BIBLIOTEKA MATEMATYCZNO-FIZYCZNA.

ARYTMETYKA.

PLAN BIBLIJOTEKI MATEMATYCZNO-FIZYCZNÉJ.

Seryja pierwsza (12-mo).

Tom I. **Początki arytmetyki** M. Berkmana. Str. X + 266; z drzeworytami w tekście. W oprawie kop. 65.
Tom II. **Wiadomości początkowe z fizyki** S. Kramsztyka. Książeczka I. Str. X + 77; drzeworytów 47. W oprawie kop. 30.
Tom III. Toż. Książeczka II. Str. VIII + 132; drzeworytów 56. W oprawie kop. 45.
Tom IV. **Wiadomości początkowe z gieografii fizycznéj i meteorologii** A. W. Witkowskiego. *Wkrótce wyjdzie z druku.*
Tom V. **O najprostszych figurach gieometrycznych** M. Berkmana. *W. w. z d.*

. . . .

Seryja druga (12-mo).

Tom I. **Arytmetyka** M. Berkmana. *W. w. z d.*
Tom II. **Gieometryja elementarna w wykładzie przystępnym.**
Tom III. **Krótki wykład początków algiebry.**
Tom IV. **Przystępny wykład fizyki.**
Tom V. **Kosmografija i gieografija fizyczna z meteorologiją.**
Tom VI. **Nauka rysunków technicznych.**

. . . .

Seryja trzecia (8-vo).

Tom I. **Arytmetyka,** kurs teoretyczny M. A. Baranieckiego, z przypiskami A. Żbikowskiego i J. N. Frankego. Str. 375 + LVIII, z drz. w tekście. R. 1 k. 70.
Tom II. **Zadania arytmetyczne.** *W. w. z d.*
Tom III. **Algiebra elementarna i Teoryja przybliżeń liczebnych.**
Tom IV. **Gieometryja elementarna.**
Tom V. **Krótki wykład syntetyczny elementarnych własności przecięć stożkowych.**
Tom VI. **Trygonometryja płaska i kulista.**
Tom VII. **Miernictwo.**
Tom VIII. **Fizyka.**
Tom XI. **Kosmografija i gieografija fizyczna z meteorologiją** J. Jędrzejewicza. *W. w. z d.*
Tom X. **Gieometryja wykréślna.**
Tom XI. **Mechanika elementarna.**

. . . .

Seryja czwarta (8-vo Lex.).

Tom I. **Wstęp do analizy** M. A. Baranieckiego. *W. w. z d.*
Tom II. **Rozwiązywanie równań liczebnych** J. Sochockiego. *W. w. z d.*
Tom III. **Teoryja równań algiebraicznych.** (*)
Tom IV. **Gieometryja analityczna** W. Zajączkowskiego. Str. 511 + XL; drzeworytów 85. Rubli 3.
Tom V. **Gieometryja syntetyczna.** (**)
Tom VI. **Rachunek różniczkowy i całkowy.** (***)
Tom VII. **Ćwiczenia z rachunku różniczkowego i całkowego.**
Tom VIII. **Rachunek waryjacyjny.**
Tom IX. **Rachunek prawdopodobieństwa i Metoda najmniejszych kwadratów.**
Tom X. **Zasady mechaniki teoretycznéj.**
Tom XI. **Rachunki wykréślne.**

. . . .

Tom dodatkowy «Biblijoteki». **Słownik matematyczno-fizyczny.**

Jako uzupełniające seryją IV «Bibl. mat.-fiz.» należy uważać następuj. dzieła, ogłoszone przez biblijotekę kórnicką:

(*) **Teoryja wyznaczników,** kurs uniwersytecki M. A. Baranieckiego. Paryż, 1879. 8-vo, str. XXII + 600. Marek 12.
(**) **Wykład gieometryi wykréślnéj** E. Sągayły. Paryż, 1882. 4-to, str. 444 z bardzo wielu drzeworytami w tekście, oraz LXII tablic miedziorytów. Marek 24.
(***) **Wykład nauki o równaniach różniczkowych** W. Zajączkowskiego. Paryż, 1877. 8-vo, str. XXIV + 904. Marek 20.

BIBLIJOTEKA MATEMATYCZNO-FIZYCZNA,
WYDAWANA POD REDAKCYJĄ
M. A. BARANIECKIEGO
Z ZAPOMOGI KASY POMOCY DLA OSÓB, PRACUJĄCYCH
NA POLU NAUKOWYM, IMIENIA JÓZEFA MIANOWSKIEGO.
SERYJA III. TOM I.

ARYTMETYKA,

KURS TEORETYCZNY.

NAPISAŁ

DR. MARYJAN A. BARANIECKI,
PRIVAT-DOCENT UNIWERSYTETU W WARSZAWIE.

Z PRZYPISKAMI

DRA A. ŻBIKOWSKIEGO I PROF. J. N. FRANKEGO.

WARSZAWA.
W DRUKARNI NOSKOWSKIEGO.

1884.

Дозволено Цензурою.
Варшава, 7 Февраля 1884 г.

Składał głównie zecer A. Zduńczyk.
Drzeworyty ciął W. Bojarski.
Papier z papierni w Pilicy

Seryja III «Bibl. mat.-fiz.» ma głównie na widoku systematyczne wychowanie średnie ogólne, przygotowywujące do wyższych studyjów specyjalnych.

Przy nauczaniu arytmetyki w szkole średniéj ogólnéj należy odrazu położyć jak największy nacisk na ciągłe, systematyczne już, rozumowanie uczniów podczas lekcyj. Należy oczywiście przyjąć, że uczniowie, rospoczynający taką naukę, są już uprzednio rozwinięci w takim stopniu, jaki powinien być wynikiem starannego przerobienia z nimi «Początków arytmetyki» (tom I, seryi I). — Lekcyje arytmetyki o każdéj nowéj części kursu powinny tworzyć ściśle obmyśloną grupę. Początkowe z nich należy poświęcić najważniejszym punktom owéj części, wyjaśnianym na tak dobranych mniejszych liczbach, iżby trudności rachunkowe nie odsuwały założeń lekcyj na plan dalszy. Przedmiotem zaś dalszych z owych lekcyj winny być rozwinięcia szczegółowe, wszelkie uzupełnienia, oraz ogólne wysławianie postępowań i otrzymywanych wypadków, a nakoniec ostateczne powolne przerobienie całéj téj części kursu przy nader systematycznym, prawie-że pedantycznym dowodzeniu. — Nie jest bynajmniéj założeniem nauczania arytmetyki w szkole średniéj ogólnéj wyćwiczenie uczniów w prędkim wykonywaniu rachunków (należy to do szkół handlowych i t. p.) według zapamiętanych prawideł. Tu idzie przedewszystkim o wyrobienie w uczniach ciągłego zdawania sobie sprawy z tego, co wypowiadają, o mówienie ściśle na pewien temat oznaczony, a jednak wciąż przedstawiający czyto nowe przypadki, czytéż nowe zastosowania, umiejętnie przez nauczyciela nasunięte, dające tymsamym odpowiednie pole do rozwijania swobodnego myślenia uczniów. Przy takim prowadzeniu kursu, uczniowie wciąż się wprawiają w ściśle rozumowanie, łatwo zdobywają tyle samodzielności, iż, przy lekkim kierownictwie nieustannym nauczyciela, mogą sami już objaśniać rzeczy, na które po raz piérwszy ich uwagę się zwraca, a z przerabiania zadań odnoszą należytą korzyść, gdyż nauczą się każdy krok w rachunku szczegółowo uzasadniać i przywykną (gdytylko nauczyciel od czasu do czasu na to zwraca uwagę) mimowolnie zdawać sobie sprawę z każdego szczegółu.— Dodatkowo zaznaczyć wypada, iż dla objaśniania t. z. «nowych lekcyj» należy lepszego ze średnich uczniów postawić wobec nowéj kwestyi, a przez odpowiednie pytania tak nim kierować, żeby mu się zdawało, iż ma swobodę zupełną odpowiedzi, lecz żeby w rzeczywistości w tych pytaniach były już pewne napomknienia na to, na czym uczeń ma oprzéć owę odpowiédź. — Z tego besposrednio wynika, iż w tak prowadzonym nauczaniu arytmetyki, zgodnie z jéj rolą pośród ogółu kursów matematyki w szkole średniéj ogólnéj, należy oddać stanowczą przewagę metodzie indukcyjnéj, jak to już dobrze w swoim czasie rozumiał i znakomicie wykonał światły autor *Arytmetyki dla szkół narodowych*, wydanéj przez Komisyją Edukacyjną.

Przy takich założeniach nauki arytmetyki w szkole średniéj ogólnéj, nie może być mowy o tym, aby książka, podręcznik arytmetyki, miała się znajdować w ręku ucznia wcześniéj, niż przy piérwszym powtarzaniu całego już kursu.

Znacznie większe rozmiary przybrałoby to dzieło, gdyby miało przedstawiać obraz szczegółowy, niejako wzór takiego kursu. Nie miałoby to zresztą celu. Różne bowiém bywają grupy uczniów, których przygotowanie należy odpowiednio uwzględniać. Utalentowanemu i zamiłowanemu w przedmiocie nauczycielowi najlepszych wskazówek dostarczy tu doświadczenie i własna pilność. — Dlatego to, co w téj książce jest wydrukowane czcionkami większymi (wraz z odsyłaczami gwiazdkowymi), obejmuje wszystko, co powinno w szkole średniéj ogólnéj stanowić przedmiot zajęć z uczniami w ciągu normalnego kursu, jakotéż podczas powtarzania piérwszego, które koniecznie powinno miéć miejsce zaraz po ukończeniu tego kursu. Owe ustępy tworzą spójną całość tak, iż w nich nic nie jest uwzględnione z tego, co jest podane czcionkami mniejszymi. [Gdzieindziéj (zob. Przedmowę) zaznaczono, dlaczego w szkole średniéj wykład ułamków zwyczajnych poprzedzać winien naukę o liczbach dziesiętnych. Gdyby jednak program obowiązujący wymagał takiéj zmiany, to należy tylko treści rozdziałów V, VI i VII nadać taki porządek: a). roz. VII bez us. 6-go i 7-go § 21-go, b). roz. V i VI, c). us. 6-y i 7-y § 21-go.]

Czcionkami mniejszymi są wydrukowane te ustępy, które częściowo powinny, a częściowo mogą być uwzględniane przy powtarzaniu kursu arytmetyki przed egzaminem dojrzałości, jakotéż przy przygotowaniach do egzaminów nauczycielskich. Wiadomości zaś historyczne o miarach, podane drukiem drobniejszym w § 8-ym, znalazły się w téj książce dlatego, że «Bibl. mat.-fiz.» nie mogła ich nie objąć, a w tym tomie było najwłaściwsze dla nich miejsce. Pomieszczenie nadto krótkiego rysu historycznego o rozwoju arytmetyki i o jéj nauczaniu w Polsce wynikło z ogólnego planu tego wydawnictwa.

6 lutego r. 1884.

Red.

SPIS RZECZY.

ROZDZIAŁ VII.

ROZDZIAŁ VIII.

ROZDZIAŁ IX.

ROZDZIAŁ X.

PRZYPISEK I.

PRZYPISEK II.

PRZEDMOWA.

Od dość już dawna miałem zamiar napisania systematycznego kursu arytmetyki. Myśl ta jednak stale mię już zajmowała dopiéro [1]) od r. 1879, gdy Towarzystwo uauk ścisłych w Paryżu wyraziło życzenie, aby podręcznik arytmetyczny, jaki miałem przygotować dla ogłoszenia go staraniem tego Towarzystwa, mógł służyć dla tych, którzy pragnęliby znaléść ścisłe i spójne udowodnienia wszelkich postępowań w arytmetyce — co, oczywiście, odpowiadało swoim zamysłom.

Kierując się znaną prawdą: «docendo discimus», tak podczas kilkuletniego nauczania w gimnazyjum II w Warszawie, jak i przy kierowaniu przygotowaniami do egzaminów nauczycielskich, starannie zważałem na każdy szczegół, jaki się nastręczał, a dbając o uzasadnienia ścisłe, najodpowiedniejsze tak naturze kwestyj objaśnianych, jak i należytemu stopniowaniu, wypracowałem powoli cały kurs, który pozostawało tylko napisać, odpowiednio do założenia książki, jakieby jéj nadać wypadło. To zaś założenie ostatecznie określiło się dopiéro z chwilą, gdy doszło do skutku wydawnictwo téj «Biblijoteki» i gdy podjąłem się opracowania kursu arytmetyki seryi III. Cel więc, który przy pisaniu téj książki miałem na widoku, był dwojaki. Naprzód dostarczyć uczącym szczegółowego materyjału do zajęć teoretycznych w czasie lekcyj arytmetyki w szkole średniéj ogólnéj, a powtóre, dać uczącym

---

[1]) Jeszcze w r. 1875 napisałem dla «Panteonu wiedzy ludzkiéj» oddzielny artykuł *Arytmetyka* (w t. I, str. 96; Warsz., 8-vo Lex.). Chociaż ów artykuł miał założenia inne. niż podręcznik (por. w nim str. 4), to jednak, rospocząwszy wkrótce po jego napisaniu nauczanie w szkołach średnich, przekonałem się, iż wiele ustępów inaczéjbym opracował, gdy bym, układając go, miał poza sobą odpowiednią praktykę pedagogiczną.

się możność piérwszego powtórzenia kursu arytmetyki [1]), jakotéż przedstawić te uzupełnienia, które są właściwe przy ponownym jego powtórzeniem przed egzaminem dojrzałości. —

Z rozmaitych podręczników arytmetycznych, których wiele w różnych epokach, a głównie przed rospoczęciem pisania téj książki, przeglądałem, nieliczne osiągnąłem korzyści. Osobliwie, że szukałem w nich jasnego i trafnego, a nadewszystko ścisłego wprowadzenia różnych kwestyj, jakotéż objaśnienia, opartego na głównych, że tak powiém, rysach im właściwych. Najwięcéj stosunkowo był mi pomocny znakomity pod wielu względami podręcznik arytmetyki, który ogłosił p. J. A. Serret, profesor fakultetu paryskiego [2]). — Zbyt wiele zajęłoby tu miejsca wyliczenie tych ważniejszych szczegółów, które uważam za wynik własnych obmyślań. Dla większości nadto czytających tę książkę nie przedstawiałoby to żadnego interesu. A zresztą, porównanie opracowania téj książki z tylkoco wzmiankowanym podręcznikiem łatwo oceniającym moję pracę wykazać może, co tu zawdzięczam swojéj praktyce nauczycielskiéj, a pośrednio także nieco tym moim uczniom i uczennicom, którzy zadawali pytania, odnoszące się do zaciekawiających ich kwestyj teoretycznych. —

Odmienny od zachowywanego zwykle w kursach systematycznych porządek treści nauki o podzielności liczb (rozdział V) dostateczne, zdaje mi się, znajdzie swe usprawiedliwienie w tym, iż jest naturalniejszy. — Szczegółowiéj objaśnić mi należy, dlaczego, przeprowadzając naukę o liczbach dziesiętnych (roz. VII) bez jakiegokolwiek odwoływania się do wiadomości z nauki o ułamkach zwyczajnych (roz. VI), tym ostat-

---

[1]) Ku temu może byłoby pożyteczne wydanie krótsze, obejmujące tylko to, co tu jest wydrukowane czcionkami większymi (wraz z odsyłaczami gwiazdkowymi).

[2]) *Traité d'arithmétique*, 6-te wydanie, przejrzane przez autora i p. de Comberousse (Paryż, 1875). Po jednym zaś lub po dwa szczegóły drugorzędnego znaczenia zaczerpnąłem tu z prac następujących: J. Bertrand: *Traité d'arithmétique*, 4-te wyd. (Paryż, 1867); A. Guilmin: *Cours complet d'arithmétique à l'usage des lycées et colléges*, 14-te wyd. (Paryż, 1866); Labosne, Marechal et Painvin: *Cours complet de mathématiques, Arithmétique*. (Paryż, 1855); R. Baltzer: *Die Elemente der Mathematik*, tom I, 3-ie wyd. (Lipsk, 1868); V. A. Le Besgue: *Introduction à la théorie des nombres* (Paryż, 1862).

nim (wraz z roz. V) wyznaczyłem miejsce przed liczbami dziesiętnymi. Owóż, wprowadzenie w powszechne użycie układu metrycznego miar rzeczywiście wywołuje, jako objaw gorączkowy, uczenie ułamków dziesiętnych przed zwyczajnymi. Tak było w końcu zeszłego i na początku bieżącego wieku we Francyi, tak jest obecnie w Austryi i w znacznéj części w Niemczech. Z czasem jednak ten niewłaściwy porządek w nauczaniu ustępuje; we Francyi np. jest on oddawna potępiony. Właściwe bowiém pojęcie o liczbie wogóle charakteru ułamkowego dać mogą tylko ułamki zwyczajne, a badanie własności tych ostatnich i działań na nich wyświetla należycie naturę takiéj liczby, czego nie można osiągnąć przy nauczaniu ułamków dziesiętnych, będących tylko szczególnymi przypadkami zwyczajnych [1]; tak iż wtedy, mając na myśli pojęcie ogólne, ograniczać je musimy ze względu na niedostateczne przykłady objaśniające (że już nie będę się tu rozwodził nad innymi słabymi stronami takiego porządku). — Tu mi należy zaznaczyć, że tak pod względem następstwa zachowanego przy wykładzie niektórych kwestyj, jak i pod względem zakresu, w jakim są one przedstawione, a także pod względem ostatecznéj redakcyi kilku ustępów, wiele zawdzięczam światłym i wytrawnym radom p. Władysława Kwietniewskiego, mego niegdyś profesora w Szkole Głównéj warszawskiéj. —

Źródła do wiadomości o dawnych miarach w Polsce, podanych w § 8-ym, i tamże wymienione, obszernie omówiłem w tygodniku «Wszechświat» (Warsz., r. 1883, N. 43). —

---

[1]) O nauczaniu liczb ułamkowych w szkolach elementarnych trafną robi uwagę inspektor takich szkół w Paryżu, dr. ès sciences, E. A. Tarnier: «Wogóle, zbyt lekceważą «ułamki zwyczajne. To może ujść małym szkółkom wiejskim, zamkniętym przez część roku «z przyczyny robót polnych, w których uczniowie udział przyjmują. Tam należy się pod«dać przykréj konieczności, konieczności, według któréj arytmetyka wyłącznie dziesiątko«wa, z systematem metrycznym, jako punktem wyjścia, narzuca się, że tak powiém, sama «przez się; rzeczywiście w tych okolicznościach, należy dążyć drogą najprędszą. Lecz «w nauczaniu (— elementarnym —) o trzech stopniach, kurs «wyższy» może być poważnym «i owocnym tylko pod warunkiem, że się dostatecznie uwzględnia rachunek tych ułamków «zwyczajnych». (*Nouvelle arithmétique théoretique et pratique*, 6-te wyd., Paryż, 1873, str. 273.)

Co się nakoniec tyczy tego, iż dodany na początku książki rys historyczny przybrał tak wielkie rozmiary, to, popiérwsze, drobiazgowość obszernego materyjału nie nadawała się ku temu, aby go można było zaznaczać ogólnymi tylko rysami; a powtóre, dzięki biblijotece w Kórniku, tak zasobnéj w dawne druki matematyczne polskie, która mi łaskawie dostarczyła wszystkiego, czegom zażądał, i dzięki p. drowi Danielowi Wierzbickiemu w Krakowie, mogłem o najważniejszych naszych podręcznikach arytmetycznych z wieku XVI i początku XVII, nigdzie dotąd nieopisanych, podać takie wzmianki, ktoreby dały pojęcie o nauczaniu wtedy u nas arytmetyki. Mając nadto pod ręką nieogłoszone dotąd ważne źródło, odnoszące się do tyle doniosłéj działalności Komisyi Edukacyjnéj, «Protokóły Towarzystwa do ksiąg elementarnych», uznałem za właściwe przytoczyć tu z niego choć te główne fakty, które pozostawały w bespośrednim lub bliskim związku z ówczesnym nauczaniem w naszych szkołach i z wypracowaniem dla nich dwu znakomitych podręczników arytmetycznych, wydanych przez owę wiekopomną magistraturę.

KRÓTKI RYS ROZWOJU ARYTMETYKI

I O JÉJ NAUCZANIU W POLSCE.

Najdawniejszym [1]) zabytkiem, przedstawiającym sposoby wykonywania rachunków, jest wielce starożytny papyrus egipski, zachowany w muzeum brytańskim, który wydał Rhind, a przetłomaczył Eisenlohr (1877). Dokument ten, napisany pismem hieratycznym, posiada tytuł: *Przepis do osiągnięcia poznania wszelkich rzeczy ciemnych... wszelkich tajemnic, które są zawarte w przedmiotach. Ułożoną była ta księga w roku 33, Mesori dnia... za króla górnego i dolnego Egiptu* Ra-a-us *życie dającego, według wzoru starych pism, które wygotowane były za czasów króla* [Ra-en-m]at *przez pisarza* Ames'*a ułożone to pismo.* Tu wyraz Ra-a-us jest przydomkiem króla Hiksosów, którego imię jest Apepa. Panowanie zaś jego przypada nie wcześniéj niż na 2000 lat, a nie później niż na 1700 lat przed Chr. Do tego więc czasu należy odnieść papyrus Rhind'a, za czym przemawiają także jego cechy paleograficzne [2]). Początkowa część tego zwoju podaje sposoby wykonywania rachunków, a końcowa jest poświęcona zadaniom z gieometryi praktycznéj.

Tak w piśmie hieroglifowym, jak i w hieratycznym, ułamki $\frac{1}{2}$ i $\frac{2}{3}$ miały osobne znaki, a w hieratycznym nadto takie oddzielne oznaczenia istniały dla ułamków $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{4}$. Aby zaś przedstawić np. ułamek $\frac{1}{7}$ pisano znak, oznaczający 7, kładąc nad nim osobny znaczek («ro», w piśmie hieratycznym: kropkę), który wskazywał, że to nie jest przedstawienie liczby 7, lecz liczby $\frac{1}{7}$. Mogli więc Egipcyjanie, prócz ułamka $\frac{2}{3}$, przedstawiać tylko ułamki, które, według naszego sposobu ich pisania, mają w liczniku 1. Jakże należało przedstawiać inne ułamki, czyli, według papyrusa, jakże przedstawiać wypadek zadania: «podziel 2 przez 5», 7 i t. d.? Owóż, początek papyrusa zajmuje tablica wypadków takich dzieleń liczby 2 przez wszystkie liczby nieparzyste od 3 do 99. Np.

podziel 2 przez 11 $\quad \frac{1}{6}\ \frac{1}{66} \qquad$ (t. j. $\frac{2}{11}=\frac{1}{6}+\frac{1}{66}$)

podziel 2 przez 13 $\quad \frac{1}{8}\ \frac{1}{52}\ \frac{1}{104} \qquad$ (t. j. $\frac{2}{13}=\frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{104}$).

---

[1]) Nie powtarzam w tym «Krótkim rysie» szczegółów o liczeniu słownym i piśmiennym. Są one podane w §§ 2-im i 3-im téj książki. Nie podaję też mniej lub więcej prawdopodobnych domysłów o początkowym wykonywaniu rachunków, opartych na liczeniu spółczesnych ludów pierwotnych.

Materyjał faktyczny do części ogólnéj czerpię z następujących źródeł: Cantor'a *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, których ogłoszony w r. 1880 tom I obejmuje historyją matematyki do r. 1200 po Chr. (autor niekiedy zbyt śmiałe robi przypuszczenia); Hankel'a *Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter* (1874); Chasles'a *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* (1875; przedruk wydania z r. 1837). Ostrożnie zaś korzystać należy z niekrytycznéj często kompilacyi Hoefer'a *Histoire des mathématiques depuis leurs origines jusqu'au commencement du dix-neuvième siècle* (1874).

[2]) Nie wyjaśniono dotąd należycie, o jakim dawniejszym królu wspomina ten tytuł.

Oczywiście, że przy pomocy téj tablicy wszelki ułamek, którego mianownik jest nie większy od 100, a licznik jakikolwiek, można wyrazić przez ułamki, które Egipcyjanie wymówić i napisać mogli, a te ułamki doprowadzić do tego, iżby pośród podobnych składników, wyrażających ułamek dany, nie było dwu równych. Czy jednak wtedy Egipcyjanie istotnie tak postępowali, wykonywając obliczenia w swoich «domach rachunków», tego z dotąd znanych zabytków wnieść nie można.

Za to w papyrusie Rhind'a są wyraźne ślady, iż pomimo tego, że oznaczali na piśmie tylko mianowniki ułamków, umieli je skracać i sprowadzać do spólnego mianownika, gdy je należało dodać do siebie. Aby zaś przedstawić ułamki o spólnym mianowniku, opuszczano ten ostatni, a natomiast pisano same tylko liczniki (bez kropek, więc jakby liczby całkowite — ale inkaustem odmiennego koloru), i taksamo sumę tych liczników, po któréj pisano już zwyczajnie wypadek dodawania. — Mnożenie wykonywa się zapomocą kolejnego podwajania, jakby częściowe zastosowanie naszéj t. z. praktyki włoskiéj, co w działaniach z ułamkami znakomicie ułatwia powyżéj wzmiankowana tablica. — Odejmowanie zaś i dzielenie traktuje się jako «sekem» (dopełnianie) odjemnika do odjemnéj zapomocą dodawania, a dzielnika do dzielnéj zapomocą mnożenia.

Ostatnią jest grupa zadań «hau» (kupa), które zdają się być rozwiązywane zapomocą fałszywego założenia. Podamy parę wysłowień tych zadań: «Kupa, jéj $\frac{2}{3}$, jéj $\frac{1}{2}$, jéj $\frac{1}{7}$, jéj całość, to stanowi 33»; «$\frac{2}{3}$ do tego, od tego $\frac{1}{3}$, pozostaje 10» [1]); «przepis podziału 700 chlebów między 4 osoby: $\frac{2}{3}$ dla jednéj, $\frac{1}{2}$ dla drugiéj, $\frac{1}{3}$ dla trzeciéj, $\frac{1}{4}$ dla czwartéj». — [W jednym z tych zadań są dodane do siebie liczby: 7, 49, 343, 2401 i 16 807 (t. j. potęgi liczby 7), obok których są wyrazy: obraz, kot, mysz, jęczmień i miara (prawdopodobnie objętości). To zadanie przedstawia widoczną analogiją z dziwaczną kwestyją, którą się jeszcze spotyka więcéj, niż w 3000 lat późniéj, u Leonarda z Pizy (wiek XIII): 7 bab idzie do Rzymu, z których każda ma mułów 7, a na każdym mule sakiew 7, a w każdéj sakwie chlebów 7, a w każdym chlebie nożyków 7, a każdy nożyk ma pochew 7; szukana jest suma wszystkich tych rzeczy.]

Niektórzy ten zabytek uważają za podręcznik do nauki, inni zaś za rodzaj kajetu szkolnego ucznia [2]). Za tym ostatnim przypuszczeniem przemawia wiele względów. Zadania są często niewyraźne, jakby zwięzłe notowania. Obok błędnych rachunków są na boku zaznaczone wypadki dobre, jakby przez nauczyciela wskazane. Często złe rachunki następują po dobrym, jakby ten ostatni był wzorem podanym przez nauczyciela. Po złych zaś rozwiązaniach rachunki poprawne są kilkakrotnie powtarzane, jakby dla lepszego nauczenia się ich wykonywania. — Jeżeli papyrus Rhind'a był kajetem ucznia, to mistrz prawdopodobnie umiał więcéj. Wskazywałoby to, że nauka rachunków w dawnym Egipcie stała na jeszcze wyższym stopniu, niż o tym bespośrednio świadczy ów zabytek. — W każdym jednak razie jest on dowodem, iż w tak odległéj starożytności nauczano już systematycznie roz-

---

[1]) T. j. $(x+\frac{2}{3}x)-\frac{1}{3}(x+\frac{2}{3}x)=10$.

[2]) O pracach, poświęconych (1877—1882) badaniu tego zabytku, p. E. Mejerson ogłosił artykuł sprawozdawczy w *Ateneum* (r. 1883, tom IV), w którym czytelnik może znaléść szczegółowsze przedstawienie wykonywania czterech działań.

wiązywania nawet takich zadań, jak powyżéj przytoczone, oraz, że, mimo niedołężnego, a raczéj wielce kłopotliwego wyrażania liczb ułamkowych, przezwyciężano napotykane trudności, a nadto, że działania na liczbach ułamkowych musiały być już bardzo rospowszechnione, kiedy obmyślono ułatwiającą je tablicę i tak jednostajnie je wykonywano. —

Doniosłe w swoim rodzaju posiada znaczenie inny starożytny zabytek, mianowicie dwie gliniane tabliczki [1]), znalezione w r. 1854 przez gieologa Loftus'a nad Eufratem koło Senkereh, a które, według poważnych domniemań (Sayce) pochodzą z okresu między r. 2300 a 1600 przed Chr. Tabliczki te są zapisane po obu stronach pismem klinowym (zob. str. 15), obie do siebie należą, a jedna z nich nie jest całkowita. Na téj, która nie jest uszkodzona, po obu jéj stronach, jest 60 wierszy. Między liczbami są wyrazy sumeryjskie, z których powtarzający się «ibdi» oznacza: kwadrat (Rawlinson). Z początku jest na téj tablicy:

1 jest kwadrat 1, 4 jest kwadrat 2, i t. d., 49 jest kwadrat 7.

Zamiast jednak tego, by daléj było podobnie: 64 jest kwadrat 8 i t. d., znajdujemy:

1	4	jest kwadrat 8
1	21	jest kwadrat 9
1	40	jest kwadrat 10 (i t. d.)
. . .	. . .	. . . . . .
58	1	jest kwadrat 59
1		jest kwadrat 1

Owóż, znaczenie liczb początkowych w tych wierszach jest takie:

$$1\times60+4,\ 1\times60+21,\ 1\times60+40,\ \text{i t. d.},\ 58\times60+1,\ 1\times60^2,$$

a ostatniéj liczby ostatniego wiersza: 1×60. Ta więc tabliczka jest zestawieniem kwadratów piérwszych 60 liczb, jakby w systemacie sześćdziesiątkowym pisania liczb. Jedna strona drugiéj tabliczki (uszkodzonéj) jest niekompletnym wprawdzie zestawieniem dwu układów miar, z których w jednym podziały są dokładnie sześćdziesiątkowe. Zachowana część téj tabliczki na drugiéj stronie przedstawia sześciany liczb od 1 do 32 (na brakującéj części prawdopodobnie znajdowały się dalsze do liczby 60, jak odpowiednio na piérwszéj tabliczce). Są one również napisane według systematu sześćdziesiątkowego; tak np.

obok liczby 4 znajduje się 1 4 t. j. $4^3=1\times60+4$,
„ 16 „ 1 8 16 „ $16^3=1\times60^2+8\times60+16$,
„ 30 „ 7 30 „ $30^3=7\times60^2+30\times60$.

Zestawiając te tabliczki, obejmujące wyrażenia kwadratów i sześcianów liczb w układzie sześćdziesiątkowym, ze śladami układu miar Babilończyków, w którym stanowczo przemagały podziały sześćdziesiątkowe, częściowo dotąd będące w powszechnym użyciu (por. § 2, us. 12), objaśnić sobie łatwo możemy najprawdopodobniejsze ich przeznaczenie, co jeszcze wprost potwierdza jedna strona tabliczki uszkodzonej. Jeżeli prawdziwą jest zaznaczona powyżéj starożytność tych tabliczek, to one wskazywałyby na to, iż działania na liczbach wielorakich w powszechnym musiały być użyciu, jeżeli obmyślono dla

[1]) Fotograficzne ich odtworzenie jest dołączone do rosprawy Lepsius'a w *Abhandlungen* akademii berlińskiéj za rok 1877.

ogólnego użytku (gliniane) podobne ułatwienia. Zaznaczyć nadto wypada, że, jak z powyższego widoczna, Babilończycy byli bardzo bliscy utworzenia pozycyjnego systematu sześćdziesiątkowego pisania liczb.

Niemniéj starożytnego pochodzenia jest sposób wykonywania rachunków na przyrządach odpowiednich, który powoli bardzo ustępował pola arytmetyce «cyfrowéj», t. j. takiéj, jaka jest dziś w powszechnym użyciu.

Według źródeł chińskich, o których dotąd, co prawda, tylko przez pośrednictwo chińskich uczonych coś wiedzieć można, jeden z ministrów cesarza Huang-ti, panującego w r. 2637 przed Chr., mianowicie Szeu-ly, był wynalazcą «swan-pan»'u, przyrządu do wykonywania rachunków, jakoteż autorem «dziewięciu rozdziałów arytmetycznych», które prawie we wszystkich późniéjszych arytmetykach chińskich są uważane jako podstawa nauki rachunków [1]). Swan-pan tworzy rama drewniana z utwierdzonymi w niéj najczęściéj 10 równoległymi drutami (tych drutów bywa niekiedy i więcéj), oraz jednym poprzecznym (do tamtych prostopadłym), dzielącym więc każdy z poprzednich drutów na dwie części; na każdym zaś z owych równoległych drutów są gałki, a mianowicie z jednéj strony poprzecznego drutu po 5, a z drugiéj po 2. Każda z owych 5 gałek na którymkolwiek drucie służy do oznaczania 10 razy większéj części liczby niż na poprzednim drucie, a każda z owych 2 oddzielnych gałek na jakimkolwiek drucie jest tyleż, co wszystkie 5 gałek, na innéj części tegoż drutu się znajdujących. Łatwo więc zrozumiemy, jak na tym przyrządzie dogodnie można było unaoczniać liczby. Gdy zaś dawniejsze sposoby piśmiennego przedstawiania liczb tak Chińczyków [2]), jak i innych ludów (por. § 3), nie nadawały się do bespośredniego wykonywania działań na wypisanych liczbach, przeto uciekać się musiano do mechanicznych sposobów. Oznaczano przeto różne części danéj liczby (jedności, dziesiątki, sta,...) czyto różnymi przedmiotami, czyteż jednakowymi, różnie tylko uszykowanymi; następnie zaś, mając na uwadze owe przedmioty, wykonywano na nich odpowiednie działania, a nakoniec odczytywano i zapisywano otrzymany wypadek. Wskazówką tego, jak dawno takie wykonywanie rachunków było w Chinach uprawiane, a zarazem jak ono było rospowszechnione, może służyć to, że w żadnéj książce chińskiéj o rachunkach niema uwag o tym, jak postępować, aby dane liczby dodać lub odjąć od siebie [3]). Natomiast na mnożenie i dzielenie są podane prawidła; pierwsze uskutecznia się przez częściowe mnożenie (uwielokrotnienie) części większéj z liczb danych, drugie zaś przez powtarzane odejmowanie.

Czy przyrządy do rachowania u różnych ludów powstawały niezależnie, czyteż są modyfikacyją swan-pan'u, stanowczo rosstrzygnąć się nie da. Że niektóre z nich przechodziły od jednego narodu do innego, jest dziś rzeczą dowiedzioną. Wiele jednak względów mówi za tym, iż one wszystkie powstać

---

[1]) O rachowaniu na swan-pan'ie traktuje sześciotomowe dzieło chińskie, o którym sprawozdanie ogłosił w r. 1839 E. Biot w *Journal asiatique*.

[2]) Dziś Chińczycy w powszednim życiu używają 9 znaków na różnych miejscach, lecz choć mają i często piszą zero, to jednak, gdy np. piszą 204, pod znakiem 2 piszą 100, a daléj obok zero i cztery.

[3]) Biernatzki. *Die Arithmetik der Chinesen* (w dzienniku matematycznym Crelle'go, tom LII, r. 1856).

mogły ze swan-pan'u, ulegając zmianom pod wpływem wymagań życia praktycznego tego narodu, który takiego przyrządu zaczął używać. Tak np. dotąd jeszcze w Rosyi używane «szczoty» mają też same ramę, druty i gałki, co swan-pan chiński; pod wpływem jednak dziesiątkowego sposobu pisania liczb znikły gałki oznaczające piątki i drut poprzeczny, a natomiast każdy drut ma 10 gałek.

Rachowanie na podobnych przyrządach wydaćby się nam dziś mogło właściwym chyba przy nauce początkowéj dzieci lub dla osób niewykształconych; wszakże coś podobnego zdarza się niekiedy jeszcze widzieć tylko u «karbowych», czytających rezultaty swych obliczeń i notowań z karbów swoich lasek. Wychowani na arytmetyce cyfrowéj moglibyśmy myśléć, że jeżeli nie zawsze, to przynajmniéj od bardzo dawna ludzie rachują w ten sposób, jak my teraz. Jak jednak zobaczymy, arytmetyka cyfrowa wkraczać zaczyna do świata chrześcijańskiego dopiéro w wieku XII. Dawna zaś arytmetyka na przyrządach odpowiednich, niegdyś wyłącznie panująca, podtrzymywana późniéj siłą przyzwyczajeń i odpowiednimi podręcznikami, a tradycyją przekazywana długo następnym pokoleniom, zwolna tylko ustępuje z pola. W Polsce np. są ślady, iż jeszcze w końcu przeszłego stulecia była ona w użyciu.

Aby więc zrozumiéć, jak dawniéj rachowano, aby pojąć powolny postęp arytmetyki cyfrowéj, a tymsamym i jéj doniosłość, winniśmy choć w głównych rysach zaznajomić się z rosprzestrzenieniem i najważniejszymi sposobami wykonywania rachunków na wzmiankowanych przyrządach. Tym właśnie teraz się zajmiemy.

Według świadectwa Herodota, «Egipcyjanie piszą wiérsze swego pisma «i rachują kamykami, posuwając rękę od prawéj ku lewéj, gdy Hellenowie kie«rują od lewéj ku prawéj». Rachowanie więc kamykami, czyli wykonywanie mechaniczne rachunków, było powszechne w Egipcie, jakkolwiek bespośredniego śladu tego dotąd nie mamy [1]). Za to zachowały się: rysunek greckiego rachmistrza z przyrządem rachunkowym na wielkiéj wazie Daryjusza w Neapolu, jakoteż znacznych rozmiarów tablica marmurowa, znaleziona w r. 1846 na wyspie Salaminie, będąca albo stołem rachunkowym publicznego wekslarza greckiego, albotéż może stołem do gry, z przygotowanymi rzędami do obliczania wygranej i przegranéj. Z każdéj strony jest 5 głównych rzędów i 4 pomocnicze. Piérwsze służyły do oznaczania talentów (6000 drachm), tysięcy, set, dziesiątków i pojedyńczych drachm, a były podzielone na dwie części (liczman na jednéj mógł przeto znaczyć tyle, co 5 na drugiéj części), rzędy zaś pomocnicze służyć mogły do oznaczania monet mniejszych od drachmy. Główne rzędy są opatrzone odpowiednimi znaczeniu liczmanów, na nich kładzionych, znakami liczebnymi herodyjańskimi (por. str. 16, odsyłacz 1-y), co usprawiedliwia podział tych rzędów na wzmiankowane dwie części, gdyż istnieją oddzielne takie znaki dla 5, 50 i t. d. Przyrządy więc rachunkowe u Greków są conajmniéj tak dawne, jak owe znaki herodyjańskie (por. tamże). — Taki przyrząd Grecy nazywali «abaks» [2]), skąd nazwa rzymska «abacus» (nasza «abak»), która stała się powszechną. — Jamblichus, głośny autor prac o Pitagorasie i jego szkole, piszący w IV wieku po Chr., opowiada, iż założyciele

---

[1]) Wprawdzie na papyrusie z czasów króla Meneftah I (panow. 1341—1321) jest jakby rachunek wykonany kamykami (kółka), lecz niektóre tak pionowe jak i poziome rzędy mają po dziesięć kamyków.

[2]) Niektórzy ten wyraz wiążą z pierwiastkiem semickim «bak», piasek.

tej szkoły dowodzenia tak arytmetyczne, jak i gieometryczne przeprowadzali na abaku, a w innym miejscu wyraźnie wypowiada, że abak pitagorejczyków tworzyła tablica [1]) posypana piaskiem, co tłomaczy jéj używanie przy rostrząsaniach gieometrycznych.

U Rzymian, jak liczne wzmianki o tym świadczą, również do ćwiczeń gieometrycznych i arytmetycznych służyła tablica piaskiem pokryta, abacus, na któréj przeciągnąwszy rysy, można było, kładąc kamyki, «calculi», wykonywać rachunki. Nadto zachowały się dotąd cztéry przyrządy rachunkowe z nacięciami, w których przesuwają się gałki na sztyftach. Jeden z tych przyrządów, metalowy, służył do obliczania pieniędzy, assów i uncyj; siedem głównych nacięć, opatrzonych znakami I, X, C i t. d., jest przeznaczonych na assy; każde nacięcie składa się z dwu nierównych części (ściśléj, w jednéj linii są dwa nierówne nacięcia); w większéj można było umieszczać 4 sztyfty z główkami, a w drugiéj tylko jeden, który tyleż oznaczał, co 5 w poprzedniéj części; nadto w jednéj linii są dwa nierówne nacięcia do obliczania uncyj (ass = 12 uncyjom), z których więc w jednym można było umieszczać 5 sztyftów, a w drugim 1, równoważny 6-u w tamtéj części.

