostopadła; wtedy każdy punkt O wzięty na linii pierwszey, iest równo oddalony od końców A i B linii drugiey. Fig. 21

Fig. 21 *Wniosek* IV. Wszelki punkt E wzięty za prostopadłą CD, nie iest równo oddalony od końców A i B linii AB. Bo poprowadziwszy linie EB, EA, i punkt O przecięcia się linii AE z prostopadłą, z punktem B złączywszy linią OB; ponieważ punkt O iest równo oddalony od punktów A, B, (wnio. 3), będzie $AO=OB$; aże w tróykącie EOB, iest $BE<OE+BO$, więc $BE<OE+OA$, czyli $BE<AE$.

14. *Twierdzenie.*

Fig. 22 *Dwa tróykąty prostokątne ABC, EDF, są równe sobie, gdy maią przeciwprostokątne BC, EF, równe, i bok którykolwiek $AB=DE$; albo, gdy maią przeciwprostokątne BC, DF, równe, i kąt którykolwiek $C=F$.*

W pierwszym przypadku, równość dwóch tróykątów byłaby widoczna, gdyby bok trzeci AC był równy bokowi trzeciemu EF. Lecz przypuśćmy, że te boki nie są równe, i że naprzykład bok $AC>EF$; na boku AC odciąwszy $AG=EF$ i poprowadziwszy BG; dwa tróykąty ABG, EDF, maiące bok $AB=DE$ z założenia, bok $AG=EF$ z wykreślenia, i kąt prosty $A=E$, są równe sobie (twier. 3), a w szczególności bok $BG=DF$; aże $DF=BC$ z założenia, więc $BG=BC$ (pew. 1): toiest pochyła bliższa prostopadłey AB, iest równa pochyłey bardziey oddaloney od tey prostopadłey, co być nie może (twier. 13); nie może zatem być, aby liniia AC była większą od EF; okazać można podobnie, że nie może być od niey mnieysza, iest więc iey równa.

W 2gim przypadku, położywszy tróykąt DEF na tróykąt ABC, tak, aby punkt F padł na punkt C, a bok EF poszedł po boku AC; dla różności kątów F, C, bok DF póydzie po boku BC, i punkt D padnie na punkt B, bo DF=BC z założenia: gdyby więc bok DE nie przystał do boku AB, lecz wziął inne położenie, iak iest BG; wtedy z punktu B, możnaby było wyprowadzić dwie prostopadłe do linii AC, co być nie może (twier. 13, wnio. 2); przystanie więc bok DE do boku AB, i będzie mu równy; zatem podług pierwszey części tego twierdzenia, iest tróykąt ABC równy tróykątowi DEF.

15. *Twierdzenie.*

W tróykacie równoramiennym AOB, kąty A i B, przeciwległe bokom OB, OA, równym, są sobie równe: i naodwrót, ieżeli kąt A=B, będzie bok OB=OA. Fig. 23

Bo 1od. z punktu O spuściwszy prostopadłą OC na bok AB; dwa tróykąty prostokątne AOC, OCB, maiące przeciwprostokątne AO, BO równe, i bok spólny OC, są równe sobie (twier. 14), zatem kąt A=B.

2re. Założywszy że kąt A=B, będzie bok OB=OA. Bo ieżeli te boki nie są równe, przypuśćmy że bok AO>OB; odciąwszy na AO bok AE=OB, i poprowadziwszy liniią EB; dwa tróykąty AEB, AOB, maiące bok AB spólny, bok AE=OB z wykreślenia, i kąty A, B, między temi bokami zawarte równe z założenia, są sobie równe (twier. 3); zatem tróykąt AEB mnieyszy, byłby równy tróykątowi AOB większemu, co być nie może: nie iest przeto bok AO większy od boku OB; pokażemy podobnie, że nie iest od niego mnieyszy, więc iest mu równy: a zatem tróykąt AOB iest równoramienny.

16. *Twierdzenie.*

Fig. 21 *Jeżeli z dwóch boków AE, EB tróykąta AEB, bok AE iest wiekszy od boku EB, będzie i kąt B przeciwległy bokowi AE, wiekszy od kąta A przeciwległego bokowi EB; i naodwrót, ieżeli kąt ABE iest większy od kąta A, będzie bok AE wiekszy od boku EB.*

Bo 1ód. ze środka C linii AB, wyprowadziwszy do niey prostopadłą DC, i punkt O, przecięcia się tey prosopadłey z liniią AE, złączywszy z punktem B liniią OB; dwa tróykąty AOC, OCB, maiące bok OC spólny bok AC=CB z wykreślenia i kąt prosty ACO=OCB, są równe sobie (twier. 3), zatem kąt A=OBC, aże kąt EBA iest większy od kąta OBC, a zatem od kąta A=OBC; więc w tróykącie AEB, kąt większy przeciwległy iest bokowi większemu.

2re. Załóżmy że kąt ABE iest większy od kąta A; gdyby bok AE nie był większy od boku EB, byłby bok AE<EB, albo bok AE=EB, więc w pierwszym razie, na mocy pierwszey części tego twierdzenia byłby kąt B<A; w drugim, kąt A=B (tw: 15); co iedno i drugie sprzeciwiałoby się założeniu: zatem iest AE>EB.

ROZDZIAŁ III.

O LINIACH ROWNOLEGŁYCH

Opisanie.

Dwie liniie proste nazywaią się *rów-nolegte*, gdy położone na tey samey płaszczyznie, i w obie strony iak naydaley przedłużone, zeyść się z sobą z żadney strony nie mogą.

17. *Twierdzenie.*

Dwie linie proste AC, BD, prostopadłe do linii trzeciey AB, są względem siebie równoległe. Fig. 24

Bo gdyby liniie AC, BD, zeszły się z sobą w iakimkolwiek punkcie O, byłyby dwie prostopadłe OA, OB, spuszczone z iednego punktu O, na liniią AB, co bydź nie może (twier. 13. wnio. 2); zatem dwie liniie proste AC, BD, i t. d.

Uwaga. Rzecz iest przez się widoczna, że ieżeli pochyła BE z liniią AB, czyni kąt EBA mnieyszy od kąta prostego ABD, ta pochyła BE z prostopadłą CA przedłużone, zeydą się nad liniią AB. Jeżeli zaś pochyła BF z liniią AB, czynią kąt FBA większy od kąta prostego ABD, pochyła BF z prostopadłą CA przedłużone, zeydą się pod liniią AB.

18. *Twierdzenie.*

Jeżeli dwie liniie proste AB, CD, przecięte od trzeciey EF, czynią z nią kąty CHF, BGE, równe, które się zowią kątami naprzemianległemi; lub ieżeli czynią dwa kąty EHD, EGB, równe, zwane kątami iednostronnemi odpowiadaiącemi; albo nakoniec, ieżeli czynią dwa kąty DHG, HGB, wewnętrzne iednostronne, równe summie dwóch kątów prostych: mówię: że w każdym z tych trzech przypadków, dwie liniie AB, CD, są względem siebie równoległe. Fig. 25

Bo ióд. przez środek M linii GH, poprowadziwszy prostopadłą LK do linii CD; dwa tróykąty LMH, GMK, maiące bok MH=GM z wykreślenia, kąty przy M wierzchołkiem przeciwległe równe, i kąt LHM=MGK z założenia, są równe sobie (twier. 4); zatem kąt L=K, aże kąt L, iest prosty z wykreślenia, więc takim iest i kąt K, zatem dwie liniie AB, CD, są prostopadłe do linii LK, przeto są względem siebie równolegle (twier. 17).

2. Założywszy, że kąt EHD=EGB; ponieważ kąt EHD=LHM (twier. 2), więc i kąt LHM=EGB (pew. 1), nadto kąty przy M są równe, i bok GM=MH; więc, dla tey samey przyczyny, co i w poprzedzaiącym przypadku, dwa tróykąty LMH, GMK są równe sobie, i dwie liniie AB,CD, są względem siebie równolegle.

3. Założywszy nakoniec, że kąt DHG+HGB=dwóm kątom prostym; ponieważ kąt DHG z kątem przyległym LHG, czyni także summę dwóch kątów prostych (twier. 1), więc kąt HGB=LHG (tw. 2 wn.), nadto kąty przy M są równe, i bok MH=GM, więc znowu iak w przypadku pierwszym, tróykąt LMH=GMK, i dwie liniie AB, CD, są względem siebie równolegle.

19. *Twierdzenie odwrotne.*

Fig. 25 *Jeżeli dwie liniie AB, CD, równolegle, przecina liniia trzecia EF, będą 1ód dwa kąty CHG, HGB naprzemianległe, równe; 2re. będą dwa kąty EHD, EGB iednostronne odpowiadaiące, równe; 3cie. dwa kąty DHG, HGB wewnętrzne iednostronne, będą równe summie dwóch kątów prostych.*

Bo 1ód. przez środek M linii GH, poprowadziwszy liniią LK prostopadłą do linii AB, a tem samem i do linii CD równoległey względem AB; dwa tróykąty LMH' MGK prostokątne, maiące kąty przy M równe (twier. 2), bok GM=MH z wykréślenia, są równe sobie (twier. 14); zatem kąty CHG, HGB naprzemianległe są równe.

2re. Ponieważ z dowodzenia kąt CHG=EGB, a iest kąt CHG=EHD, więc i kąt EHD=EGB (pew. 1); toiest, kąty iednostronne odpowiadaiące są równe sobie.

3cie. Kąt EHD=HGB, dodawszy spólnie kąt DHG, będzie kąt EHD+DHG=HGB+DHG (pew. 2); aże kąty EHD, DHG przyległe, są równe summie dwóch kątów prostych (twier. 1); więc i dwa kąty HGB, DHG wewnętrzne iednostronne, są także równe summie dwóch kątów prostych.

Wniosek. Jeżeli kąt DHG iest prosty, będzie takim i kąt HGB; azatem każda liniia prostopadła do iedney z dwóch liniy równoległych, iest prostopadła i do drugiey linii.

Uwaga. Widzimy tu, że z kątów zawartych między liniiami AB, CD, równoległemi, a liniią ie przecinaiącą EF, wszystkie kąty ostre są równe sobie, i wszystkie kąty rozwarte są między sobą równe.

20. *Twierdzenie.*

Dwie liniie równoległe AB, CD, zawarte między liniiami równoległemi AC, BD, są równe sobie. Fig 26

Bo poprowadziwszy liniią BC; dwa tróykąty ABC, DBC, maiące bok BC spólny, i po dwa kąty przy nim leżące odpowiednie równe; toiest, kat ACB=CBD, i kąt ABC=BCD (twier. 19), są równe sobie (twier. 4), zatem liniia AB=CD.

Wniosek I. Jeżeli dwie linie AB, CD, są równolegle i równe sobie; będą dwie liniie AC, BD łączące końce tych liniy, równe i równoległe względem siebie. Bo dwa tróykąty ABC, DCB, maiące bok BC spólny, bok AB=DC z założenia, i kąty ABC, BCD naprzemianległe równe, są sobie równe (tw. 4.), zatem bok AC=BD, i kąt ACB=CBD; a ponieważ to są kąty naprzemianległe, między liniami AC, BD, przeciętemi od linii trzeciey BC; więc liniia AC iest równoległa względem linii BD (twier. 18.)

Wniosek II. W figurze ABDC maiącey boki przeciwne równoległe, są też same boki równe, i kąty przeciwległe równe.

21. *Twierdzenie.*

Fig. 27 *Dwa kąty BAC, DEF, maiące ramiona AB i DE, AC i EF, odpowiednie równoległe, i skierowane w iedną stronę, są równe sobie.*

Bo, przedłużywszy DE, do spotkania się z AC w punkcie G, będą kąty DEF, DGC, iednostronne równe, iako zawarte między równoległemi EF, AC, przeciętemi od linii DEG; aże kąty iednostronne BAC, DGC, są także między sobą równe; więc kąt BAC=DEF (pew. 1).

22. *Twierdzenie.*

Fig. 28 *Dwie liniie AB, CD, równoległe względem linii trzeciey EF, są równoległe względem siebie.*

Jakoż, poprowadziwszy liniią PQR prostopadłą do EF; ponieważ liniia AB iest równoległa do EF, więc liniia PR iest prostopadła do AB (twier. 19. wnio.). Podobnie, ponieważ CD iest równoległa do EF, będzie PR prostopadła do CD; zatem dwie liniie AB, CD, będąc prostopadłe do trzeciey linii PQ, są względem siebie równoległe (twier. 17).

23. *Zagadnienie.*

Na daney linii prostey DE, i przy punkcie na niey danym D, wykreślić kąt równy kątowi danemu A. Fig. 29

Na ramionach kąta danego, obieram dwa iakiekolwiek punkta B, C, i prowadzę liniią BC. Na linii DE odcinam liniią DF=AC, i z punktu F, długością BC kreślę łuk, a z punktu D długością AB, kreślę łuk drugi; od punktu G przecięcia się tych łuków, do punktów D, F, prowadzę liniie GD, GF: będzie tróykąt DFG równy tróykątowi ABC, gdyż maią trzy boki odpowiednie równe; zatem kąt D=A (twier. 9).

24. *Zagadnienie.*

Przez punkt dany C, wzięty za liniią daną AB, poprowadzić równoległą do teyże linii. Fig. 30

Od punktu C, prowadzę liniią CD, przecinaiącą pod iakimkolwiek kątem liniią AB; przy linii CD i przy punkcie C, kreślę kąt ECD=CDB: będzie liniia EF równoległa względem AB, gdyż kąty ECD, CDB naprzemianległe są równe.

ROZDZIAŁ IV.

O WIELOKĄTACH I WAŻNOŚCI ICH KĄTÓW.

O *p i s a n i a.*

I. Powierzchnia płaska zamknięta iląkolwiek liniiami prostemi, zowie się *wielokątem* czyli *wielobokiem*. Nayprostszy ze wszystkich wielokątów iest tróykąt, o którym mówiliśmy.

II. Wielokąt o czterech bokach zowie się *czworokatem*, o pięciu bokach *pieciokątem*, o sześciu bokach *sześciokątem* i t. d.

Fig. 31 III. Czworokąt, w którym boki przeciwne są względem siebie równoległe, zowie się *równoległobokiem*. W równoległoboku, boki przeciwne, i kąty przeciwległe, są równe względem siebie (tw. 20. wn. 2).

Fig. 32 IV. Czworokąt, maiący tylko dwa boki przeciwne względem siebie równoległe, lecz nierówne, zowie się *równoległobokiem niezupełnym*, *albo trapezem*.

Fig. 33 V. Równoległobok maiący cztery kąty proste nazywa się *prostokątem*.

Fig. 34 VI. Prostokąt bierze nazwisko *kwadratu*, kiedy ma cztery boki między sobą równe.

Fig. 35 VII. Równoległobok maiący wszystkie boki równe, a kąty tylko przeciwne równe, zowie się *kwadratem ukośnym*.

VIII. Wielokąt maiący wszystkie boki i wszystkie kąty równe, zowie się wielokątem *foremnym*.

IX. Summa boków wielokąta nazywa się iego *obwodem*.

X. Każda liniia prosta, łącząca wierzchołki dwóch kątów nieprzyległych w wielokącie, zowie się *przekątną*.

25. *Twierdzénie.*

Fig. 36 *W każdym tróykącie ABC, summa trzech kątów A, B, C, czyni dwa kąty proste.*

Bo przedłużywszy bok AC do punktu D, i przez punkt C, poprowadziwszy równoległą CE względem AB; będą kąty ABC, BCE naprzemianległe równe; i kąty BAC, ECD iednostronne także równe (twier. 19); zatem kąt ABC+BAC=BCD; dodawszy spólnie kąt BCA, będzie kąt ABC+BAC+BCA=BCD+BCA (pew. 2); aże summa kątów przyległych BCD, BCA, iest równa dwóm kątom prostym (twier. 1); więc i summa kątów ABC, BAC, BCA, czyni także dwa kąty proste.

Wniosek I. Stąd wypada, że w każdym tróykącie ABC, przedłużywszy bok AC do punktu D; kąt zewnętrzny BCD, iest równy summie dwóch kątów B, A, wewnętrznych iemu przeciwległych, a przeto od każdego z nich iest większy.

II. W tróykącie, gdy kąt ieden iest prosty, dwa kąty pozostałe są ostre, a ich summa iest równa kątowi prostemu.

. III. W dwóch tróykątach, gdy dwa kąty iednego, są równe dwóm kątom drugiego tróykąta, będzie i kąt trzeci pierwszego, równy kątowi trzeciemu drugiego tróykąta; i te dwa tróykąty są równokątne.

IV. W tróykącie maiąc dwa kąty wiadome, gdy ich summę odeymiemy od dwóch kątów prostych, otrzymamy ważność kąta trzeciego.

V. W tróykącie równobocznym, każdy kąt iest trzecią częścią dwóch kątów prostych, albo zamyka dwie trzecie części kąta prostego. Jeżeli więc kąt prosty wyrazimy przez 1, tedy kąt tróykąta równobocznego wyrazi się przez $\frac{2}{3}$.

26. *Twierdzenie.*

W każdym wielokącie ABCDEF, summa kątów wewnętrznych równa iest dwóm kątom prostym, tyle razy wziętym, ile wielokąt ma boków; mniey dwa boki. Fig. 37

Bo, od wierzchołka kąta A, poprowadziwszy, przekątne AC, AD i t. d. do wierzchołków wszystkich innych kątów; wielokąt ten podzieli się na tyle tróykątów ABC, ACD, i t. d. ile w wielokącie iest boków mniey dwa boki; i będzie summa wszystkich kątów wewnętrznych wielokąta, równa summie wszystkich kątów w tróykątach. Aże w każdym tróykącie, summa trzech kątów równa iest dwóm kątom próstym (twier. 25); więc summa wszystkich kątów wewnętrznych wielokąta, równa iest dwóm kątom prostym tyle razy wziętym, ile wielokąt ma boków, mniey dwa.

Wniosek. Więc np. w pięciokącie, summa kątów wewnętrznych, iest równa dwóm kątom prostym wziętym razy 5—2, toiest równa 6 kątom prostym. Gdyby pięciokąt był foremny, wtedy, każdy iego kąt byłby piątą częścią sześciu kątów prostych, albo $\frac{6}{5}$ kąta prostego,

Podobnie w sześciokącie, summa kątów wewnętrznych równa $2 \times (6-2) = 8$ kątom prostym; azatem w sześciokącie foremnym, każdy kąt waży $\frac{8}{6}$, czyli $\frac{4}{3}$ kąta prostego.

Uwaga. W wielokącie ABCDEF, przedłużywszy boki AB, BC i t. d. w tęż samę stronę; będzie summa kątów zewnętrznych wielokąta, równa 4 kątom prostym. Bo kąt zewnętrzny GBC, z kątem wielokąta wewnętrznym przyległym CBA, czyni summę równą dwom kątom prostym (twier. 1); kąt zewnętrzny HCD z kątem wewnętrznym DCB, czyni także summę równą dwóm kątom prostym, i tak następnie. Summa zatem kątów zewnętrznych z wewnętrznemi, będzie równa summie dwóch kątów prostych, tyle razy wziętey, ile wielokąt ma boków. Aże summa samych kątów wewnętrznych wielokąta, iest równa summie dwóch kątów prostych wziętey tyle razy, ile wielokąt ma boków, mniey dwa; więc, od dwóch pierwszych summ równych, odiąwszy dwie drugie summy równe, pozostanie summa kątów zewnętrznych wielokąta, równa 4 kątom prostym (pew. 3).

KONIEC XIĘGI PIERWSZÉY.

XIĘGA II.

ROZDZIAŁ V.

O LINIIACH PROSTYCH UWAŻANYCH W KOLE, I O MIERZENIU KĄTOW.

Opisania

Tabl. II.

Fig. 1. I. Liniia prosta FG, łącząca dwa końce łuku FHG, zowie się *cięciwa.*

II. *Odcinkiem* koła, nazywa się powierzchnia czyli część koła, zamknięta łukiem FHG, i iego cięciwą FG.

III. *Wycinkiem* zowie się część koła, zamknięta łukiem BD i dwoma promieniami BC, CD, poprowadzonemi do końców tego łuku.

IV. Kąt BAD zawarty dwiema cięciwami BA, AD, i maiący swóy wierzchołek na okręgu koła, nazywa się kątem wpisanym.

V. Mówi się, że figura iakakolwiek iest *wpisana* w koło, gdy wierzchołki wszystkich iey kątów znayduią się na okręgu koła, a wtedy koło to nazywa się *opisanem* na tey figurze.

VI. Liniia prosta MN, dotykaiąca się okręgu koła w iednym punkcie B, zowiesię *styczna*, a punkt B punktem dotknięcia.

VII. Wszelki wielokąt iest opisany na kole, gdy wszystkie iego boki są stycznemi z okręgiem koła; i w tym razie mówi się, że koło iest wpisane w wielokąt.

1. *Twierdzenie.*

Każda średnica AB, dzieli koło i iego okrąg, na dwie równe części. Fig. 2

Przyłożywszy bowiém do siebie dwie figury AEB, ADB, tak aby miały spólną podstawę AB; liniia krzywa AEB przystać musi do linii krzywey ADB, gdyż inaczey wszystkie punkta iedney lub drugiey linii, nie byłyby równo oddalone od środka, coby się sprzeciwiło naturze koła.

2. *Twierdzenie.*

Każda cięciwa AD, iest mnieysza od średnicy AB, Fig. 2

Jakoż, poprowadziwszy promień DC do końca cięciwy AD; będzie liniia złamana ACD czyli iey równa AB, większa od linii prostey AD. Więc liniia naywiększa wpisana w koło, iest średnica.

3. *Twierdzenie.*

W każdem kole, albo w kołach równych, łuki równe ograniczaią cięciwy równe, i naodwrót, cięciwy równe ograniczaią łuki równe.

I tak założywszy, że łuk AMB iest równy łukowi FNE, będzie i cięciwa AB=FE. Bo dwa te łuki obrócone wklęsłościami w iedną stronę, i położone ieden na drugim tak, aby punkt B padł na E, dla równości swoiey i iednakowego zakrzywienia, przystaną do siebie; więc i punkt A padnie na punkt F, a przeto i liniia AB łącząca dwa punkta A i B, przystanie do linii FE, i będzie iey równa. Fig. 3

Naodwrót, poprowadziwszy średnice AE, BF: ieżeli cięciwa AB=FE, będzie łuk AMB=FNE. Bo dwa tróykąty ABC, CFE, maiace trzy boki odpowiednie równe trzem bokom, to iest, AC=CE, CB=CF i AB=FE, maią i kąt ACB=FCE (1,9) (*). Lecz dwa te kąty, położone ieden na drugim tak, aby liniia CB przykryła liniią CE, przystaną do siebie; i dla równości ich ramion, punkt B padnie na punkt E, a punkt A na punkt F; zatem i dwa łuki AMB, FNE, maiąc wszystkie punkta równo oddalone od środka koła, przystaną do siebie, i będą równe sobie (pew. VI).

Wniosek I. Wypada stąd że w kole, lub w kołach równych, kąty równe maiące swóy wierzchołek w środku, obeymuią na okręgu łuki równe; i naodwrót, ieżeli łuki są równe, będą i kąty obeymuiące ramionami swemi te łuki, i maiące wierzchołki w środku koła, równe między sobą.

Fig. 4 *Wniosek* II. Na okręgu ACBE, wziąwszy ilekolwiak łuków równych AE, EF, FG, GH, i do końców tych łuków poprowadziwszy promienie AD, DE, DF, DG, DH: ponieważ łuki AE, EF, FG, GH, są równe, będą podług poprzedzaiącego wniosku, i kąty ADE, EDF, FDG, GDH, równe między sobą; zatem ile razy łuk cały AH, iest większy od łuku cząstkowego AE, tyle razy i kąt cały ADH, iest większy od kąta cząstkowego ADE, i naodwrót. Stąd widzimy, że iakikolwiek kąt ADH, powiększa się albo zmnieysza, w miarę powiększania lub zmnieyszania się łuku iego AH: a zatem, *za miarę*

(*) *Przestroga.* Z dwóch liczb zamkniętych nawiasem i oddzielonych przecinkiem, pierwsza oznacza xięgę, druga twierdzenie do którego się w tey xiędze odwołuiemy. Liczby zaś bez przecinka położone w nawiasie, oznaczaią twierdzenie tey xięgi, o którey iest mowa.

iakiegokolwiek kata, można wziąć łuk zawarty miedzy iego ramionami, a zakreślony z wierzchołka tego kąta.

Uwaga. Okrąg koła podług dawnieyszego podziału dzieli się na 360 części równych zwanych stopniami; każdy stopień na 60 części równych zwanych minutami; każda minuta na 60 części równych zwanych sekundami, i t. d. Stopień oznacza się przez znak ° położony nad liczbą; minuta przez znak ′, sekunda przez znak ″, i t. d. Więc np. dla oznaczenia kąta maiącego 23 stopnie, 23 minut, i 24 sekund; pisze się 23° 29′ 24″ i t. d. Podług zaś nowego podziału, który nie iest wszędzie przyięty, okrąg koła dzieli się na 400, stopni, stopień na 100 minut, minuta na 100 sekund i t. d. Zatem półokrąg, i czwarta część okręgu, czyli 180° i 90°, podług podziału dawnego, odpowiadaią 200°, i 100°, podług podziału nowego.

4. *Twierdzenie.*

Prostopadła AB do promienia AC, z końca iego wyprowadzona, iest styczną z okręgiem koła. Fig. 5

Jakoż, poprowadziwszy iakąkolwiek pochyłą BC, ta będzie dłuższa od promienia AC (1, 13); zatem punkt B będzie za kołem: więc liniia AB ma tylko ieden punkt A spólny z okręgiem koła, przeto iest styczną (II. opis. 6).

Wniosek. Stąd wypada, że promień AC, poprowadzony do punktu dotknięcia A, styczney AB, iest prostopadły do tey styczney.

5. *Twierdzenie.*

Fig. 6 *Promień CD prostopadły do cięciwy AB, dzieli tę cięciwę, i wsparty na niey łuk ADB, na dwie równe części.*

Bo poprowadziwszy promienie AC, CB; ponieważ promienie te uważane względem prostopadłey CE, są liniiami pochyłemi równemi sobie; zatem są one równo oddalone od tey prostopadłey (1, 13), więc AE=EB. Nadto, poprowadziwszy liniie AD, DB; ponieważ prostopadła DE przechodzi przez środek linii AB, więc punkt D wzięty na tey prostopadłey iest równo oddalony od punktów A i B (1, 13. wnio. 3), więc liniia AD=DB: aże cięciwy AD, DB, równe, ograniczaią łuki równe (3), zatem łuk AD=DB; czyli łuk ADB podzielony iest na dwie równe części.

Wniosek. Ponieważ środek C koła, środek E cięciwy AB, i środek wspartego na niey łuku ADB, są trzy punkta znayduiące się na iedney linii prostey CED prostopadłey do cięciwy AB; a do oznaczenia położenia linii prostey dosyć iest mieć dwa punkta (I. opis. IV); więc każda liniia prosta, przechodząca przez dwa ze wspomnionych punktów, przechodzi i przez trzeci, i iest prostopadła do cięciwy. *Zatem prostopadła ze środka cięciwy wyprowadzona, przechodzi przez środek koła, i środek łuku ograniczaiącego cięciwę.*

6. *Twierdzenie.*

Fig. 7 *W każdem kole, dwa łuki EB, BA, zawarte między styczną PQ, a cięciwą do niey równoległą EA, są równe sobie: tudzież dwa łuki EM, AN, zawarte między dwiema cięciwami równoległemi EA, MN, są równe między sobą.*

Jakoż, poprowadziwszy promień XB prostopadły do cięciwy EA, ten będzie prostopadły i do cięciwy MN, równoległey do AE (I, 19. wn.); zatem przechodzić on będzie przez środek łuku EBA, i środek łuku MBN (5): będzie więc łuk EB=BA i łuk MB=BN; od dwóch pierwszych łuków, odiąwszy dwa drugie, pozostanie łuk EM=AN (pew. III).

7. *Twierdzenie.*

Kąt ABC, zawarty między styczną AB i cięciwą BC, ma za miarę połowę łuku BO, zawartego między iego ramionami. Fig. 8

Bo poprowadziwszy promień ED, prostopadły do cięciwy BC, ten podzieli cięciwę tę w punkcie O, a łuk BEC, w punkcie E, na dwie równe części (5). Poprowadziwszy nadto promień BD, do punktu dotknięcia B styczney, ten będzie prostopadły do styczney AB (4. wnio.); nakoniec punkta C i D złączywszy linią CD: dwa tróykąty prostokątne BOD, COD, maiące bok OD spólny, bok BO=OC, są równe sobie (1, 3), a zatem iest kąt CBD=C, i kąt BDO=ODC. Aże kąt ABC z kątem CBD, czyni kąt prosty; a w tróykącie COD, kąt ODC z kątem C=CBD, czyni także kąt prosty (I, 25. wnio. 2); więc kąt ABC=ODC (1, 2. wnio.): kąta zaś ODC, równego połowie kąta BDC, miarą iest połowa łuku BEC (3. wn. 2), więc i kąta ABC, zawartego styczną i cięciwą, iest miarą połowa łuku BEC, zawartego między iego ramionami.

Wniosek I. *Kąt DEF wpisany w koło, ma za miarę połowę łuku DF zawartego między iego ramionami.* Bo kąt AEF, za- Fig. 9

warty styczną AE i cięciwą FE, ma za miarę połowę łuku EDF; a kąt AED zawarty tąż styczną, i cięciwą ED, ma za miarę połowę łuku ED; zatem kąt DEF, który iest różnicą tych dwóch kątów, mieć będzie za miarę połowę różnicy dwóch łuków EDF i ED, czyli połowę łuku DF.

II. *Wszystkie kąty DEF, DBF, DCF, będące w tym samym odcinku DEBCF, są równe sobie*; gdyż każdy z nich ma za miarę połowę łuku DF.

Fig. 10 III. *Wszystkie kąty ABC, ADC, wpisane w półkole ABDC, są proste; bo każdy z tych kątów ma za miarę połowę półokręgu AEC.*

Fig. 11 IV. *Każdy kąt ABC, wpisany w odcinek ABC większy od półkola, iest ostry; a każdy kąt ADC, wpisany w odcinek ADC mnieyszy od półkola, iest rozwarty*: bo pierwszy z tych kątów, ma za miarę połowę łuku ADC mnieyszego od półokręgu, a drugi, połowę łuku ABC większego od półokręgu koła.

Fig. 12 V. *W czworokącie ABCD wpisanym w koło, dwa kąty B, D, sobie przeciwległe, wzięte razem, ważą dwa kąty proste:* bo kąt B ma za miarę połowę łuku ADC, a kąt D, połowę łuku ABC; aże te dwa łuki razem wzięte składaią cały okrąg ABCD; więc dwa kąty B i D, maią za miarę połowę okręgu koła, zatem ich summa iest równa dwom kątom prostym.

8. *Twierdzenie.*

Fig. 13 *W kole, kąt BAD maiący wierzchołek A między środkiem a okręgiem koła, ma* *za miarę połowę łuku BD, zawartego między iego ramionami, więcey połowa łuku FG, zawartego między przedłużeniami tych ramion.*

Bo, poprowadziwszy cięciwę GM równoległą do FD; będzie łuk FG = DM (6), i kąt BAD=BGM (1, 19); zatem każdy z tych kątów mieć będzie ten sam łuk za miarę: aże kąta wpisanego BGM iest miarą łuk $\frac{BDM}{2}$ (7. wnio. 1), czyli łuk $\frac{BD}{2}+\frac{DM}{2}=\frac{BD}{2}+\frac{FG}{2}$; więc i miarą kąta BAD iest łuk $\frac{BD}{2}+\frac{FG}{2}$.

9. *Twierdzenie.*

Kąt BAD, maiący wierzchołek A za okręgiem koła, a obeymuiący ramionami swemi łuki BD, CE, ma za miarę połowę różnicy tych łuków. Fig. 14

Jakoż, poprowadziwszy cięciwę EF równoległą do AB; będzie łuk BF=CE (6), i kąt FED=BAD (1, 19); zatem każdy z tych kątów mieć będzie ten sam łuk za miarę: aże kąt FED wpisany, ma za miarę połowę łuku FD (7. wnio. 1), który iest różnicą między łukiem BFD a łukiem BF=CE, więc i kąt BAD ma za miarę połowę różnicy dwóch łuków BD, CE.

10. *Twierdzenie.*

Każdy wielokąt foremny ABCDEFA może być wpisany w koło, i opisany na kole. Fig. 15

Bo 1ód, wystawiwszy sobie, że punkt O iest środkiem koła, którego okrąg przechodzi przez trzy punkta A, B, C; okażemy, że tenże okrąg przechodzi przez punkta D, E, F, wielokąta danego. Jakoż, z punktu O spuściwszy prostopadłą OH do cięciwy BC i poprowadziwszy liniie AO, OB i t. d. Dwa czworokąty OABH, OHCD, położone ieden na drugim tak, aby bok OH miały spólny, przystaną do siebie: iest bowiem kąt prosty OHB = OHC, i bok HB = HC (5.); zatem punkt C padnie na punkt B, a dla równości kąta C z kątem B, iako w wielokącie foremnym, liniia CD weźmie kierunek AB, i punkt D padnie na punk A, gdyż CD = AB; zatem liniia OD przystanie do linii OA, i będzie iéy równa: aże liniia OA iest promieniem, więc iest nim i liniia OD; zatem okrąg koła przeydzie przez punkt D. Podobnie okazać można, że tenże okrąg przeydzie i przez punkta E i F, zatem wielokąt foremny ABCDEFA będzie wpisany w koło (II. opis. V.).

2re. Z punktu O, poprowadziwszy prostopadłe OK, OL i t. d. do boków CD, DE i t. d. wielokąta; wszystkie te prostopadłe będą równe sobie. Bo ponieważ boki BC, CD, iako w wielokącie foremnym, są równe, więc i boków tych połowy HC, CK (5.), będą równe między sobą. Zatem dwa tróykąty prostokątne HOC, CKO maiące bok HC = CK, i bok CO spólny, są równe (I, 14), więc bok OH = OK; podobnie dowieść można, że prostopadła OK = OL, i tak następnie: więc z punktu O promieniem OH, zakreśliwszy okrąg koła, ten dotknie się wszystkich boków wielokąta w ich środkach, przeto okrąg ten będzie wpisany w wielokąt, czyli wielokąt foremny będzie opisany na kole.

Uwaga. I. Punkt O, środek spólny koła wpisanego i opisanego na wielokącie foremnym, uważać można za środek tego wielokąta; i dla tego kąt AOB zawarty dwoma promieniami do końców boku AB poprowadzonemi, zowie się kątem *środkowym.* A ponieważ wszystkie cięciwy AB, BC i t. d. są równe, przeto wszystkie kąty środkowe, są równe między sobą; zatem wartość każdego z tych kątów wynaydziemy, podzieliwszy 4 kąty proste, przez liczbę boków wielokąta foremnego.

II. Aby w dane koło wpisać wielokąt foremny, o pewney liczbie boków, dosyć iest okrąg tego koła podzielić na tyle części równych, ile wielokąt ma boków, i punkta podziałów połączyć liniiami prostemi. Bo z przyczyny łuków równych, będą i cięciwy AB, BC i t. d. równe; zatem wielokąt ABCD . . będzie równoboczny. A że tróykąty OAB, OBC . . . . prócz boków AB, BC . . równych, maią inne boki w punkcie O schodzące się, równe promieniowi koła, a zatem i między sobą równe; przeto tróykąty te są równokątne; a zatem wszystkie kąty ABC, BCD . . będą równe; więc wielokąt ABCD . . będzie foremny.

Chcąc np. w dane koło wpisać kwadrat, dosyć iest przez środek koła poprowadzić dwie średnice do siebie prostopadłe, i końce tych średnic połączyć liniiami prostemi.

11. *Twierdzenie.*

Bok sześciokąta foremnego wpisanego w koło, iest równy promieniowi tego koła.

Bo, uważaiąc liniią AB za bok sześciokąta foremnego wpisanego w koło; w tróy- Fig. 15

kącie ABO zawartym, tym bokiem i dwoma promieniami AO, OB, będzie kąt AOB szóstą częścią 4 kątów prostych (10. uwag 1); czyli, wziąwszy kąt prosty za 1, będzie kąt AOB$=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$; aże dwa kąty pozostałe ABO, BAO, tróykąta równoramiennego ABO, czynią razem $2-\frac{2}{3}$, czyli $\frac{4}{3}$ (1,25), i są między sobą równe (I, 15); przeto każdy z tych kątów iest$=\frac{2}{3}$; więc tróykąt ABO iest równoboczny (I, 25. wn. 5): zatem bok AB sześciokąta foremnego wpisanego w koło, iest równy promieniowi tego koła.

Wniosek I. Chcąc wpisać sześciokąt foremny w dane koło, potrzeba promień tego koła przenieść sześć razy na iego okrąg, i punkta iego podziałów połączyć liniiami prostemi.

Fig. 16 II. Maiąc wpisany w koło sześciokąt foremny ABCDEF, ieżeli wierzchołki iego kątów A, E, C, połączymy liniiami prostemi AE, EC, CA, utworzy się tróykąt równoboczny AEC wpisany w koło.

Uwaga. Ponieważ każdy wielokąt foremny może być wpisany w koło, i opisany na kole (10); i im większa będzie liczba boków, każdego z tych wielokątów, tym się one bardziey będą zbliżać do koła, tak dalece: że wystawiwszy sobie dwa wielokąty foremne o nieskończoney liczbie małych boków, ieden wpisany w koło, a drugi opisany na niem, obwód każdego z tych wielokątów będzie nieskończenie mało różnić się od okręgu koła samego: idzie stąd, *że obwód wielokąta forewnego o nieskończoney liczbie małych boków uważać można za okrąg koła, a sam wielokąt za koło.*

12. *Zagadnienie.*

Dany kąt BAC podzielić na dwie ró- Fig. 17
wne części.

Z wierzchołka kąta A, iako środka koła, promieniem iakimkolwiek, kreślę łuk przecinaiący ramiona danego kąta w punktach M i N, i prowadzę cięciwę MN, z punktów znowu M, N, iako środków, promieniem większym od połowy cięciwy MN, kreślę dwa łuki przecinaiące się w punkcie D, i prowadzę liniią AD, która podzieli kąt dany A na dwie równe części.

Bo każdy z punktów A i D, iest równo oddalony od końców cięciwy MN; zatem liniia AD przechodzi przez środek tey cięciwy, i iest do niey prostopadła (I, 13. wn. 3); podzieli więc łuk MN, a przeto i kąt A maiący ten łuk za miarę, na dwie równe części (5).

Tym samym sposobem można podzielić każdy z kątów BAD, DAC, na dwie równe części, a przez tak następne podziały, kąt dany A podzielimy na 4, 8, 16, i t. d. części równych.

Uwaga. Podobne wykreślenie służy do podzielenia danego łuku na 2, 4, 8, i t. d. części równych.

13. *Zagadnienie.*

Dany kąt prosty ACD, maiący za mia- Fig. 18
rę łuk AD, podzielić na trzy równe części.

Od punktu A do S, przenoszę promień CA; będzie łuk AS=60° (11), a pozostały łuk DS=30°. Przenoszę znowu ten sam promień od punktu D do E, będzie łuk DE=60°, a pozostały łuk EA=30°; zatem łuk SE iest także równy 30°: a że kąty DCS, SCE, ECA, mierzone łukami równemi DS, SE, EA, są równe sobie (3, wnio. 2); więc dany kąt prosty ACD, iest podzielony na trzy równe części.

Uwaga. Co się tyczy ieometrycznego sposobu dzielenia kąta na trzy równe części zapomocą liniiału i cyrkla, zagadnienie to, nie może być rozwiązane tylko w niektórych szczególnych przypadkach; a w innych, poprzestać należy na sposobie praktycznym, na samey tylko próbie opartym, który zręcznie wykonany, prowadzi do podziału dosyć dokładnego; i takiego sposobu używać się zwykło do dzielenia kąta na 5, 7 i t. d. części równych.

14. *Zagadnienie.*

Fig. 19 *Maiąc dane dwa kąty A i B, tróykąta, znaleść kąt trzeci.*

Prowadzę liniią prostą nieograniczoną DEF, i na tey przy punkcie iakimkolwiek E, kreślę kąt DEC= kątowi A, i kąt CEH = kątowi B; będzie kąt pozostały HEF, kątem tróykąta szukanym: bo te trzy kąty wzięte razem, czynią dwa kąty proste (I, 1).

15. *Zagadnienie.*

Fig. 20 *Maiąc dane dwa boki B i C, tróykąta, i kąt A temi bokami zawarty, wykreślić tróykąt.*

Prowadzę liniią nieograniczoną DE, i na tey przy punkcie iakimkolwiek D, kreślę kąt EDF=kątowi A, biorę liniią DG=B, DH=C, i prowadzę liniią GH; będzie tróykąt DGH szukany (I, 3).

16. *Zagadnienie.*

Fig. 21 *Maiąc dany bok tróykąta, i dwa kąty przy tym boku leżące, wykreślić tróykąt.*

Prowadzę liniią DE równą bokowi danemu tróykąta, i przy punkcie D, kréślę kąt EDF równy iednemu, a przy punkcie E kąt DEG, równy drugiemu z kątów danych; dwie linie DF, EG przetną się z sobą w punkcie H, utworzy się więc tróykąt DHE żądany (1, 4). Fig. 21

17. *Zagadnienie.*

Z trzech danych liniy A, B, C, wykréślić tróykąt.

Prowadzę liniią DE=A, i z punktu E iako środka, promieniem równym linii B kréślę łuk, a z punktu D promieniem równym linii C kréślę łuk drugi; od punktu F przecięcia się tych łuków, do punktów D, E, prowadzę liniie FD, EE; będzie tróykąt DEF szukany (1, 9). Fig. 22

18. *Zagadnienie.*

Znaleść środek danego koła.

Biorę na okręgu koła trzy iakiekolwiek punkta A, B, C; prowadzę liniie AB, BC, i te dzielę na dwie równe części w punktach D i E; z punktów tych poprowadziwszy prostopadłe DF, GE do liniy AB, BC; punkt przecięcia się O, tych prostopadłych, będzie środkiem koła szukanym (5 wnio.). Fig. 23

Uwaga. To samo wykréślenie służy do poprowadzenia okręgu koła przechodzącego przez trzy punkta dane A, B, C, tudzież do opisania tróykąta ABC kołem.

19. *Zagadnienie.*

Przez punkt dany poprowadzić styczną do okręgu koła danego. Fig. 24

1ód. Jeżeli punkt dany A iest na okręgu koła, wtedy poprowadziwszy promień CA, a z punktu A; prostopadłą DA do promienia CA; będzie prostopadła ta styczną żądaną (4).

2re. Jeżeli punkt A iest za kołem, wtedy złączywszy ten punkt ze środkiem C koła danego, liniią CA, dzielę ią w punkcie O na dwie równe części; z punku O iako środka, promieniem OC kréślę okrąg, przecinaiący okrąg danego koła w punktach B, D, i prowadzę liniią AD, która będzie styczną żądaną.

Bo poprowadziwszy liniią CD, będzie kąt CDA w półkolu prosty (7. wn. 3), zatem liniia AD iest prostopadłą z końca D promienia CD wyprowadzona, więc iest styczną (5).

ROZDZIAŁ VI.

O MIERZENIU POWIERZCHNI.

Opisania.

I. Do mierzenia powierzchni używa się zwyczaynie kwadratu, który, gdy ma bok ieden równy długości sążnia, łokcia, stopy, cala i t. d. nazywa się *sążniem kwadratowym*, *łokciem kwadratowym*, *stopą kwadratową*, *calem kwadratowym* i t. d.

Mierzyć zatem iakąkolwiek powierzchnią, iestto dochodzić ile razy mieści się w niey kwadrat za miarę czyli iedność wzięty.

Fig. 25 II. *Wysokością* równoległoboku ABCD, albo tróykąta ABD, nazywa się prostopadła BE, z wierzchołka którégokolwiek kąta B, na bok przeciwległy AD, przedłużony ieżeli tego potrzeba, spuszczona. Ten bok AD zowie się *podstawą* równoległoboku, albo tróykąta.