Ważną reformę w rachowaniu na abaku zaprowadził sławny uczony z początku wieku VI, Anicius Manlius Boethius, autor doszłych do nas prac o arytmetyce, o muzyce, o gieometryi, oraz zaginionéj w XVI wieku pracy o astronomii [2]). Mianowicie, zamiast jednakowych, jak dotąd liczmanów, wprowadził on dziewięć różnych, «apices», na których były umieszczone znaki, oznaczające 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9, tak iż, gdy na abaku była jedna liczba, to na każdéj linii mógł być tylko jeden taki znak. Według badań Cantor'a, najdawniejsze znaki na «apices» Boecyjusza pochodzą od liter, które na oznaczenie liczb początkowych były używane przez Indusów w II stuleciu po Chr. i przez Aleksandryją dostały się do Rzymu. Że zaś z tychże indyjskich liter powstał skutkiem kolejnych zmian kształt dzisiejszych cyfr t. z. arabskich (por. str. 18 i 19), przeto łatwo się tłomaczy przez długi czas niezrozumiałe wzajemne podobieństwo tych znaków liczebnych. — Gdy wystawimy sobie na abaku przy pomocy «apices» wyrażoną jednę lub więcéj liczb, to dostrzeżemy, iż ta tylko będzie różnica od naszego ich przedstawienia, że tam będą niezajęte linije, gdzie my piszemy zera, i można powiedzieć, że około tego zera, téj jedynéj brakującéj cyfry, obracają się usiłowania tylu uczonych przez tyle wieków! — Dzielenie najwięcéj przedstawiało trudności. Boecyjusz uczy metody dopełniającego dzielenia, która prawie przez tysiąc lat była późniéj uprawianą. Tak np. dzielniki 16, 78, 623 od bliskich im liczb okrągłych większych: 20, 80, 700 różnią się o «różnice» 4, 2, 77; dzieli się więc dzielną przez wspomniane liczby okrągłe, a do reszty dodaje się iloczyny ilorazu przez owe «różnice». Gdy zaś trzeba podzielić np. przez 308, to trzeba odłączyć odpowiednią część dzielnéj, pozostałą jéj część podzielić przez 300, a do téj reszty dodać «różnicę» między ową odłączoną uprzednio częścią dzielnéj i iloczynem wyznaczonego ilorazu przez 8. — Od czasów Boecyjusza stale już każda liczba (numerus) od 1 do 9 jest «digitus», palec, każda liczba, jakbyśmy teraz powiedzieli,

---

[1]) Boecyjusz (por. niżéj) nazywa ją «mensa Pythagorei», co późniéj rozumiano jako oznaczające znaną tabliczkę mnożenia (stąd powszechne przypisywanie jéj Pitagorasowi).

[2]) Onto te cztéry nauki objął powszechną późniéj nazwą «quadrivium». [«Quadrivium» wraz z «trivium» (gramatyka, retoryka i dyjalektyka) obejmowało «siedem sztuk wyzwolonych».]

zakończona na 0, t. j. 10, 20 i t. d. (do nieskończoności), «articulus», staw (zgięcia palca), jedna lub druga ogólnie «incompositus», niezłożona, gdy wszystkie inne liczby (t. j. większe od 10, a przez 10 niepodzielne), są «compositi», złożone.

Oto jak się uczono rachunków w wieku IX: «W lecie r. 822 zacząłem «pod kierunkiem TATTOS'a naukę arytmetyki. Naprzód objaśnił on nam księgi «konsula MANLIJUSZA BOECYJUSZA o rozmaitych rodzajach i podziałach, jakotéż «o znaczeniu liczb; późniéj uczyliśmy się rachować na palcach i użycia abaku «według ksiąg, które BEDA [1]) i BOECYJUSZ o tym napisali» [2]). Nie była więc wtedy łatwą nauka rachunków: quantus sudor in mathesi expensus est!

Do ułatwienia jéj i rospowszechnienia znakomicie się przyczynił sławny GERBERT (ur. w piérwszéj połowie wieku X w Owernii, nauki częściowo pobiérał w Marchii hiszpańskiéj, zmarły w r. 1003 jako papież SYLWESTER II), znakomity na swój czas gieometra i astronom, tak bespośrednim nauczaniem w Rheims, jakotéż głośnymi swymi pracami o abaku wogóle i osobno o dzieleniu. Te dzieła arytmetyczne są opracowaniami metod BOECYJUSZA, którego GERBERT był wielkim wielbicielem, choć ani w tekście, ani na rysunkach abaku, w tych odpisach, które są starożytniejsze, niéma «apices» BOECYJUSZA: występują one dopiéro i z czasem upraszczają się w odpisach późniejszych [3]). — Od czasów GERBERT'a i jego uczniów nauka rachunków powoli staje się coraz dostępniejszą i coraz więcéj się rosprzestrzenia, gdyż i ilość szkół jednocześnie się pomnaża.

* * *

Wprawdzie najpiérwsza w Polsce wydana arytmetyka obcego autora jest przeważnie cyfrową, piérwsze atoli książki arytmetyczne, przez Polaków układane, uczą wykonywać rachunki zapomocą kamyków na linijach abaku — są «arytmetykami linijowymi».

Najdawniejszą [4]) w Polsce drukowaną arytmetyką jest *Algorithmus* IOHANNIS DE SACRO BUSTO [5]) (Cracovie, Haller, 1509; egzemplarz z biblijoteki [6]) kórnickiéj). Ta książka jest jednak arytmetyką cyfrową, a tylko parę ostatnich stron tak w tym wydaniu [7]), jak i w późniejszym (wnosząc z cech zewnętrznych; nie ma ono miejsca i roku druku; bibl. kór.), jest poświęconych pobieżnemu wykładowi arytmetyki linijowéj (w wydaniu z r. 1509 jeden rysunek abaku). Do téj książki jeszcze wrócimy.

Piérwsza przez Polaka ogłoszona arytmetyka, *Algorismus linealis cum pulchris conditionibus duarum regularum Detri una de integris: altera vero de fractis: regulisque socialibus: et semper exemplis ydoneis adiunctis. In florentissimo studio*

---

[1]) Tu jest mowa o «BEDA venerabilis» (672—735), jako autorze dzieła o liczeniu na palcach. (Zob. także koniec str. 8).

[2]) Tak pisze Walafrid STRABO.

[3]) CANTOR, str. 746.

[4]) Według dra T. ŻEBRAWSKIEGO *Biblijografija piśmiennictwa polskiego z działu matematyki i fizyki, oraz ich zastosowań* (Kraków, 1873).

[5]) Właściwie SACRO BOSCO, JAN Z HOLYWOOD, uczony z wieku XIII, znany także jako astronom.

[6]) Wzmiankując tu o piérwszym z udzielonych mi wielu z cennych zabytków, tak niezbędnych dla opracowania ustępów o arytmetyce w Polsce, a zachowanych w biblijotece kórnickiéj, pospieszam wyrazić moje gorące podziękowanie jéj Zarządowi, a osobliwie p. drowi Z. CELICHOWSKIEMU.

[7]) Wszystkich wydań przytoczonych przez ŻEBR. i w J. ŁUKASZEWICZA *Historyi szkół* (Poznań, 1849—51) jest 8 (ostatnie z wymienionym rokiem 1533).

Cracoviensi editus non minus litteris eruditis quam mercatoribus utilis. et maxime incipientibus. (Cracovie, Haller, 1517; kart 10; bibl. kór.; istnieje wcześniejsze [1]) wyd. z r. 1513), którą ułożył «IOANNES DE LANCZUT Magister», cała, prócz ustępu «de numeratione» (o wartości cyfry zależnie od miejsca przez nią zajętego), jest poświęcona rachunkowi na abaku. Mistrz JAN Z ŁAŃCUTA przechodzi tedy kolejno: dodawanie, odejmowanie, podwajanie (duplatio), społowianie (mediatio), mnożenie i dzielenie, przerabiając łatwe zadanie na czterolinijowym abaku (8 figur), a następnie mówi o postępach obu rodzajów, regule trzech, nieco obszerniéj o regule spółki (uwzględniając różne wnioski na różny przeciąg czasu dane), tak na liczbach całkowitych, jak i na ułamkowych. Znanych (ŻEBR., ŁUK.) 13 wydań téj książki (do r. 1562) wskazuje najlepiéj na jéj upowszechnienie w ówczesnych szkołach [2]).

Piérwszą w języku polskim arytmetyką jest: *Algoritmus: To jesth nauka Liczby: Polską rzeczą wydana: Przez Księdza* TOMASZA KŁOSA. *Na trzy częsci się dzieli, Pierwsza będzie o osobach liczby, wtora o Regule detri, Trzecia o rozmaitych rachunkoch y o spolkach kupieczkich* (1538). Oba istniejące egzemplarze, każde innego wydania [3]), są zdefektowane i nie odtwarzają całości. — Obszerna «Przedmowa do wszytkich młodzienczow [4]) Polskich, zwłaszcza rodziczow Krakowskich» (str. 2—8) jest poświęcona wychwalaniu każdéj pokolei liczby od 1 do 9 i rozważaniu «pożitku tey nauki» na temat ze św. Augustyna: «żaden ku uznawaniu ani Boskich ani ludzkich rzeczy nie ma przystępować, «az pirwey naukę Liczby dobrze pobaczi». Piérwsza strona (9) samego już wykładu jest taka: «Poczyna się liczba Polska na liniach y na cyfrach. Pierwsza «figura telko sama siebie waży. Wtora dziesiec. Trzecia Sto. Czwarta Ty-«siąc. Szosta [5]) Sto tysiąc. Siodma Milon. Osma Dziesiec milonów. Dzie-«wiąta Milon milonow.» —(str. 10) «Naucz się they liczby dobrze wymawiać»; tu jedna z wypisanych liczb jest 10-cyfrowa, utworzona z samych 9-tek. — (str. 11) «Chczeszli byc predki w liczbie Naucz sie tey wszystkiey figuri po pamieci na każdy dzień jednego rzedu». Tu (str. 11—16) pod napisami «Wiele czyni» są wypisane szeregi dwu czynników jedno- i dwucyfrowych i ich iloczynów. — Na str. 17 «Ku lepszemu wyrozumieniu tego, Figurę z liniami «obacz.» i abak ośmiolinijowy z oznaczeniem wartości liczmana, kładzionego na różnych linijach i między linijami (tu zamiast poprzedniego «milona» występuje «Tysiąc tysięczi», a daléj «Pieć kroć tysiąc tysięcy» i «Dzie-

---

1) ŁUK. przytacza (tom I, str. 93) spółczesne piérwszemu wydaniu téj książki: *Linealis calculatio cum pulchris documentis et regulis ad monetam cracoviensem diligenter suputata.* (Cracovie, 1513) napisał w Krakowie SEBASTYJAN PAUSCHNER LEUTSCHOVIANUS, przeznaczając je szczególniéj dla kupców. ŻEBR. nie wspomina o téj książce.

2) Książka JANA Z ŁAŃCUTA jest daleko lepszą od *Algorithmus linealis...* HENRICUS STROMER AUERBACHENSIS, dzieła nader pobieżnego, którego są znane dwa wydania z r. 1524 (Cracovię, Vietor; bibl. kór.; 6 kart, 11 rysunków abaku; zakres treści tenże, co u Mistrza JANA) i z r. 1536.

3) Egzemplarz biblijoteki Jagiellońskiéj z kartą tytułową całą (Cracovie ex Officina Ungleriana 1538), która w egz. bibl. ks. Czartoryskich jest uszkodzona (w innym miejscu niema również oznaczonego miejsca i roku druku). [«Pokoż na liniach lata theraz idącze 1537.» str. 22 egz. ks. Czar.]

Uprzejmości p. dra D. WIERZBICKIEGO, astronoma w Krakowie, zawdzięczam zarządzenie przepisania tego zabytku i sprawdzenie z oryginałami.

Z obu egzemplarzy do całości (31 kart) brak 4 kart (13—16), które widocznie obejmowały część wykładu o «Mnożeniu z dzieleniem» (najciekawsze).

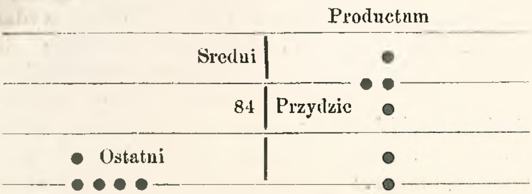
4) *Cz* w odpowiednich miejscach należy czytać *c*, a niżéj *g* przed *i* jest znakiem *j*-oty, t. j. *gi* = *ji*.

5) «Piątéj» niema.

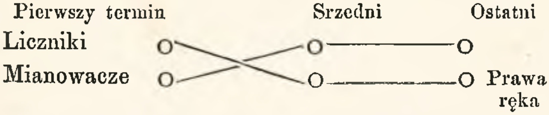
sięć kroć tysiąc tysięcy«) — Dalszy ciąg owéj części piérwszéj obejmuje zadania na 4 działania na liczbach całkowitych, oderwanych i mianowanych tak prostych jak i wielorakich; w tym ostatnim razie z uwzględnieniem miar miejscowych i częściowo litewskich. Przy piérwszych zadaniach na dodawanie, odejmowanie (odejmowanie lat odnosi się przeważnie do faktów z dziejów ojczystych) i mnożenie są abaki z odpowiednio nałożonymi liczmanami; karty z dzieleniem zatracone. Brak wszelkich objaśnień wykonywania działań wskazuje, że autor tylko na abaku je wykonywał. Na str. 36: «Po«czyna się wtora cześć o Regule Detri w czałey y w łamaney liczbie. Regula «Detri. W ktorey są trzy terminy, pirwszy iesth wiadomych rzeczy, wtori «iest tych wiadomych rzeczy zapłathy, Trzeci iest niewiadomych rzeczy. (Str. «37) Gdy tedy chczesz doydz niewiadomych rzeczy, mnoż ie przez zapłathę «wiadomych rzeczy, A ono czo przydzie z takiego mnożenia dziel przez «wiadome rzeczy. A w kociencie (quotiens, iloraz) przydzieć zapłata niewia«domych rzeczy iako tu. Kupiłem post sukna.

Wiadome post:		Zapłata gich f:		Niewiadome postawow
24	za	84	zacz	9

«Czini $31\frac{1}{2}$ f: zapłata niewiadomych rzeczy na liniach tak. Kładz zawsze ostat«ni termin na liniach iako oto 9. mnożże gi przez srzedni.



«Dziel przez pirwszy iako przez 24 przydzie $31\frac{1}{2}$ f: Tym obyczaiem działay «wszytki insze takowe». Potym (str. 38—41) 6 przestróg (Kautela), objaśnionych na przykładach np. (2-ga) «Jestli pirwszy y trzeci termin: maią rożne mianowanie, tedy ie obroć na iedno mianowanie» i t. p. — Następnie (str. 42—45) «Lamana Liczba pisze się» i przestróg o ułamkach, głównie o skracaniu w postaci ułamkowéj wypisanych rozwiązań zadań na regułę trzech. — Oto jak Kłos postępuje z regułą trzech w przypadku, kiedy liczby dane są ułamkowe (str. 45—6) «Regula o łamaney liczbie pospolita Gdy we wszytkich «trzech terminiech iest łamana liczba przy czałey. Tedi złam całą liczbę przez «swego mianowacza z przydaniem licznika: produktum na miestczu licznika «kładącz: Pothym mnoż mianowacza ostatniego, od prawey ręki, w srzedniego. A zasię toż productum mnoż w licznika pirwego produktum, tam kładąc «potim mianowacza pirwego mnoż w licznika srzedniego albo ostatniego ter«minu productum tam kładąc: iako tu w tym wnosku ukazuje.



«Wtora część tey Reguły. A iestli nie wszędzie łamana liczba iest, tedy podłoż «1. pod ony termini kthore są bez łamaney liczby, a potym czyń iakom cie nauczył». Przykład na piérwszą część reguły jest taki: «$16\frac{2}{3}$ Korczy żyta za «$4\frac{1}{2}$. zło. Zacz $3\frac{3}{4}$ korczy.» Stawia się więc dane liczby tak:

$$\frac{50}{3} \quad \frac{9}{2} \quad \frac{15}{4}$$

i przez oba mianowniki dwu ostatnich ułamków mnoży się licznik piérwszego, a przez mianownik piérwszego mnoży się licznik drugiego (lub trzeciego). Otrzymawszy

$$\frac{400}{3} \quad \frac{27}{2} \quad \frac{15}{4},$$

odrzuca się mianowniki, a z liczbami

400 27 15

postępuje się tak, jak w przypadku poprzednio przytoczonym, gdy liczby zadania na regułę trzech są całkowite, t. j. ostatnią (15) mnoży się przez średnią (27), a ten iloczyn dzieli się przez piérwszą (400). Odpowiédź: «facit 1 złothy». — Część wreszcie trzecia (str. 47 do 61) obejmuje najróżnorodniejsze zadania, przeważnie na porównanie wag tak kupieckich jak i menniczych; jest tu także «O towarzystwie reguła» (str. 56, 7), bez wszelkiego objaśnienia odpowiedzi [1]). Podkoniec zadania i rozwiązania stają się coraz mniéj wyraźne; ostatni tytulik «Lamanie łamania».

Drugą w języku polskim arytmetykę, znacznie obszerniejszą od poprzedniéj, ogłosił w r. 1553 «Bernard Woiewodka». Jedyny zachowany tego wydania egzemplarz nie posiada karty tytułowéj (bibl. kór.; na ostatniéj str. «drukowano w Krakowie u dziedzicow Marka Szarfenbergera. Roku 1553»; taż data pod dedykacyją na str. 6; kart 110). Według wydań późniejszych (w Krakowie r. 1574 i w Wilnie r. 1602) tytuł jest taki: *Algorithm, to jest nauka liczby po polsku na liniach uczyniony.* Rysunki abaku są tylko na str. 10 z objaśnieniem, t. j. 13 linij z nazwami części liczby na nich oznaczanych (7-ma: «Tysiąc tysięcy», 10-ta: «Tysiąc tysiąc tysięcy», 13-ta: «Tysiąc tys. tys. tysięcy»), i na ostatniéj stronie (rycina) abak z liczmanami na stole, za którym siedzi sędziwy rachmistrz. — Choć autor w przedmowie mówi, że «kożdy «mało nieco dowcipu mając może sie jusz wybornie sam przes się z tego to «Algorithmu wiele nauczyć», to [2]) jednak, czytając jego dzieło, aby dojść do takiéj opinii, trzeba chyba uwzględnić inne dzieła spółczesne. Tak np. prowadzi rzecz swą o dzieleniu: «Dzielenie iest liczby więkssey na tylo częsci «rozmierżenie ile iest iednośći w mnieyssey liczbie, a przeto dwie liczbie są «potrzebne w każdem dzieleniu. Napierwey liczba kthorą masz dzielić, a liczba «przes kthorą masz dzielić, z ktorych dwu wychodzi trzećia liczba ktorą zową «kocientem, ktory kocient vkazuie wiele ras liczba przes ktorą dzielisz może «byc miana w tey liczbie kthorą dzielisz, a przeto gdy iednę liczbę przes «drugą chcesz dzielić, tedy tę ktorą masz dzielić położ na linie podług ich «iusz znamionowania, a drugą liczbę, to jest przes kthorą masz dzielić napisz «sobie gdzie dla pamięci albo ią pamiętai. Potem położ twoy palec na wyzssey «liniey gdzie leżą liczmany, a ile kroć liczbę przes kthorą dzielisz możesz mieć

---

[1]) Ostatnie z trzech zadań: «Trzey się złożyli, pirwszy włożył 112. zło. y stał 5. mie-«sięczy, drugi włożył wino y stał 8 miesieczy, trzeci włożył 72. zło. y stał przez niewiadomy «czas, y zyskali 104. zło a iako często pirwszy z zysku brał 5. zło. tako często wtori brał «5. zło a yle rozow wthori brał 7. zło. tyle razow trzeci brał 9. zło. Jest pytanie iako «drogo ono wino szaczowano, a iako długo trzeci stał w towarzistwie, a wiele każdemu «przydzie z zysku.»

[2]) O zerze «a dziesiąta (figura) jest ktorą zową cifrą, ktora sama zsiebie nic nie «waży ani znamionuie, ale mając miestce przy drugich dawa innym znamionowanie, a ta «iest 0».

«w oney liczbie v ktorey palec dzierżysz telo liczmanow na teiże liniey według «palca położ, a iesli liczby przes kthorą dzielisz cale a zupełnie nie możesz «mieć w oney kthorą dzielisz kthora iest na liniach, tedi telko połowicę wezmi «liczby przes kthorą dzielisz, a za to odięćie połosz liczman pod linią pod tą «v której palec trzimaż miasto kocienta, a tak tim obyczaiem czin począwssy «od wierzchniey liniey aż do nizssey asz wssytko dzielenie wypełnisz.» Po takim prawidle wypisane są liczby, które należy podzielić, lub liczby mianowane proste, które należy wyrazić jako liczby wielorakie, i odpowiedzi. Wyłożywszy w ten sposób 4 działania na abaku, autor już dalej o nim nie wspomina, a tylko wprost mówi: pomnóż i t. d. — Następuje «Regula Detri» na liczbach całkowitych (str. 40) taksamo pojęta i z takimże prawidłem, jak u autora poprzedniego. — Ułamki nasz autor bardzo szczegółowo traktuje (str. 57—80), drobiazgowo mówiąc o sprowadzaniu ich do spólnego mianownika, o tym «iako masz łamanie łamania przywieść w proste łamanie», przyczym poleca «2. trżećiznie trzech ćwierći iedney połowice» tak pisać:

$$\frac{2}{3}\;\frac{3}{4}\;\frac{1}{2},$$

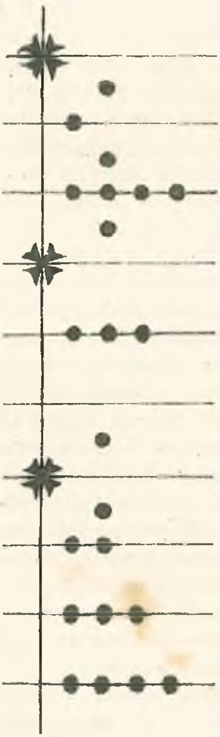
pośrednio o skracaniu ułamków, oraz systematycznie o działaniach na «łamaniach» (tu «O podwoieniu łamania», «O rozdwoieniu albo połowiczeniu łamania», których to działań na liczbach całkowitych nie było. — «Dla pobaczenia lepssego reguły detry w liczbie łamaney będziem baczyć siedm reguł» t. j. rozróżniać 7 przypadków według tego, w których z »terminów» i w ilu z nich jest albo «sama liczba łamana», albo «sama liczba łamana krom całey postawiona» (str. 80—108). — Resztę dzieła, a więc całą drugą jego połowę, zajmują «Reguły rozmaite a barzo potrzebne a naprzod reguła towarzystwa rozmai tego y o czasie», później (str. 142) «reguła rowności» (za pewną sumę pieniężną kupić różnych różnej ceny towarów tak, aby każdego towaru kupić tę samę ilość), «Regula ligar To yest Reguła myessania» (ile zmieszano jednego gatunku danej ceny z danymi ilościami innych gatunków danej ceny, gdy dana cena mieszaniny), «Regula legis. To yest Reguła vstawy» (dane ceny dwu gatunkow wina i mieszaniny, oraz jej ilość; w drugim zadaniu «czworakie wino»; wyznaczyć ilości gatunków mieszanych), «Reguła położenia» (podział proporcyjonalny zapomocą pojedyńczego fałszywego założenia), «Regula augmenti Reguła pomnożenia» (gdyby ktoś kupił 9 funtów, to zostałoby 13 gr., gdyby 14 f. to 1 gr.; ile kusztuje funt i ile miał pieniędzy), «Regula residui Reguła zbytku» (kupiec sprzedał towar za 33 zł. i na każdym zł. stracił 12 gr.; ile go kosztował ten towar), «Regula fusti» (dane stosunek ilości mieszanych gatunków, ich cena i ilość mieszaniny; jaka jej wartość), i t. d. [r. frymarków, «o sędzye» (sąd pełen wody), o budowaniu, o złocie i srebrze], nakoniec «Regula falsi Regula falssu», «ze dwoiey liczby falssywey wźyętey na wolą rachuiącego, przyidźie prawdźywa a pytana liczba») i «Regula Detri conversa. Reguła detri wywrocona». Jeżeli autor nie usprawiedliwia wskazówek, jakie daje w tych różnych regułach, to przynajmniej licznymi próbami stara się wpoić przekonanie o prawdziwości podawanych przepisów. — Może w stopniowaniu zadań początkowych, w różnorodności podejmowanych kwestyj z życia praktycznego, w samym jej języku wreszcie dopatrywać należy wielkiej poczytności arytmetyki Wojewódki, która sprawić mogła to, iż egzemplarze wszystkich trzech jej wydań są dziś tak wielką rzadkością.

Nader starannym opracowaniem zaleca się Benedicti Herbesti Neapo-

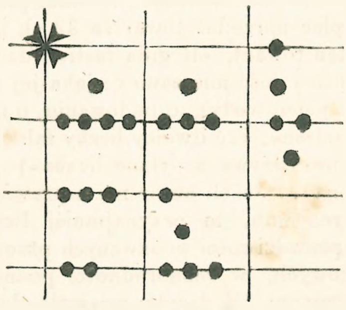
Litani *Arithmetica linearis* napisana w r. 1560 (data przedmowy) dla arcybiskupiéj szkoły szlacheckiéj w Skierniewicach, któréj autor, pochodzący z Nowego Miasta na Rusi (karta 10-ta) w roku 1571, mając lat 40, wstąpił do zakonu Jezuitów, a umarł w Jarosławiu r. 1593. W wydaniu [1]) z r. 1566 (Cracoviae, Siebeneycher, egz. bibl. główněj w Warszawie) arytmetyka obejmuje karty 6 — 33 (liczbowane); obfituje ona w rysunki abaku (jest ich 31), przedstawiające szczegółowo liczenie kamykami. Treść jest taka. Po 4 działaniach na liczbach całkowitych, «de progressione» (karta 21), «de tribus numeris integris» (k. 23), «de tribus numeris fractis» (k. 26), i «de tribus numeris, et societatis temporis; Caput ultimum» (k. 29). Reguła trzech tak na liczbach całkowitych jak i ułamkowych (takież tu krzyże, jak na str. XXI) taksamo traktowana, jak u Kłosa i Wojewódki, szczegółowiéj tylko i nieco wyraźniejszym rozumowaniem opatrzona; w regule spółki autor opowiada wprost otrzymanie wypadków. Rachunki w regułach objaśnione na abakach, które autor pionowymi kréskami dzieli na potrzebną ilość przedziałów; gdy zaś jest liczba wieloraka, to wszystkie jéj części ustawia obok siebie w jednym takim przedziale.

Umyślnie do tego miejsca odsunęliśmy przedstawienie tego, jak na liniach wykonywano cztéry działania, gdyż dopiéro u Herbesta są należyte wyjaśnienia, a liczby dane są większe.

Widzimy tu obok na abaku, jak mówi Kłos, «położoną» liczbę. Na najniższéj «linii» są 4 kamyki («calculi», Herbest); a więc jedności jest 4. Taksamo dziesiątków 3. Na trzeciéj są 2 kamyki, więc 2 setki; nadto nad *trzecią* liniją kamyk, więc 5 *setek;* razem setek 7. Czytelnik łatwo daléj sobie objaśni, że mamy tu nałożoną liczbę 695 305 734. Niekoniecznie trzeba było miéć linije: dość było postawić większe kamyki dla oznaczenia rzędów, by obok nich kłaść liczmany. (Prócz krzyżyków, odpowiadających tysiącom, tysiącom tysięcy..., u Herbesta na przecięciu téjże pionowéj kréski z linijami 6-tą i 11-tą są kółka, oznaczające więc 100 000 i 100 000 × 100 000.)



Dodawanie łatwo sobie objaśnimy na tym rysunku:

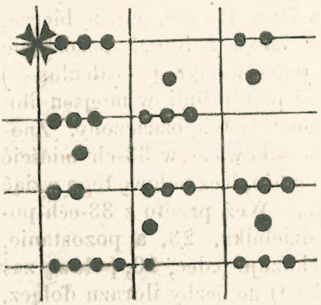


Mamy tu dane dwie liczby: 932 i 818. Aby je do siebie dodać, zbiéram z piérwszéj linii 2 i 3 liczmany; zamiast 5-u kładę równoważny 1-en nad liniją, zamiast zaś 2 nad piérwszą liniją, kładę 1-en na drugiéj. Zbiéram te 5 liczmanów z drugiéj linii

[1]) Prócz jednego bez wymienionego roku, znane są wydania z lat 1561, 4, 6, 9, 77.

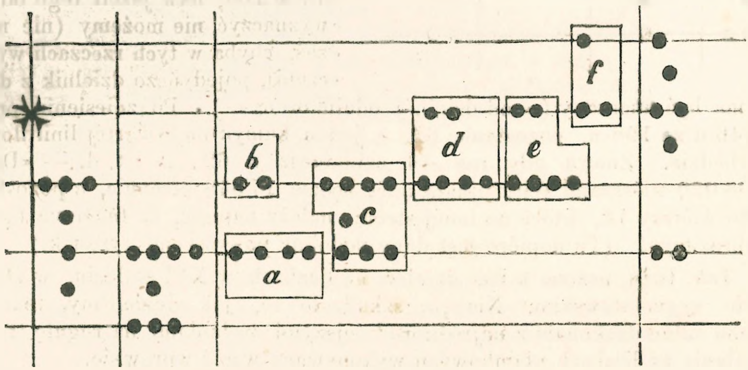
i kładę 1 nad tą liniją. Na trzeciéj linii jest 7; zostawiam 2, a zamiast 5-u kładę 1-en nad liniją. Nakoniec zamiast 2-ch liczmanów nad 3-cią liniją kładę 1-en na 4-éj. Odczytuję otrzymaną sumę: 1750.

Ten zaś rysunek objaśni nam odejmowanie:



Mamy tu dane dwie liczby: 3374 i 836. Aby je od siebie odjąć, zabiéram z czwartéj linii 1 liczman i zamiast niego kładę 2 nad trzecią liniją; jeden z nich i jeden odjemnika znoszą się; usuwam je. Również dlatego usuwam 3 i 3 liczmany z trzeciéj kréski, 2 i 2 z drugiéj; zaś zamiast 1-go nad drugą kréską odjemnéj, kładę 5 na drugiéj i z téj linii usuwam 1 i 1; zostaje na drugiéj 4. Zamiast 1-go z nich stawiam 2 nad piérwszą kréską i t. d. Pozostanie na abaku reszta 2538.

Mając pomnożyć 365 × 48, połóżmy, jak robi Herbest, obie te liczby na liniach (Kłos kładzie jednę, Wojewódka większą):



Tu w trzecim przedziale dodaliśmy obwódki, obejmujące składowe części iloczynu, «Summa producta non collecta», które, według tegoż Herbesta (karta 16), tak otrzymamy. Dotknąwszy palcem piérwszéj linii, nad którą mamy w mnożnéj 5, z uwagi, że 5 × 8 = 40, zgodnie z tym «jak palec wskazuje», położymy 4 kamyki na następnéj, t. j. na drugiéj linii (*a*). «Robiąc krok na drugą liniją» (ze względu na następną wyższą liniją mnożnika), 5 × 4 = 20, dwa kamyki, «jako takie, które ze względu na palec» 20 wyrażą, umieścimy na trzeciéj linii (*b*). Skończywszy z piérwszą liniją mnożnéj, kładziemy palec na drugiéj; mamy na drugiéj (wraz z tym, co nad drugą) 6. Trzymając tedy właściwie palec, odkładamy 6×8 = 48 tak (*c*), jakby na téj linii, gdzie palec, były jedności, i «znowu, po podniesieniu palca na trzecią liniją», 6×4 = 24, «które, jak wskazuje (—teraz—) palec, na liniach się oznacza» (*d*). I t. d. Zebrawszy te częściowe iloczyny razem, t. j. wykonawszy to dodawanie na liniach, otrzymujemy ostateczny iloczyn 17 520.

Dzielenie Herbest tak przeprowadza (drugi z dwu przykładów). «We «wszystkich poematach Wirgilijusza 798 020 wiérszy; jeżeli na oddzielnych «stronnicach po 46 wiérszy napiszesz, to zapomocą dzielenia dowiész się, ile «stronnic objąć może te wiérsze. Ilość wszystkich wiérszy, jako części ca-

«łości, powinna być dzielną; 46, jedna część całości, dzieli. Ile więc razy «dzielna zawiera dzielnik, tyle wskazanych będzie potrzebnych stronnic z o«wymi wierszami. Położony zatym palec na szóstéj linii, gdy 46 w 7-u nie «mieści się, ani jego połowa, zejdzie na liniją piątą, gdyż tam już 46 w 79 «wejść może. Po wzięciu więc raz «46-u z 79-u (to zaś, co się bierze, «zawsze znika z linij), pozostanie «33, a jeden kamyk (—calculus—) «na owéj piątéj linii w miejscu ilo«razu niech będzie oznaczony. Zno«wu 46 całkowicie w 33-ch mieścić «się nie może, lecz połowę tego wziąć «możesz. Weź przeto z 33-ech po«łowę dzielnika, 23, a pozostanie, «jak wskazuje palec, 10, połowę zaś «kamyka [1]) do liczby ilorazu dołącz. «Na czwartą następnie liniją przeło«żywszy palec, znajdziemy, ile razy «46 w 108, lecz jeżeli tego odrazu «wyznaczyć nie możemy (nie mogą «zaś, chyba w tych rzeczach wyćwi«czeni), pojedyńczo dzielnik z dziel«néj ma być unoszony (—od dzielnéj odejmowany—). Po zniesieniu przeto «raz 46-u ze 108-u, pozostanie 62, a jeden kamyk na czwartéj linii ilorazu «przybędzie. Znowu gdy raz 46 zabierzesz z 62...» i t. d. — «Dzieło «z 798 020 wierszami Wirgilijusza mieć będzie 17 348 stronnic, a pozostanie «nadto wierszy 12, które na innéj stronie należy napisać, co także na figurze «wyobrazimy». (Tu dopiéro jest dany podobny powyższemu rysunek.)

Tak tedy uczono u nas działań na liczbach w XVI stuleciu, w złotym okresie zygmuntowskim. Nie przeszkadzało to, jak widzieliśmy, temu, że radzono sobie doskonale z najróżnorodniejszymi zadaniami na regułę trzech, a działania na liczbach ułamkowych wykonywano wcale wprawnie.

Wprawdzie w następnych stuleciach wydawnictwo arytmetyk «linijowych» prawie w zupełności ustaje, co wskazuje, że w wieku XVII powszechnie już do naszych szkół zaprowadzono arytmetykę «cyfrową», jednak nie tak łatwo było w zupełności wyrugować z użycia kamyki i linije. Dowodu na to dostarcza ostatni rozdział arytmetyki ks. Józefa Marquarta, Scholarum Piarum, stanowiącéj część pierwszą jego dzieła: *Nauka matematyczna...*, w Wilnie w r. 1772 (bibl. główna w War.). Dawszy temu rozdziałowi (str. 115—121) tytuł: «Arytmetyka liczmańska», autor zajmuje się przedstawieniem liczby i wykonywaniem 4 działań zapomocą liczmanów, kładzionych nie na linijach narysowanych, lecz obok «znaków odmiennych» (jakby owych większych kamyków u Herbesta; por. wyżéj). Kończy zaś autor ten rozdział taką uwagą: «Używają Arytmetyki liczmańskiey żydzi w rachunkach swoich, «dla tego, że jest nieomylną, gdy się z uwagą czyni, pamięci w robocie nie «fatyguje, zwłaszcza nabywszy zręczności w odbywaniu wszelkich rachunków.»

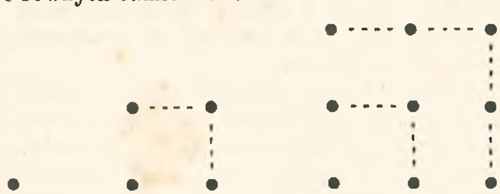
---

[1]) T. j. kamyk pod tą liniją, na któréj wtedy jest palec.

Najdawniejsze ślady świadomego i systematycznego badania własności liczb spotykamy w świecie greckim.

Według świadectwa Arystotelesa «Pitagorejczycy pierwsi matematykę naprzód posunęli». Aristoksen wyraźniej tak o tymże mówi: «Pitagoras arytmetyce jakby największą nadawał ważność i przez to głównie naprzód ją posunął, że ją postawił ponad potrzeby [1]) kupieckie i wszelkie rzeczy rozważał pod postacią liczby». Mogły więc być przedtym pewne badania, a przynajmniej odpowiednie spostrzeżenia pewnych własności liczb, ale najdawniejsze teoretyczne dociekania w tym kierunku poczynają się od Pitagorasa z Samos. — Urodził się on w r. 580 (według innych w r. 569) przed Chr., przybył do Italii w r. 540 (inni twierdzą: w r. 510), założył tam szkołę w Krotonie, a umarł w r. 500 (inni przyjmują, iż umarł wkrótce po r. 509, a nawet w r. 470). Szkoła zaś przeżyła swego twórcę całe pół wieku. Nie przytaczając tu mniej lub więcej prawdopodobnych opowieści o życiu tego mędrca, jakie podają przedstawiciele t. z szkoły nowopitagorejskiej, o sześć stuleci później w Aleksandryi powstałej, winniśmy tu zaznaczyć, że według świadectwa Izokratesa, którego działalność piśmiennicza przypada około r. 393 przed Chr., jak i według wzmianek wielu innych autorów, Pitagoras przebywał czas jakiś w Egipcie i prawdopodobnie przyswoił sobie ówczesną wiedzę tamtejszych kapłanów. Ślady bowiem wyraźne dokładnej znajomości urządzeń tego stanu w Egipcie, tak ściśle spojonego, a tak zamkniętego w sobie, przejawiają się w przepisach wewnętrznych życia, a poczęści i w badaniach filozoficznych, jakie cechują szkołę Pitagorasa. Może więc i cała jego nauka pozostawała w związku z tym, co było przedmiotem badań mędrców egipskich. Przebywanie zaś Pitagorasa w Babilonie jest rzeczą nader wątpliwą.

Nie zdaje się, aby Pitagoras zajmował się rozwiązywaniem lub objaśnianiem zadań arytmetycznych z życia powszedniego lub kupieckiego. Przeciwnie, wszystko to, co według najnowszych badań krytycznych, Pitagorasowi i jego szkole niewątpliwie przypisane być może, odnosi się do teoretycznych badań własności liczb. A więc przedewszystkim: podział liczb na parzyste i nieparzyste, a pierwszych na parzysto-parzyste (podzielne przez 4) i parzysto-nieparzyste; podział liczb na «kwadratowe» i niekwadratowe. Następnie przeróżne sumowania szeregów liczb: suma początkowych liczb nieparzystych po sobie następujących jest zawsze liczbą kwadratową, co zręcznie było objaśniane zapomocą zawsze kwadratowej siatki punktów, powiększającej się stopniowo przez dodawanie coraz nowego «gnomonu», t. j. następnej liczby nieparzystej, przedstawionej szeregiem punktów, tworzących jakby kąt prosty o równych ramionach:



i t. d.;

suma początkowych po sobie następujących liczb parzystych jest liczbą «nierównoboczną», t. j. iloczynem dwu czynników, różniących się o jedność:

---

[1]) T. j że zajmował się nią nie ze względu na jej zastosowania przy rozwiązywaniu zadań, odnoszących się do stosunków kupieckich.

$2=1\times2$; $2+4=6=2\times3$; $2+4+6=12=3\times4$; $2+4+6+8=20=4\times5$ i t. d.; suma początkowych liczb naturalnych jest liczbą «trójkątną». PITAGORAS miał określić stosunek do przyjaciela przez liczby 220 i 284, które posiadają tę własność, iż suma dzielników jednéj liczby od niéj mniejszych jest równa drugiéj i nawzajem (zob. § 15, us. 6); podobne liczby nazwano «zaprzyjaźnionymi». Nakoniec średnia arytmetyczna i średnia gieometryczna dwu liczb były określane tak, jak to obecnie się czyni, a średnia harmoniczna (zob. § 28, us. 20) dwu liczb, jako taka liczba, która od jednéj z danych jest mniejsza o taką samę jéj część, o jaką część drugiéj jest od téj drugiéj większa (t. j. liczba h jest średnią harmoniczną dwu liczb a i b, jeżeli jednocześnie

$$h=a-\frac{a}{n} \quad \text{i} \quad h=b+\frac{b}{n},$$

skąd, rugując n, otrzymujemy dzisiejsze jéj określenie). Wspomniany już wyżéj (str. XVII) JAMBLICHUS przyznaje nadto PITAGORESOWI używanie proporcyj ciągłych arytmetycznéj i gieometrycznéj, proporcyi harmonicznéj, jak również proporcyi «muzycznéj», którą tworzą dwie dane liczby i ich średnie arytmetyczna i harmoniczna, np.

$$6:9=8:12 \qquad (\text{ogólnie } a:\frac{a+b}{2}=\frac{2ab}{a+b}:b),$$

o którejto proporcyi, zwanéj późniéj także «doskonałą» (jako gieometryczna, w którą wchodzą liczby powstałe z proporcyj arytmetycznéj i harmonicznéj), miał PITAGORAS w Babilonie się dowiedzieć.

Co do przypisywanego również PITAGORASOWI odkrycia, iż wszystkie harmoniczne dla naszego ucha tony są w związku ze stosunkami liczb najprostszych, zaznaczymy tu tylko, że np. $\frac{1}{2}$ długości struny, wydającéj pewien ton, wyda ton o oktawę, $\frac{2}{3}$ zaś jéj długości wyda ton o kwintę wyższy, a długości strun tonów znanego akordu: C, G, C, odpowiadają liczbom 1, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, tworzącym proporcyją harmoniczną, gdyż

$$(1-\tfrac{2}{3}) : 1=(\tfrac{2}{3}-\tfrac{1}{2}) : \tfrac{1}{2}.$$

Na podobnéj drodze prowadzone badania, niezależnie od wpływu na rozwój nauki o proporcyjach, doprowadzały pitagorejczyków do wielu teoretycznych wyników, które musiały się wyraźnie zaznaczyć, jeżeli za czasów wzmiankowanego wyżéj ARISTOKSENA z TARENTU, ucznia ARYSTOTELESA (384—322), powstała szkoła empiryczna muzyków, jako przeciwstawienie pretensyjonalnym muzykom-matematykom. — Co się tyczy znanego wyrażania przez pitagorejczyków istoty wszelkich rzeczy i różnych pojęć zapomocą liczb, jak i wogóle całéj ich mistyki liczebnéj, to te kwestyje tu opuszczamy, jako nie należące właściwie do naszego przedmiotu. —

Badania gieometryczne, których początek odnieść należy do TALESA z MILETU (640—548, lub dłużéj) i jego szkoły, wielce pobudzone przez PITAGORASA i jego uczniów, były wciąż daléj z wielkim zamiłowaniem przez Greków uprawiane. Doprowadzało to ich do coraz nowych zastosowań własności proporcyj, a wszczególności do wyczerpującego rozważania tworzenia nowych proporcyj z danych, jak również do rozważania proporcyj, w których oba wyrazy jednego z dwu stosunków były liczbami kwadratowymi lub liczbami sześciennymi, co, wrazie gdy oba wyrazy drugiego stosunku nie są takimiż liczbami, przedstawia w rzeczywistości wprowadzenie do badań liczb niewymiernych, które też Grecy dokładnie pojmowali. Dziś, traktując odpowiednie kwestyje gieometryczne nieco inaczéj, nie kładziemy na podobne proporcyje takiego nacisku, jak to gieometrowie greccy czynili. — Zauważymy tu tylko, że własności, iż między dwiema liczbami kwadratowymi znajduje się jedna liczba dwuwymiarowa («powierzchniowa»), a między dwiema sześciennymi dwie trójwymiarowe («bryłowe»), tworzące proporcyją z liczbami danymi (to jest: $a^2 : ab = ab : b^2$, zaś $a^3 : a^2b = ab^2 : b^3$, lub $a^3 : ab^2 = a^2b : b^3$), starożytni nazywali twierdzeniami platońskimi (życie PLATONA [1]) od 429 do 348), zaś HIPPASOS, pitagorejczyk, ARCHITAS Z TARENTU (430—365), EUDOKSYJUSZ Z KNIDOS (408—355), oraz TEMNONIDES i EUFRANOR (bliżéj nieznani) doprowadzili ilość «mezotet» (μεσότητες), szczególnych proporcyj [ἀναλογία [2]), analogija] z trzech pewnych liczb utworzonych, do 10-u (t. j. prócz proporcyj ciągłych arytmetycznéj i gieometrycznéj, oraz proporcyi harmonicznéj, rozróżnili jeszcze następujące proporcyje mające miejsce między odpowiednimi każdym razem trzema liczbami, które ogólnie oznaczymy literami a, b i c [3]):

$$a:c=(b-c):(a-b);\quad b:c=(b-c):(a-b);\quad a:b=(b-c):(a-b);$$
$$a:c=(a-c):(b-c);\quad a:c=(a-c):(a-b);\quad b:c=(a-c):(b-c);$$
$$b:c=(a-c):(a-b).$$

Że badanie własności proporcyj Grecy prowadzili nietylko ze względu na zastosowania gieometryczne, jak również, że badania własności liczb piérwszych względem siebie, a także poszukiwanie największego spólnego dzielnika i najmniejszéj spólnéj wielokrotnéj doprowadzili do takiéj doskonałości, iż do odpowiednich wówczas należycie udowodnionych twierdzeń, jak i metod postępowania, niéma dziś nic do dodania, tego dowodzą *Elementa* (στοιχεῖα) EUKLIDESA (około r. 285 przed Chr.), piérwszego przedstawiciela szkoły aleksandryjskiéj. Według PROKLUSA (410—485 po Chr.), «EUKLIDES, który zebrał *Elementa*, wiele rzeczy znalezionych przez EUDOKSYJUSZA w całość uporządkował, wiele z tego, co TEOTETES zaczął, do końca doprowadził, a nadto to, co przez poprzedników powierzchownie było udowadniane, na gruntownych oparł dowodach». W większości wydań *Elementów* [4]) jako przeznaczonych do nauki gieometryi, są opuszczane księgi VII, VIII i IX, obejmujące różne podania arytmetyczne, a podawane są tylko księgi I—VI, XI i XII. Takim też jest polskie tłomaczenie JÓZEFA CZECHA (Wilno, 1807; 2-gie wyd. 1817). Aby czytelnikowi choć częściowo podać możność zaznajomienia się z tym, jakie już kwestyje o podzielności liczb EUKLIDES w księgach arytmetycznych rozważa, przy odpowiednich ustępach rozdziału V niniejszéj książki znajdują się cytaty z *Elementów*. Jak zaś EUKLIDES drobiazgowo bada proporcyje, można częściowo przekonać się łatwo, czytając ks. V w przekładzie CZECHA. Dodamy tu tylko, że w odpowiednich dowodzeniach liczby są przedstawiane zapomocą długości linij prostych (całe jednak rozumowanie jest tak prowadzone, iż bes-

---

[1]) W «Prawach» zaznacza, iż liczba 5040 jest podzielna przez 59 różnych liczb, między którymi są wszystkie liczby od 1 do 10.

[2]) BOECYJUSZ ten wyraz przetłomaczył jako: «proportionalitas».

[3]) Takie proporcyje będą tworzyć kolejno np. liczby (a, b, c): 6, 5, 3; 5. 4, 2; 6, 4, 1; 9, 8, 6; 9, 7, 6; 7, 6, 4; 8, 5, 3.

[4]) Rospowszechnione w różnych językach wydania mają za podstawę piérwszą edycyją tekstu greckiego w Bazylei w r. 1533 i wraz z nią posiadają też same, wciąż powtarzające się, lub nieco zmienione ustępy niezrozumiałe, jako grzeszące pewną niedokładnością. Dopiéro PEYRARD znalazł w biblijotece paryskiéj, pochodzący ze zbiorów watykańskich, z IX wieku odpis tekstu greckiego, znacznie poprawniejszy, który wraz z tłomaczeniami łacińskim i francuskim ogłosił w Paryżu w r. 1814—1818.

pośrednio do liczb oderwanych odniesione być może), oraz zauważymy, że gdy ks. V poświęca rozważaniu proporcyj, zachodzących między wielkościami, to proporcyjonalność liczb występuje dopiéro od ks. VII, co tym więcéj dziwi, że, choć według pojęć greckich nie wszelkie wielkości mogły być objęte przez liczby, to jednak, jak Arystoteles wyraźnie mówi: «wielkości w szczególnych przypadkach mogą być liczbami». Może tradycyja ówczesna, z którą Euklides się liczył, nie dozwoliła mu złączyć tych dwu wykładów w jeden, a może pozostawił księgę V jako całość, obmyśloną przez Eudoksyjusza, na co wskazuje Pappus (wiek IV po Chr.). Zwrócimy tu jeszcze uwagę na Euklidesa określenie liczby doskonałéj i twierdzenie o takich liczbach (por. § 15, us. 6). —

Ułamki często się spotykają u pisarzów greckich. Najczęściéj oni przedstawiają je w ten sposób, iż, napisawszy liczbę (por. str. 17), którą nazywamy licznikiem, dodają u góry z prawéj strony akcent, a po napisanéj liczbie, którą my umieszczamy w mianowniku, dwa akcenty, i takie wyrażenie mianownika piszą dwa razy obok siebie. Jeżeli przedstawiali ułamek o liczniku 1, to pisali sam mianownik i raz tylko, a szczególnych znaków używali dla przedstawienia ułamków $\frac{1}{2}$ i $\frac{2}{3}$. Często jednak wyrażają, podobnie jak Egipcyjanie (por. str. XIII), ułamki o liczniku różnym od jedności jako sumę ułamków, mających w liczniku jedność; tak postępują miernicy greccy, jak również [1]) Archimedes (prawdopodobnie 287—212) przy podnoszeniu całkowitych z ułamkami do kwadratu. — Klaudyjusz Ptolomeusz (około r. 140 po Chr.) w *Wielkim zebraniu*, znanym pod nazwą przejętą od Arabów, «*Almagest*» (będącą skróceniem i modyfikacyją tytułu greckiego), używa ułamków sześćdziesiątkowych pochodzenia babilońskiego (por. str. XV), dzieląc cząstki (360-te części okręgu koła i 120-te średnicy), τμήματα, na 60 równych części, zwanych późniéj po łacinie «partes minutae primae», a te jeszcze na 60, «partes minutae secundae» (skąd: minuty, sekundy i późniéj tercyje), a ułamki te pisze nie oznaczając mianowników. [Rozważanie takich ułamków, tak w astronomicznych, jak i w innych rachunkach, trwało powszechnie aż do wieku XVI (a u nas jeszcze i wieku XVII); używano ich tak, jak teraz dziesiętnych, np. dla wyrażania ilorazu lub pierwiastka kwadratowego, wyliczenia zaś ułatwiał «canon vel tabula sexagenorum». Przy pisaniu takich ułamków postępowano wciąż jednostajnie, tak iż np.

$$\overset{\text{O}}{2}\ \overset{\text{I}}{37}\ \overset{\text{II}}{54}\ \overset{\text{IV}}{8} \text{ oznaczało } 2+\frac{37}{60}+\frac{54}{60\times 60}+\frac{8}{60\times 60\times 60\times 60}.$$

Ułamki te w wieku XVI zaczynają ustępować dziesiętnym, które początkowo pisano tak, jak owe sześćdziesiątkowe; np. ułamek 2,3456 pisano naprzód

$$\overset{\text{O}}{2}\ \overset{\text{I}}{3}\ \overset{\text{II}}{4}\ \overset{\text{III}}{5}\ \overset{\text{IV}}{6}, \text{ później } 23456^{\text{IV}}, \text{ albo } 2{,}3456^{\text{IV}}.\ ]$$

Aleksandryja nie była siedliskiem wyłącznie uczonych i uczących się Greków. Owszem, prócz nich, Egipcyjanie, Asyryjczycy, Indusowie, Żydzi przyjmowali czynny udział w naukowym życiu szkół tamtejszych. Stąd pochodzi pewne wzajemne oddziaływanie literatury naukowéj jednych z tych narodów na inne, i dlatego «szkole aleksandryjskiéj» nie można przyznawać czysto greckiego charakteru. — Jeden z objawów takiego wzajemnego oddziaływania widzieliśmy w ułamkach sześćdziesiątkowych. Innym jest ten, iż po-

[1]) O sposobie Archimedesa wyrażania wielkich liczb zob. str. 26.

czątkowe litery alfabetu, których Indusowie u siebie używali w wieku II po Chr., przez Aleksandryją przechodzą do Rzymu i występują tam jako wzmiankowane wyżej «apices» Boecyjusza.

Nie możemy tu szczegółowo śledzić dalszych badań nad własnościami liczb, z żywym zajęciem i wytrwale prowadzonych przez wielu aleksandryjskich uczonych, czego wyraźne i dość liczne ślady się zachowały. Wspomnimy tylko o trzech najwybitniejszych w tym kierunku badaczach. — Nikomachus z Gerazy (prawdopodobnie z Arabii; około r. 100 po Chr.), należący do głośnej szkoły nowopitagorejczyków, napisał sławne dwie księgi *Wstępu do arytmetyki*, obejmujące wyniki dociekań dalej prowadzonych według wskazówek pozostałych po szkole Pitagorasa (między innymi nowymi rzeczami występują tu liczby «wielokątne» i «bryłowe», czyli tak zwane «figuryczne»), któreto dzieło było długo przedmiotem studyjów wielu uczonych (w tej liczbie Boecyjusza). — Teona ze Smyrny (około r. 130), również nowopitagorejczyka, nietylko zajmują podobne powyższym rostrząsania, ale nadto ta własność liczb kwadratowych, iż: gdy jest dana jakakolwiek liczba kwadratowa, to albo ona, albo liczba o jedność mniejsza, jest jednocześnie podzielna przez 3 i 4, lubteż z tych dwu liczb jedna jest podzielna przez 3, a druga przez 4; odpowiednio więc do tego, można liczby kwadratowe podzielić na cztery grupy. W tym twierdzeniu z zakresu obecnie tak rozwiniętej nauki o «resztach kwadratowych», spoczywa zarodek oddzielnej gałęzi badań matematycznych, którą dziś nazywamy teoryją liczb. — Diofantos z Aleksandryi (co do epoki jego życia bardzo sprzeczne są wskazówki; najprawdopodobniej żył na początku wieku IV) w swej *Arytmetyce* zajmuje się takimi zadaniami liczebnymi, które go doprowadzają do wypisywania zapomocą skróceń w odpowiednim wysłowieniu istotnych równań pierwszych cztérech stopni tak z jedną, jak i z dwiema niewiadomymi; rozwiązania jednak tych równań, tylko w liczbach wymiernych, wynajduje Diofantos sposobami nie mającymi cechy metodycznego postępowania. W takichto zadaniach znajdują się ustępy, w których jest mowa o szczególnych własnościach liczb. Tak np. całkiem ogólnie Diofantos mówi o tym, że każda liczba kwadratowa może być nieskończenie wielu sposobami wyrażona jako suma dwu kwadratów (oznaczywszy ogólnie daną liczbę kwadratową przez a^2, można to tak przedstawić:

$$a^2 = \left(\frac{2m}{m^2+1} \cdot a\right)^2 + \left(\frac{m^2-1}{m^2+1} \cdot a\right)^2,$$

przy jakimkolwiek m). W innym miejscu jest mowa o wyrażeniu iloczynu dwu czynników (5×13), z których każdy jest sumą dwu kwadratów, dwoma sposobami jako sumy dwu kwadratów,

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2 = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2.$$

Okolicznościowo również jest zaznaczone, że żadna liczba postaci $4 . a + 3$ nie może być sumą dwu kwadratów. Różnica dwu liczb sześciennych jest zawsze sumą dwu takichże liczb. I t. d. Ogłoszenie drukiem dzieła Diofantosa w łacińskim przekładzie w końcu wieku XVI, a w poprawniejszym w początkach wieku następnego, wywołało w wieku XVII głębsze badania własności liczb, które w drugiej połowie wieku XVIII wytwarzają oddzielną gałąź matematyki, teoryją liczb, wciąż już rozrastającą się wynikami dociekań najznakomitszych matematyków. —

Jak Indusowie rachowali przed powstaniem u nich (por. str. 18) systematu pozycyjnego, t. j. przed epoką wprowadzenia zera, tego pewnych śladów dziś niéma. Późniéj zaś spotyka się u nich odejmowanie tak wykonywane, jak my teraz je przeprowadzamy (niekiedy według sposobu dziś używanego we Francyi; zob. str. 51, odsyłacz). Mnożyli zaś liczby różnymi sposobami. W jednym z nich nie zaczynają od najmniejszych części, lecz przeciwnie, od największych, co jest usprawiedliwione tym, że jeszcze dotąd wykonywają rachunki pręcikiem na tablicy posypanéj piaskiem; zastępywanie więc jednych cyfr innymi nie przedstawia w tym razie niedogodności. Inny z ich sposobów mnożenia wyłożymy niżéj, mówiąc o podręczniku Brożka. Dzielenie wykonywano w sposób dosyć zawikłany. Sprawdzają dodawanie, odejmowanie i mnożenie zapomocą próby przez 9 (§ 13, us. 17). Przedstawiając ułamki, piszą licznik nad mianownikiem, nie oddzielając ich od siebie poziomą kréską, a astronomowie używają ułamków sześćdziesiątkowych, nie pisząc mianowników. Podnoszenie do potęg i wyciąganie pierwiastków (kwadratowych i sześciennych) uważają za działania elementarne, których sześć liczą.

Badania matematyczne w zabytkach piśmienniczych dawniejszych występują u Indusów tylko jako przygotowania do astronomii i astrologii, lubteż jako ustępy okolicznościowo wtrącone. Najważniejszymi dla nas pomnikami wiedzy dawnéj indyjskiéj są dzieła astronomiczne, które pozostawili: Arjabhatta (urodzony w r. 476 po Chr.), Brahmagupta (ur. w r. 598) i Bhaskara Akarja (ur. w r. 1114). — Piérwszy z nich zajmuje się zadaniami na regułę trzech, tak «prostą», jak i «odwrotną»; dwaj ostatni rozwiązują także zadania na regułę trzech złożoną. Zadania na procent składany podaje już Arjabhatta; a u tamtych występują zadania na regułę mieszaniny i znane zadania o napełnianiu studni. Bhaskara używa fałszywego założenia jako wyrobionéj już metody. Wszyscy zajmują się zadaniami na «odwrócenie», w których porządek, w jakim należy wykonać działania wskazane dla wyznaczenia liczby szukanéj, jest wprost przeciwny zachowanemu w wypowiedzeniu zadania. Tak np. Bhaskara: «Piękna dzieweczko z błyszczącymi oczyma, «jeżeli dobrze pojmujesz prawdziwą metodę odwrócenia, to mi powiedz, jaka«to jest liczba, która pomnożona przez 3, następnie o $\frac{3}{4}$ iloczynu powiększona, «przez 7 podzielona, o $\frac{1}{3}$ ilorazu zmniejszona, przez siebie samę pomnożona, «o 52 zmniejszona, wskutek wyciągnięcia pierwiastka kwadratowego, dodania «8-u i podzielenia przez 10, wydaje 2?» (Odp. 28). — Wszyscy trzéj wymienieni pisarze sumują szeregi kwadratów i sześcianów liczb naturalnych, Brahmagupta sumuje liczby trójkątne, a Bhaskara podaje wyrażenia na ilość kombinacyj oraz na ilość przemian (tych ostanich także w przypadku częściowo jednakowych elementów). — Zaznaczymy jeszcze dodatkowo, że, głównie w dziełach wymienionych trzech pisarzów, występuje gieometryja indyjska rozwijająca swe metody niezależnie od metod greckich, że algiebra powstała u Indusów i rozwijała się świadomie, t. j. doszła do wytworzenia pewnych jednostajnych metod postępowania, że nakoniec zastosowanie algiebry do gieometryi i nawzajem również narodziło się w krainie Indusu i Gangesu i doprowadziło tamtejszych uczonych do poważnych wyników.

Umyślnie tu przytoczyliśmy te szczegóły, aby uzasadnić pojęcie w ostatnich dopiéro czasach poczynające się rospowszechniać, iż arabscy matematycy, wzmiankując w swych pracach, iż wykładają naukę indyjską, i przedstawiając systemat pozycyjny pisania liczb jako pomysł Indusów, nie czynili tego w celu otoczenia swych dzieł urokiem dalekiego wschodu, lecz w owych zaznaczeniach dali tylko dowód swéj chwalebnéj sumienności. Niesłusznie więc postępowano przez tyle wieków, upatrując kolebkę algiebry u Arabów, a arabskim mianując powszechny teraz sposób pisania liczb. — Co się zaś cyfr teraźniejszych tyczy, to one są tegoż pochodzenia, co «apices» Boecyjusza: powstały z początkowych liter alfabetu, używanego w Indyjach w II stuleciu po Chr. (Zero tamże około r. 400 zaczęło być w użyciu.) Z Aleksandryi rospowszechniły się one także na północy i zachodzie Afryki. W wieku VIII Arabowie znali nietylko owe cyfry [w tych postaciach, w jakich je oni pisali (odmiennych od używanych u nich na wschodzie), nazywają się one «gubar», piaskowe, prawdopodobnie od posypywanéj piaskiem tablicy Indusów (str. XXXII)], ale także zero [sanskryckie «sunja», a arabskie «as-sifr» (skąd cyfra; zob. str. 19) oznacza: puste, próżne]. W Rzymie, choć znano owe litery (cyfry), «apices», i posługiwano się nimi, pisząc np. «6 razy 9 jest LIV», nie zdołano jednak wpaść na pomysł oznaczania osobnym znakiem linii, niezajętéj na abaku przez «apices» (por. str. XVIII). Próżno więc w Rzymie w używaniu «apices» upatrywać źródła systematu pozycyjnego. — Dodać można do téj kwestyi to jeszcze, że Arabowie, którzy pisali od ręki prawéj ku lewéj (Indusowie przeciwnie) i w tym także kierunku (oile niewypisywali liczb wyrazami [1]) całymi), pisali pierwotnie liczby (poczynając od części największych) przy pomocy liter swego alfabetu (por. str. 17), musieli, przejmując systemat pozycyjny, znaleść go już należycie wyrobionym, przyswoić go sobie nie oddzielnie, lecz wraz z całym szeregiem zastosowań, prostotą metody imponujących, kiedy go nie zmodyfikowali zgodnie z kierunkiem swego pisma. Jedynym tylko piętnem tego, żeśmy ten systemat przedstawiania liczb wzięli nie wprost od Indusów, lecz przez pośrednictwo Arabów, jest liczenie miejsca zajmowanego przez cyfry od prawéj ku lewéj.

Epoka przeniesienia stolicy kalifów do Bagdadu (768), leżącego pośrodku miedzy dwiema krainami, z których jedna miała wspaniałą przeszłość naukową, a druga ówcześnie pielęgnowała naukę u siebie i daléj ją rozwijała, jest początkiem oddziaływania indyjskiéj i greckiéj literatury na kształtujące się życie naukowe potężnych wtedy wyznawców proroka, którymto życiem troskliwie się opiekowali kalifowie z rodu Abbasidów, Almanzur, Harun Arraszyd, Almamun. Jeszcze w VIII stuleciu Arabowie zaznajomili się z astronomiją i arytmetyką Indusów, a w następnym już pracowicie tłomaczą dzieła Ptolomeusza, Euklidesa, Apolonijusza, Archimedesa, Diofantosa i niektórych późniejszych uczonych aleksandryjskich, oraz sami już budują obserwatoryja w Damaszku i Bagdadzie i prowadzą daléj wyliczenia astronomiczne i gieodezyjne. Przy tych rachunkach posługują się systematem pozycyjnym, który nazywają «indyjskim», choć, wpisując wypadki ostateczne do swych tablic, uciekają się do abecadłowego wyrażania liczb. We wszystkich zaś podręcznikach arabskich do nauki rachunków, w których są znaki liczebne, panuje wyłącznie systemat pozycyjny.

Autor sławnego pierwszego traktatu o algiebrze i kierownik wielkich prac astronomicznych, podjętych na zlecenie kalifa Almamuna, Muhammed ibn Muza Alchwarizmi (t. j. M., syn Muzy, z prowincyi dziś nazywanéj Charizm, albo Chiwa), który żył w pierwszéj ćwierci wieku IX, ułożył podręcznik arytmetyczny, o którym doniedawna tyle tylko wiedziano, że «księga o sztuce

---

[1]) Używane przez Arabów wschodu osobne znaki liczebne, zwane «diwani» mają być skróceniami odpowiednich liczebników.

«rachowania celuje ponad innymi krótkością i przystępnością, a okazuje du«cha i bystrość Indusów w znakomitych wynalaskach». Znaleziony w r. 1857 w biblijotece w Cambrigde łaciński rękopis (*Trattati d'aritmetica*, *pubblicati da* B. Boncompagni, Rzym, 1857, *N. 1*) pod tytułem: *Algoritmi de numero Indorum*, okazał się tłomaczeniem z początku wieku XII owéj zaginionéj arytmetyki Alchwarizmi. W tym tytule umieszczony, a znajdujący się także na początku tekstu, wyraz «Algoritmi» jest przeróbką przytoczonego przydomka Muhammeda. Ten wyraz, jakotéż inne jego wersyje: algorithmi, algorismi, alchaurismi i t. d., a późniéj: algorithmus, algorismus (najdziwaczniéj objaśniane; jedno objaśnienie przytoczymy niżéj z Sacro Busco) były używane na oznaczenie nauki rachowania na cyfrach [czyli, według wyrażenia Wojewódki (dedykacyja): «jako Niemcy mówią na piorku»], wskutek czego wykonywających rachunki na cyfrach i wykonywających na abaku nazywają odpowiednio: algorytmistami i abacistami. [Widzieliśmy, że Jan z Łańcuta, Kłos, Wojewódka przez algorytm rozumieją wogóle arytmetykę. Obecnie używa się w nauce wyraz algorytm na oznaczenie powtarzającego się postępowania w rachunku, które staje się [1]) regułą.] Z téj arytmetyki Alchwarizmi przytoczymy tu tylko to miejsce, w którym on doskonale mówi o zerze, gdy w liczbie po oddzieleniu dziesiątków nic nie pozostaje: «jeżeli nic nie pozostanie, «kładź koło, żeby miejsce nie było próżne, lecz niech będzie to koło, które «je zajmuje, aby, gdyby (miejsce) próżne było, nie zmniejszały się miejsca «i drugie nie mogło być piérwszym».

Arabowie widocznie bardzo wielki kładli nacisk na rospowszechnienie w masach nauki rachunków. Dowodzi tego, popiérwsze, wielka bardzo ilość dzieł, które o niéj napisali, a następnie, że w późniejszych arytmetykach widocznie mają na myśli szérszy zastęp uczących się, gdyż zwykle opuszczają potrzebną tylko astronomom i uczonym wogóle rzecz o wyciąganiu pierwiastka kwadratowego i sześciennego, jakotéż o ułamkach sześćdziesiątkowych (co w początkowych arytmetykach jest szczegółowo wykładane), a zajmują się tylko dodawaniem, odejmowaniem, społowianiem, podwajaniem (to działanie zwykle po poprzednim; taksamo Alchwarizmi), mnożeniem (początkowo tylko takim, jak u Indusów, od większych części), dzieleniem liczb całkowitych (różnymi metodami), często próbą przez 9 («indyjską»), czterema działaniami na ułamkach, które tak piszą, jak Indusowie (str. XXXII), wreszcie wskazówkami do rozwiązywania zadań, między którymi jest metodycznie używana reguła fałszywego założenia, zwana w późniejszych przekładach łacińskich albo regula duorum falsorum, albo regula augmenti et deminutionis. Już zaś Alchwarizmi w swéj algiebrze mówi o regule trzech, którą mógł tylko przejąć od Indusów. Widzimy więc, że arytmetyka Arabów jest oczywiście pochodzenia indyjskiego.

Choć zajęci głównie astronomiją, gieometryją i algiebrą, Arabowie prowadzili daléj badania teoretyczne własności liczb, przejęte od Greków i Indusów. Nie mogąc tu przytaczać niektórych istotnie ciekawych własności, przez Arabów zaznaczonych i dowodzonych, zrobimy tu tylko wzmiankę o dwu szczegółach mniejszéj naukowéj ważności, lecz będących w pewnym związku

[1]) Tak np. mówimy, że: poszukiwanie największego spólnego dzielnika dwu liczb, wyrażanie ułamka zwyczajnego w postaci ułamka ciągłego, rozwiązywanie w liczbach całkowitych równań nieoznaczonych stopnia 1-go z dwiema niewiadomymi polegają na tym samym algorytmie, albo np. algorytm największego spólnego dzielnika, algorytm wielkości nieskończenie małych i t. d.

z poprzednio już przytoczonymi pojęciami. Tabit ibn Kurra (836—901) podaje przepis tworzenia pary liczb zaprzyjaźnionych z trzech liczb pierwszych oznaczonéj postaci (por. str. 373). Najdawniejszy ślad tak zwanych «kwadratów magicznych» (t. j. takich ustawień jakby na polach szachownicy, tworzących odpowiedni kwadrat, kwadratów początkowych liczb naturalnych, iżby tak suma liczb każdego poziomego i pionowego rzędu, jak i suma liczb w każdéj przekątnéj, była ta sama) jest rozważany w pismach arabskich już w X stuleciu, gdy w Bizancyjum występuje w wieku XIV, a w Indyjach w XVI.

Usadowiwszy się w Hiszpanii (w wieku VIII), Arabowie żyli tam tą samą strawą naukową, co ich spółwyznawcy na wschodzie. Mimo bowiém różnic plemiennych Arabów właściwych, Syryjczyków, Greków, Persów, Turków, Koptów, Berberyjczyków, Iberyjczyków, Gotów i t. d., mimo waśni wewnętrznych, mimo zazdrości naukowéj Arabów zachodu i wschodu, przeszkadzającéj np. w ujednostajnieniu pisania cyfr, należy ówczesny świat islamski, t. j. Arabów w ogólniejszym pojęciu tego wyrazu, uważać za jednę całość, któréj części nie przestają na siebie oddziaływać. Cała więc literatura naukowa, powstała na wschodzie arabskim, jest przedmiotem studyjów Arabów hiszpańskich. Ich emirowie z rodu Omaijadów w swéj stolicy, Kordubie, gromadzą wielką biblijotekę i opiekują się naukami, głównie astronomiją, która kwitnie także w Toledo, a w końcu wieku X mają już własnych uczonych. Za ich następców, śród ciągłych walk i częstych niepowodzeń, nie mogła samodzielna nauka zakwitnąć u Arabów hiszpańskich. Zawsze jednak pojawiają się poważni miejscowi uczeni aż do połowy wieku XIII, choć już wtedy tylko państewko Granady jest w mocy saraceńskiéj. W tym czasie Alfons X, król kastylski (1252—1284), idąc za przykładem kalifów, zwołuje na swój dwór astronomów maurów, żydów i chrześcijan, aby ułożyli znane późniéj pod jego imieniem tablice astronomiczne, jak również, aby na narzecze kastylskie przekładali astronomiczne dzieła arabskie.

Wcześniéj jednak, bo już na początku wieku XII, zaczęto na łacinę tłomaczyć dzieła czyto arabskie, czyteż tylko przez Arabów używane. W taki sposób około r. 1120 dokonany został piérwszy przekład łaciński *Elementów* Euklidesa przez Atelhart'a z Bath, mnicha z Anglii, prawdopodobnego tłomacza wzmiankowanego powyżéj podręcznika arytmetycznego Alchwarizmi. Od połowy tegoż XII stulecia pojawia się cały szereg tłomaczeń z arabskiego różnych dzieł filozoficznych, medycznych, przyrodniczych, matematycznych, astronomicznych i astrologicznych. Tak Gherardo z Kremony (1114—1187) tłomaczy przeszło 70 dzieł, a w téj liczbie ponownie Euklidesa, po raz piérwszy *Almagest* i cały szereg prac greckich. I t. d.

Za samodzielną przeróbkę dzieła arytmetycznego Alchwarizmi, dokonaną przez uczonego żyda Jana z Sevilli (Johannes Hispanensis), wielu uważa jego *Liber alghoarismi* (napisany około połowy wieku XII; *Trattati d'ar. pubblic. d.* B. Boncompagni, *N. 2)*, który służył za wzór wielu późniejszym podobnym podręcznikom arytmetycznym. Cantor utrzymuje, iż ono jest niezależne od owego dzieła Alchwarizmi i jest tylko tłomaczeniem innego niewiadomego autora arabskiego.

Za to owocem wielkiéj pracy i talentu jest dzieło *Liber abaci* Leonarda z Pizy, zwanego Fibonacci (t. j. syna Bonifacego), napisane w r. 1202, a uzupełnione w r. 1228 *(Scritti da* Leonardo Pizano, *pubbl. d.* B. Boncompagni, t. I, 1857), które doznawało długo ogromnéj wziętości. Obejmuje ono w swobodnym i samodzielnie pomyślanym wykładzie arytmetyczną i algiebraiczną wiedzę Arabów. Autor, mimo ogromu materyjału, zdołał ją przedstawić wzorowo jasno, podając wszędzie należyte dowody, jeżeli one nie leżą w samym uszykowaniu wypowiadanych prawd. W podobny sposób jest ułożona jego *Practica geometriae* (z r. 1220), matematyczne zaś pisma różne *Flos*, a więcéj *Liber quadratorum* z r. 1225 (te trzy prace: *Scritti* ..., t. II, 1862) częściowo przedstawiają owoce oryginalnych badań tego znakomitego uczonego. Leonardowi z Pizy zawdzięczać więc należy rospowszechnienie w świecie chrześcijańskim arytmetyki i algiebry w zakresie i metodami, jakie były w użyciu u Arabów, a wszczególności wprowadzenie systematu pozycyjnego i metod rachunkowych Indusów, przeciwstawienie ich rachowaniu na abaku, podniesienie bardzo niskiego poziomu ówczesnych badań matematycznych przez przystępne wyłożenie owoców pracy naukowéj Greków i Indusów, które, wraz z przyczynkami Arabów, tą drogą prędko się do szkół przedostały, nim naprzód przekłady łacińskie tłomaczeń arabskich dzieł greckich, a późniéj łacińskie tłomaczenia bespośrednio z greckich oryginałów nie wpłynęły ożywczo na rozwój nauk wogóle, a matematyki w szczególności.

* * *

Tadeusz Czacki jedyny dotąd zwrócił uwagę na pojawianie się cyfr «arabskich» w dawnych naszych dokumentach. Oto, co on o tym mówi: «wiem tylko, że w Polsce przed Kazimierzem Wielkim, nie widziałem cyfer «arabskich w przywilejach. W jednym traktacie teologicznym czyli kommen-«tarzu Joannis de Cracovia 1332. roku widziałem cyfry arabskiemi zwane, «a oprócz dwóch przywilejów Kazimierza Wielkiego i jednego Elżbiety, do «panowania Władysława Jagiełły w tranzakcyjach publicznych cyfrowéj liczby «nie widziałem. W piętnastym wieku zaczęły być powszechniéj w Polsce «używane.» [1])

Jakeśmy wspomnieli (str. XIX), piérwszy w Polsce drukowany podręcznik arytmetyczny, *Algorithmus* [2]) Iohannis de Sacro Busto (1509), jest właściwie arytmetyką cyfrową. Wydanie r. 1509 zaczyna się od rodzaju przemowy: wystawiania ważności i pożytku arytmetyki, z przytoczeniem przeróżnych odpowiednich wyrzeczeń. Ma to tytuł: «Laudatiuncula aritmetice». Poczym: «Incipit textus Algorithmi magistri Iochannis de Sacro Busto». (Tego wszystkiego niéma w owym wydaniu bez wymienionego miejsca i roku). Odtąd tekst obu wydań jest prawie [3]) identyczny. Porządek treści taki: wstęp (tu: «Est enim nomen ipsius Algorithmus et dicitur ab algos, id est ars, «et rithmus quod est numerus, quasi ars numerandi»), a daléj o podziale liczb (na «digitus», «articulus», «compositus»), nakoniec wyliczenie siedmiu działań:

---

[1]) A daléj dodaje: «Wszelako w nadaniach literowa liczba dość często łacińska, «a najczęściéj ruska, została użytą. Niech ta uwaga zastanawia czytających przywileje. «Byłem świadkiem, jak przez taką niewiadomość jedno miasto utraciło dobrodziejstwo po-«siadania wielości łanów literą ruską *k* czterdzieści znaczącą wyszczególnionych.» *O litewskich i polskich prawach* (1800—1), tom I, w wydaniu hr. E. Raczyńskiego (Poznań, 1843—4) str. 94.

[Jak zaś sobie inaczéj jeszcze radzono, zob. niżéj na str. 10 w ostatnim odsyłaczu.]

[2]) Albo p. Żebrawski błędnie cytuje (str. 76) za Wiszniewskim przez tego ostatniego (*Historyja Literatury*, t. IV, str. 177) podany tytuł tego wydania piérwszego Hallera, albo też istniało drugie wydanie także Hallera również z r. 1509, mające także 12 kart in 4-to, oraz na tytule: orzeł, herb Krakowa i pogoń. (Ostatniego przypuszczenia nie uwzględniam, przy obliczeniu znanych 8 wydań téj książki.)

[3]) Zauważyłem różnice tylko co do kilku wyrazów głównie na dwu ostatnich kartach.

liczenie i t. d., z których siódme, wyciąganie pierwiastków jest podwójne: kwadr. i sześ., o liczeniu [tu: «decima vero (figura) dicitur theca, vel circulus, vel cifra, vel figura nihili»], o dodawaniu, o odejmowaniu, o społowianiu, (późniéj) o podwajaniu, o mnożeniu, o dzieleniu, o postępie (sumowanie szeregów liczb naturalnych, zaczynających się od 1 lub od 2), o wyciąganiu pierwiastków (z poddziałami już wzmiankowanymi). (Wydanie r. 1509) «Finis» [poczym «Perutilis ac subtilis Algorithmi practica linealis» na dwu stronnicach; na piérwszéj objaśnienie wartości liczmana («denarius») na linijach i między linijami, oraz rysunek abaku [1]), na drugiéj: o mnożeniu, prawidło dzielenia (7 wiérszy), prawidło postępów («regula progressionum»; 5 wiérszy) i o podwajaniu.] W obu wydaniach niéma wykonanego ani jednego rachunku: przepisy na wykonywanie działań opowiedziane są słowami zapomocą ogólnego mówienia o jednościach, dziesiątkach, setkach i t. d. Liczby wymieniane są tylko w ustępach o liczeniu i o postępie. O ułamkach niéma wzmianki.

Nie mamy w wieku XVI arytmetyk cyfrowych w języku polskim. Z kilku zaś takich łacińskich arytmetyk owego jeszcze wieku zrobimy tu wzmiankę o tych dwu, które miały więcéj niż jedno wydanie.

W porównaniu z poprzednią arytmetyką znakomitym dziełem jest *De VI. Arithmeticae practicae speciebus* Henrici Glareani *Epitome* (skrót), którego jedno wydanie, jako «denuo ab Authore recognita», wyszło w Krakowie r. 1549 (bibl. kór.; str. 76), a inne bez wymienionego roku (również u Szarfenbergera w Krakowie; prawdopodobnie wcześniejsze). Są to przedruki obcéj książki (jedno takie wydanie Friburgi Brisgoiae, 1539). Przedmowa (str. 5—22) jest poświęcona nauce o podziałach liczebników i ich przytoczeniu: Cardinalia (tu zestawione z sobą rzymskie, greckie i pozycyjne pisanie liczb), distributiva, syncopata, Ordinis, In Arius, Syncopata frequentiora, Relativa Numeralia, Multiplicativa ab his derivata, In Anus, Adverbia Numerandi. Następuje (str. 23) właściwa arytmetyka. We wstępie (co jest aryt. i o jéj podziale na teor. i prak.) wzmianka o dwu tomach Boecyjusza, następnie o liczeniu (o cyfrach, że są od Indusów lub Chaldejczyków przyjęte) tak rzymskim jak i greckim, wraz z podziałem liczb na «digitus», «articulus» i «compositus». Dodawanie (str. 30) i odejmowanie (str. 35) bardzo szczegółowo i dobrze objaśnione z licznymi przykładami. Mnożenie (str. 42) zaczyna się od wynajdywania iloczynów dwu liczb jednocyfrowych, których suma jest mniejsza od 10-u (por. niżéj przy Brożku), daléj tabliczka [2]) Pitagorasa o 100 kwadratach i uwagi o niéj. Mnożenie liczb wielocyfrowych (str. 49) po ogólnym opowiedzeniu jest objaśnione na dwu przykładach 365 × 24 i 300 × 20. Piérwsze z tych mnożeń tak jest uszykowane:

2	
1 2 2	
1 1 4	
6 2 0 0	
3 6 5	Multiplicandus
2 4	Multiplicans
8 7 6 0	Summa producta

t. j. 2 r. 3, 6 i piszę je nad kréską nad 2-ką; 2 r. 6, 12 i piszę 1 nad (poprzed.) 6, a 2 obok 6; 2 r. 5, 10 i piszę podobnie 1 w drugim, a 0 w piérwszym wiérszu, licząc od kréski, obok już napisanych cyfr; następnie 4 r. 3, 12 i piszę je w trzecim wiérszu od kréski tak, aby 2-ka była nad 4-ką mnożnika; 4 r. 6, 24 i piszę 4 na wolnym następnym miejscu w drugim wiérszu, a 2

[1]) Tabliczka ta jest już wypisana (o 130 kwadratach: 10×13) w książce Jana z Łańcuta.

[2]) Niezgodny z tekstem, bo liczman oznaczający 5 zamiast być pod drugą liniją jest pod piérwszą taksamo 50 i t. d.

na poprzednim miejscu w czwartym wiérszu; 4 r. 5, 20 i piszę 0 na wolnym następnym miejscu w piérwszym wiérszu, a 2 na odpowiednim w trzecim; nakoniec wykonywam dodawanie kolumn tych cyfr, pisząc sumę pod kréską, poprowadzoną pod mnożnikiem. — Dzielenie (str. 53) objaśnione na kilku przykładach; w piérwszym idzie o dzielenie 8760 przez 365

```
   2
  14
 252
 8760
------
 3655
  36
     (24
```

(Początkowo jest nad liniją liczba 8760, a pod liniją liczba 365). 3 w 8-u 2 razy; piszę 2 za półksiężycym. 2 r. 3 (przekréślam) 6, odejmuję 6 od 8 (przekr.) i nadpisuję 2; 2 r. 6 (przekr.) 12, które odejmuję od 27 (przekr. te cyfry 2 i 7) i nadpisuję nad tylkoco przekréślonymi odpowiednio cyfry 1 i 5; 2 r. 5 (przekr.) 10, które odejmuję od 56, przekr. cyfrę 5 i nadpisuję nad nią 1). (Jest teraz do podzielenia 1420; piszę ponownie dzielnik 365 ale każdą cyfrę o jedno miejsce dalej wprawo, t. j. 3 pod 6, 6 pod 5, obok któréjto cyfry piszę 5). Znowu: 3 w 14-u 4 razy; piszę 4 obok 2 za półksiężycem; 4 r. 3 (przekr.) 12, odejmuję je od 14 (przekr.) i t. d. — Potym szósta «species»; t. j. o postępie (str. 62), sumowanie, gdzie jest mowa o postępach 1, 2,..., 7; 2, 4,..., 10; 3, 6,..., 15; 4, 8,..., 36 i ich sumach. (Str. 65) «De regula proportionum» jest najsłabszym ustępem. Jest to właściwie taż sama, co w innych przytoczonych już naszych arytmetykach reguła trzech na liczbach całkowitych. Stosunki są rozważane bardzo pobieżnie (jest właściwie mowa tylko o wykładniku stosunku) w ustępie ostatnim (str. 70): «De omnium Proportionum origine compendiolorum». O ułamkach niéma mowy.