III. W prostokącie, bok iego iest razem wysokością.

IV. *Wysokością* trapeza ADBC, nazywa się prostopadła DE, spuszczona z wierzchołka któregokolwiek iego kąta D, na bok przeciwległy AC zwany podstawą. Fig. 26

V. Dwie figury, różne co do kształtu, lecz równe sobie co do powierzchni, nazywaią się figurami *równoważnemi*. I tak, koło może być równoważne kwadratowi, tróykątowi, prostokątowi, i t. d.

Nazywać zaś będziemy zawsze figurami równemi te tylko, które położone, iedna na drugiey, przystaią do siebie we wszystkich swoich punktach: takiemi figurami są np. dwa tróykąty maiące trzy boki odpowiednie równe, dwa koła równych promieni, i t. d.

20. *Twierdzenie.*

Dwa równoległoboki ABCD, ABEF, maiące też same podstawę AB, i spólną wysokość DX, są równoważne. Fig. 27

Bo w równoległobokach ABCD, ABEF, iest bok AD=CB, bok AF=BE (roz. IV. op. 3), nadto iest bok DC=AB i bok EF=AB, zatem bok DC=EF (pew. 1.); gdy zaś od linii DE, odeymiemy każdą z liniy DC, FE, pozostanie linia CE=DF (pew. III): dwa więc tróykąty DAF, CBE, maiące trzy boki odpowiednie równe trzem bokom, są równe sobie (1, 9). Aże gdy od czworokąta ABED, odeymiemy tróykąt CBE, pozostanie równoległobok ABED; i gdy od tegoż czworokąta ABCD, odeymiemy tróy-ką DAF, pozostanie równoległobok ABEF, równy co do powierzchni równoległobokowi ABCD (pew. III.); więc dwa równoległoboki, iedney podstawy, i iedney wysokości, są równoważne.

Wniosek I. Każdy równoległobok AC (fig. 27 bis.), iest równoważny prostokątowi AE, maiącemu tęż samę z nim podstawę AB, i tęż samę wysokość AF.

Wniosek II. Dwa prostokąty równey podstawy i wysokości, są równe sobie.

21. *Twierdzenie*

Fig. 28 *Każdy tróykąt ABC, iest połową równoległoboku ADBC, maiącego z nim tę samę podstawę AC, i wysokość spólną BX.*

Jakoż z natury równoległoboku AB, iest bok DB=AC, bok AD=BC; zatem dwa tróykąty ADB, ACB, maiące nadto bok spólny AB, są równe sobie (I, 9): aże te tróykąty razem wzięte, składaią równoległobok cały AB; więc każdy z tróykątów ADB, ACB, iest połową równoległoboku AB.

Wniosek I. Tróykąt ABC, iest połową prostokąta EC, maiącego z nim tę samę podstawę AC, i spólną wysokość AE; gdyż prostokąt EC iest równoważny równoległobokowi AB (20. wnio. I).

Wniosek II. Ponieważ równoległoboki maiące tęż samę podstawę i wysokość, są równoważne (20); a tróykąty tey samey podstawy i wysokości, co i równoległoboki, są ich połowami; więc *wszystkie tróykąty maiące równe podstawy, i równe wysokości, są równoważne.*

22. *Twierdzenie.*

Powierzchnia iakiegokolwiek prostokąta ABCD, iest równa iloczynowi z iego podstawy BC, przez wysokość AB. Fig 20

Przypuśćmy naprzykład, że łokieć wzięty za iedność liniiową, mieści się 4 razy w podstawie BC, a 3 razy w wysokości AB, prostokąta AC. Przez punkta podziałów E, G, poprowadźmy względem BC, liniie równoległe EF, GH; te podzielą prostokąt AC na trzy prostokąty AF, EH, GC, równe (20. wn. 2): przez punkta znowu podziałów I, L, N, poprowadźmy względem wysokości AB, liniie równoległe IK, LM, NO; te podzielą każdy z prostokątów AF, EH, GC, na tyle łokci kwadratowych, ile iest podziałów w podstawie BC, toiest na 4. Aże dla otrzymania liczby kwadratów zawartych w całym prostokącie AC, potrzeba liczbę kwadratów zamkniętych w iednym prostokącie GC, powtórzyć tyle razy, ile iest podziałów w wysokości AB, to iest razy 3; zatem powierzchnia prostokąta AC, zamykać będzie 4 łokcie kwadratowe wzięte razy 3, czyli 12 łokci kwadratowych: więc taż powierzchnia wyrazi się ogólnie przez iloczyn z BC × AB (*).

(*) Mówi się tylko przez skrócenie, że powierzchnia prostokąta iest równa iloczynowi z iego podstawy przez wysokość: gdyż właściwie należałoby powiedzieć, że powierzchnia prostokąta iest równa pewney liczbie kwadratów równych ustawionych na iego podstawie, albo na wysokości, tyle razy wziętych, ile razy mieści się bok iednego z tych kwadratów w wysokości, albo w podstawie prostokąta.

Uwaga. Ten sam sposób dowodzenia służy i na przypadek, w którym iedność za miarę wzięta nie mieści się zupełnie w podstawie, albo w wysokości prostokąta. Bo daymy np. że ta iedność mieści się w podstawie BC, razy $3\frac{1}{4}$, a w wysokości AB, razy 4. Poprowadziwszy równoległe względem BC i AB; prostokąt AC podzieli się na 12 kwadratów równych, i 4 prostokąty EK, FL, GM, HC, które są równe między sobą: gdyż każdy z tych prostokątów ma podstawę równą bokowi EF kwadratu, a wysokość$=$ED$=\frac{1}{4}$; te 4 prostokąty razem wzięte, są równe iednemu kwadratowi maiącemu za bok EF; więc prostokąt AC zawierać będzie 13 równych kwadratów, toiest liczbę taką, iaka wypada z pomnożenia 4 przez $3\frac{1}{4}$.

Wniosek I. Jeżeli prostokąt AC iest kwadratem, toiest, ieżeli podstawa BC iest równa wysokości AB, wtedy powierzchnia tego prostokąta będzie równa iloczynowi z $BC \times BC = \overline{BC}^2$

Wniosek II. *Powierzchnia iakiegokolwiek równoległoboku AC* (*fig.* 27. *bis*), *równa iest iloczynowi z iego podstawy AB, przez wysokość AF.* Bo równoległobok AC iest równoważny prostokątowi FB, maiącemu tę samę z nim podstawę AB i spólną wysokość AF (20. wn. I); aże ten prostokąt iest równy $AB \times AF$, zatem będzie i równoległobok $AC = AB \times AF$.

Fig. 28 *Wniosek* III. *Powierzchnia iakiegokolwiek tróykąta ABC, iest równa iloczynowi z podstawy AC, przez połowę wysokości BX tróykąta.* Bo tróykąt ABC iest połową równoległoboku BA, tey samey z nim podstawy, i wysokości (21)); aże równoległobok $BA = AC \times BX$, więc będzie tróykąt $ABC = \frac{1}{2} \times AC \times BX = \frac{AC \times BX}{2}$.

Wniosek IV. Oznaczywszy powierzchnie dwóch równoległoboków przez R, r, podstawy przez P, p, wysokości przez W, w; będzie $R = P \times W$, $r = p \times w$; czyli $R : r = P \times W : p \times w$. Ztey proporcyi, przypuściwszy w niey $P = p$, i podzieliwszy drugi stosunek przez P, wypada $R : r = W : w$; toiest, *że równoległoboki maiące równe podstawy, maią się do siebie iak ich wysokości.* Z tey samey proporcyi, przypuściwszy w niey $W = w$, i podzieliwszy drugi stosunek przez W, wypada $R : r = P : p$; toiest: *że równoległoboki równey wysokości maią się do siebie iak ich podstawy.*

Wniosek V. Ponieważ tróykąty są połowami równoległoboków, tey samey z niemi podstawy i wysokości; a połowy są do siebie w tym samym stosunku, co ich całości: więc *tróykąty równey podstawy, maią się do siebie iak wysokości; a tróykąty równych wysokości, maią się do siebie iak ich podstawy.*

23. *Twierdzenie*

*Powierzchnia trapeza ABDC, iest ró*wna *iloczynowi z iego wysokości AF, przez połowę summy boków AB, CD równoległych; albo równa iloczynowi z tey samey wysokości, przez liniią łączącą środki dwóch boków AC, BD nierównoległych.* Fig. 30

Bo Iód. poprowadziwszy przekątną AD, ta podzieli trapez na dwa tróykąty ABD, ACD, z których pierwszy iest $= \frac{AB \times AF}{2}$ (22 wn. 3), a drugi $= \frac{CD \times AF}{2}$; zatem summa tych dwóch tróykątów, czyli powierzchnia trapeza ABDC iest $= \frac{AB \times AF + CD \times AF}{2} = AF \frac{(AB + CD)}{2}$.

2re. przez środek O, boku BD, poprowadźmy GK równoległą do AC, i przecinaiącą przedłużony bok AB w punkcie G; nadto poprowadźmy LO równoległą do CD; będą czworokąty ALOG, LCKO, równoległobokami (I, 20. wn. 2). Aże z równości dwóh tróykątów BOG, KOD, maiących bok BO=OD z wykreślenia, kąty przy O wierzchołkiem przeciwległe równe, i kąty GBO, ODK naprzemianległe równe, wypada (I, 4), bok BG=KD, OG=OK, a w równoległobokach AO, LK, iest OG=AL, i OK=LC; zatem AL=LC (pew. I). Więc liniia LO przechodzi przez środki dwóch boków AC, KG równoległych. A ponieważ taż liniia LO=AG=CK; zatem $LO = \frac{AG + CK}{2} = \frac{AB + BG + CK}{2} = \frac{AB + CD}{2}$, gdyż BG=KD. Okazaliśmy zaś, że powierzchnia trapeza ABDC=$AF \times \frac{(AB + CD)}{2}$, przeto taż powierzchnia wyrazi się ieszcze przez $AF \times LO$; to iest, przez iloczyn z wysokości trapeza przez liniią łączącą środki dwóch iego boków nierównoległych.

Uwaga. Chcąc doyść powierzchni wielokąta o iakicykolwiek liczbie boków, należy go podzielić na tróykąty, przez przekątne, albo przez liniie poprowadzone od punktu wewnątrz wielokąta obranego, do wierzchołków wszystkich iego kątów, i doyść powierzchni każdego z tych tróykątów; a wzięta summa powierzchni tróykątów wszystkich, będzie szukaną powierzchnią wielokąta danego.

24. *Twierdznie.*

Powierzchnia wielokąta foremnego ABCDE, iest równa iloczynowi z tego obwodu przez połowę prostopadłey OH spuszczoney ze środka O wielokąta, na bok iego którykolwiek BC. Fig. 31

Bo tróykąt BOC$=\frac{BC \times OH}{2}$ (22. wnio. 3); tróykąt COD$=\frac{CD \times OK}{2}$; aże prostopadła OH$=$OK (10), więc summa tych dwóh tróykątów będzie$=(BC+CD) \times \frac{OH}{2}$. Wynaydziemy podobnie powierzchnie tróykątów DOE, EOA, AOB. A zatem summa tróykątów składaiących wielokąt cały ABCDEA, czyli iego powierzchnia, ma za miarę $(BC+CD+DE+EA+AB) \times \frac{OH}{2}$; toiest, równa się iloczynowi z obwodu wielokąta, przez połowę prostopadłey spuszczoney z iego środka na bok wielokąta którykolwiek.

Wniosek I. *Powierzchnia koła równa iest iloczynowi z iego okręgu przez połowę promienia.* Bo koło uważać można za wielokąt foremny o nieskończoney liczbie małych boków (II. Uwaga). Aże w takim wielokącie prostopadła spuszczona z iego środka, na bok iego którykolwiek, nie różni się od promienia, a obwód od okręgu koła; więc powierzchnia koła ma za miarę iloczyn z okręgu przez połowę promienia.

Wniosek II. *Powierzchnia wycinka kołowego, równa iest iloczynowi z łuku służącego za podstawę wycinkowi, przez połowę promienia koła.* Bo wycinek uważać można iako złożony z nieskończoney liczby tróykątów, maiących za podstawy łuki wycinka, a za wysokość promień iego koła.

Fig. 23 *Uwaga.* Gdy od wiadomey powierzchni wycinka AOBG odeymiemy powierzchnią tróykąta AOB, otrzymamy powierzchnią odcinka AGB.

25. *Zagadnienie.*

Dany wielokat zamienić na tróykat iemu równoważny.

Fig. 32 Niech naprzykład, danym wielokątem będzie pięciokąt ABCDE. Poprowadźmy przekątną EC, a przez wierzchołek D tróykąta DEC, liniią DF równoległą względem podstawy EC, i przecinaiącą przedłużony bok AE w punkcie F: dwa tróykąty FEC, DEC, maiące spólną wysokość, i tę samę podstawę, będą równoważne (21. wnio. 2). Do każdego z tych tróykątów, dodawszy czworokąt ABCE, będzie czworąkąt ABCF, równoważny pięciokątowi ABCDE (pew. 2). Jeżeli znowu poprowadzimy przekątną BF, i zrobimy wykréślenie podobne poprzedzaiącemu, okażemy tym samym sposobem, że tróykąt GFC iest równoważny czworokątowi ABCF, a zatem i pięciokątowi ABCDE. Stosuiąc to samo rozumowanie do iakiegokolwiek wielokąta, i za każdem wykréśleniem liczbę iego boków zmnieyszaiąc iednym, przyydziemy do tróykąta równoważnego wielokątowi.

Przykłady.

I. Znaleść powierzchnią prostokąta maiącego podstawę=21, 37 łok. a wysokość=9, 24 łok.

Powierzchnia szukana będzie $=21,37 \times 9,24 = 197,4588$ łokci kw. (22).

II. Znaleść powierzchną tróykąta maiącego podstawę $=4\frac{2}{3}$ łok. a wysokość $=3$ łok.

Powierzchnia szukana będzie $= \frac{3}{2} \times 4\frac{2}{3} =$ 7 łok. kw. (22- wn. 3).

III. Znaleść powierzchnią równoległoboku, którego podstawa ma 6 sążni, 4 stóp, 5 cali i 6 liniy; a wysokość zawiera 4 sążnie, 5 stóp, 8 cali i 9 liniy.

Ponieważ sążeń kw. ma 36 stóp kw.
Stopa kw. zamyka 144 cali kw.
Cal kw. ma 144 liniy kw.
Liniia kw. zawiera 144 punk. kw. i t. d.

Więc wysokość 4 sążni, 5 stóp, 8 cali i 9 liniy wyrażona w liniiach, będzie 4281

Podstawa 6 sążni, 4 stóp, 5 cali, 6 liniy, wyrażona w lin. 5826

Stąd iloczyn . . . 24941106 lin kw.

Podzieliwszy ten iloczyn przez 144, wypadnie na iloraz 173202 cali kw. i 18 lin. kw.

Podzieliwszy znowu 173202 przez 144, wypadnie 1202 stóp kw. i 114 cali kw.

Podzieliwszy na koniec 1202 przez 36, wypadnie 33 sążni kw. i 14 stóp kw. Zatem szukana powierzchnia równoległoboku iest równa 33 sążni kw. 14 stóp kw. 114 cali kw. i 18 liniy kw.

KONIEC XIĘGI DRUGIÉY.

XIĘGA III.

ROZDZIAŁ VII.

O PODOBIEŃSTWIE FIGUR.

Opisania

I. Dwie figury są *podobne*, gdy maią kąty odpowiednie równe, a boki *odpowiedne* proporcyonalne. Przez boki odpowiedne rozumieią się te, które maią iednakowe położenie w obu figurach, czyli które są przyłegłe kątom równym.

II. Dwie figury równe są zawsze podobne, lecz dwie figury podobne mogą być wcale nierówne.

1. *Twierdzenie.*

Tabl. 3. Fig. 1. *W tróykacie ABC, liniia DE poprowadzona równolegle do podstawy BC, przecina boki AB, AC, proporcyonalnie; toiest, będzie AD: DB=AE: EC.*

Jakoż dwa tróykąty BDE, CED, stoiące na iedney podstawie DE, i maiące spólną wysokość, gdyż ich wierzchołki B, C, znayduią się na iedney linii BC równoległey do podstawy DE, są równoważne (II. 21. wn. 2). Dwa znowu tróykąty ADE, BED, maiące wierzchołek spólny w punkcie E, a podstawy na linii AB, maią iedną wysokość, są zatem do siebie iak ich podstawy AD, DB (II, 22. wn. 5); toiest, ma się tróykąt ADE: BED=AD: DB. Dla podobney przyczyny tróykąt ADE: CDE=AE: EC; aże tróykąt BDE=CDE, więc dwa pierwsze stosunki tych dwóch proporcyy są równe, zatem są równe i dwa drugie, toiest ma się AD: DB=AE: EC.

Wniosek I. Ponieważ iest AD: DB=AE: EC, więc, składaiąc wyrazy tey proporcyi, będzie AD+DB: AD=AE+EC: AE, czyli AB: AD=AC: AE; tudzież AB: BD=AC: CE.

Wniosek II. *Dwie liniie proste AB, CD, przecięte równoległemi AC, EF, GH, i t. d., są podzielone na części proporcyonalne;* to iest, ma się AE: CF=EG: FH=GB: HD. Bo przedłużywszy liniie AB, CD do ich zeyścia się w punkcie O: w tróykącie OEF, ponieważ bok AC iest równoległy do EF, więc, podług wniosku poprzedzaiącego, będzie OE: OF=AE: CF; podobnie w tróykącie OGH, ponieważ bok EF iest równoległy do GH, będzie OE: OF=EG: FH; z tych dwóch proporcyy, z przyczyny spólnego stosunku OE: OF, wypada AE: CF=EG: FH. Podobnie okazać można, że iest EG: FH=GB: HD, i tak następnie. Fig. 2

2 *Twierdzenie odwrotne.*

Jeżeli boki AB, AC tróykąta ABC, przecięte są proporcyonalnie przez liniią DE, toiest, że tak się ma AD: DB=AE: EC; będzie liniia DE równoległa do podstawy BC. Fig. 1

Bo ieżeli liniia DE nie iest równoległa do BC, niech taką będzie inna iakakolwiek liniia DO; w tem przypuszczeniu, na mocy twierdzenia poprzedzaiącego będzie AD: DB=AO: OC. Aże z założenia iest AD: DB=AE: EC, więc z przyczyny spólnego tym dwóm proporcyom stosunku AD: BD, wypada AO: OC=AE: EC; aże ta proporcya iest fałszywa; iest bowiem AE>AO, kiedy EC<OC; więc i to przypuszczenie, że liniia DO iest równoległa względem BC, mieysca mieć nie może; zatem liniia DE iest równoległa do BC.

3. *Twierdzenie.*

Fig. 3 *W tróykącie ABC, liniia AD, dzieląca kąt A na dwie równe części, dzieli i podstawę CB na dwa odcinki BD, CD, proporcyonalne do boków AB, AC; toiest, będzie BD: DC=AB: AC.*

Jakoż przez punkt C, poprowadziwszy CE równoległą do AD, tak aby spotykała przedłużony bok BA w punkcie E; w tróykącie BCE, ponieważ AD iest równoległa do CE, będzie BD: DC=BA: AE (1). Aże tróykąt ACE iest równoramienny; bo z przyczyny liniy równoległych AD, CE, przeciętych liniiami AC, BE, iest kąt ECA=CAD, i kąt AEC=BAD (I, 19); iest zaś kąt CAD=BAD z założenia, zatem kąt ECA=AEC (pew. I); więc bok AE=AC (I, 15); wziąwszy więc AC za AE w proporcyi powyższey, będzie BD: DC=BA: AC.

4. *Twierdzenie.*

Fig. 4 *Jeżeli dwa tróykąty ABC, AFG, są równokątne, maią i boki odpowiedne proporcyonalne, a tem samem są podobne; toiest, ieżeli kąt A=A. B=F, C=G, będzie bok AB: AF=AC: AG=BC: FG.*

Bo wystawiwszy sobie, że tróykat AFG iest położony na tróykącie ABC tak, aby punkt A padł na A, a bok AF poszedł po boku AB; dla równości kątów A, A, póydzie i bok AG po AC; aże kąt F=B z założenia, więc linija FG iest równoległa do BC (I, 18); przecina zatem boki AB, AC proporcyonalnie (1. wn), toiest będzie AB: AF=AC: AG. Lecz poprowadziwszy GH równoległą do AB, będzie AC: AG=BC: BH (1 wn.); więc, z przyczyny spólnego tym dwom propocyom stosunku AC: AG, będzie AB:AF=BC: BH czyli FG (1,20); więc dwa tróykąty AIC, AFG równokątne, maią boki odpowiednie proporcyonalne, zatem są podobne (I opis. I).

Wniosek. Aby dwa tróykąty były podobne, dosyć iest aby miały po dwa kąty odpowiednie równe; bo w tym razie i kąt trzeci iednego, będzie równy kątowi trzeciemu drugiego tróykąta (I, 25. wn. 3), zatem takie dwa tróykąty są podobne.

Uwaga. Widzimy tu, że w tróykątach podobnych boki odpowiednie AB, AF, są przeciwległe kątom równym C, G; toż samo iest z innemi bokami.

5. *Twierdzenie.*

Dwa tróykaty ABC, DEF, maiące boki odpowiedne proporcyonalne, są podobne: toiest, iezeli ma sie BC: EF=AB: DE=AC: DF; bedzie tróykat ABC równokątny i podobny trókątowi DEF. Fig. 5

Przy punkcie E wykreślmy kąt FEG=B, a przy punkcie F kat EFG=C, będzie pozostały kąt G=A (I. 25. wnio. 3), i tróykąt EFG będzie równokątny z tróykątem ABC; więc podług twierdzenia poprzedzaiącego będzie BC: EF=AB: EG: aże z założenia iest BC: EF=AB: ED; więc

AB: EG=AB: DE; zaten EG=DE. Nadto, iest ieszcze podług tegoż twierdzenia, BC: EF=AC: FG; a z zaożenia mamy BC: EF=AC: DF: więc AC: FG=AC: DF; stąd FG=DF: zatem dwa tróykąty EGF, DEF, są równe sobie (1, 9). Lecz z wykreślenia tróykąt EGF iest równokątny z tróykątem ABC, więc i tróykąt DEF iest równokątny i podobny tróykątowi ABC.

Uwaga. Z tych dwóch twierdzeń widzimy, że w tróykątach z równości kątów wypływa proporcyonalność ich boków; i naodwrót, za proporcyonalnością boków idzie równość ich kątów; tak że ieden z tych dwóch warunków iest dostateczny dla podobieństwa tróykątów. Lecz nie iest toż samo w figurach ograniczonych więcey niż trzema bokami, iak to nayłatwiey widzieć można na kwadracie porównywanym z prostokątem, w których, lubo kąty wszystkie iako proste są równe, boki iednak około tych kątów leżące nie są propocyonalne: więc aby figury więcey niż trzy boki maiące były podobne, potrzeba aby miały kąty równe, i boki około tych kątów leżące proporcyonalne.

6. *Twierdzenie.*

Dwa tróykaty maiace po iednym kacie równym, zawartym miedzy bokami proporcyonalnemi, sa podobne.

Fig. 4 Jakoż niech będą dwa tróykąty ABC, AFG, maiące kąt A spólny, i boki około tego kąta proporcyonalne, toiest AB: AF= AC: AG. Ponieważ z tey proporcyi wypada, że bok FG iest równoległy do BC (2): więc kąt AFG=B, kąt AGF=C (1, 19), zatem dwa tróykąty ABC, AFG są podobne (4. wnio.).

7. *Twierdzenie.*

Dwa tróykąty maiące boki odpowiednie równoległe, albo do siebie prostopadłe, są podobne.

Gdyż 1ód. w dwóch tróykątach ABC, DEF, ieżeli bok AC iest równoległy do EF, a bok BC do DF, będzie kąt C=F, (I,21); nadto, ieżeli bok AB iest równoległy do ED, będzie kąt A=E; więc dwa tróykąty ABC, DEF, są podobne (4. wnio.) Fig. 6

2re. w dwóch tróykątach ABC, DEF, niech bok DE będzie prostopadły do AC, bok DF do AB, a bok EF do BC. Przedłużmy boki tróykąta DEF, do spotkania się z bokami tróykąta ABC, w punktach K, H, G. W czworokącie AKDH, ponieważ cztery kąty wewnętrzne razem wzięte ważą 4 kąty proste (I, 26); są zaś dwa kąty K, H, proste, więc dwa pozostałe kąty KAH, KDH, będą równe summie dwóch kątów prostych. Lecz dwa kąty przyległe KDF, KDH, są także równe summie dwóch kątów prostych, więc kąt KDF=KAH (I, 2. wn.). Podobnie okazać można, że kąt DFE=B, i kąt DEF=C; więc dwa tróykąty ABC, DEF są równokątne, a przeto podobne. Fig. 7

Uwaga. W pierwszym przypadku boki równoległe AB, DE... a w drugim boki do siebie prostopadłe AB, DF... są odpowiednemi.

8. *Twierdzenie.*

W tróykącie ABC, liniie AF, AG.. iakkolwiek poprowadzone od wierzchołka A do podstawy BC, dzielą tę podstawę, i liniią do niey równoległą DE, na części proporcyonalne; toiest, będzie DJ: BF=JK: FG=KL: GH... Fig. 8

Jakoż, ponieważ liniia DJ iest równoległa względem BF, więc dwa tróykąty ABF, ADJ maią kąt B=ADJ, kąt BFA=AJD (I,19), zatem są podobne (4. wn.), i daią AF: AJ=BF: DJ. Dla podobney przyczyny, będzie AF: AJ=FG: JK; zatem z przyczyny spólnego stosunku AF: AJ, będzie BF: DJ=FG: JK. Podobnym sposobem znaydziemy, że iest FG: JK=GH: KL, i t. d. zatem liniia DE w punktach J, K, L, a podstawa BC, w punktach F, G, H, podzielone są proporcyonalnie.

9. *Twierdzenie.*

Fig. 9 *W tróykącie prostokątnym ABC, ieżeli z wierzchołka kąta prostego A, spuścimy prostopadłą AD, na przeciwprostokątną BC:*

1ód. *dwa tróykąty ABD, ADC, będą podobne sobie i całemu tróykątowi ABC.*

2re. *ramiona AB, AC, kąta prostego, będą średnioproporcyonalne między przeciwprostokątną BC a odcinkami im przyległemi BD, DC;*

3cie. *Prostopadła AD, będzie średnioproporcyonalna między dwoma odcinkami BD, DC.*

Bo 1ód. dwa tróykąty BAC, BAD, maiąc kąt B spólny, kąt prosty BDA=BAC, a zatem i kąt trzeci BAD=BCA, są równokątne i podobne. Dowiedlibyśmy podobnie, że tróykąt DAC iest podobny tróykątowi BAC; a zatem i tróykąt DAC będzie podobny tróykątowi BAD; wszystkie więc trzy tróykąty są podobne sobie.

2re. ponieważ tróykąty BAC, BAD są podobne, więc maią boki odpowiedne proporcyonalne, toiest, będzie BC: BA=BA: BD (III.opis.I). Dla podobieństwa znowu tróykątów BAC, DAC, iest, BC: AC = AC: DC; więc każdy z boków BA, AC, iest średnio proporcyonalny między przeciwprostokątną, a odcinkiem iemu przyległym.

3cie. z podobieństwa tróykątów ABD, ACD, iest BD: AD = AD: DC; więc prostopadła AD iest średnią proporcyonalną między odcinkami BD, DC.

Wniosek I. W proporcyi BC: BA = BA: BD, porównawszy z sobą iloczyny z wyrazów skraynych i średnich, będzie $\overline{BA}^2 = BC \times BD$; podobnie z proporcyi BC: AC = AC: DC, wypada $\overline{AC}^2 = BC \times DC$; więc $\overline{BA}^2 \times \overline{AC}^2 = BC \times BD + BC \times DC$; czyli $\overline{BA}^2 + \overline{AC}^2 = BC \times (BD + DC)$; aże $BD + DC = BC$; zatem $\overline{BA}^2 + \overline{AC}^2 = BC \times BC = \overline{BC}^2$; toiest, *kwadrat wystawiony na przeciwprostokątney BC, iest równy summie kwadratów, wystawionych na ramionach AB, AC, kąta prostego.* Dowiedziemy niżey tey samey prawdy, niezależnie od podobieństwa tróykątów.

Wniosek II. Jeżeli z punktu A wziętego na półokręgu koła, poprowadzimy dwie cięciwy AB, AC, do końców średnicy BC, będzie kąt BAC w półkolu prosty (II, 7. wn. 3); *zatem prostopadła AD, iest średnia proporcyonalna miedzy dwoma odcinkami BD, DC, średnicy BC.* Fig. 10

Wniosek III. Ponieważ proporcya BC: BA = BA: BD, daie $\overline{BA}^2 = BC \times BD$, a z proporcyi BC: CA = CA: DC, iest $\overline{CA}^2 = BC \times DC$; więc $\overline{BA}^2 : \overline{CA}^2 = BC \times BD : BC \times DC$, czyli $\overline{BA}^2 : \overline{CA}^2 = BD : DC$: toiest, *kwadraty z dwóch ramion kąta prostego maią się do siebie, iak odcinki przeciwprostokątney przyległe tym bokom.*

10. *Twierdznie.*

Fig. 11 *Dwa wielokaty foremne o równey liczbie boków, są figurami podobnemi.*

Niech będą np. dwa sześciokąty foremne ABCDEF, abcdef; ponieważ summa kątów w obu figurach iest taż sama, i równa się 8 kątom prostym (I, 26. wnio.); więc każdy z kątów A, a, iest szóstą częścią tey summy; zatem kąty te są równe sobie; dla tey samey przyczyny kąt B=b, kąt C=c, i t. d. Nadto ponieważ z natury wielokątów foremnych iest bok AB=BC=CD i t. d., tudzież bok ab=bc=cd i t .d. będzie więc AB: ab=BC: bc=CD: cd i t. d; zatem dwa te sześciokąty maią kąty równe, i boki proporcyonalne, więc są podobne. (III. opis 1).

11. *Twierdzenie.*

Fig. 12 *Części dwóch cięciw AB, CD, przecinaiących się w kole, są odwrotnie proporcyonalne; toiest, ma się AO: DO=CO: OB.*

Poprowadziwszy bowiem liniie AC,BD; dwa tróykąty ACO, BOD, maiąc kąty przy O równe (1, 2), kąt A=D, iako wpisane w ten sam odcinek (II, 7. wnio. 2), są podobne (4. wnio.); więc boki odpwiedne tych tróykątów są proporcyonalne, toiest ma się AO: DO=CO: OB (III. opis. I.)

Wniosek. Z tey Proporcyi wypada AO×OB=DO×CO; toiest, prostokąt z dwóch części iedney cięciwy, iest równy prostokątowi z dwóch części cięciwy drugiey.

12. *Twierdzenie.*

Fig. 13 *Jeżeli z punktu O obranego za kołem, poprowadzimy dwie liniie proste OB, OC, przecinaiące okrąg koła w punktach A, B, D, C; będą te liniie odwrotnie proporcy-*

onalne względem swoich części OA, OD, wziętych za kołem: toiest, będzie OB: OC= OD: OA.

Jakoż poprowadziwszy liniie AC, BD; dwa tróykąty OAC; OBD maiące kąt O spólny, kąt B=C (II, 7. wnio. 2), są podobne (4. wnio.); więc daią OB: OC=OD:OA.

Wniosek. Z tey proporcyi wypada OB×AO = OC×OD; toiest, prostokąt z dwóch liniy OB i AO, iest równy prostokątowi z dwóch liniy OC i OD.

13. *Twierdzenie.*

Jeżeli z punktu O wziętego za kołem, poprowadzimy styczną AO, i liniią OC przecinaiącą koło w dwóch punktach D, C; będzie styczna OA średnią proporcyonalną między całą liniią OC, i iey częścią OD uważaną za kołem; toiest, będzie OC: OA=OA: OD. Fig. 14

Poprowadziwszy bowiem liniie AD,AC; dwa tróykąty OAC,OAD,będą podobne(4.w), gdyż maią kąt O spólny, i kąty OCA, OAD równe, iako maiące za miarę połowę łuku AD (II, 7.); będzie zatem OC: OA=OA: OD.

14. *Twierdzenie.*

Dwa wielokąty podobne, składaią się z równey liczby tróykątów odpowiednie podobnych, i podobnie położonych. Fig. 15

Jakoż, w dwóch wielokątach ABCDE, abcde, od wierzchołków kątów A, a, poprowadziwszy przekątne AD, AC, ad, ac; ponieważ dla podobieństwa tych wielokątów iest kąt B=b, i ma się AB: BC= ab: bc (III. opis. 1); zatem dwa tróykąty ABC, abc, są pobobne (6). Dla tey samey przyczyny i troykąt AED iest podobny tróykątowi aed. Nadto ponieważ kąt BCD=bcd dla podbieństwa wielokątów, a w tróykątach podobnych CAB, cab, iest kąt BCA=bca, więc dwa te kąty równe odiąwszy od dwóch pierwszych równych, pozostanie kąt ACD=acd. Podobnie okazać można że kąt ADC=adc; więc dwa tróykąty DAC, dac, są równokątne, a przeto podobne (4. wnio.). Stosuiąc podobne rozumowanie do większey liczby tróykątów składaiących wielokąty podobne, okażemy tym samym sposobem, że dwa wielokąty podobne o iakieykolwiek liczbie boków, podzielaią się na równą liczbę tróykątów podobnych, i podobnie położonych.

Uwaga. Łatwo iest dowieść naodwrót, że dwa wielokąty są podobne, gdy się składaią z równey liczby tróykątów podobnych, i podobnie położonych.

Bo w tróykątach podobnych AED, aed, iest kąt E=e, i kąt EDA=eda: w tróykątach znowu podobnych ADC, adc, iest kąt ADC=adc, zatem będzie cały kąt D=d; dla podobney przyczyny kąt C=c i t. d. Jest także w troykątach AED, aed, AE: ED=ae: ed, ED: DA=ed: da, a tróykąty ADC, adc, daią AD: DC=ad: dc; więc, z pomnożenia dwóch ostatnich proporcyy, będzie ED: DC=ed: dc, i tak następnie; zatem dwa wielokąty maią kąty równe i boki odpowiedne proporcyonalne, przeto są podobne.

15. *Twierdzenie.*

Fig. 16 *Tróykąty podobne ACB, acb, maią się do siebie iak kwadraty z boków odpo-*

wiednych AC, ac; toiest, będzie tróykąt ABC: tróykąta $abc = \overline{AC}^2 : \overline{ac}^2$.

Poprowadziwszy bowiem z wierzchołków kątów C, c, prostopadłe CD, cd, do podstaw AB, ab; będą prostopadłe te wysokościami tróykątów ACB, acb. Aże też tróykąty podobne daią $AB : ab = AC : ac$; a tróykąty ACD, acd, maiąc kąt $A = a$, kąt prosty $D = d$, są także podobne (4. wn.), i daią $CD : cd = AC : ac$; więc, pomnożywszy te dwie proporcye przez siebie, będzie $AB \times CD : ab \times cd = \overline{AC}^2 : \overline{ac}^2$; podzieliwszy nakoniec pierwszy stosunek przez 2, wypadnie $\frac{1}{2} AB \times CD : \frac{1}{2} ab \times cd = \overline{AC}^2 : \overline{ac}^2$: a ponieważ iloczyny $\frac{1}{2} AD \times CD$, $\frac{1}{2} ab \times cd$, wyrażaią powierzchnie tróykątów ACB, acb, (II, 22. wn. 3); więc iest tróykąt ACB: tróykąta $acb = \overline{AC}^2 : \overline{ac}^2$.

16. *Twierdzenie.*

Obwody wielokatów podobnych AD, ad, maia sie do siebie iak odpowiedne boki AB, ab, albo iak odpowiedne przekątne EB, eb; a powierzchnie wielokątów podobnych, maia sie iak kwadraty z tych boków, lub iak kwadraty z tychże przekątnych. Fig. 17

Gdyż 1ód. z podobieństwa wielokątów AD, ad, iest $AB : ab = BC : bc = CD : cd = DE : de = EA : ea$; więc z ciągu tych stosunków równych, wypada, że summa poprzedników $AB + BC + CD + DE + EA$, czyli obwód wielokąta AD, tak się ma do summy następników $ab + bc + cd + de + ea$; czyli do obwodu wielokąta ad, iak ieden poprzednik do swego następnika, czyli iak bok AB do boku odpowiednego ab. Aże dla podobieństwa tróykątów AEB, aeb, iest bok AB: ab = EB: eb; więc obwód ABCDE: obwodu abcde = bok AB: ab, iak przekątna EB: eb.

2re. ponieważ tróykąty ABE, abe, są podobne; więc, na mocy poprzedzaiącego twierdzenia, będzie tróykąt ABE: abe = $\overline{EB}^2$: $\overline{eb}^2$. Tróykąty także podobne ECB, ecb, daią ECB: ecb = $\overline{EB}^2$: $\overline{eb}^2$; więc, z przyczyny spólnego tym dwóm proporcyom stosunku $\overline{EB}^2$: $\overline{eb}^2$, wypada, tróykąt ABE: abe = troykąt ECB: ecb. Podobnie okazać można, że iest tróykąt ECB: ecb = ECD: ecd; będzie zatem summa poprzedników ABE + BCE + CDE, czyli wielokąt AD, do summy następników abe + bce + cde, czyli do wielokąta ad, iak poprzednik ABE do swego następnika abe: aże tróykąt ABE: abe = $\overline{AB}^2$: $\overline{ab}^2$, albo iak $\overline{EB}^2$: $\overline{eb}^2$; więc wielokąt AD: wielokąta ad = $\overline{AB}^2$: $\overline{ab}^2$ = $\overline{EB}^2$: $\overline{eb}^2$.

Fig. 18 *Wniosek* I. Ponieważ wielokąty foremne AD, ad, o równey liczbie boków są figurami podobnemi (10); więc uważaiąc punkt O za spólny środek opisanych na nich kół; będzie promień OC = OB i promień Oc = Ob; zatem ma się OC: OB = Oc: Ob; przeto dwa tróykąty OCB, Ocb, maiące kąt spólny COB, i boki około tego kąta proporcyonalne, są podobne; daią zatem CB: co = CO: cO; więc obwód ABCDEF: obw. abcdef = CB: cb = CO: cO; a wielokąt AD: wielo. ad = $\overline{CB}^2$: $\overline{bc}^2$ = $\overline{CO}^2$: $\overline{cO}^2$.

Wniosek II. Aże koła uważać można za wielokąty foremne o nieskończoney liczbie małych boków (II, 11. uwaga), których kół promienie, średnice, i łuki o równey liczbie stopni, są liniiami odpowiednemi; więc *okręgi kół maią się do siebie iak promienie, lub iak średnice albo iak łuki o równey liczbie stopni; a same koła maią się do siebie iak kwadraty z promieni, lub iak kwadraty z średnic, albo iak kwadraty z łuków o równey liczbie stopni.*

Wniosek III. W tróykącie prostokątnym ABC, figura D wystawiona na przeciwprostokątney AC, iest równoważna dwom podobnym figurom E, F, wystawionym na ramionach kąta prostego. Jest bowiem figura $E : \overline{AB}^2 = F : \overline{BC}^2 = D : \overline{AC}^2$; zatem $E + F : \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = D : \overline{AC}^2$, czyli $E + F : D = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 : \overline{AC}^2$; aże $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$ (9 wn. I); więc figura $D = E + F$. Fig. 19

Uwaga. Ponieważ koła są figurami podobnemi, więc powierzchnia półkola ABC maiącego przeciwprostokątną AC za średnicę, iest równoważna powierzchni półkola ADB, i półkola BGC, maiących boki AB, BC, za średnice; od dwóch ostatnich powierzchni, i od półkola ABC, odiąwszy odcinki AEB, BFC, spólne trzem powierzchniom, pozostanie tróykąt ABC równoważny dwóm figurom X, Y, zawartym liniiami krzywemi. Jeżeli więc tróykąt ABC iest równoramienny, z wierzchołka kąta prostego B spuszczona prostopadła BO na podstawę AC, utworzy dwa tróykąty, z których ieden będzie równoważny figurze X, drugi figurze Y. Fig. 20

17. *Zagadnienie.*

Na daney linii ab, wykréślić wielokąt podobny wielokątowi danemu ABCDE. Fig. 17

Prowadzę w wielokącie ABCDE danym, przekątne EB, EC. Na linii ab, i przy punkcie a, kréślę kąt a=A, a przy punkcie b, kąt eba=EBA; dwie liniie ae, eb, przetną się w punkcie e; będzie więc tróykąt abe podobny tróykątowi ABE (4. wnio.). Podobnie na boku eb odpowiednym bokowi EB, kréślę tróykąt ecb podobny tróykątowi ECB, a na boku ec odpowiednym bokowi EC, kréślę tróykąt edc podobny tróykątowi EDC; będzie wielokąt ac podobny wielokątowi danemu AC; gdyż dwa te wielokąty złożone są z równey liczby tróykątów podobnych, i podobnie położonych.

ROZDZIAŁ VIII.

O POROWNANIU FIGUR WYSTAWIONYCH NA BOKACH TROYKĄTA.

17. *Twierdzenie.*

Fig. 21 *W tróykącie prostokątnym ACB, kwadrat CG wystawiony na przeciwprostokątney CB, iest równy summie dwóch kwadratów CK, BM, wystawionych na ramionach kąta prostego CAB;* toiest będzie $\overline{CB}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{BA}^2$.

Z punktu A, spuśćmy prostopadłą AE na liniią FG, i poprowadźmy liniie AF, LB. Ponieważ kąty przyległe CAB, CAK, są proste, będą dwie liniie AB, AK, składać iędnę liniią prostą BK (I, 1. wnio.). Aże kąt prosty LCA=FCB, dodawszy więc spólnie kąt ACB, będzie kąt LCB=ACF (pew. 2), nadto iest bok LC=CA iako w kwadracie, i dla podobney przyczyny bok FC=CB; przeto dwa tróykąty ŁCB, ACF, maiące dwa boki równe, i kąty równe między temi bokami zawarte, są równe sobie (I, 3). A ponieważ kwadrat CK, iest podwóyny względem tróykąta LCB, stoią bowiem na tey samey podstawie LC, i maią spólną wysokość LK (II,21); dla podobney przyczyny i prostokąt CE, iest podwóyny względem tróykąta ACF, gdyż mają też samą podstawę CF, i spólną wysokość FE; zatem kwadrat CK i prostokąt CE, będąc podwóynemi względem dwóch tróykątów LCB, ACF, równych, są równoważne sobie: podobnie okazać można, że prostokąt BE, iest równoważny kwadratowi BM; aże te dwa prostokąty składaią kwadrat CG; będzie więc $\overline{CB}^2=\overline{CA}^2+\overline{BA}^2$.

Wniosek I. W tróykącie ACB, ieżeli kwadrat z boku CB, iest równy summie kwadratów z boków AC, AB, będzie kąt CAB prosty.

Wniosek II. Ponieważ kwadrat z przeciwprostokątney, iest równy summie dwóch kwadratów z ramion kąta prostego; więc kwadrat z iednego z tych ramion, będzie równy kwadratowi różnicy między kwadratem z przeciwprostokątney, a kwadratem z drugiego ramienia kąta prostego.

Uwaga. Chcąc na mocy poprzedzaiącego twierdzenia zrobić kwadrat równy summie, lub różnicy dwóch kwadratów danych, kreślę kąt prosty; i w pierwszym razie, od wierzchołka kąta, na iednem z iego ramion odcinam bok kwadratu iednego, i na ramieniu drugiem bok kwadratu drugiego; a przeciwprostokatna będzie bokiem kwadratu szukanego: w drugim razie, od wierzchołka kąta prostego, na iednem iego ramieniu odcinam bok kwadratu mnieyszego, i z punktu gdzie się ten bok kończy, bokiem kwadratu większego, zakréślam łuk przecinaiący drugie ramie kąta prostego; a to odcięte ramie będzie bokiem kwadratu różnicy dwóch kwadratów danych.