Trzy są znane wydania książki *Arithmetices introductio ex variis authoribus continuata* bezimiennego autora (wszystkie w Krakowie; w każdym kart 20) z lat 1549, 1556 i 1565. Ponieważ już piérwsze z tych wydań jest «denuo diligenter revisa», przeto mogło być jeszcze wydanie wcześniejsze. P. Żebrawski zaznacza, iż w wydaniu piérwszym na str. przedostatniéj jest pomieszczona wartość pieniędzy w języku polskim. Łukaszewicz (t. I, str. 93) tak tę książkę [1]), jak i poprzednią zalicza do ówczesnych podręczników szkolnych.—

Najważniejszą z arytmetyk wydanych u nas w wieku XVII jest bezwarunkowo *Arithmetica integrorum* (liczb całkowitych), którą w r. 1620, jako «primus hic Nowodworcianae fundationis [2]) fructus» ogłosił «Ioannes Broscius Curzeloviensis» (Jan Brożek z Kurzelowa), ówcześnie noszący tytuł «Ordinarius [3]) academiae cracoviensis astrologus» (egz. z bibl. kór.). Krótką wiadomość o Brożku (1585—1652), jak również wyszczególnienie jego badań nad liczbami doskonałymi i nad liczbami zaprzyjaźnionymi, czytelnik znajdzie na str. 371—5 w przypisku napisanym przez [4]) prof. Frankego, którego badania,

---

[1]) Nie udało mi się dotąd widzieć téj arytmetyki.

[2]) Widać więc, że, przynajmniej początkowo, fundusz oddzielny na wydawanie dzieł użytecznych, powierzony akademii przez kawalera Nowodworskiego, nie był przeznaczony na drukowanie panegiryków i t. d. (jak chce Łuk., t. I, str. 210).

[3]) «Astrologus» należał do «Collegium minus» (Łuk., t. I, str. 55, 74), (a nie jak chcą niektórzy, do «Collegium majus»), równie, jak i profesor astronomii fundacyi «Stobneriano-Dąbrowsciana», którego obowiązkiem (a nie astrologa) było układanie kalendarza (Łuk., t. III, str. 70).

[4]) Prof. Franke wyświetlił, iż dotychczas podawane wersyje jego nazwiska (które ów uczony nawet na polskich swoich pracach zwykł pisać «Broscius», lub «Brosciusz») są błędne i że prawdziwe jego nazwisko jest Brożek, jak również ustalił tak rok jego urodzenia, jak i inne daty, błędnie aż do ostatnich czasów przytaczane.

odnoszące się do życia i przez naukowych tego znakomitego, dotąd lepiéj przez obcych znanego, naszego uczonego z wieku XVII, podjęte wskutek zlecenia akademii umiejętności w Krakowie, zostaną wkrótce ogłoszone drukiem w oddzielnéj książce. Do téj więc książki odsyłamy czytelnika dla poznania należetego zasług Brożka na polu gieometryi i astronomii i około spraw akademii krakowskiéj wogóle. My tu zaś zajmiemy się wyłącznie arytmetyką Brożka.— Wspomniawszy tu tylko, że nauka arytmetyki była przedmiotem wykładu na akademii, niezależnie od innych części matematyki [1]), zaznaczymy naprzód, że nastrój wykładu niektórych ustępów drugiéj połowy arytmetyki Brożka mógłby wskazywać, że autor miał na myśli znacznie już starszą młodzież. Początkowa jednak część téj książki obejmuje wykład tak przystępny i szczegółowy, z podanymi do rozwiązania zadaniami tak prostymi, iż mogła być przeznaczona do nauki w spółczesnéj w Krakowie szkole średniéj [2]), która za staraniem rektora akademii Stanisława Zawackiego powstała w r. 1588, a następnie wskutek hojnéj fundacyi Bartłomieja Nowodworskiego (1617) podźwignięta z czasowego upadku i do świetnego na owe czasy doprowadzona stanu, przez dość długi jeszcze przeciąg czasu [znakomicie zasilona legatem (1631) Gabryjela Prowancyjusza [3]), po uszlachceniu Władysławskiego, powiększonym przez Władysława IV, z którego nadto roskazu zamknięto szkoły jezuickie w Krakowie] kwitnęła i cieszyła się bardzo licznymi uczniami (ta szkoła pozostawała wciąż pod zarządem akademii, aż do reformy w r. 1777) (Łuk., t. III str. 432—459). Arytmetykę Brożka zalicza Łukaszewicz (t. I, str. 231) do książek używanych w Polsce w ówczesnych szkołach. — W rozdziale I «O określeniu arytmetyki i jéj podziale» (str. 1), Brożek potępia podział arytmetyki na praktyczną i teoretyczną («speculativa»), a natomiast «proponuje» jéj podział na prostą («simplex»), «która rozważa pojedynczą naturę liczb» i porównawczą («comparativa»), «która ustanawia porównywanie liczb». Tu także mówi o podziale na «digitus», «articulus» i «compositus». W roz. II «O liczeniu» (str. 8), zaznaczywszy, że cztéry działania są liczeniem, porównywa znaki liczebne do liter alfabetu i bardzo jasno wykłada zasady systematu pozycyjnego, objaśniwszy je na przykładach trafnie dobranych. [Téj zalety, cechującéj również wszystkie przykłady przez Brożka podawane, daléj już podnosić nie będziemy. Dodamy tylko, iż często jest widoczną staranność Brożka w wybiéraniu takich właśnie przykładów, któreby usuwały wątpliwości czytelnika w mogących się zdarzyć przypadkach szczególnych.] — W roz. III «Jakim sposobem dawni Rzymianie liczby oznaczali» (str. 13) przytacza naprzód przykłady historyczne, iż w liczeniu dawni Rzymianie liczyli na setki tysięcy (np. 121 setek tysięcy i t. d.), a następnie, po wzmiance o tym, że oni nie znali cyfr (figurae) 0, 1,..., 9, mówi: «Kopernik w ks. «I, roz. 12 te figury liczebne nazywa indyjskimi, jakoby przez Indusów wymy-«ślone były» i wykłada znakowanie rzymskie. — W roz. IV (str. 17) «Jakim sposobem Grecy liczby oznaczali» jest na przykładach mowa o myryjadach pojedyńczych, podw. i potr., a zarazem o tysiącach tysięcy, tysiąc razy tysiącach

---

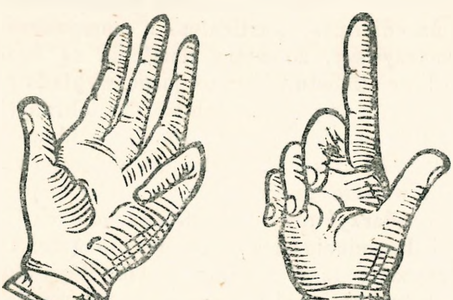
[1]) Zob. Łuk., t. III, str. 67, 140, 154; t. II, str. 103, a także artykuł prof. F. Karlińskiego w dziele zbiorowym *Zakłady uniwersyteckie w Krakowie* (Kraków, 1869), str. 128.

[2]) Takby wnioskować można również z przemowy wstępnéj: «Adolescenti Arithmeticam hanc lecturo S.»

[3]) Według ustawy sejmu z r. 1609, przytoczonéj przez Sołtykowicza *(O stanie akademii krakowskiéj,* Kraków, 1810, str. 187). — Często nazywają go Premancovius, lub inaczéj.

tysięcy i t. d., a także o milijonach i milijonach milijonów (wykładu znaków liczebnych greckich niéma). Rozdziały V «O dodawaniu» (str. 21) i VI «O odejmowaniu» (str. 30) uczą wykonywania tych działań sposobami dzisiejszymi, a postępowanie wrazie, kiedy cyfra w odjemnéj jest mniejsza od odpowiedniéj w odjemniku, jest przeprowadzone aż trojakim sposobem. — W «dodatku (str. 38) Brożek powstaje przeciwko uważaniu osobnych działań: podwajania i społowiania, z uwagi, że należałoby podobnie tworzyć działania: potrajanie i t. d., i objaśnia, jakto prosto owe podwajanie i społowianie się wykonywa (tu ułamek $\frac{1}{2}$ przy społowianiu liczby nieparzystéj). — Rozdział VII «O mnożeniu» (str. 40). Brożek rozważa naprzód iloczyny dwu czynników jednocyfrowych, przedewszystkim równych sobie, a następnie nierównych i wtedy zaraz zmienia porządek ich następstwa. Późniéj szczegółowo rozważa tabliczkę mnożenia, «mensa Pythagorae», o 81 kwadratach, kładąc zaraz szczególny nacisk na liczby kwadratowe w téj tabliczce. Następnie wraca do tworzenia iloczynów dwu liczb jednocyfrowych, których suma jest większa od 10 (dość, by była nie mniejsza od 10). Tak np., gdy mamy 8 pomnożyć przez 7, to zważywszy, że «odległość» («distantia») od 10-u piérwszéj liczby jest 2, a drugiéj 3, i rozmieściwszy te liczby tak:

z pomnożenia 2 przez 3 otrzymamy 6 jedności szukanego iloczynu, a odejmując czyto 3 od 8, czytéż 2 od 7, otrzymamy 5 dziesiątków szukanéj liczby [1]). Brożek jeszcze inaczéj wyznacza iloczyny dwu czynników jednocyfrowych większych od 5-u. Liczby od 1 do 5 przedstawia wyprostowywaniem jednego palca od wielkiego do małego, liczbę 6 przygięciem małego palca ku dłoni, a wyprostowaniem reszty, liczbę 7 przygięciem ku dłoni małego i czwartego, a wyprostowaniem reszty i t. d. Wyznaczenie iloczynu 6 i 8 objaśnia na przerysowanéj obok figurze. Mnożąc liczbę wyrażoną przez podniesione palce ręki lewéj, na któréj jest uwidoczniona liczba 6, t. j. liczbę 4, przez odpowiednią liczbę 2, wyrażającą ilość podniesionych palców ręki prawéj, na któréj mamy liczbę 8, otrzymamy 8 jedności szukanego iloczynu. Obliczając zaś zgięte palce u obu rąk (1 + 3), mamy 4 dziesiątki tego iloczynu [2]). —



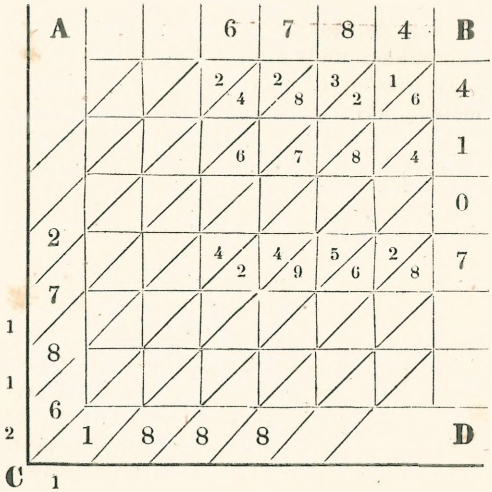
Następuje mnożenie liczb wielocyfrowych przez siebie zupełnie w dzisiejszéj formie. Poczym wykład wykonywania mnożenia w kratkach, t. j. jednym ze sposobów, jakich Indusowie (str. XXXII) używali. Przedstawimy ten sposób na liczbach np. 6784 i 4107. W kierunku linii AB (litery A, B, C, D są w oryginale) jest wypisana jedna liczba, w kierunku BD druga. Iloczyny

---

[1]) Taksamo w arytmetyce Glareani. Herbest bez wypisywania takiego krzyża, robi to samo kamykami na linijach. — Łatwo takie postępowanie ogólnie uzasadnić.

[2]) Sposobu tego używają teraz jeszcze w wielu szkołach we Francyi (por. *Guide du maître pour l'enseignement d'arithmétique... par* Eyssèric, Paryż, 1880).

oddzielnych liczb jednocyfrowych są wypisane we właściwych kratkach: dziesiątki ich nad, a jedności pod ukośną kreską. Dodając następnie do siebie jednocyfrowe liczby, znajdujące się w tych samych ukośnych rzędach, otrzy-



mujemy na kierunku ACD iloczyn 27861888. — Jeszcze Brożek szeroko wykłada, jako pożyteczne przy mnożeniu wielkich liczb, postępowanie, tym się różniące od zwykłego, że się mnoży przez cyfry mnożnika, poczynając z lewéj strony, ku czemu przygotowywa on uprzednio tabliczkę iloczynów mnożnéj (większego czynnika) przez liczby jednocyfrowe i sprawdza ją drobiazgowo próbą przez 9. Kończy rzecz o mnożeniu rozważaniem przypadków, gdy dane liczby kończą się na zera (podzisiejszemu), podaniem zadań i próbą mnożenia przez 9. — Rozdział VIII «O dzieleniu» (str. 76). Po ustępie o dzieleniu liczb dwucyfrowych przez jednocyfrowe przy pomocy tabliczki mnożenia i przy pomocy napisanego szeregu liczb naturalnych do 100, przechodzi do dzielenia liczb wielocyfrowych. Działania odpowiadające jednéj cyfrze ilorazu dzieli, za Stiffel'em, na trzy tempa, które oznacza literami Q («quaere», szukaj), M («multipla», mnóż) i S («subtrahe», odejmij). Samo zaś dzielenie przeprowadza naprzód sposobem podobnym do tego, jaki poznaliśmy przy arytmetyce Glareanus'a, z tą tylko różnicą, że Brożek wypisuje iloczyn dzielnika przez cyfrę ilorazu pod dzielnikiem, a następnie dopiéro całą tę liczbę odejmuje odpowiednio od dzielnéj lub reszt dzielenia. Tak np. dzieli 7168 przez 7:

```
   2
7 1 6 8
7 7 7 7   (1024
7 1 4 8
   2
```

Przy kilkucyfrowym zaś dzielniku Brożek nie przekréśla dzielnika, lecz po wykonaniu tego, co odpowiada każdéj oddzielnéj cyfrze ilorazu, zmazuje z tablicy dzielnik, kréskę i to co jest pod nią, tak iż wykonywane na tablicy dzielenie 7744256 przez 2864 tak się stopniowo u niego przedstawia:

	1	1	1
2016	20164	20164	20164
7744256	7744256	7744256	7744256
2864 (2	2864 (27	2864 (270	2864 (2704
5728	20048		11456

Uzupełnia to opowiedzeniem takiego wykonywania dzielenia, jak w książce Glareanus'a. Zaznaczywszy wady tych metod, Brożek powiada: «podobał mi się sposób nowszych» (uczonych) («probatur mihi modus recentiorum») i wykłada owę nową metodę, która prowadzi do takiego dzielenia:

	7744256	
I	2864	(2
	5728	
	20162	
II	2864	(7
	20048	
	1145	
III	2864	(0
	0000	
	11456	
IV	2864	(4
	11456	

Nic nie zostaje.

W drugim zaś przykładzie nie wypisuje już wierszy, utworzonych przez same zera, lecz tylko, zaznaczywszy jako cyfrę ilorazu 0, przypisuje następującą cyfrę dzielnéj. W owym drugim przykładzie dzielnik jest 6-cyfrowy; Brożek tworzy uprzednio przez dodawanie tabliczkę jego iloczynów przez liczby jednocyfrowe i sprawdza ją, mnożąc dzielnik dwa razy przez 3. Korzystając zaś z téj tabliczki, nie podpisuje za każdym razem dzielnika, tak iż to jego dzielenie tym się tylko różni od dzisiejszego, że kolejne cyfry ilorazu znajdują się obok odpowiadających im częściowych iloczynów odejmowanych. Po podaniu zadań, mówi nieco o ułamkach, wypadających w ilorazie, i o ich skracaniu. Zamyka zaś rzecz o dzieleniu uwagami odnoszącymi się do przypadków, gdy dane liczby są zakończone na zera. — Rozdział IX «O liczbach piérwszych i złożonych bezwzględnie («per se»), oraz piérwszych i złożonych względem siebie» («inter se») (str. 101). Tu mówi o podzielności przez 2, 3, 4, 5, 6, 7 [1]), 8 [2]), 9, 10 i 12, oraz zaznacza, że łatwo wyprowadzić warunki dla liczb 20, 30, 40, 50; 16, 32, 64, 128; 24, 48 i t. d. Następnie cytuje w oryginale i tłomaczy na łacinę określenie Euklidesa (taksamo z innymi tu określeniami) liczby piérwszéj i złożonéj, rozważa sito Eratostenesa, mówi o dwu liczbach piérwszych względem siebie i złożonych względem siebie («a które liczby pewna spólna miara mierzy») i o wynajdywaniu ich największéj spólnéj miary (przez kolejne dzielenie). — Rozdział X «O regule proporcyj» (str. 112). Naprzód Brożek, przypomniawszy podany na początku podział arytmetyki na prostą i porównawczą, mówi, że «tak jest 1 do mnożnika, jak mnożna do iloczynu», «i tak dzielna do dzielnika, jak iloraz do 1». Powstaje przeciwko «barbarum Detri nomen», gdyż reguła odnosi się do 4 liczb, a może być mowa i o 6. Następnie o wyznaczeniu czwartéj niewiadomej spośród 4 liczb proporcyjonalnych i zastosowania do zadań (tu zachodzą ułamki). Gdy danych jest 5 liczb, sprowadza je (zapomocą mnożenia dwu par liczb danych) do 3, a następnie rozważa proporcyją. Proporcyją tak pisze: «jak 7 do 35,

[1]) Gdy liczba dana jest sumą 3, 6, 9 albo 12 wyrazów postępu geometrycznego z wykładnikiem 2, albo 4, albo 16, lecz «niech chłopiec (puer) to opuści», a do tego wróci po postępach.

[2]) Po zwykłéj, podaje cechę Metius'a: podwoić cyfrę dziesiątków, cyfrę setek pomnożyć przez 4, a do tych iloczynów dodać cyfrę jedności (por. § 13, us. 16).

tak 48 do czego?». Podobnie traktuje regułę spółki i «regułę proporcyj odwrotną».

Nadto może szczegółowo wyłożywszy ściśle arytmetyczną część tej książki, pokrótce już tylko zaznaczymy treść drugiej jej połowy. — Rozdział XI «O postępach» (str. 127) obu rodzajów z różnymi zadaniami na sumowanie, oraz z zaznaczeniem, z porównania dwu postępów (0, 1, 2, ...; 1, 2, 4, ..), logarytmów (przy podstawie 2), jako znakomitego odkrycia Napier'a [1]. — Roz. XII «O liczbach kwadratowych» (str. 138). Roz. XIII «O sześcianach» (str. 147) (w obu także systematycznie i szczegółowo wyciąganie pierwiastków). Roz. XIV «O różnych przykładach» (str. 160), z rozmaitych autorów sławne zadania (niektóre kosmograficzne). Tu także (str. 195—8) dodawanie i odejmowanie liczb wielorakich (podzisiejszemu). Roz. XV «O liczeniu zapomocą wskaźników i na abaku [2]) szachowym» (str. 198). Mowa tu jest o tym, jak Ioannes Neperus wyraża liczby dane jako sumy potęg liczby 2; wykładniki tych potęg (poczynając od 0), lub odpowiednie litery abecadła, są wskaźnikami («indices») składników; wykonywanie działań na danych liczbach, jak mnoż., dziel., wyciąg. pierw. kw., można zastąpić działaniami prostszymi na tych liczbach, dodaw. zaś i odejm., wrazie jednakowych składników, nieco uprościć. Brożek wypisał tu tablicę potęg liczby 2, odpowiadających wskaźnikom od 0 do 100 i wykonywa działania. Jest to więc rachunek logarytmami (przy podstawie 2), co Brożek wyraźnie zaznacza na końcu. Ostatni rozdział XVI «O laskach» (str. 229—252), t. j. o rachowaniu według Napier'a przy pomocy czworokątnych słupków mających na każdej ze ścian bocznych wypisane w kratkach przedzielonych ukośnie (podobnie jak na str. XLI) liczby pewnego szeregu z tabliczki mnożenia [3]).

Z książki tej łatwo wnieść można, iż Brożek nietylko znał tak literaturę klasyczną, jak i spółczesne ważniejsze prace naukowe, ale nadto, że z prawdziwym zamiłowaniem i wielką jasnością sam uczyć musiał, jeżeli to tak się wyraźnie odbiło w tym podręczniku, który metodą wykładu, praktycznie obmyślanego i z rzetelnym zapałem przeprowadzonego, tak wyprzedził epokę, w jakiej był ułożony. Wczytując się w oddzielne ustępy, dochodzi się do przeświadczenia, iż Brożek był wytrawnym pedagogiem, zbyt często może powołującym się w swym podręczniku na przeróżnych autorów, lecz wolnym

---

[1]) «Pro Logarithmorum tabulis tibi magne Nepere Praemia quae tribuent digna «Mathematici?» (w oryginale kursywą). — Dzieło Napier'a, obejmujące logarytmy naturalne wstaw i stycznych (co minutę kąta), wyszło w r. 1614 w Edymburgu, a przedrukowane w Lijonie w 1619. Objaśnienie wyrachowywania logarytmów w wydaniu edym. z r. 1619, przedrukowanym w Lijonie w r. 1620. Termin «logarithmus» pierwszy raz w wydaniu z r. 1614.

[2]) Ów «Abacus scacchiae» jest szachownicą o 24×24 polach czarnych i białych. Idąc od jednego wierzchołka szachownicy do przeciwległego naokół jej, czyto w jednę, czy w drugą stronę, mamy rzędy odpowiadające kolejnym potęgom 0, 1, 2,..., (46) liczby 2. Gdy więc mamy np. pomnożyć 8 przez 64, to na przecięciu 4-go np. poziomego z 7-ym pionowym rzędem natrafimy na pole pewnego koloru, a posuwając się, jakby ruchem laufra, w kierunku odpowiadającym linii, łączącej początkowe pola wzmiankowanych rzędów, dojdziemy do jednego lub drugiego pola brzeżnego w rzędach, którym odpowiada szukany iloczyn. Odpowiednio z dzieleniem.

[3]) Tytuł tego rozdziału: «De virgulis» (virgula divina, laska czarodziejska), mimo, że Brożek podaje w tym rozdziale 11 rysunków takich słupków, przetłomaczono niedawno w poważnym wydawnictwie warszawskim w taki sposób: «o przecinkach», a treść poprzedzającego rozdziału, przedstawiającego (wraz z rozdziałem o postępach) pierwsze w Polsce zaznaczenie logarytmów, tak tamże streszczono: «o rachunku indeksów».

od rutyny i wszelkiéj pedanteryi, umiejącym prosto i w sposób zniewalający do skupienia uwagi wykład swój prowadzić.

Wiadomości o kilkunastu późniejszych arytmetykach czytelnik znajdzie w artykule *Arytmetyka* Wincentego Trybulskiego, ogłoszonym w tomie I *Encyklopedyi wychowawczéj* (Warszawa, 1880), o któréjto pracy niżéj oddzielnie tu mówić będziemy. W tym tedy artykule [1]) z podręczników wieku XVII są opisane: na str. 362 — 6 «M. Iohannis Tonski I. U. et M. D. in Acad. Crac. Math. Profess. *Arithmetica vulgaris*...» (1640 w Ingolsztacie; 1645 bez miejsca druku; Łuk. mówi: «wiele wydań»); na str. 353—361 «*Arithmetyka. To jest Nauka Rachunku Na trzy podzielona Xięgi. W Pierwszey*... Przez K. S. pilnie napisana» (autor Krzysztof Schedel, typograf J. K. M.; piérwsze wydanie bez roku, według Bandkiego między 1660 a 1665; inne z r. 1735; oba w Krakowie); na str. 372 «*Arithmetica curiosa*.... Auctore R. P. Adalberto Tylkowski Societatis Jesu in Collegio Varsavien:...» (1668 w Krakowie; znacznie powiększona 1689; 1690) i na str. 361—2 wiérszowana «*Geometry Polskiego Zabawa o arytmetyce albo rachowaniu*» Jezuity Stanisława Solskiego wyjątek z dzieła *Geometra polski* (Krak, 1683) wydał Julijan Bayer w Warsz. 1863; na [2]) str. 366 — 372 «*Arithmetica practica*... a M. Ioanne Stanislao Formankowic in Alma Universitate Crac. Doctore et Professore.» (1669 w Krakowie). Króciutkie lecz poważne kompendyjum Tońskiego obejmuje staranne rozważanie ułamków sześćdziesiątkowych i dziesiętnych; niéma w nim jednak tego skróconego sposobu dzielenia, który Brożek podał był już jako nowość. Téj pracy nie dorównywają inne z wyliczonych tu arytmetyk, choć są one najwięcéj używanymi podręcznikami szkolnymi owego wieku. Książka zaś Tylkowskiego obejmuje bałamuctwa, które do pewnego stopnia objaśniają, dlaczego nawet te szkoły Jezuitów, w których był kurs «filozofii», obejmujący między innymi Euklidesa (Łuk., t. I, str. 250), tak mało rospowszechniały w narodzie najprostsze pojęcia matematyczne wogóle.—Szkoły bazylijańskie były gorsze od jezuickich, na których się wzorowały. Szkoły zaś nowych kultów religijnych, do naszego narodu wniesionych, były obsadzone prawie wyłącznie obcymi nauczycielami, najczęściéj mało dbającymi o kraj, w którym czasowo tylko przebywali, a zwracającymi głównie swą uwagę na łacinę, a jeszcze więcéj na konfesyjne wychowanie młodzieży i sposobienie jéj do dysput religijnych. Z tego więc względu nauka matematyki miała wyznaczoną nawet w takich szkołach średnich bardzo podrzędną rolę. Wprawdzie socynijanie ogłosili dla użytku szkoły w Rakowie «Ioach. Stegmani *Institutionum Mathematicarum Libri II*, quibus initia I Arithmeticae, II Geometriae pro incipientibus dilucide explicantur, et ad praxin varie accomodantur» (I str. 64; II str. 190; r. 1630), któréj autor był rektorem owéj nietoleracyjnéj szkoły (zamkniętéj przez sejm r. 1638), a w arytmetyce téj, zdaje się po raz piérwszy w Polsce, występują ułamki dziesiętne (Łuk., t. I, str. 369). Nie była również wyjątkiem szkoła braci czeskich w Lesznie, choć przez pewien okres w swym istnieniu wsławiła się troskliwie obmyślanymi metodami nauczania, choć w gronie nauczycieli liczyła szanowanego ówcześnie matematyka i architekta (polaka) Jana Dekana, choć nakoniec stała się tak rozgłośną za

---

[1]) Z arytmetyk wcześniejszych, o których wiadomości są tu wyżéj podane, Trybulski widział tylko podręcznik Herbesta, o którym mówi na str. 346—9.

[2]) Rozmieszczenie liczb przy rozwiązywaniu zadań na regułę fałszywego założenia, przytoczone przez Tryb. na str. 368, jakoteż odpowiednie prawidło, jest już w książce Wojewódki.

rektorstwa (1636—1642) głębokiego myśliciela-wychowawcy, sławnego Komenijusza (Jana Amosa Komeńskiego). Dowodu na to dostarcza znakomite dzieło Komenijusza: *Wielka dydaktyka* (polski przekład: Warszawa, 1884), w któréj rzecz o nauczaniu matematyki i jego założeniach jest dotknięta bardzo powierzchownie i tylko w paru wielce ogólnikowych uwagach (rozdziały XXIX—XXXI).

Równie wiek XVII, jak i znaczna część wieku XVIII nie sprzyjały u nas rozwojowi nauk wogóle, a matematyki wszczególności. Wojny zewnętrzne, częste zarazy morowe, rokosze i ustawiczne niesnaski wewnętrzne najróżnorodniejszéj natury, spaczone wychowanie publiczne musiały się odbić na umysłowym życiu narodu. Co więcéj, zastój naukowy jest tak ogólny, iż przedsiębrane od czasu do czasu nieliczne usiłowania reformy szkół znajdują swój wyraz jedynie w narzekaniach i protestach, lub początkowaniach bezowocnych. Akademija krakowska, w któréj «kolonijach» najprędzéj zdawałoby się, mógł nastąpić zwrót ku lepszym metodom nauczania, zajęta sporami z Jezuitami, jałowymi a kosztownymi sprawami religijnymi, a jednocześnie ubożejącą wciąż wskutek niedochodzenia dochodów i marnienia funduszów, nie pielęgnuje należycie nauk filozoficznych u siebie, nie może więc tymsamym przygotować dobrych nauczycieli dla swoich «kolonij», któreteż coraz więcéj chyliły się do upadku. Akademija zamojska była instytucyją pozbawioną wszelkiéj powagi i wartości naukowéj i zaznaczyła się tylko wydawnictwem kalendarzy jéj profesora Stanisława Duńczewskiego. Akademija zaś wileńska w ręku Jezuitów była tą samą ich szkołą średnią jałową (od któréj się różniła prawem udzielania stopni naukowych, więcéj szczegółowymi studyjami scholastycznymi i czasowymi wykładami prawa kanonicznego i cywilnego).

Reforma szkół pijarskich, rospoczęta w r. 1740 przez wielkiego obywatela Stanisława Konarskiego (poprzednio i te szkoły niewiele się od spółczesnych jezuickich różniły) i przez niego następnie ustalona wskutek zmiany urządzeń w «prowincyi polskiéj» (1754) tego zakonu, wprowadziła do nauczania wogóle lepsze metody, wydobywając szkoły średnie z długiego zastoju i upadku. Nieliczne lecz niezłe szkoły Teatynów także zaczęły się cieszyć wziętością. Pobudzeni spółzawodnictwem, Jezuici, przynajmniéj w szkołach, znajdujących się w główniejszych miastach, za sprawą swych prowincyjałów, koronnego Józefa Domaradzkiego i litewskiego Michała Juniewicza, również wprowadzili pożądane zmiany w sposobach nauczania. Tak Pijarzy, jak i Jezuici zaczęli wysyłać zdolniejszych młodych swych członków, sposobiących się do stanu nauczycielskiego, do Niemiec, Francyi, Włoch i Czech, którzy po powrocie przyczyniali się do dalszego postępu szkół. — Rosszérzono znacznie wykład matematyki, przeznaczając więcéj na nią godzin, nauczając jéj troskliwiéj i systematyczniéj. Prócz więcéj wyczerpujących kursów arytmetyki, wprowadzono wykład algiebry i gruntowniéj nauczano gieometryi. — Liczne pojawiają się arytmetyki, głównie przez członków obu zgromadzeń układane, lub przez nich tłomaczone, albo tylko dla użytku szkół jezuickich przedrukowywane w Polsce, z uwzględnieniem miar miejscowych. — Ożywienie w nauczaniu arytmetyki dosadnie charakteryzuje ten fakt, że gdy w pierwszéj połowie w. XVIII pojawiają się tylko dwie nowe arytmetyki łacińskie dla użytku szkół jezuickich (Wilno, 1733; Kalisz, 1745, skrót wydania weneckiego z r. 1740 dzieła Tacquet'a), to w przeciągu dwudziestu lat od r. 1757 do 1777 pojawia się 5 arytmetyk łacińskich (przedruki dwu arytmetyk Höll'a, prof. akad. jez. w Klausenburgu, w r. 1760 w Poznaniu, z których jedna powtórnie w Nieświeżu w r. 1768; arytmetyki Pijara Sikorskiego w 1761 w Warsz., Reformata Kleczewskiego 1771 we Lwowie i *«Arithmetica pro suprema Grammatices classe* e germanico in latinum translata» w Krak., bez wymienienia autora i roku; później w r. 1782 w Zamościu wydał jeszcze arytmetykę łacińską Sławiński, Bazylijanin ze szkoły przy klasztorze w Zamościu), a 11 polskich (w r. 1757 w Krak. Kaczwińskiego «za dozwoleniem starszych do Druku podana»; w r. 1760 w Berdyczowie Torżewskiego; w r. 1765 we Lwowie Jezuity Siekierzyńskiego; w r. 1766 w Warsz. Pijara Skaradkiewicza, wydawana ponownie w r. 1771 i 1776 w Warsz.; wspomniana już na str. XXVI arytmetyka Pijara Marquarta w Wilnie 1772; *«Arythmetyka praktyczna kieszonkowa....»* w r. 1773 w Warsz., bez wymienienia autora, którym był Pijar Obermayer, powtórnie wydana w r. 1811 w Warsz.; «Arytmetyka podług reguł JMC. Pana Beniamina Hederichsa... z niemieckiego języka na polski...» w r. 1774 w Warsz.; *«Arytmetyka praktyczna....»* w r. 1775 w Warsz., bez wymien. autora, którym jest Pijar Bielski, z nieco odmiennym tytułem w tymże r. 1775 i 1793 w Warsz., a z wymienieniem autora w Warsz. w r. 1806, 11, 13 i 15; w r. 1775 w Kaliszu nauczyciela tamtejszéj szkoły księdza Czarnockiego; *«Arytmetyka prostacka* czyli nowy sposób czynienia rachunków, którego nieumiejących czytać nawet łatwo nauczyć można...» Pijara Sirucia w Wilnie, 1777, *«Nauka Rachownicza* Dla Młodzi uczącey się w Akademii Krakowskiey» w Krak. 1777, po polsku i po łacinie, przeznaczona dla nauki liczb całkowitych w «kolonijach» akademii). Staranne zestawienie porównawcze treści ważniejszych z wyliczonych tu arytmetyk czytelnik znajdzie we wzmiankowanym artykule Trybulskiego na str. 373—8, z którego się przekona, jak powolny one wnosiły postęp do nauczania u nas arytmetyki.

Otwarcie przez Stanisława-Augusta, wkrótce po koronacyi, korpusu kadetów w Warszawie prawdopodobnie przyczyniło się również do wyrobienia lepszych metod nauczania. Jakim był Edling, nauczyciel matematyki elementarnéj, nie wiemy, ale drugi dyrektor korpusu, Pfleyderer z Tubingi, wykładający matematykę wyższą i fizykę, pozostawił jak najlepsze ślady swéj działalności, troskliwéj o dobre metody nauczania, i szczerym przez spółczesnych był otoczony szacunkiem [1]).

Zamknięcie zakonu Jezuitów w r. 1773, a przeznaczenie ich dóbr, wskutek wniosku Joachima Chreptowicza, na oświatę publiczną, i otworzenie Komisyi Edukacyjnéj, pierwszego na świecie ministerstwa oświaty, wywołało tyle pożądaną i gruntowną reformę wychowania we wszystkich jego stopniach. Różnorodność spraw, podległych nowéj magistraturze, kłopoty z ochranianiem i rewindykowaniem powierzonych jéj pieczy funduszów, przeprowadzanie reform, dozór i administracyja szkół, nie dozwalały członkom Komisyi Edukacyjnéj, mającym nadto liczne inne zajęcia, zająć się drobiazgowym rozważaniem metod nauczania, oraz oceną lub wygotowaniem podręczników. Na wniosek więc Ignacego Potockiego utworzono w marcu r. 1775 Towarzystwo do ksiąg elementarnych (rozeszło się ono w kwietniu r. 1792), pozostające wciąż pod główną prezydencyją wnioskodawcy, któregoto towarzystwa najczynniejszym członkiem był eks-jezuita Grzegorz Piramowicz [2]). W Towarzystwie

[1]) Por. *Mowę* Piramowicza 7 marca r. 1782 (str. 10—11).

[2]) W tomie V «Rozpraw» wydz. filol. ak. um. w Krak. dr. Władysław Wisłocki ogłosił cenną pracę *Poczet chronologiczny prac drukowanych i rękopiśmiennych* Grzegorza Piramowicza (1877).

do ksiąg elementarnych (składało je 10 zawsze członków) oceniano i wyrabiano w ostatecznéj redakcyi podręczniki szkolne, ułożono znakomite «Ustawy dla stanu akademickiego», rostrząsano wszelkie potrzeby naukowe szkół, troskliwie opracowano elementarz dla szkół początkowych, a ślady téj wytrwałéj pracy ujawniano nazewnątrz od imienia Komisyi Edukacyjnéj. Z nieogłoszonych dotąd drukiem protokółów tego Towarzystwa widać, iż piérwszą jego czynnością było ułożenie obwieszczeń do konkursu na projekty podręczników szkolnych, które Komisyja Edukacyjna ogłosiła w kraju i zagranicą. Z otrzymanych wielu projektów książki elementarnéj do matematyki, nadesłany w listopadzie r. 1776 pod dewizą z Condillac'a «Celui qui n'a pas appris «à réfléchir, n'est pas instruit, ou il l'est mal, ce qui est pire encore» [1]), na skutek opinij wzmiankowanego wyżéj Pfleyderera, Pijarów Popławskiego i Narbutta, oraz Piramowicza, został przyjęty w styczniu r. 1777. Autorem okazał się Szymon Lhuilier, nauczyciel szkół w Gienewie, który od listopada tegoż roku zaczął nadsyłać częściami arytmetykę. Rękopis oceniali troskliwie naprzód Pfleyderer, a następnie inni członkowie Towarzystwa, a piérwszy komunikował autorowi rezultaty tych uwag, który odpowiednie zmiany wprowadzał. Na tłomacza wybrano eks-jezuitę Jędrzeja Gawrońskiego (ur. w r. 1740), wychowańca uniwersytetów w Wiedniu i Rzymie, byłego nauczyciela w kolegijum jez. w Poznaniu (gdzie robił obserwacyje astronomiczne), lektora królewskiego, kanonika i późniéj biskupa (1804—1813) krakowskiego, którego przekład arytmetyki czytano i niekiedy modyfikowano na pełnych sesyjach Towarzystwa. Czytanie to trwało od połowy stycznia do końca kwietnia na cotygodniowych posiedzeniach (taki sam był tryb postępowania w jesieni r. 1778, w r. 1779 i 1780 z obu częściami *Geometryi* Lhuilier'go; z jego zaś *Algebry* w r. 1781 czytano już tylko wyjątki; tłomaczem obu dzieł również Gawroński). Od lutego r. 1782, w miejsce Pfleyderera, powołanego do pracy w kraju rodzinnym, wszedł do Towarzystwa Lhuilier, sprowadzony do kraju przez ks. Czartoryskiego (w tymże roku Lhuilier ogłasza w Warsz., zalecone przez Tow. do ks. elem. nauczycielom szkół, dzieło: «De relatione mutua capacitatis et terminorum figurarum geometrice considerata: seu de Maximis et Minimis, pars prior, elementaris») i czynny udział w jego pracach przez lat parę przyjmuje. Tak wypracowana *Arytmetyka dla szkół narodowych* wyszła w r. 1778 w drukarni Szkoły Głównéj w Krakowie, a następnie, również pod opieką tegoż Towarzystwa, tamże w r. 1785, 1786 (8-vo, str. 248); późniéj zaś pojawiają się różne jéj wydania w Wilnie, Warszawie i Krakowie w r. 1802, 4, 7, 9, 10, 11, 14, cztéry w jednym r. 1817, w r. 1819 i niekorzystnie zmienione w 1841 (Tryb., str. 383). Autor tego podręcznika, Lhuilier (ur. w r. 1750 w Gienewie), z innego jeszcze konkursu wyszedł zwycięsko: w r. 1786 otrzymał nagrodę akademii berlińskiéj za pracę na ogłoszony temat: «jakie pojęcie jasne i dokładne należy sobie utworzyć o nieskończoności w matematyce». Ogłosił on pofrancusku i połacinie bardzo wiele prac, odnoszących się do matematyki tak elementarnéj, jak i wyższéj. «Był on przeważnie człowiekiem rozważnym i profesorem wytrawnym. Rzu«cił światło na wiele ciemnych punktów teoryi, nie przywiązawszy swego na«zwiska do jakiegoś znaczniejszego odkrycia» [2]). Owóż właśnie, *Arytmetyka*

[1]) «Kto nie nauczył się rozważać, nie jest wykształcony, lub jest źle wykształcony, «co jest jeszcze gorsze.»