18. *Twierdzenie.*

Fig. 22 *Kwadrat wystawiony na linii AB, równey summie dwóch liniy AC, CB, składa się z kwadratu wystawionego na linii AC, z kwadratu na linii BC, i z dwóch prostokątów, których bokami przyległemi są linije AC, BC: toiest, będzie* $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 + 2AC \times BC$.

Wystawiwszy bowiem na linii AB kwadrat AD, wziąwszy AH=AC, i przez punk H, poprowadziwszy HF równoległą do AB, a przez punkt C, równoległą CJ do BD; kwadrat AD podzieli się na cztery części: pierwsza AG, iest kwadratem wystawionym na linii AC, ma bowiem kąty proste, boki przeciwległe równe (1. 20), i bok AH=AC. Dla podobney przyczyny, część druga GD, iest kwadratem wystawionym na linii BC, gdyż AB=AE i AC=AH, więc AB—AC=AE—AH, czyli CB=EH=JG=GF; nakoniec część trzecia i czwarta, są prostokątami HJ, CF, których boki HG, CG równe są linii AC, boki zaś JG, GF równe są linii BC, będzie więc $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 + 2AC \times BC$.

19 *Twierdzenie.*

Fig. 23 *Kwadrat wystawiony na linii AB, która iest różnicą dwóch linii AC, BC, ró-*

wna się summie kwadratów wystawionych na liniiach AC, BC, zmnieyszoney dwoma prostokątami z tychże liniy AC i BC; to *iest, będzie* $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2-2\,AC\times BC$.

Jakoż na linii AC, wystawmy kwadrat AD, weźmy AH=AB, i z punktu H, poprowadźmy HF równoległą do AC, a z punktu B, równoległą BJ do CD, nakoniec na linii HE, wykreślmy kwadrat LE: łatwo iest okazać, że LE iest kwadratem z linii BC; AG kwadratem z linii AB; LJ, CJ, są prostokątami z liniy AC i BC; więc od całey figury ADL, czyli od kwadratu z linii AC, i od kwadratu z linii BC, odiąwszy dwa prostokąty LJ, CJ, z liniy AC i BC, pozostanie kwadrat AG z linii AB; więc $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2-2AC\times BC$.

Uwaga. Do zrozumienia twierdzeń następuiących potrzebna iest ta prawda: że gdy do iakieykolwiek ilości A, dodamy i odeymiemy tęż samą ilość B, czyli kiedy $+B-B$ położone przy A, zniszczymy, ważność ilości A nie odmieni się; zatem będzie $A+B-B=A$.

20. *Twierdzenie.*

W tróykącie ostrokątnym ACB, spuściwszy z wierzchołka C prostopadłą CD na podstawę AB; kwadrat z boku AC przeciwległego kątowi ostremu B, będzie równy summie kwadratów z dwóch ramion AB, BC, kąta ostrego, zmnieyszoney dwa razy wziętym prostokątem z boku AB, na który pada prostopadła CD, przez odcinek BD, zawarty między tą prostopadłą a wierzchołkiem kąta ostrego B: toiest, będzie $\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2AB\times BD$. Fig. 24 i 25

Jakoż dwa tróykąty prostokątne ACD, DCB, daią $\overline{AC}^2=\overline{AD}^2+\overline{CD}^2$; $\overline{CD}^2=\overline{CB}^2-\overline{DB}^2$ (17). W pierwsze wyrażenie, położywszy za $\overline{CD}^2$, iego ważność, będzie $\overline{AC}^2=\overline{AD}^2+\overline{CB}^2-\overline{DB}^2$. Aże odcinek $AD=AB-BD$, a na fig. 25, odcinek $AD=BD-AB$; będzie zatem w pierwszym i drugim przypadku, $\overline{AD}^2=\overline{AB}^2-2AB\times BD+\overline{BD}^2$ (19). Więc w wyrażenie drugie na $\overline{AC}^2$, położywszy ważność za $\overline{AD}^2$, będzie $\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2AB\times BD$.

21. *Twierdzenie.*

Fig. 25 *W tróykącie rozwartokątnym BAC, kwadrat z boku BC, przeciwległego kątowi rozwartemu BAC, iest równy summie kwadratów z boków BA, AC, zawieraiących kąt rozwarty, powiększoney dwa razy wziętym prostokątem z podstawy BA, przez odcinek AD zawarty, między wierzchołkiem A kąta rozwartego a prostopadłą CD, do podstawy przedłużoney BA: toiest będzie* $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+2AB\times AD$.

Jakoż tróykąty prostokątne DBC, DCA, daią $\overline{BC}^2=\overline{BD}^2+\overline{CD}^2$, i $\overline{CD}^2=\overline{AC}^2-\overline{AD}^2$ (17); w pierwsze wyrażenie włożywszy ważność na $\overline{CD}^2$, będzie $\overline{BC}^2=\overline{BD}^2+\overline{AC}^2-\overline{AD}^2$; aże $BD=AB+AD$, czyli $\overline{BD}^2=\overline{AB}^2+\overline{AD}^2+2AB\times AD$ (18); więc tę ostatnią ważność na $\overline{BD}^2$, położywszy w ważność drugą na $\overline{BC}^2$, będzie $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+2AB\times AD$.

22. *Twierdzenie.*

Fig. 26 *W iakimkolwiek tróykącie ABC, z wierzchołka kąta A, do środka E podstawy BC, poprowadziwszy liniią AE; będzie podwoiony kwadrat z tey linii, powiększony podwoionym kwadratem z połowy podstawy,* *równy summie kwadratów z pozostałych boków tróykąta; toiest, będzie* $2\overline{AE}^2 + 2\overline{BE}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$.

Bo z punktu A, spuściwszy prostopadłą AD na podstawę BC; w tróykącie ostrokątnym AEC, będzie $\overline{AC}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EC}^2 - 2EC \times ED$ (20). W tróykącie rozwartokątnym ABE, iest $\overline{AB}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EB}^2 + 2EB \times ED$ (21); więc, dodawszy te dwie równości do siebie, i uważaiąc, że EB=EC; będzie $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\overline{AE}^2 + 2\overline{EB}^2$.

Wniosek. W każdym równoległoboku AC, Fig. 27
summa kwadratów z boków iego, iest równa summie kwadratów z przekątnych.

Tróykąt bowiem ABC, daie $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2\overline{AE}^2 + 2\overline{BE}^2$; tróykąt ADC, daie podobnie $\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 = 2\overline{AE}^2 + 2\overline{DE}^2$; dodawszy do siebie te dwie równości, i uważaiąc, że BE=DE (1, 4); będzie $\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{DC}^2 = 4 \times \overline{AE}^2 + 4 \times \overline{DE}^2$. Aże $4\overline{AE}^2$ iest kwadratem z 2AE, czyli z AC, a $4\overline{DE}^2$ iest kwadratem z 2DE czyli z BD; zatem summa kwadratów z boków równoległoboku, iest równa summie kwadratów z iego przekątnych.

23. *Zagadnienie.*

Daną liniią prostą AB, podzielić na pewną liczbę części równych; albo na części proporcyonalne liniiom danym P, Q, R. Fig. 28

1ód. Daymy, że liniią AB mamy podzielić na 5 części równych. Przez koniec A linii AB, poprowadźmy iakkolwiek liniią AG nieograniczoną, i na tey od punktu A, weźmy liniią AC iakieykolwiek długości, i przenieśmy ią 5 razy na AG; a gdy punkt G ostatniego podziału, z końcem B linii daney złączymy liniią GB, i poprowadzimy CJ równoległą do GB; będzie liniia AJ piątą częścią AB; tak że przeniosłszy AJ, 5 razy na *AB*, podzielimy tę ostatnią liniią na 5 równych części.

Bo w tróykącie AGB, liniia CJ iest równoległa do GB, więc przecina boki AG, AB, proporcyonalnie (1); toiest, ma się AG:AC=AB: AJ, aże AC iest piątą częścią AG, więc AJ iest piątą częścią AB.

2re. aby podzielić liniią AB na części proporcyonalne liniiom P, Q, R; przenoszę liniie te, na liniią AG, i na tey punkt G ostatniego podziału, z punktem B, złączywszy liniią GB, a przez punkta inne podziałów linii AG, poprowadziwszy liniie równoległe względem GB; te równoległe podzielą liniią daną AB, na części proporcyonalne względem liniy danych P, Q, R (I).

24. *Zagadnienie.*

Fig. 29 *Do trzech danych liniy A, B, C, znaleść czwartą proporcyonalną.*

Prowadzę pod iakimkolwiek kątem dwie liniie nieograniczone DE, DF; i na linii DE, biorę DA= A, DB=B, na linii DF biorę DC=C; prowadzę liniią AC, a do tey przez punkt B równoległą BX; będzie liniia DX czwartą proporcyonalną szukaną. Bo w tróykącie ADC, BX iest równoległa do AC, będzie zatem DA: DB=DC: DX (1); aże pierwsze trzy wyrazy tey proporcyi są równe trzém liniiom danym, więc DX iest liniią żądaną.

Uwaga. Do dwóch danych liniy A, B, i linii trzeciey C równey B, szukaiąc podobnie czwartey proporcyonalney, wynaydziemy trzecią proporcyonalną do liniy A i B.

25. *Zagadnienie.*

Znaleść średnią proporcyonalną między dwiema danemi liniiami A i B. Fig. 30

Na linii nieograniczoney DF, biorę DE=A, EF=B; na linii całey DF iako na średnicy, kréślę półkole DGF, i z punktu E wyprowadzam prostopadłą EG, do średnicy DF, przecinaiącą okrąg koła w punkcie G; będzie liniia EG średnią proporcyonalną szukaną.

Poprowadziwszy bowiem liniie GD, GF, będzie kąt DGF w półkolu prosty (II,7.w.3), a liniia EG średnią proporcyonalną między odcinkami DE, EF (9.), a zatem i między liniiami A, B, równemi tym odcinkom.

26. *Zagadnienie.*

Daną liniią prostą AB, podzielić w średnim i skraynym stosunku; to iest podzielić ią na dwie części takie, aby część większa była średnią proporcyonalną między liniią całą a drugą iey częścią. Fig. 31

Z końca A linii AB, prowadzę do niey prostopadłą CA równą połowie AB; z punktu C iako środka, promieniem AC zakréślam okrąg koła, prowadzę liniią HCB, biorę na koniec BE=DB; będzie liniia AB podzielona w punkcie E, w stosunku żądanym.

Jest bowiem liniia AB styczną, a liniia HB przecina koło, zatem będzie HB: AB=AB: BD, (13); stąd HB—AB: AB=AB—DB: BD; a że promień CA iest równy połowie AB, więc średnica HD=AB; zatem, proporcyi tey będzie wyraz pierwszy HB—AB=HB — HD=BD, wyraz trzeci AB—DB=AB—BE=AE; więc taż proporcya zamieni się na BD: AB=AE: BD; czyli odmieniwszy w niey mieysce wyrazom, i wziąwszy BE za BD, będzie AB: BE= BE: AE; aże AB>BE, więc BE>AE, zatem część większa BE linii AB, iest średnią proporcyonalną między AB, AE: więc liniia AB iest podzielona w punkcie E, w stosunku żądanym.

27. *Zagadnienie.*

Znaleść kwadrat równoważny danemu prostokątowi, albo tróykątowi.

1óď. oznaczywszy danego prostokąta wysokość przez w, podstawę przez p; a bok kwadratu szukanego przez x; ponieważ prostokąt ma być równoważny kwadratowi, więc iloczyn z podstawy przez wysokość prostokąta, będzie równy iloczynowi z dwóch boków kwadratu; toiest $p \times w = x^2$ (II. 22), skąd p: x=x: w. Co pokazuie, że między podstawą a wysokością prostokąta danego, szukać należy linii średni[illegible] proporcyonalney, na którey wystawion[illegible] kwadrat będzie równoważny prosto[illegible]ątowi danemu.

2re. podobnie między podstawą a połową wysokości tróykąta danego, wynayduie się średnia proporcyonalna, a na tey wystawiony kwadrat będzie równoważny tróykątowi danemu.

28. *Zagadnienie.*

Fig. 32 *Z wiadomey średnicy AD, koła ABCDEF, znaleść przez przybliżenie okrąg tegoż koła.*

Niech AB będzie bokiem sześciokąta foremnego wpisanego w koło ABCDEF, A′B′ bokiem sześciokąta foremnego opisanego na kole, tak, aby boki tych dwóch sześciokątów były do siebie równoległe. Poprowadźmy promień OG' prostopadły do boku AB, a zatem prostopadły i do boku $A'B'$ równoległego do AB (1, 19 wn.), i dzielący w punkcie G, bok AB na dwie równe części (II, 5); poprowadźmy nadto liniie $A'O$, $B'O$. Ponieważ bok AB iest równy promieniowi BO, więc obwód sześciokąta foremnego wpisanego w koło będzie $=6AB$ (II, 11. wn. I). Nadto w tróykącie prostokątnym GOB, iest $\overline{GO}^2=\overline{OB}^2-\overline{GB}^2$ (17. w. 2), sama więc liniia $GO=\sqrt{\overline{OB}^2-\overline{GB}^2}$; tróykąty znowu podobne $AOB, A'OB'$, daią $A'B'$: $AB=G'O$: GO, skąd $A'B'=\frac{AB\times G'O}{GO}$

$=\frac{AB\times G'O}{\sqrt{\overline{OB}^2-\overline{GB}^2}}$; zatem obwód sześciokąta foremnego opisanego na kole $ABCDEF$, będzie $=\frac{6\,AB\times G'O}{\sqrt{\overline{OB}^2-\overline{GB}^2}}$. A że okrąg koła $ABCD$.. środkuie między obwodami tych dwóch wielokątów, iest zatem oczywiście mnieyszy od obwodu sześciokąta foremnego opisanego, a większy od obwodu sześciokąta foremnego wpisanego w koło; więc dodawszy do siebie ważności obwodów tych dwóch sześciokątów, i wziąwszy wypadaiącey summy połowę, otrzymamy w częściach średnicy AD, pierwszą ważność przybliżoną okręgu koła $ABCDEF$. Dla otrzymania drugiey ważności okręgu bardziey przybliżoney, poprowadźmy liniią $G'B$, i do niey równoległą HK; pierwsza z nich będzie bokiem 12kąta foremnego wpisanego, druga bokiem 12kąta foremnego opisanego na kole $ABCD$..; poprowadźmy nakoniec promień Og', prostopadły do HK, ten będzie prostopadły i do boku G'B w iego środku g. W tróykącie prostokątnym G'GB, iest $\overline{G'B}^2 = \overline{G'G}^2 + \overline{GB}^2$, więc $G'B = \sqrt{\overline{G'G}^2 + \overline{GB}^2}$; zatem obwód 12kąta foremnego wpisanego w koło będzie $= 12 \times \sqrt{\overline{G'G}^2 + \overline{GB}^2}$. Znaydziemy podobnie z tróykątów HOK, G'OB, że obwód 12kąta foremnego opisanego na kole ABCDEF iest $= 12 \times \dfrac{G'B \times g'O}{gO}$; dodawszy znowu ważności tych dwóch obwodów, i wziąwszy otrzymaney summy połowę, znaydziemy drugą więcey przybliżoną ważność okręgu ABCDEF (*). Wpisuiąc następnie i opi-

(*) Przypuściwszy że promień $AB = 1$, będzie obwód sześciokąta foremnego wpisanego w koło, czyli $6 \times AB = 6$, a obwód sześciokąta foremnego opisanego na kole ABCDEF czyli $6A'B' = \dfrac{6 \times 1 \times 1}{\sqrt{(1 - \frac{1}{4})}} = \dfrac{6}{\sqrt{(\frac{3}{4})}} = \sqrt{\dfrac{12}{3}} = 6{,}9282032$; więc połowa summy tych dwóch obwodów, toiest $\dfrac{6 + 6{,}9282032}{2} = 6{,}4641016$.. Zatem 6,4641016 iest pierwszą ważnością przybliżoną okręgu koła ABCDEF. Podobnie drugą bardziey przybliżoną ważnością okręgu ABCDEF, zapomocą 12kąta foremnego wpisanego wkoło i opisanego na niemi, będzie $\dfrac{6{,}2116571 + 6{,}4307806}{2} = 6{,}3212188$; i tak następnie. Nakoniec ponieważ znaleziono, że obwód wielokąta foremnego o 96 bokach wpisanego w koło iest $= 6{,}2820639$, a obwód wielokąta foremnego, o tyluż bokach opisanego na kole iest $= 6{,}2854292$, więc połowa summy tych dwóch obwodów równa 6,2837465, może być wzięta za ważność okręgu koła, którego promień $= 1$. Zatem stosunek średnicy tego koła do okręgu będzie $2 : 6{,}2837465$, czyli podzieliwszy ten stosunek przez 2, i zatrzymawszy tylko dwie pierwsze cyfry dziesiętne, będzie stosunek średnicy do okręgu koła, $1 : 3{,}14$ czyli $100 : 314$, a który iest blizko $= 3 : \frac{1}{7} = 7 : 22$.

suiąc na kole ABCDEF, wielokąty foremne maiące zawsze dwa razy więcey boków, niż poprzedzaiące, ieżeli promień koła wyrazimy przez iakąkolwiek liczbę, i tę wprowadzimy w otrzymane ważności na obwody wielokątów, i brać będziemy połowy tych ważności, otrzymywać będziemy coraz bardziey przybliżoną ważność okręgu koła, w częściach wiadomey iego średnicy lub promienia. Tą drogą postępuiąc Archimedes, przez wielokąty foremne o 96 bokach, ieden wpisany w koło, a drugi na niém opisany, znalazł: że stosunek średnicy do okręgu koła iest blizko równy 7: 22; czyli że okrąg koła iest przeszło trzy razy większy od średnicy, Poźniey po Archimedesie znaleziono krótszą drogą inne stosunki bardziey przybliżone (*); z tych ieden iest 113: 355, drugi 100000: 31415926 czyli 1: 3, 1415926.

Uwaga. Którykolwiek z tych stosunków służy do wynalezienia przez proporcyą okręgu koła z wiadomey średnicy, albo do wynalezienia średnicy z danego okręgu koła; iak to zobaczymy w następuiących dwóch przykładach:

15*d.* *Znaleść powierzchnią koła, którego promień = 5 łokci.*

Z proporcyi 7: 22 = 10: x, wynaydę okrąg koła równy $\frac{220}{7}$, który pomnożywszy przez połowę promienia (II, 24. wn. I), będzie powierzchnia szukana $= \frac{220}{7} \times \frac{5}{2} = 78 \frac{4}{7}$ łok. kwa-

(*) Mówimy bardziey przybliżone, ponieważ stosunek Archimedesa obrócony na dziesiętny 1: 3, 14 ma tylko dwie cyfry dziesiętne 0, 14 prawdziwe, kiedy stosunek 113: 355 ma ich prawdziwych sześć, a stosunek 1: 3,1415926, ma ich siedem.

2re. W kole którego średnica=42 łokci wynaleść powierzchnią wycinka maiącego łuk= 60°.

Z wiadomey średnicy, wynayduię okrąg koła, przez proporcyą 7:22=42:X=132 łok. Długość łuku wycinka otrzymam z proporcyi 360°: 60° = 132: X=22 łokci; którą długość pomnożywszy przez pół promienia czyli przez 10, 5; wypadnie powierzchnia wycinka=22 X 10, 5=231 łokciom kwadratowym (II, 24. wn. 2).

Uwaga. Każdą figurę prostokréślną można zamienić na tróykąt (II,25), a zatem i na kwadrat iey równoważny (III,27); chcąc zaś wynaleść kwadrat równoważny kołu danemu, między okręgiem tego koła, a połową iego promienia, szukać potrzeba średniey proporcyonalney, na którey wystawiony kwadrat, tem mniey różnić się będzie od koła, im bardziey przybliżony będzie stosunek średnicy tego koła, do iego okręgu. Szukanie kwadratu równoważnego figurze prostokreślney, nazywa się *kwadraturą* tey figury; podobnie i zagadnienie *kwadratury koła* zależy na znalezieniu kwadratu równoważnego kołu którego średnica iest dana. To zagadnienie nie może być z dokładnością ieometrycznie rozwiązane.

29. *Zagadnienie.*

Wykréślić podziałkę (scala).

Fig. 33 Dzielę liniią prostą DC na dziesięć części równych, z końców D i C wyprowadzam do niey dwie prostopądłe AD, BC, i na iedney z nich np. na AD, biorę dziesięć części równych iakieykolwiek długości, i też same części przenoszę na BC; od A do B prowadzę liniią AB nakoniec prowadzę liniie ukośne A9, CX, i inne liniie proste, iak pokazuie figura. Ponieważ dwa tróykąty XCB, mCI, są podobne, więc daią CI: CB=mI:XB, aże CI z wykréślenia iest 10tą częścią linii BC, więc i mI, iest 10tą częścią linii BX czyli Cn. Aże znowu Cn iest 10tą część linii DC, więc $mI = \frac{1}{100}$DC. Podobnie okazać można, że części linii równoległych do AB oznaczonych liczbami 2, 3, 4 i t. d. zawarte, między liniiami BC i XC, są $\frac{2}{100}$, $\frac{3}{100}$, $\frac{4}{100}$, i t. d. linii DC. Sznur mierniczy, o którym niżey mówić będziemy, ma prętów 10, a pręt pręcików 10. Gdyby więc liniia DC wyrażała sznur I, liniia Cn albo BX wyrażałaby pręt I, a liniie zawarte między liniiami BC, CX wyrażałyby I, 2, 3, 4 i t. d. pręciki; zatem liniia np. c3 oznacza 5 prętów i 3 pręciki; liniia d6 oznacza 7 prętów i 6 pręcików. Przedłużywszy liniią DC do F, tak aby było DC=CE=EF i dokończywszy figury; liniia cg wyrażać będzie sznurów 2, prętów 5, i pręcików 3; liniia zaś dh, sznur I, prętów 7, i pręcików 6.

Uwaga. Tak wykréślona podziałka iest Fig. 34 naywygodnieysza do użycia. Można ią ieszcze robić i tym sposobem: podzieliwszy liniią AF na części równe AB, BC, CD, DF, z których każda niech wyraża np. 10 łokci; dzielę AB na dwie części równe AM, MB, z których każda oznaczać będzie 5 łokci; dzielę nakoniec AM, MB na 5 części równych, z których każda oznacza ieden łokieć. Aby więc na tey podziałce wyrazić łokci 35, 24, i t. d. biorę liniie FM, DN...

ROZDZIAŁ IX.

O NARZĘDZIACH UŻYWANYCH DO POMIARU GRUNTÓW.

Na zasadach wyłożoney dotąd teoryi opiera się sposób mierzenia powierzchni gruntów, czyli zdeymowania planów. Sposób ten zależy na tem, aby wykréślić na papierze figurę podobną figurze gruntu.

Pomiar zaczyna się od wzięcia miar pewnych na gruncie, za pomocą właściwych do tego narzędzi, do czego używa się *łańcucha* lub *sznura* i *tyk*; gdzieindziey *węgielnicy mierniczey*; w innych razach *bussoli*, *stolika*, albo *kątomiaru*. Poczem podług miar wziętych i sprowadzonych do pewney podziałki, wykréśliwszy, za pomocą liniiału, cyrkla, węgielnicy, i przenośnika, figurę na papierze; nakoniec za pomocą rysunku, cieni, kolorów, i innych umowionych znaków, nadawszy właściwy charakter wszystkim przedmiotom przeniesionym na figurę; zrobi się plan czyli mappa wyobrażaiąca figurę podobną figurze gruntu.

Oto iest krótkie opisanie wspomnionych dopiero narzędzi.

I. *Sznurem mierniczym* nazywa się długość zawieraiąca 10 prętów.

Łańcuch mierniczy czyli *półsznur* zamyka $37\frac{1}{2}$ łokci warsz. Składa się on z 50 drutów żelaznych, przez małe kółka połączonych z sobą, i wynoszących razem 5 prętów. Pręt każdy dzieli się na

10 pręcików, czyli stóp ieometrycznych, każdy pręcik zawiera 10 ławek, ławka zamyka 1, 8 cali i t. d. Na końcach łańcucha daią się kółka tak wielkie; aby przez nie, laski okute na końcu żelazem na 3 lub 4 stóp długie, służące do ciągnienia sznura, przechodzić mogły. Przy łańcuchu znaydować się powinno 10 kołków drewnianych, półłokciowych na końcu okutych żelazem.

Pomiar za pomocą łańcucha odbywa się wprawdzie z większą dokładnością niż za pomocą sznurów mierniczych ukręconych z przędziwa; lecz że te łatwiey i z mnieyszym sporządzaią się kosztem, wypada przeto namienić sposób ich przygotowania, aby do użycia służyć mogły. Na ten koniec bierze się sznur mierney grubości, blisko na 40 łokci długi, i moczy się przez dni kilka w oleiu, aby potem w powietrzu wilgotnem lub suchem, iak naymniey skracał się lub przedłużał. Po zupełnem wysuszeniu sznura robią się na iego końcach pętelki, które założywszy na dwa kołki, rozciąga się niemi sznur na równey ziemi; poczem do iednego iego końca, przykłada się koniec pręta drewnianego czyli laski na $7\frac{1}{2}$ łokci długiey, i w punkcie gdzie drugi koniec tey laski przypada na sznurze, zawięzuie się na nim węzeł; tym samym sposobem przeniosłszy laskę na sznur 5 razy, zrobimy go długim na 5 prętów, czyli 50 stóp, albo $37\frac{1}{2}$ łokci. Tak przygotowany sznur równy połowie sznura mierniczego, w pomiarach mnieyszey dokładności wymagaiących, zamiast łańcucha może być wygodnie użyty.

II. *Tyki* albo *laski* służące do wytykania liniy, są to drążki mniey lub więcey długie, na iednym końcu okute żelazem, aby łatwo w ziemię wchodzić mogły, na drugim opatrzone chorągiewkami, częścią z czarnego, a częścią z białego płótna zrobionemi, aby za ich pomocą w znacznych odległościach łatwo mogły być widziane. W niedostatku chorągiewek, wierzchołki tyk słomą okręcać się zwykły.

Fig. 35 III. *Węgielnica miernicza* iest koło mosiężne lub drewniane wydrążone wewnątrz i podzielone na 4 równe części przez dwie średnice AB, CD, dosiebie prostopadłe. Na końcach A, B, C, D, średnic, osadzone są prostopadłe do płaszczyzny koła celowniki czyli liniiały, z których każdy ma podłużną szparę, do teyże płaszczyzny prostopadłą. Przez tę szpary celuie się do przedmiotów. W środku koła iest sztyft mosiężny na trzy cale długi, służący do osadzenia węgielnicy na nodze drewnianey, maiącey koniec okuty żelazem, aby łatwiey w ziemi utwierdzać się mogła. Często węgielnica miernicza składa się tylko z dwóch liniiałów, czyli prawideł spoionych z sobą na krzyż pod kątami prostemi, opatrzonych w końcu prostopadłemi celownikami i osadzonych na tróynogu drewnianym. Węgielnica iak iest narzędzie proste, tak bardzo wygodne do prowadzenia na gruncie liniy prostopadłych.

Fig. 36 Nazywa się także *węgielnicą* inne narzędzie drewniane lub metaliczne, służące do prowadzenia prostopadłych na papierze, które się składa z dwóch prawideł spoionych w końcu pod kątem prostym, niekiedy stałych, a czasem otwierać i zamykać się mogących za pomocą zawiasek.

IV. *Bussolla* używana w zdeymowaniu pianów, nayczęściey do prędkiego przenoszenia wszystkich drobnieyszych załamków figur, iest narzędzie którego użycie zasadza się na tey własności igły magnesowey, że ta obraca się zawsze ku północy. Składa się bussola z puszki mosiężney okrągłey, która niekiedy osadzona bywa w tabliczce drewnianey kwadratowey, na cal grubey, i od 6 do 8 cali długiey; w środku puszki wznosi się sztyft stalowy dobrze zaostrzony, na którym osadzona igiełka magnesowa obraca się wolno w kole metalicznem podzielonem na 360°. Jeden koniec igiełki skazuiący północ, który nazywa się *punktem północnym*, iest koloru wodnego, drugi koniec, skazuiący południe, iest biały. Na iednym boku AB narzędzia, równolegle do linii północno-południowey, toiest równolegle do średnicy koła przechodzącego przez podziały 360°. i 180°, osadzone iest prawidło, z dwoma w końcach celownikami, które obracaiąc się na zawiaskach mogą się składać, lub rozłożone czynić z prawidłem kąty proste; niekiedy celowniki te na końcach średnicy CD osadzone bywaią. Bussola na tróynogu w czasie roboty osadzać się zwykła. Fig. 37

V. *Stolik*, iest tablica drewniana dobrze wygładzona, maiąca około 20 cali długości a 18 szerokości, tak osadzona na kolanie czyli krążku wspartym na tróynogu, iż podług potrzeby może się obra- Fig. 38

cać i przytwierdzać na nim. Nadaie się stolikowi położenie *poziome* (*), za pomocą narzędzia zwanego *równowagą* (libella): to iest rurki szklanney kształtu walcowatego (**), napełnioney iakimkolwiek płynem, i zamykaiącey bulkę powietrzną, która gdy w tem narzędziu wzdłuż kładzionem na stoliku ustanowi się w równey odległości od obudwóch końców rurki, skazuie położenie stolika poziome.

Aby stolik przygotować do użycia potrzeba na nim rozciągnąć arkusz białego papieru zmoczony białkiem iaia w piwie rozbitém, poczem brzegami do stolika przykleić, i na wolnem powietrzu wysuszyć. Na tak przykleionym papierze żeby oznaczyć położenie i odległość danych punktów na ziemi, używa się do tego prawidła AB z dwoma w końcach celownikami AC, BD, (dioptrae), prostopadłemi do AB; którego dobroć zależy na tem, aby szpary celowników odpowiadały zupełnie tey krawędzi prawidła, przy którey na stoliku kreślą się liniie proste. Na tem samem prawidle wyrobiona bywa podziałka służąca do kreślenia na stoliku liniy proporcyonalnych wzglę-

---

(*) Ciężar na sznurku wolno zawieszony, pokazuie liniią *pionową;* płaszczyzna prostopadła do tey linii i dotykaiąca się wierzchu ziemi, zowie się *poziomem* (horizon). Woda i wszystkie płyny będące w spoczynku, w małey części swoiey powierzchni uważane, układaią się podług tey płaszczyzny; dlatego dochodzimy położenia poziomu, albo przez zawieszone ciężary, albo przez powierzchnie płynów będącyeh w spoczynku.

(**) Równowaga miewa niekiedy formę puszki okrągłey.

dem długości oznaczonych na ziemi. Końce tych liniy znaczą się na stoliku za pomocą igiełek cienkich, prostych, i maiących główki oblepione lakiem.

Dla zgodzenia punktów oznaczonych na stoliku ustawionym poziomo, z punktami danemi na gruncie, używa się *pionu*, czyli tak zwanych szczypczyków drewnianych maiących kształt kąta A, na którego ramieniu AE dłuższem od AC iest zawieszony w końcu ciężarek na nici.

Znaydować się nakoniec powinna przy stoliku igiełka magnesowa, czyli mała bussola służąca do *zorientowania* planu zrobionego na stoliku, czyli do oznaczenia na nim linii północno-południowey. Na ten koniec, na stoliku ustawionym poziomo, zgodziwszy liniią wiadomą z liniią iey odpowiedną wymierzoną na ziemi, kładzie się na nim bussola i póty obraca się póki igiełka nie stanie na linii północno-południowey, a wtedy wzdłuż krawędzi puszki pociągnięta na stoliku liniia prosta, będzie kierunkiem magnesowey igiełki, czyli linii północno-południowey.

VI. *Kątomiar* (astrolabium) używany do mierzenia kątów na ziemi, iest koło mosiężne podzielone na 360 stopni; albo też półkole podzielone na 180°, i zakończone prawidłem stałem AB, do którego końców przyprawione są dwa celowniki prostopadłe do AB. W środku E kątomiaru, osadzone iest drugie prawidło ruchome DC, opatrzone także na końcach dwoma celownikami prostopadłemi do DC, Na prawidle stałem iest liniia prosta przechodząca przez środek E, i odpowiadaią- Fig. 39

ca dwom punktom O, 180; a na prawidle ruchomem liniia prosta zakończona skazówką, pokazuiącą rozmaite stopnie na półokręgu, w czasie obrotu prawidła ruchomego około środka E. W tymże środku kątomiaru osadzona iest w puszce igła magnesowa służąca do oznaczenia położenia przedmiotów względem linii północno-południowey, i wschodnio-zachodniey. Niżey w kierunku środka E, zawieszony bywa w kątomiarze pion, czyli ciężarek na nici, służący do zgodzenia iego środka z punktem danym na ziemi. Narzędzie to iest tak osadzone na tróynogu, iż zapomocą sztuki zwaney kolanem, można ie na wszystkie strony obracać, i płaszczyźnie półkola, podług potrzeby, nadawać położenie poziome, za pomocą równowagi, a pionowe, używaiąc pionu.

W pomiarach, gdzie wypada uważać przedmioty w znacznych odiegłościach, używa się kątomiarów opatrzonych, zamiast celowników, dwiema lunetami osadzonemi, iedna na prawidle stałem, druga na ruchomem. Chcąc za pomocą kątomiaru wymierzyć kąt na ziemi, pod któ-
Fig. 40 rymby patrzący z punktu O mógł widzieć dwa przedmioty A, B; ustawić należy kątomiar do poziomu tak, aby iego środek odpowiadał punktowi O, potem prawidło nieruchome skierować ku punktowi A, ruchome zaś ku punktowi B; a liczba stopni oznaczona na półokręgu skazówką prawidła ruchomego, będzie miarą kąta szukanego.

Potrzeba mierzenia z dokładnością kątów, była powodem do urządzenia kątomiarów tak, aby na nich brać się mogły stopnie z minutami. W tym celu na półokręgu kątomiaru wzięto łuk o pewney liczbie stopni, i przeniesiono go na łuk drugi z nim spółśrodkowy o tey samey długości, wyrobiony na brzegu prawidła ruchomego; poczem podzielono ten ostatni łuk na tyle części równych, więcey iednością, ile łuk wzięty zamykał stopni, i podział takowy nazwano podziałem *Nonniusza.* Daymy np. że na półokręgu kątomiaru był wzięty łuk 19°, i ten przeniesiony na brzeg prawidła ruchomego, podzielony został na 20 części równych; każda więc z takowych części będzie równa $\frac{19}{20}$ stopnia czyli równa 57′ ;zatem łuk ab wyrażać będzie 3′, łuk cd, 6′, i t. d. aż do 20 podziału. Jeżeli więc w braniu kątów, skazówka prawidła ruchomego pada zupełnie na ieden z podziałów stopniowych kątomiaru, natenczas liczba stopni zawarta między dwoma prawidłami będzie prawdziwą miarą kąta szukanego. Jeżeli zaś ta skazówka pada pomiędzy stopnie kątomiaru, wtedy uważać potrzeba, który z podziałów Nonniusza nayblizey lub zupełnie pada na podział stopniowy brzegu kątomiaru, i między liniią łączącą te podziały a skazówką prawidła ruchomego, wziąwszy na Nonniuszu liczbę podziałów pośrednich, i przez tę liczbę pomnożywszy 3′, a otrzymany stąd iloczyn dodawszy do liczby stopni zawartych między dwoma prawidłami kątomiaru, wypadnie kąt zamykaiący stopnie z minutami. I tak np. ieżeli trzeci podział Nonniusza zgadza się z podziałem stopniowym kątomiaru, wtedy do liczby stopni zawartych między dwoma prawidłami dodać potrzeba 9′, i tak następnie. Fig. 41

Tym tedy sposobem rachować można na kątomiarze minuty od 3 do 3. Gdyby zaś na półokręgu kątomiaru był wzięty łuk 11°, i ten na brzegu prawidła ruchomego podzielony został na 12 części równych, każda z tych części zamykałaby 55′; a zatem brałyby się wtedy na kątomiarze minuty od 5 do 5, i tem podobnie.

Fig. 42 VII. Narzędzie służące do mierzenia albo kreślenia kątów na papierze, zowie się *przenośnikiem* (transportator). Jest to półkole mosiężne lub rogowe, podzielone na 180°, maiące środek C oznaczony małą dziurczką, lub wycięciem kątowem. Stopnie są oznaczone liczbami na brzegu narzędzia położonemi. Znayduią się przenośniki pokazuiące także i półstopnie.

Chcąc poznać ważność kąta ACD na papierze, przyłożyć potrzeba środek przenośnika do wierzchołka C kąta, potem zgodziwszy promień CB narzędzia, z ramieniem CA kąta, uważać, któremu podziałowi narzędzia, odpowiada drugie ramie CD kąta; a liczba stopni na brzegu przenośnika zawarta między dwoma ramionami CA, CD, będzie miarą kąta ACD. I tak np. ieżeli CD pada na 45°, kąt ACD będzie równy 45°. Żeby zaś przenieść kąt dany na papier, czyli przy linii CA i przy punkcie C, wykreślić kąt np. równy 45°; potrzeba środek przenośnika przyłożyć do punktu C, i promień CB narzędzia zgodzić z liniią CA, potem naznaczyć na papierze punkt D odpowiadaiący 45° przenośnika, a ten punkt złączywszy z C, liniią DC, będzie kąt DCA=45°.

ROZDZIAŁ X.

O POMIARZE GRUNTÓW.

10. *Zagadnienie*

Wytknąć, i wymierzyć na gruncie liniią prostą, między dwoma punktami A i B, znacznie od siebie oddalonemi, lecz z których ieden iest widzialny z drugiego. Fig. 43

1ód. aby wytknąć liniią prostą AB, potrzeba oznaczyć kilka iey punktów na ziemi. Na ten koniec w punktach A i B, zatykaią się pionowo tyki, a pomiędzy temi tyki, inne w punktach D, E, i t. d., w przyzwoitych od siebie odległościach, tak aby tyka utwierdzona w A, dla oka patrzącego z punktu X, zakrywała szereg tyk innych; a wtedy wszystkie utkwione tyki znaydować się będą w kierunku linii prostey AB.

2re. w wymierzeniu linii AB, maiąc przygotowany łańcuch lub sznur, dziesięć kołków i dwóch ludzi, tak postępuie się. Człowiek ieden z końcem łańcucha staie w punkcie A, a człowiek drugi, wziąwszy kołki i drugi koniec łańcucha postępuie ku B, i w punkcie C, gdzie łańcuch wyciągniony kończy się, zatyka kołek, poczem idzie daley, czyniąc to samo; a posuwaiący się za nim człowiek pierwszy w kierunku AB, przyszedłszy do C zdeymuie zatknięty kołek, gdy tym czasem człowiek drugi, w punkcie D, gdzie łańcuch kończy się, zatyka kołek drugi; i tak następnie odbywa się robota, dopóki człowiek naprzód idący nie stanie w końcu E linii AB, a wtedy liczba kołków zatkniętych przez niego, a zebranych przez człowieka idącego za nim, wskaże ile razy łańcuch mieści się w linii AB.

Gdyby grunt nie był równy, naprzykład gdyby punkt C był znacznie niższy od punktu A, wtedy stoiący w mieyscu C, część albo cały łańcuch podnieść powinien tak, aby kierunek iego był równoległy do płaszczyzny poziomu.

Można też samą liniią AB wymierzyć dokładniey, chociaż z większą pracą, za pomocą żerdzi z drzewa suchego i prostego wyrobionych, długich na łokci $7\frac{1}{2}$ i napuszczonych oleiem, aby się nie paczyły; na ten koniec przekładaią się na przemian dwie żerdzie tak, aby stykały się z sobą końcami, i miały położenie do poziomu zawsze równoległe.

31. *Zagadnienie.*

Zakréślić okrąg koła na gruncie.

Przywiązuie się ieden koniec sznura do laski ustawioney pionowo w punkcie wziętym za środek koła, drugi zaś koniec sznura do inney laski, i tą, wyciągnąwszy dobrze sznur, obwodzi się około laski pierwszey, a liniia zakréślona na gruncie spodkiem tey laski drugiey, będzie okręgiem koła żądanym.

32. *Zagadnienie.*

Fig. 44 *Z punktu danego C, na linii ED wytkniętey na gruncie, wyprowadzić do tey linii prostopadłą, za pomocą sznura i laski.*

1ód. ieżeli punkt dany C znayduie się między końcami E i D, linii daney, wtedy wziąwszy CD=CB, i w punktach B i D, utkwiwszy pionowo dwie laski, przywiązuią się do nich dwa końce sznura, dłuższego od BD, i maiącego środek A dokładnie oznaczony. W tym środku wyciągnąwszy sznur tak, aby iego połowy AB, AD były dobrze wyprężone, i w punkcie A zatknąwszy trzecią laskę, prowadzi się liniia prosta AC, a ta będzie prostopadłą żądaną; ma bowiem dwa punkta A, C, równo oddalone od końców linii BD.

2re. ieżeli punkt C iest końcem linii CD, wtedy bez przedłużenia tey linii, chąc do niey wyprowadzić prostopadłą; z punktu E dowolnie obranego, długością sznura równą CE, naznacza się na linii CD, punkt F, w tym punkcie ustawiwszy pionowo laskę, za pomocą sznura przedłuża się liniia EF do G; tak, aby było EF=EG; od Punktu G do C wytyka się liniia prosta GC, i ta będzie prostopadłą żądaną: są bowiem trzy punkta G, C, F równo oddalone od punktu E, więc znayduią się na okręgu koła maiącego środek w E; zatem kąt GCF w półkolu iest prosty, a liniia GC prostopadła do CD. Fig. 45

Uwaga. Podzieliwszy sznur FCE na trzy nierówne części, któreby się miały do siebie jak liczby 3, 4, 5, i końce iego przywiązawszy do laski ustawioney w E, potem wziąwszy CE=4, i założywszy sznur na drugą laskę utkwioną w C, dwie iego części CF, FE, równe 3, 5, wyprężyć należy tak, aby przy punkcie F czyniły kąt CFE, a od punktu C do *F* wytknięta liniia CF, będzie prostopadła do CD: iest bowiem $5^2 = 3^2 + 4^2$, czyli $25 = 9 + 16 = 25$; Fig. 46

zatem kąt C iest prosty (17 w. I), a liniia CF prostopadła do CE.

33. *Zagadnienie.*

Fig. 47 *Z punktu C danego na linii, lub za liniią prostą AB, wyprowadzić do tey linii prostopadłą, za pomocą węgielnicy mierniczey.*

1ód. gdy punkt C iest na linii AB, ustawia się węgielnica do poziomu w punkcie C, i iedno iey prawidło naprowadziwszy na dwie laski zatknięte pionowo w punktach A, B, zatyka się trzecia laska w punkcie X, znayduiącym się na kierunku promienia ocznego przechodzącego przez celowniki drugiego prawidła węgielnicy; a od punktu C do X, wytknięta liniia prosta będzie prostopadłą żądaną.

2re. gdy punkt C iest za liniią AB; wtedy ustawiwszy prawidło węgielnicy na linii AB, posuwa się po niey, między punktami A i B, narzędziem póty, póki przez celowniki drugiego prawidła węgielnicy ustawioney poziomo, nie spostrzeże się laski pionowo utkwioney w punkcie C; a wtedy od punktu X′, na którym stoi noga węgielnicy, do punktu C wytknięta liniia CX′, będzie prostopadłą szukaną.

Uwaga. Sznur służy zwyczaynie do prowadzenia prostopadłych na gruncie, w małych odległościach, w większych zaś używa się węgielnicy mierniczey. Można także do linii AB poprowadzić prostopadłą za pomocą węgielnicy przez cieśli i mularzy używaney, przekładaiąc iedno ramie tey węgielnicy do linii AB, i wzdłuż ramienia drugiego wytykaiąc liniią prostą, która będzie prostopadłą do AB.

34. *Zagadnienie.*

Zmierzyć szerokość AB rzeki, bagna, kanału i t. d. Fig. 48

Z końca C linii AB przedłużoney prowadzi się do niey prostopadłą CE, a do tey z punktu E, prostopadła inna EF nieograniczona; potem na linii CE, oznacza się za pomocą laski taki punkt D, któryby był w iednym kierunku z punktem A widzialnym na przeciwnym brzegu rzeki, (iakim bywa drzewo, kamień i t. d.) i z punktem F wziętym na prostopadłey EF; mierzą się nakoniec odległości BC, CD, DE, EF. Ponieważ dwa tróykąty prostokątne DEF, ACD są podobne, więc dąią DE: EF = CD: AC; z tey proporcyi maiąc trzy pierwsze wyrazy wiadome, wynaydziemy czwarty $CA = \frac{EF \times CD}{DE}$; od linii znalezioney CA odiąwszy BC, wypadnie AB szerokość rzeki szukana.

Uwaga. Można ieszcze to samo zagadnienie rozwiązać innym sposobem: biorąc dwa kiie proste nierówne BD, CF, i zatykaiąc pionowo kiy mnieyszy na brzegu rzeki w punkcie B, kiy zaś większy w takim punkcie C, linii prostey CA, aby wierzchołki dwóch kiiów, i punktu A widzialnego na drugim brzegu rzeki, były na iedney linii prostey FA; mierzą się potem wysokości kiiów FC, DB, i odległość CB. W tróykcie FCA poprowadziwszy ED równoległą do podstawy AC, będzie FE: ED = FC: CA (1); w tey proporcyi, ponieważ trzy pierwsze wyrazy są wiadome, gdyż FE iest różnicą między długościami dwóch kiiów, ED = BC, a FC Fig. 49

iest wysokością klia; będzie więc $CA = \frac{FC \times ED}{FE}$, od CA odiąwszy długość CB, wypadnie BA szerokość rzeki szukana

35. *Zagadnienie.*

Fig. 30 *Miedzy dwoma punktami A i B położonemi z przeciwnych stron lasu, wytknąć liniią prostą, podług którey las ma być wycięty*

Obiera się zewnątrz lasu taki punkt C, z któregoby dwa punkta A, B, były widzialne; mierzą się odległości AC, CB, i tych, od punktu C, do E i D, biorą się połowy, trzecie, czwarte, i t, d. części; prowadzi się liniia ED, która w tróykącie ACB przecinaiąc boki AC, BC proporcyonalnie, będzie równolegla do AB (2); z punktu B na liniią ED przedłużoną, spuszcza się prostopadła BF, która będzie odległością linii AB od tEF; z punktu J linii EJ, wyprowadza się do niey prostopadła GJ=BF; będzie koniec tey prostopadłey punktem G, znayduiącym się na kierunku dwóch punktów A, B, podług których las ma być wycięty.

36, *Zagadnienie.*

Fig. 31 *Zmierzyć wysokość AB drzewa, budynku, wieży i t. d.*

Biorą się dwie laski nierówne i zatykaią w ziemię pionowo, laska dłuższa w punkcie D, a krótsza w punkcie F linii poziomey B D F, tak, aby promień oczny ECA przechodzący przez wierzchołki lasek CD, EF, padał na wierzchołek A drzewa: mierzy się potem na ziemi liniia EG=FD, i liniia GK=DB; i bierze się różnica GC wysokości lasek. Ponieważ dwa tróykąty CGE, AKE są podobne, daią zatem GE: CG=EK: AK, aże EK=FB, więc z tey proporcyi maiąc trzy pierwsze wyrazy wiadome, wynaydziemy wysokość $AK=\frac{CG\times EK}{GE}$, do którey dodawszy wysokości laski EF=KB, wypadnie wysokość szukana AB.

Uwaga. I. Można przestać na iedney tylko lasce CD, położywszy się wznak na ziemi w takiey odległości od CD, aby promień oczny ACO padał na wierzchołek C laski, i koniec A wysokości szukaney. Poczem zmierzywszy odległości OD, BD, tudzież długość laski CD; z proporcyi OD: DC=OB: AB, w którey trzy pierwsze wyrazy będą wiadome, wypadnie wysokość $AB=\frac{DC\times OB.}{OD}$

Uwaga. II. Można ieszcze wymierzyć Fig. 52
tęż samą wysokość AB za pomocą cienia, ustawiwszy pionowo laskę CD, i zmierzywszy naprzód iey cień DE i wysokość CD, potem cień BF przedmiotu, którego się wysokości szuka. Gdyż w dwóch tróykątach ABF, CDE, liniie proste AB, CD iako pionowe są prostopadłe do BF, DE, są zatem do siebie równoległe; nadto liniie AF, CE, oznaczaiące kierunki promieni słonecznych, mogą się także uważać zarównoległe, zatem kąt A=C (1,21); więc dwa tróykąty DCE, ABF, prostokątne są podobne, i daią DE: CD=BF: AB, stąd

$$AB=\frac{BF\times CD}{DE}.$$

37. *Zagadnienie.*

Za pomocą tyk i sznura, zdiąć plan gruntu, zewnątrz, i w każdem mieyscu wewnątrz, dostępnego.

Fig. 53 Niech ABCDE wyraża figurę gruntu do zdięcia daną. Zważywszy że grunt ma mieć pięć boków, robię pierwszy iego narys na papierze zwanym *brulionem;* to iest kréślę od ręki figurę o pięciu bokach, zbliżaiącą się w podobieństwie do figury gruntu. Potem wystawiwszy sobie w myśli grunt podzielony na tróykąty, przez przekątne AC, AD, dzielę podobnie na tróykąty i figurę odrysowaną na brulionie. Nakoniec zatknąwszy pionowo tyki w punkach A, B, C . . . mierzę sposobem wyżey wskazanym, wszystkie boki tróykątów składaiących powierzchnią gruntu ABCDE, i ważności liczebne tych boków zapisuię na odpowiednych bokach figury, na brulionie.

Chcąc zrobić na czysto plan gruntu, kréślę naprzód podziałkę; potem poprowadziwszy na papierze liniią ab, odcinam na niey tyle części równych wziętych z podziałki, ile bok AB ma miar w brulionie. Z punktu a, otwartością cyrkla zawieraiącą tyle części podziałki, ile iest miar w przekątney AC, kréślę łuk; a z punktu b otwartością cyrkla zamykaiącą tyle części wziętych z podziałki, ile bok BC ma miar, kréślę łuk drugi; a przecięcie się tych dwóch łuków oznaczy punkt c. Z tego znowu punktu c, otwartością cyrkla zawieraiącą tyle części podziałki, ile iest miar w boku CD, kréślę łuk, a z punktu a, otwartością cyrkla zamykaiącą tyle części podziałki, ile iest miar w przekątney AD, krélę łuk drugi, a przecięcie się tych dwóch łuków, oznaczy punkt d; podobnym sposobem za pomocą cyrkla, i miar wiadomych liniy AE, ED, wziętych z podziałki, oznaczę położenie punktu e; połączywszy nakoniec punkta b, c, d, e, a, liniiami prostemi bc, cd, de, ea; utworzy się figura abcde wyrażaiąca plan gruntu ABCDE. Figura bowiem na papierze i figura na gruncie składaią się z równey liczby tróykątów podobnych, i podobnie położonych.

38. *Zagadnienie.*

Za pomocą węgielnicy mierniczey zdiąć plan pola, albo łąki, wewnątrz w każdem mieyscu dostępney.

Niech figura ABCDEF wyraża łąkę do zdięcia daną. Zatknąwszy nayprzód pionowo tyki we wszystkich zakątach A,B,C,D, E, F, łąki, obieram na niey taką liniią AE, z któreyby wszystkie utkwione tyki widziane być mogły; potem ustawiam iedno prawidło węgielnicy na linii AE, i po tey, między punktami A i E, póty narzędzie posuwam, póki przez celowniki drugiego prawidła węgielnicy ustawioney do poziomu, nie da się widzieć punkt B; a wtedy punkt G na linii AE, odpowiedny środkowi narzędzia, złączywszy z punktem B, liniią GB, ta będzie prostopadła do AE. (*) Fig. 54

(*) Rzadko się zdarza, przez celowniki drugiego prawidła węgielnicy, dostrzec od razu tyki ustawione w punktach B, C, D . . lecz przychodzi się do tego posuwaiąc naprzód lub cofaiąc narzędzie po linii AE. Jeżeli punkta A, E, są znacznie od siebie oddalone, potrzeba na linii AE, kilka tyk ustawić, aby celuiąc pierwszem prawidłem węgielnicy, do bliższych punktów, łatwiey to prawidło można było zgodzić z liniią AE.

Odbywszy podobne działanie na innych punktach C, D, F, w których są utkwione tyki, oznaczę kierunki prostopadłych HC, JD, KF. Nakoniec od punktu G mierzę sznurem liniią prostą AG i prostopadłą BG; odpunktu H, liniią GH i prostopadłą HC; od punktów J, liniią JH i prostopadłą JD; od punktu K liniie JK, KE i prostopadłą KF; i nakażdem stanowisku zapisuię w brulionie, na mieyscu właściwem, miarę każdey części linii AE, i każdey odpowiadaiącey prostopadłey.

Aby zrobić plan na czysto, kréślę naprzód podziałkę; potem poprowadziwszy na papierze liniią prostą ae, zamykaiącą tyle części wziętych z podziałki, ile ma sznurów liniia AE wymierzona na gruncie, odcinam na linii ae, liniie ag, gh, hi, ik, ke, zawieraiące tyle częci wziętych z podziałki, ile iest miar w liniiach AG,GH, HJ, JK, KE. Do linii ae z punktów g, h, i, k, prowadzę prostopadłe gb, hc, id i kf, zamykaiące tyle części podziałki, ile iest miar w GB, HC, JD, KF; nakoniec złączywszy punkta a, b, c, d, e, f, liniiami prostemi ab, bc, cd, de, ef, fa, utworzy się figura abcdef wyrażaiąca plan łąki ABCDEF. Samo bowiem wykréślenie pokazuie, że figura planu, i grunta, złożone są z równey liczby tróykątów podobnych i podobnie położonych.

Uwaga I. Gdyby szło o przeniesienie na papier i oznaczenie długości linii krzywey ABCDE . . (fig. 54 bis.) daney na gruncie; wtedy, poprowadziwszy na tymże gruncie liniią prostą AK, i do tey z różnych załamków B, C, D, E, F . . linii krzywey spuściwszy prostopadłe BG, CH, DJ, EK.. mierzą się długości tych prostopadłych, tudzież liniy AG, GH, HJ, JK.. ; a maiąc te miary wiadome, łatwo będzie sposobem dopiero wyłożonym, oznaczyć na papierze kierunek i długość linii krzywey ABCDE.

Uwaga II. Chcąc doyść powierzchni łąki ABCDEF, wyrachować potrzeba w miarach kwadratowych powierzchnie wszystkich tróykątów i trapezów składaiących figurę łąki, i wziąć summę tych powierzchni. Fig. 54

39. *Zagadnienie.*

Zdiać za pomocą bussoli plan bagna, lasu, lub iakiegokolwiek gruntu wewnątrz niedostępnego. Fig. 55

Niech ABCDE wyraża powierzchnią bagna wewnątrz niedostępnego. Zatknąwszy pionowo tyki na wierzchołkach kątów A, B, C, D, E, uważanych za dostępne, ustawiam poziomo bussollę w punkcie A, następnie w punktach B, C, D, E, i biorę kąty NAB, NBC, NCD, NDE, NEA, zawarte między bokami AB, BC, CD, DE, EA, a kierunkiem igiełki magnesowey (*) przechodząc zaś z iednego punktu na

(*) Dla znalezienia ważności kąta zawartego między liniią iakąkolwiek AB, a kierunkiem NAS igły magnesowey, potrzeba bussoli ustawioney do poziomu zgodzić prawidło z liniią AB, tak, aby promień oczny idący z punktu A, padał na tykę pionowo ustawioną w punkcie B, potem czekać należy, póki igiełka po odbyciu swoich wachań, nieweźmie położenia stałego, a wtedy liczba stopni wskazana na okręgu punktem pólnocnym igiełki, będzie miarą kąta szukaną.

drugi, mierzę boki AB, BC, CD i t. d., i na każdem stanowisku, zapisuię w brulionie ważność każdego kąta, i długość każdego boku.

Aby zrobić plan naczysto, naznaczam na papierze punkt a, wyrażaiący punkt A na ziemi, i przez punkt a, prowadzę dowolnie liniią nas, oznaczaiącą kierunek igiełki magnesowey w punkcie A; kreślę za pomocą przenośnika kąt nab=NAB, a na boku ab, odcinam tyle części wziętych z podziałki, ile iest miar w boku AB. Przez punkt b prowadzę liniią nbs równoległą do nas, i kreślę za pomocą przenośnika kąt nbc=NBC, a na linii bc, odcinam tyle części wziętych z podziałki, ile iest miar w boku BC. Kreśląc podobnie kąt ncd=NCD, kąt nde=NDE, i kąt nea=NEA; i na bokach cd, de, ea, odcinaiąc tyle częci branych z podziałki, ile iest miar w bokach odpowiednych CD, DE, EA; zrobię figurę abcde wyrażaiącą plan bagna ABCDE; czyli co na iedno wychodzi, wielokąt abcde podobny wielokątowi ABCDE: bo kąty pierwszego, są odpowiednie równe kątom drugiego wielokąta, i boki około tych kątów leżące są odpowiednie proprcyonalne (*).

Ten sam sposób postępowania byłby gdyby szło o zdięcie planu lasu, rzeki i t. d.

(*) Boki ab, bc, cd, i t. d. z liniiami san, sbn, scn, i t. d. równoległemi względem siebie, czynią kąty odpowiednie równe kątom zawartym bokami AB, BC, CD i t. d, a kierunkami równoległemi igiełki magnesowey; zatem kąty zawarte między bokami pierwszemi tworzącemi wielokąt abcde, są równe odpowiednie kątom zawartym bokami drugiemi tworzącemi wielokąt ABCDE.

Uwaga. Dla skrócenia roboty, możnaby poprzestać na ustawieniu bussoli na trzech tylko stanowiskach A, C i D, mierząc na każdem z nich, kąty zawarte między każdym z boków sobie przyległych a kierunkiem igiełki magnesowéy: i tak w punkcie A mierząc kąt NAB, i kąt SAE=NEA; w punkcie C, kąt BCS=NBC, i kąt NCD; w punkcie D, kąt NDE; przez co otrzymaią się te same 5 kątów, które wymierzone były na pięciu stanowiskach.

40. *Zagadnienie.*

Zdiąć za pomocą stolika położenie różnych przedmiotów niedostępnych, lecz widzialnych z dwóch punktów obranych na gruncie. Fig. 50

Niech będzie ilekolwiek przedmiotów niedostępnych B, C, D, widzialnych z dwóch punktów M, N, które są obrane na gruncie za końce podstawy MN. Aby oznaczyć położenie tych przedmiotów, zatykam naprzód pionowo tykę w punkcie N, a stolik nakleiony papierem ustawiam do poziomu w punkcie M; poczem naznaczywszy na stoliku za pomocą pionu, punkt a, odpowiadaiący punktowi M, na ziemi, zatykam w punkcie a prostopadle igiełkę, przy którey położywszy prawidło, celuię niem do tyki utkwioney w N, i wzdłuż krawędzi prawidła prowadzę na stoliku liniią nieograniczoną ax, odpowiadaiącą linii MN na ziemi: obracaiąc następnie prawidło około igiełki celuię niem ku przedmiotom D, C, B, i wzdłuż krawędzi prawidła, odpowiadaiącey kierunkowi promieni ocznych, prowadzę na stoliku liniie nieograniczone aD, aC, aB. To wykonawszy, zdeymuię stolik z punktu M, i zatknąwszy w tym punkcie tykę, mierzę łańcuchem liniią MN, i liczbę iey miar wziętych z podziałki, odcinam na linii ax od a do e. Maiąc wiadomą liniią ae, przenoszę stolik na punkt N, i ustawiam go do poziomu tak, aby punkt e, i liniia ea na stoliku, odpowiadały punktowi N, i linii NM na ziemi; poczem około punktu e, celuię prawidłem do przedmiotów B, C, D, i wzdłuż prawidła prowadzę na stoliku liniie eB, eC, eD, które przeciąwszy się z liniiami aB, aC, aD, oznaczą na stoliku w punktach b, c, d, położenie przedmiotów B, C, D.

Fig. 55 *Uwaga.* Gdyby zapomoca stolika wypadło zdiąć plan gruntu, którego wierzchołki wszystkich kątów są dostępne, np. plan bagna ABCDE; wtedy na punktach A, B, odbywszy takie działanie, iakie wykonało się na punktach M i N dla oznaczenia linii ae; i powtórzywszy tę samą robotę na punktach B i C, C i D, D i E, E i A; otrzymamy plan bagna ABCDE.

Gdyby zaś punkta B i C były dostępne, a na gruncie znaydowały się przedmiony X, Y, Z, które z tych tylko punktów są widzialne; wtedy, wziąwszy liniią BC za podstawę, oznaczyłoby się położenie tych przedmiotów za pomocą stolika lub bussoli; albo też za pomocą węgielnicy mierniczey, ieżeli te przedmioty nie są znacznie oddalone. Tego ostatniego narzędzia bardzo często używać się zwykło, do oznaczenia biegu rzeki, zakrętów drogi, i wszystkich drobnieyszych załamków figury daney na gruncie.

41. *Zagadnienie*

Zdiąć za pomocą kątomiaru plan gruntu ABCDE wewnątrz niedostępnego, lecz którego boki i kąty wymierzyć można. Fig. 55

Zatknąwszy pionowo tyki w punktach A, B, C, D, E, i ustawiwszy, naprzód kątomiar w punkcie A, następnie w punktach B, C, D, E; biorę kąty EAB, ABC, BCD, CDE, DEA; mierzę potem boki AB, BC... i na każdem stanowisku, ważność wymierzonego boku i kąta i zapisuię w brulionie.

Aby zrobić plan naczysto prowadzę na papierze liniią ea, zamykaiącą tyle części wziętych z podziałki, ile iest miar w boku EA, i przy punkcie a, za pomocą przenośnika kreślę kąt eab=EAB, wziąwszy znowu na linii ab, od a do b, tyle części z podziałki ile ma miar liniia AB, przy punkcie b robię kąt abc=ABC; i tak następnie wykreśliwszy kąty bcd, cde, dea, tudzież boki bc, cd, de, otrzymamy prędkim sposobem, plan bagna ABCDE.

KONIEC XIĘGI TRZECIÉY.

XIĘGA IV.

ROZDZIAŁ XI.

O PŁASZCZYZNACH PRZECINAIĄCYCH SIĘ I LINIJACH PROSTYCH PRZECIĘTYCH PŁASZCZYZNAMI.

Opisania

I. Przez ieden punkt, iako też przez iedną liniią prostą, można poprowadzić nieskończoną liczbę płaszczyzn.

II. Liniia iest *prostopadła do płaszczyzny*, gdy iest prostopadła do wszystkich liniy prostych przez iey *spodek* na płaszczyźnie poprowadzonych: naodwrót i płaszczyzna iest w tym razie prostopadła do linii. *Spodek* prostopadłey iest punkt, w którym ta liniia spotyka płaszczyznę.

III. Liniia iest *równoległa do płaszczyzny*, albo dwie płaszczyzny są *równoległe względem siebie*; gdy liniia nie spotyka nigdy płaszczyzny, albo gdy płaszczyzny naydaley będąc przedłużone zeyść się z sobą nie mogą.

IV. Dowiedziemy (twier. 1), że spólnem przecięciem dwóch płaszcznyzn z sobą spotykaiących się, iest *liniia prosta*; nachylenie się zatem ku sobie dwóch płaszczyzn MN, PQ, oznacza się kątem ABC, zawartym dwiema prostopadłemi AB, BC,

Tab. V. Fig. 1.

do spólnego tych płaszczyzn przecięcia PN, z iednego punktu B, na dwóch płaszczyznach, poprowadzonemi.

V. *Kąt bryłowy*, iest przestrzeń kątowa S, zawarta więcey niż dwiema płaszczyznami ASB, BSC, CSD, DSA, w iednym schodzącemi się punkcie. Fig. 2

1. *Twierdzenie.*

Przeciecie się spólne dwóch płaszczyzn iest liniia prosta.

Bo liniia prosta przechodząca przez dwa punkta spólnego przecięcia dwóch płaszczyzn, iest razem na iedney i drugiey płaszczyźnie, więc taż liniia prosta musi być spólnem przęcięciem tych płaszczyzn.

2. *Twierdzenie.*

Jeżeli liniia prosta AP, iest prostopadła do dwóch liniy PB, PC, przecinaiacych się w iey spodku P, na płaszczyznie MN; będzie taż liniia AP, prostopadła i do płaszczyzny MN. Fig. 3

Obrawszy bowiem na liniiach PC, PB, dwa iakiekolwiek punkta C, B, i połączywszy ie liniią prostą CB; a od środka Q tey linii, poprowadziwszy do P, liniią QP, nadto od punktu A do B, Q, C, liniie AB, AQ, AC. Ponieważ w tróykącie PBC, podstawa BC iest podzielona w punkcie Q, na dwie równe części będzie $\overline{PC}^2+\overline{BP}^2=2\overline{PQ}^2+2\overline{QC}^2$ (III, 22); podobnie w tróykącie BAC, iest $\overline{AC}^2+\overline{AB}^2=2\overline{AQ}^2+2\overline{QC}^2$; więc, odiąwszy pierwszą równość od drugiey, i uważaiąc, że tróykąty APC, APB, prostokątne przy P, daią $\overline{AC}^2-\overline{CP}^2=\overline{AP}^2$, $\overline{AB}^2-\overline{PB}^2=\overline{AP}^2$(III,17.w.2), będzie $\overline{AP}^2+\overline{PA}^2=2\overline{AP}^2=2\overline{AQ}^2-2\overline{PQ}^2$; a podzieliwszy obie strony przez 2, otrzymamy $\overline{AP}^2=\overline{AQ}^2-\overline{PQ}^2$; czyli, dodawsyy do obu stron, $\overline{PQ}^2$, wypadnie $\overline{AP}^2+\overline{PQ}^2=\overline{AQ}^2$; zatem tróykąt APQ iest prostokątny (III, I7, wn. 1), przy P; więc liniia AP iest prostopadła do PQ: podobnie można okazać że linia AP iest prostopadła do każdey linii prostey przez punkt, P, na płaszczyznie MN poprowadzoney; zatem liniia AP będzie prostopadła i do płaszczyzny MN (opis. II).

3. *Twierdzenie.*

Fig. 4 *Dwie liniie proste AB, AC, przecinaiace sie z soba, na iedney płszczyźnie i oznaczaia iey położenie.*

Bo przez liniią AB, wystawiwszy sobie poprowadzoną płaszczyznę, i obracaiącą się około tey linii póty, póki nie trafi na punkt C, wtedy, ponieważ liniia AC, mieć będzie dwa punkta na tey płaszczyznie, więc cała na niey znaydować się będzie; położenie zatem tey płaszczyzny będzie tem samem oznaczone, że znayduią się na niey dwie liniie proste AB, AC, przecinaiące się z sobą.

Fig. 5 *Wniosek* 1. Tróykąt ABC, czyli trzy punkta A, B. C, nie w linii prostey będące, oznaczaią położenie płaszczyzny.

Wniosek II. Dwie liniie równoległe AB, CD, oznaczaią położenie płaszczyzny; bo przeciąwszy te liniie, trzecią liniią EF, będzie płaszczyzna dwóch liniy prostych AE, EF, płaszczyzną liniy równoległych AB, CD.

4. *Twierdzenie.*

Linie pochyłe AD, AB... poprowadzone od punktu A do do płaszczyzny MN, ieżeli są równo oddalone od prostopadłey AP, do teyże płaszczyzny, będą równe sobie; a z dwóch pochyłych AE, AB nierówno oddalnych od prostopadłey AP, liniia AE więcey oddalona iest od dłuższa AB. Fig. 6

Bo 1ód. ieżeli liniy pochyłych odległości DP, PC, PB, od linii AP, są równe; troykąty prostokątne APD, APC, APB, maiące nadto bok AP spólny, będą równe sobie (1.3): zatem pochyłe AD, AC, AB, równo oddalone od prostopadłey, są miedzy sobą równe:

2re. ieżeli odległość PE pochyłey AE, iest większa od odległości PB pochyłey AB, będzie (1, 13) pochyła AE, większa od AB, a zatem i od AC.

Wniosek. Spodek P prostopadłey AP, iest środkiem koła zakreślonego na płaszczyznie MN, z punktu A promieniem większym od AP; własność ta podaie sposób prowadzenia prostopadłey do płaszczyzny, z punktu nad nią wziętego.

5. *Twierdzenie.*

Jeżeli przez spodek P, prostopadłey AP, do płaszczyzny MN, poprowadzimy prostopadłą PD, do linii BC leżącey na teyże płaszczyznie, i koniec D tey prostopadłey, złączymy z punktem iakimkolwiek A prostopadłey pierwszey, liniia AD; będzie ta liniia AD prostopadła do BC. Fig. 7

Wziąwszy bowiem BD=DC, i poprowadziwszy liniie PB, PC, AB, AC. Ponieważ liniia PD iest prostopadła do BC, i odległość BD=DC, więc pochyła PB=PC (1, 13); aże znowu względem prostopadłey AP, odległość PB=PC, zatem pochyła AB=AC (4); liniia więc AD ma dwa punkta A i D, równo oddalone od końców B i C, linii BC, zatem iest prostopadłą do teyże linii.

Wniosek. Wypada stąd, że liniia BC iest prostopadła do płaszczyzny APD (2); bo ta liniia iest razem prostopadła do dwóch liniy prostych AD, PD, przecinaiących się w iey spodku D.

6. *Twierdzenie.*

Fig. 8 *Jeżeli liniia AP, iest prostopadła do płaszczyzny MN, wszelka liniia ED równoległa do linii AP, bedzie prostopadła do teyże płaszczyzny.*

Bo przez liniie rownoległe AP,ED, poprowadziwszy płaszczyznę APDE przecinaiącą się z płaszczyzną MN, w linii PD, a na płaszczyznie MN poprowadziwszy liniią EC prostopadłą do PD, i punkta A i D złączywszy liniią AD; podług wniosku twierdzenia poprzedzaiącego, liniia BC będzie prostopadła do płaszczyzny APDE, zatem kąt BDE iest prosty; aże kąt EDP iest także prosty (1, 19), bo liniia AP równoległa do DE, iest z założenia prostopadła do PD; zatem liniia DE iest prostopadła do dwóch liniy PD, BC, przecinaiących się w iey spodku D, więc iest prostopadła i do ich płaszczyzny MN (2).

Wniosek. Wypada stąd naodwrót, że ieżeli dwie liniie proste AP, ED, są prostopadłe do iedney płaszczyzny MN, te dwie linie są do siebie równoległe; bo połączywszy spodki tych prostopadłych liniią PD, na płaszczyznie MN, będą liniie AP, ED prostopadłe do linii PD (opis. II), a zatem będą względem siebie równoległe (1, 17).

Wniosek II. Dwie liniie AB, CD, równoległe do linii trzeciey EF, na odmienney z niemi płaszczyznie położoney, są równoległe względem siebie. Bo wyobraziwszy sobie płaszczyznę prostopadłą do linii EF, każda z liniy AB, CD, będąc równoległa do linii EF, będzie prostopadła do tey płaszczyzny; a zatem podług wniosku poprzedzaiącego, liniie AB, CD, będą względem siebie równoległe. Fig. 14

7. *Twierdzenie.*

Jeżeli liniia prosta AB, iest równoległa do linii CD leżacey na płaszczyznie MN, będzie liniia AB równoległa i do tey płaszczyzny, Fig. 9

Bo gdyby liniia AB nie była równoległa do płaszczyzny MN, więc spotykałaby razem tę płaszczyznę, i położoną na niey liniią CD; aże liniia AB nie może spotykać linii CD, bo iest do niey z założenia równoległa, przeto taż liniia nie może spotkać i płaszczny MN; zatem iest do niey równoległa (opis. III).

8. *Twierdzenie.*

Dwie płaszczyzny M·, PQ, prostopadłe do linii prostey AB, sa do siebie równoległe Fig. 10

Gdyby bowiem te płaszczyzny przedłużone spotkały się z sobą w linii DC, wtedy, obrawszy na tey linii punkt O, i poprowadziwszy liniie BO, AO; ponieważ linia AB iest prostopadła do płaszczyzny MN, więc iest prostopadła i do linii AO poprowadzoney przez iey spodek na tey płaszczyznie (opis. II.); dla tey samey przyczyny i liniia AB iest prostopadła do BO; zatem byłyby dwie prostopadłe BO, AO spuszczone z iednego punktu O, na liniią AB, co być nie może; nie mogą przeto dwie płaszczyzny MN, PQ, spotkać się z sobą; są więc równoległe.

9. *Twierdzenie.*

Fig. 11 *Jeżeli dwie płaszczyzny równoległe MN, PQ, są przecięte trzecią płaszczyzną ABCD, ich przeciecia AB, CD, będą względem siebie równoległe.*

Bo gdyby liniie AB, CD leżące na iedney płaszczyźnie ABCD, nie były równoległe, więc przedłużone zbiegłyby się z sobą, a zatem zeszłyby się i płaszczyzny MN, PQ, na których one znayduią się; aże te płaszczyzny schodzić się nie mogą, będąc z założenia równolegle; zatem i liniie AB, CD muszą być względem siebie równoległe.

10. *Twierdzenie.*

Fig. 12 *Liniia AB prostopadła do płaszczyzny MN, iest prostopadła i do płaszczyzny PQ, równoległey do MN.*

Bo na płaszczyznie PQ, pociągnąwszy dowolnie liniią BC, i przez dwie liniie AB, BC poprowadziwszy płaszczyznę ABCD, przecinaiące się z płaszczyzną MN, w linii AD, będzie to przecięcie AD równoległe do BC (9); aże liniia AB iest prostopadła do płaszczyzny MN, a zatem iest i do linii AD łożącey na tey płaszczyznie (opis. II); iest zaś liniia BC równoległa do AD, więc liniia AB iest prostopadła i do linii BC (I, 19. wn.); podobnie okazać można, że taż liniia AB iest prostopadła do każdey linii przechodzącey przez iey spodek na płaszczyznie PQ, zatem liniia AB iest prostopadła do płaszczyzny PQ.

11. *Twierdzenie.*

Dwie liniie równoległe AB, CD, zawarte miedzy dwiema płaszczyznami MN, PQ, równoległemi, są równe sobie. Fig. 13

Gdyż przez liniie równoległe AB, CD, poprowadziwszy płaszczyznę ABDC; przecięcia AC, BD, tey płaszczyzny, z dwiema płaszczyznami MN, PQ, będą względem siebie równoległe (9), zatem figura ABDC iest równoległobokiem; więc liniia AB=CD.

12. *Twierdzenie.*

Jeżeli dwa kąty CAE, DBF, nie leżące na iedney płaszczyznie, maią ramiona AC i BD, AE i BF, względem siebie równoległe, i skierowane w iedną stronę; będą te kąty równe, a ich płaszczyzny równoległe. Fig. 14

Wziąwszy bowiem AC=BD, AE=BF, i poprowadziwszy liniie CE, DF, AB, CD, EF: Ponieważ liniia AC iest równa i równoległa do BD, będzie i liniia CD równa i równoległa do AB (I, 20. w. I). Dla podobney przyczyny i liniia EF iest równa i równoległa do linii AB; dwie zatem liniie CD, EF, równe i równoległe względem linii trzeciey AB, położoney na inney z niemi płaszczyznie, są rowne i równoległe względem siebie (6. w. 2); zatem i liniia DF iest równa i równoległa do CE; więc dwa tróykąty ACE, BDF, maiące trzy boki odpowiednie równe trzem bokom, są równe sobie (I,9); a zatem iest kąt CAE=DBF. Nadto, ponieważ trzy boki tróykąta ACE, są równoległe względem trzech boków tróykąta BDF, więc i płaszczyzny tych tróykątów są do siebie równoległe.

13. *Twierdzenie.*

Fig. 15 *Jeżeli dwie liniie proste AB, CD, przecięte są trzema płaszczyznami równoległemi MN, PQ, RS, przecięte będą proporcyonalnie.*

Niech liniia AB, spotyka płaszczyzny dane w punktach A, E, B; liniia CD, w punktach C, F, D; powiadam, że ma się AE: EB=CF: FD.

Bo poprowadziwszy linią AD, spotykaiącą płaszczyznę PQ w punkcie G; i nadto liniie AC, EG, GF, BD. Ponieważ przecięcia EG, BD, płaszczyzn równoległych PQ, RS, z płaszczyzną ABD, są do siebie równoległe (9); więc w tróykącie ABD, ma się AE: EB=AG: GD (III, 1). Podobnie dla przecięć AC, GF, równoległych, w tróykącie ADC, iest AG: GD=CF: FD, więc, z przyczyny spólnego stosunku AG: GD, będzie AE: EB=CF: FD.

14. *Twierdzenie.*

Fig. 16 *Jeżeli liniia AP iest prostopadła do płaszczyzny MN, wszelka płaszczyzna APB, przechodząca przez liniią AP, będzie prostopadła do płaszczyzny MN.*

Niech liniia BC, wyraża spólne przecięcie dwóch płaszczyzn APB i MN. Na płaszczyznie MN, poprowadźmy przez punkt P, liniią DE prostopadłą do BC; liniia AP iako prostopadła do płaszczyzny MN, iest prostopadła do każdey z dwóch liniy BC, DE na tey płaszczyznie poprowadzonych (op. II), więc kąt APD iest prosty, aże ten kąt zawarty dwiema prostopadłemi PA, PD, do spólnego przecięcia BC, mierzy nachylenie się ku sobie dwóch płaszczyzn APB, MN (opis. IV); więc dwie te płaszczyzny są do siebie prostopadłe.

Wniosek. Wypada stąd, że ieżeli dwie płaszczyzny są prostopadłe do trzeciey, będzie i spólne przecięcie tych dwóch płaszczyzn prostopadłe do płaszczyzny trzeciey.

15. *Twierdzenie.*

Jeżeli kąt bryłowy S, zawarty iest trzema kątami płaskiemi ASB, ASC, CSB, bedzie summa dwóch którychkolwiek z nich, wicksza od kata trzeciego. Fig. 17

Niech kąt ASB, będzie większy od każdego z kątów, ASC, BSC; powiadam że kąt ASB < ASC + BSC.

Bo na płaszczyznie ASB, wykreśliwszy kąt DSB = CSB, wziąwszy SD = SC i poprowadziwszy liniie ADB, AC, CB: ponieważ dwa boki BS, SD są równe dwóm bokom BS, SC, i kąty BSD, BSC między temi bokami zawarte są równe, więc dwa tróykąty BSD, BSC są równe sobie, zatem BD = BC. Aże AB < AC + BC (1, 5), więc, odiąwszy z iedney strony BD, drugiey BC, będzie AD < AC. Lecz dwa bobi AS, SD, są równe dwóm bokom AS, SC, a bok trzeci

AD iest mnieyszy od AC, zatem kąt ASD<ASC (1, 8); dodawszy spólnie kąt BSD=BSC, będzie kąt ASD+BSD, czyli kąt ASB<ASC+BSC.

16. *Twierdzenie.*

Fig. 18 *Summa kątów płaskich zawieraiących kąt bryłowy, iest mnieysza od czterech kątów prostych.*

Przetniymy kąt bryłowy S, iakąkolwiek płaszczyzną ABCDE, i z punktu O wziętego na tey płaszczyznie, do wszystkich kątów wielokąta ABCDE, poprowadźmy linije OA, OB, OE i, t. d. będzie summa kątów w tróykątach ASB, BSC . . . maiących wierzchołki w S, równa summie kątów podobneyże liczbie tróykątów AOB, BOC . . maiących wierzchołki w O. Aże przy punkcie B, kąty ABO, OBC, razem wzięte czynią kąt ABC<ABS+SBC (15); podobnie przy punkcie C, iest kąt BCO+OCD <BCS+SCD, i toż samo iest ze wszystkiemi kątami wielokąta AD; zatem w tróykątach, których wierzchołkiem iest punkt O, summa kątów przy podstawie, iest mnieysza od summy kątów przy podstawie w tróykątach, których wierzchołkiem iest punkt S; więc naodwrót summa kątów utworzonych przy punkcie O, iest większa od summy kątów przy punkcie S; aże summa kątów przy O, iest równa czterem kątom prostym (I, 2. uwag.); zatem summa kątów płaskich ASB, BSC ... zawieraiących kąt bryłowy S, iest mnieysza od czterech kątów prostych.

ROZDZIAŁ XII.

O WŁASNOŚCIACH BRYŁ I MIERZENIU ICH POWIERZCHNI.

Opisania.

I. Nazywa się *bryłą wielościenną*, albo krócey *wielościanem*, każda bryła zakończona płaszczyznami, czyli *ścianami* płaskiemi maiącemi za granice liniie proste. I tak bryła ograniczona czterema ścianami, iest *czworościanem*, 6ścią ścianami, *sześcianem*, 12stą ścianami, *dwunastościanem*, 20stą ścianami, *dwudziestościanem* i t. d.

II. Spólne przecięcie dwóch ścian przyległych w wielościanie, nazywa się *bokiem* albo *krawędzią* wielościanu.

III. *Wielościanem foremnym* nazywa się ten, w którym wszystkie ściany są wielokątami foremnemi równemi, i którego wszystkie kąty bryłowe są równe sobie.

Takich wielościanów iest pięć dlatego 1ód, że dla złożenia kąta bryłowego potrzeba naymnicy trzech kątów płaskich, 2re, że potrzeba aby kąty płaskie zawieraiące kąt bryłowy wielościanu foremnego były kątami foremnego wielokąta, co łatwo z opisania bryły foremney widzieć się daie; 3cie, że kąt bryłowy zawarty iląkolwiek kątami płaskiemi iest zawsze mnieyszy od 4 kątów prostych (16). Stąd wypada 1ód, że dla złożenia kąta bryłowego z kątów tróykąta równobocznego, niemożna wziąć mniey nad 3, ani więcey nad 5 kątów płaskich; gdyż ieden z tych kątów równy iest $\frac{2}{3}$ kąta prostego, więc 6 takich kątów, czyniąc 4 kąty proste, nie mogłyby złożyć kąta bryłowego (16); a zatem tróykątami równobocznemi może być tylko zawarty *czworościan*, *ośmiościan i dwudziestościan foremny*. 2re z kątów płaskich kwadratu nie można mniey ani więcey wziąć nad trzy, dla złożenia kąta bryłowego: kwadratami zatem może tylko być ograniczony *sześcian*. 3cie ponieważ każdy kąt pięciokąta foremnego czyni 108° (*), można zatem trzema kątami płaskiemi tego pięciokąta zawrzeć kąt bryłowy, a pięciokątami foremnemi zamknąć *dwunastościan foremny*.

Chcąc złożyć z tektury wspomnione wielościany foremne, tak się postępuie:

Fig. 19 Dla złożenia czworościanu kreślą się na tekturze cztery tróykąty równoboczne.

Fig. 20 Dla ośmiościanu, ośm tróykątów równobocznych.

Fig. 21 Dla dwudziestościanu, dwadzieścia tróykątów równobocznych.

Fig. 22 Dla sześcianu, sześć kwadratów.

Fig. 23 Dla dwunastościanu, dwanaście pięciokątów foremnych.

Potem za pomocą liniiału i scyzoryka, wzdłuż liniy oddzielaiących każdą płaszczyznę, nadrzynaią się obwody figur do połowy grubości tektury, nakoniec składaią się ściany i łączą przez skleienie ich boków, któremi się stykać powinny.

(*) Bo podług (1, 26. w.) kąty wewnętrzne pięciokata foremnego równe są 6 kątom prostym, więc ieden kąt $=\frac{6}{5}=108°$

IV. *Graniastosłup* iest bryła ograniczona iląkolwiek płaszczyznami, z których dwie przeciwległe są wielokątami równemi i równoległemi, a inne boczne równoległebokami; płaszczyzny przeciwległe AL, BJ są *podstawami* graniastosłupa; a zbiór równoległoboków BD, CF, HL i t. d. czyni powierzchnią *boczną* czyli *wypukłą* graniastosłupa. Fig. 24

Prostopadła BR z któregokolwiek punktu B iedney podstawy, spuszczona na podstawę drugą, iest *wysokością* graniastosłupa; a liniie BA, CD . . . są iego krawędziami.

Można uważać graniastosłup iako utworzony przez podstawę AL, posuwaiącą się równolegle względem siebie, po krawędzi AB. Przeciąwszy zatem gdziekolwiek graniastosłup, płaszczyzną równoległą do podstawy, przecięcie stąd otrzymane, będzie równe tey podstawie.

Graniastosłup iest *prosty*, gdy krawędzie iego BA, CD . . . są prostopadłe do podstawy: i wtedy każda krawędź iest równa wysokości graniastosłupa. W każdym innym przypadku graniastosłup iest *pochyły*, i wysokość iego iest mnieysza od krawędzi.

Graniastosłup iest *tróykątny*, *czworokątny*, *pięciokątny* i t. d. podług tego iak podstawa iego iest tróykątem, czworokątem, pięciokątem i t. d. Fig. 25

V. Graniastosłup maiący za podstawę równoległobok zowie się *równoległościanem*. Równoległościan ograniczony iest sześcią równoległobokami, z których każde dwa przeciwne są równoległe i równe.

Równoległościan iest *prostokątny*, gdy wszystkie iego ściany są prostokątami.

Równoległościan prostokątny nazywa się *sześcianem*, gdy iest zamknięty sześcią równemi kwadratami.

Fig. 26 VI. *Ostrosłup* czyli *piramida*, iest bryła ograniczona iłąkolwiek płaszczyznami tróykątnemi schodzącemi się w iednym punkcie S, zwanym wierzchołkiem ostrosłupa, i opartemi na bokach wielokąta ABCDE, służącego za *podstawę* ostrosłupowi,

Prostopadła SP z wierzchołka ostrosłupa na podstawę spuszczona, iest *wysokością* ostrosłupa, liniie SB, SC i t. d. są iego *krawędziami*, a zbiór tróykątów ASB, BSC i t. d. składa powierzchnią *wypukłą* czyli *boczną* ostrosłupa.

Ostrosłup iest tróykątny, czworokątny i t. d. podług tego, iak podstawą iego iest tróykąt, czworokąt i t. d.

Fig. 27 Ostrosłup iest *foremny*, gdy ma za podstawę wielokąt *foremny* BCDEF, i gdy prostopadła SP z wierzchołka ostrosłupa na płaszczyznę podstawy spuszczona, przechodzi przez środek P tey podstawy.

W ostrosłupie *foremnym* krawędzie SB, SC, SE, SD i t. d. są wszystkie równe sobie; bo są przeciwprostokątnemi tróykątów prostokątnych równych SPB, SPC, SPD i t. d.; nadto wszystkie boczne tróykąty SBC, SCD, SDE i t. d. są równoramienne i równe sobie. A zatem z wierzchołka S ostrosłupa foremnego, spuszczona prostopadła SK na podstawę DE tróykąta bocznego SDE, oznaczaiąca iego wysokość, iest razem *wysokością* wszystkich tróykątów bocznych.

Przeciąwszy ostrosłup SABCDE płaszczyzną abcde równoległą do podstawy, bryła ABCDE abcde, z tego przecięcia otrzymana, zowie się ostrosłupem *ściętym*, albo *klocem ostrosłupowym*. Fig. 26

VII. *Walec* iest bryła, którą uważać można iakby utworzoną przez prostokąt ABCD obracaiący się około iednego boku AB, iako nieruchomego, pókiby nie powrócił do tegoż samego mieysca, z którego się obracać zaczął. Fig. 28

Osią walca iest liniia nieruchoma AB, około którey prostokat obraca się.

Podstawami walca są koła równe DHE, CGF, utworzone obrotem dwóch boków przeciwległych AD, BC, prostokąta AC. Powierzchnia utworzona przez bok CD, nazywa się powierzchnią *wypukłą* albo *boczną* walca.

Prostopadła AB z punktu iakiegokolwiek iedney podstawy, spuszczona na podstawę drugą, iest wysokością walca.