[2]) «Winniśmy jednak zaznaczyć, zdaje się słusznie, jego roskład na czynniki sumy «lub różnicy dwu ilości wykładniczych, jego rozwiązanie zadania o wpisaniu w koło wie-

dla szkół narodowych najwięcéj może przekonywa o tych przymiotach autora. Przedewszystkim Lhuilier, mając pisać algiebrę i gieometryją, ograniczył mądrze zakres arytmetyki, nie wtłaczając w nią tego, co jest obcym arytmetyce. Dzieło składa się z czterech części: I. «O rachunkach w liczbach całkowitych», II. «Zamykająca w sobie cztéry arytmetyczne działania na liczbach wielorakich, to jest różne gatunki rzeczy oznaczających» (str. 79), III. «O rachunkach w liczbach łamanych» (str. 106), IV. «O regule trzech» [1] (str. 164—248 w 3-im wyd.). Zaznajomiwszy ucznia przy pomocy sposobów poglądowych z najprostszymi liczbami i działaniami na nich (przyczym bardzo szczegółowe i trafne czyni uwagi), autor, nie stawiając żadnych zgóry określeń lub prawideł, metodą ściśle indukcyjną uczy wykonywania działań na liczbach, wychodząc zawsze z zadań na liczby mianowane. Ścisłym i przystępnym rozumowaniem objaśnia każdy krok, nie przechodzi jednak nigdy w pedantyczność. Prawidła wypowiada dopiéro po przerobieniu wielu zadań. Podaje wciąż trafne uwagi, które dziś bynajmniéj nie są przestarzałe. Osobliwie jest troskliwy, by wielkimi liczbami nie przygnębiać dziecięcych umysłów, a drobiazgowe i słuszne podaje wskazówki, jak mianowicie zachować stopniowanie przy wyborze liczb, poczynając od łatwiejszych. Rozróżnia doskonale w działaniach liczby oderwane od mianowanych, zaznacza starannie dwojakie założenie dzielenia i t. d. Sam Lhuilier scharakteryzował swą pracę następującą uwagą, którą wypowiada przy części trzeciéj, t. j. przy rospoczęciu nauki o ułamkach: «żeby uczniowie, nie napamięć i za samymi tylko regułami idąc, uczyli się rachunków na liczbach łamanych, ale przy każdym przykładzie im podanym zastanawiali się i uważali, jakby ich sam rozum do tego, a nie innego sposobu rachowania prowadził, choćby żadnych nawet prawideł na to nie było, które zapewne nie skądinąd się wzięły, tylko z pilnego «uważania i rostrząsania natury każdego w szczególności działania». Z układu książki widać, iż Lhuilier rozumiał nauczanie tylko na lekcyi, był nieprzyjacielem wszelkich zapamiętywań reguł i postępowań mechanicznych. Z głębokim przeświadczeniem wypowiadamy nasze przekonanie, iż dzieło to jest najlepszym, z istniejących, zbiorem wskazówek dla uczących, jak prowadzić w wielu razach zajęcia w czasie lekcyj. Jako takie dzieło, polecamy je dla uważnego odczytania go wszystkim starannym nauczycielom. — Wracając jeszcze do książki (nie mamy co przytaczać tu jéj treści), tu jeszcze tylko zaznaczymy, że wykład ułamków dziesiętnych, jako ułożony w epoce przed rospowszechnieniem się ich pod wpływem systematu metrycznego, jest bardzo krótki. Zadania zaś na regułę trzech są rozwiązywane i objaśniane znakomicie zapomocą sprowadzania do jedności lub niekiedy metodą roskładową. (Rzecz bowiém o stosunkach i proporcyjach Lhuilier wykłada w rozdziale VIII części I *Geometryi dla szkół narodowych.*) Oddzielne kwestyje należy teraz w szkole średniéj ogólnéj wykładać nieco inaczéj, uwzględniając więcéj stronę teoretycz-

«kąta, którego boki przechodzą odpowiednio przez punkty dane, nakoniec jego zastosowa- «nie do trójkątów kulistych prostokątnych twierdzenia o kwadracie przeciwprostokątnéj». «Umarł około r. 1810». Larousse *Grand dictionnaire universel du XIX siècle* (Paryż, 1873, artykuł «L'Huillier».)

[1]) O Regule Trzech prostéj (Directa). O Regule trzech odwrotnéj (inversa). Uwagi stosujące się do dwóch rozdziałów poprzedzających O Regule procentu i o Regule odtrącania onego. O Regule spółki (societatis). Przystosowanie Reguły Trzech do zamian pieniędzy. Przystosowanie reguły trzech do miar i wag w miastach znakomitszych Europy używanych. O Regule trzech Składanéj (Composita). Wykład niektórych skróceń i praktycznego używania Reguł poprzedzających.

ną, ale zresztą nastrój tej książki jest zupełnie dzisiejszy [1]). Przekład GAWROŃSKIEGO jest na owe czasy znakomitym pod względem języka, z którym nie mogą iść w porównanie wyliczone poprzednio arytmetyki polskie w. XVIII. GAWROŃSKI położył w tłomaczeniach dzieł LHUILIER'go podwaliny naszego dzisiejszego języka matematycznego, doskonalonego poźniéj przez JANA ŚNIADECKIEGO.

Pominęlibyśmy nader ważny rys w reformie nauczania u nas wogóle, przez Komisyją Edukacyjną przeprowadzonego, gdybyśmy tu choć nie zaznaczyli pieczołowitości, z jaką ta magistratura zajęła się sposobieniem nauczycieli szkół średnich. Objąwszy zarząd wszelkich szkół, któreteż prawie wszystkie bez szemrania mu się poddały, Komisyja Edukacyjna zrazu zaprowadziła w nich tymczasowe zmiany, a przez swoich wizytatorów gromadziła materyjały do gruntownéj szkół naprawy. Ostatecznie projekty [2]) reformy obu akademij w Krakowie i Wilnie (nazwanych Szkołami Głównymi), wszystkich szkół średnich, oraz ogólne uwagi o szkołach parafijalnych uległy kodyfikacyi w Towarzystwie do ksiąg elementarnych. Z protokółów tego Towarzystwa (którego członkiem już przedtym został ks. HUGO KOŁŁĄTAJ) widać, iż od początku r. 1781 do końca kwietnia wszyscy członkowie Towarzystwa gorliwie wypracowywują oddzielne części projektu, którego ostateczną redakcyją prowadzi PIRAMOWICZ. Tegoż roku we wrześniu rozdano uroczyście przepisy pod tytułem jeszcze «Projektu» zgromadzonym w Warszawie rektorom szkół wydziałowych koronnych, natychmiast wprowadzono je w życie w całym kraju, a w r. 1783 wydano je (z pewnymi zmianami), jako obowiązujące «*Ustawy... dla stanu akademickiego*» (t. j. nauczycielskiego Szkół Głównych, wydziałowych i podwydziałowych). Z tych *Ustaw* [3]) łatwo widzieć można, jak wielki już nacisk położono wówczas na przygotowywanie nauczycieli szkół średnich, jaką ważność téj sprawie nadano, jak rozumnie i troskliwie obmyślono te ramy, które już

[1]) W r. 1816 na posiedzeniu warszawskiego towarzystwa przyjaciół nauk wystąpił Pijar ANTONI DĄBROWSKI, prof. uniw. warsz., z powierzchowną rozprawą: *Uwagi nad sposobem dawania matematyki w szkołach publicznych*, w której stawia takie zarzuty *Arytmetyce dla szkół narodowych* (str. 23 odbitki): «1-ód, że nie wszystkie działania fundamentalne są «tak gruntownie wyłożone, jak być powinny, czego dowodem jest, że najlepszy z uczniów, «umiejący całą Arytmetykę z LHUILIER'go, zapytany o iloczyn, gdy jest mnożnikiem zero, «zawsze prawie da fałszywą odpowiedź, i nigdy dostatecznie nie wyłoży, dlaczego niektóre «iloczyny są mniejsze od swoich czynników, a niektóre ilorazy większe aniżeli dzielna; «2-re, że na działania trudniejsze nie podaje prawideł, które jednak w umiejętnościach «i naukach tym są, jak powiedział CONDILLAC, czym są poręcze na moście, nie żeby pomagały «podróżnym do przeprawy, lecz żeby broniły ich od upadku». Drugi zarzut nie jest słuszny: prawidła główniejsze LHUILIER podaje, tylko nie wyróżnia ich szczególnym drukiem, a, wierny swéj zasadzie, wyżéj przytoczonéj, ciągle rozumując, na prawidła się nie powołuje, lecz postępuje «jak sam rozum do tego prowadzi». Nie podaje zaś prawideł np. na wykonywanie dzielenia liczb całkowitych, które więcej jest ćwiczeniem na poprawne dość trudne opisanie postępowania, dobrze już przez ucznia pojętego, niż ową «poręczą na moście». Co się zaś tyczy zarzutu pierwszego, to druga jego część jest słuszną: rzeczywiście, LHUILIER odpowiedniego nacisku nie robi. Za to początkowa część zarzutu pierwszego nie przynosi zaszczytu wypowiadającemu go. Zero występuje jako liczba dopiero w algiebrze; w arytmetyce zaś jest znakiem, służącym do zapełnienia miejsca niezajętego przez cyfrę znaczącą. Dlatego dobry nauczyciel nigdy nie użyje w arytmetyce wyrażenia: mnożyć przez zero, lub zero mnożyć przez oznaczoną liczbę. Żadne zadanie arytmetyczne do czegoś podobnego nie doprowadza.

[2]) Najważniejszy projekt przedstawił wzmiankowany wyżéj POPŁAWSKI (*Mowa* PIRAMOWICZA 7 marca r. 1782, str. 13).

[3]) *Ustawy* te przedrukowano w r. 1872 we Lwowie jako tom I *Biblijoteki pedagogicznéj i dydaktycznéj*.

wypełnić miała gorliwość i talent wykonawców. Tu tylko przytoczymy fakt, najlepiéj mówiący o przejęciu się Komisyi Edukacyjnéj ważnością téj myśli jeszcze przed wygotowaniem *«Projektu»*. W r. 1780 kandydatów ze szkół wydziałowych litewskich wysłano na koszt Komisyi do lepszéj ówcześnie Szkoły Głównéj w Krakowie i jednocześnie Komisyja posłała do Jana Śniadeckiego wezwanie do Paryża, aby podróż swą do Anglii odłożył na czas późniejszy, a jaknajprędzéj zjechał do Krakowa dla zajęcia się owymi kandydatami.... Przy tak sposobionych nauczycielach poważny był nastrój, a owocna działalność tych szkół, w których pracowali, lub późniéj już tylko dosługiwali swych lat owi byli kandydaci Komisyi Edukacyjnéj. Oddziaływali ci ostatni swym przykładem na młodszych, nie tak troskliwie już przygotowywanych, nauczycieli, jak o tym świadczyły doniedawna jeszcze żywe wspomnienia ludzi starszych.

Jeszcze jeden owoc działalności owego Towarzystwa do ksiąg elementarnych wchodzi w zakres naszego przedmiotu. Od pierwszych dni swego istnienia, Towarzystwo, jak to widać z jego protokółów, troska się ciągle o elementarz dla szkół początkowych. Różne projekty powstają, rozmaite przygotowania się robią. Nie do nas należy kreślić ciekawe dzieje tych obmyślań. Ostatecznie wydany został w r. 1785 *«Elementarz dla szkół parafiialnych narodowych»* (w drukarni Szkoły Głównéj koronnéj; egz. bibl. głów. w Warsz.). Składa się on z cztérech części: I. Nauka pisania i czytania (str. 43), II. Katechizm początkowy (str. 44—48) (autorem obu części członek Tow., Pijar Onufry Kopczyński), III. Nauka [1]) obyczajowa (str. 1—54) (Piramowicza) i IV. Nauka rachunków (str. 55—120) (Gawrońskiego). Ta *Nauka rachunków* pozostanie nazawsze niespożytym dowodem, iż metoda poglądowa w zastosowaniu do arytmetyki została do naszych szkół początkowych wprowadzona i systematycznie była w nich uprawiana jeszcze w wieku XVIII, nadługo przedtym, nim ją już w bieżącym stuleciu jako nowy całkiem pomysł zaczęto wysławiać na zachodzie, skąd późniéj, jakby świeżą zdobycz dydaktyki, przesadzono do nas. Wprowadzenie téj metody odbyło się wtedy u nas cicho, poważnie; krzewiciele jéj, przejęci tylko ważnością sprawy, tak dalece nie dbali o rozgłos, że nawet imiona autorów różnych części *Elementarza* nie są zaznaczone w zwykłéj aprobacie Komisyi Edukacyjnéj i w żadnym sprawozdaniu lub artykule wydrukowane nie były, tak iż je po raz pierwszy tu stanowczo, nie zaś jako domysł tylko, podajemy. Powiedziano tam tylko, iż to dzieło «od Towarzystwa do Xiąg Elementarnych roztrząśnione». Cała *Nauka rachunków* ma te główne zalety, jakich od podobnego dzieła dziś wymagać możemy. Przystępność, jasność, stopniowanie właściwe, objaśnienia trafne: to cechy ogólne. Co się tyczy szczegółowego wykładu, powiémy tu tylko o rozdziale I, «O liczeniu» (str. 55—65), jako przedstawiającym najwięcéj trudności w podobnéj pracy. Mamy tedy naprzód w trzech rzędach: kropki, wypisane liczebniki i cyfry (1 do 9). Według objaśnienia, należy przechodzić od któréjkolwiek do następnéj przez powiększenie o 1, a potym: «Dla większéj «Uczniów wprawy, weźmie nauczyciel dziewięć sztuk groszy miedzianych, «albo, co najłatwiéj mieć można, dziewięć ziarn grochu lub innego zboża,

[1]) Przedrukowane również we lwowskiéj *Bibl. ped. i dyd.* znakomite dzieło Piramowicza *«Powinności nauczyciela mianowicie zaś w szkołach parafijalnych...»* (pierwotnie wydane w r. 1787) miało wejść do składu drugiéj części elementarza, która w całości nie doszła do skutku.

«i dając jedno naprzykład ziarno któremu z Uczniów, spyta się, ile ma ziarn «w ręku? odpowié: *jedno;* gdy mu do tego przyda jeszcze jedno ziarno i spy- «ta się, ile ma ziarn w ręku? odpowié: *dwa*... Niech to samo powtórzy «z kilku innymi Uczniami. Niech im samym potym każe rachować od jednego «ziarna do dziewięciu. Niech naostatek sam bierze, albo któremu z Uczniów «daje po kilka razem ziarn na rękę, a drudzy niech zgadywają przez samo «widzenie, ile ma ziarn na ręku. Gdy już dobrze liczyć będą umieli od je- «dnego do dziewięciu, niech im powié, że te słowa, liczby oznaczające, które «wymawiali, a które mają w drugim rzędzie pod kropkami podpisane, mogą «się krócéj wyrazić i w saméj rzeczy wyrażają tak, jak trzeci rząd okazuje, «gdzie zamiast tego słowa: jedno piszę się 1, zamiast.... Każe im podobne pi- «sać na tablicy i potym wymawiać, tak, jak mają w drugim rzędzie. Powié «im, że nie masz więcej, jak tylko te dziewięć znaków liczbowych i że nimi «choćby największe liczby można oznaczyć, jako to potym obaczą. Zwróci «się jeszcze z nimi do wzoru i powié krótko, że jaką liczbę mają kropkami «oznaczoną w piérwszym rzędzie, tęż samę mają słowem, pod nią podpisanym, «wyrażoną w drugim rzędzie, a w trzecim rzędzie pod tymże słowem mają «znak liczbowy toż samo, co i słowo, krócéj wyrażający. Będzie, wyrywając, «pytał się ich, ile jest gdzie kropek, palcem na nie, lub skazówką skazu- «jąc i jak się ta liczba kropek znakiem liczbowym wyraża.» Umyślnie przy- toczyliśmy cały ten ustęp, aby dać czytelnikowi możność zrozumienia nastro- ju, jaki nietylko w tym rozdziale, ale w całym znakomicie obmyślanym ele- mentarzu się przebija. Dalsze stopnie nauki o liczeniu są: dziesiątki: 10, 20, ..., 90; świetny wykład liczb pośrednich między tymi dziesiątkami; set- ki: 100, 200, ..., 900 i krócéj już o liczbach pośrednich; tysiące: 1000, 2000, ..., 9000 i nakoniec ogólny zarys pojęcia o liczbach, mających więcéj cyfr. Na zakończenie tego rozdziału: «i uczyni im otuchę, że gdy teraz uczyć «się dobrze będą, a potym na kawałek chleba pracowicie zarabiać, tedy mają «się spodziéwać, że co teraz na ziarnach rachowali, to potym ten rachunek, «a może i większy, na pieniądzach uczciwymi sposobami zebranych czynić bę- «dą mogli». Rozdziały II—V poświęcone cztérem działaniom; przy mnoże- niu rzecz o miarach; w rozdziale o dzieleniu postępowanie przygodne z liczbami wielorakimi. Rozdział VI «O regule trzech», gdzie są rozwiązywane naj- prostsze zadania, według tego, jak «rozum sam naturalny człowieka podał «sposób postępowania sobie w tym działaniu». —

Niezależnie już od Komisyi Edukacyjnéj, nakładem Stanisława-Augusta wyszła w cztérech tomach «*Nauka matematyki* do użycia artyleryi francuskiéj, napisana przez p. Bézout na polski język przełożona...» (1781—2) przez Józefa Jakubowskiego, «Kapit: i Profes: Ar: Kor:». Piérwsza część tomu I, «*Fundamenta rachunków*» (str. 208 i XVI), przedstawia kurs arytmetyki, wraz z nauką o proporcyjach, o wyciąganiu piérwiastków kwadratowych i sześciennych, o postępach, oraz o logarytmach, tak gruntownie i systematycznie, a jasno opracowany, iż to dzieło Bézout wciąż jeszcze wychodzi we Francyi w ponawianych wydaniach. Jest to najlepszym dowodem trafności wówczas wyboru tego dzieła do przekładu. Arytmetyka Bézout przedstawia niejako dopełnienie arytmetyki Lhuilier'go. Gdy druga uczy praktycznie i trafnie cztérech działań na liczbach całkowitych, ułamków i rozwiązywania zadań, to piérwsza systematyzuje te wiadomości, uzupełnia je pod względem teoretycznym traktowaniem gruntowniejszym ułamków dziesiętnych (odrazu łącznie z liczbami całkowitymi) i szczegółowym przedstawieniem własności stosunków i proporcyj, a nadto wnosi do naszéj literatury piérwszy należyty wykład wzmiankowanych dalszych części tego dzieła. Szwankuje ona tylko pod względem słownictwa, które u Jakubowskiego jest zbytnie oryginalnym.

Wydanie u nas w ostatniéj ćwierci wieku zeszłego trzech ostatnio tu zaznaczonych arytmetyk zapowiadać się zdawało jaknajlepiéj o dalszym rozwoju nauczania arytmetyki u nas. Możebytéż to nastąpiło przy innych, przyjaźniejszych warunkach ogólnych. —

Przechodzimy nakoniec do wieku XIX. Nie możemy tu ani wyliczać wszystkich dotąd wydanych arytmetyk, ani tymwięcéj o każdéj z nich mówić szczegółowo. W kilkakrotnie już przytoczonym artykułe Trybulskiego czytelnik znajdzie (str. 386—396) wyłożenie wypracowywanych, głównie w Niemczech, w bieżącym już wieku, i metod nauczania początków arytmetyki (Pestalozzi, Disterweg i Heuser, Hentschel, Grube i ich następcy), jakotéż (str. 397—410), przegląd, niekiedy zbyt łagodny, ważniejszych polskich książek, do tego się odnoszących. Pozostaje więc nam wspomnieć już tylko o tych arytmetykach, które poświęcone są przeważnie systematycznemu jéj wykładowi. Oczywiście, ograniczymy się tylko na tych, o których wpomnieć warto, choćby ze względu na ich rospowszechnienie.

Chcąc wogóle mówić o naszych arytmetykach wieku bieżącego, mimowoli staje się przedewszystkim wobec pytania, dlaczego one nie przedstawiają dalszego rozwinięcia tego poglądu na nauczanie, który widnieje ze znakomitéj książki Lhuilier'go, dlaczego niéma najmniejszego śladu jéj oddziaływania, dlaczego pod względem dydaktycznym tylko upadek zaznaczyć należy? Trafną nam się wydaje uwaga Trybulskiego (str. 396): «Autor jéj (-Lhuilier-), «nie wykazawszy błędów dawnéj metody i nie potępiwszy jéj ani jednym słów«kiem, tymsamym pozwolił rutynistom ignorować ją i pogrążyć się napowrót «w błogim spoczynku besczynności; wyłożywszy zaś swoje zasady ze spoko«jem iście matematycznym, zyskał wprawdzie uznanie światłych mężów Ko«misyi Edukacyjnéj, ale nie wzbudził w tłumie entuzyjazmu, tak niezbędnego «dla przeprowadzenia w masy jakiéjkolwiek nowéj idei; tym zaś sposobem «nie ściągnął na siebie gniewu i piorunów przeciwników, aletéż i nie zjednał «dla swéj idei gorących zwolenników i apostołów. Dlategotéż zasady Lhui«lier'go, jakkolwiek nadzwyczajnéj doniosłości, nie przeszły prawie poza «obręb jego własnego dziełka». — Okolicznościowo zaznaczymy tu, iż szkoły średnie okręgu wileńskiego, zostające pod bespośrednim zarządem uniwersytetu w Wilnie i jego rektora Jana Śniadeckiego, używały głównie *Arytmetyki dla szkół narodowych*.

Józef Czech, naprzód profesor matematyki elementarnéj w Szkole Głównéj koronnéj w Krakowie, a następnie piérwszy dyrektor gimnazyjum wołyńskiego w Krzemieńcu, tłomacz *Elementów* Euklidesa, wydał w r. 1807 w Wilnie *Krótki wykład arytmetyki*, tamże przedrukowywany następnie w l. 1809, 11, 16, 17, 27 i 28. Dziwny jest układ téj książki. Część piérwsza (do str. 98 wyd. z r. 1817) jest zestawieniem tego, co uczniowie, źle przez nauczyciela prowadzeni, nazywają niekiedy: teoryją, t. j. zbiorem definicyj i prawideł, a gdzieniegdzie objaśnień, w rodzaju np. podanego po prawidle na mnożenie liczb dziesiętnych: «Przyczyna tego działania gruntuje się na naturze i spo«sobie znaczenia ułamków dziesiętnych» (str. 17; żadnego dodatkowego niéma już objaśnienia). Toż samo w ustępach o podnoszeniu do kwadr. i sześ. i wyciąg. piérw., o postępach i o logarytmach (te ostatnie jeszcze stosunkowo najlepiéj). Reguła trzech (str. 60—62, 66—67) ledwo zaznaczona.

Część druga (str. 99—127) obejmuje «Wzory działań», jakby wyciąg z zeszytu ucznia, w którym były przerabiane zadania; pozbawione zwykle wszelkich objaśnień. Czech położył jako wychowawca wielkie zasługi w szkole krzemienieckiéj, czego dowodem powszechny i tak poważnie wyrażony [1]) żal po jego śmierci w r. 1810. Może nauczyciel arytmetyki za dyrektorstwa Czecha (który wykładał algiebrę), Antoni Strzelecki, pomimo takiego podręcznika dobrze naukę arytmetyki prowadził, ale Czech wydaniem téj książki nie zasłużył sobie bynajmniéj na zaszczytną wzmiankę. Słusznieteż delegacyja uniwersytetu wileńskiego w r. 1811 nie uznała za możliwe wprowadzenie arytmetyki Czecha, używanéj w szkole krzemienieckiéj, do innych szkół zostających ówcześnie pod pieczą Czackiego [2]).

Wielką w swoim czasie wziętością cieszyły się «*Zasady arytmetyki* ułożone przez byłego profesora matematyki w szkole departamentowéj» (Radomińskiego), ogłoszone w Warszawie w r. 1821, a późniéj powiększone w r. 1827 (str. 258 i VI tablic miar), podzielone na dwie części w l. 1832—4 i oddzielnie część piérwsza 1841 i 1858. Dzieło Radomińskiego obejmuje tenże zakres głównéj treści, co książka Czecha, i również w nim wykład ułamków dziesiętnych jest prowadzony razem z liczbami całkowitymi. Jest ona jednak kursem bezwarunkowo starannie obmyślonym i troskliwie opracowanym. Wprawdzie jest to kurs właściwie dedukcyjny; nawet podawane przepisy wykonywania działań są późniéj dopiéro objaśniane, którymto objaśnieniom łatwo niekiedy wiele zarzucić można; tu i owdzie niepotrzebne wycieczki (np. przy odejmowaniu: «różnica może być większa niż liczba, od któréj się odejmowało» i naturalnie: «majątek» i «dług», str. 21), i t. d., tak iż książki téj ani pod względem metody, ani objaśnień przytoczonych, ani gruntowności rozumowania, anitéż jasności wogóle nie można postawić obok *Arytmetyki dla szkól narodowych*, albo *Fundamentów rachunków*. Lecz w każdym razie, wyczerpującym zaznaczeniem różnych szczegółów, jakoteż właściwym sobie systematem w całym wykładzie, pracowitością nakoniec widoczną z całego tego dzieła, daje się wytłomaczyć uznanie, jakim ta książka przez dość długi przeciąg czasu się cieszyła.

W r. 1844 znany filozof i zacny obywatel, Karol Libelt, ogłosił w dwu tomach «*Wykład matematyki dla szkół gimnazyjalnych*» (Poznań). Początkowa część tomu I (str. 11—164) przedstawia piérwszą próbę przeszczepienia na nasz grunt niefortunnéj koncepcyi niemieckiéj, t. z. «allgemeine Arithmetik», albo «Buchstabenrechnung». W téj książce (przyjmując, że uczniowie przeszli już pobieżny kurs początków rachunków) wykłada się ogólnie sześć działań algiebraicznych na literach, mogących otrzymywać także wartości ujemne, mówi się także o liczbach niewymiernych i nieco o urojonych, a następnie dopiéro przeprowadza się w zastosowaniu, a więc na podstawie algiebraicznych prawideł, po raz piérwszy systematyczny wykład właściwéj arytmetyki, przy przerabianiu dowodzeń, gdzie tylko można, na literach (które mogą teraz oznaczać tylko liczby dodatne). Tak np. w rozdziale «O rachunkach praktycznych» dowodzi się różnych twierdzeń ogólnych. Przytoczymy tu jedno z takich twierdzeń: «Jeżeli z sześciu ilości danych A, B, C, D, M, N, (rozumiejąc «ich wartości), M zależy od A i B, a N zależy od C i D, tak, że ilekroć

---

[1]) Zob. artykuł dra Piotra Chmielowskiego *Czacki Tadeusz* w *Encyklopedyi wychowawczéj* (t. III, 1883, str. 63).

[2]) Zob. tamże str. 66.

«B = D, to M : N = A : C, a ilekroć A = C, to M : N = B : D, natenczas «M : N = (A . B) : (C . D)». Po dowiedzeniu tego twierdzenia, 4 wnioski podobnie wysłowione i odpowiednio uzasadniane. A to wszystko dla rozwiązywania zadań takiego typu: «Kiedy 4 robotników w 5 dniach wykopuje 48 prętów «szachtowych ziemi, ilu trzeba robotników, ażeby w 6 dniach 216 prętów było «wykopanych?» — Układ ogólny téj części dzieła był do pewnego stopnia narzucony Libeltowi wymaganiami programu w poznańskim obowiązującego; z przedmowy jego jednak widać, że takie traktowanie rzeczy wydało mu się pomysłem bardzo szczęśliwym, tak iż ani złych stron ogólnie dydaktycznych téj metody, ani tego, że ona jest nieodpowiednią dla naszéj młodzieży [1]), Libelt zgoła nie dostrzegał. Przy tym jednak systemacie, jaki Libelt w téj pracy przyjął, zaléca się ona ścisłością przeprowadzenia całego kursu.

Również część I *Elementarnego wykładu matematyki* przez Jana Kantego Steczkowskiego, profesora na uniwersytecie Jagiellońskim, obejmująca *Arytmetykę* (dwa wydania towarzystwa naukowego krakowskiego, w r. 1851 i 1861; 2-ie str. 327), przedstawia wykład arytmetyki na podstawie algiebry. Rolę, jaka tu przypadła arytmetyce, dosadnie scharakteryzuje ten fakt, że reguła trzech, jako zastosowanie proporcyj, wraz z nauką o proporcyjach znalazła się po ułamkach ciągłych, dwumianie Newton'a, pierwiastkach, liczbach niewymiernych i urojonych i logarytmach. Jednak niektóre ustępy arytmetyczne, jak o podzielności liczb i o ułamkach, posiadają istotne zalety. Pod względem zaś ścisłości metodycznéj wykładu dzieło Steczkowskiego nie dorównywa pracy Libelta. Przeznaczenie *Arytmetyki* Steczkowskiego dopiéro dla klas «wyższych, począwszy od czwartéj» usprawiedliwia do pewnego stopnia nastrój w jéj wykładzie.

Wadliwości dydaktyczne programu matematyki, obowiązującego w szkołach średnich austryjackich, zostały jeszcze spotęgowane nieporządkiem w rozkładzie treści, zbytnim naciskiem na kwestyje drugorzędne w podręcznikach Močnika, których tłomaczenia i przeróbki gnębią naszę młodzież w szkolach galicyjskich. Różne owe opracowania arytmetyki dla wszelkich szkół, od początkowych począwszy, pojawiają się wciąż w Galicyi w licznych wydaniach od r. 1847. Wychowanie na tych arytmetykach wielu pokoleń, które może nadto już do takich kursów przywykły, aprobacyja władz szkolnych, nie dostrzegających, jak szkodliwe dla młodych umysłów jest pozbawienie ich tego pożytku, jaki z dobrego prowadzenia nauki arytmetyki na całe wychowanie wynika, jest może przyczyną tego, że w Galicyi (pozbawionéj nadto niegdyś zbawiennego wpływu Komisyi Edukacyjnéj) żadnéj niéma jakkolwiek poważnéj samodzielnéj pracy arytmetycznéj. Prawdopodobnie sumienni i światli nauczyciele w szkołach galicyjskich ograniczają się na usunięciu w samym nauczaniu tych wad, jakie przedstawiają te książki Močnika i ich tłomaczenia lub opracowania.

---

[1]) Mając na myśli stopniowe rozbudzanie ścisłego myślenia, zdolności kombinacyjnych, oraz istotne przyswajanie sobie treści nauczanych części matematyki przez uczącą się *naszę* młodzież, wypada dla szkoły średniéj ogólnéj za najwłaściwszy uznać taki porządek, kiedy po starannéj nauce o liczbach całkowitych, ułamkach, proporcyjach, jednocześnie z przechodzeniem reguły trzech rospoczyna się nauka algiebry, w któréj po czterech działaniach, ogólnie z ciągłymi liczebnymi objaśnieniami traktowanych, po przerobieniu troskliwie dobranych zadań na ułamki algiebraiczne, w celu rozwinięcia samodzielnego myślenia uczniów starannie prowadzonym kursem układania i rozwiązywania równań stopnia 1-go z warunków zadania poprzedzą się naukę o podnoszeniu do potęgi i wyciąganiu pierwiastka...

Arytmetyka wydana w Warszawie (1858—9) przez okrąg naukowy, trzy części (z zadaniami) na klasy I (str. 129), II (str. 100), III (str. 150), a IV (str. 128) o sposobie prowadzenia rachunku pamięciowego, uwagi dydaktyczne i rozwiązania zadań, napisana przez A. Zabiełłę, zaléca się dobrym wprowadzeniem pojęcia o ułamkach, ustępem o objaśnieniu miar powierzchni i objętości i t. d. Całość jednak kursu nie przedstawia ani systematycznego opracowania, aniteż zalet wybitniejszych pod względem dydaktycznym.

Znacznie lepszą od poprzedniego kursu jest *Arytmetyka* K. Grubeckiego wydawana w Warsz. w l. 1857, 65, 67 (str. 208) i 78, obejmująca w starannym i dość systematycznym wykładzie naukę o liczbach całkowitych i ułamkach wraz z trafnymi zadaniami. Po śmierci K. Grubeckiego wydana została przez Michała Grubeckiego (1867) część druga, obejmująca proporcyje, regułę trzech i o podnoszeniu do kwadr. i wyciąganiu pier. kwadr., również z zadaniami (str. 190). W niektórych ustępach widoczną jest taż sama staranność i istotna znajomość przedmiotu, która zaléca część piérwszą, inne za to ustępy nie dochodzą do tego poziomu. Osobliwie końcowy ustęp o regule fałszywego założenia jest bardzo słaby.

Nakoniec, «*Arytmetyka* z teoryją przybliżeń liczebnych» G.-H. Niewęgłowskiego (Paryż, 1866, str. 352), wydana nakładem hr. Jana Działyńskiego, który tak hojnie podtrzymywał ruch naukowy na polu nauk ścisłych, zaléca się obfitością szczegółów poruszonych. Nauka o proporcyjach i regułach po wyciąganiu pierw. kw. Wykład cztérech działań na liczbach całkowitych bardzo pobieżny. Nawzór książek francuskich metoda w tym dziele zachowana jest dedukcyjną. Układ i sposób przedstawienia oddzielnych ustępów bardzo się zbliża do lepszych książek francuskich, poświęconych teoretycznemu wykładowi arytmetyki. Wyczerpanie zupełne nakładu, pomimo tego, że w tym dziele potrzeby szkół naszych nie były uwzględnione, najlepiéj wskazuje, iż wykład ściślejszy zasad arytmetyki jest u nas na czasie. —

Wspomniany tu kilka razy artykuł Wincentego Trybulskiego, *Arytmetyka*, ogłoszony w *Encyklopedyi wychowawczéj* (r. 1880, tom I, str. 319—435) przedstawia wielce pracowite i sumienne studyjum. Wprawdzie początek, o różnych systematach liczenia, opracowany został głównie na podstawie niespecyjalnego dzieła Taylor'a w przekładzie francuskim (*La civilisation primitive*, tłom. pani Brunet), oraz przytoczonego już (str. XIII) niekrytycznego dzieła Hoefer'a, i wprawdzie na tym ostatnim, jak również na zeszłowiecznym dziele: Montucla, *Histoire des mathématiques*, opiérają się głównie tu i owdzie wzmiankowane fakta z historyi arytmetyki w starożytności i średnich wiekach, to jednak wielką zasługą Trybulskiego jest piérwsze tak mozolne rozejrzenie się w tych dawnych arytmetykach naszych, które mógł odnaléść w biblijotece główněj w Warszawie, właściwe ich ocenienie, jak również należyte podniesienie wartości zapomnianéj już prawie *Arytmetyki dla szkół narodowych*. Sam głównie zajęty nauczaniem początkowym (umarł w r. 1882 jako nauczyciel szkoły technicznéj dróg. żel. warsz.-wied. i warsz.-bydg. w Warsz.), ze szczególnym zamiłowaniem opracował ustęp o ruchu na zachodzie w wieku bieżącym na polu nauczania początkowego, jak również o śladach oddziaływania tego ruchu na odpowiednie nasze podręczniki. Ostatni ustęp artykułu obejmuje (od str. 410) wskazówki do nauczania początkowego arytmetyki, z których nie wszystkie (np. na str. 419, 421) trafiają do naszego przekonania.

Zakończymy ten niewątpliwie przydługi tu ustęp o stuleciu bieżącym choćby pobieżnym zaznaczeniem poważnych prac, odnoszących się do teoryi liczb. —

W tomie XVII (r. 1843) *Roczników* towarzystwa naukowego krakowskiego Karol Hube, profesor na uniwersytecie jagiellońskim, podał dowód twierdzenia Legendre'a: «Jeżeli $4cx+a$ jest jedna z form linijowych, odpowiada«jących dzielnikom $t^2 \pm cu^2$, każda liczba piérwsza zawarta w formie «$4cx+a$ będzie koniecznie dzielnikiem formuły $t^2 \pm cu^2$, a następnie bę«dzie miała jednę z form kwadratowych $py^2+2qyz+rz^2$, odpowiadają«cych formie linijowéj $4cx+a$.» Tego twierdzenia, udowodnionego dla szczególnych wartości c, Hube dowodzi dla każdego c. — P. Franciszek Mertens, profesor na uniwersytecie Jagiellońskim, ogłosił w dzienniku matematycznym Crelle'go w tomie LXXVII (r. 1874) *Ueber einige asymptotische Gesetze der Zahlentheorie*, a w tomie LXXVIII *Ein Beitrag zur analytischen Zahlentheorie.* Piérwsza z tych prac jest poświęcona mało uprawianéj gałęzi teoryi liczb, mianowicie wyznaczaniu wyrażeń granicznych dla sum niektórych szeregów liczb, według pewnego określenia po sobie następujących, czyli tak zwanych funkcyj liczebnych. Nad dwiema tylko z takich sum pracował uprzednio (w r. 1849) Lejeune-Dirichlet. P. Mertens uzupełnia dociekania swego poprzednika i bada sześć nowych podobnych sum, tak iż tą pracą otworzył nowe pole dla podobnych rostrząsań, teoretycznie wielce ciekawych, choć bardzo mozolnych ze względu na przedstawiające się trudności do pokonania. Druga zaś z wymienionych prac jest poświęcona ścisłemu dowodowi pewnych dwu wzorów Legendre'a, odnoszących się do ciągu liczb piérwszych postaci $4m+1$, $4m+3$ i wogóle $a+mk$, gdzie a i k są danymi liczbami piérwszymi względem siebie. — P. Julijan Sochocki, profesor uniwersytetu w Petersburgu, pomieścił w tomie X *Pamiętnika* towarzystwa nauk ścisłych w Paryżu (r. 1878): *Wyznaczenie stałych mnożników we wzorach dla linijowéj transformacyi funkcyi* Θ, *sumy* Gauss'*a i prawo wzajemności symbolów* Legendre'*a.* W téj pracy wyrażenie mnożnika stałego, wiążącego dwie funkcyje Θ, z których jedna powstała z drugiéj wskutek linijowego przekształcenia parametrów, wyznaczone przez p. Hermite'a przy pomocy pewnych wzorów Gauss'a i Cauchy'ego, p. Sochocki otrzymuje z własności elementarnych funkcyi Θ, a wyprowadzenie własności owego mnożnika prowadzi autora do znalezienia wartości sum Gauss'a, oraz do różnych własności charakterystycznych symbolu Legendre'a.

Styczeń r. 1884.

ERRATA.

str.	wiersz		zamiast	powinno być.
13	8	*od dołu*	50	70
„	7	„	rzędów	rzędów, 50
24	1	„	§-u	us.
49	19, 21	*od góry*	42	44
49	9	*od dołu*	(5	5 (
50	10	*od góry*	7648	7646
„	3	*od dołu*	większą	mniejszą
„	14	„	50 588	650 588
52	24	*od góry*	do	od
55	6	„	37	38
71	3	*od dołu*	jestto	jest to
95	21	*od góry*	4 łokieć	łokieć
116	14	„	17006 5151	17105 5131
124	6	*od dołu*	dm.	cm.
131	14	„	2615	2615 (sic)
132	6	*od góry*	garncy małych	garnce małe
134	14	*od dołu*	staj milowych	stajom milowym
135	16	„	dawny,	dawny
136	8	*od góry*	aby	że
„	12	„	wymierzone	wymierzane
„	13	„	oznaczone	oznaczane
138	13	*od dołu*	sażenia	sażeni
139	6	„	30 006	30086
142	4	*od góry*	15 m.	15 g.
„	31	„	30	50
„	4	*od dołu*	9	29
143	20	*od góry*	17 261 825	17 261 525
„	23	„	dg.	cg.
144	17	„	dnie	dni
146	22	„	29	27
153	1	*od dołu*	14, 15.	14.
159	28	„	podzielne	podzielna
172	11	*od góry*	89	88
„	25, 27	„	1	2
175	26	„	2	1
207	18	„	44	144
225	11	*od dołu*	12	12—15
268	4	„	20	16

str.	wiersz		zamiast	powinno być
271	3	*od góry*	2,8719	2,5719
302	1	*od dołu*	VII i IX	VII—IX
307	16	*od gory*	ułamkow	ułamkowe
,,	23	,,	3	2
322	22	,,	wprost	odwrotnie
324	11	,,	96	56
336	13	,,	$\frac{15 \cdot 85}{238}$	$\frac{15 \cdot 238}{85}$
,,	19	,,	Zarobek	Strata
341	17	,,	Ile	a. Ile
342	14	*od dołu*	się zmieniają	zmieniają się
344	9	,,	33	38
348	11	,,	840	860
350	3	,,	przyczyną	przyczynę
354	4	*od góry*	$\frac{6}{4+6+9}$.	$\frac{9}{4+6+9}$.
XXI	15	,,	post	post:
,,	16	*od dołu*	przestróg	7 przestróg
XXXVIII	9	,,	przeznaczony	przeznaczany
XL	4	,,	Glareani	Glareanus'a
XLI	13	,,	Stiffel	Stifel
XLIX	8	*od góry*	przeprowadzonego	przeprowadzonéj
LII	12	,,	i metod	metod

ARYTMETYKA.

ROZDZIAŁ I.

POJĘCIA WSTĘPNE. LICZENIE.

§ 1. POJĘCIA WSTĘPNE.

1. Aby zrozumiéć, czym jest l i c z b a, należy zastanowić się uważnie nad jakimkolwiek przykładem odpowiednim.

Gdy np. słyszymy kogoś mówiącego:

kupiłem *trzy* funty chleba,

to łatwo zauważymy, że tę samę myśl możnaby wypowiedziéć wyraźniéj, mówiąc:

kupiłem chleba *trzy razy więcéj niż jeden* funt.

Widzimy z tego, że w piérwszym wyrzeczeniu liczba *trzy* oznacza to samo, co w drugim wyrzeczeniu: *trzy razy więcéj niż jeden.* To zaś pojęcie «trzy razy więcéj niż jeden» wynikło, wogóle mówiąc, z p o r ó w n a n i a ciężaru kupionego chleba z ciężarem funta; mówiąc zaś ściśléj — z w y m i e r z e n i a ciężaru kupionego chleba ciężarem funta.

Przedmiot, który w takim porównaniu służy nam za podstawę porównania, czyli przedmiot, którym mierzymy inny dany przedmiot (jak w powyższym przykładzie: funt, którym mierzymy ciężar kupionego chleba), nazywamy j e d n o s t k ą. Możemy więc powiedziéć:

Jednostka jestto przedmiot, służący do wymierzenia innego przedmiotu, o którym chcemy miéć dokładne pojęcie.