Walec iest *prosty*, kiedy oś AB iest prostopadła do dwóch podstaw, i wtedy oś iest równa wysokości walca.

Walec iest *pochyły*, kiedy oś AB iest nachylona do podstaw, i wtedy oś iest większa od wysokości walca. Fig. 29

VIII. Można uważać walec za graniastosłup, którego podstawami są wielokąty o nieskończoney liczbie małych boków.

IX. *Ostrokrąg* iest bryła, którą uważać można iako utworzoną przez tróykąt prostokątny SAB, obracaiący się około iednego z ramion SA kąta prostego, uważanego za nieruchome, pókiby nie wrócił do tego samego mieysca, z którego się obracać zaczął. Fig. 30

Osią ostrokręgu, iest liniia nieruchoma SA, około ktorey tróykąt obraca się, a wierzchołkiem iest punt S.

Podstawą ostrokręgu iest koło BDC, utworzone ramieniem AB kąta prostego; a powierzchnia utworzona przez obrót przeciwprostokątney SB, nazywa się powierzchnią *wypukłą* albo *boczną*. Każde przecięcie w ostrokręgu zrobione prostopadłe do iego osi SA, iest *kołem*.

Prostopadła SA, z wierzchołka ostrokręgu na podstawę spuszczona, iest *wysokością* ostrokręgu.

Ostrokrąg iest *prosty*, gdy oś SA iest prostopdła do podstawy, i wtedy wysokość ostrokręgu iest równa iego osi.

Fig. 31 Ostrokrąg iest *pochyły*, gdy oś iego iest nachylona do podstawy; i wtedy wysokość ostrokręgu iest mnieysza od iego osi.

Liniie proste SC, SD, i t. d. oznaczaiące odległość wierzchołka ostrokręgu, od okręgu, podstawy, zowią się *bokami* ostro-
Fig. 30 kręgu. Wszystkie te boki w ostrokręgu prostym są równe sobie, bo każdy z nich iest równy przeciwprostokątney SB, tworzącey powierzchnią wypukłą ostrokręgu.

X. Można ostrokrąg uważać za ostrosłup maiący za podstawę wielokąt o nieskończoney liczbie małych koków.

Fig. 32 Jeżeli ostrokrąg prosty SABD przetniemy płaszczyzną abd równoległą do podstawy ABD, bryła ADda z tego przecięcia powstaiąca, zowie się ostrokręgiem *ściętym*, albo *klocem ostrokręgowym*.

Fig. 33 XI. *Kula* iest bryła ograniczona powierzchnią krzywą, maiącą wszystkie punkta równo oddalone od punktu C wewnątrz iey położonego, który nazywa się *środkiem* kuli.

Można uważać kulę iako utworzoną przez obrót całkowity półkola DAE, około średnicy DE nieruchomey; bo w tym obrocie powierzchnia opisana przez półokrąg DAE, ma wszystkie punkta równo oddalone od środka C.

Promień kuli, iest liniia prosta poprowadzona od środka C, do powierzchni kuli. *Srednica* albo *oś* kuli, iest liniia prosta DE przechodząca przez środek C, i zakończona z obu stron na iey powierzchni.

Wszystkie promienie kuli są równe, i wszystkie iey średnice są podwóyne względem promienia, przeto są równe między sobą.

Dowiedziemy w (twier. 21), że każde przecięcie kuli płaszczyzną, iest kołem. Wszelkie przecięcie kuli maiące środek w C, zowie się *kołem wielkiem* kuli; każde zaś inne przecięcie kuli nie przechodzące przez iey środek C, nazywa się *kołem małem* kuli.

Bryła utworzona przez obrót całkowity wycinka kołowego DCB, około promienia DC, nazywa się *wycinkiem* kuli.

Płaszczyzna AMBF przecinaiąca kulę w iakimkolwiek kierunku, np. prostopadle do iey osi DE, dzieli kulę na dwa *odcinki kuliste* DAMBF, EAMBF, maiące za spólną *podstawę* koło AMBF; pierwszego z tych odcinków *wysokością* iest liniia DO, drugiego, liniia OE.

Odcinek kulisty AMBF A'M'B'F' ma dwie *podstawy* AMBF, A'M'B'F', gdy iest zawarty między dwiema płaszczyznami prostopadłemi do osi DE.

Można uważać odcinek kulisty DAMBF, iako utworzony przez obrót całkowity półodcinka kołowego DOB, około linii prostey DO; a powierzchnią wypukłą tegoż odcinka kulistego, przez obrót łuku DB.

XII. Mówi się że walec prosty iest opisany na kuli, (fig. 33 bis) gdy ma za podstawę koło wielkie BEC kuli, a wysokość AB równą iey osi.

Mówi się podobnie, że walec iest opisany na ostrokręgu, gdy ma spólną z nim podstawę, i też samą wysokość.

XIII. Bryły zowią się *podobne*, gdy są zawarte różną liczbą płaszczyzn podobnych, i gdy maią kąty bryłowe odpowiednie równe. Z tego opisania wypada, że w wielościanach podobnych, krawędzie odpowiednie są proporcyonalne.

17. *Twierdzenie.*

Powierzchnia boczna graniastosłupa prostego, równa iest iloczynowi z obwodu podstawy przez wysokość granistosłupa.

Fig. 34 Bo prostokąty AF, FD, AC.. składaiące powierzchnią boczną graniastosłupa prostego AH, maią za podstawę boki AE, ED, AG . . . podstawy graniastosłupa, a za wysokość iego krawędź AB; aże powierzchnia prostokąta, iest równa iloczynowi z iego podstawy przez wysokość, więc summa tych wszystkich prostokątów, czyli powierzchnia boczna graniastosłupa prostego AH, ma za miarę (AE+ED DG+AG)×AB, toiest równa się iloczynowi z obwodu podstawy przez wysokość graniastosłupa.

Wniosek. Powierzchnia boczna walca prostego FD, iest równa iloczynowi z okręgu iego podstawy FGC przez oś AB. Bo walec prosty iest graniastosłupem prostym, maiącym za podstawę wieląkąt o nieskończoney liczbie małych boków, a wysokość równą osi AB (opi. VIII. roz. XII). Fig. 28

18. *Twierdzenie.*

Powierzchnia boczna graniastosłupa pochyłego DJ, iest równa iloczynowi z iego krawędzi któréykolwiek AB, przez obwód przecięcia adfle prostopadłego do teyże krawędzi. Fig. 24

Płaszczyzna bowiem przecięcia adfle, prostopadłą do krawędzi BA, iest razem prostopadła do wszystkich krawędzi CD, HF, JL, KE równoległych do BA (6); a zatem i liniie, ad, df, fl... na tey płaszczyznie znayduiące się, są odpowiednie prostopadłe do krawędzi BA, CD, HF... (opis, II. r. XI); ieżeli więc te krawędzie równe, weźmiemy za podstawy odpowiedne równoległobokom AC, DH, FJ, EJ, AK, składaiącym powierzchnią boczną graniastosłupa DJ; liniie proste ad, df, fl, el, ea, będą wysokościami tych równoległoboków: aże powierzchnia każdego z nich równa się iloczynowi z podstawy przez wysokość (1, 22. wn. 2); przeto summa powierzchni wszystkich równoległoboków, czyli powierzchnia boczna graniastosłupa pochyłego DJ, iest równa iloczynowi z krawędzi BA, przez summę wszystkich boków przecięcia adflea; toiest równa BA (ad+df+fl+le+ea).

Wniosek. Powierzchnia boczna walca pochyłego FD, iest równa iloczynowi z bo- Fig. 29

16

ku EF, przez obwód przecięcia abcd prostopadłego do tegoż boku EF. Bo walec pochyły iest graniastosłupem pochyłym, maiącym za podstawę wielokąt o nieskończoney liczbie małych boków.

Uwaga I. Ponieważ Jeometrya elementarna nie podaie sposobu oznaczenia obwodu przecięcia abcd, przestać więc potrzeba w praktyce, na wymierzeniu tego obwodu mechanicznie, obwiiaiąc walec nicią wyciągniętą na obwodzie płaszczyzny abcd, prostopadłey do boku EF.

Uwaga. II. Chcąc wynaleźć powierzchnią całą graniastosłupa albo walca, potrzeba do powierzchni boczney tych brył, dodać summę powierzchni ich podstaw, które w graniastosłupie tak wynayduią się iak powierzchnie wielokątów, a w walcu iak powierzchni e kół.

19. *Twierdzenie.*

Fig. 27 *Powierzchnia boczna ostrosłupa foremnego SBCDEF, iest równa iloczynowi z obwodu podstawy BCDEF, przez połowę wysokości SK, iednego z tróykątów składaiacych powierzchnią boczną ostrosłupa.*

Bo tróykąty SBC, SCD, SDE, SEF, SFB składaiące powierzchnią boczną tego ostrosłupa są równe sobie (opis. VI. roz. XII), i wszystkie maią wysokość równą prostopadłey SK; ażeli powierzchnia każdego z tych tróykątów iest równa iloczynowi z podstawy przez połowę wysokości SK; przeto summa powierzchni wszyskich tróykątów bocznych, czyli powierzchnia boczna ostrosłupa foremnego SBCDEF iest $= (BC + CD + DE + EF + FB) \times \frac{SK}{2}$, toiest iloczynowi z obwodu podstawy ostrosłupa przez połowę wysokości troykąta bocznego.

Wniosek. Powierzchnia boczna ostrokręgu prostego SCDB, iest równa iloczynowi z okręgu iego podstawy CDB, przez połowę boku CS ostrokręgu. Bo ostrokrąg prosty iest ostrosłupem foremnym maiącym za podstawę wielokąt o nieskończoney liczbie małych boków. Fig. 30

Uwaga I. Chcąc wynaleźć powierzchnią boczną ostrosłupa nieforemnego, szukać potrzeba powierzchni tróykątów składaiących powierzchnią boczną tego ostrosłupa' i wziąć summę znalezionych powierzchni.

Uwaga. II. Wyrachowanie powierchni boczney ostrokręgu pochyłego, lubo nie należy do Jeometryi elementarney, można iednak na mocy prawd poprzedzaiących wynaleźć tę powierzchnią sposobem przybliżonym; uważaiąc ostrokąg pochyły za ostrosłup nieforemny któregoby powierzchnia boczna składała się z nieskończoney liczby tróykątów. Na ten koniec podzieliwszy okrąg podstawy tego ostrokręgu na tak wielką liczbę łuków, iżby te bez widocznego uchybienia, mogły się uważać za podstawy tróykątów bocznych ostrokręgu, i wynalazłszy tych tróykątów powierzchnie, otrzymamy powierzchnią boczną ostrokręgu pochyłego. Dla obrachowania zaś powierzchni całey tego ostrokręgu, dodać potrzeba znalezioną powierzchnią podstawy do powierzchni boczney.

20. *Twierdzenie.*

Fig. 32 *Powierzchnia boczna kloca ostrokręgowego ADda, iest równa iloczynowi z boku Aa kloca, przez połowę summy z okręgów dwóch iego podstaw ABD, abd.*

Bo powierzchnią boczną tego kloca można uważać iako złożoną z nieskończoney liczby trapezów, (iak iest AabB), których summa podstaw górnych, iest równa okręgowi podstawy górney abd kloca, a summa podstaw dolnych, okręgowi podstawy dolney ABD tegoż kolca; aże powierzchnia trapeza, iest równa iloczynowi z połowy summy dwóch iego podstaw, przez odległość między temi podstawami (II. 23); tą zaś odległością w każdym trapezie iest bok Aa kloca, zatem summa powierzchni wszystkich trapezów, czyli powierzchnia boczna kloca ostrokręgowego ADda, iest równa iloczynowi z połowy summy okręgów dwóch podstaw ABD abd, przez bok Aa kloca.

Wniosek. Przez środek M boku Aa kloca, przeciąwszy kloc płaszczyzną równoległą do podstawy ABD, przecięcie stąd otrzymane będzie kołem, którego średnica iest MO (opis: IX. r. XII). Aże w trapezie ADda, iest liniia $MO = \frac{AD + ad}{2}$ (II, 23): nadto okręgi kół maią się do siebie iak ich średnice (III, 16. wnio. 2); zatem okrąg $MNO = \frac{\text{okr. } ABD + \text{okr: } abd}{2}$.

Wiec powierzchnia boczna kloca ostrokręgowego iest równa iloczynowi z boku kloca, przez okrąg przecięcia zrobionego w klocu w równey odległości od dwóch iego podstaw.

21. *Twierdzenie.*

Każde przecięcie kuli płaszczyzną AMBF Fig. 3.
iest kołem.

Bo od środka C kuli, poprowadziwszy prostopadłą CO do płaszczyzny AMBF, tudzież liniie pochyłe CF, CM, CB.. do różnych punktów obwodu AMBF ograniczaiącego płaszczyznę przecięcia, nakoniec liniie OM, OF OB..; ponieważ pochyłe CF, CM, CB.. iako promienie kuli są równe, są więc równo oddalóne od prostopadłey CO (4); zatem wszystkie liniie OF, OM, OB.. są równe między sobą; więc przecięcie AMBF iest kołem, którego środek iest w punkcie O.

22. *Twierdzenie.*

Powierzchnia kuli iest równa iloczynowi z okręgu koła wielkiego kuli, przez iey średnicę AB. Fig. 35

Bo wystawiwszy sobie, że półokrąg AFB, tworzący powierzchnią kuli przez obrót około średnicy AB, iest podzielony prostopadłemi EP, SO.. do teyże średnicy, na nieskończoną liczbę małych łuków, iakim iest ES; będzie summa powierzchni utworzonych przez te łuki, równa powierzchni kuli. Aże powierzchnią utworzoną przez każdy z tych łuków, uważanych za liniie proste, można wziąć za powierzchnią boczną małego kloca ostrokręgowego; więc ze środka M łuku ES, spuściwszy prostopadłą MR do średnicy AB, będzie powierzchnia boczna, kloca ostrokręgowego maiącego za bok liniią ES, równa okr. MR×ES (20. w.). To założywszy, poprowadźmy promień CM, i liniią EJ prostopadłą do SO, a przeto równą PO (I, 20). Dwa tróykąty MCR,ESJ, maiące boki odpowiednie prostopadłe do siebie, to iest; CM do ES (II, 5. w.),MR do EJ, RC do SJ, są podobne (III, 7), i daią CM: MR=ES: EJ=PO; zatem okr. CM: okr. MR=ES: PO(III,16.w.2); stąd okr. MR$\times$ES= okr. CM$\times$PO. Więc powierzchnia boczna kloca ostrokręgowego, którego ES iest bokiem, wyrazi się przez okr. CM$\times$PO, toiest, będzie równa iloczynowi z okręgu koła wielkiego kuli, przez część PO średnicy AB, oznaczaiącą wysokość kloca. Zatem powierzchnia boczna wszystkich kloców ostrokręgowych, czyli powierzchnia kuli, iest równa iloczynowi z okręgu koła wielkiego kuli, przez summę wysokości wszystkich kloców, czyli przez średnicę AB, *wiec powierzchnia kuli* i t. d.

Wniosek I. *Powierzchnia kuli równa iest cztery razy wzietey powierzchni koła wielkiego kuli.* Bo powierzchnia koła wielkiego, iest równa iloczynowi z iego okręgu przez połowę promienia, czyli przez czwartą część iego średnicy (II, 24. w. 1), przeto ten iloczyn cztery razy wzięty, iest równy powierzchni kuli.

Wniosek II. *Powierzchnia kuli iest równa powierzchni boczney walca prostego opisanego na kuli.* Bo walec prosty na kuli opisany ma za podstawę koło wielkie kuli, a wysokość równą średnicy kuli; zatem powierzchnia boczna tego walca, równa iest iloczynowi z okręgu koła wielkiego kuli przez iey średnicę (17. wnio.), czyli równa iest powierzchni kuli.

Fig. 36 *Wniosek* III. *Powierzchnia wypukła odcinka kulistego BAFCE o iedney podsta-*

wie, maiącego za wysokość BD, równa iest iloczynowi z okręgu koła wielkiego kuli, przez wysokość DB tego odcinka.

Podobnie, powierzchnia wypukła odcinka kulistego AECFA'E'C'F' o dwóch podstawach, maiącego za wysokość DO', iest równa iloczynowi z okręgu koła wielkiego kuli, przez wysokość O'D.

23. *Twierdzenie.*

Powierzchnia kuli iest równa dwóm trzecim częściom powierzchni całey walca prostego opisanego na kuli.

Bo powierzchnia kuli równa iest powierzchni boczney walca opisanego na niey (22, wn. 2), i każda z tych powierzchni równa się czterem kołom wielkim kuli (22. wn. 1). Aże dla otrzymania powierzchni całey walca opisanego na kuli, potrzeba do powierzchni iego boczney dodać dwa koła wielkie kuli, ktore są iego podstawami (18. uwag. 2); więc cała powierzchnia walca, będzie równa sześciu wielkim kołom kuli, kiedy powierzchnia tey kuli równa się tylko czterem wielkim kołom: zatem powierzchnia kuli ma się do powierzchni całey walca opisanego na niey, iak 4: 6, albo iak 2:3; czyli, że powierzchnia kuli równa iest $\frac{2}{3}$ powierzchni całey walca prostego opisanego na niey.

Uwaga. Widzieliśmy w twierdzeniach poprzedzaiących, że powierzchnia boczna iakieykolwiek bryły równa się iloczynowi z dwóch iey wymiarów. Więc powierzchnie boczne dwóch iakichkolwiek brył tego samego gatunku, maią się do siebie iak iloczyny z dwóch ich wymiarów iednego *imienia*. Oznaczywszy zatem przez S, s, powierzchnie dwóch iakichkolwiek brył iednego gatunku, a przez H, B; h, b, ich wymiary iednego imienia, będzie $S : s = H \times B : h \times b$. W tey proporcyi uczyniwszy wymiar $H = h$, i podzieliwszy drugi stosunek przez H. będzie $S : s = B : b$; uczyniwszy znowu $B = b$, i podzieliwszy ten sam stosunek przez B, wypadnie $S : s = H : h$; co pokazuie, *że ieżeli naprzykład dwa graniastosłupy proste, lub dwa walce proste, maią równe wysokości, a obwody podstaw nierówne*; albo naodwrót, *ieżeli maią obwody podstaw równe, a wysokości nierówne; w pierwszym razie, powierzchnie boczne tych brył będą się mieć do siebie, iak obwody podstaw, w drugim, iak wysokości.*

Toż rozumie się o powierzchniach bocznych dwóch ostrosłupów foremnych, i dwóch osrokręgów prostych.

24. *Twierdzenie.*

Powierchnie dwóch brył podobnych maią się do siebie iak kwadraty z ich wymiarów odpowiednych.

Bryły bowiem podobne są te, w których wszystkie wymiary odpowiedne H, B, h, b, są proporcyonalne (opi. XIII. r. XII); będzie zatem wymiar $H : h = B : b$; więc proporcya $S : s = H \times B : h \times b$ (23. uwag.), zamieni się na $S : s = H \times H : h \times h = B \times B : b \times b$ (*), czyli $S : s = H^2 : h^2 = B^2 : b^2$, *więc powierzchnie dwóch brył podobnych* i t. d.

(*) Bo stosunek $H \times B : h \times b$ wypada z pomnożenia stosunku $H : h$ przez stosunek $B : b$; ażeli stosunek $H : h$ z przypuszczenia iest równy stosunkowi $B : b$, więc zamiast iloczynu z dwóch tych stosunków, można wziąć iloczyn z iednego.

25. *Twierdzenie.*

Powierzchnie dwóch kul maia sie do siebie iak kwadraty z ich promieni, albo ze średnic.

Bo powierzchnia kuli równa iest cztery razy wziętemu kołu wielkiemu kuli (22.w.1); więc powierzchnie dwóch kul maią się do siebie, iak cztery razy wzięte koła wielkie tych kul, czyli iak też koła raz wzięte; aże koła maią się do siebie iak kwadraty z ich promieni, lub iak dwadraty ze średnic, więc i powierzchnie dwóch kul maią się do siebie iak kwadraty z promieni, lub z ich średnic.

ROZDZIAŁ XIII.

O MIERZENIU BRYŁ.

Opisania.

I. Do mierzenia brył używa się zwyczaynie *sześcianu*, który gdy ma krawędź iedną równą długości sążnia, łokcia, stopy, cala i t. d. nazywa się *sążniem sześciennym*, *łokciem sześciennym*, *stopą sześcienną*, *calem sześciennym i t. d.*

Mierzyć zatem iakąkolwiek bryłę, iest-to dochodzić, ile razy mieści się w niey sześcian za miarę czyli iedność wzięty.

II. Dwa wielościany różne co do kształtu, lecz równe sobie co do bryłowatości, nazywaią się *równoważne.*

26. *Twierdzenie.*

Dwa iakiekolwiek graniastosłupy są równoważne, gdy maią wysokości równe, a podstawy równoważne.

Bo wystawiwszy sobie te dwa graniastosłupy podzielone na warszty nieskończenie cienkie, płaszczyznami równoległemi do ich podstaw, można w każdym graniastosłupie, każdą takową warsztę uważać za równą iego podstawie (op.IV. r.XII);aże podstawy w obu graniastosłupach są z założenia równoważne; więc każda warszta graniastosłupa iednego iest równoważna każdey warszcie drugiego graniastosłupa: nadto w obu graniastosłupach, z przyczyny ich równey wysokości, liczba warszt iest taż sama; przeto zbiór wszystkich warszt iednego graniastosłupa iest równoważny zbiorowi wszystkich warszt graniastosłupa drugiego; czyli te dwa graniastosłupy są równoważne. (*)

27. *Twierdzenie.*

Fig. 37 *Bryłowatość równoległościanu prostokątnego SB, równa iest iloczynowi z podstawy SPCD równoległościanu, przez iego wysokość KS.*

Przypuśćmy naprzykład, że łokieć wzięty za miarę liniiową mieści się 4 razy w wysokości KS, 5 razy w boku SP, a 4 razy w drugim boku SD, podstawy SPCD. Ponieważ powierzchnia tey podstawy iest

---

(*) Dla krótkości, użyliśmy tego sposobu dowodzenia; ściśleyszy nad ten znaleść można w Jeometryi Euklidesa albo Leżandra.

równa $SP \times SD$ (11, 22), zamykać więc będzie 20 łokci kwadratowych; można zatem na tey podstawie umieścić 20 łokci sześciennych. Aże gdy przez punkta f, g, h, podziałów wysokości KS, z których każdy oznacza łokieć, poprowadzimy płaszczyzny równoległe do podstawy SC, te podzielą bryłę na 4 warszty, z których każda zamykać będzie tyle łokci sześciennych, ile iest łokci kwadratowych w podstawie SC, toiest 20; więc równoległościan SB zawierać będzie 20 łokci sześciennych wziętych razy 4, czyli bryłowatość iego będzie równa $SP \times SD \times KS$; *więc i t. d.*

Wniosek I. Jeżeli prostokąt SC iest kwadratem, bok zaś iego SP iest równy wysokości KS równoległościanu, wtedy bryła ta będzie sześcianem, i iey miara $SP \times SD \times KS$ zamieni się na $KS \times KS \times KS = KS^3$.

Wniosek II. *Bryłowatość iakiegokolwiek graniastosłupa, prostego lub pochyłego, iest równa iloczynowi z iego podstawy przez wysokość.* Bo każdy graniastosłup iest równoważny równoległościanowi prostokątnemu, maiącemu z nim też samą wysokość, a podstawę równoważną (26); iest zaś ten równoległościan równy iloczynowi z podstawy przez wysokość, przeto i wszelki graniastosłup mieć będzie za miarę tenże sam iloczyn.

Wniosek III. *Bryłowatość iakiegokolwiek walca prostego lub pochyłego, iest równa iloczynowi z iego podstawy przez wysokość.* Bo każdy walec można uważać za graniastosłup maiący za podstawę wielokąt o nieskończoney liczbie małych boków (opis. VIII. r. XII).

28. *Twierdzenie.*

Fig. 38 *Jeżeli iakikolwiek ostrosłup SABCDE, przetniemy płaszczyzną abcde równoległą do iego podstawy ABCDE; przecięcie abcde będzie wielokątem podobnym podstawie.*

Jakoż, ponieważ dwie płaszczyzny ABCDE, abcde, równoległe przecięte są płaszczyzną trzecią AES, więc ich przecięcia AE, ae, będą równoległe (9); dla podobney przyczyny i liniie AB, BC, DC, DE będą równoległe do ab, bc, cd, de; zatem kąty BAE, bae, ABC, abc i t. d. są równe (12); więc wielokąty ABCDE, abcde są równokątne. Nadto ponieważ tróykąty SAE, SAB, SBC ... przecięte są liniiami ae, ab, bc... równoległemi do ich podstaw; będzie więc SA: sa=AE: ae=AB: ab=BC: bc ... (III. 1. w.): przeto wielokąty ABCDE, abcde równokątne, maią i boki odpowiedne proporcyonalne, są zatem podobne.

Fig. 38 *Wniosek.* Jeżeli dwa ostrosłupy SABCD, SXYZ maiące wierzchołek spólny S, a podstawy na iedney płaszczyznie, czyli maiące tęż samą wysokość, przetniemy płaszczyzną abcxyz równoległą do płaszczyzn podstaw ABCDE i XYZ; będą *przecięcia abcde, xyz, proporcyonalne do tychże podstaw.* Bo dla podobieństwa wialokątów AD, ad, iest wielokąt AD: ad$=\overline{AB}^2: \overline{ab}^2$ (III, 16), ażc iest AB: ab=AS: aS, więc wielokąt AD: ad$=\overline{AS}^2: \overline{aS}^2$. Dla podobney przyczyny tróykąt XYZ: xyz$=\overline{SX}^2:\overline{Sx}^2$. Lecz płaszczyzna abcxyz, i płaszczyzna podstaw ABCDE i XYZ, są do siebie równoległe, i przecięte płaszczyzną trzecią ASX; będą więc przecięcia AX, ax równoległe; a zatem w tróykącie AXS ma się AS: aS=SX: Sx, czyli $\overline{AS}^2 : \overline{aS}^2 = \overline{SX}^2 : \overline{Sx}^2$; przeto wielokąt AD: ad=XYZ: xyz; czyli przecięcie abcde: xyz= podstawa ABCDE: XYZ.

29. *Twierdzenie.*

Dwa iakiekolwiek ostrosłupy SABCDE, SXYZ, maiace równe wysokości, maia sie do siebie iak ich podstawy ABCDE, XYZ. Fig. 38

Bo dwa ostrosłupy równey wysokości złożone są z równey liczby przecięć, czyli warszt nieskończenie cienkich, na które podzielić się mogą płaszczyznami nieskończenie siebie bliskiemi i równoległemi do ich podstaw. Aże, podług wniosku twierdzenia poprzedzaiącego, każda warszta abcde nieskończenie cienka ostrosłupa SABCDE, ma się do takieyże warszty xyz odpowiedney w ostrosłupie SXYZ, iak podstawa ABCDE do podstawy XYZ; przeto i zbiór wszystkich warszt składaiących ostrosłup pierwszy, do zbioru wszystkich warszt ostrosłupa drugiego, iak postawa ABCDE: XYZ; czyli ostrosłup SABCDE: SXYZ=podstawa ABCDE: XYZ; *wiec dwa ostrosłupy* i t. d.

Wniosek. Stąd wypada, że dwa ostrosłupy są równoważne, ieżeli maią wysokości równe, a podstawy równoważne.

30. *Twierdzenie.*

Wszelki ostrosłup tróykatny ACBF iest trzecia cześcia graniastosłupa tróykątnego AE, maiącego z nim tez sama podstawę ACB, i spólną wysokość. Fig. 39

Bo odciąwszy ostrosłup tróykatny ACBF od graniastosłupa AE, pozostanie ostrosłup czworokątny ADEBF, maiący za podstawę równoległobok ADEB, a wierzchołek w punkcie F. Pociągnąwszy znowu przekątną AE, i przez punkta A, F, E, poprowadziwszy płaszczyznę AFE, ta podzieli ostrosłup czworokątny ADEBF na dwa ostrosłupy tróykątne ADEF, AEBF, które są równoważne sobie (29. w.): maią bowiem podstawy ADE, AEB, równe a za spólną wysokość prostopadłą, spuszczoną z wierzchołka F na płaszczyznę równoległoboku AE. Aże ostrosłup tróykątny ADEF iest także równoważny ostrosłupowi tróykątnemu ACBF, gdyż maią podstawy DFE, ACB, równe (opi. IV. r. XII); i też samą wysokość co i graniastosłup AE; zatem trzy ostrosłupy tróykątne ADEF, ABEF, ACBF, składaiące graniastosłup AE, są równoważne między sobą, więc ostrosłup ACBF iest trzecią częścią graniastosłupa AE.

Wniosek I. Ponieważ ostrosłup tróykątny iest trzecią częścią graniastosłupa tróykątnego iednego z nim podstawy i wysokości, a każdy graniastosłup ma za miarę iloczyn z podstawy przez wysokość (27. w. 2) *więc ostrosłup tróykątny iest równy trzeciey części iloczynu z podstawy przez swoie wysokość.*

Wniosek II. *Wszelki ostrosłup SABCDE.*
Fig. 38 *ma za miarę trzecią część iloczynu z podstawy ABCDE przez wysokość SO.* Bo przez wierzchołek S ostrosłupa, i przekątne EB, EC, iego podstawy, poprowadziwszy płaszczyzny SEB, SEC; te podzielą ostrosłup SABCDE na ostrosłupy tróykątne, z których każdy, podług wniosku poprzedzaiącego, mieć będzie za mia-

rę trzecią część iloczynu z swoiey podstawy przez wysokość SO; a zatem i summa tych ostrosłupów, czyli ostrosłup SABCDE iest równy trzeciey części iloczynu z podstawy ABCDE przez wysokość SO.

Wniosek III. *Wszelki ostrokrąg prosty albo pochyły ma za miarę trzecią część iloczynu z podstawy przez wysokość.* Bo ostrokrąg iest ostrosłupem maiącym, za podstawę wielokąt o nieskończoney liczbie małych boków (opis. X. r. XII).

Wniosek IV. *Każdy ostrokrąg iest trzecią częścią walca maiącego z nim spólną podstawę, i tę samą wysokość.* Bo pierwsza z tych brył, ma za miarę trzecią część iloczynu z iey podstawy przez wysokość, a druga, cały ten iloczyn (27. w. 3).

31. *Twierdzenie.*

Wszelki ostrosłup ścięty, czyli kloc ostrosłupowy ABCDEF, składa się z trzech ostrosłupów maiących wysokość kloca, i z których ieden ma za podstawę ACB dolną podstawę kloca, drugi podstawę DEF górną kloca, a trzeci, podstawę średnią proporcyonalną między temi dwiema podstawami Fig. 40

Bo przez punkta A, F, B, poprowadziwszy płaszczyznę AFB, ta odetnie od kloca, ostrosłup tróykątny ACBF, maiący za podstawę tróykąt ACB, a wysokość tęż samą co i kloc; gdyż wierzchołek F tego ostrosłupa znayduie się na podstawie górney kloca. Przez punkta D, F, B, poprowadziwszy znowu płaszczyznę DFB, ta pozostały ostrosłup czworokątny ADEBF podzieli na dwa ostrosłupy tróykątne: ieden DFEB stoiący na postawie DFE górney kloca i maiący tę samą z nim wysokość; gdyż wierzchołek iego B znayduie się na podstawie dolney kloca; drugi ostrosłup ADBF, maiący za podstawę tróykąt ADB, a wierzchołek w punkcie F. Lecz poprowadziwszy liniią FG równoległą do EB, za ten trzeci ostrosłup ADBF można wziąć inny ostrosłup ADBG iemu równoważny; ma bowiem z nim tę samą podstawę ADB, i spólną wysokość; gdyż wierzchołki F, G, tych ostrosłupów znayduią się na linii FG, równoległey do krawędzi EB kloca, a przeto równoległey i do płaszczyzny ich podstaw (7). Aże ostrosłup tróykątny ADBG, można uważać jako stoiący na podstawie AGB, i maiący wierzchołek w punkcie D, a zatem maiący wysokość kloca; są więc trzy ostrosłupy tróykątne ACBF, DFEB, ABGD, składaiące kloc ostrosłupowy AE. Pozostaie tylko okazać że podstawa AGB ostatniego z tych trzech ostrosłupów, iest średnią proporcyonalną między podstawami dwóch pozostałych. Jakoż dwa tróykąty ABG, ABC, maiące iednakową wysokość, maią się do siebie iak podstawy BG, BC (II, 22. w. 5); toiest ABG: ABC= BG:BC; zatem będzie $\overline{ABG}^2 : \overline{ABC}^2 = \overline{BG}^2 : \overline{BC}^2$. Aże tróykąty DEF, ABC, maiąc boki odpowiednie równoległe są podobne (12), i daią DFE: ABC $= \overline{EF}^2$ czyli $\overline{BG}^2 : \overline{BC}^2$ (III, 15), więc z przyczyny spólnego stosunku $\overline{BG}^2 : \overline{BC}^2$, będzie $\overline{ABG}^2 : \overline{ABC}^2 =$ DFE: ABC, stąd $\overline{ABG}^2 = ABC \times DFE$, czyli ABC: ABG=ABG: DFE; więc podstawa ABG iest średnią proprcyonalną między dwiema podstawami kloca; *zatem wszelki ostrosłup ścięty i t. d.*

Wniosek I. *Bryłowatość kloca ostrosłupowego ma za miarę trzecią część iloczynu z wysokości kloca, przez summę z podstawy iego górney, i dolney, i średniey proporcyonalney między temi dwiema podstawami.*

Wniosek II. Ponieważ kloc ostrokręgowy, można uważać za kloc ostrosłupa maiący za podstawę wielokąt o nieskończoney liczbie małych boków; *więc i bryłowatość kloca ostrokręgowego ma za miarę trzecią część iloczynu z iego wysokości, przez summę z dwóch kół służących mu za podstawy, i koła średnio proporcyonalnego między temi podstawami.*

32. *Twierdzenie.*

Gdy graniastosłup tróykątny maiący za podstawę ABC, przetniemy płaszczyzną DES nachyloną do tey podstawy; bryła ABCEDS z tego przecięcia otrzymana, będzie równa summie trzech ostrosłupów, których wierzchołkami są punkta S, E, D, a podstawą spólną tróykąt ABC. Fig. 41

Jakoż przez trzy punkta S, A, C, poprowadziwszy płaszczyznę SAC, ta od graniastosłupa ściętego ABCEDS, odetnie ostrosłup tróykątny SABC, maiący za podstawę ABC, a wierzchołek w punkcie S. W pozostałym znowu ostrosłupie czworokątnym SACDE maiącym wierzchołek S, a podstawę ACDE, poprowadziwszy płaszczyznę SEC, ta podzieli ostrosłup czworokątny na dwa ostrosłupy tróykątne SACE, i SCDE: z tych ostrosłup SACE, maiący za podstawę tróykąt AEC a za wierzchołek S, iest równoważny ostrosłupowi BAEC, maiącemu spólną z nich podstawę AEC, i spólną wysokość; gdyż wierzchołki S, B, tych ostrosłupów znayduią się na linii SB równoległey do każdey z linii AE, CD, a zatem i do ich płaszczyzny AEC (7): ten zaś ostrosłup BAEC, uważać można iako maiący za podstawę ABC, a zą wierzchołek punkt E. Co do ostrosłupa trzeciego SCDE, ten naprzód zamieniony być może na ostrosłup mu równoważny ASCD, ma bowiem z nim tę samą podstawę SDC, i spólną wysokość; gdyż wierzchołki A, E, tych ostrosłupów znayduią się na linii AE równoległey do płaszczyzny SCD: następnie, ponieważ ostrosłup ASCD, może być zamieniony na ostrosłup mu równoważny BACD, maiący z nim spólną podstawę ADC, i spólną wysokość; bo wierzchołki S, B, tych ostrosłupów znayduią się na linii SB równoległey do podstawy ADC; przeto ostrosłup SCDE iest równoważny ostrosłupowi BACD, z których ten ostatni może być uważany iako maiący za podstawę ABC, a za wierzchołek punkt D. Więc graniastosłup ścięty ABCDES, iest równy summie trzech ostrosłupów SABC, EABC, DABC, maiących za podstawę spólną, tróykąt ABC, a za wierzchołki odpowiedne punkta S, E, D.

Wniosek. Jeżeli krawędzie AE, BS, CD, są prostopadłe do płaszczyzny podstawy ABC, będą one razem wysokościami trzech ostrosłupów składaiących graniastosłup ścięty AD; *wiec bryłowatość graniastosłupa tróykatnego ścietego wyrazi sie wtedy przez* $\frac{1}{3}AE\times ABC+\frac{1}{3}BS\times ABC+\frac{1}{3}CD\times ABC=\frac{1}{3}ABC\times(AE+BS+CD)$; *toiest przez iloczyn z trzeciey cześci podstawy graniastosłupa przez summę trzech iego krawedzi.*

33. *Twierdzenie.*

Bryłowatość kuli równa iest iloczynowi z powierzchni kuli, przez trzecią część iey promienia.

Kulę bowiem można uważać iako złożoną z nieskończenie wielu ostrosłupów maiących za podstawy, bardzo małe cząstki powierzchni kuli, a za wierzchołek spólny, iey środek. Aże każdy z tych ostrosłupów ma za wysokość promień kuli, i równa się iloczynowi z powierzchni swoiey podstawy, przez trzecią część tey wysokości (30. wn. I); przeto summa wszystkich tych ostrosłupów czyli bryłowatość kuli, równa będzie iloczynowi z iey powierzchni, przez trzecią część promienia kuli.

Wniosek I. *Bryłowatość kuli iest równa iloczynowi z powierzchni koła wielkiego kuli, przez $\frac{2}{3}$ iey średnicy.*

Bo powierzchnia kuli równa iest 4 razy wziętey powierzchni koła iey wielkiego (22. wn. I); więc bryłowatość kuli równa będzie 4 razy wziętey powierzchni tegoż koła, pomnożoney przez $\frac{1}{3}$ promienia; albo równa powierzchni iednego iey wielkiego koła, pomnożoney przez $\frac{4}{3}$ promienia: aże $\frac{4}{3}$ części promienia równe są $\frac{2}{3}$ częściom średnicy; więc bryłowatość kuli równa iest iloczynowi z powierzchni iey koła wielkiego przez $\frac{2}{3}$ średnicy.

Wniosek II. *Bryłowatość wycinka kulistego OABC, utworzonego obrotem wycinka kołowego BOC, około promienia BO, iest równa iloczynowi z trzeciey części promienia kuli, przez część powierzchni tego wycinka kulistego, utworzoną łukiem BC.* Fig. 36

Fig. 36 Gdy od wycinka kulistego OABC, odeymiemy ostrokrąg OAECF, maiący za podstawę koło AECF, a wierzchołek w środku kuli, otrzymamy odcinek kulisty BAFCE. Żeby zaś wynaleść bryłowatość ostrokręgu OAECF, potrzeba mieć wiadomą iego wysokość OD wyrażoną w części promienia kuli. W praktyce wysokość ta otrzymuie się łatwo: bo zmierzywszy cyrklem albo innem narzędziem średnicę AC koła AECF, i wziąwszy tey średnicy połowę DC; w tróykącie prostokątnym DCO, ponieważ $\overline{DO}^2=\overline{OC}^2-\overline{DC}^2$, będzie $DO=\sqrt{\overline{OC}^2-\overline{DC}^2}$; maiąc zatem wiadomą liniią DC, i kuli promień OC, wynaydziemy wysokość DO, a następnie i bryłowatość ostro kręgu OAECF (30.w.3).

Wynalazłszy podobnym sposobem bryłowatość odcinka kulistego BA′F′C′E′, gdy od tey odeymiemy bryłowatość odcinka BAFCE, otrzymamy bryłowatość odcinka kulistego AC′, o dwóch podstawach AECF, A′E′C′F.

Uwaga 1. Oznaczywszy kulę przez K, koło iey wielkie przez Q, średnicę przez S, walec na kuli opisany przez W, ostrokrąg wpisany w walec przez O; będzie $K=\frac{2}{3}S\times Q$ (33.w.1). Aże walec opisany na kuli ma za podstawę koło wielkie kuli, a za wysokość iey średnicę, będzie więc $W=S\times Q$ (27 wn. 3): iest znowu ostrokrąg trzecią częścią walca opisanego na nim (30. wn. 4); zatem $O=\frac{1}{3}S\times Q$. Będzie więc $W: K: O= S\times Q: \frac{2}{3}S\times Q: \frac{1}{3}S\times Q=1:\frac{2}{3}:\frac{1}{3}:=3: 2: 1$; to iest, walec, kula, i ostrokrąg, gdyż tych trzech brył pierwsza iest opisana na dwóch drugich, maią się do siebie iak liczby 3, 2, 1.

Uwaga II. Widzieliśmy w twierdzeniach poprzedzaiących, że iakakolwiek bryła iest zawsze rówwna iloczynowi z trzech wymiarów; więc dwie iakiekolwiek bryły iednego gatunku, maią się do siebie iak iloczyny z trzech wymiarów iednego imienia. Oznaczywszy zatem przez S, s, dwie bryły iednego gatunku, przez H, B, L, h, b, l, ich trzy wymiary iednego imienia: będzie $S : s = H \times B \times L : h \times b \times l$. W tey proporcyi uczyniwszy wymiar $H = h$, i podzieliwszy drugi stosunek przez H; będzie $S : s = B \times L : b \times l$. W tey samey proporcyi uczyniwszy znowu $B \times L = b \times l$, i podzieliwszy drugi stosunek przez $B \times L$, wypadnie $S : s = H : h$. Skąd widzimy, *że dwa graniastosłupy, albo dwa walce, albo graniastosłup z walcem, maiące też samą wysokość, są do siebie w stosunku podstaw: maiące zaś te same podstawy, są do siebie iak ich wysokości.* Toż rozumie się o dwóch ostrosłupach, lub dwóch ostrokręgach, albo o ostrosłupie z ostrokręgiem, gdy maią tę samą wysokość, a podstawy nierowne, i naodwrót.

34. *Twierdzenie.*

Dwie bryły podobne maią się do siebie iak sześciany z ich wymiarów odpowiednych.

Bo w bryłach podobnych (24) ma się $H : h = B : b = L : l$. Zatem proporcya $S : s = H \times B \times L : h \times b \times l$, zamieni się na $S : s = H \times H \times H : h \times h \times h = B \times B \times B : b \times b \times b = L \times L \times L : l \times l \times l$ czyli $S : s = H^3 : h^3 = B^3 : b^3 = L^3 : l^3$; *więc dwie bryły i t. d.*

Wniosek. Więc naprzykład, bryłowatości dwóch kul maią się do siebie iak sześciany z ich promieni, lub z ich średnic.

Uwaga. Porównywaiąc zatem z sobą dwie kule, z których iedna ma np. dwie stopy średnicy, a druga stopę iedną; widzimy: że bryłowatości tych kul maią się do siebie iak 8: 1; ich powierzchnie iak 4: 1; a okręgi kół wielkich iak 2: 1. W ogólności, bryła którey wszystkie wymiary są podwóyne, potróyne i t. d. względem wymiarów bryły drugiey, iest 8, 27, i t. d. razy większa od bryły drugiey.

Przypis Ogólny.

Poprzedzaiące twierdzenia o mierzeniu brył można ogólniey i krócey wyrazić zapomoą znaków algiebraicznych, i tak:

I. Niech p, oznacza podstawę graniastosłupa; w, iego wysokość: będzie bryłowatość graniastosłupa równa $p \times w$, albo pw. .(27. wn. 2).

II, Niech p, będzie podstawą ostrosłupa; w, iego wysokością: bryłowatość ostrosłupa wyrazi się przez $\frac{p \times w}{3}$, lub $\frac{pw}{3}$. .(30. w.1).

III. Niech w, wyraża wysokość kloca ostrosłupowego; p, p', iego podstawy równoległe, między któremi średnia proporcyonalna będzie $\sqrt{p \times p'}$: bryłowatość kloca ostrosłupowego będzie równa $\frac{w}{3} \times (p + p' + \sqrt{p \times p'})$. . (31. w. 1).