Podobnie, wyrażenie: «przeciąg czasu *dwudziestu cztérech* godzin stanowi dobę» jest skróceniem wyrażenia «przeciąg czasu *dwadzieścia cztéry razy większego niż jedna* godzina stanowi dobę». W tym przykładzie przeciąg czasu, który rozumiemy przez dobę, porównywamy z godziną, w celu wymierzania go tą jednostką — godziną. Jako właśnie wynik z tego wymierzenia, otrzymujemy liczbę *dwadzieścia cztéry.*

Z tych dwu przykładów widzimy, że każda z tych liczb: *trzy* i *dwadzieścia cztéry* przedstawia się nam jako wynik z wymierzenia pewnego przedmiotu innym, przyjętym za jednostkę.

Do tegoż samego doprowadziłoby nas rozważanie innych przykładów.

2. Niezawsze jednak możemy pewne dwa przedmioty ze sobą porównywać, a tymmniéj wymierzać jeden z nich drugim. Tak np. ciężaru trzech funtów nie moglibyśmy porównywać z przeciągiem czasu jednéj godziny, a tymsamym mierzyć jednego z nich drugim.

Takie dwa przedmioty, które mogą być ze sobą porównywane, t. j. dwa takie przedmioty, z których jeden może być wyrażony przez drugi, nazywamy j e d n o r o d n y m i. Jednorodnymi więc np. będą nietylko: *pięć godzin* i *godzina*, ale także: *rok* i *miesiąc* (bo: rok możemy wyrazić jako dwanaście miesięcy, a nawzajem: miesiąc jako dwunastą część roku); również np. *dwa lata* i *sześć miesięcy* (bo: dwa lata jest to samo, co cztéry razy po sześć miesięcy, albo: sześć miesięcy jest czwartą częścią dwu lat).

Przedmioty, których nie można ze sobą porównywać, czyli takie, których wprost jednych przez drugie wyrazić nie możemy, nazywamy przedmiotami r ó ż n o r o d n y m i. Różnorodnymi więc będą np. *trzy funty* i *jedna godzina, łokieć linijowy* i *łokieć kwadratowy.*

3. Bespośrednio z tego wynika, że *jednostka jest jednorodna z przedmiotem, który tą jednostką mierzymy.* Gdy zaś liczba, jakeśmy widzieli, jest wynikiem z wymierzenia pewnego przedmiotu innym, przyjętym za jednostkę, więc możemy powiedzieć:

Liczba jestto wynik z wymierzenia pewnego przedmiotu innym, z nim jednorodnym, przyjętym za jednostkę.

Tak np. w wyrażeniu «kupiłem trzy funty chleba» liczba trzy jest wynikiem z wymierzenia *ciężaru* kupionego chleba *ciężarem* funta, przyjętym za jednostkę.

Podobnież, gdy mamy: trzy funty i dwanaście łutów cukru, to tu ciężar cukru wymierzamy naprzód ciężarem funta, a to, co jest już lżejsze od funta, wymierzamy ciężarem łuta. W téj więc *(jednéj)* liczbie mianowanéj złożonéj (porównaj niżéj ustęp 11-ty) używaliśmy przy wymierzaniu *dwu* (jednorodnych, różnych wielkością) jednostek i tymsamym, zgodnie z powyższym określeniem, mamy *dwie* liczby w ścisłym znaczeniu (por. us. 10): trzy i dwanaście. — Gdy zaś powiemy trzy i trzy-ósme funta cukru, to tu (jedna) liczba: trzy i trzy-ósme, jest wynikiem z wymierzenia ciężaru tego cukru (jedną) jednostką: ciężarem funta (por. § 16, us. 1 b.).

4. Ponieważ jedność jest liczbą, więc i określenie jéj powinno wypaść z powyższego określenia liczby — jako przypadek szczególny.

Widzieliśmy, że gdy pewien przedmiot wymierzamy innym, z nim jednorodnym, w tym mierzeniu przyjętym za jednostkę, to wynikiem z tego jest liczba. — Wystawmy sobie, że mając jakieś dwa przedmioty jednorodne, wybraliśmy do wymierzenia ich taki przedmiot (z nimi jednorodny), jako jednostkę, iż okazało się, że jeden z danych dwu przedmiotów jest np. pięć razy większy od jednostki wybranéj, drugi zaś jest zupełnie taki sam, jak ta jednostka (np. gdy, mając dwa ciężary, wybraliśmy, jako jednostkę, ciężar funta i okazało się, że jeden z danych przedmiotów przedstawia ciężar pięciu funtów, drugi zaś ciężar funta). Jeżeli zechcemy o obu danych przedmiotach *jednakowo się wyrazić*, to, gdy o piérwszym powiemy, że

on jest *pięć razy* większy od jednostki,

wypadnie nam o drugim powiedziéć, że

on jest *jeden raz* większy od jednostki.

A gdy w piérwszym przypadku wynikiem z tego wymierzenia jest liczba pięć, to w drugim przypadku wynikiem z wymierzenia będzie liczba j e d e n, czyli j e d n o ś ć. Z tego wypada, że

Jedność jestto wynik z wymierzenia pewnego przedmiotu drugim, takim samym.

5. Gdy powiém: mam cztéry funty mąki, to o tym, że ciężar téj mąki jest istotnie *cztéry* funty, możemy się w ten sposób przekonać. Oddzielimy taką część mąki, któréjby ciężar był taki sam, jak ciężar funta; da nam to liczbę *jedność* (piérwszą). Z pozostałéj mąki oddzielimy znowu taką część, któréjby ciężar był taki sam, jak ciężar funta; otrzymamy znów stąd liczbę *jedność* (drugą). W taki sam sposób otrzymamy jeszcze *jedność* (trzecią) i znowu *jedność* (czwartą). Więc nasza liczba *cztéry* jest to samo, co

jedność i *jedność* i *jedność* i *jedność.*

Tak liczba jedność, jak i każda liczba, z jedności powstała przez dołączenie do niéj jednéj lub wielu jedności, nazywa się l i c z b ą c a ł k o w i t ą [1]). Możemy więc powiedziéć, że

Jedność i każde skupienie jedności nazywamy liczbą całkowitą.

Inaczéj nieco: ponieważ wynik z wymierzenia ciężaru cztérech funtów mąki ciężarem jednego funta jest jednoznaczny z zebraniem cztérech wyników z wymierzenia ciężaru jednego funta mąki przyjętym za jednostkę ciężarem funta (z którychto wyników każdy, jak wiemy, jest jednością), więc: liczba całkowita jest jednością, albo zebraniem, czyli skupieniem jedności [2]).

---

[1]) Ściśle mówiąc, liczba jedność i liczby, z jedności powstałe przez dołączenie do niéj jednéj lub wielu jedności, zostały nazwane c a ł k o w i t y m i, w przeciwstawieniu u ł a m k o m (§ 17, us. 2).

[2]) W arytmetyce mamy do czynienia z liczbami, z których każda — wogóle mówiąc — jest skupieniem jedności i równych części jedności (§ 17, us. 2).

6. Szereg liczb całkowitych, po sobie następujących, t. j. szereg liczb

jedność, dwa, trzy, cztéry, pięć, sześć, siedem i t. d.,

z których piérwszą jest jedność (jeden), a każda następująca powstaje z poprzedzającéj przez dołączenie do niéj jedności, nazywa się szeregiem liczb naturalnych [1]).

Mając liczbę jakkolwiek wielką, zawsze możemy do niéj dołączyć jedność i w ten sposób otrzymać następną, jeszcze większą liczbę. Więc: *szereg liczb naturalnych jest nieograniczony*, czyli: *liczb całkowitych jest nieskończenie wiele.*

7. Wypowiadanie lub przedstawianie kolejne (we właściwym porządku) liczb, stanowiących szereg liczb naturalnych, nazywa się liczeniem, a tymsamym: liczyć jestto wypowiadać lub przedstawiać kolejne liczby z szeregu liczb naturalnych.

Liczenie często zaczynamy od któréjkolwiek liczby z szeregu liczb naturalnych, a przerywamy je na którejś z dalszych liczb tego szeregu.

Gdy mamy liczyć (albo: policzyć) przedmioty dane, to przy téj czynności wystawiamy sobie, że one wszystkie są jednakowe, czyli, że one są równe sobie, tak, iż każdy z przedmiotów, do policzenia danych, mógłby zastąpić inny, którykolwiek z nich. Skutkiem tego: liczyć przedmioty jestto wyrazić (dowiedzieć się), jak często jeden z tych przedmiotów mógłby być pomyślanym, aby przedstawić wszystkie dane przedmioty.

8. Pod nazwą arytmetyki rozumieć właściwie powinniśmy naukę o liczbach, gdyż wyraz grecki aritmos [2]) znaczy: liczba. Przedmiotem więc arytmetyki są działania na liczbach (ogół tych działań stanowi rachunek), oraz wszelkie badania własności liczb.

Arytmetyka rospowszechnienie swe zawdzięcza temu, że wykonywanie działań na liczbach, oraz niektóre najprostsze liczb własności, miały swoje zastosowanie przy rozwiązywaniu różnych zadań z życia praktycznego. Przez dość znaczny przeciąg czasu zaniechano nawet całkiem badania teoretycznego własności liczb, a zajęto się wyłącznie zadaniami praktycznymi, przeważnie ze stosunków handlowych. Należyte objaśnianie rozwiązywania takich zadań stało się przedmiotem nauki młodzieży, nietylko jako rozwijające ścisłe my-

---

[1]) Niektórzy jakąkolwiek liczbę z szeregu liczb naturalnych (t. j. jakąkolwiek liczbę całkowitą) nazywają liczbą naturalną. Tak np. Schröder (*Lehrbuch der Arithmetik und Algebra*, 1873) powiada: *liczba naturalna jest sumą jedności.*

W tymże dziele znajdujemy przytoczony następujący pogląd Hesse'go na liczbę: «...liczba do pewnego stopnia jest przedstawieniem danych do policzenia przedmiotów. Gdy jednak przedmioty ze świata cielesnego są przez rzeźbiarza przedstawiane pod względem ich rosciągłości w przestrzeni i ograniczenia (kształtu), gdy malarz, fotograf, rysownik przedstawia je pod względem ich kolorytu, części oświeconych i części w cieniu, konturu, — to rachmistrz przedstawia jedności tylko pod względem ich mnogości (wielości).

Liczba naturalna jest przedstawieniem jedności ze względu na ich mnogość.»

[2]) ὁ ἀριθμός — złączenie, zebranie, skupienie, a także: liczba, uwaga.

ślenie, ale także jako często bespośrednio pożyteczne w życiu dalszym. Nauce téj, mającéj na celu nauczenie wykonywania działań na liczbach, zapoznanie się z najelementarniejszymi ich własnościami, wraz z nauką o rozwiązywaniu różnych zadań z życia praktycznego, pozostawiono nazwę arytmetyki, pod którą się rozwinęła, — nauce zaś, obejmującéj teoretyczne badania własności liczb (nie wchodzącéj w zakres ogólnego wykształcenia średniego), nadano nazwę teoryi liczb. (Niekiedy teoryją liczb nazywają arytmetyką wyższą, wtedy, w przeciwstawieniu, naukę o działaniach na liczbach i rozwiązywaniu zadań praktycznych nazywają arytmetyką elementarną).

Przez arytmetykę rozumiemy naukę o działaniach na liczbach, o niektórych własnościach liczb, pomocnych do zrozumienia lub prostszego wykonywania tych działań, oraz o rozwiązywaniu odpowiednich zadań z życia praktycznego.

Rachunkiem nazywamy albo ogół wszelkich działań arytmetycznych, albotéż razem uważane te działania, które wykonano w celu rozwiązania pewnego zadania.

W miarę rozwoju nauk matematycznych wogóle i doskonalenia się metod nauczania, arytmetyka robi odpowiednie postępy. Rozumiéć to należy w ten sposób, iż modyfikuje się z czasem wykład arytmetyki przez zmianę nacisku na pewne oddzielne kwestyje. Zasada rozumowania jest niezmienna, jeżeli tylko należycie prosto została wyłożoną — zmieniają się tylko rozwinięcie szczegółów i ich zastosowania praktyczne.

Uczymy niekiedy arytmetyki ze specyjalnym celem: przysposobienia uczniów np. do przemysłu, do handlu. Wtedy w wykładzie uwzględniamy drobiazgowo odpowiednie zadania, podajemy i objaśniamy używane, a praktyczne w użyciu skrócenia — powstaje w ten sposób arytmetyka przemysłowa, arytmetyka handlowa.

Zauważymy jeszcze, że w kursie arytmetyki, służącym dla ogólnego wykształcenia średniego, różne kwestyje, którymi się w nim zajmujemy, rozwijamy drobiazgowiéj, niż tego ich zastosowania wymagają. Robimy to, popierwsze, dlatego, aby dać wyczerpujące przedstawienie rzeczy poruszanych tak, iżby wykład każdéj z nich był w odpowiedni sposób zakończony, a powtóre, w celu obudzenia zamiłowania do systematycznego i gruntownego myślenia. Matematyka bowiém, któréj arytmetyka jest częścią i zarazem podstawą, jest w średnim wykształceniu kursem praktycznym myślenia ścisłego.

9. Oddawna przy nauczaniu arytmetyki ma się na widoku rozwiązywanie różnych zadań. Powstały więc powoli odpowiednie metody postępowania, które wymagają czystości i wyraźności rachunku piśmiennego, tymwięcéj, że przez wzgląd na szybkość zwykle się w nim robi pewne skrócenia.

Dlatego rachunki powinny być wykonywane czysto, wyraźnie, jaknajkrócéj, jednak tak, aby każdy krok w rachunku mógł być objaśniony, a cały rachunek tak poprowadzony, żeby z każdego szczegółu łatwo można było zdać sobie sprawę, t. j. łatwo było go sprawdzić.

10. Nienazbyt jednak dbano niekiedy o ścisłość wyrażeń i o ich trafność na wszelkie przypadki. Wszystkie atoli te wyrażenia, którym zarzucić możemy, iż początkowo niedość ogólnie były pomyślane [1]), powszechnie pozostawiono i nierozważnie postępowałby ten, ktoby je dziś chciał zmieniać.

Jedną z takich nieścisłości jest używanie wyrazu liczba na oznaczenie (właściwéj) liczby wraz z mianem jednostki. Tak np. *trzy funty*, *dwadzieścia cztéry godziny* nazywano wciąż liczbami. Jednakże z czasem, zachowując zawsze dla tych przedmiotów nazwę liczb, wprowadzono pewne rozróżnienie. Mianowicie: liczbę w ścisłym znaczeniu wraz z mianem jednostki nazwano liczbą mianowaną (konkretną), liczbę zaś właściwą (t. j. taką, przy któréj niéma, lub nie może być wypowiedziane miano jednostki), nazwano, w przeciwstawieniu mianowanéj, liczbą niemianowaną, albo liczbą oderwaną (abstrakcyjną). Powiemy więc:

Jeżeli przy liczbie jest wymienione miano jednostki, to tę liczbę wraz z mianem jednostki nazywamy liczbą mianowaną. Tak np. «trzy funty» jestto liczba mianowana.

Jeżeli zaś przy liczbie nie jest, lub nie może *) *być postawione miano jednostki, to tę liczbę nazywać będziemy liczbą oderwaną.* Np. pięć, szesnaście i t. d.

W liczbie więc mianowanéj mamy liczbę oderwaną i miano jednostki.

11. Gdy powiém: kupiłem trzy łokcie i osiem cali wstążki, to tu: trzy łokcie i osiem cali, jako oznaczające długość jednego przedmiotu, wstążki, uważamy za *jednę* liczbę mianowaną — tymwięcéj, że moglibyśmy całą tę długość wyrazić w calach (i powiedzieć: mamy przedmiot, którego długość jest osiemdziesiąt cali.) W téj jednak liczbie mamy *dwie* jednostki (jednorodne, różne wielkością — dwojakie): łokieć i cal; oddzielne części téj liczby, jedna: trzy łokcie, druga: osiem cali, są także liczbami mianowanymi. Dlatego naszę (jednę) liczbę mianowaną: trzy łokcie i osiem cali nazywamy liczbą mianowaną złożoną, albo wogóle, z uwagi, że mamy w niéj dwojakie (a w innych liczbach mogą być trojakie **), czworakie ***) i t. d.) jednostki, — liczbą wieloraką. W przeciwstawieniu temu, liczbę mianowaną taką, jak np. pięć łokci, t. j. wyrażoną przy po-

---

[1]) Porównaj § 16, us. 2; § 19, us. 2; § 20 us. 2.

*) Np. 6 funtów jest cięższe od 2 funtów *trzy* razy.

**) Np. 12 sążni, 2 łokcie i 5 cali.

***) Np. 3 lata, 25 dni, 8 godzin i 40 minut.

mocy jednéj tylko jednostki, nazwiemy liczbą mianowaną prostą. Powiemy więc:

Liczba mianowana, wyrażona przy pomocy jednéj tylko jednostki, nazywa się liczbą mianowaną prostą.

Liczba mianowana, wyrażona przy pomocy dwu, lub więcéj (jednorodnych) różnych wielkością jednostek, nazywa się liczbą mianowaną złożoną, albo liczbą wieloraką. To ostatnie nazwanie (liczba wieloraka) jest krótsze i dosadne; dlatego wyłącznie go daléj używać będziemy.

Gdy powiém: kupiłem 5 funtów cukru, 5 łokci, 1 stopę i 6 cali wstążki i 3 kopy orzechów, to mamy tu trzy liczby mianowane, z których dwie: 5 funtów i 3 kopy, są liczbami mianowanymi prostymi, pozostała zaś: 5 łokci, 1 stopa i 6 cali jest liczbą wieloraką.

Zauważyć tu jeszcze można, że gdy mówię: kupiłem 2 łokcie płótna i 16 cali wstążki, to mamy tu dwie liczby mianowane: jednę, 2 łokcie, drugą, 16 cali, odnoszące się do różnogatunkowych przedmiotów (płótno i wstążka). Jeżeli zaś powiém: kupiłem 6 jabłek i 8 gruszek, to mamy również dwie liczby mianowane — a byłaby jedna, gdybyśmy mieli powiedziane ogólnie: 14 sztuk owoców.

12. Zwykle, gdy mówimy ogólnie: liczby całkowite, to rozumiemy przez to liczby całkowite (us. 5) tak oderwane, jak i mianowane proste. Gdy zaś mamy na myśli liczby wielorakie całkowite, wtedy mówimy: liczby wielorakie całkowite, albo też wprost: liczby wielorakie [1]).

§ 2. LICZENIE SŁOWNE.

1. Wyrabianie się oddzielnych nazw dla liczb złożonych z dwu lub więcéj jedności odnieść należy do piérwszych chwil życia gromadnego ludzi.

Nazwy te nadto wyrabiać się musiały bardzo powoli. Dowodu na to dostarcza nam zamieszkujące na krańcu Afryki południowéj plemię myśliwskie Saan, znane więcéj pod nazwą Buszmanów, zostające dotąd na najniższym stopniu rozwoju, które obecnie ma o liczbach takie tylko pojęcia: jeden, dwa, trzy i wiele, a dla ich oddania posiada oddzielne wyrazy [2]). — Wielu murzynów [3]) umié liczyć tylko do pięciu.

Najprościéj — zdawałoby się — można liczby od siebie rozróżnić, nadając im wszystkim coraz inne nazwy. Z powodu jednak,

[1]) Np. «rachunki w liczbach całkowitych», «działania na liczbach wielorakich» (*Arytmetyka dla szkół narodowych*, trzeci raz wydana r. 1785, str. 1 i 79).

[2]) Według listownego zawiadomienia (1883, marzec) prof. uniw. lwowskiego Antoniego Rehmana, który dwa lata przebył w Afryce południowéj.

[3]) Rozumiemy tu oddzielne jednostki, a nie całe plemiona.

że liczb jest nieskończenie wiele (§ 1, us. 6), byłoby to nader niepraktyczne — nawet wrazie, gdybyśmy się ograniczyli do tych tylko liczb, z którymi najczęściéj mamy do czynienia. Trzebaby bowiém nietylko bardzo wielu nazw się wyuczać, ale nadto ciągle miéć na myśli wielkość liczby, oznaczonéj przez każdą z tak wielu nazw.

2. Do usunięcia tych trudności w wyróżnianiu jednych liczb od drugich znakomicie przyczyniło się to, że nieodrazu miano do czynienia z wielu liczbami. Długo bowiém ludzie pozostawali w warunkach tak prostych, że zupełnie im wystarczało niewiele liczb początkowych, a do ich przedstawienia wygodnie posługiwać się mogli palcami, jednocześnie wyrabiając sobie powoli oddzielne dla tych liczb nazwy.

Że istotnie palce u rąk były używane do przedstawienia liczby — o tym przekonywają nas różne okoliczności. Małe dzieci dla wyrażenia liczby, a nawet dla rachunków swoich posługują się często palcami. Nie znając języka osób, z którymi chcemy się porozumiéć, wrazie odpowiedniéj potrzeby pokazujemy na przedmiot, a następnie przy pomocy palców dajemy do zrozumienia, ile takich przedmiotów chcemy wziąć, lub ile ich dać mamy. — U niektórych plemion polinezyjskich liczba pięć bywa oznaczona wyrazem [1], który znaczy ręka. Plemię indyjskie Kora (w Ameryce) dla liczby dziesięć używa wyrażenia, oznaczającego podanie rąk. Plemiona Zulu (w Afryce południowéj) rachują wciąż na palcach, okazując dziesiątek uderzeniem o siebie obu rąk z wyprostowanymi palcami, mniejsze zaś liczby wyprostowaniem odpowiedniéj liczby palców, a dla oddania liczby pięć mówią: cała ręka, jako osiem mówią: wielki (palec), albo: zostaw (zegnij) dwa palce, i tak samo dziewięć: zostaw jeden palec [2]. — Nietylko palce u rąk, ale i palce u nóg służyły wielu ludom pierwotnym do przedstawienia liczby. Dlatego np. na wyspie Mare w Australii, a także u wielu plemion indyjskich w Ameryce i niektórych murzyńskich w Afryce, jako dwadzieścia mówi się: człowiek (t. j. wszystkie palce człowieka), a nawet zaznaczono, że jedno z plemion indyjskich pojęcia 11, 12 i t. d. tak wyraża: noga jeden, noga dwa i t. d. (t. j. jeden, dwa i t. d. palce nogi).

Początkowo wystarczały ludziom dla przedstawiania liczb palce obu rąk, a dla tych liczb powoli wyrabiały się oddzielne nazwy, które

---

[1]) Zob. artykuł, który ogłosił (*Ateneum*, r. 1882, t. III) Jan Kubary: *Wyspy Nukuoro; z podróży po oceanie Wielkim* (lima, albo rima, znaczy: ręka, pięć).

[2]) Wyraźnych śladów odbywania rachunków na palcach dostarczają także zabytki egipskie, greckie i rzymskie.

Rachunek na palcach u różnych ludów odbywa się zawsze w kierunku od małego ręki lewéj do małego prawéj.

Oznaczanie liczb do 10 przez wyprostowanie jednego tylko palca rąk spotyka się na niektórych zabytkach egipskich (np. na wielu egzemplarzach łokci).

(Pisma Greków bizantyjskich i Arabów o rachunku na palcach, prawdopodobnie dość rospowszechnionym, uczyły za pomocą palców obu rąk przedstawiać wszystkie liczby od 1 do 9999).

z czasem upraszczały się i zmieniały znacznie pod wpływem różnych, nieznanych nam okoliczności. W ten tylko sposób objaśnić sobie możemy, dlaczego w językach wszystkich ludów, wyżéj rozwiniętych, istnieją nazwy osobne dla przedstawienia piérwszych dziesięciu [1]) liczb — nazwy niezłożone, podobnie jak nasze nazwy

jeden, dwa, trzy, cztéry, pięć, sześć, siedem, osiem, dziewięć, dziesięć, albo *dziesiątek* [2]), gdy tymczasem nazwy nieco większych liczb są już złożone.

3. Gdy jednak z biegiem czasu zachodziła potrzeba częstszego przedstawiania liczb nieco większych, to korzystano z tego, że przez wyprostowanie palców jednéj, lub obu rąk, albo przez giest odpowiedni, oznaczający wszystkie palce człowieka, dawało się za każdym takim ruchem odrazu pojęcie o pięciu, albo dziesięciu, albo téż o dwudziestu, a tylko części liczby mniejsze przedstawiano oddzielnymi palcami.

Widocznie, takie przedstawianie liczb większych najprędzéj, najraźniéj iść musiało wtedy, kiedy się używało naraz obu rąk, gdyż rozmaite ucywilizowane narody liczą zawsze przy pomocy liczby dziesięć.

Wystawmy sobie np., że jeden człowiek chce dać drugiemu pojęcie o liczbie trzydzieści siedem, posługując się palcami rąk. Będzie więc piérwszy tak postępował: trzy razy zrzędu ukaże wyprostowane wszystkie palce obu rąk, a następnie, nieco się zatrzymawszy, ukaże palców siedem. Ów zaś drugi człowiek, patrzący, zaznacza sobie naprzód, ile razy widział przedstawioną liczbę dziesięć, t. j. ile było dziesiątków, a następnie osobno zauważy liczbę siedem. W ten sposób, tak chcący dać pojęcie o liczbie trzydzieści siedem, jak i dowiadujący się o téj liczbie, wydzielają z niéj naprzód wszystkie całe dziesiątki, a osobno zaznaczają pozostałą część liczby, mniejszą od dziesięciu.

4. Zupełnie więc naturalnie, przy wymawianiu liczby większéj od dziesięciu, wyrobiło się to, iż oddzielamy z niéj całe dziesiątki. a osobno zaznaczamy pozostałą jéj część (t. j. część mniejszą od dziesięciu).

---

[1]) Że początkowo powstać mogły oddzielne nazwy tylko dla piérwszych pięciu liczb, a liczby od 5 do 9 wyrażały się przy ich pomocy, tego ślady mamy w mowie *niektórych* plemion murzyńskich Afryki, *niektórych* plemion indyjskich Ameryki, *wielu* plemion Australii, wyrażających 6 przez: pięć i jeden, 7 przez: pięć i dwa, i podobnie: 8: pięć i trzy, 9: pięć i cztéry — gdy spółcześnie inne z tych plemion mają już dla tych liczb oddzielne nazwy. Zauważyć jednak należy, że we wzmiankowanych sposobach liczenia na oznaczenie liczby 10 zjawia się już nazwa niezłożona.

Odtworzenie tego znajdujemy w pierwotnym liczeniu piśmiennym Greków i w liczeniu piśmiennym Rzymian (por. § 3, us. 3, 6).

[2]) Por. str. 10, odsyłacz [5]).

Jeżeli w liczbie, prócz dziesięciu, jest jeszcze jedność, to mówimy [1]: jeden na dziesięć [2], czyli przez skrócenie (i łącząc te trzy wyrazy w jeden): jedenaście; podobnie, zamiast: dwa na dziesięć, mówimy krócéj: dwanaście, i t. d. dopóki w liczbie, prócz dziesięciu, jest niewięcéj niż dziewięć jedności. W ten więc sposób powstają nazwy

jedenaście, dwanaście, trzynaście, cztérnaście, i t. d. do: *dziewiętnaście* [3].

Jeżeli w liczbie jest więcéj niż jeden dziesiątek, to zamiast mówić: dziesięć i dziesięć [4] i t. d., obliczamy, ile mamy tych (całych) dziesiątków i, posiłkując się liczbami dobrze już znanymi: dwa, trzy i t. d., łączymy ich nazwy z nazwą dziesięć, skutkiem częstszego użycia, w jeden wyraz. Mamy więc:

dwadzieścia [5], *trzydzieści* [6], *cztérdzieści, pięćdziesiąt* [7],..., *dziewięćdziesiąt.*

Jeżeli więc mamy np. liczbę, w któréj, prócz dwu dziesiątków, jest pięć jedności, to powiemy: dwadzieścia i pięć [8], albo krócéj:

---

[1] Podobnie we wszystkich językach słowiańskich; w językach niemieckim i francuskim nazwy tych dwu części zestawiają się bespośrednio: dreizehn,... neunzehn; dix-sept, dix-huit, dix-neuf. Nazwy liczb 11 i 12 w języku niemieckim, 11—16 we francuskim, jako mniejszych, a więc częściéj używanych, podległy wcześnie znacznemu przekształceniu.

[2] Dziesięć jest tu biernikiem. Porównaj odsyłacz [5].

[3] W Biblii (szaroszpatackiéj) królowéj Zofii (żony Jagiełły): jeden na ście, jeden naćcie, dwanaćcie, dwanacie, trzynaćcie, czternaćcie, pięć naście, pięćnaćcie, sześć na ście, sześć naćcie, siedm naście, siedmnaćcie, ośmnaćcie, dziewięćnaćcie; w przekładzie (r. 1449) Świętosława s Wocieszyna statutu wiślickiego: cztyrnaćcie, cztyrnadcie, piętnadzieścia, pięćnadzieścia, pięćnaćcie, piędźnadzieścia, piętnaście, piętnadziesta, ośm'naćcie; w przekładzie (r. 1450) Macieja z Rożana statutów mazowieckich: piećnadzieścia, pięćnaćcie, pięćnacie, pięćnadzieście; wtłomaczeniu (r. 1503) kilku statutów: siedmnadzieścia, osimnaście, osmnaście.

[4] Dziesięć a dziesięć — Zwód statutów przez Wawrzyńca z Prażmowa (r. 1531).

[5] Dzieścia (niekiedy: dziesta) jest prawidłowo utworzony mian. liczby podwójnej od dziesiąć (dziesięć), tak jak od grosz, skojec — (dwa) grosza, skojca. Mówiono także: dwu dziesiątku (Bibl.), od: dwa dziesiątka (i podobnie: trzy dziesiątki, Bibl., Świętos.).

Przez analogiją do: dwadzieścia powstały powyższe: piętnadzieścia, piętnadziesta,...

Formy: dzieście, ście, ćcie, cie uważa się powszechnie za bier. l. poj. Występują one tylko w połączeniach: jedenaście, dwanaćcie, pięćnadzieście, pięćnacie i t. d. W innych razach bier. ma formę mian., t. j. dziesięć.

[6] Dzieści jest mian. l. mn. Występuje niekiedy w formie: dzieście (np. w rosprawie J. Przyborowskiego *Vetustissima adjectivorum*..., w zabytku z r. 1426: dwadzieście). Stąd prowincyonalizmy litewskie: dwadzieście, trzydzieście, cztérdzieście.

[7] Dziesiąt jest dopeł. l. mn. (Tu liczebniki: dwa, trzy, cztéry, jako stojące przed wyrazami, do których się odnoszą, są przymiotnikami, a pięć ,.., dziewięć są rzeczownikami; podobnie więc, jak: trzy cnoty, a pięć cnót, mamy: trzy *dzieści*, a pięć *dziesiąt.*)

[8] W Biblii kr. Zofii: dwadzieścia i ośm, XXX i sześć, do dwudziestu a do trzech, i podobnie: sto a dwadzieścia a siedm, sto dwadzieścia i trzy, sześć set a dziewięć dziesiąt, z tysiąca a z siedmi dziesiąd a z pięci, tysiąc tysiąców a sto tysiąców, a obok tego: jeno a trzydzieści, pięć a sto, dwa dzieścia a sto, sześć a trzydzieści a sto, CCC a dwa a LXX, sześćdziesiąt trzysta, dwa tysiąca a dwa a LXXX a C, i jeszcze: siedm a trzydzieści ku stu, oraz: przes jenego trzydzieści, przes pięci pięćdziesiąt, cztyrdzieści bez jednego.

Przytoczyłem w tym ustępie tylko materyjał, potrzebny dla objaśnienia powstania nazw dzisiejszych, według pracy źródłowéj dra Antoniego Kaliny: *O liczebnikach w języku staropolskim* (*Rozprawy i sprawozdania z posiedzeń* wydz. filol. akad. um. w Krakowie, tom VI), w któréj czytelnik znaleść może wiele innych szczegółów ciekawych.

dwadzieścia pięć. Liczby więc pośrednie między dwadzieścia a trzydzieści wymówimy:

dwadzieścia jeden, dwadzieścia dwa, i t. d., do: *dwadzieścia dziewięć.*

Podobnie daléj:

trzydzieści jeden, trzydzieści dwa, trzydzieści trzy i t. d.

I t. d.

Każda z tych nazw nie jest częstego użycia. Dlatego dwu wyrazów, je tworzących, nie łączymy w jeden.

5. Tego, czego się teraz dość prędko uczymy w wieku dziecinnym, ludzkość dorabiać się musiała bardzo powoli. — Od chwili gdy, zaczęto liczyć całymi dziesiątkami, do czasu, w którym uczuwać się dała potrzeba krótszego wyrażania liczb większych od liczby: dziesięć dziesiątków, grupowanie jedności w dziesiątki stało się już postępowaniem dobrze znanym, rospowszechnionym, uważanym za dogodne. I widocznie, przez analogiją do tak dogodnego grupowania jedności w dziesiątki, wytworzono podobne postępowanie z owymi liczbami większymi, t. j. zaczęto skupiać dziesiątki po dziesięć w oddzielne części, osobliwie, gdy już dla oznaczenia dziesięciu dziesiątków utworzono nazwę osobną: *sto* lub *setka.*

I w takiż sam sposób, jak radzono sobie przy wypowiadaniu liczby większéj od dziesięciu, postępowano z daną liczbą większą od sta, t. j., przy wypowiadaniu jéj, naprzód były oddzielane całe sta, później z pozostałéj części (mniejszéj od sta) całe dziesiątki, a nakoniec wypowiadano pozostałą część liczby, mniejszą od dziesięciu. Oddzielając w ten sposób całe setki, zaznaczano, że było

dwie ście [1]), trzy sta, cztéry sta, pięć set [2]) i t. d. dziewięć set,

a następnie, skutkiem częstego użycia, mówiono, jak teraz, łącząc te wyrazy [3]),

dwieście, trzysta, cztérysta, pięćset, sześćset, siedemset, osiemset, dziewięćset.

6. Podobnie wyrażenie: dziesięć set zostało z czasem [4]) zastąpione przez nazwę krótszą: *tysiąc.* Ponieważ jednak tak tysiąc, jak i większe liczby są rzadziéj używane, więc wyrazów, użytych do wypowiedzenia liczb: dwa tysiące, trzy tysiące i t. d. razem nie piszemy.

---

[1]) Jestto liczba podwójna (podobnie jak np. w przysłowiach: mądréj głowie dość dwie słowie; cztéry gęsi, dwie niewieście: gotowy jarmark w mieście). — W Biblii kr. Zofii: dwie ście, dwie secie (tamże: dwie lecie).

[2]) Mówimy: trzy*sta*, cztéry*sta*, ale: pięć*set*, sześć*set* i t. d. (por. str. 10, odsyłacz [7]).

[3]) I przedłużając przedostatnią zgłoskę tych wyrazów, ze złączenia powstałych.

[4]) W różnych językach indo-europejskich nazwy liczb 2—9, 10, 100 są pokrewne sobie, gdy tymczasem nazwy liczby 1000, jako wielce w tych językach rozmaite, powstawać już zapewne musiały po rozdzieleniu się szczepów, w każdym z nich oddzielnie.

Wyrażenia: *dziesięć tysięcy* [1]), *sto tysięcy* [2]), jako rzadko używane, nie zostały [3]) zastąpione nazwami osobnymi.

7. Długo mówiono: tysiąc tysięcy. Było to jednak równie niedogodnym, jakby np. dziesięćdziesiąt. Z czasem też tysiąc tysięcy zostało zastąpione przez: *milijon* [4]).

Dziesięć milijonów, sto milijonów również nie mają nazw oddzielnych [5]).

Tysiąc milijonów, gdy jest mowa o pieniądzach, zastępuje się odniedawna przez *milijard.*

8. Liczby jeszcze większe bardzo rzadko wypada wypowiadać (por. § 3, us. 18).

Obecnie znajdują się u nas w użyciu dwa sposoby wypowiadania liczb bardzo wielkich. Jedni, idąc za przykładem Francuzów, tysiąc milijonów nazywają *bilijonem*, tysiąc bilijonów *trylijonem*, tysiąc trylijonów *kwatrylijonem* [6]) i t. d., gdy drudzy, zgodnie z Niemcami, *bilijonem* nazywają milion milijonów, milijon bilijonów *trylijonem*, milijon trylijonów *kwatrylijonem* i t. d. [7]).

---

[1]) Starożytni Grecy dość często używali liczby 10 000, mając osobną dla niej nazwę (μύριοι,-αι,-α).

[2]) W życiu potocznym objawia się u nas dążność do krótszego wyrażania setek tysięcy. Tak np., zamiast mówić: czterysta tysięcy, mówią niekiedy: czterykroć, jako skrócenie wyrażenia czterykroć sto tysięcy, i podobnie mówią np. czterykroć sześćdziesiąt tysięcy, przez co nie należy rozumieć: 4 razy 60 000.

[3]) W sanskrycie istnieją oddzielne nazwy dla 1, 10, 100, 1000, 10 000, 100 000, 1000 000, 10 000 000, 100 000 000, oraz dla liczb przedstawionych 1-ścią z 10-ma, 12-ma i t. d. (z parzystą liczbą zer), aż do 1 z 20-u zerami; nazwy zaś liczb przedstawionych przez 1 z 9-ma, 11-ma i t. d., aż do 1 z 21-m zerem tworzą się z poprzednich przez dodanie wyrazu: wielki.

[4]) Wyraz: milijon (prawdopodobnie wyraz włoski, zgrubiały od mille, jako: wielki tysiąc, mający oznaczać początkowo we Włoszech 10 beczułek złota) w tym znaczeniu spotyka się po raz pierwszy w wydanej we Włoszech arytmetyce P a c i o l i (r. 1494), bardzo rospowszechnionej. — W arytmetykach polskich wyraz: milijon pojawia się w XVII stuleciu, chociaż: tysiąc tysięcy, a nawet tysiąc tysięcy tysięcy i t d. zachowują niektóre nasze arytmetyki aż do końca trzeciej ćwierci XVIII stulecia.

[5]) Mówią często: jedności tysięcy, jedności milijonów, a dla dopełnienia: jedności proste (!). Ten sposób mówienia jest sprzeczny z istotnym pojęciem (jedynie istniejących) jedności w danej liczbie. Zamiast więc mówić: w liczbie jest tyle jedności tysięcy, tyle jedności milijonów i przez to wprowadzać pojęcia nie odpowiadające naturze tych części liczby, należy wyrażać się wprost: w liczbie jest tyle tysięcy, tyle milijonów, podobnie jak się mówi: tyle dziesiątków tysięcy, tyle setek, tyle dziesiątków. Por. § 3, us. 20.

[6]) Wyrazy bilijon, trylijon i t. d. powstały w początku XVII stulecia, lecz rospowszechniły się dopiero w XVIII.

[7]) Ten ostatni sposób liczenia był wprowadzony do szkół naszych przez wydaną i do użytku zaleconą (r. 1778) przez Komisyją Edukacyjną *Arytm. dla sz. nar.* Mimo to, pod wpływem tak studyjów, odbywanych we Francyi, jak i książek późniejszych, stosowanie się do sposobu francuskiego jest dziś u nas więcej rospowszechnione.

Moim zdaniem jest rzeczą małej wagi wybór stanowczy między tymi dwoma sposobami pojmowania wyrazów bilijon i t. d. W nauce szkolnej dopiero przy powtarzaniu kursu arytmetyki właściwą jest o tym wzmianka, a wtedy można przytoczyć oba sposoby pojmowania. W klasach zaś niższych nie należy przygnębiać wyobraźni uczącego się rozważaniem tak wielkich liczb.

9. W takito sposób uniknęliśmy potrzeby tworzenia osobnéj nazwy dla każdéj liczby (por. us. 1). Zapomocą niewielu wyrazów, mianowicie zapomocą wyrazów:

jeden, dwa, trzy, cztéry, pięć, sześć, siedem, osiem,
dziewięć, dziesięć, sto, tysiąc, milijon,...,

przez odpowiednie ich łączenie jesteśmy w stanie wypowiedzieć wszystkie liczby.

Na tym właśnie polega nasze liczenie słowne.

10. Ponieważ, jak widzieliśmy, ten sposób liczenia rozwinął się z tego, że każde dziesięć jedności skupiamy w oddzielny dziesiątek i to postępowanie daléj ściśle stosujemy, skupiając dziesięć dziesiątków w setkę i t. d., więc nazywamy go sposobem, albo systematem dziesiątkowym liczenia.

11. Podobnie, jak systemat dziesiątkowy powstał z liczby palców obu rąk, taksamo z liczby palców jednéj ręki, lub z liczby wszystkich palców człowieka (por. us. 2, 3) mogły powstać systematy: piątkowy i dwudziestkowy.

Systemat piątkowy, dokładnie wykształcony, t. j. taki, w którymby (przynajmniéj) liczba 5 razy 5, t. j. 25, miała osobną nazwę (a tymwięcéj liczby: 5 razy 25, t. j. 125, i t. d.), nigdzie nie powstał. Przeszkodziła temu ta okoliczność, że już dla liczby 2 razy 5, t. j. dla 10, zjawiała się nazwa osobna, prosta [1]), tak, iż w liczeniu dalszym liczba 10 (albo niekiedy 20) bierze przewagę.

Systemat dwudziestkowy, należycie wyrobiony posiadają: Azteki (w Meksyku), którzy mają oddzielne wyrazy dla liczb 20 («policzone»), 20.20, t. j. 400 («włosy»), 20.20.20, t. j. 8000 («worek»), i plemię indyjskie Maya (w Yukatanie), mające osobne wyrazy dla liczb 20, 400, 8000, 160 000.— Walijczycy, szczep celtycki, mówią: 20 do 10 (t. j. 30), dwa 20 (t. j. 40), 10 i dwa 20 (t. j. 50) i t. d. do 90 włącznie. W podobny sposób mówią w niższéj Bretanii, zamieszkałéj także przez szczep celtycki. Wszystkie takie sposoby wyrażania liczb znajdują się również w mowie Basków. Francuskie: soixante-dix, soixante-onze i t. d., quatre-vingts, quatre-vingt-dix i t. d. quatre-vingt-dix-neuf [2]) uważa się powszechnie jako ślad wpływu celtyckiego sposobu liczenia. W mowie Rezyjan, plemienia słowiańskiego, zamieszkałego w północnych Włoszech (w prowincyi Udine): trikradwujsti (trzykroć 20), trikradwujsti nu desat (50, obok: paterdu, pięć rzędów), sztirkradwujsti (80), sztirkradwujsti nu desat (90), nu petnijst (95) [3]). Albańczycy (półwysep Bałkański) mówią (tylko): δυ-ζέτ (dwa 20). Duń-

---

[1]) Por. str. 9, odsyłacz [1]).

[2]) A także niekiedy: six-vingts (120), quinze-vingts (300), rzadziéj: sept-vingts (140), huit-vingts (160). — W niektórych jednak okolicach Francuzi mówią: septante (70), octante (80) i nonante (90).

[3]) Por. Jana Baudouina de Courtenay: *O Słowianach we Włoszech* (*Ognisko*, 1882).

czycy: tresindstyve (trzykroć 20), firesindstyve (80), a nadto: półtrzeciakroć dwadzieścia (halvtredsinstyve, 50), półczwartakroć dwadzieścia (70) i półpiętakroć dwadzieścia (90). Liczba 100 posiada jednak zawsze nazwę niezłożoną. — Podobne uwzględnienie w liczeniu liczby 20 ma miejsce u wielu plemion indyjskich w Ameryce, u niektórych murzyńskich w Afryce, a także u ludów Kaukazu, oraz plemion, zamieszkujących niektóre wyspy Australii.

12. W układach miar, które różne ludy sobie wytworzyły, przeważną rolę gra liczba 12 i jéj dzielniki [1]). Ta sama przyczyna, któréj następstwem są takie podziały miar, wpływać musiała także na liczenie [2]).

Tak np. w niższéj Bretanii mówią: tri-ouec'h (wym. triuekh), trzy sześć (18, gdy Walijczycy tę liczbę wyrażają: deu-naw, dwa dziewięć), i podobnie triouec'h ugent (18.20).

Buramani, inaczéj Bolanami nazywani (na zachodnich brzegach Afryki, między Sierra Leone i Senegambiją), mówią podobnie: sześć dwa (razy), sześć cztéry (razy), gdy chcą wyrazić liczby 12 i 24, oraz: sześć i jeden (7).

Fryzowie dawni mówili: dwanaściedziesiąt (tolftich, 120). — Podobny system mieszany dziesiątkowo-dwunastkowy posiadali częściowo Skandynawi i Anglosasi.

Na téjże drodze prawdopodobnie powstał systemat sześćdziesiątkowy w rachunkach astronomicznych Babilończyków, który dotąd przetrwał w podziałach okręgu koła i w podziałach godziny.

— Nowo-Zelandczycy posiadają zupełnie wykształcony systemat jedenastkowy: mają osobne nazwy dla liczb: 11, 121, 1331, mówią: 11 z 1-ym, 11 z 2-ma i t. d., 2 razy 11, 3 razy 11 i t. d. [3]).

---

§ 3. LICZENIE PIŚMIENNE.

1. Gdy stosunki ludzkie tak się rozwinęły, że należało zostawiać ślad tego, co się mówiło, lub téż przesyłać myśl swoję osobom oddalonym, czyli, gdy upowszechniało się to, co dziś przez pismo rozumiemy, wynikła potrzeba przedstawiania liczb, czyli odtworzenia liczenia słownego przez *liczenie piśmienne.*

---

[1]) Podziały dziesiętne miar (np. nasze pręciki i ławki) wytworzyły się pod wpływem rachunków piśmiennych.

[2]) Stąd: tuzin, kopa...

[3]) Fakty przytoczone w us. 2, 6, 7, 11, 12 czerpałem z prac następujących: Pott, *Die Sprachverschiedenheit in Europa an den Zahlwörtern nachgewiesen, sowie die quinäre und vigesimale Zählmethode* (1868), Hankel, *Zur Geschichte der Mathematik* (1874) i Cantor, *Vorlesungen über Gesch. der Math.* (I, 1880). Ostatni dwaj autorowie często opierają się na przytoczonéj pracy Pott'a, jak również na poprzednim jego dziele: *Die qu. u. vig. Zählmethode bei Völkern aller Welttheile* (1847) (tego dostać nie mogłem).

2. To przedstawianie liczb służyło do utrwalenia tego, co już było rospowszechnione w liczeniu słownym, a więc: w zgodzie z nim być musiało.

Najprościéj było obmyślić inny znak na oznaczenie jedności inny dla dziesięciu, jeszcze inny dla sta i t. d. Gdy więc chciano przedstawiać liczbę np. sześćdziesiąt siedem, to stawiano [1]): sześć jednakowych znaków, z których każdy oznaczał dziesięć, i siedem jednakowych znaków, z których każdy oznaczał jedność, tak, iż dla przedstawienia téj liczby sześćdziesiąt siedem potrzebowano trzynastu znaków. W podobny sposób liczbę np. dwadzieścia trzy przedstawiano pięciu znakami. Według téj zasady przedstawiając liczbę dziewięćset dziewięćdziesiąt dziewięć, potrzebaby dwudziestu siedmiu znaków [2]).

---

[1]) Przy piśmiennym przedstawianiu liczby właściwymi znakami, zawsze, zgodnie z przyjętym kierunkiem pisania, części większe liczby stają przed mniejszymi. Jedyny wyjątek od téj zasady powszechnéj znaleziono w rękopisach syryjskich z VI i VII wieku po Chrystusie przy przedstawianiu liczby 3 przez znak liczby 1 i (skrócony) znak liczby 2, t. j. znak liczby 2 stoi p o znaku liczby 1, co się także powtarza przy pisaniu liczb 8, 13 i t. d. w ich częściach, przedstawiających tę liczbę 3.

(Przytaczane w tym § fakty czerpię z wzmiankowanych dzieł H a n k e l ' a i C a n t o r ' a, jak również z pracy tego ostatniego: *Mathematische Beiträge zum Kulturleben der Völker*, 1863).

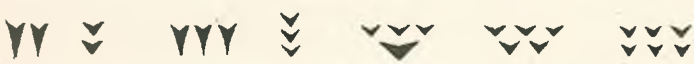
[2]) To się ściśle stosuje do przedstawiania liczb w piśmie hieroglificznym Egipcyjan, w którym używano znaków

1 10 100 1000 10000 100000 1000000 10000000

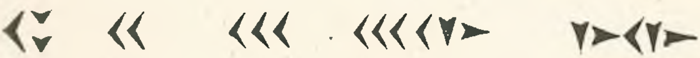
rozmaicie obecnie objaśnianych przez uczonych (tak np. w znaku liczby 1000 jedni widzą kwiat lotusu, inni lampę, i t. d.)

Ta sama zasada stawiania znaków, odpowiadających częściom liczby, obok siebie w jednym, dwu, lub trzech wierszach jest przeprowadzona w piśmie klinowym Babilończyków (czyta się je od lewéj ku prawéj)

1 10 100 1000 10000



2 2 3 3 4 5 6



12 20 30 30000 100000

ale tylko do liczby 100. Po stu bowiem, liczba mniejsza, stojąca z lewéj strony większéj, wskazuje, ile razy tę większą należy sobie wystawić powtórzoną. W ten sposób powstały znak liczby 1000 dopuszcza znów przed sobą znak liczby mniejszéj, mnożącéj tamtę, jak to widzimy na rysunku na liczbach 10 000 (nie należy więc go uważać za 20.100), 30 000, 100 000. Z większych liczb pewnym jest, iż Babilończycy pisali liczby 36 000 i 120 000 tak: 30.1000 i 6.1000, 100.1000 i 20.1000.— Fenicyjanie (o ile wszystkie znane zabytki wykazują) mieli podobny sposób pisania liczb.

3. U Rzymian, skutkiem tego, że oni posiadali jeszcze osobne znaki, przedstawiające liczby: pięć, pięćdziesiąt, pięćset, pisanie liczb było znacznie krótsze, chociaż opiérało się na téj saméj zasadzie [1]). Używali oni znaków następujących:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

Więc np. liczbę: sześćdziesiąt siedem przedstawiali zapomocą takich znaków: pięćdziesiąt, dziesięć, pięć, jeden, jeden (pisząc zawsze większe części przed mniejszymi): LXVII, a zatym pięciu znakami, a nie trzynastu, jak powyżéj (us. 2). Liczbę jednak dwadzieścia trzy przedstawiali XXIII, a więc także (us. 2) za pomocą pięciu znaków.

4. Wcześnie jednak powstało na Wschodzie przedstawianie liczb oparte na tym, że każda liczba: jeden, dwa ,..., dziewięć, dziesięć, dwadzieścia ,..., dziewięćdziesiąt, sto, dwieście ,..., dziewięćset; tysiąc, dwa tysiące i t. d. otrzymała osobny znak [2]), lub literę alfabetu, do których dodawano odpowiednie znaczki [3]), wskazujące, że te litery są przed-

---

[1]) Podobnie Grecy początkowo (od VI wieku przed Chr., w ciągu trzech stuleci przeważnie) przedstawiali liczby. Jednością był znak I (kreska), liczbę 5 przedstawiali literą Π, częściéj w kształcie Γ (pierwszą literą wyrazu πέντε), 10 literą Δ (pierwszą wyrazu δέκα), sto literą H (litera ta była początkowo znakiem przydechu, który jest wyraźny na początku wyrazu ἑκατόν), 1000 literą X (χίλια), 10 000 literą M (μύρια), nadto dla liczb 50, 500, 5000, 50 000 mieli znaki powstałe z połączenia znaku liczby 5 z odpowiednimi znakami liczb 10, 100, 1000, 10 000 w taki sposób, jak np. 𐅅 (500).

Znaki Rzymian V, X, L, oraz znaki w najdawniejszych czasach przez nich używane dla liczb 100 i 1000, powstały z odpowiednich znaków dla liczb u Etrusków, które znów wytworzyły się według wszelkiego prawdopodobieństwa z odpowiednich liter, istniejących w alfabecie etruskim (jak się jednak u Etrusków pisały odpowiednie liczebniki, a tym samym: czy te znaki liczebne są w związku z ich pierwszymi literami — dotąd nie zdołano dociec). — Z czasem znaki C i M (początkowe litery wyrazów: centum, mille) wyrugowały poprzednio dla tych liczb używane znaki, oraz powstał znak D (może przez społowienie owego znaku dawniejszego dla tysiąca: koła wydłużonego w kierunku poziomym, z pionową średnicą), a także używany niekiedy znak ꟼ (jako VI i prawdopodobnie z tego powstały). — Przy przedstawianiu większych liczb w różnych czasach postępowano rozmaicie. Najogólniéj dodanie pozioméj kreski nad znakiem powiększa jego wartość 1000 razy. Tak np. $\overline{XX} = 20\,000$, $\overline{C} = 100\,000$, $\overline{M} = 1\,000\,000$.

[2]) Jak w piśmie hieratycznym Egipcyjan.

[3]) Żydzi używali w ten sposób 22 liter swego alfabetu, które im wystarczyły na oznaczenie tych liczb, aż do 400; dla liczb zaś 500 ,..., 900, które początkowo przedstawiali: 400, 100 i t. d., później używali odmiennych kształtów pięciu z użytych już liter, kształtów, które one przyjmowały, stając na końcu wyrazów. Dla oznaczenia, że te litery oznaczają liczby, dodawali, zwykle po ostatniéj, dwa haczyki. Mogli w ten sposób przedstawiać liczby do 999. Aby zaś oznaczyć 1000, 2000,..., 10 000, 20 000 i t. d., używali znów liter tych samych i w tym samym porządku, stawiąc nad nimi dwie kropki, których nie stawiano wrazie, jeżeli mniejszą część oznaczająca litera, stając przed odpowiadającą większéj, już tym samym wskazywała, że ona oznacza tysiące. Liczbę 15 pisali 9, 6 tylko dlatego, że litery, oznaczające 10, 5 były początkowymi wyrazu Jehowa — czego starannie unikali.

Wzmiankowane powyżéj początkowe oznaczenie liczb przez Greków ustąpiło z czasem sposobowi ich pisania, opartemu na podobnéj, jak u Żydów, zasadzie (powstało ono w wieku V przed Chr.). 24 litery alfabetu jońskiego (którego około r. 400 zastawieniem nie dźwięku, ale pewnej liczby. — W tym sposobie pisania liczb dla przedstawiania liczb mniejszych od sta potrzeba było 18-u znaków różnych, dla przedstawienia liczb mniejszych od tysiąca potrzeba było 27-u znaków różnych.

Ale liczby do dziesięciu były przedstawiane tylko jednym znakiem, liczby od dziesięciu do sta wyrażano dwoma znakami lub nawet jednym (np. trzydzieści), liczby od sta do tysiąca wyrażano albo trzema znakami (np. trzysta piętnaście), albo dwoma (np. trzysta dwadzieścia, trzysta pięć), albo nawet jednym znakiem (np. trzysta), i t. d.

5. Wszystkie takie sposoby przedstawiania liczb, jako zaznaczające oddzielnie części liczby, będące skupieniem dziesięciu jedności i t. d., a więc, jako ściśle (choć niejednakowo) odtwarzające liczenie słowne dziesiątkowe, są systematami dziesiątkowymi pisania liczb, t. j. podstawą ich jest dziesięć.

Z nich jednak system rzymski pisania liczb, jako wprowadzający osobliwe znaki na przedstawienie liczb pięć, pięćdziesiąt, pięćset, jest systematem mieszanym, dziesiątkowo-piątkowym, w którym jednak przeważa znacznie podstawa dziesięć (bo niéma znaku na liczby: pięć razy pięć, pięć razy dwadzieścia pięć i t. d.).

6. W tych wszystkich systematach wartość znaku, przedstawiającego jakąś część liczby, nie zależy od miejsca, na którym ten znak się znajduje.

Tak np. według sposobu rzymskiego pisania liczb, w liczbach:

sześćdziesiąt siedem	LXVII
osiemdziesiąt osiem	LXXXVIII
sto sześćdziesiąt	CLX
dwa tysiące pięćdziesiąt	MML

znak L zawsze oznacza pięćdziesiąt, niezależnie od tego, na którym miejscu się znajduje.

---

często używać w Atenach), oraz trzy litery dawniej używane (a nie, jak chcą niektórzy, wprost fenickie), t. z. episemy, dostarczyły znaków dla pisania liczb od 1 do 999, a dla odróżnienia stawiano nad tymi literami kreskę poziomą. Tysiące oznaczano tymi samymi literami, co liczby od 1 do 9, dodając z lewej strony u dołu kreskę, w rodzaju przecinka. Dziesiątki tysięcy i części większe oznaczano znów tymi samymi literami, dopisując po nich albo przed nimi, albo też nad nimi Mo, lub M. W pierwszym razie zastępowano często znak M. przez samę kropkę (co dało powód do błędnego mniemania, jakoby kropka miała znaczenie pozycyjne). — Tak np. $\overline{\omega\lambda\alpha}$ = 831, ale $\overline{\omega.\lambda\alpha}$ = 8000031. — Niezależnie od tego używano (powstałego spółcześnie z tylkoco opisanym) przedstawiania 24 pierwszych liczb przez 24 litery alfabetu jońskiego. (W ten właśnie sposób policzbowano później w Aleksandryi pieśni Homera.)

Arabowie pierwotnie oznaczali podobnie oddzielnymi literami liczby do 400, a 500 i t. d. pisali tak, jak początkowo Żydzi, t. j. 400, 100 i t. d. W tym przedstawianiu liczb panował jednak nieporządek: litera, która w Bagdadzie oznaczała 90, na północy Afryki przedstawiała 60 i t. d.

Starosłowiańskie pisanie liczb powstało bespośrednio z greckiego.

Aby jednak uprościć pisanie takich liczb, jak IIII, VIIII, XIIII,..., XXXX, XXXIIII,..., LXXXX i t. d., Rzymianie używali skrócenia, opartego na takiéj umowie: jeżeli znak I postawimy przed znakiem V lub X, to rozumiéć należy liczbę pięć, lub dziesięć o jedność zmniejszoną, czyli: IV — cztéry, IX — dziewięć; podobnie, gdy postawimy X przed L lub C, oznaczamy tym, że pięćdziesiąt, lub sto o dziesięć są zmniejszone: XL — cztérdzieści, XC — dziewięćdziesiąt; również, gdy C stanie przed D lub M, to zmniejsza się wartość tych znaków o sto: CD — cztérysta, CM — dziewięćset [1]).

Tak np. cztérdzieści dziewięć Rzymianie pisali: albo XXXXVIIII, albo krócéj XLIX, dziewięćset cztérnaście: albo DCCCCXIIII, albo krócéj CMXIV.

Gdy więc napiszemy liczby

XI i IX,

to widzimy, że I po X powiększa, a I przed X zmniejsza dziesięć o jedność. Podobnie, gdy napiszemy

DC i CD,

to C po D powiększa, a C przed D zmniejsza pięćset o sto.

Skrócenie to sprawiło, iż w rzymskim sposobie pisania liczb wartość napisanéj liczby zależała niekiedy od porządku, w jakim znaki użyte po sobie następowały. (Powtarzamy: odnosi się to tylko do znaku I względem znaków V i X, do znaku X względem znaków L i C i do znaku C względem znaków D i M.)

7. Znacznie późniéj, bo już w kilka wieków po Chrystusie, powstał u Indusów [2]) (w Azyi południowéj) ten sposób piśmiennego

[1]) Bardzo rzadko, spotyka się jednak IIX, jako osiem. Etruskowie większy użytek robili z takiéj saméj zasady: stawiali dwa, a nawet trzy znaki zmniejszające przed pewnym znakiem. — Należy zauważyć, że chociaż w sanskrycie, w językach greckim, łacińskim (jak również np. w mowie wielu plemion indyjskich w Ameryce), w ten sposób wypowiada się wiele liczb, to jednak znalazło to swoje odtworzenie w liczeniu piśmiennym tylko u Etrusków i u Rzymian.

[2]) Z posiadanych dotąd różnorodnych wskazówek wypada, że:

a. Indusowie używali wielu rozmaitych sposobów przedstawiania liczb (tak np. jeszcze na początku wieku XIX, na wyspie Cejlon, choć lud używał cyfr takich, jakich powszechnie dziś używamy, to jednak miejscowi uczeni używali osobnych 9-u znaków dla 1—9, osobnych 9-u znaków dla dziesiątków od 10 do 90, oddzielnego znaku dla sta i oddzielnego dla tysiąca, pisząc np. siedemset w ten sposób, iż znak dla sta poprzedzali znakiem dla siedmiu).

b. Używane w Indyjach w wieku II po Chr. litery na oznaczanie liczb przeszły do Aleksandryi, a stąd w zastosowaniu do rachowania kolumnami do Rzymu, a także do północno-zachodniéj Afryki, ulegając pewnym zmianom.

c. Wprowadzenie zera, a tymsamym ścisłéj zależności wielkości części liczby, przedstawionéj przez cyfrę, od miejsca, na którym się ona znajduje, mogło nastąpić po II stuleciu po Chr.

d. Do wprowadzenia przedstawiania pozycyjnego liczb mogły się przyczynić nazwy wielkich liczb, używane w księgach religijnych (por. str. 12, odsyłacz [3]).

e. Ostatecznie jako epokę wprowadzenia zera (sunja) uważać należy mniéjwięcéj rok 400 po Chr.

f. Kształt dzisiejszych cyfr powstał z liter indyjskich używanych przez Arabów Zachodu, o których mowa pod b., ulegał różnym zmianom, a ustalił się z wynalezieniem druku.

przedstawiania liczb, którego dziś powszechnie używamy [1]). Dlatego nazywamy go indyjskim [2]).

Znaki używane w tym sposobie przedstawiania liczb nazywamy cyframi [3]). Cyfra więc jestto każdy oddzielny znak, służący do przedstawienia liczby.

Wszystkich cyfr różnych jest tylko dziesięć.

Dziewięć spośród nich, zwane cyframi znaczącymi [4]), oddzielnie stojąc, przedstawiają piérwsze dziewięć liczb: 1 (jeden), 2 (dwa) ,..., 9 (dziewięć).

8. Gdy mamy większą liczbę, np. pięćdziesiąt sześć, czyli 5 dziesiątków i 6 jedności, to, aby ją napisać, wypadłoby postawić cyfrę 5, rozumiejąc, że ona ma nam przedstawić dziesiątki zawarte w naszéj liczbie, a prócz tego cyfrę 6, jako przedstawienie pozostałych jedności. Gdy te dwie cyfry napiszemy obok siebie w takim porządku, w jakim one były w wyrażeniu

5 dziesiątków 6 jedności,

t. j. gdy napiszemy

56,

i gdy to zestawimy z przedstawieniem liczby pięć (jedności)

5,

to widzimy, że dla oznaczenia pięciu dziesiątków, możemy używać téj saméj cyfry 5, co dla oznaczenia pięciu jedności, byle ją postawić tak jak w liczbie

56,

---

1) Arabowie Zachodu nauczali go w swych szkołach od wieku VIII. — Od Arabów przedostał się on do świata chrześcijańskiego w wieku XII. — Ten sposób pisania liczb, dość powoli jednak, usuwał z powszechnego użycia tak liczby rzymskie, jak i mechaniczne metody wykonywania rachunków.

2) Do tego, cośmy już powiedzieli o powstaniu tego sposobu pisania liczb, dodamy jeszcze, że Arabowie pisali w kierunku od prawéj ku lewéj; w takim też kierunku pisali liczby według pierwotnego swego (por. str. 17, odsyłacz) sposobu, poczynając od większych części (por. str. 15, odsyłacz 1). Pisząc zaś liczby według sposobu, który sami nazywają indyjskim, pisali je od lewéj ku prawéj, jak Indusowie: musieli więc go przyjąć już dobrze wyrobionym, kiedy go nie przyswoili sobie więcéj, nie zastosowali doń kierunku, w którym pisali dawniejsze swoje znaki liczebne.

3) Zero nazywane było przez Arabów as-sifr (puste, próżne), jako tłómaczenie wyrazu sunja, oznaczającego zero u Indusów. Z tego wyrazu arabskiego pochodzi widocznie nazwa: cyfra. Tak np. w arytmetykach u nas wydanych wyraz zero spotyka się poraz piérwszy w arytmetyce łacińskiéj Höll'a (1760, Poznań, przedruk wydania klausenburskiego), gdy we wcześniejszych, a nawet w kilku późniejszych w znaczeniu zera używa się stale wyraz: cyfra. (Cyfry zaś znaczące nazywano: figurami, numerami, charakterami, albo nawet wprost liczbami.)

O powstaniu kształtów cyfr mówiliśmy wyżéj. Nie jest więc cyfra obrazem liczby. Dlatego też chęć dopatrzenia w kształcie cyfry odpowiedniéj liczby części linii łamanéj jest tylko... sztuczką łamaną.

4) «Chiffres significatifs».

t. j. na miejscu drugim, licząc miejsca [1]) od strony prawéj. — Podobnie trzydzieści siedem, albo osiemnaście, t. j. liczby, w których mamy

3 dziesiątki 7 jedności, 1 dziesiątek 8 jedności,

napiszemy:

37, 18.

9. Ale jak napisać liczbę np. trzydzieści, lub liczbę dziesięć? Liczba trzydzieści, t. j.

3 dziesiątki,

podług tego, jak pisaliśmy liczby 56, 37, 18, powinna być wyrażona przez cyfrę 3 postawioną na drugim miejscu (licząc od strony prawéj). Gdy cyfra 3 ma się znaléść na miejscu drugim, to aby miejsce, przez nią zajęte, było drugim, trzeba żeby piérwsze miejsce było przynajmniéj naznaczone, przez coś zajęte. — Jeżeliby w naszéj liczbie, prócz 3 dziesiątków, były jedności (jak np. w liczbie 37), to mielibyśmy co (mianowicie: te właśnie jedności) postawić na miejscu piérwszym. — Ale gdy w naszéj liczbie trzydzieści, prócz 3 dziesiątków, niéma już jedności, to, aby 3 mogło zająć miejsce drugie, wypadnie nam na miejscu piérwszym postawić jakikolwiek umówiony znaczek, któryby nam wskazywał, że w naszéj liczbie niéma niczego takiego do postawienia na tym miejscu, co na nim bywa stawiane w liczbie np. 37, albo 56. Oznaczymy w ten sposób, że z naszéj liczby trzydzieści, po oddzieleniu z niéj dziesiątków, nie pozostało się już żadnych jedności dla postawienia ich na miejscu piérwszym. — Owóż, jako taki właśnie znaczek używa się:

0,
zero

tak, iż liczbę trzydzieści i podobnie liczbę dziesięć, czyli liczby, w których mamy:

3 dziesiątki żadnych jedności, 1 dziesiątek żadnych jedności,

napiszemy:

30, 10.

10. Stosując to postępowanie (us. 8, 9) przy pisaniu większych liczb, liczbę np. pięćset dwadzieścia sześć, czyli liczbę, w któréj mamy:

5 setek 2 dziesiątki i 6 jedności

napiszemy:

526,

tak, iż cyfra 5, postawiona na miejscu trzecim (licząc od strony prawéj), przedstawia setki. Liczbę zaś: pięćset sześć, t. j. liczbę, w któréj mamy: 5 setek żadnych dziesiątków 6 jedności, napiszemy: 506, gdzie znowu postawiliśmy 0 na miejscu drugim dlatego, żeby to drugie miejsce zająć, zaznaczyć, aby tymsamym można było cyfrę 5.

---

[1]) Jak Arabowie.

jako przedstawiającą setki, postawić na miejscu trzecim. Podobnie: pięćset wypadnie nam napisać: 500; sto zaś: 100, i t. d.

Taksamo sobie wytłomaczymy, dlaczego np. liczbę dwa tysiące trzysta dziewięć napiszemy: 2309; dwa tysiące: 2000; tysiąc: 1000, a tymsamym, dlaczego tysiące stają na miejscu czwartym.

Również liczbę: trzydzieści sześć tysięcy cztéry, czyli liczbę, w któréj mamy: 3 dziesiątki tysięcy 6 tysięcy żadnych setek żadnych dziesiątków 4 jedności, napiszemy: 36004, i dostrzeżemy, że dziesiątki tysięcy oznaczają się cyfrą, znajdującą się na miejscu piątym.

Podobnież setki tysięcy oznaczamy cyfrą na miejscu szóstym, milijony cyfrą na miejscu siódmym, dziesiątki milijonów cyfrą na miejscu ósmym i t. d.

W ten sposób liczby mniejsze od 10 przedstawiają się jedną cyfrą; liczby od 10 do 99 (zawsze) dwiema cyframi, liczby od 100 do 999 trzema cyframi i t. d.

11. Widzieliśmy tu, że w tym sposobie pisania liczb bardzo jest nam użyteczny znak 0 (zero), który stanowi dziesiątą cyfrę systematu indyjskiego.

Z tego zaś, w jaki sposób robimy z niego użytek, wypada, że

Zero jestto cyfra, służąca przy pisaniu liczby tylko do zajęcia pewnego miejsca, aby inne cyfry (znaczące) można było postawić na takim z porządku miejscu, na którym one postawione być mają,

albo innymi słowy:

Zero wskazuje nam, że w liczbie niéma tych części liczby, które bywają oznaczane na miejscu, przez zero zajętym.

12. Zauważymy tu, że czy powiemy: trzysta pięć, co napiszemy 305, czytéż powiemy, że w téj liczbie nie mamy żadnych dziesiątków tysięcy, żadnych tysięcy, 3 setki, żadnych dziesiątków, 5 jedności, co napiszemy

00305,

— to zawsze wyjdzie na jedno. Tę samę również liczbę będziemy mieli, gdy napiszemy 0305, lub 0000305. Wogóle więc: *liczba się nie zmieni, jeżeli z lewéj strony, przed pierwszą cyfrą znaczącą, dopiszemy ilekolwiek zer.* Dlatego téż zer na początku liczby, jako niepotrzebnych, nie piszemy, ale dopisać je możemy ilekroć toby było pożyteczne.

13. Gdy zestawimy ze sobą np. liczby

3524
18046
495
524087

to widzimy, że w każdą z nich wchodzi cyfra 4, ale w piérwszéj oznacza 4 jedności, w drugiéj 4 dziesiątki, w trzeciéj 4 setki i t. d., t. j., że *wartość części liczby, przedstawionéj przez cyfrę, zależy od miejsca, na którym ta cyfra jest postawiona.*

Ta zależność wartości części liczby, przedstawionéj przez cyfrę, od miejsca czyli «pozycyi» — któréjto zależności, jak widzieliśmy (us. 5, 6), niéma, wogóle mówiąc, w innych sposobach pisania liczb — sprawia, iż systemat dziesiątkowy indyjski pisania liczb nazywa się także pozycyjnym.

14. Zastanawiając się nad tym, jak możemy przedstawiać coraz większe liczby, łatwo dochodzimy do wniosku, że przy pomocy dziesięciu cyfr

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

jesteśmy w stanie, dzięki zeru, przedstawić wszystkie liczby, jakie tylko pomyśléć możemy, w sposób do pewnego stopnia podobny do tego, w jaki przy pomocy ograniczonéj liczby liter abecadła przedstawiamy całą rozmaitość wyrazów naszéj mowy—z tą wszakże różnicą, że nie każde zgrupowanie liter przedstawia wyraz istniejący w mowie, gdy tymczasem wszelkie zgrupowanie cyfr zawsze przedstawi liczbę.

15. Zauważymy jeszcze, że, przedstawiając jakąkolwiek liczbę, na piérwszym (licząc od strony prawéj) miejscu oznaczamy jedności, na drugim dziesiątki, t. j. części liczby 10 razy od jedności większe, na trzecim setki, t. j. części liczby 10 razy większe od dziesiątków, na czwartym tysiące, t. j. części liczby 10 razy większe od setek, na piątym dziesiątki tysięcy, t. j. części liczby 10 razy większe od tysięcy, i t. d. Więc np. w liczbie

682307

każda z oddzielnych części liczby, przedstawionych przez cyfrę np. 2, jest 10 razy większa od każdéj z części liczby, przedstawionych przez cyfrę 3, a 10 razy mniejsza od każdéj z części liczby, przedstawionych przez cyfrę 8; każda znów z części liczby, przedstawionych przez cyfrę np. 3, jest 10 razy większa od części liczby, oznaczanych na miejscu, zajętym przez zero, a 10 razy mniejsza i t. d.

16. Ze wszystkiego, cośmy mówili o powszechnie teraz używanym sposobie pisania liczb, wypada, że:

W systemacie dziesiątkowym, ogólnie teraz stosowanym przy pisaniu liczb, wyrobionym pierwotnie przez Indusów, posługujemy się tylko dziesięciu znakami, zwanymi cyframi; jedna z nich służy tylko do zaznaczania miejsca, niezajętego przez odpowiednią część liczby, każda zaś z pozostałych dziewięciu cyfr, może przedstawiać różne części liczby, zależnie od miejsca, na którym jest postawiona, tak, iż oddzielne części liczby, oznaczone *przez cyfrę, stojącą na jakimkolwiek miejscu, są dziesięć razy większe od części liczby, wyrażonych przez cyfrę, stojącą obok tamtéj z prawéj strony* [1]).

17. Czytanie i pisanie liczb. Z tego, cośmy już poprzednio (us. 8, 9, 10) mówili o pisaniu liczb, wprost wypada, że: *gdy napisana liczba ma niewięcéj niż cztéry cyfry, to, czytając ją, wymawiamy, zaczynając z lewéj strony, każdą cyfrę znaczącą oddzielnie i przy każdéj dodajemy zaraz nazwanie części liczby, jakie bywają oznaczane na miejscu, które ta cyfra zajmuje.* Np. 2357 czytamy: dwa *tysiące* trzy*sta* pięć*dziesiąt* siedem (dodajemy: *jedności* tylko wtedy, gdy idzie nam o szczególną dobitność); 307 czytamy: trzy*sta* siedem.

Podobnież, *gdy mamy napisać liczbę niewiększą od 9999, to w myśli wystawiamy ją sobie rozłożoną na składowe części: tysiące, setki, dziesiątki i pozostałe jedności i, zaczynając od największych części, piszemy cyfry oznaczające, ile jest oddzielnych takich części, a w braku części do oznaczenia już po cyfrze znaczącéj piszemy na odpowiednich miejscach zera*, jak to szczegółowo objaśnione było w ustępach 9-ym i 10-ym.

18. W taki sam sposób postępowalibyśmy z większymi liczbami gdyby w naszéj mowie były oddzielne nazwy na dziesięć tysięcy, sto tysięcy, dziesięć milijonów i t. d. Gdy jednak tych nazw nie posiadamy, a zamiast mówić np. trzysta tysięcy i pięćdziesiąt tysięcy i siedem tysięcy, krócej, a jednak równie dokładnie możemy powiedzieć: trzysta pięćdziesiąt siedem tysięcy, więc np. liczbę

357 307

przeczytamy: trzysta pięćdziesiąt siedem *tysięcy* trzysta siedem *(jedności).* Podobnie liczbę

26 350 027

przeczytamy: dwadzieścia sześć *milijonów*, trzysta pięćdziesiąt *tysięcy*, dwadzieścia siedem *(jedności).* W ostatnim przykładzie przeczytaliśmy 26, jakby liczbę oddzielną, a późniéj dodaliśmy: milijonów, t. j. nazwę części liczby, oznaczanych na miejscu, zajętym przez ostatnią cyfrę liczby 26, t. j. przez cyfrę 6; podobnież daléj wymówiliśmy 350, jakby liczbę oddzielną, a późniéj dodaliśmy: tysięcy, t. j. nazwę części liczby, oznaczanych na miejscu zajętym przez 0, t. j. przez ostatnią cyfrę téj liczby 350. A więc:

---

[1]) Gdy wypada pisać liczby porządkowe, to zwykle stawia się końcówkę przy liczbie, np. ustęp 16-y (szesnasty) § 3-go (trzeciego). Ale także często zaznacza się, że pewna liczba jest porządkową, przez postawienie po téj liczbie kropki. Tak np. na zaleceniu przez Komisyją Edukacyjną *Arytmetyki dla szkół narodowych* do użytku w ówczesnych zakładach naukowych znajdujemy: dnia 2. października roku 1778. — Przy imionach panujących liczby porządkowe piszą się zawsze znakami rzymskimi, których zwykle używa się także dla przedstawienia liczb porządkowych na tablicach pamiątkowych.

Przy czytaniu liczb większych patrzymy na liczbę napisaną tak, jakgdyby ona była podzielona, od strony prawéj, na grupy trzycyfrowe *), *a każdą taką grupę, poczynając od strony lewéj, czytamy oddzielnie, jakgdyby liczbę osobną, dodając tylko nazwę części liczby, oznaczanych na miejscu, zajętym przez ostatnią cyfrę téj grupy* [1]). Tak np., gdy mamy napisane: 41560000724 dukatów, czyli 41 560 000 724 dukatów, to przeczytamy: 41 milijardów 560 milijonów 724 dukatów.

Jeżeli rozumiemy (§ 2, us. 8) bilijon, trylijon i t. d. w ten sposób jak Francuzi, to *powyższe prawidło rosciąga się na jakkolwiek wielkie liczby*. Np. liczbę 5 514 102 345 678 901 przeczytamy: 5 kwatrylijonów 514 trylijonów 102 bilijony 345 milijonów 678 tysięcy 901 (jedności). Jeżeli zaś rozumieć te nazwy będziemy na sposób niemiecki, to na czytanie liczb większych od 999 999 999 prawidło tak się przedstawi: *trzeba wystawić sobie liczbę podzieloną od strony prawéj na grupy sześciocyfrowe i każdą grupę, poczynając od strony lewéj, czytać oddzielnie, jakgdyby liczbę osobną, dodając nazwę części liczby, oznaczanych na miejscu zajętym przez cyfrę ostatnią tej grupy*. Np. liczbę 5514 102345 678901 przeczytamy: 5514 bilijonów 102345 milijonów 678901 (jedności).

Gdy mamy przed oczyma liczbę złożoną z bardzo wielu cyfr, to, aby dać o niéj pojęcie, zwykle jako dostateczne uważamy zaznaczenie, z ilu cyfr ona się składa i jakie są jéj początkowe (t. j. od strony lewéj) cyfry. Np. gdy mamy przeczytać: Ziemia waży w przybliżeniu 5 955 625 500 000 000 000 000 000 kilogramów, to powiemy: Ziemia waży w przybliżeniu taką liczbę kilogramów, która się wyraża 25-u cyframi, z początkowymi cyframi: 5, 9, 5, 5. Również, gdy, obliczając, ile będzie ziarn na wszystkich 64 polach szachownicy, wrazie, jeżeli położymy na jednym polu 1 ziarno, na drugim 2 ziarna, na trzecim 4 ziarna, na czwartym 8 ziarn i t. d. (wciąż podwajając liczbę ziarn), znajdziemy, że na szachownicy będzie ziarn

18 446 744 073 709 551 615,

to, aby dać pojęcie o téj liczbie słowami, powiemy: ilość ziarn będzie przedstawiona liczbą dwudziestocyfrową, z początkowymi cyframi 1, 8, 4. — Samo się przez się rozumié, że ilość wypowiadanych początkowych cyfr zależy od tego, jak dalece chcemy (i niekiedy: jak dalece możemy) dać dokładne pojęcie o podobnie wielkiéj liczbie. Gdy zaś możemy i pragniemy przedstawić komuś tak wielką liczbę zupełnie ściśle, to daleko praktyczniéj nie wypowiadać jéj słuchającemu, ale mu ją napisać.

19. Gdy słyszymy wypowiadaną liczbę większą od 10 000, to *w przypadku, gdy w liczbie niéma milijonów, a są tysiące, zauważywszy naprzód, ile jest tych tysięcy, wypisujemy liczbę tysięcy, jakgdyby osobną liczbę;*

---

*) Ostatnia więc grupa (t. j. piérwsza od strony lewéj) może zawiérać niekiedy dwie lub jednę cyfrę.

[1]) To prawidło obejmuje w sobie prawidło §-u 17-go, jako przypadek szczególny.

jeżeli w danéj liczbie jest jeszcze część mniejsza od tysiąca, to (w razie potrzeby uzupełniwszy tę część z początku jednym lub dwoma zerami (us. 12) *tak, aby się ona stała liczbą trzycyfrową) piszemy ją całą obok tysięcy ze strony prawéj; jeżeli zaś słyszymy wypowiedziane tylko tysiące, to, napisawszy liczbę tysięcy, jakby osobną liczbę, dopisujemy ze strony prawéj trzy zera.* Np., gdy nam dyktują: dwieście osiem tysięcy sześć, to powinniśmy sobie w myśli tak tę liczbę przedstawić: 208 *tysięcy* 006 (jedności) i skutkiem tego napiszemy 208 006; gdy zaś nam mówią trzydzieści tysięcy, to, napisawszy 30, dopiszemy trzy zera i mieć będziemy 30 000.— *Podobnie postępujemy, gdy w danéj do napisania liczbie są milijony.* Np. trzydzieści sześć milijonów osiem tysięcy sześćdziesiąt pięć; przedstawiamy sobie tę liczbę jako: 36 *milijonów* 008 *tysięcy* 065 (jedności) i piszemy: 36 008 065. Taksamo: trzy milijony dziewięćdziesiąt pięć, t. j. 3 *milijony* żadnych (a więc: 000) *tysięcy* 095 (jedności), czyli 3 000 095. Również: 208 milijonów, ponieważ nic więcéj nie słyszymy, napiszemy: 208 000 000.

Gdy w dyktowanéj liczbie słyszymy bilijony, trylijony i t. d. [1]), to, umiejąc wprawnie pisać różne (aż do dziewięciocyfrowych) liczby i zoryjentowawszy się, jak dyktujący rozumie znaczenie bilijona, trylijona i t. d. (§ 2, us. 8), łatwo, pisząc uważnie, możemy te liczby dobrze napisać, bacząc tylko na to, cośmy wyżéj (us. 18) mówili o czytaniu takich liczb.

20. Ta okoliczność, że, skutkiem braku oddzielnych nazw dla dziesięciu tysięcy, sta tysięcy, dziesięciu milijonów i t. d. (§ 2, us. 6, 7), zachodzi potrzeba, przy czytaniu liczb większych, wystawiania ich sobie, jako podzielonych na trzycyfrowe (a przy uwzględnianiu bilijonów i t. d., pojmowanych po niemiecku, na sześciocyfrowe) grupy, sprawiła to, iż wielu utrzymuje i naucza, że w liczbie są trzycyfrowe (lub sześciocyfrowe) klasy — więc: klasa jedności, klasa tysięcy, klasa milijonów i t. d. (lub: klasa jedności, klasa milijonów, klasa bilijonów i t. d.) — a następnie: jedności proste, jedności tysięcy, jedności milijonów (por. str. 12 odsyłacz [5]) i t. d. (lub jedności proste, jedności milijonów i t. d.), dziesiątki proste i t. d. [2])

Taki podział nie leży w naturze liczby, a pozornie wynika, jakeśmy widzieli, z braku nazw oddzielnych na dziesiątki tysięcy i t. d. Jako dowód posłużyć nam może to, że Grecy, posiadając nazwę na dziesięć tysięcy (por. str. 12), wypowiadali większe liczby w ten sposób, iż odpowiednio do tego wypadłoby do liczb, według sposobu teraz używanego napisanych, wprowadzić

---

[1]) Takich liczb w niższych klasach szkół dyktować nie należy (por. str. 12 odsyłacz [7]).