IV. Niech p, wyraża podstawę graniastosłupa tróykatnego ściętego; w, w', w'', wysokości trzech iego wierzchołków: bryłowatość graniastosłupa ściętego będzie $\frac{p}{3} \times (w + w' + w'')$.. (32. wn.).

V. Niech R, oznacza promień podstawy walca; w, iego wysokość: będzie okrąg podstawy walca równy $2\,R \times \frac{22}{7}$ (III, 28. uw.); a powierzchnia tey podstawy równa $2\,R \times \frac{22}{7} \times \frac{R}{2} = R^2 \times \frac{22}{7}$ (II. 24. w. 1); czyli stosónek $\frac{22}{7}$ okręgu koła do średnicy oznaczywszy przez π, będzie powierzchnia podstawy walca równa $\pi\,R^2$; a bryłowatość walca wyrazi się przez $\pi\,R^2 \times w$, czyli $\pi R^2\,w$..(27. wn. 3).

VI. Niech R, oznacza promień podstawy ostrokręgu; w, iego wysokość: będzie bryłowatość ostrokręgu rowna $\pi\,R^2 \times \frac{1}{3} \times w$, albo $\frac{1}{3}\,\pi\,R^2 w$.. (30. wn. 3).

VII. Niech A, B, wyrażaią promienie podstaw kloca ostrokręgowego; w, iego wysokość: podstawy tego kloca będą $\pi\,A^2$, $\pi\,B^2$, a między temi średnia proporcyonalna $\sqrt{\pi A^2 \times \pi B^2}$. bryłowetość zaś kloca wyrazi się przez $\frac{1}{3}\,w \times (\pi A + \pi B^2 + \sqrt{\pi A^2 \times \pi B^2})$ czyli $\frac{1}{3}\,\pi\,w \times (A^2 + B^2 + AB)$..(31. w. 2)

VIII. Niech R, oznacza promień kuli, iey powierzchnia będzie $4\,\pi\,R^2$..(22, w. 1): a bryłowatość kuli wyrazi się przez $4\,\pi R \times^2 \frac{R}{3}$ czyli $\frac{4}{3}\,\pi\,R^3$..(33).

IY. Nakoniec niech R, oznacza promień wycinka kulistego; w, wysokość odcinka kulistego, którego powierzchnia kulista, służy za podstawę wycinkowi kulistemu będzie ta podstawa równa okręg. $R \times w = 2\,\pi\,R \times w$ (22. w. 3); a bryłowatość wycinka kulistego wyrazi sięprzez $\frac{2}{3}\,\pi R^2 \times w$ (33. w. 2).

ROZDZIAŁ XIV

O OBRACHOWANIU BRYŁ.

Przykład 1. *Wynaleść bryłowatość rownoległościanu długiego na sążni* 6. *stó p*5, *cali* 8; *szerokiego na sążni* 5, *stóp* 4, *cali* 6; *wysokiego na sążni* 4, *stóp* 3, *cali* 9-

Ponieważ sążeń sześcienny ma stóp sześciennych 216

Stopa sześcienna . . . cal. sześcien. 1728

Cal sześcienny . . . liniy sześciennych 1228

i. t. d.; iest zaś miarą równołegłościanu iloczyn z podstawy przez wysokość (27); więc każdy z trzech wymiarów równoległościanu obróciwszy na cale, i mnożąc następnie te cale przez siebie; będzie naprzód 500 X 414 cali = 207000 cal. kw.; potem 207000 cal. kw. X 333 cali = 68931000 cal sześciennym. Ten ostatni wypadek w calach sześciennych podzieliwszy przez 1728, otrzymam na iloraz 39890 stop. sześ., i 1080 cal. sześcien. Podzieliwszy znowu 39890 przez 216 wypadnie 184 sąż. sześ. i 146 stop. sześ. Zatem bryłowatość równoległościanu danego, zamyka 184 sąż sześ.-146 stop sześ.; 1080 cal. sześ.

Fig. 42. *Muru DB i wspartego na nim przyczołka ACB, znaleść powierzchnią zewnętrzną DACBE, i bryłowatość.*

Ponieważ mur DB wraz z przyczołkiem ACB można uważać za graniastosłup prosty, maiący za podstawę wielokąt CADEB, a wysokość równą szerokości muru; więc oznaczywszy tę szerokość przez S, będzie powierzchnia szukana CADEB = prosto. ABED + tróykąt. ACB = AD×AB + $\frac{AB \times CF}{2}$ = ($AD + \frac{CF}{2}$) × AB (11,22); a bryłowatość granistosłupa DC = ($AD + \frac{CF}{2}$) ×AB×S (27. wn. 2).

Daymy że AD = 31 sąż.; CF = 2 sąż.; AB = 8 sąż.; S = 2 stop. Będzie powierzchnia CADEB = (31+1)×8 = 280 sąż. kwad. a bryłowatość graniastosłupa DC = 280 sąż. kwad. × 2 stop.; czyli,; obróciwszy 2 stopy na sążnie, i mnożąc te stopy przez sążnie kwadratowe; wypadnie bryłowatość muru wraz z przyczołkiem równa 280 sąż. kwad. × $\frac{2}{6}$ = 93 $\frac{1}{3}$ sąż. sześ.

III. *Wynaleść powierzchnią zewnętrzną i bryłowatość muru tworzącego pawilon AJ.* Fig. 43

Można uważać pawilon AJ, iako złożony z czterech równoległościanów prostokątnych, z których każde dwa przeciwległe są równe sobie. To założywszy, wypada 1ód, dla znalezienia powierzchni zewnętrzney pawilonu, wziąć summę powierzchni ścian AH, HC, dwóch równoległościanów przyległych, która iest = HG × BH + HJ × BH = (HG + HJ)×BH (11,22); podwoiwszy tę summę, powierzchnia zewnętrzna całego pawilonu wyrazi się przez 2 BH × (HG + HJ); toiest przez iloczyn *z podwoyney wysokości pawilonu, przez summę z długości dwóch ścian przyległych!*

2re. wynalazłszy bryłowatość dwóch równoległościanów przyległych sobie, i tę podwoiwszy, wypadnie bryłowatość całego pawilonu. I tak, niech ABCD wyraża podstawę pawilonu którego wysokość = BH,

niech będzie muru szerokość AE = Ea, Będzie bryłowatość równoległościanu maiącego podstawę = ED, a wysokość = BH. równa AD × AE × BH (27); podobnie bryłowatość rownoległościanu, którego podstawa = EabF, a wysokość iest taż sama BH, będzie = EF × Ea × BH; więc, podwoiwszy summę tych bryłowatości, i oznaczywszy przez X bryłowatość pawilonu; będzie X = (2AD + 2EF) × BH × AE. Aże figura pokazuie, że 2AD + 2EF = Ob. ABCD — 4AE, tudzież ob. ABCD = ob. abcd + 8AE; będzie zatem X = (ob. ABCD — 4 AF) × BH × AE, albo X = (ob. abcd + 4 AE) BH × AE; *toiest dla otrzymania bryłowatości pawilonu, potrzeba od obwodu zewnętznego iego podstawy odiąć 4 razy wziętą szerokość muru, albo też samą szerokość dodać do obwodu wewnętrznego teyże podstawy, i w pierwszym razie różnicę, a w drugim otrzymaną summę, pomnożyć przez iloczyn z szerokości przez wysokość muru.*

Uwaga I. Ponieważ ob. ABCD = ob. abcd + 8 AE, a stąd ob. abcd = ob. ABCD — 8 AE; więc *chcąc z obwodu wewnętznego abcd podstawy pawilonu, doyść iego powierzchni zewnętrzney, potrzeba do tego obwodu dodać 8 razy wziętą szerokość muru, a otrzymaną summę pomnożyć przez wysokść pawilonu.* I naodwrot, *aby z obwodu zewnętrznego ABCD podstawy pawilonu, wynaleść iego powierzchnią wewnętrzną, potrzeba od tego obwodu odiąć 8 razy wziętą szerokość muru, a otrzymaną różnicę pomnożyć przez wysokość pawilonu.*

Fig. 44 *Uwaga* II. Gdyby szło o wyrachowanie powierzchni dachu *prostego* EC wspartego na dwóch przyczołkach ABC, EDF do siebie ruwnoległych; albo dachu *łamanego* AM, toiest w którym część wierzchnia iest bardziey nachylona do podstawy, niżeli boczna, widzimy: że w pierwszym razie trzeba wynaleść powierzchnią równoległoboku EC i t. d. w drugim, powierzchnią równoległoboku FM, trapeza AH, tróykąta FEH i t. d.

IV. *Wynaleść bryłowatość wieży murowaney.* Fig. 45

Niech wieża dana ABCD ma formę walca wydrążonego; będzie więc iey bryłowatość równa różnicy dwóch walców tey samey wysokości AB, i maiących, ieden za podstawę koło ADE, a drugi, koło ade; czyli bryłowatość ta będzie równa różnicy dwóch koł ADE, ade, pomnożoney przez wysokość AB (27. wn. 3). Daymy że wysokość AB=12 sąż.; średnica AD=15 sąż.; muru szerokość=$\frac{1}{2}$ sąż. Szerokość tę podwoioną odiąwszy od 15, wypadnie średnica ad=14 sąż. Zatem powierzchnia koła ADE będzie=$\frac{314}{100}\times(\frac{15}{2})^2=\frac{70650}{400}$ sąż.kw.(II,24.w.1)(*); a powierzchnia koła ade=$\frac{314}{100}\times(\frac{14}{2})^2=\frac{61544}{400}$ sąż. kw: więc różnica tych dwóch koł będzie=$\frac{9106}{400}$ sąż. kw.; tę różnicę pomnożywszy przez 12, wypadnie bryłowatość szukana=$273\frac{9}{50}$ sąż. sze.

V. *Wynaleść bryłowatość ziemi wydobytey przy wykopaniu studni ADCB.* Fig. 46

Studnia ocembrowana może mieć formę walca, albo równoległościanu prosto-

(*) Zamiast stosunku 7: 22, średnicy do okręgu koła, używać będziemy we wszystkich przykładach stosunku 100: 314, który iest prawdziwszy od stosunku poprzedzaiącego, obróconego na ułomek dziesiętny z większą liczbą cyfer niż dwie (III, 28).

kątnego; więc w pierwszym razie pomnożywszy podstawę AED walca, w drugim podstawę równoległościanu, przez AB głębokość studni, wypadnie ilość ziemi, która wypełniała mieysce zaięte przez studnią i iey ocembrowanie.

Fig. 47 VI. *Wynaleść bryłowatośc dzwonicy murowaney ABCD.*

Dzwonica może mieć formę wydrążonego ostrokręgu, albo wydrążonego kloca ostrokręgowego: w pierwszym więc razie, bryłowatością dzwonicy będzie różnica dwóch ostrokręgów ABD, abd, znalezionych podług (30. w. 3); w drugim, różnica dwóch kloców ostrokręgowych ADCB, adcb. Daymy że w tym drugim przypadku, w klocu ADCB większym, podstawy dolney średnica AD = 16 stóp.; podstawy górney średnica BC = 9; kloca wysokość LK = 45 stóp.: te ważności włożywszy w formułę $\frac{\pi w}{3} \times (A^2 + B^2 + AB)$ . . (34. przypis. VII); będzie kloca ABCD bryłowatość $= \frac{314}{100} \times \frac{45}{3} \times \left((\frac{16}{2})^2 + (\frac{9}{2})^2 + \frac{16}{2} \times \frac{9}{2} \right) = 5663 \frac{31}{40}$ stóp. sześ. Podobnym sposobem, maiąc wiadome średnice ad, bc, dwóch podstaw kloca abcd mnieyszego, wynaydziemy iego bryłowatość, którą odiąwszy od bryłowatości kloca ABCD, Otrzymamy bryłowatość muru szukaną.

Fig. 48 VII. *Dwóch murów BO, QE, i wspartego, na nich sklepienia BDH, wynaleść powierzchnią wewnątrzną i bryłowatość.*

1ód. można uważać dwa mury BO, QE, za dwa równoległościany prostokątne równe sobie, a sklepienie BDH, za połowę wydrążonego walca; a zatem powierzchnia wewnętrzna dwóch równoległościanów będzie równa podwoioney powierzchni prostokąta LO, maiącego podstawę NO równą długości sklepienia, a wysokość LN równą wysokości muru BO, czyli ta powierzchnia wyrazi się przez $2 \times NO \times LN$ (11, 22); powierzchnia zaś wewnętrzna wydrążonego półwalca, będzie równa iloczynowi z półokręgu LMJ przez NO (17. wn.); więc oznaczywszy przez P, powierzchnią wewnętrzną dwóch równoległościanów, i półwalca wydrążonego; będzie $P = 2NO \times LN + LMJ \times NO = NO\,(2LN + LMJ)$; toiest, *powierzchnią wewnętrzną całego muru ADQ otrzymam, mnożąc długość sklepienia, przez podwoioną wysokość muru BO, powiększoną półokręgiem LMJ.*

2re. ponieważ równoległościan BO można uważać iako maiący za podstawę prostokąt LO, a wysokość BL równą szerokości muru: więc bryłowatość dwóch równoległościanów równych BO, QE, wyrazi się przez $2 \times LN \times NO \times BL$ (27); bryłowatość zaś sklepienia będzie równa $LMJ \times NO \times BL$ (27. wn. 3); czyli bryłowatość dwóch równoległościanów i sklepienia oznaczywszy przez B, będzie $B = 2 \times LN \times NO \times BL + LMJ \times NO \times BL = (2 \times LN + LMJ) \times BL \times NO$; toiest, *bryłowatość całego muru ADQ otrzymam, mnożąc długość sklepienia przez powierzchią przecięcia czyli profilu NACGQ.*

Gdyby sklepienie BDH nie miało formy zupełney półwalca wydrążonego, w tedy sposób dochodzenia iego powierzchni i bryłowatości będzie tylko przybliżony, i w tem się różnić od poprzedzaiącego, iż zamiast półokręgu LMJ, brać potrzeba połowę summy dwóch łuków LMJ, BCH, obeymuiących grubość sklepienia; które to łuki wynayduią się za pomocą średnic LJ, BH, sznurkiem wymierzonych. W tem założeniu, będzie

$$P = NO\left(2\,LN + \frac{LMJ + BCH}{2}\right);$$

$$B = \left(2\,LN + \frac{LMJ + BCH}{2}\right) NO \times BL.$$

Daymy że $LJ = 12$ stop., $BL = 2$ stop., $LN = 4\frac{1}{2}$ stop. $NO = 25$ sąż. Z wiadomey średnicy LJ wynaydę półokrąg $LMJ = \frac{314 \times 12}{2 \times 100}$ (III, 28). Dodawszy LJ do 2BL, wypadnie średnica $BH = 16$ stop.; za pomocą tey średnicy otrzymam podobnie półokrąg $BCH = \frac{314 \times 16}{2 \times 100}$; aże $LN = 4\frac{1}{2}$, więc $2LN = 9$ stop.; włożywszy te ważności w wyrażenia na P, B, będzie $P = 25 \times \left(9 + \frac{314 \times 12}{4 \times 100} + \frac{314 \times 16}{4 \times 100}\right) = \frac{3098}{100}$ st. $\times$ 25 sąż. czyli obróciwszy ułomek $\frac{3098}{100}$ na sążnie, dzieląc go przez 6, a potem pomnożywszy przez 25; wypadnie $P = 129$ sąż. kwad. 3 stop. kw.

Podobnie będzie $B = \frac{3098}{100}$ stop $\times$ 25 $\times$ 2 stop $= \frac{6196}{100}$ stop kw. $\times$ 25 sąż.; czyli, obróciwszy ułomek $\frac{6196}{100}$ na sążnie kwadratowe, dzieląc go przez 36, a potem pomnożywszy przez 25, będzie $B = 43$ sąż. sze.; 6 stop. sześ.

VIII. *Półkuli wydrążoney ABCDEF, wymierzyć powierzchnią wewnętrzną, i zewnętrzną, tudzież iey bryłowatość.*

Fig. 49 Iód. Ponieważ powierzchnia kuli, równa iest 4 kołom wielkim (22. wn. 1.), przeto połowa tey powierzchni, będzie równa dwom takim kołom. Wynalazłszy zatem powierzchnią koła wielkiego kuli, maiącego za średnicę DE, i tę powierzchnią podwoiwszy; potem powierzchnią koła wielkiego kuli, którego średnica iest AC, i tę powierzchnią wziąwszy także dwa razy: otrzymamy na pierwszy wypadek powierzchnią wewnętrzną, na drugi zewnętrzną, półkuli wydrążoney. I tak niech będzie średnica DE = 6 sążni., muru grubość AD $= \frac{1}{4}$ sąż.: dodawszy 2 AD do DE, wypadnie średnica AC $= 6\frac{1}{2}$ sąż. Zatem koła, którego średnica iest DE, powierzchnia będzie $= \frac{314}{100} \times 3^2 = \frac{2826}{100}$ sąż. kw. (II,21. wn. 1); podwoiwszy tę powierzchnią, wypadnie na powierzchnią wewnętrzną kuli $\frac{5652}{100}$ sąż. kw. Podobnie powierzchnia koła maiącego za średnicę AC,

$$\text{będzie} = \frac{314}{100} \times \left(\frac{6\frac{1}{2}}{2}\right)^2 = \frac{314}{100} \times \left(\frac{13}{4}\right)^2 = \frac{53066}{1600}$$

sąż. kw.; a podwoiona ta powierzchnia,

$$\text{będzie} = \frac{53066}{800} = \frac{26533}{400} \text{ sąż. kw.}$$

2re. dla otrzymania bryłowatości półkuli wydrążoney, wynaleść potrzeba bryłowatość połkuli maiącey średnicę DE, potem bryłowatość półkuli, którey średnica iest AC, i wziąć różnicę tych dwóch bryłowatości. I tak, ponieważ bryłowatość półkuli równa się iloczynowi z iey powierzchni wypukłey, przez trzecią część promienia, czyli przez szóstą część średnicy kuli (33); więc powierzchnią wewnętrzną półkuli wydrążoney, równą $\frac{5652}{100}$ pomnożywszy przez $\frac{1}{6}$ DE=1 sąż., a powierzchnią półkuli zewnętrzną, równą $\frac{26583}{400}$, pomnożywszy przez $\frac{1}{6}$ AC $= \frac{13}{12}$ sąż. i pierwszy iloczyn odiąwszy od drugiego, wypadnie bryłowatość półkuli wydrążoney, równa 15 sąż. sze.; 73 stop. sze.; i $838\frac{2}{25}$ cal. sześ.

Uwaga. Tym samym sposobem możnaby wynaleść powierzchnią i bryłowatość *kopuły*, uważaiąc ią za półkulę wydrążoną.

Fig. 50 IX. *Wymieryć powierzchnią i bryłowatość kolumny AC.*

Jeżeli kolumna iest iednakowey gruboście od wierzchołka do podstawy, iey powierzchnia i bryłowatość dochodzi się tym samym sposobem, co i walca. Jeżeli zaś kolumna AC, ma grubość tę samą od AB do GH, a zmnieyszaiącą się od GH do wierzchołka DC; albo ieżeli iey grubość zmnieysza się od EF, do wierzchołka DC, i do podstawy AB (fig. 50. bis.); uważa się w pierwszym razie kolumna iako złożona z walca AH, i kloca ostrokręgowego HD; w drugim, z dwóch kloców ostrokęgowych AF, EC, i w obu razach znaleziona powierzchnia i bryłowatość dwóch części składaiących kolumnę, będzie iey powierzchnią i bryłowatością szukaną.

Uwaga. Ponieważ kolumny AC (fig. 50 bis.), używaney w budowlach, grubość zwyczaynie bardzo mało od siebie różni się, przeto bez uchibienia prawie można uważać tę kolumnę iako złożoną z dwóch walcow AF, FD, maiących za podstawę koła GH, JK, przechodzące przez środki ich wysokości.

Fig. 51 X. *Wynaleść bryłowatośc ziemi skopaney.*

Aby doyść baryłowatości skopaney ziemi wyrachować potrzeba próżnią przez skopanie ziemi utworzoną; gdyż ziemia wzruszona więcey daleko zaymuie mieysca, niżeli przed iey wzruszeniem: działanie to odbyć można sposobem przybliżonym, za pomocą wiadomey wysokości kopców, iak są E, F, G, które zostawiać zwykli grabarze we wszystkich mieyscach, gdzie ziemia przez nich skopana, miała wysokość naywiększą i naymnieyszą. I tak, daymy np. że podstawą rzeczoney próżni iest prostokąt AD, maiący długość AB = 59 sąż., a wysokość AC = 43 sąż. Niech kopiec E, ma wysokości 4 sąż., kopiec F, 3 sążnie, a kopiec G, 2 sążnie. Dodawszy do siebie wysokości kopców. i summę stąd otrzymaną podzieliwszy przez ich liczbę, iak w tym razie przez 3, będzie wysokość średnia równa 3 sążniom; przez tę wysokość pamnożywszy powierzchnią prostokąta AD = 59 X 43 = 2537 sąż. kw., wypadnie bryłowatość skopaney ziemi, równa 2537 X 3 = 7611 sąż. sześ.

XI. *Wymierzyć beczkę.* Fig. 52

Mierzyć beczkę, iest to dochodzić ile razy mieści się w niey pewna miara płynu, iaką iest *np.* kwarta. Gdyby beczki były podobne sobie, mierzyć ie byłoby łatwo, maiąc wiadomą miarę iedney beczki; gdyż wtédy obiętości beczek miałyby się do siebie iak sześciany z ich boków odpowiadaiących; lecz że forma beczek bywa różna, i te zbliżaią się tylko do brył, które dokładnie wymierzyć umiemy, przeto też i sposób mierzenia beczek będzie przybliżony, i ten iest następuiący. Daymy, że długość GH beczki ABDE, zawarta między dwoma iey dnami iest = 51 cal.; że każda ze średnic AB, ED, w obu dnach, iest = 16 cal.; że nakoniec przy otworze C beczki, szerokość iey naywiększa FC iest = 22 cal.

Wziąwszy połowę summy dwóch średnic AB, FC, to iest $\frac{16+22}{2}$, będzie średnia beczki szerokość $=19$ cal. Do średnicy $=19$ cal., wynayduie się powierzchnia koła (II,24 w. I), która będzie $=\frac{314}{100}\times(\frac{19}{2})^2=283\frac{77}{200}$ cal. kwadr; pomnożywszy tę powierzchnią przez 51, wypadnie ilość płynu beczkę wypełniaiącego równa $14452\frac{127}{200}$ cal. sześ. Ten ostatni wypadek podzieliwszy przez liczbę cali sześ. zamkniętych w kwarcie, znaydziemy na iloraz, ile kwart płynu zawiera się w beczce daney.

Fig. 53 Na tey zasadzie opiera się inny łatwieyszy i prędszy sposób mierzenia beczek, za pomocą pręta żelaznego JKLM w końcu zakrzywionego, i maiącego bok ieden podzielony na części równe, a drugi na nierówne; podział takowy tak się wykonywa. Do naczynia OPQR, maiącego zupełną formę walca, nalawszy kwartę iakiegokolwiek płynu, wymierza się iak naydokładniey naprzód średnica OR, dna tego naczynia, potem wysokość OS, nalanego płynu. Na boku pręta obiera się punkt N wprost przeciwległy końcowi M pręta, i od punktu N wziąwszy linią Na, równą wysokości OS, przenosi się ią 2, 3, 4 i t. d. razy, na bok pręta; który bok tak podzielony zowie się *bokiem wysokości*.

Aby podzielić drugi bok pręta; prowadzi się liniia nieograniczona WZ, i do tey z iey końca W, wynosi się prostopadła WX; i na teyże linii WZ, na prostopadłey WX, i na drugim boku pręta JKLM, biorą się linie W1, WX, Jd, równe, każda średnicy OR. To wykonawszy, od punktu X do punktu 1, prowadzi się liniia X1; i na linii WZ, i na tym samym boku pręta, biorą się linie W2, J2, równe, każda linii X1. Od punktu znowu X do punktu 2, prowadzi się liniia X2; i na linii WZ, i na boku pręta, biorą się liniie W3, J3, równe linii X2: i tak następnie działaiąc, podzieli się bok pręta na żądaną liczbę części równych; który bok zowie się *bokiem średnic.*

Liniie J_2, J_3, J_4, *i t. d. oznaczone na boku pręta, są średnicami podstaw* 2, 3, 4, *i t. d. razy, większych od podstawy maiącey; za średnicę Jd=OR.*

Koła bowiem maią się do siebie iak kwadraty z ich średnic (III, 16. w. 2); zatem koło średnicy $X1 = W_2$, ma się do koła srednicy $W1 = \overline{X1}^2 : \overline{W1}^2$. Aże w tróykącie prostokątnym równoramiennym XW1, uczyniwszy $W1 = 1$, będzie $\overline{X1}^2 = \overline{XW}^2 + \overline{W1}^2 = 1^2 + 1^2 = 2$; więc koło śred. W_2: koła śred. $W1 = 2 : 1$. Podobnie, koło śred. X2, czyli śred. W_3: koła śred. $W_2 = \overline{X2}^2 : \overline{W2}^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 : 1^2 + 1^2 = 3 : 2$; i tak następnie. Są zaś liniie W1, W2, W3 i t. d., odpowiednie równe liniiom Jd, J_2, J_3 i t. d.; więc koło śred. Jd: koła śred. J_2: koła sred. J_3 i t. d. = 1: 2: 3: i t. d.; *czyli że liniie* J_2, J_3, J_4 *i t. d., są średnicami podstaw i t. d.*

Tak sporządzony pręt używa się następuiącym sposobem: wzdłuż linii GH oznaczaiącey długość beczki, przyłożywszy pręt JKLM tak, aby iego koniec zakrzywiony M, dotykał się któregokolwiek dna AB, uważa się na *boku wysokości* pręta, iakiey liczbie odpowiada dno przeciwległe ED. Potem koniec J pręta, ustawiwszy naprzód w punkcie A obwodu dna górnego, następnie w punkcie E, obwodu dna dolnego beczki, uważa się *na boku średnic*, iakiey liczbie odpowiadaią punkta B, D, wprost przeciwległe punktom A, E. Nakoniec przez otwór C, zanurzywszy pręt do beczki tak, aby iego koniec J, dotykał się beczki w punkcie F, uważa się iakiey liczbie *boku średnic*, odpowiada punkt C, wprost przeciwległy punktowi F. Daymy, że tym sposobem znaleziono, iż długość GH=15, że każda ze średnic AB, ED, iest=16, że nakoniec średnica FC=26. Wziąwszy teraz summę dwóch średnic. naywiększey i naymnieyszey, i iey połowę $\frac{16+26}{2}=21$, pomnożywszy przez 15, wypadnie na iloczyn 315 kwart. płynu napełniaiącego beczkę.

Uwaga. Łatwo widzieć, że oba te sposoby mierzenia beczki, sprowadzaią się do mierzenia walca maiącego za wysokość GH długość beczki, a za podstawę połowę summy powierzchni dwóch kół, z których iedno ma za średnicę beczki szerokość AB naymnieyszą, a drugie, szerokość FC naywiększą.

XII. *Wymierzyć bryłowatość drzewa*.

Fig. 54 Kloc drzewa nieociosanego można uważać za kloc ostrokręgowy, który aby do budowli mógł być użyty, obrabia się na belkę maiącą zwyczaynie formę równoległościanu prostokątnego. Ponieważ do wielkości belki, części drzewa ociosanego, czyli klocowe odcinki, nie należą; więc, aby z kloca danego wynaleść bryłowatość belki, uważa się za iey podstawę kwadrat BC wpisany w koło ABDC, którego okrąg mierzy się sznurkiem obwiniętym na powierzchni kloca, w połowie iego wysokości. Aże w kwadracie BC, poprowadziwszy przekątną AD, tróykąt prostokątny równoramienny ABD daie $\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 = 2\,\overline{AB}^2$, skąd $\overline{AB}^2 = \frac{\overline{AD}^2}{2}$; więc oznaczywszy wysokość kloca przez W, będzie bryłowatość belki równa $\frac{\overline{AD}^2 \times W}{2}$: toiest, *iloczynowi z wysokości kloca, przez połowę kwadratu z średnicy koła maiącego okrąg wymierzony na połowie wysokości kloca.* Daymy że kloc drzewa nieobrobionego ma długość $= 51$ stop. $= 612$ cal.; że okrąg koła wymierzony na połowie iego długości iest $= 78\frac{1}{2}$ cal. Dla otrzymania bryłowatości belki, szukam średnicy koła którego okrąg $= 78\frac{1}{2}$ cal.; będzie ta średnica $= \frac{100}{314} \times 78\frac{1}{2} = 25$ cal. (III, 28); wziąwszy połowę kwadratu tey średnicy i pomnożyszy przez 612, wypadnie bryłowatość belki $= \frac{(25)^2 \times 612}{2} = 191250$. cali sześciennych.

Uwaga I. Ponieważ stopa sześcienna iest miarą drzewa powszechnie u nas używaną, więc podzieliwszy ten ostatni wypadek przez liczbę cali sześciennych zawartych w sześcienney stopie, otrzymamy na iloraz bryłowatość belki w stopach sześciennych.

Uwaga II. Chcąc daney belki doyść bryłowatości, trzeba pomnożyć długość belki przez iey podstawę; a lubo działanie toiest dosyć proste; wszelako dla ułatwienia rachunku, wyrachowane i ułożone zostały tablice bryłowatości różnych belek, które aby z tych tablic wynaleść, dosyć iest mieć wiadome trzy każdey belki wymiary-

Fig. 55 **XIII.** ***Wymierzyć bryłowatość mostołodzi (ponton).***

Mostołódź ABCDEFGH składa się z dwóch łodzi szerokich w niewielkiem oddaleniu z sobą połączonych, i pokrytych z wierzchu deskami. Przeciąwszy zatem mostołódź płaszczyzną pionową przez środek iey przechodzącą, na dwie równe części ABCD abcd, EFGH abcd; pierwsza z tych części rozłoży się na dwa graniastosłupy tróykątne ścięte ABCabc, ADCadc, których bryłowatości wynalazłszy summę, i tę podwoiwszy, wypadnie bryłowatość mostołodzi. Jakoż (34. przy. IV), graniastosłup tróykątny ścięty ABCabc $= \left(\frac{Aa + Bb + Cc}{3}\right) \times abc = \left(\frac{2\,Aa + Cc}{3}\right) \times abc$, gdyż $Bb = Aa$. Podobnie, graniastosłup tróykątny ścięty ADCadc $= \left(\frac{Aa + Dd + Cc}{3}\right) \times acd = \left(\frac{Aa + 2\,Cc}{3}\right) \times acd$, gdyż $Dd = Cc$. Zatem bryła ABCD abcd będzie $= \left(\frac{2Aa + Cc}{3}\right) abc + \left(\frac{Aa + 2Cc}{3}\right) acd$; to wyrażenie podwoiwszy, i bryłowatość mostołodzi oznaczywszy przez V, będzie $V = \left(\frac{4Aa + 2Cc}{3}\right) abc + \left(\frac{2Aa + 4Cc}{3}\right) acd$. Ażc $Aa = EA$, zatem $4Aa = 2AE$. Dla Podobney przyczyny $4Cc = 2CG$, nadto iest $2Aa = AE$, $2Cc = CG$; ważności te włożywszy, w to ostatnie wyrażenie, wypadnie $V = \left(\frac{2AE + CG}{3}\right) abc + \left(\frac{AE + 2CG}{3}\right) acd$.

Daymy że AB, szerokość naywiększa mostołodzi, iest . . . . $= 1, 5$ sąż.
CD, szerokość naymnieysza $= 1, 3$ —
Głębokość mostołodzi $= 0, 8$ —
Długość naywiększa AE $= 6, 0$ —
Długość naymnieysza CG $= 4, 4$ —

Będzie powierzchnia tróykąta abc $= \frac{1.5 \times 0,8}{2} = 0,6$.

Powierzchnia tróykąta acd $= \frac{1,3 \times 0,8}{2} = 0,52$.

Zatem $V = \left(\frac{12+4,4}{3}\right) \times 0,6 + \left(\frac{6+8,8}{3}\right) \times 0,52 =$ 5, 845 sążni sześciennych.

XIV. *Znaleść bryłowatość kuli ziemskiey którey średnica ma 2865 mil.*

Z daney średnicy wynalazłszy okrąg wielkiego koła kuli ziemskiey (III, 28), który zawierać będzie blisko 9000 mil; i ten pomnożywszy przez średnicę, będzie powierzchnia kuli ziemskiey równa $9000 \times 2865 = 25785000$ mil kwad. (22): tę znowu powierzchnią pomnożywszy przez szóstą część średnicy, wypadnie (33) bryłowatość kuli ziemskiey równa $25785000 \times 477\frac{1}{2} = 12312337500$ mil sześcien.

Uwaga I. Jeżeli ciało dane do mierzenia iest nieforemne, uważa się wtedy iako złożone, chociaż przybliżonym sposobem, z ostrosłupów, graniastosłupów i t. d, toiest brył takich które wymierzyć umiemy, a znaleziona summa ich bryłowatości, będzie szukaną bryłowatością ciała.

Uwaga II. Jeżeli ciało stałe które mamy mierzyć, nie iest wielkie, wtedy można ieszcze doyść iego bryłowatości następuiącym sposobem. Do naczynia foremnego, iakiem iest np. walec, nalewa się woda i punkt iey wysokości oznacza się na boku naczynia; potem zanurza się w wodzie ciało dane do mierzenia, i naznacza się podobnie punkt wysokości do którey się woda podniesie; pomnożywszy odległość między temi punktami, przez znalezioną powierzchnią wody przeciwległą podstawie naczynia, wypadnie szukana bryłowatość ciała.

KONIEC XIĘGI CZWARTÉY.

XIĘGA V.

ROZDZIAŁ XV.

POCZĄTKI

TRYGONOMETRYI PROSTOKREŚLNEY.

1. Każdą figurę prostokreślną można zamienić na tróykąt (11, 25); znaiąc zatem własności i sposób mierzenia tróykątów, przyydziemy łatwo do poznania własności i sposobu wymierzenia iakieykolwiek figury prostokreślney.

2. W tróykącie każdym iest sześć rzeczy do uważania: trzy boki i trzy kąty; z tych sześciu, wynalezienie przez rachunek trzech rzeczy, za pomocą trzech wiadomych, między któremi znaydówać się powinien przynaymniey ieden bok, przedmiotem iest *Trygonometryi prostokreślney.*

3. Lecz aby z trzech rzeczy danych tróykąta, wynaleść przez proporcyą trzy inne, potrzeba wielkości w skład tróykąta wchodzace porównywać z sobą, toiest bok z bokiem, a kąt z kątem, iako rzeczy iednego z sobą gatunku; z tego porównania wypada stosunek boków, i stosunek kątów; że zaś z takowych dwóch stosunków niemożna ułożyć proporcyi; bo w tróykącie boki nie są proporcyonalne względem kątów im przeciwległych, ani

względem łuków mierzących te kąty; iak się o tem nayłatwiey można przekonać na tróykącie prostokątnym równoramiennym, w którym lubo każdy z kątów ostrych iest połową kąta prostego, boki iednak przeciwległe kątom ostrym, większe są od połowy przeciwprostokątney: z tego powodu, starano się wprowadzić inne liniie proste na mieysce kątów, proporcyonalne do boków tróykąta, i te nazwano liniiami *trygonometrycznemi*. Trzeba więc naprzód poznać liniie trygonometryczne, i wskazać sposób wyrachowania ich ważności w liczbach na kąty czyli łuki koła; potem oznaczyć stosunki tych liniy do boków tróykąta, za pomocą których, z trzech danych rzeczy tróykąta wynaydziemy trzy inne, co nazywać się zwykło *rozwiązaniem tróykąta*.

Ta. VII 4. Dla poznania liniy trygometrycz-
Fig. 1. nych, weźmy iakikolwiek łuk AB mnieyszy od czwartey części okręgu koła.

Prostopadła BE, spuszczona z iednego końca łuku AB, na promień AC przechodzący przez drugi koniec tego łuku, nazywa się *wstawą* łuku AB, albo kąta ACB maiącego ten łuk za miarę. Podobnie liniia BG iest wstawą łuku BF, lub kąta BCF.

5. Liniia AE, czyli część promienia AC, zawarta między końcem łuku AB, a iego wstawą BE, iest *wstawą odwrotną* łuku AB, albo kąta ACB. Podobnie liniia FG iest wstawą odwrotną łuku BF, lub kąta BCF.

6. Prostopadła AD, do promienia AC przechodzącego przez ieden koniec łuku AB, z końca iego wyprowadzona aż do przecięcia się z promieniem BC przedłu-

żonym, przechodzącym przez drugi koniec tegoż łuku, iest *styczną* łuku AB, albo kąta ACB; liniia FJ iest także styczną łuku BF, albo kąta BCF.

7. Liniia CD, czyli promień BC przedłużony aż dospotkania się z styczną AD, iest *sieczną* łuku AB, albo kąta ACB. Liniia CJ iest także sieczną łuku BF, lub kąta BCF.

8. Gdy kąt ACF, iest prosty, kąt BCF będzie dopełnieniem kąta ACB do kąta prostego, i wtedy,

<table>
<tr><td>BG nazywa się wstawą dopełnienia, lub dostawą</td><td rowspan="4">łuku AB
albo
kąta ACB</td></tr>
<tr><td>FG iest wstawą odwrotną dopełnienia, czyli dostawą odwrotną</td></tr>
<tr><td>FJ iest styczną dopełnienia, albo dostyczną</td></tr>
<tr><td>CJ iest sieczną dopełnienia, albo dosieczną</td></tr>
</table>

Widzimy podobnie, że ponieważ kąt ACB iest nawzaiem dopełnieniem kąta BCF, przeto wstawa, wstawa odwrotna, styczna, i sieczna kąta ACB, iest dostawą, dostawą odwrotną, dostyczną, i dosieczną kąta BCF. (*).

9. Gdy punkt B będzie się zbliżał do punktu F, czyli gdy łuk AB będzie coraz wzrastał, wstawa iego BE będzie się także coraz powiększać, tak dalece; że

---

(*) Dla skrócenia pisać będziemy wst. wst. odw. sty. sie. dost. dost. odw. dosty. dosie, na mieyscu wstawa, wstawa odwrotna, styczna, sieczna, dostawa, dostawa odwrotna, dostyczna, i dosieczna.

gdy punkt B padnie na punkt F, wstawa BE zeydzie się z promieniem FC i będzie mu równa. Więc *promień* iest wstawą kąta prostego. Niekiedy promień nazywa się *wstawą cała.*

Fig. 2 W tróykącie prostokątnym ACB, ieżeli przeciw prostokątną CB weźmiemy za promień, każde z ramion kąta prostego będzie wstawą kąta przeciwległego temu ramieniowi, toiest AC będzie wstawą kąta B, AB wstawą kąta C.

Fig. 1 10. Z poprzedzaiącego opisania wstawy widzimy, *że wstawa BE łuku iakiegokolwiek AB, iest połowa cięciwy łuku podwóynego względem AB.*

Bo przedłużywszy BE do punktu O, promień CA prostopadły do cięciwy BO, dzieli ią i łuk BAO na dwie równe części (II, 5); więc BE wstawa łuku AB iest połową cięciwy łuku BAO dwa razy większego od łuku AB; *zatem wstawa i t. d.*

11. Więc 1ód. *wstawa* 30° *iest połową promienia.*

Jakoż, wstawa 30° iest połową cięciwy łuku dwa razy większego, czyli połową cięciwy łuku 60°. Ażeli cięciwa łuku 60°, czyli bok sześciokąta foremnego (II, 11), iest równy promieniowi koła; więc *wstawa* 30° *iest równa połowie promienia.*

12. Więc 2re. *wstawa kąta rozwartego BCK, iest ta sama co wstawa BE iego spełnienia BCA.* (*)

Bo liniia BO, będąc cięciwą łuku BAO podwóynego względem łuku BA, iest oraz cięciwą łuku BKO podwóynego względem

(*) Kąt BCA, spełniaiący kąt BCK do dwoch kątów prostych, nazywa się iego *spełnieniem.*

łuku BK; zatem BE połowa tey cięciwy, czyli wstawa kąta BCA, iest także wstawą kąta BCK; *więc wstawa kąta rozwartego, i t. d.*

13. *Styczna* 45° *iest równa promieniowi.* Bo w tróykącie prostokątnym DAC, gdy kąt DCA=45°, będzie także i kąt D=45°, zatem bok AD=CA (1, 15); więc *styczna* 45° i t. d.

14. Gdy kąt DCA iest większy od 45°, styczna iego AD będzie większa od promienia; a gdy tenże kąt iest prosty, styczna iego będzie równoległa względem sieczney CD, a zatem nigdy się z nią nie zeydzie: i dlatego mówi się że styczna kąta prostego iest nieskończona.

W tróykącie prostokątnym BAC, gdy CA iedno z ramion kąta prostego weźmiemy za promień, ramie drugie AB będzie styczną kąta C przyległego ramieniowi pierwszemu, a przeciwprostokątna CB sieczną togoż kąta. Podobnie gdy AB weźmiemy za promień, CA będzie styczną kąta B, a CB iego sieczną. Fig. 2

Jeżeli teraz wystawimy sobie promień podzielony na 10,000,000,000 części równych, widoczna iest, iż wstawa 30° zamykać będzie takich części 5,000,000,000, a wstawy łuków większych lub mnieyszych od 30°, zamykać będą więcey lub mniey tychże części; niemniey dostawy, styczne, i t. d. tych różnych łuków zawierać będą pewną liczbę części promienia. Staraymy się więc poznać sposób wyrachowania w liczbach wstaw, dostaw, i t. d.

15. Naprzód z wiadomey wstawy BE łuku AB, wynaydziemy łatwo iego dostawę. Jest bowiem BG dostawa łuku AB Fig. 1

równa EC. Aże tróykąt prostokatny BCE, daie $\overline{BC}^2=\overline{BE}^2+\overline{EC}^2$, skąd $\overline{EC}^2=\overline{BC}^2-\overline{BE}^2$, czyli $EC=\sqrt{\overline{BC}^2-\overline{BE}^2}$, albo dost AB $=\sqrt{P^2 - wst^2 AB}$; więc *dostawa iakiegokolwiek łuku równa się pierwiastkowi kwadratowemu wyciągnionemu z różnicy między kwadratem z promienia, a kwadratem ze wstawy tegoż łuku.*

16. Ponieważ $AE=CA-CE$, czyli wst. odw. $AB=P-$ dost AB; więc *wstawa odwrotna iakiegokolwiek łuku, równa się różnicy między promieniem a dostawą tegoż łuku.*

Fig. 3 17. Wiemy już że wstawa. 30° iest równa połowie promienia (II); otrzymamy więc wstawę 15°, i następnie wstawy 7° 30′, 3° 45′, i t. d. gdy z wiadomey wstawy BE łuku BDA, i iego wstawy odwrotney AE, wynaydziemy wstawę Be łuku BD, który iest połową danego łuku BDA. Jakoż, ponieważ promień CD iest prostopadły do BA; będzie $Be=\frac{BA}{2}$ (II, 5) Aże $\overline{BA}^2=\overline{BE}^2+\overline{EA}^2$, skąd $BA=\sqrt{\overline{BE}^2+\overline{EA}^2}$, zatem $\frac{BA}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{\overline{BE}^2+\overline{EA}^2}$, czyli

$$\text{wst } \frac{BDA}{2}=\tfrac{1}{2}\sqrt{\text{wst}^2\, BDA + \text{wst odw}^2 BDA};$$

więc, *wstawa łuku dwa razy mnieyszego od łuku danego, iest równa połowie pierwiastku kwadratowego wyciągnionego z summy z kwadratu wstawy, i kwadratu wstawy odwrotney danego łuku.*

18. Potrafimy nadto wyrachować wstawy i dostawy większey liczby iakichkolwiek łuków, ieżeli znaiąc zosobna

wstawę i dostawę dwóch łuków, wynaydziemy wstawę i dostawę summy tychże łuków.

Załóżmy więc sobie z wiadomey wstawy BE i dostawy CE, łuku AB, tudzież wstawy DG i dostawy CG, łuku BD; wynaleść wstawę DP, i dostawę CP łuku AD=AB+BD. Na ten koniec, z punktu G, w którym cięciwa KD spotyka promień CB do niey prostopadły, spuśćmy prostopadłą GJ na promień CA, i poprowadźmy GM równoległą względem AC. To założywszy, będzie DP=MP+DM=GJ+DM. Trzeba więc tylko wynaleść z osobna ważność na GJ, i na DM; które łatwo otrzymamy: bo tróykąty podobne CBE, CGJ, daią BC: CG=BE: GJ, Czyli P: dost BD= wst AB: GJ, zatem $GJ=\frac{\text{wst } AB \times \text{dost } BD}{P}$. Fig. 4

Tróykąty także CBE, DGM, maiąc boki do siebie prostopadłe są podobne, i daią CB: DG=CE: DM, czyli P: wst BD= dost AB: DM, stąd $DM=\frac{\text{wst } BD \times \text{dost } AB}{P}$;

zatem GJ + DM, czyli wst (AB+BD)=

$$\frac{\text{wst } AB \times \text{dost } BD + \text{wst } BD \times \text{dost } AB}{P};$$

co pokazuie: *że z wiadomych wstaw i dostaw dwóch łuków, aby wynaleść wstawę łuku równego summie łuków danych, trzeba wziąć dwa iloczyny: 1szy ze wstawy łuku iednego przez dostawę łuku drugiego; 2gi ze wstawy łuku drugiego przez wstawę łuku pierwszego, i summę tych iloczynów podzielić przez promień.*

Aże CP, dostawa (AB+BD)=CJ—JP= CJ — GM; pozostaie więc ieszcze wynaleść osobno ważność na CJ, i na GM. Jakoż tróykąty podobne CBE, CGJ daią CB : CG=CE: CJ, czyli P: dost BD= dost AB: CJ; stąd $CJ=\frac{\text{dost AB}\times\text{dost BD.}}{P}$

Tróykąty znowu podobne CBE, DGM, daią CB: DG=BE: GM, czyli P: wst BD= wst AB: GM; więc $GM=\frac{\text{wst AB}\times\text{wst BD;}}{P}$

a zatem CJ—GM, czyli dost (AB+BD)=

$$\frac{\text{dost AB}\times\text{dost BD}-\text{wst AB}\times\text{wst BD.}}{P}$$

19. Znaydziemy podobnie, że Wst(AB—BD)

$$=\frac{\text{wst AB}\times\text{dost BD}-\text{wst BD}\times\text{dost AB;}}{P}$$

a dost (AB—BD)=

$$\frac{\text{dost AB}\times\text{dost BD}+\text{wst AB}\times\text{wst BD.}}{P}$$

20. Na mocy prawd dotąd wyłożonych nietrudno będzie wyrachować wstawy i dostawy łuków. Gdyż maiąc wiadomą wstawę łuku 30° (11), wynaydziemy iego dostawę (15); a podług sposobu wskazanego pod liczbą (17), szukaiąc następnie wstawy łuku dwa razy mnieyszego od łuku danego, wynaydziemy wstawy łuków zawartych w szeregu maleiącym $\div \frac{30°}{2} : \frac{30°}{4} : \frac{30°}{8} : \frac{30°}{16} : \frac{30°}{32} : \frac{30°}{64} : \frac{30°}{128} : \frac{30°}{256} :$ it. d. Aże łuki bardzo małe nie różnią się prawie od swoich wstaw; można więc takie łuki uważać za proporcyonalne do ich wstaw; a zatem

wstawę I′ otrzymamy z tey proporcyi

$$\frac{30°}{256} : 0° 1' = \frac{\text{wst } 30°}{256} : \text{wst } 0° 1'.$$

Żeby znowu otrzymać wstawy łuków 2′,3′,4′, dosyć iest następnie pomnożyć wstawę I′ przez 2, 3, 4. A dla wyrachowania wstaw i dostaw łuków większych od 4′, użyiemy prawidła pod liczbą 18, służącego do wynalezienia wstaw i dostaw summy dwóch łuków; i tak np. znaiąc wstawę i dostawę 4′, tudzież wstawę i dostawę I′, wynaydziemy ważność na wstawę i dostawę $5' = 4' + I'$.

21. Maiąc wiadomą wstawę i dostawę kąta, można wynaleść iego styczną i dostyczną. Bo 1ód z podobieństwa tróykątów CBE, CDA, mamy CE: BE=CA: AD, czyli dost ACB: wst ACB=P: sty ACB; stąd Fig. 1

$$\text{sty ACB} = \frac{P \times \text{wst ACB.}}{\text{dost ACB.}}$$

2re z podobieństwa tróykątów CBG, CJF, iest CG: BG=CF: FJ; aże wst BE kąta ACB iest równa CG; więc wst ACB: dost ACB=P: dosty ACB; stąd

$$\text{dosty ACB} = \frac{P \times \text{dost ACB.}}{\text{wst ACB.}}$$

22. Można nakoniec wynaleść sieczną i dosieczną kąta, ktorego wiadoma iest wstawa i dostawa.

Bo 1ód tróykaty podobne CBE, CDA daią CE: CB=CA: CD, czyli dost ACB: P=P: sie BCA; więc

$$\text{sie ACB} = \frac{P^2}{\text{dost ACB}}$$

2re. z tróykątów podobnych CBG, CJF, mamy CG: CB=CF: CJ, czyli wst ACB: P=P: dosie ACB; więc dosie ACB= $\frac{P^2}{\text{wst ACB}}$.

23. Gdy liniie trygonometryczne w częściach promienia zostały wyrachowane; dla skrocenia działań z liczbami wyrażaiącemi te liniie, wzięto liczb tych logarytmy, i ułożono ie w tablice albo razem zliniiami trygonometrycznemi, pisząc naprzód łuki, potem liniie trygonometryczne, następnie logarytmy tych liniy; albo iak bywa nayczęściey, liniie trygonometryczne opuszczaią sie, i kładą się tylko łuki, a obok nich logarytmy liniy trygonometrycznych, tychże łuków. Rzadko które tablice obeymuią logarytmy wszystkich liniy trygonometrycznych, nayczęściey zawieraią logarytmy tylko wstaw i stycznych, a tem samem dostaw i dostycznych. Układ i użycie tych logarytmów, zwyczaynie przy ich tablicach opisany bywa.

ROZDZIAŁ XVI.

TWIERDZENIA OKAZUIĄCE STOSUNKI MIĘDZY LINIAMI TRYGONOMETRYCZNEMI A BOKAMI TROYKĄTA.

Twierdzenie. 1.

Fig. 5 24. *W każdym tróykacie ABC, boki tak sie maia do siebie, iak wstawy katów przeciwległych tym bokom; toiest bedzie BC: AC: AB=wst A: wst B: wst C.*

Jakoż opisawszy kołem tróykąt ABC, będzie kąta A, miarą połowa łuku BC (II, 7. w. I); kąta B, połowa łuku AC; kąta C, połowa łuku AB: więc każdy bok tróykąta ABC iest cięciwą podpieraiącą łuk dwa razy większy od łuku, który iest miarą kąta przeciwległego temu bokowi; a zatem połowa każdego boku tróykąta, iest wstawą kąta przeciwległego temu bokowi (10); toiest, będzie bok $\frac{BC}{2}$ = wst A; bok $\frac{AC}{2}$ = wst B; bok $\frac{AB}{2}$ = wst C. A zatem ma się $\frac{BC}{2}:\frac{AC}{2}:\frac{AB}{2}$ = wst A: wst B: wst C; czyli BC: AC: AB = wst A: wst B: wst C; więc *w każdym tróykącie. i t. d.*

25. *Wniosek* I. *W każdym tróykącie prostokątnym BAC, promień tak się ma do przeciwprostokątney, iak wstawa iednego z kątów ostrych do boku przeciwległego temu kątowi.* Fig. 6

Jest bowiem BA : AC = wst C: wst B. Aże w tróykącie prostokątnym BAC, wstawa kąta prostego C iest równa propromieniowi, a bok BA iest przeciwprostokątną; więc BA : AC = P: wst B, czyli P: BA = wst B: AC; więc *w każdym tróykącie prostokątnym i t. d.*

26. *Wniosek* II. *W tróykącie prostokątnym BAC, promień ma się do styczney iednego z kątów ostrych B, iak bok BC przyległy temu kątowi, do boku AC temuż kątowi przeciwległego.*

Gdyż iest wst A: wst B = BC : AC; iest zaś wst A = dost B; więc dost B: wst B = BC: AC. Aże dost B: wst B = P : sty B (21); więc P : sty B = BC: AC; więc *w tróykącie prostokątnym i t. d.*

Twierdzenie. 2.

Fig. 7, 7. bis. 27. *W każdym tróykącie prostokreślnym ACB, spuściwszy z wierzchołka któregokolwiek kąta C, prostopadłą CD, na podstawę AB, przedłużoną ieżeli potrzeba, tak się mieć będzie podstawa AB, do summy dwóch boków AC, BC, iak różnica tych boków, do różnicy lub summy odcinków AD, BD; toiest będzie AB: AC + BC = AB — BC: AD — BD, albo AD + BD.*

Jakoż z wierzchołka kąta C, długością boku CB, zakreśliwszy okrąg koła przecinaiący boki AC, AB, w punktach G, F, i przedłużywszy bok AC, do przecięcia się z okręgiem koła, w punkcie E; będzie AB: AE = AG : AF (III, 12). Aże iest CG = CE = CB, a FD = BD (II,5); więc AE = AC+BC; AG = AC — BC; AF = AD — BD (fig. 7), albo AF = AD + BD (fig. 7bis); więc proporcya powyższa AB: AE = AG: AF zamieni się na AB : AC + BC = AC — BC: AD — BD, lub AD + BD; więc *w każdym tróykącie i t. d.*

Twierdzenie. 3.

Fig. 8 28. *W każdym tróykącie prostokreślnym CBF, summa dwóch którychkolwiek boków CB, CF, tak się ma do różnicy tychże boków, iak styczna połowy summy kątów F, B, przeciwległych tym bokom, do stycznéy połowy różnicy tychże kątów; toiest, będzie*

$$CB + CF : CB - BF = \text{sty}\ \frac{(CFB + CBF)}{2} : \text{sty}\ \frac{(CFB - CBF)}{2}.$$

Jakoż z wierzchołka kąta C, długością boku mnieyszego CF, zakreśliwszy okrąg koła przecinaiący bok CB, w punkcie D, i poprowadziwszy liniią FD, a względem niey równoległą BA, przecinaiącą w punkcie A liniią JFA, poprowadzoną z punktu J, w którym, przedłużony bok CB przecina okrąg koła: będzie kąt JFD w półkolu prosty (II, 7. w. 3); iest zaś kąt JFD= FAB; więc liniia JFA, iest prostopadła do linii FD, i do linii AB. Aże tróykąty podobne AJB, FJD, daią proporcyą JB: DB=JA: FA; w którey, dla równości liniy CF CI i CD, iest liniia JB, summą dwóch boków CB, CF, a liniia DB, iest różnicą tychże boków CB, CF; więc pozostaie tylko okazać naprzód, że JA iest styczną połowy summy kątów CFB, CBF; powtóre, że FA iest styczną połowy różnicy tychże kątów.

1śd $JA = \text{sty}\ \frac{(CFB + CBF)}{2}$. Jakoż, w tróykącie JBA, wziąwszy BA za promień, będzie JA styczną kąta JBA, a zatem i kąta mu równego JDF (1, 19). Aże kąt wpisany JDF, iest połową kąta JCF maiącego wierzchołek w środku koła; i równego summie kątów CFB, CBF (I, 25. w. 1); więc kąt JDF czyli kąt $JBA = \frac{CFB + CBF}{2}$; a zatem $JA = \text{sty}\ \frac{(CFB + CBF)}{2}$.

2re $FA = \text{sty}\ \frac{(CFB - CBF)}{2}$. Bo w tróykącie FBA, wziąwszy BA za promień, będzie FA styczną kąta FBA. Aże kąt FBA iest równy połowie różnicy dwóch kątów CFB, CBF; gdyż kąt FBA=CBA—CBF= CDF — CBF (I,19); iest zaś kąt CDF, czyli równy mu kąt CFD = CFB — DFB; więc kąt FBA=CFB—CBF—DFB; a dodawszy spólnie kąt FBA=DFB, będzie 2 FBA= CFB — CBF, czyli kąt $FBA = \frac{CFB-CBF}{2}$; zatem $FA = \text{sty}\ \frac{(CFB-CBF)}{2}$. Więc powyższa proporcya JB: DB = JA: FA zamieni się na CB + CF : CB — CF = $\text{sty}\ \frac{(CFB+CBF)}{2} : \text{sty}\ \frac{(CFB-CBF)}{2}$. Więc *w każdym tròykącie prostokreślnym i t. d.*

Fig. 9 29. Maiąc zaś wiadomą summę dwóch iakichkolwiek kątów ACB, BCD, i ich różnicę, łatwo iest wynaleść którykolwiek z tych kątów.

Bo z dwóch ilości nierównych, ilość większa równa iest połowie ich summy, i połowie ich różnicy; a ilość mnieysza iest równa połowie ich summy, mniey połową ich różnicy.

Jakoż, z dwóch kątów nierównych ACB, BCD, niech kąt ACB, będzie większy od kąta BCD: podzieliwszy kąt cały ACD liniią CH, na dwa kąty ACH, HCD, równe; będzie każdy z tych kątów połową summy dwóch kątów danych ACB, BCD; a przy linii AC, i przy punkcie C, wykreśliwszy kąt ACG=BCD; będzie kąt GCB różnicą tychże kątów ACB, BCD. Aże od dwóch kątów równych ACH, HCD, odiąwszy kąty ACG, BCD równe, pozostanie kąt HCG = HCB; przeto każdy z tych kątów iest połową różnicy dwóh kątów ACB, BCD. Jest zaś kąt większy ACB= ACH + HCB, a kąt mnieyszy BCD = HCD — HCB; więc *z dwóch kątów nierównych i t. d.*

Przykłady rozwiązania tróykątów prostokątnych.

30. *W tróykącie prostokątnym ACB, maiąc wiadome dwa kąty A, C, i przeciwprostokątną AC, wynaleść bok BC.* Fig. 10

Bok BC, otrzymamy z następuiącey proporcyi P: AC = wst A: BC (25), czyli P: wst A = AC: BC.

Niech będzie kąt A = 35°40′, bok AC = 576 prętom; znaydziemy że bok BC = 336 prętom.

Jakoż logarytm wstawy kąta A =	9,765720
Logarytm przeciwprostokąt. AC =	2,760422
Summa tych dwóch logarytmów =	12,526142
Od tey summy odiąwszy logarytm promienia . . . . =	10,000000
będzie boku BC logarytm =	2,526142

który w tablicach odpowiada liczbie 336 blisko.

Dla znalezienia zaś drugiego boku AB, użyiemy proporcyi P: wst C = AC: AB.

31. *Maiąc przeciwprostokątną AC, i bok BC, wiadome, znaleść dwa kąty A i C.*

Kąt A otrzymamy z proporcyi AC: BC = P: wst *A*. Maiąc wiadomy kąt A, gdy ten odeymiemy od 90°; znaydziemy kąt C.

32. *Maiąc wiadome kąty A, C, i bok AB, wynaleść przeciwprostokątną AC.*

Wynaydziemy AC z proporcyi wst C: P = AB: AC.

33. *Maiąc bok* BC *i kąty wiadome, wynaleść bok AB.*

Bok szukany AB otrzymamy z proporcyi P: sty C = BC: AB (26).

34. *Maiąc dwa boki AB, BC, wiadome, wynaleść kąty C, A.*

Kąt C, otrzymamy z proporcyi BC: AB= P: sty C; który odciągnąwszy od 90°, wypadnie kąt A.

35. *Maiąc wiadome dwa boki AB, BC, wynaleść przeciwprostokątną AC.*

Potrzeba naprzód wynaleść kąt C z proporcyi BC: AB = P: sty C, a maiąc wiadomy kąt C, otrzymamy AC z proporcyi wst C: P = AB: AC.

Przykłady rozwiązania tróykątów ostrokątnych.

Fig. 11 36. *Maiąc dwa kąty A, C, i bok AB, tróykąta ostrokątnego ACB, wiadome, wynaleść dwa pozostałe boki AC, BC.*

Ponieważ wiadoma iest ważność dwóch kątów A, C, więc odciągnąwszy ich summę od 180°, wypadnie na resztę kąt B.

To założywszy, dla znalezienia boku AC, użyiemy proporcyi wst C: wst B = AB: AC (24).

Daymy że kąt A=49°53′, kąt C=54°41′, a bok AB=273 prętom; będzie bok AC= 323 prętom.

Jakoż summę kątów A i C, odiąwszy od 180°, wypadnie kąt B=75°26′, a logarytm wstawy kąta tego będzie . = 9,985811
Logarytm boku AB . . = 2,436163

Summa tych logarytmów = 12,421974
Odiąwszy od tey summy logarytm wstawy kąta C . . = 9,911674

Wypadnie na resztę logarytm = 2,510300
który w tablicach odpowiada liczbie 323 blisko.

Bok zaś BC otrzymamy z proporcyi wst C: wst A = AB: BC.

37. *W tróykącie ACB, maiąc dwa boki BC, AC, i kąt C, między temi bokami zawarty, wiadome, wynaleść dwa inne kąty A i* B. Fig. 12

Widzimy, że na ten przypadek służy proporcya BC + AC: BC — AC = sty $\frac{A+B}{2}$: sty $\frac{A-B}{2}$ (28).

Daymy, że BC = 584 pręt., AC = 469 pręt.; kąt C = 68°; będzie BC + AC = 1053, BC — AC = 115; kąt C = 68° odiąwszy od 180°, wypadnie summa dwóch kątów A i B, równa 112°; zatem $\frac{A+B}{2}$ = 56°.

Aże logarytm liczby 115	= 2,060698
Logarytm styczney 56°	= 10,171013
Więc summa tych dwóch logar.	= 12,231711
Od tey summy odiąwszy logarytm liczby 1053, który iest	= 3.022428
Reszta	9,209283

będzie logarytmem sty $\left(\frac{A-B}{2}\right)$.

Logarytm ten znaleziony w tablicach odpowiada styczney 9° 12′.

To maiąc, (29) będzie kąt większy A = 56° + 9° 12′ = 65° 12′, a kąt mnieyszy B = 56° — 9° 12′ = 46° 48′.

38. *Maiąc wiadome dwa boki BC, AC, i kąt C między niemi zawarty, wynaleść bok trzeci AB.*

Wynalazłszy kąty A i B sposobem dopiero wskazanym, otrzymamy ważność na AB, z proporcyi wst A: wst C = BC: AB.

39. *Maiąc wiadome trzy boki AB, AC, BC tróykąta ACB, wynaleść iego kąty.* Fig. 13

Z wierzchołka kąta C, spuszczam prostopadłą CD, na bok AB iemu przeciwległy, i układam proporcyą AB : BC+AC= BC—AC: BD—AD (27).

Daymy że bok AB=348 prętom, bok BC=314 prętom, a bok AC=236 prętom; na czwarty wyraz tey proporcyi wynaydziemy, między odcinkami BD, AD zrobionemi przez prostopadłą, różnicę BD—AD=123 prętom blisko. Więc odcinek większy $BD = \frac{348 + 123}{2} = 235\frac{1}{2}$ (29); a odcinek mnieyszy $AD = \frac{348 - 123}{2} = 112\frac{1}{2}$

To maiąc, w każdym z tróykątów prostokątnych CAD, CBD, będzie wiadoma przeciwprostokątna i bok ieden; wynaydziemy więc kąty ACD, BCD (31), a zatem, i ich dopełnienia A, B. Więc otrzymamy następnie i ważność kąta ACB, który iest spełnieniem summy dwóch kątów A i B.

Fig. 14 40. *Maiąc wiadome dwa boki CA, CB, i kąt B przeciwległy iednemu z boków CA, wynaleść dwa inne kąty tróykąta ACB.*

Dla znalezienia kąta A ułożymy proporcyą CA: CB=wst B: wst A (24). Wynalazłszy kąt A, i ten z kątem B odłąwszy od 180°, wypadnie na resztę kąt C.

Uważać tu potrzeba, że ieżeli bok CA przeciwległy kątowi B, iest mnieyszy od boku CB przyległego temuż kątowi, w rozwiązaniu takiego tróykąta zachodzi wątpliwość. Bo z punktu C długością CA zakreśliwszy łuk przecinaiący w punkcie D przedłużony bok AB; utworzą się dwa różney wielkości tróykąty CDB, CAB, które maią te same trzy rzeczy wiadome: toiest bok CB i kąt B spólne, i bok DC tróykąta DCB, rówwny bokowi CA tróykąta CAB. Ponieważ bok DC=CA, więc kąt D=CAD; aże kąt CAD z kątem CAB czynią 180°, więc i kąt D z kątem CAB, uczynią także 180°; zatem wstawy dwóch kątów CAB i D, są też same (12). Więc z proporcyi powyższey CA: CB= wst B: wst A, wypaść może na czwarty wyraz kąt CAB, albo kąt D; zachodzi zatem wątpliwość który z tych dwóch kątów brać należy; bo biorąc kąt CAB, wypadnie rozwiązać tróykąt CAB, a biorąc kąt D trzeba rozwiązać tróykąt CDB. Aby uniknąć tey wątpliwości, znać koniecznie należy gatunek kąta A, zawartego między bokiem danym a bokiem szukanym; toiest, ieżeli ten kąt iest rozwarty, albo ostry, brać potrzeba w pierwszym razie tróykąt CAB, w drugim tróykąt CDB.

41. *Maiac wiadome dwa boki CA, CB, i kąt B przeciwległy bokowi AC, znaleść bok AB.*

Potrzeba naprzód wynaleść kąty sposobem dopiero wskazanym, a potem ułożyć proporcyą wst B: wst C=CA: AB.

42. Poznawszy sposoby rozwiązywania iakichkolwiek tróykątów, obaczmy teraz, iak na mocy zasad dotąd wyłożonych, dochodzi się ich powierzchni.

43. *Maiąc bok AB i dwa kąty A i B, wiadome, a tem samem i kąt C, wynaleść powierzchnią tróykota ACB.* Fig. 13.

Z wierzchołka kąta C, spuściwszy na podstawę AB prostopadłą CD, ta będzie wysokością tróykąta ACB; którą aby wynaleść, szukam naprzód z tróykąta ACB boku AC, przez proporcyą wst C : wst B = AB : AC;

poczem, w tróykącie prostokątnym ACD, maiąc wiadomy bok AC, i wszystkie kąty, wynaydę wysokość CD, z proporcyi

P : wst A = AC : CD;

a pomnożywszy podstawę AB przez połowę znalezioney wysokości CD, wypadnie powierzchnia tróykąta ACB.

Można w tym przypadku doyść powierzchni tróykąta ACB, nie szukaiąc ważności na bok AC, i na prostopadłą CD. Bo pomnożywszy przez siebie dwie powyższe proporcye, będzie

$P \times \text{wst } C : \text{wst } A \times \text{wst } B = AC \times AB : CD \times AC$;

w tey znowu proporcyi, oba wyrazy drugiego stosunku podzieliwszy przez AC, a potem pomnożywszy przez $\frac{AB}{2}$, wypadnie

$P \times \text{wst } C : \text{wst } A \times \text{wst } B = \frac{\overline{AB}^2}{2} : \frac{AB \times CD}{2}$;

zatem $\frac{AB \times CD}{2}$, czyli powier. tróy. ABC =

$\frac{\overline{AB}^2 \times \text{wst } A \times \text{wst } B}{2P \times \text{wst } C}$,

toiest, *dla znalezienia powierzchni tróykąta, trzeba kwadrat z iego podstawy pomnożyć przez iloczyn ze wstaw kątów przyległych podstawie, i cały stąd iloczyn podzielić przez podwoiony iloczyn z promienia przez wstawę kąta przeciwległego podstawie.*

44. *Maiąc wiadome dwa boki AB, AC, i kąt C przeciwległy bokowi AB, znaleść powierzchnią tróykąta ACB.*

Aby z tróykąta prostokątnego ACD wynaleść prostopadłą CD, potrzeba prócz wiadomego w nim boku AC i kąta prostego D, mieć znany ieden z kątów ostrych. Na ten koniec z tróykąta ACB wynayduię kąt B, przez proporcyą AB:AC=wst C:wstB; poczem, znaleziony kąt B odiąwszy wraz z kątem C od 180°, wypadnie kąt A. W tróykącie więc ACD, za pomocą proporcyi P: wst A=AC: CD, otrzymam wysokość CD, którą pomnożywszy przez połowę podstawy AB, wynaydę szukaną powierzchnią tróykąta.

45. *Maiąc dwa boki AB, AC, i kąt A między niemi zawarty, wiadome, wynaleść powierzchnią tróykąta ACB.*

W tróykącie prostokątnym ACD znaiąc bok AC, i wszystkie iego kąty, wynaydę wysokość CD, z proporcyi

$$P : \text{wst}\, A = AC : CD;$$

wziąwszy połowę znalezioney wysokości CD, i pomnożywszy przez podstawę AB, otrzymam powierzchnią tróykąta ACB.

Można w tym przypadku doyść powierzchni tróykąta, nieszukaiąc wysokości CD. Bo w proporcyi poprzedzaiącey, oba wyrazy drugiego stosunku pomnożywszy przez $\frac{AB}{2}$, będzie

$$P : \text{wst}\, A = \frac{AB \times AC}{2} : \frac{AB \times CD}{2}, \text{ stąd}$$

$\frac{AB \times CD}{2}$, czyli powierz. tróykąta ACB $=$ $\frac{\text{wst}\, A \times AB \times AC}{2 \times P}$; co pokazuie, *że dla znalezienia powierzchni tróykąta, potrzeba iloczyn z dwóch iego boków rozmnożyć przez wstawę kąta zawartego między temi bokami, a otrzymany stąd iloczyn podzielić przez podwoiony promień.*

46. Maiąc trzy boki wiadome tróykąta ACB, znaleść iego powierzchnią.

Szuka się naprzód odcinków AD, DB, zrobionych przez prostopadłą CD (27); potem w którymkolwiek z tróykątów prostokątnych ACD, CDB, wynayduie się wysokość CD, a tey połowa pomnożona przez podstawę AB, da powierzchnią tróykąta ACB. (*)

ROZDZIAŁ. XVII.

PRZYSTOSOWANIE TRYGONOMETRYI DO PRAKTYKI.

Zagadnienie 1.

Fig. 15 47. *Wymierzyć wysokość DM wieży u spodu dostępney.*

Przypuściwszy że grunt iest poziomy, mierzę na nim od punktu M, odpowiednego wierzchołkowi wieży, odległość jakąkolwiek MP; poczem ustawiwszy ką-

---

(*) Można w tym przypadku otrzymać powierzchnią tróykąta nie szukaiąc iego wysokosci; na ten koniec bierze się połowa summy trzech danych boków, i od tey odeymuie się następnie każdy bok tróykąta, a z trzech reszt pozostałych robi się iloczyn, i ten mnoży się przez połowę summy boków; z tego ostatniego iloczynu wyciągnięty pierwiastek kwadratowy, będzie szukaną powierzchnią tróykąta. I tak, tróykąta ABC summę trzech boków oznaczywszy przez S; będzie powie. tróyk.

$$ABC = \sqrt{\tfrac{1}{2}S\left(\tfrac{1}{2}S-AB\right)\left(\tfrac{1}{2}S-AC\right)\left(\tfrac{1}{2}S-BC\right)}.$$

Obacz. Traité élém. de Trigonometrie par Lacroix. 5 edit. Paris 1810. art. 64.

tomiar na linii MP tak, aby iego środek O odpowiadał punktowi P na gruncie, i aby prawidło nieruchome GE było równoległe do poziomu, a płaszczyzna narzędzia miała położenie pionowe; celuię prawidłem ruchomem ku D wierzchołkowi wieży, i biorę kąt GOF równy kątowi DOA wierzchołkiem przeciwległemu.

To wykonawszy, ponieważ w tróykącie prostokątnym DOA, prócz kąta prostego A, będzie wiadomy kąt DOA, i bok AO równy linii MP wymierzoney na gruncie; wynaydę więc bok DA, z proporcyi P: sty DOA=AO: DA (26). Do znalezionego boku DA, dodawszy AM odległość środka kątomiaru od powierzchni gruntu, otrzymam DM całą wysokość wieży.

Zagadnienie 2.

48. *Wymierzyć wysokość DM wieży* Fig. 10 *u spodu niedostępney.*

Obrawszy na gruncie dwa punkta P, N, znayduiące się na przedłużeniu linii poziomey MP, i w punkcie P ustawiwszy kątomiar podobnie iak w poprzedzaiącym przypadku, biorę kąt DOA; poczem przeniosłszy kątomiar na punkt N, biorę kąt DJO; mierzę nakoniec liniią PN=OJ.

Ponieważ w tróykącie OJD będzie wiadomy bok OJ, kąt DJO, i kąt DOJ, który iest spełnieniem kąta DOA wymierzonego na pierwszem stanowisku, a zatem będzie znany i kąt ODJ; wynaydę więc bok DO z proporcyi

wst ODJ: OJ = wst DJO : DO (24).

Znaiąc bok DO w tróykącie prostokątnym DAO, wynaydę bok DA z proporcyi P: DO= wst DOA : DA. Do linii DA dodawszy

OP, odległość środka kątomiaru od powierzchni gruntu, otrzymam całą wysokość DM.

Zagadnienie 3.

Fig. 17 49. *Znaleść odległość punktu B od przedmiotu niedostępnego O.*

Mierzę na gruncie liniią prostą BC, i na iednym iey końcu B, ustawiwszy kątomiar, a na drugim C, tykę; biorę kąt CBO. Potem przeniosłszy tykę na punkt B, a kątomiar na punkt C, mierzę kąt OCB. Ponieważ w tróykącie BOC, będzie wiadomy bok BC, dwa kąty B, C, a tem samem i kąt O, który iest ich spełnieniem, otrzymam więc szukany bok BO, z proporcyi wst BOC: BC=wst OCB : BO.

Zagadnienie 4.

Fig. 18 50. *Znaleść odległość miedzy dwoma przedmiotami D, C, widzialnemi, lecz niedostepnemi.*

Wymierzywszy na gruncie liniią prostą AB, z którey końców przedmioty D i C są widzialne, na iednym iey końcu A ustawiam kątomiar, a na drugim B, tykę; i mierzę kąty CAB, DAB. Poczem wykréśliwszy na papierze figurę, zbliżaiącą się w podobieństwie do figury gruntu, zapisuię na niey wymierzone kąty, i długość linii AB. Następnie przenoszę kątomiar na punkt B, a tykę na punkt A, mierzę kąty DBA, CBA, i ich ważności zapisuię.

W tróykącie ABC, maiąc bok AB, i dwa kąty CBA, CAB, wiadome, a zatem, i kąt BCA, wynaydę bok AC z proporcyi

wst ACB : AB=wst ABC : AC.

W tróykącie znowu DAB, maiąc bok AB, i kąty ABD, BAD wiadome, a zatem i kąt ADB, wynaydę bok AD, z proporcyi wst ADB: AB=wst ABD: AD.

Odiąwszy kąt BAC od BAD, pozostanie kąt DAC; więc w tróykącie ACD znaiąc dwa boki AC, AD i kąt między niemi zawarty DAC, wynaydę dwa inne kąty (28); odległość zaś szukaną DC, otrzymam z proprcyi

wst ADC: wst CAD=AC: DC.

Zagadnienie. 5.

Zdiąć plan okolicy iąkieykolwiek.

51. Niech T, M, C, D, O, P, oznaczaią Fig. 19 głównieysze okolicy przedmioty, np. wieże, wiatraki, dzwonice i t. d. których położenie względem siebie, mamy wyrazić na papierze.

Wewnątrz okolicy obrawszy plac równy, z któregoby iak naywięcéy w około można było widzieć przedmiotów, mierzę na nim łańcuchem iak naydokładniey podstawę AB; poczem poprowadziwszy na papierze liniią prostą, zapisuię na niey liczbę miar znalezionych w podstawie AB, i w około teyże linii oznaczam przedmioty T, M, C, D, O, P, w takiem położeniu, w iakiem pokazuią się dla oka (*); daley ustawiwszy kątomiar na iednym końcu B podstawy, tak aby iego środek znaydował się na linii pionowey przez tenże punkt B, przechodzącey, i zgodziwszy prawidło nieruchome z liniią BA, celuię następnie prawidłem ruchomem do przedmiotów T, C, D, O, P widzialnych

(*) Aby nabyć dokładnego wyobrażenia o położeniu przedmiotów, zwiedzić potrzeba mieysca na których one znayduią się.

z punktu B (*), i na właściwem mieyscu w brulionie zapisuię ważności kątów TBA, CBA, DBA, OBA, PBA, zawartych między promieniami ocznemi BT, BC, BD, BO, BP, a podstawą BA.

To wykonawszy, przenoszę kątomiar na punkt A, i zgodziwszy iego środek z tymże punktem na ziemi, a prawidło nieruchome z liniią BA, biorę między przedmiotami T, C, D, O, P, a liniią BA, kąty TAB, CAB, DAB, OAB, PAB, i ich ważności podobnie zapisuię w brulionie.

Co się tyczy przedmiotu M, którego z punktu B niemożna widzieć; obieram dwa punkta T, C, iuż uważane, z których iest widzialny wiatrak M; i ustawiwszy kątomiar naprzód w punkcie T, mierzę kąt MTC, potem w punkcie C, i biorę kąt MCT; i ważności tych kątów także zapisuię.

To maiąc, ponieważ w każdym z tróykątów BTA, BCA, BDA, BOA, BPA, bok BA i dwa kąty przy nim leżące będą wiadome, wynaydę zatem (36) ważności każdych dwóch innych boków, na których przecięciu znayduią się przedmioty T, C, D, O, P.

Dla rozwiązania zaś tróykąta TMC, potrzeba naprzód wynaleść bok TC, za pomocą tróykąta BTC, w którym dwa boki BT, BC, i kąt TBC między niemi

*) Jeżeli wypada uważać przedmioty znacznie oddalone, używa się wtedy kątomiaru z lunetami; i za każdem działaniem sprawdza się położenie prawideł naprowadzaiąc iedno i drugie na ten sam przedmiot; i gdy prawidło ruchome pokazuie na kątomiarze zero, znakiem iest że się zupełnie zgadza ze stałem.

zawarty będą wiadome (37); gdyż z rozwiązania tróykąta BTA, otrzymam bok BT, z tróykąta BCA, bok BC, a kąt TBC będzie różnicą dwóch kątów wiadomych TBA, CBA.

Po rozwiązaniu tych tróykątów robię podziałkę; i poprowadziwszy na papierze liniią ba, odcinam na niey tyle części wziętych z podziałki, ile iest miar w podstawie BA; poczem, dla oznaczenia na papierze punktu odpowiednego któremukolwiek z przedmiotów widzialnych z końców podstawy AB, np. punktu wyrażaiącego przedmiot T; biorę z podziałki tyle części równych, ile z rachunku wypadło miar na bok BT; i z punktu b iako środka, promieniem równym tym częściom zakreślam łuk; biorę znowu z podziałki tyle części, ile z rachunku wypadło miar na bok AT, i z punktu a, kreślę łuk drugi; a punkt t, przecięcia się tych dwóch łuków, oznaczy położenie przedmiotu T. Tym samym sposobem biorąc zawsze punkta b, a, za środki kół, wynaydę położenie punktów c, d, o, p. odpowiednē przedmiotom C, D, O, P. Dla oznaczenia zaś punktu m, wyrażaiącego przedmiot M, wezmę za środki kół punkta t, c, iuż oznaczone.

Żeby zrobić mappę z dokładnością, można ieszcze po rozwiązaniu tróykątów BTA, BCA, BDA, BOA, BPA, i tróykąta TMC, wyrachować prostopadłą oznaczaiącą odległość każdego przedmiotu od podstawy BA, tudzież odległości końców tey podstawy od prostopadłéy; iak to zobaczymy na przykładzie, Wystawmy sobie prostopadłą TJ poprowadzoną z punktu T do podstawy BA. Ponieważ w tróykącie prostokątnym BTJ, będzie wiadoma przeciwprostokątna BT z rozwiązania tróykąta BTA, i kąt TBA wiadomy z wymierzenia, więc otrzymam TJ, z proporcyi

P: TB=wst TBJ: TJ. (25); a BJ, z proporcyi P: BT=wst BTJ: BJ.

Przez podobny rachunek oznaczywszy odległość każdego z przedmiotów C, D, O, P, uważanych względem podstawy BA, a przedmiotu M, względem podstawy TC; prowadzę na papierze liniią prostą ba, zamykaiącą tyle części wziętych z podziałki mappy, ile iest miar w podstawie BA; potem odcinam na ba, od b do i, tyle części wziętych z podziałki, ile z rachunku wypadło miar na liniią BJ; przez co oznaczę liniią bi; z punktu i, prowadzę it prostopadłą do ba, zawieraiącą tyle części podziałki, ile z rachunku wypadło miar na TJ; a koniec prostopadłey ti, wskaże na mappie dokładne położenie punktu t, wyrażaiącego przedmiot T.

Tym samym sposobem wynalazłszy odległości punktów c, d, o. p, od podstawy ab, a punktu m, od linii tc, oznaczę położenie przedmiotów C, D, O, P, M.

Nie zawsze używać potrzeba sposobów poprzedzaiących dla przeniesienia na papier rzeczonych przedmiotów. Jeżeli robota nie wymaga dokładności wielkiey, wtedy można bez pomocy rachunku, wynaleść położenie punktów T, C, D... sposobem bardzo prędkim i dosyć dokładnym.

Bo poprowadziwszy na papierze liniią ba, zawieraiącą tyle części wziętych z podziałki, ile iest miar w podstawie BA; i przy punkcie b, za pomocą przenośnika, wykreśliwszy kąty tba, cba, dba, oba, pba, odpowiednie równe kątom TBA,CBA,DBA, OBA, PBA, wymierzonym na punkcie B; a przypunkcie a, kąty tab, cab, dab, oab, pab, równe kątom TAB, CAB, DAB, OAB, PAB wymierzonym na punkcie A; następnie przy punktach t, c, wykreśliwszy kąty mtc, mct, równe kątom MTC,MCT,wymierzonym przy końcach linii TC: ponieważ z tego wykreślenia utworzą się tróykąty bta, bca, bda, boa, bpa, tmc, odpowiednie podobne tróykątom BTA, BCA, BDA, BOA, BPA, TMC, więc punkta t,m, c, d, o, p, oznaczą na papierze położenie podobne temu, iakie maią przemioty T, M, C, D, O, P, dane na gruncie.

Figura wykreślona na papierze, którymkolwiek z tych trzech sposobów, iest podobna figurze gruntu, gdyż obie składaią się z równéy liczby tróykątów podobnych i podobnie położonych.

Chcąc poznać odległość między dwoma przedmiotami danemi na gruncie, *np.* odległość wiatraku M od dzwonicy C; biorę cyrklem na mappie odległość dwóch punktów m, c, oznaczaiących te przedmioty, i postanowiwszy nóżkę cyrkla na iednym z punktów podziałow większych podziałki mappy, uważam na który punkt podziałki pada nóżka druga cyrkla, a części podziałki zawarte w otwartości cyrkla, wskażą w miarach wiadomych odległość wiatraku od dzwonicy.

Ponieważ wiele zależy na dokładném oznaczeniu odległości między głównemi przedmiotami okolicy; starać się więc potrzeba sprawdzić pomiar podstawy iuż oznaczony, mierząc ią przynaymniey dwa razy; i uważać, czy wypadek roboty drugiey zgadza się zupełnie, z pierwszym.

O przerabianiu Mapp.

52. Chcąc zrobić mappę równą daney, tak się postępuie: na gładkim stole, albo na tablicy rozciąga się papier biały, a na nim mappa, i ta wraz z papierem, za pomocą szpilek, przytwierdza się końcami do tablicy. Poczem cienką igiełką przekalaią się na mappie końce wszystkich liniy, zakręty dróg, rzek, i punkta wszelkich przedmiotów umieszczonych na niey. Nakoniec, zrobione na papierze dziureczki, połączywszy liniiami, częścią prostemi, częcią krzywemi w miarę potrzeby; i oznaczywszy na nim przedmioty każdy właściwym kolorem, utworzy się mappa równa daney.

Naydogodniey iednak iest użyć do tego tafli szklanney, oprawney w ramki, i tey samey wielkości co mappa. Na ten koniec rozciągnąwszy na tafli mappę, a na niey biały i cięki papier, przytwierdza się razem iedno i drugie do ramek; poczem postawiwszy taflę na przeciw światła, rysuią się na papierze ołówkiem wszystkie szczegóły mappy, i nakoniec oznaczaią się właściwemi kolorami.

53. Gdyby zaś szło o przerobienie mappy daney na inną iey podobną, większą od niey albo mnieyszą, toiest którceyby powierzchnia miała się do powierzchni mappy daney, w stosunku danym N: M; wtedy, ieżeli mappa dana ma swoię po-

działkę, wynayduię długość podziałki mappy szukaney, a na długości znalezioney zrobiwszy podziałkę, i podług tey wykreśliwszy figurę podobną mappie daney, otrzymam mappę szukaną.

Na ten koniec poprowadziwszy liniią nieograniczoną CE, i na tey wziąwszy DC=M, DE=N, będzie CD: DE=M: N. Na linii CE zakreślam półkole, z punktu D, prowadzę prostopadłą AD do CE, prowadzę nadto cięciwy AC, AE, i te przedłużywszy nieograniczenie, na iedney z nich AC, od punktu A do B, odcina AB długość podziałki daney, przez punkt B, prowadzę równoległą Bb, względem CE, a ta równoległa odetnie na AE liniią Ab, która będzie długością podziałki szukaney; podług tey podziałki zrobiona mappa pobobna daney, będzie do niey w stosunku żądanym N: M. Fig. 20

Jakoż, w tróykącie prostokątnym ABb, ponieważ kwadraty z ramion AB, Ab są proporcyonalne odcinkom BX, Xb, toiest ma się $\overline{AB}^2 : \overline{Ab}^2 = BX : Xb$ (III, 9. w. 3), iest zaś $BX : Xb = CD : DE = M : N$, więc $\overline{AB}^2 : \overline{Ab}^2 = M : N$; czyli figura wykreślona na AB do figury podobney wykreśloney na Ab iak M: N (III, 16); iest zaś figura wykreślona podług długości AB, mappą daną, przeto figura podobna, wykreślona podług długości Ab, będzie mappą szukaną. A ponieważ proporcya $\overline{AB}^2 : \overline{Ab}^2 = M : N$, daie $Ab = \sqrt{\frac{\overline{AB}^2 \times N}{M}} = \sqrt{\frac{AB \times N \times AB}{M}}$,

więc długość Ab podziałki szukaney, otrzymam; *wynayduiąc średnią proporcyo-*

nalną między długością AB podziałki daney, a tąż samą długością pomnożoną przez stosunek N powierzchni mappy szukaney, $\frac{N}{M}$ do powierzchni mappy daney.

I tak *np.* ieżeli mappa dana ma się przerobić na 2, 3, 4 i t. d. razy mnieyszą, albo na 2, 3, 4 i t. d. razy większą: w pierwszym razie, podziałki szukaney długość Ab, wyrazi się przez $\sqrt{AB \times \frac{AB}{2}}$, $\sqrt{AB \times \frac{AB}{3}}$, $\sqrt{AB \times \frac{AB}{4}}$ i t. d.; w drugim, przez $\sqrt{AB \times 2AB}$, $\sqrt{AB \times 3AB}$, $\sqrt{AB \times 4\,AB}$ i t. d.

Niech fig. 21, wyraża mappę, którą mam przerobić na dwa razy mnieyszą. Prowadzę ołówkiem na mappie daney dwie linie AB, AC do siebie prostopadłe, i na pierwszą z nich AB, przeniosłszy z podziałki tey mappy pewną liczbę części równych, naprzykład 4, na drugą AC takich samych części, *np.* 3, i przez punkta podziałow poprowadziwszy równoległe do AB, AC, podzielę daną mappę na kwadraty, iak pokazuie figura.

Na mocy formuły $\sqrt{AB \times \frac{AB}{2}}$, wynayduię długość podziałki mappy szukaney, biorąc średnią proporcyonalną między długością podziałki daney, i długości tey połową (III, 25); a znalezioną długość podzieliwszy na tyle części równych, ile ich ma podziałka dana, otrzymam podziałkę mappy szukaney.

Fig. 22 Prowadzę na papierze dwie linie ab, ac do siebie prostopadłe, i na pierwszey z nich ab, podług znalezioney podziałki odcinam części równych 4, na drugiey ac, takich części 3, a przez punkta podziałów poprowadziwszy równoległe względem ab, ac, otrzymam prostokąt bc, zamykaiący tyle równych kwadratów, ile ich iest w prostokącie BC.

To maiąc, łatwo teraz za pomocą cyrkla i podziałek przenieść na prostokąt bc, wszystkie części mappy zamknięte w prostokącie BC. I tak *np.* chcąc przenieść położenie rzeki DEFG, mierzę liniią HG podług podziałki mappy daney, a ile części ta liniia zamykać będzie, tyle ich wziąwszy z podziałki znalezioney, i te, na boku odpowiednego kwadratu odciąwszy od h, do g, oznaczę punkt g rzeki odpowiedny punktowi G. Podobnie ile części zamyka liniia KF na podziałce daney, tyle ich wziąwszy podług podziałki znalezioney, od k do f, i połączywszy linią wężykowatą punkta g, f, oznaczę na prostokącie bc, część gf rzeki, odpowiedną części FG. Tym samym sposobem wyraziwszy na prostokącie bc, położenie całey rzeki DEFG, i wszystkich przedmiotów znayduiących się na mappie BC, zrobię mappę bc, dwa razy mnieyszą od pierwszey. Fig.21 22

54. Gdyby mappa dana, przerobić się maiąca na mnieyszą lub większą od niey, nie miała podziałki; wtedy podług miary dowolnie wziętey; podzieliwszy daną mappę na kwadraty składaiące prostokąt BC, zamiast szukania podziałki dla mappy nowey, wynayduię taką liniią prostą (53), naktóreyby wystawiony kwadrat, tak się Fig.21 22

miał do iednego z kwadratów składaiących prostokąt BC, iak się ma powierzchnia mappy szukaney, do powierzchni mappy daney. Poczem wykreśliwszy prostokąt bc zamykaiący w długości i szerokości swoiey tyle razy wziętą liniią znalezioną, ile iest części równych w długości i szerokości prostokąta BC, i przez punkta podziałów poprowadziwszy równoległe względem ab, ac, podzielę prostokąt bc na tyle równych kwadratów, ile ich iest w prostokącie BC. Aże, iaki mieć będzie stosunek ieden z kwadratów prostokąta BC, do któregokolwiek z kwadratów prostokąta bc, w takim będzie i powierzchnia mappy zamkniętey w prostokącie pierwszym, do powierzchni mappy szukaney zawartey w prostokącie drugim; więc na kwadratach prostokąta bc, umieściwszy proporcyonalnie wszystkie przedmioty znayduiące się w kwadratach odpowiednych prostokąta BC, otrzymam mappę która do daney będzie w stosunku danym.

Fig. 23 55. Chcąc długość daną podziałki przerobić na inną, która do daney byłaby w stosunku N: M; prowadzi się na papierze liniia prosta AB=M; i z punktu B iako śródka długością BC=N zakreśla się łuk DCE, a z punktu A długością AB, łuk drugi FCB, przecinaiący się z pierwszym w punkcie C; prowadzi się od C do A liniia AC; nakoniec z punktu A, promieniem AG równym długości daney podziałki zakreśliwszy łuk GKH, będzie liniia prosta HG długością podziałki szukaną. Jest bowiem AG: GH=: AB: BC=M: N. (III, 6).

ROZDZIAŁ XVIII.

POCZĄTKI ROWNOWAŻENIA

(libellatio, nivellement)

56. Na gruntach danych do mierzenia często znayduie się woda, którą wypada niekiedy sprowadzać z mieysca iednego na drugie, bądź dla osuszenia gróntów, bądź dla inney potrzeby. Aby ta robota, wymagaiąca częstokroć wielkich nakładów i pracy, nie była bezskuteczną, należy przed iey zaczęciem przekonać się przez zrównoważenie gruntu, czy sprowadzenie wody może być wykonane.

Przedmiotem *sztuki równoważenia* iest dochodzenie różnicy między odległościami od środka ziemi, dwóch albo więcey punktów, czyli dochodzenia nierówności na powierzchni ziemi znayduiących się. Mówi się że dwa albo więcey punktów są do *równowagi,* gdy są równo oddalone od środka ziemi; czyli gdy należą do powierzchni kulistey równoległey względem powierzchni wód stoiących; płyny bowiem będące w spoczynku maią tę własność, że ich powierzchnie biorą kształt kulisty; lubo z przyczyny wielkości promienia ziemskiego, można powierzchnią wody zamkniętey w małey przestrzeni uważać za płaską.

Przychodzimy do oznaczenia różnicy równowagi punktów, odnosząc ich położenie do linii poziomey daney, bądź przez linią prostopadłą do linii pionowey, bądź przez liniią równoległą względem osi naczynia walcowatego napełnionego płynem i zamykaiącego bułkę powietrzną, bądź przez promień oczny przechodzący przez powierzchnią płynu zamkniętego w naczyniu. Stąd narzędzia ku temu zamiarowi służące, maią nazwisko *równowagi pionowey, powietrzney i wodney* (*)

Fig. 26 Wystawmy sobie w punkcie C środek ziemi; wszelki łuk BA zakreślony na iey

---

Fig. 24 (*) *Równowaga woda* iest to rurka mosiężna albo blaszana 4 stopy długości, a ieden cal średnicy zwyczaynie maiąca, w którey końcach AC, BD zakrzywionych pod kątem prostym osadzone są rurki szklanne. Na połowie rurki przyprawiona iest u spodu ryfka, za pomocą którey rurka CABD osadza się na tróynogu. Chcąc użyć tego narzędzia, wypełnia się cały kanał rurki wodą zafarbowaną, tak, aby ta w rurkach szklannych wznosiła się do wysokości 2 lub 3 cali.

Fig. 25 Do działań równoważenia potrzebny iest *pręt dwósążniowy* MN z tarczą; ten składa się z łaty drewnianey podzieloney na części równe, i maiącey w kierunku podłużnym wyrobioną fugę, w którą zapuszczony iest pręt drewniany maiący połowę tey długości co łata, opatrzony na iednym koncu gałką, za pomocą którey może się posuwać do góry lub na dół, a na drugim tarczą mosiężną ab, maiącą wielkość stopy kwadratowey, i podzieloną liniią poziomą na dwa prostokąty równe, z których prostokąt górny iest biało, a dolny czarno malowany. Przy łacie znayduie się śruba, za pomocą którey pręt w stosowney wysokości, do łaty przytwierdzać się może.

powierzchni, nazywa się *liniia równowagi prawdziwey*, a styczna BT *liniia równowagi pozorney*. Część AT sieczney TD, zowie się *wysokością równowagi pozorney BT nad prawdziwą BA, czyli różnicą między równowagą pozorną a prawdziwą*.

Rzecz widoczna, że równowąga pozorna BT i prawdziwa BA tem bardziey oddalaią się od siebie, im są daley przedłużone za punkt dotknięcia B. Lecz że okrąg ziemi iest tak wielki, że wzięta na nim liniia na 100 sążni długa nie różni się prawie od linii prostey; więc w tym przypadku, równowagę pozorną BT można wziąć za prawdziwą BA; w większych zaś odległościach dochodzących 300 lub 400 sążni, należy wynaleść wysokość AT równowagi pozorney nad prawdziwą, która tak się otrzymuie. Ponieważ od punktu T wziętego za kołem, poprowadzona iest sieczna DT, i styczna BT, będzie więc $DT : BT = BT : AT$ (III, 12), stąd $AT = \frac{\overline{BT}^2}{DT}$.

A że różnica AT między sieczną DT, a średnicą DA, iest ilością tak małą w porównaniu do średnicy ziemi; iż uważać ią można za żadną, a tem samem przypuścić, że $DA = DT$; więc będzie $AT = \frac{\overline{BT}^2}{DA}$; toiest wysokość równowagi pozorney nad prawdziwą iest równa kwadratowi z odległości dwóch punktów B T, danych do równoważenia, podzieloney przez średnicę ziemi. Znaydziemy podobnie że na inną odległość BT′, wysokość A′T′ będzie $= \frac{\overline{BT'}^2}{DA}$; więc $AT : A'T' = \frac{\overline{BT}^2}{DA} : \frac{\overline{BT'}^2}{DA}$, czyli $AT : A'T' = \overline{BT}^2 : \overline{BT'}^2$; *toiest wysokości równowagi pozorney nad prawdziwą są pro-*

porcyonalne kwadratom z odległości między punktami danemi do równoważenia.

Jeżeli BT = 300 sąż, a średnicę ziemi weźmiemy wyrachowaną na 6538594 sąż. (*) będzie AT = $\frac{90000}{6538594}$ sąż. = 1 cal. blisko.

Maią więc wyrachowaną wysokość równowagi pozorney nad prawdziwą na odległość daną, można za pomocą powyższey proporcyi, wynaleść wysokość odpowiedną inney odległości np. 1000 sąż.; będzie bowiem 90000: 1000000 = 1 cal: X, stąd X = $\frac{1000000}{90000}$ cal. = 11 cal. blisko.

Tym sposobem możnaby wyrachować i ułożyć w tablice wysokości równowagi pozorney nad prawdziwą na różne odległości punktów danych.

Fig. 27 Chcąc zrównoważyć dwa punkta E, A, dane na gruncie, widzialne ieden z drugiego, i tylko na 100 sążni od siebie odległe, ustawić należy do poziomu równowagę wodną w pónkcie E, i tę skierować na punkt A, gdzie stoiący pomocnik zatknąwszy pręt pionowo, póty osadzoną na nim tarczę podnosić lub zniżać powinien, póki obserwuiący w punkcie E, nie ostrzeże go znakiem umówionym, iż promień oczny CDO, przechodzący przez powiezchnią płynu w rurkach szklannych, pada na połowę tarczy. W tem położeniu utwierdziwszy tarczę, mierzy się wysokość OA, i wysokość Ex promienia ocznego. Jeżeli te dwie wysokości są ró-

(*) Jest tu mowa o sążniach francuz. (toises); ktorych 766 czyni 864 sążni polskich nowych, zatem 1 sążeń polski = $\frac{766}{864}$ = $\frac{383}{432}$ sążni francuzk. ich. Obacz dzieło J. Colberga, o porównaniu miar i wag. stro. 18 i 28.

wne, punkta E, A, będą do równowagi. Jeżeli zaś wysokość OA, iest mnieysza albo większa od wysokości Ex, będzie w pierwszym razie punkt A wyżey, w drugim niżey, punktu E.

Jakoż, ponieważ doświadczenie dowiodło, że wszystkie punkta powierzchni wody stoiącey układaią się do zupełney równowagi, więc punkta C, D, powierzchni wody zamkniętey w rurkach należą do linii równowagi prawdziwey, a zatem promień oczny CDO przechodzący przez punkta C, D do punktu O, iest liniią równowagi pozorney. Aże wiemy, że w odległości 100 sążni liniią równowagi pozorney można wziąć za liniią równowagi prawdziwey, więc wszystkie punkta linii CDO równowagi pozorney są równo oddalone od środka ziemi. Zatem, ieżeli dwa punkta E, A, są rowno oddalone od promienia ocznego CDO, będą też równo oddalone i od środka ziemi, będą więc do równowagi; ieżeli zaś punkt A iest mniey, albo więcey oddalony od promienia ocznego CDO, niżeli punkt E, będzie punkt A odlegleyszy, albo bliższy środka ziemi niżeli punkt E, czyli będzie w pierwszym razie wyżey, w drugim niżey punkt E.

Jeżeli odległość między dwoma punktami A i B iest większa od 100 sążni, lecz nie przechodzi 200stu, wtedy dla zrównoważenia tych punktów obiera się między niemi w równey prawie odległości punkt M, i w tym ustawiwszy równowagę, celuie się naprzód do pręta z tarczą ustawionego pionowo w punkcie A, i zmierzona na pręcie wysokość PA, zapisuie się w brulionie. Celuie się następnie do tarczy ustawioney w punkcie B, i zmierzona wysokość BJ podobnież zapisuie się. Jeżeli wysokości PA, BJ, są równe, dwa punkta A i B będą do równowagi; ieżeli zaś wysokość JB iest mnieysza, albo większa od wysokości PA, będzie, w pierwszym razie, punkt B wyżey, w drugim niżey punktu A.

Widzimy tu, iż, przypuściwszy że punkt M iest w równey odległości od punktów A i B; wszystkie punkta równowagi pozorney DCP i CDJ, można uważać za punkta równowagi prawdziwey; zatem różnica między wysokościami PA,JB, będzie dokładną różnicą równowagi dwóch punktów A i B.

Chcąc więc zrównoważyć dwa punkta A i G, na kilkaset sążni od siebie oddalone, podzielić należy odległość AG na pewną liczbę części równych AM, MB, BH, HG; i dla zrównoważenia naprzód punktów A i B, ustawić równowagę w punkcie M, i iednego pomocnika z tarczą w punkcie A, dla oznaczenia wysokości AP, drugiego zaś w punkcie B, dla oznaczenia wsokości JB; a gdy każdy z nich zapisze w brulionie znalezioną wysokość; przenieść potrzeba równowagę na punkt H, drugiego pomocnika z punktu B na G dla oznaczenia wysokości LG, a pierwszego z punktu A na B, dla wymierzenia wysokości FB, i znalezione wysokości znowu przez pomocników zapisać się powinny. To wykonawszy, ponieważ na stanowisku M, różnica równowagi dwóch punktów A i B, iest AP — JB; na stanowisku H, różnica równowagi punktów B i G iest FB — LG; zatem AP — JB + FB — LG = (AP + FB) — (JB + LG); co pokazuie, że dla zrównoważenia punktów A i G, potrzeba wziąć summę wysokości JB, LG, oznaczonych przez pomocnika naprzód idącego, potem summę wysokości AP, FB, oznaczonych przez pomocnika po nim idącego, i te dwie summy od siebie odciągnąć, a reszta będzie dokładną różnicą równowagi pnnktów A i G, bez względu na różnicę równowagi pozorney od prawdziwey.

Daymy że AP = 4 łok. JB = 3 łok. FB = 6 łok. LG = 10 łok: będzie (AP + FB) — (JB + LG) = (4 + 6) — (3 + 10) = 3 łokciom; zatem punkt G iest o 3 łokcie niżey od punktu A.

Równoważenie nazywa się *proste*, gdy za iednem tylko odbywa się działaniem; *złożone*, gdy powstaie z kilku poiedynczych działań. Aby sprawdzić działanie równoważenia odbytego od A do G, potrzeba powtórzyć tęż samą robotę idąc od G do A; i gdy wypadek w drugim razie otrzymany niewiele różni się od poprzedzaiącego, wtedy połowę summy obu wypadków, można uważać za różnicę równowagi punktów A i G.

Tak postępuiąc nietrudno będzie przekonać się, który z punktów danych do równoważenia iest wyżey albo niżey drugiego, i poznać razem, czy sprowadzenie wody z iednego mieysca na drugie, da się uskutecznić.

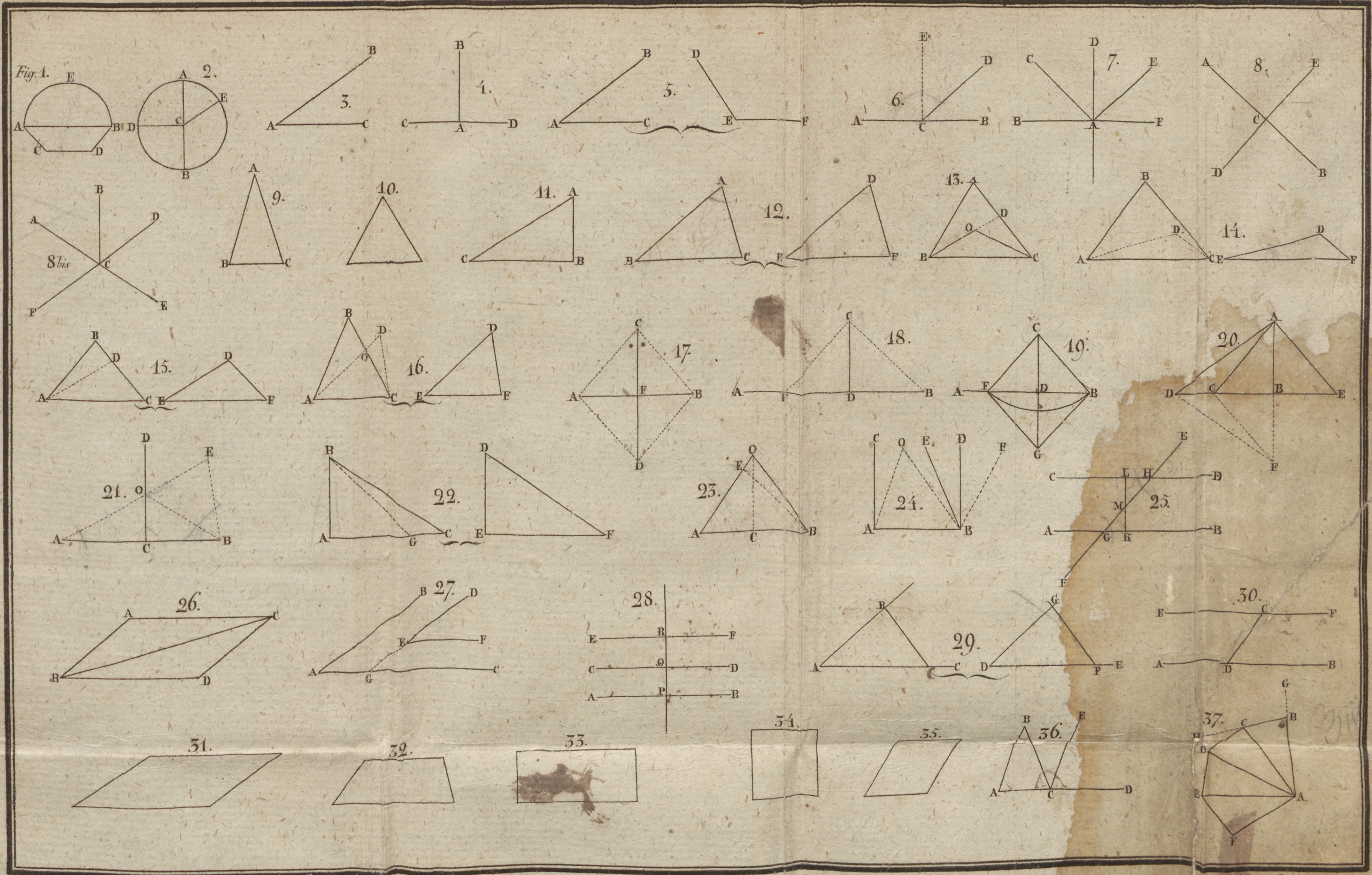
K O N I E C.

Pomyłki znacznieysze druku.

karta	wiersz	zamiast	czytay
5	2	A+C —	A+B
15	2	dla różności	dla równości
29	13	28 minut	20 minut
30	7	czyli $\frac{4}{8}$	czyli $\frac{4}{3}$
39	16	EE	FE
41	39	ABED	ABCD
41	37	ABCD	ABED
57	13	$\overline{BA}^2 \times \overline{AC}^2$	$\overline{BA}^2 + \overline{AC}^2$
62	30	CB: co = CO: cO	CB: cb = CO: cO
74	24	na niemi	na niem
74	36	po 1: 3. 14 *dodać* czyli	100: 314 w niektórych Exemplarzach —
74	37	= 3: $\frac{1}{7}$	= 1: 3$\frac{1}{7}$
77	30	na częsci	na 4 części
85	27	Nonniuszn	Nonniuszu
90	34	przekładaiąc	przykładaiąc
95	1	kréślę	kreślę
96	7	od punktów	od punktu
97	10	powierzohie	powierzchnie
104	17	płszczyznie	płaszczyznie
105	7	od dłużza AB	dłuższa od AB.
108	34	przecinaiące się	przecinaiącą się
120	14	różną	równą
ditto	35	w koleu	w klocu
125	2	Fig. 3	Fig. 33
ditto	32	baryłowatości	bryłowatości
172	31	CB—BF	CB—CF.
191	13	odcina	odcinam
196	3	bułką	bułkę
196	11	woda	wodna
198	6	Maią	Maiąc

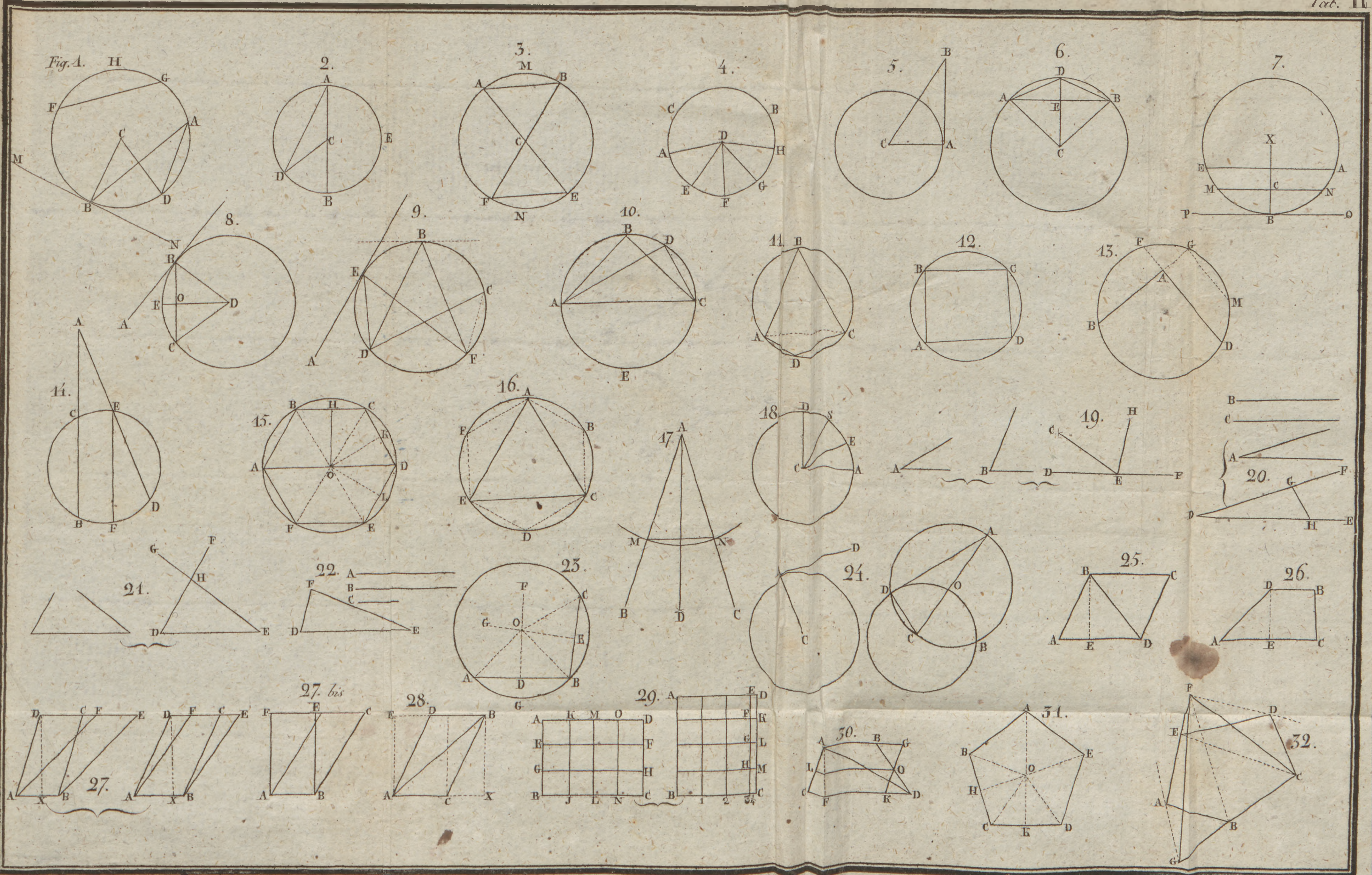
SPIS

Rzeczy zawartych w tem dziele.

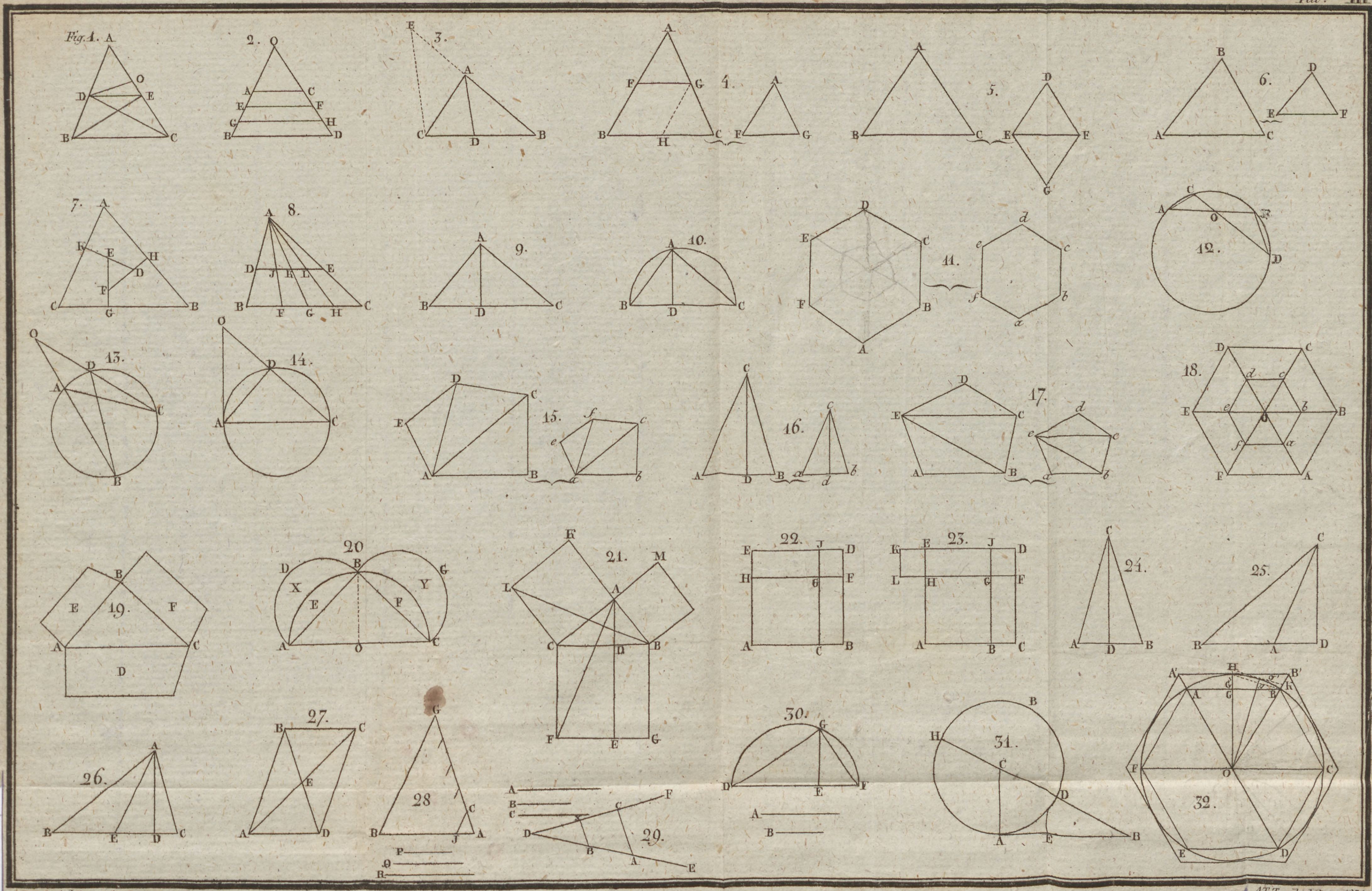


w Instytucie Litograficz. Szkoln.
A. T. Turski Litograf. 1830 r.

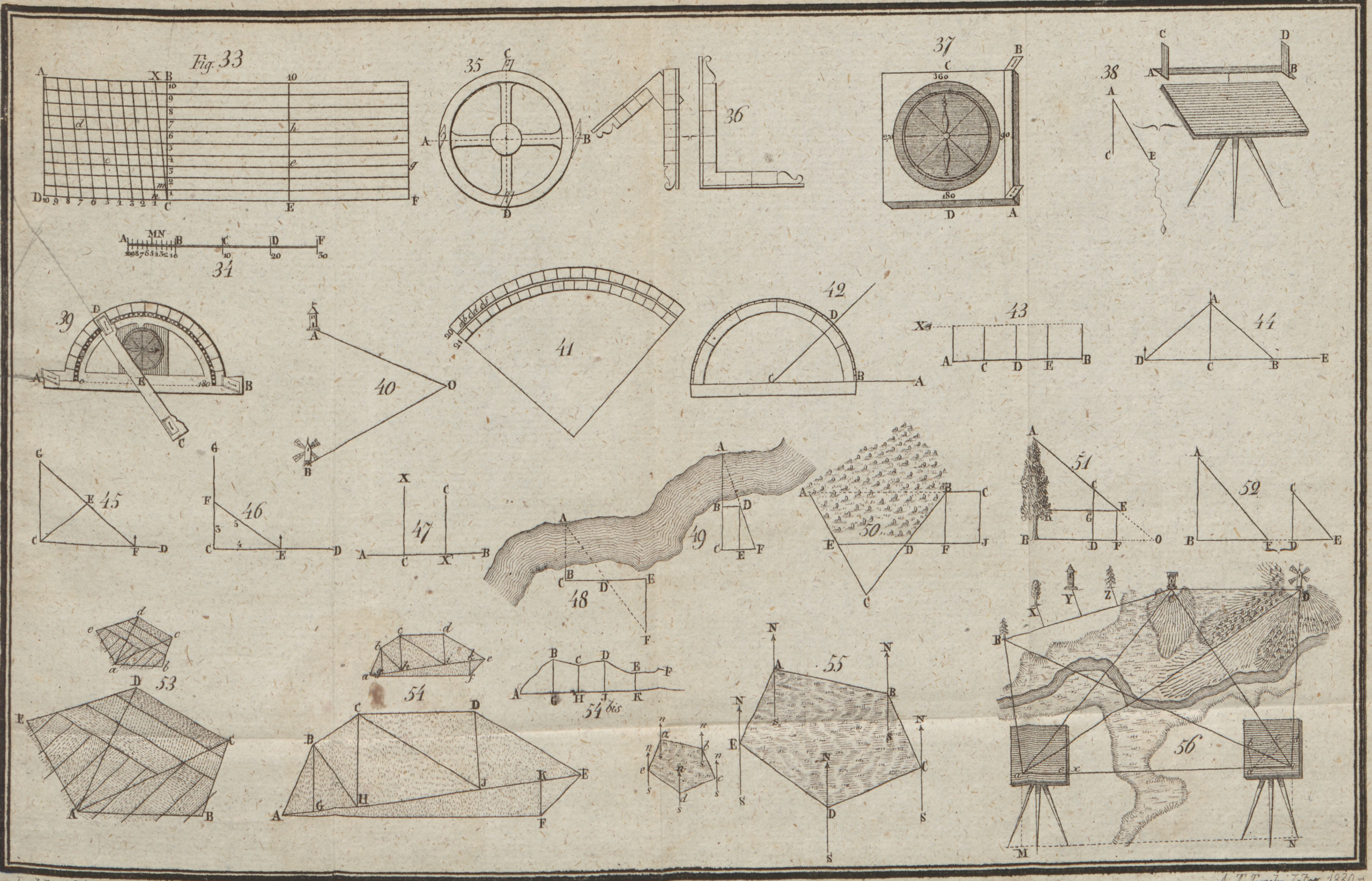
Tab. II.



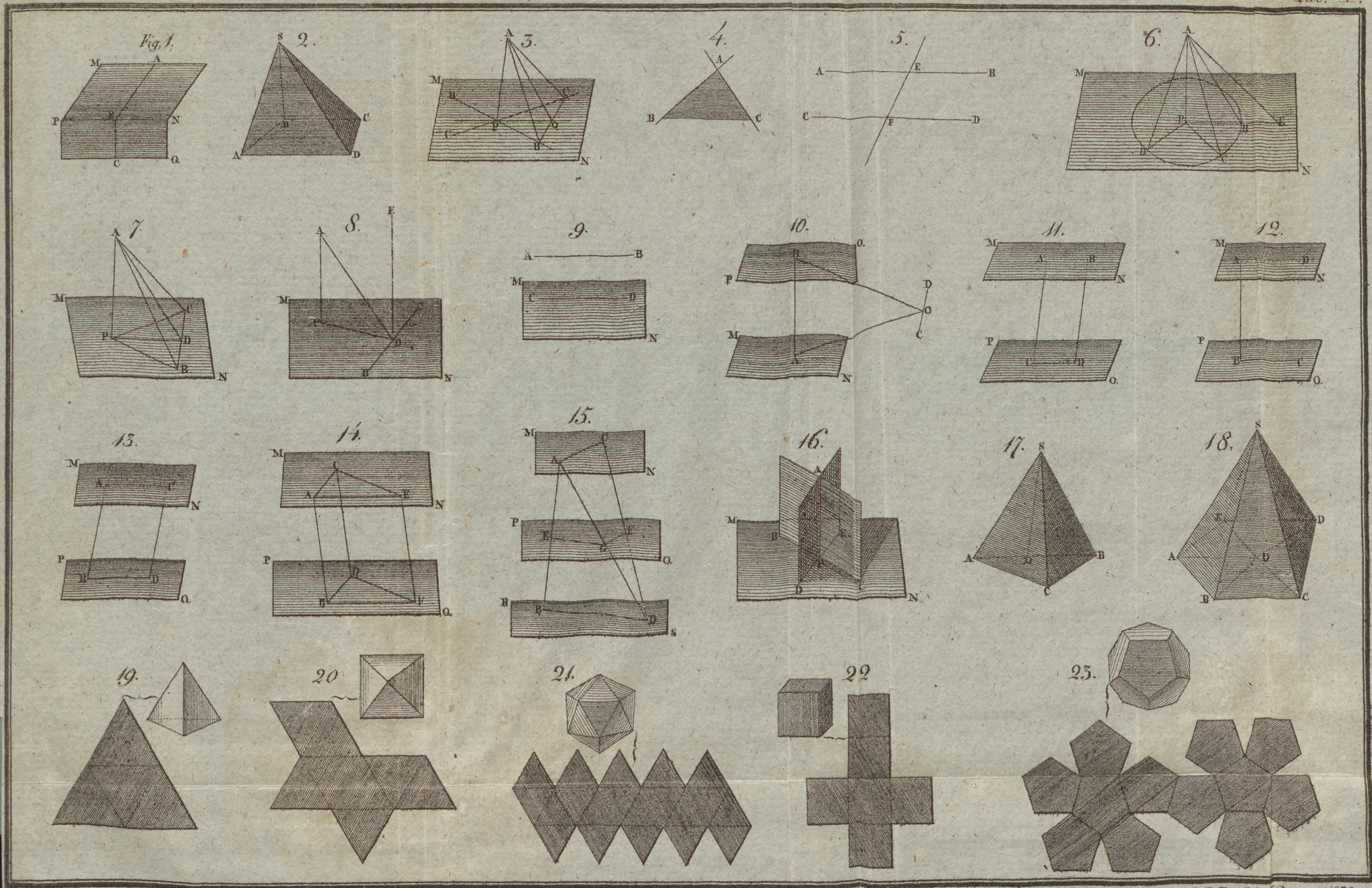
w Instytucie Litograficz. Szkoln.
A.T. Turski Litografc 1830



w Instytucie Litogr. Szkoln.
A.T. Turski Litogr. 1830 r.



w Instytucie Litografiiz Szkoln A. T. Twski Litog. 1830 r.



w Instytucie Litogr. Szkolnym

A. T. Turski Litogr. 1830 r.

Tab. VI.

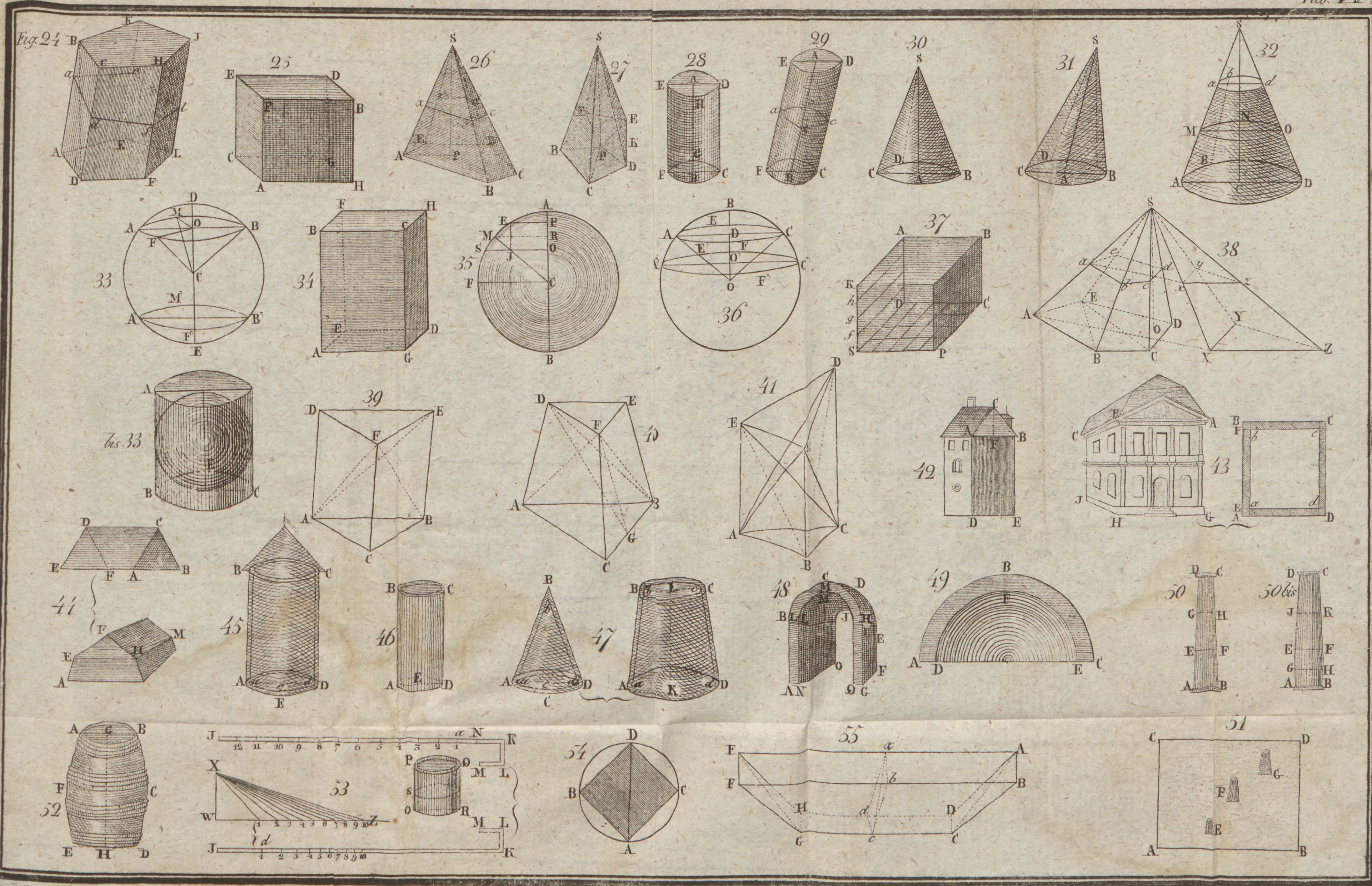
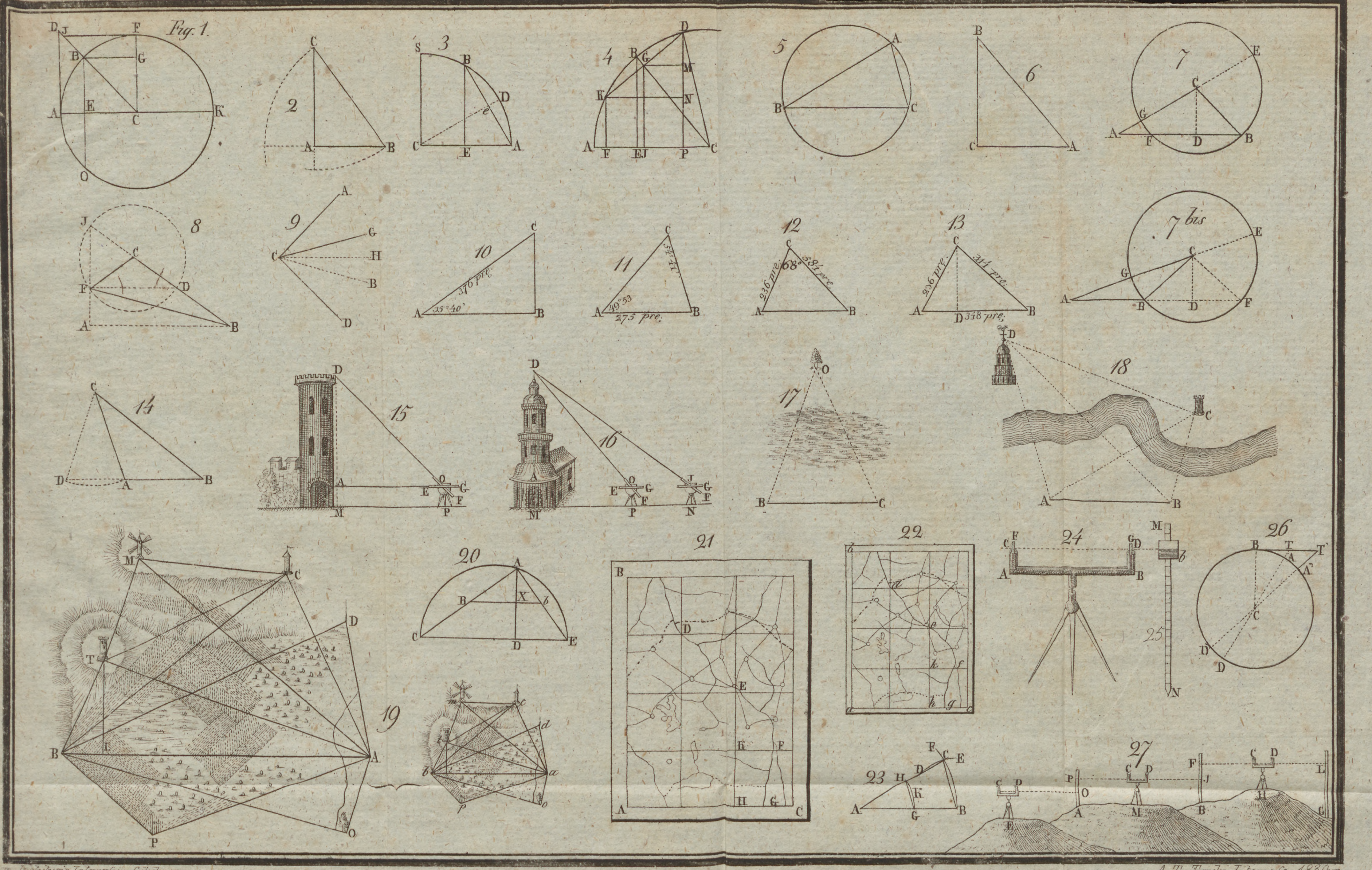


Fig. 24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
bis 33
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
50 bis
51
52
53
54
55



w Instytucie Litograficz. Szkolnym

A. T. Turski Litografo. 1830 r.

B. Kirsch.

80/—