[2]) Nawet często, ucząc pisania liczb, naprzód wykładają dogmatycznie cały ten nienaturalny aparat, wprowadzający nie istniejące pojęcia o rzekomych jednościach tysięcy i t. d, albo o «jednościach różnego rzędu», a następnie, przystępując do uczenia liczenią, wymagają od uczącego się, aby ten schemat miał on ciągle na myśli, choć uczeń pojąć nie może, skąd się to wzięło. Jestto pozostałością z dawnego mechanicznego wykonywania rachunków. Sprawia ona jednak, że, ściśle rzecz biorąc, liczenie piśmienne właściwie poprzedza liczenie słowne.

podział na czterocyfrowe klasy [1]). W sanskrycie zaś podobny podział byłby zgoła niemożliwy (por. str. 12 odsyłacz [3]).

21. Gdy mamy liczbę np. 3675 i mamy odpowiedzieć na pytanie: ile w niéj jest (wszystkich) set? to zauważymy, że w téj liczbie mamy 3 tysiące, a tysiąc jestto dziesięć set, więc 3 tysiące jestto *trzy* razy *dziesięć* set, albo (§ 2, us. 4) *trzydzieści* set, a że nadto w liczbie jest *sześć*set, więc razem mamy: *trzydzieści sześć set*, t. j. tyle set, ile otrzymamy, przeczytawszy początkowe cyfry danéj liczby do cyfry, stojącéj na trzecim (odpowiadającym setkom) miejscu (włącznie), jakby przedstawiające liczbę oddzielną. — Podobnie znajdziemy, że, z uwagi, iż każde sto jestto dziesięć dziesiątków, 36 set jest 36 razy dziesięć dziesiątków, i taksamo, jak np. 5 razy dziesięć jest 50, zamiast: 36 razy dziesięć, możemy powiedzieć: 360, czyli 36 set jest to samo, co 360 dziesiątków. Gdy nadto w naszéj liczbie jest jeszcze 7 dziesiątków, to w danéj liczbie mamy (wszystkich) dziesiątków 367, t. j. tyle, ile wypadnie, gdy, zatrzymawszy się na cyfrze 7, stojącéj na drugim miejscu (odpowiadającym dziesiątkom), przeczytamy wszystkie od początku cyfry, jakby przedstawiające liczbę osobną. — Tak np. w liczbie

8 406 275

mamy: milijonów 8, (wszystkich): setek tysięcy 84, dziesiątków tysięcy 840, tysięcy 8406, setek 84062, dziesiątków 840627, jedności 8406275.

(Zadania arytmetyczne § 1).

---

[1]) Archimedes, aby ująć w pewien systemat przedstawianie liczb większych od zwykle używanych, wprowadza **oktady**, tak, iż pierwszą oktadę stanowić miały wszystkie liczby mniejsze od myriady myriad, 10000.10000, czyli od 100 000 000, drugą oktadę wszystkie liczby, poczynając od myriady myriad, mniejsze od liczby, którą dziś przedstawiamy przez 1 z 16-ma zerami, i t. d., aż do myriady myriad oktad, t. j. aż do 1 z 800 000 000 zer; te zaś wszystkie liczby, mniejsze od téj 1 z 800 000 000 zer, tworzyły **peryjod** pierwszy. Po tym następował peryjod drugi liczb i t. d.

ROZDZIAŁ II.

DODAWANIE I ODEJMOWANIE LICZB CAŁKOWITYCH.

§ 4. DODAWANIE.

1. Jeżeli mając dwie liczby, np. 5 i 3, chcemy je złączyć w jednę, t. j. chcemy znaléść liczbę, która byłaby skupieniem tylu jedności, ile jest ich razem w obu danych liczbach 5 i 3, to, aby dobrze zrozumiéć, czym jest właściwie odszukiwanie owéj jednéj liczby, musimy się zastanowić nad tym, jak radziliśmy sobie z takim zadaniem w pacholęcym wieku, gdyśmy nie nabyli jeszcze wprawy w prędkie wypowiadanie liczby szukanéj. — Robiliśmy tak: liczbę 3 wystawiliśmy sobie przedstawioną czyto trzema np. ziarnami, czytéż trzema wyprostowanymi palcami; następnie z téj liczby 3 oddzieliliśmy naprzód (piérwszą) jedność i, wystawiając sobie, że ją dołączamy do liczby 5, powiedzieliśmy (głośno, lub w myśli): 5 i 1 jest 6; dołączając podobnie (drugą) jedność, powiedzieliśmy: 6 i 1 jest 7; nakoniec dołączając (trzecią, ostatnią) jedność, powiedzieliśmy: 7 i 1 jest 8. Do 5 więc doliczyliśmy po jednéj (wszystkie) jedności liczby 3. — Takie postępowanie, zapomocą którego, mając dwie liczby dane, do jednéj z nich doliczamy jedności drugiéj z tych liczb i odnajdujemy liczbę, która jest skupieniem tylu jedności, ile ich jest razem w obu danych liczbach, jest najprostszym w arytmetyce działaniem, zwanym dodawaniem (porównaj us. 6-y). Możemy więc powiedziéć, że:

Zapomocą dodawania doliczamy do jednéj z danych dwu liczb jedności liczby drugiéj. Przez to więc jedna z danych liczb powiększa się o tyle jedności, ile ich ma druga, czyli: powiększa się o drugą liczbę, tak, iż często, zamiast mówić np.: do 5 dodać 3, mówimy: 5 powiększyć o 3.

2. W przytoczonym przykładzie, uskuteczniając dodawanie, mówiliśmy: *pięć* i jeden, *sześć;* sześć i jeden, *siedem;* siedem i jeden, *osiem*, głośniej wymawiając wyrazy: pięć, sześć, siedem, osiem, t. j. liczyliśmy (§ 1, us. 7). Liczenie to zaczęliśmy od 5 (jednej z danych liczb), a przerwaliśmy je na 8, t. j. na liczbie w szeregu liczb naturalnych

1, 2, 3, 4, **5**, 6, 7, **8**, 9, 10, 11 i t. d.

zajmującéj po 5 trzecie miejsce, t. j. takie z porządku miejsce, ile druga z danych liczb, t. j. liczba 3, ma jedności.

Dopóki nie wprawiliśmy się w prędsze wykonywanie, dopóty w taki sposób dodawaliśmy dane dwie liczby do siebie. Dopiero później, kiedyśmy nabyli należytej wprawy, znaleźliśmy się w możności odrazu mówić: 5 i 3 jest 8, albo 6 i 7 jest 13. Że takie prędkie wykonywanie dodawania jest tylko skutkiem wprawy, o tym przekonywa nas najlepiéj ta okoliczność, że jeżeliby ktoś nam zaprzeczył, iż z dodania np. 4 i 5 wypada 9, to dla przekonania go o tym sposobem najprostszym, będziemy do 4 doliczać po jedności wszystkie jedności liczby 5. Zatym istotnie: *w dodawaniu idzie nam o liczenie, które się zaczyna od jednej z danych dwu liczb, a przerywa na liczbie, zajmującej po niéj w szeregu liczb naturalnych to z porządku miejsce, które wskazuje liczba jedności w drugiéj z liczb danych.*

Gdy zaś, skutkiem nabytéj wprawy, mówimy odrazu 5 i 3 jest 8, 6 i 7 jest 13 i t. d. [1]), to dodawanie, będąc zawsze liczeniem, przedstawia się jako *liczenie skrócone, zapomocą ktorego w szeregu liczb naturalnych od jednéj z danych do dodawania liczb przechodzimy odrazu do liczby, zajmującéj po niéj miejsce, wskazane przez liczbę jedności drugiéj z danych liczb.*

3. Mając do 5-ciu dodać 3, doliczamy do 5-ciu wszystkie jedności liczby 3, tak, iż otrzymana liczba 8, prócz jedności liczby 5, zawiéra jeszcze jedności liczby 3 — jest skupieniem tylu jedności, ile ich jest w obu danych do dodania liczbach. Liczba więc 8, otrzymana z dodania liczb 5 i 3, składa się z jedności liczby 5 i jedności liczby 3. Dlatego liczby 5 i 3, t. j. liczby dane do dodania, nazywają się składnikami. Co się zaś tyczy liczby 8, t. j. liczby szukanéj, którą otrzymać mamy z dodania składników, to ona złacińska nazywa się sumą. A ponieważ suma jest skupieniem tylu jedności, ile ich jest w obu danych do dodania liczbach, więc: *suma jest większa od każdego ze składników.*

W dodawaniu więc naszym, mając dwie liczby, 5 i 3, zwane składnikami, odnaleźliśmy liczbę 8, będącą skupieniem jedności obu składników, zwaną sumą. Zatym:

Dodawanie jestto działanie, za pomocą którego, mając dwie liczby, zwane składnikami, odnajdujemy liczbę, która jest skupieniem jedności obu składników, zwaną sumą. (Por. us. 6-ty.)

4. Dla oznaczenia, że dwie liczby mamy dodać do siebie, piszemy jednę obok drugiéj, stawiając między nimi znak +, który wymawiamy: więcéj, albo: i, albotéż (us. 1): powiększone o, np. 5 + 3 czytamy: 5 więcéj 3, albo: 5 i 3, albotéż: 5 powiększone o 3.

Dla połączenia ze sobą dwu różnych postacią wyrażeń téj saméj liczby (albo często umyślnie dla wskazania, iż dwa, postacią różniące się wyrażenia, przedstawiają tę samę liczbę), używamy zna-

---

[1]) Jakoteż, gdy przy dodawaniu większych liczb używamy (us. 12, 14) krótszego sposobu postępowania.

ku $=$, który się czyta: równa się, a niekiedy: jest to samo, co, lub przez skrócenie: jest.

Możemy więc napisać np.

$$5+3=8,$$

co przeczytamy: 5 więcej 3 równa się 8, albo: 5 i 3 jest 8.

Ponieważ zaś $5+3$ przedstawia tę samą liczbę, co 8, suma liczb 5 i 3, więc także $5+3$ nazywamy często sumą liczb 5 i 3, t. j. wyrażenie, powstałe przez połączenie składników znakiem $+$, nazywamy często ich sumą, czyli: *wskazane dodawanie składników nazywamy często sumą:*

5. Przy pomocy tych znaków, zamiast: 3 jestto 1 i 1 i 1, możemy napisać:

$$3=1+1+1;$$

podobnież *)

$$5=1+1+1+1+1,$$

a tymsamym $5+3$ możemy napisać $1+1+1+1+1+3$, a pisząc tu jeszcze $1+1+1$ zamiast 3, widzimy, że $1+1+1+1+1+1+1+1$ przedstawia tę samę liczbę, co $5+3$, więc

$$5+3=1+1+1+1+1+1+1+1.$$

Jeżeli tu ostatnie pięć jedności podkreślimy np. u dołu, a pozostałe trzy jedności zakreślimy z góry

$$5+3=\overline{1+1+1}+\underline{1+1+1+1+1}$$

i jedności oznaczone każdą z tych kresek poziomych skupimy w oddzielne liczby, t. j. $1+1+1$ zastąpimy przez 3, a $1+1+1+1+1$ zastąpimy przez 5, to wypadnie nam

$$5+3=3+5.$$

To, cośmy teraz otrzymali, wskazuje nam, że $5+3$ jest to samo, co $3+5$, czyli, że jest wszystko jedno, czy 3 dodać do 5-u, czyteż 5 dodać do 3-ch. Możemy więc powiedzieć:

Suma dwu składników nie zależy od ich porządku.

6. Jeżeli kilka liczb danych, np. 5, 3, 6, 2 i 7, chcemy złączyć w jednę liczbę, t. j. chcemy znaleźć liczbę, która byłaby skupieniem tylu jedności, ile ich jest razem w liczbach 5, 3, 6, 2 i 7, to trzeba naprzód do liczby 5 doliczyć jedności liczby 3, t. j. do 5-u *dodać* 3, i powiemy: 5 i 3 jest 8 (czyli: piszemy $5+3=8$); następnie do otrzymanej liczby 8 doliczyć jedności liczby 6, t. j. do 8-u *dodać* 6, i powiemy: 8 i 6 jest 14 (czyli: $8+6=14$); później podobnie do 14

*) Zamiast więc mówić: jedność i każde skupienie jedności nazywamy liczbą całkowitą (§ 1, us. 5), możemy powiedzieć: jedność i wszelką sumę jedności nazywamy liczbą całkowitą.

dodać 2, więc: 14 i 2 jest 16 (czyli: $14+2=16$), i znowu do 16 *dodać* 7, więc: 16 i 7 jest 23 (czyli $16+7=23$).

Widzimy więc, że postępowanie to złożone jest z dodawań (po dwa składniki):

$$5+3=8;\ 8+6=14;\ 14+2=16;\ 16+7=23.$$

Jeżeli w dodawaniu ostatnim, t. j. w: $16+7=23$, zamiast liczby 16 napiszemy poprzednie jéj wyrażenie (gdyż 16 jest to samo, co $14+2$), to mieć będziemy *)

$$14+2+7=23,$$

a jeżeli tu zamiast liczby 14 napiszemy poprzednie jéj wyrażenie: $8+6$, to

$$8+6+2+7=23,$$

a gdy nakoniec jeszcze teraz zamiast 8-u napiszemy $5+3$, to

$$5+3+6+2+7=23.$$

Dwa zaś te różne postacią wyrażenia, jedno $5+3+6+2+7$, drugie 23, jako połączone znakiem $=$, przedstawiają tę samą liczbę, są sobie równe, t. j. liczba 23 jest skupieniem jedności liczb danych: 5, 3, 6, 2 i 7, o co właśnie nam szło.

Postępowanie to, jak widzieliśmy, rospada się na kilka dodawań po dwa składniki, czyli: jest dodawaniem złożonym. Dodawanie złożone zwykle wprost dodawaniem nazywamy. Wszystkie liczby dane nazywamy składnikami, a liczbę, która jest skupieniem jedności składników, sumą. Powiemy więc ogólnie:

Dodawanie jestto działanie, za pomocą którego, mając dwie lub więcéj liczb danych, zwanych składnikami, odnajdujemy liczbę, zwaną sumą, która jest skupieniem jedności składników.

Zasadniczym więc jest dodawanie tylko dwu składników. Dodawanie większéj liczby składników sprowadza się do kilku dodawań po dwa składniki.

Dodawanie wielu składników, jako złożone z dodawań po dwa składniki z szeregu liczb naturalnych, doprowadza (us. 2) do pewnej liczby (sumy) w szeregu liczb naturalnych; t. j. *suma liczb z szeregu liczb naturalnych jest także liczbą tego szeregu.*

Zadanie więc nasze mogliśmy tak wysłowić: wykonać dodawanie liczb 5, 3, 6, 2, 7. Te liczby były składnikami; sumą ich była liczba 23.

Zauważymy jeszcze, że *często wskazane dodawanie składników nazywamy sumą* (us. 4); tak np. możemy mówić: suma $5+3+6+2+7$.

---

*) Pisząc kredą na tablicy, możemy, zmazawszy 16, zamiast téj liczby napisać $14+2$ i t. d.

7. Gdy mamy sumę np.

$$5+3+6+2+7,$$

to tę sumę pięciu składników możemy uważać jako złożoną np. ze składnika 5, składnika przedstawionego przez (us. 4) sumę $3+6$ i składników 2 i 7. Wiemy, że suma dwu składników nie zależy od porządku, w jakim je piszemy (us. 5), zatym $3+6=6+3$. Gdy więc liczba $3+6$ jest to samo, co liczba $6+3$, przeto liczba przedstawiona wyrażeniem: $5+3+6+2+7$, jest to samo, co liczba $5+6+3+2+7$, t. j. dwa te różne postacią wyrażenia przedstawiają tę samą liczbę; można więc je połączyć (us. 4) znakiem $=$ tak, iż

$$5+3+6+2+7=5+6+3+2+7.$$

Podobnie rozumując, moglibyśmy w sumie $5+6+3+2+7$ przestawić między sobą np. s k ł a d n i k i s u m y $5+6$, a wyrażenie $6+5+3+2+7$ przedstawiłoby tę samą liczbę, co poprzednie wyrażenia, tak iż

$$5+3+6+2+7=6+5+3+2+7$$

I podobnie, w sumie $6+5+3+2+7$ przestawiając między sobą składniki sumy $3+2$, otrzymamy odmienne od poprzednich wyrażenie téj saméj liczby, mianowicie $6+5+2+3+7$, tak iż

$$5+3+6+2+7=6+5+2+3+7,$$

i t. d. Porównywając ze sobą te i inne wyrażenia, które w ten sposób otrzymywać możemy przez kolejne przestawianie dwu obok siebie stojących składników, i przypatrując się rozmaitemu porządkowi, w jakim te same składniki w różnych wyrażeniach sumy po sobie następują, widzimy, że możemy składniki sumy dowolnie przestawić, czyli, że w ogóle:

Suma nie zależy od porządku składników.

8. Ściśle można to uzasadnić w taki sposób. Dowiedliśmy już (us. 5), że

a. *Suma dwu składników nie zależy od ich porządku.*

Na mocy tego łatwo wyprowadzić, że wogóle:

b. *Suma nie zmienia się, gdy zmieniamy porządek dwu jej pierwszych składników.* Np. $5+3+6+2$ ma być tą samą liczbą, co $3+5+6+2$. W pierwszym bowiém razie do liczby, przedstawionéj sumą $5+3$, mamy dodać 6, a do tego, co otrzymamy, dodać 2; w drugim zaś razie do liczby, przedstawionéj sumą $3+5$, mamy dodać 6, a do tego, co otrzymamy, dodać 2. Że jednak, według a., sumy $5+3$ i $3+5$ przedstawiają tę samę liczbę, więc dodajemy 6 a następnie 2 w obu razach do téj saméj liczby, a zatym dojdziemy do téj saméj liczby, t. j.

$$5+3+6+2=3+5+6+2.$$

c. *Suma nie zmienia się, gdy zmieniamy porządek dwu ostatnich składników.* Np. $5+3+6+2+4$ ma być tą samą liczbą, co $5+3+6+4+2$. Ponieważ $2=1+1$, a $4=1+1+1+1$, więc

$$5+3+6+2+4=5+3+6+\overline{1+1+1+1}+\underline{1+1},$$

gdzie możemy oddzielnie skupić piérwsze cztéry jedności, któreśmy oznaczyli kréską u góry, i oddzielnie dwie dalsze jedności, któreśmy oznaczyli kréską u dołu. Dokonywając tego, otrzymujemy to, czegośmy pragnęli:

$$5+3+6+2+4=5+3+6+4+2.$$

d. *Suma nie zmienia się, gdy przestawimy między sobą dwa którekolwiek składniki sąsiednie.* Np. chcemy okazać, że $5+3+6+2+4+7$ jest tą samą liczbą, co $5+3+2+6+4+7$. Na mocy własności c. mamy: $5+3+6+2=$ $=5+3+2+6$, t. j. obie te sumy przedstawiają tę samę liczbę. Do tych dwu więc wyrażeń jednéj liczby, dodając po 4, a następnie po 7, dojdziemy do téj saméj liczby, t. j.

$$5+3+6+2+4+7=5+3+2+6+4+7.$$

e. *Nie zmieniając sumy, możemy którykolwiek jéj składnik sprowadzić na miejsce piérwsze, którykolwiek z pozostałych na drugie* i t. d. Opiérając się bowiém na własności d., możemy dopóty pewien składnik, który chcemy sprowadzić na miejsce piérwsze, wciąż przestawiać z każdym składnikiem, który obok niego z lewéj strony znajdować się będzie, dopóki on na piérwszym miejscu nie stanie. Podobnie będziemy postępować ze składnikiem, który chcemy widzieć na miejscu drugim i t. d. W taki sposób zawsze *możemy w dowolnym porządku składniki sumy ustawić*, bez zmieniania jéj wartości, czyli:

Suma nie zależy od porządku składników.

9. Z téj własności wypada, że

Aby do sumy dodać pewną liczbę, można tę liczbę dodać do któregokolwiek z jéj składników. Np., aby do sumy $5+3+2+6+9=25$ dodać 4, można np. do składnika 3 dodać 4, bo, gdy $5+3+2+6+9+4=$ $=25+4$, to z uwagi, że suma niezależy od porządku składników, zamiast $5+3+2+6+9+4$ możemy napisać $5+3+4+2+6+9$, a w tym wyrażeniu uważać (us. 4) sumę $3+4$ za jednę liczbę. Mamy więc:

$$5+\overline{3+4}+2+6+9=5+7+2+6+9=25+4.$$

Tutaj nad $3+4$ postawiliśmy kréskę na oznaczenie, że 4 ma być dodane do 3, tak, że suma $3+4$ ma być uważana jako przedstawienie jednéj liczby, t. j. nie mamy do 5 dodać 3, a dopiéro do tego, co wypadnie, dodać 4, ale mamy do 5 dodać liczbę wypadłą z dodawania $3+4$ (zob. Uwaga).

I nawzajem: *jeżeli do któregokolwiek składnika sumy dodajemy pewną liczbę, to tymsamym do téj sumy dodajemy tęż samę liczbę*, bo jeżeli $5+3+2+6+7=23$, to

$$5+\overline{3+4}+2+6+7=5+3+4+2+6+7=5+3+2+6+7+4=$$
$$=\overline{5+3+2+6+7}+4=23+4.$$

Jeżeli zamiast mówić: dodać, powiemy: powiększyć o (us. 1), to powyższe własności możemy tak wypowiedziéć: *aby sumę powiększyć* *o pewną liczbę, można którykolwiek z jéj składników powiększyć o tę liczbę, i: jeżeli którykolwiek składnik sumy powiększymy o pewną liczbę, to skutkiem tego suma powiększy się o tę liczbę.*

Wypada to zresztą wprost z tego, że suma jest skupieniem jedności składników (us. 6). Jeżeli więc sumę kilku liczb chcemy powiększyć o jakąś liczbę, czyli o jedności, których zebraniem jest ta liczba, to można to sprawić, doliczając te jedności do któregokolwiek składnika, czyli powiększając go o tę samę liczbę (us. 1), o którą chcemy powiększyć sumę. I nawzajem, jeżeli którykolwiek składnik powiększymy o jakąś liczbę, t. j. doliczymy jéj jedności do tego składnika, to w sumie będzie o tyleż jedności więcéj, czyli suma powiększy się o tę samę liczbę.

Uwaga. Zamiast zakréślać wyrażenie złożone (wchodzące w skład wyrażenia jeszcze więcéj złożonego), które chcemy uważać jako jednę liczbę, wobec tego, że takie zakréślenie jest często niedogodne, albo niewyraźne, rospowszechniło się używanie w tym celu n a w i a s u, t. j. ujmuje się w nawias to, co chcemy razem uważać jako liczbę jednę. Zamiast więc pisać np.

$$5+\overline{3+4}+2+6+7=23+4$$

możemy napisać

$$5+(3+4)+2+6+7=23+4.$$

Przez takie zatym zamknięcie sumy $3+4$ w nawiasie zaznaczamy dobitnie, że uważamy 4 nie za liczbę, która ma być dodana do sumy $5+3$, ale za liczbę, która ma być dodana wprost do składnika 3, a stąd dopiéro powstała suma $3+4=7$-ma być następnie dodana do składnika 5.

10. Gdy więc mamy np. do sumy liczb 5 i 3 dodać liczbę 6, to możemy tę liczbę 6 dodać albo wprost do sumy $5+3$, albotéż do jednego z jéj składników, a do liczby stąd otrzymanéj dodać drugi składnik. Te sposoby otrzymywania liczby, przedstawionéj przez sumę $5+3+6$, możemy, przy pomocy nawiasów, tak uwydatnić:

$$(5+3)+6; \quad 5+(3+6); \quad (5+6)+3.$$

Liczba tych sposobów przedstawiania i otrzymywania sumy $5+3+6$ znacznie się powiększy, gdy przestawiać będziemy między sobą składniki, mianowicie:

$$(5+3)+6; \; (3+5)+6; \; 6+(5+3); \; 6+(3+5);$$
$$5+(3+6); \; 5+(6+3); \; (3+6)+5; \; (6+3)+5;$$
$$(5+6)+3; \; (6+5)+3; \; 3+(5+6); \; 3+(6+5).$$

Gdybyśmy do tego mieli jeszcze dodać liczbę np. 2, to z jednego wyrażenia, np. z wyrażenia $5+(3+6)$ wypadłoby nam wprost (bez przestawiania składników między sobą):

$$5+(3+6)+2; \; 5+(\overline{3+6}+2); \; 5+(3+\overline{6+2}); \; 5+(\overline{3+2}+6); \; (5+2)+(3+6),$$

a w każdym z tych wyrażeń przestawiając jeszcze składniki, mielibyśmy:
$5+(3+6)+2$; $5+(6+3)+2$; $(3+6)+5+2$; $(6+3)+5+2$; $(3+6)+2+5$; i t. d., i t. d.

Z tego widzimy, że *dodawanie trzech lub więcéj składników może być uskutecznione przy pomocy dodawań częściowych którychkolwiek składników, wziętych w jakimkolwiek porządku.*

Uwaga. Mieliśmy tu np. $5+(3+\overline{6+2})$, to znaczy, że liczbę, którą otrzymamy, gdy do 3 dodamy sumę $6+2$, co więc powinniśmy tak oznaczyć $3+(6+2)$, że tedy tę liczbę $3+(6+2)$ mamy dodać do liczby 5; możnaby więc wyraźniéj zamiast $5+(3+\overline{6+2})$ napisać $5+(3+(6+2))$. Tu jednak dwa podobne nawiasy czynią przedstawienie takie niezręcznym. Dlatego, zamiast nawiasu ( ), mającego objąć $3+(6+2)$, użyjemy, dla wyraźniejszego przedstawienia, innego nawiasu, np. [ ], i rzeczywiście, gdy napiszemy

$$5+[3+(6+2)],$$

wtedy to, o co nam idzie, przedstawi się wyraźniéj.

Gdybyśmy tę sumę mieli dodać np. do liczby 7, to, aby rzecz wyraźnie przedstawić, najlepiéjby było wprowadzić jeszcze nawias np. $\{\ \}$; wtedy przedstawilibyśmy to tak:

$$7+\{5+[3+(6+2)]\}$$

Jeżeli mamy np. wyrażenie

$$(3+2)+\{8+[5+(6+7)]+(9+1)\},$$

to ono oznacza, że do sumy, otrzymanéj z dodawania $3+2$, mamy dodać odrazu całą liczbę, otrzymaną z dodania do 8 naprzód sumy, wypadłéj z dodania do 5 liczby, powstałéj z wykonania dodawania $6+7$, a następnie sumy liczb 9 i 1.

Przy pomocy nawiasów moglibyśmy postępowanie uskutecznione w początku ustępu 6-go, t. j. dodawanie liczb 5, 3, 6, 2 i 7, tak przedstawić:

$$\{[(5+3)+6]+2\}+7=23.$$

Podobnie przedstawilibyśmy wyraźnie np. sposób powstawania liczby np. 6 w szeregu liczb naturalnych:

$$6=(\{[(1+1)+1]+1\}+1)+1.$$

11. Wyraziwszy jakąkolwiek liczbę, większą od jedności, jako sumę jedności (us. 5), np.

$$7=1+1+1+1+1+1+1,$$

możemy te jedności rozmaicie dodawać częściowo (us. 10). Miéć więc będziemy np.

$$\begin{aligned}7 &= (1+1+1+1) + (1+1+1) = 4+3\\ &= (1+1) + (1+1+1+1+1) = 2+5\\ &= (1+1+1+1) +1+ (1+1) = 4+1+2\\ &\text{i t. d.}\end{aligned}$$

Widzimy więc, że liczbę 7 możemy przedstawić jako sumę składników: 4 i 3; lub: 2 i 5; lub: 4, 1 i 2; lub: 3, 3 i 1, i t. d. — Podobnież, gdyby była dana jakakolwiek inna liczba. A więc:

Każdą liczbę możemy rozmaicie roskładać na składniki (na części).

Tak np. $35=10+25=12+23=20+15=3+32=11+24=30+5$ i t. d.; podobnież np. $692=500+140+48+4=600+90+2$ i t. d.

Wrazie więc potrzeby, przy wykonywaniu jakiegokolwiek działania, mamy prawo każdą liczbę zupełnie dowolnie rozłożyć na składniki. Samo się przez się rozumié, że wrazie potrzeby tak rozłożymy liczbę na składniki (na części), jak nam to będzie najdogodniéj.

12. Gdy mamy dodać do siebie liczby np. 24 i 35, to należałoby do liczby 24 doliczać po jednéj wszystkie jedności liczby 35 (us. 1). Byłoby to jednak postępowanie zbyt długie, nużące uwagę i, skutkiem tego, łatwo prowadzące do omyłek.

Zastanowiwszy się nad tym, że nam tu idzie o znalezienie liczby, któraby była skupieniem tylu jedności, ile ich jest razem w obu liczbach: 24 i 35, czyli o wyrażenie sumy $24+35$ przez jednę liczbę, możemy, mając do tego prawo, rozłożyć dane do dodania liczby na części w najdogodniejszy sposób (us. 11). Następnie zaś, dodawanie tak rozłożonych na części liczb uskutecznić przy pomocy dodawań częściowych (us. 10) w sposób taki, iżby postępowanie stało się najkrótszym i najpewniejszym.

Ponieważ ta jedna liczba, któréj szukamy, będzie wiadomą, gdy odnajdziemy jej dziesiątki i jedności, więc dodawania częściowe powinny być takie, aby jedno z nich dało nam dziesiątki, drugie zaś jedności sumy. A więc i dane do dodania liczby najdogodniéj będzie rozłożyć na części, oddzielając ich dziesiątki od pozostałych jedności, t. j. $24=20+4$, $35=30+5$, tak iż

$$24+35=20+4+30+5.$$

A że to dodawanie $20+4+30+5$ możemy zastąpić przez dodawania częściowe, łącząc składniki, jak nam się podoba (us. 10), a nadto chcemy, żeby jedno dodawanie częściowe dało nam dziesiątki sumy, drugie zaś jéj jedności, więc trzeba oddzielnie dodać 20 i 30, a oddzielnie 4 i 5. Przy pomocy nawiasów (us. 9) oznaczymy to wyraźnie, pisząc

$$20+4+30+5=(20+30)+(4+5),$$

a więc

$$24+35=20+4+30+5=(20+30)+(4+5)=50+9=59.$$

Również, gdy mamy dodać np. 323 i 564, to, zamiast do liczby 323 doliczać po jednéj wszystkie jedności liczby 564, postąpimy w sposób podobny, jak w zadaniu poprzednim, t. j. rozłożymy liczby 323 i 564 na części, mianowicie na setki, dziesiątki i jedności tak, iż

$$323+564=300+20+3+500+60+4.$$

Zastąpimy następnie to dodawanie przez dodawania częściowe, dodając setki do setek, dziesiątki do dziesiątków, pozostałe jedności do jedności, t. j. $(300+500)+(20+60)+(3+4)$, co wykonawszy mieć będziemy $800+80+7$, części składowe liczby 887. Całe więc to postępowanie da się piśmiennie tak przedstawić:

$$323+564=300+20+3+500+60+4=$$
$$=(300+500)+(20+60)+(3+4)=800+80+7=887.$$

Zupełnie taksamo rozumując przy dodawaniu liczb 263, 501, 4125, tak zaznaczymy to postępowanie piśmiennie:

$$263+501+4125=200+60+3+500+1+4000+100+20+5=$$
$$=4000+(200+500+100)+(60+20)+(3+1+5)=$$
$$=4000+800+80+9=4889.$$

Gdy mamy dodać np. 88 i 47, to w ten sposób objaśniając i odpowiednio zaznaczając postępowanie, mieć będziemy naprzód:

$$88+47=80+8+40+7=(80+40)+(8+7)=120+15;$$

ponieważ zaś każdą liczbę możemy rozłożyć na części, jak nam się podoba, więc daléj: $120+15=100+20+10+5=100+(20+10)+5=$ $=100+30+5=135.$

W ten sam sposób, gdy mamy dodać liczby np. 365, 7497, 966, odpowiednio rozumując, tak przedstawiamy to postępowanie:

$$365+7497+966=300+60+5+7000+400+90+7+900+60+6=$$
$$=7000+(300+400+900)+(60+90+60)+(5+7+6)=$$
$$=7000+1600+210+18=$$
$$=(7000+1000)+(600+200)+(10+10)+8=8000+800+20+8=8828.$$

Widzimy więc, że to postępowanie, t. j. *wykonywanie dodawania polega na tym, aby liczby dane do dodania w najdogodniejszy sposób rozłożyć na części, odpowiednie części oddzielnie do siebie dodać, a sumy, wypadłe z tych dodawań częściowych, znów dodać do siebie, aby otrzymać jednę liczbę, sumę szukaną liczb danych.*

13. To postępowanie, któreśmy tylkoco objaśnili, w zupełności odtwarza pamięciowe wykonywanie dodawania. Tak np., gdy mamy w pamięci dodać liczby: 24 i 35, to mówimy tak: 24 jestto 20 i 4; 35 jestto 30 i 5; dodaję: 20 i 30 jest 50; 4 i 5 jest 9, a 50 i 9 jest 59. Podobnie, gdy mamy dodać np. 286 i 47, to mówimy: 286 jestto 200 i 80 i 6; 47 jestto 40 i 7; mam naprzód 200; dodaję 80 i 40 jest sto dwadzieścia, zaś dwieście i sto dwadzieścia jest trzysta dwadzieścia;

6 i 7 jest 13, czyli dziesięć i trzy; trzysta dwadzieścia i dziesięć (dwadzieścia i dziesięć jest trzydzieści) jest 330, a jeszcze 3, razem: 333.

Przy wykonywaniu pamięciowym dodawania trzech lub więcéj liczb, naprzód dodajemy w ten sposób dwie liczby do siebie, do ich sumy dodajemy trzecią i t. d. (porów. us. 6-y).

14. Ze względu na pośpiech i na wyraźność rachunku (§ 1; us. 9), zwykle w piśmienne przedstawienie dodawania wprowadzamy pewne skrócenia.

Nie wypisujemy więc, przedewszystkim, roskładu danych do dodania liczb na części (jak to robiliśmy w ustępie 12-ym); gdy bowiém mamy napisaną liczbę, to ten roskład łatwo sobie przedstawiamy, nie wypisując go jednak: wiemy przecież dobrze, że w liczbie np. 564 jest 5 setek (500), 6 dziesiątków (60) i 4 jedności, a tymsamym w rachunku wypisywanie tych części byłoby zbyteczne.

Chcemy jednak, nie wypisując tych roskładów liczb na części, móc odpowiednie części oddzielnie do siebie dodawać, t. j. dziesiątki do dziesiątków, jedności do jedności, setki do setek i t. d. (us. 12). W tym tedy celu, *aby odpowiednie części składników mieć blisko siebie, podpisujemy składniki pod sobą tak, żeby jedności znalazły się pod jednościami*, a tymsamym dziesiątki pod dziesiątkami i t. d. W zadaniach więc ustępu 12-ego wypadnie je tak wypisać:

$$\begin{array}{r} 24 \\ +35 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 323 \\ +564 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 263 \\ +501 \\ +4125 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 88 \\ +47 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 365 \\ +7497 \\ +966 \end{array}$$

Należy teraz wykonać dodawania częściowe: dziesiątki dodać do dziesiątków i t. d. Gdzie jednak pisać wypadki tych częściowych dodawań? Oczywiście, że *będzie najzręczniéj i najwyraźniéj, gdy wypadek z częściowego dodawania dziesiątków napiszemy pod dziesiątkami, wypadek z częściowego dodawania jedności napiszemy pod jednościami i t. d.* — Aby jednak nie mieszać liczb danych z tą, która nam z dodawania wypadnie, aby odróżnić je od siebie, t. j. *aby oddzielić składniki od sumy, przeprowadzamy pod wypisanymi pod sobą liczbami, danymi do dodania, kréskę poziomą* *), *pod którą będziemy pisać to, co z dodawań częściowych otrzymamy.*

W piérwszych trzech przykładach **) możemy dodawania wykonać, zaczynając je czyto od strony lewéj, czytéż od strony prawéj ***):

---

*) Moglibyśmy téj kréski nie stawić, jeżeli bylibyśmy pewni, że, przeglądając późniéj te rachunki (§ 1, us. 9), sami nie zapomnimy, a inni się domyślą, że ostatnia liczba jest sumą liczb nad nią będących.

**) Gdy mamy pod sobą podpisane trzy lub więcéj składników, nie potrzeba już pisać znaku +, bo wtedy nie może być wątpliwości co do rodzaju działania, które mamy wykonać.

***) Albo nawet, jak w przykładach drugim i trzecim, ze środka.

$$\begin{array}{r} 24 \\ +35 \\ \hline 59 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 323 \\ +564 \\ \hline 887 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 263 \\ 501 \\ 4125 \\ \hline 4889 \end{array}$$

— w każdym razie cyfry, otrzymane z podpisania wypadków z dodawań częściowych pod dodawanymi częściami, razem uważane, wprost przedstawią szukaną sumę danych składników.

Inaczéj rzecz się ma z zadaniem:

$$\begin{array}{r} 88 \\ +47 \\ \hline 125 \\ 3 \end{array}$$

Gdy zaczniemy ze strony lewéj wykonywać dodawanie, to naprzód otrzymamy dziesiątków 12; podpiszmy je. Gdy zaś następnie dodamy jedności — wypadnie nam 15 — podpiszemy 5 pod jednościami, a 1 dziesiątek trzeba będzie dołączyć do dziesiątków (porównaj to zadanie w us. 12-ym), czyli napisaną już pod dziesiątkami cyfrę 2 zamienić na 3. A więc, jeżelibyśmy dodawanie wykonywali od strony lewéj, wypadłoby nam zmieniać tu raz postawioną cyfrę, coby pozbawiło rachunek pożądanéj (§ 1, us. 9) czystości. — Jeżeli zaś zaczynamy dodawanie od strony prawéj, to, z dodania 8 i 7 otrzymawszy 15 (jedności), napiszemy pod jednościami 5, a 1 dziesiątek wypadnie dodać do tego, co otrzymamy z dodania 8 i 4. Ale ponieważ $(8+4)+1=(1+4)+8$ (us. 10), więc możemy, po napisaniu 5 (jedności), do pozostałego (z dodania jedności) 1-ego dziesiątka dodać 4, a następnie do tego dodać 8 dziesiątków; otrzymawszy 13 dziesiątków, podpiszemy tę liczbę dziesiątków tak, aby cyfra 3 była na miejscu drugim od strony prawéj. W ten sposób, nie zmieniając cyfry raz postawionéj, dzięki wykonywaniu działania od strony prawéj, mamy odrazu

$$\begin{array}{r} 88 \\ +47 \\ \hline 135 \end{array}$$

Widzimy więc, że *częściowe dodawania dlatego wykonywamy zaczynając od strony prawéj, że, gdybyśmy je wykonywali od strony lewéj, mogłaby zajść potrzeba, przy wykonywaniu dodawań częściowych, zmienienia cyfry raz napisanéj.*

Zamiast tu mówić: 1 dziesiątek i 4 dziesiątki jest 5 dziesiątków, zaś 5 dziesiątków i 8 dziesiątków jest 13 dziesiątków, zauważywszy, że cyfry 1, 4 i 8 są na miejscu drugim, co w czasie roboty mamy naoku, jakotéż, że wypadające 13 ma być tak napisane, żeby cyfra 3 znalazła się na miejscu drugim, możemy znacznie skrócić poprzedni sposób wyrażania się, mówiąc wprost: 1 i 4 jest 5; 5 i 8 jest 13, a samo się przez się rozumie, że tu jest mowa o dziesiątkach.

Tak np. w zadaniu:

3065	postąpimy tak: znajdziemy $8+7+5=20$; pod
74097	kolumną cyfr dodanych (zob. Uwaga), aby zająć
9068	miejsce (§ 3, us. 11), postawimy 0, a 2 dodamy
86230	do cyfr następnéj (od strony prawéj) kolumny;

znalazszy $2+6+9+6=23$, napiszemy 3 pod kolumną cyfr tylkoco dodanych, a 2 pozostaje nam do dodania do cyfr następnéj kolumny, lecz gdy w téj kolumnie cyfr znaczących niéma *), więc obok napisanéj już cyfry 3 piszemy 2 (gdyż oprócz tych 2-u niéma niczego innego do zaznaczenia na tym miejscu); znalazszy następnie $3+4+9=16$, stawiamy pod cyframi dodanymi 6, a 1 dodamy do 7 w następnéj kolumnie; $7+1=8$, a te 8 piszemy (pod kréską) pod 7.

Uwaga. Gdy jest mowa o liczbie jednocyfrowéj, to zwykle zamiast powiedzieć: liczba przedstawiona przez cyfrę, mówimy krócéj, wprost: cyfra. Tak np., znalazszy $8+7+5=20$, zamiast mówić: pod kolumną cyfr dodanych, ściśléj się wyrażając, należałoby powiedzieć: pod kolumną cyfr przedstawiających jedności dodane. — Podobnie, zamiast powiedzieć jednocyfrowa liczba dziesiątków, mówimy często: cyfra dziesiątków, i t. d.

15. Widzimy więc wogóle, że zwykłe postępowanie przy dodawaniu da się ująć w takie prawidło:

Aby dodać do siebie składniki, podpisujemy je jedne pod drugimi (w jakimkolwiek porządku) *tak, żeby jedności znalazły się pod jednościami, a pod ostatnim składnikiem prowadzimy kréskę poziomą i dodajemy do siebie cyfry piérwszéj od strony prawéj kolumny, następnie drugiéj i t. d.; jeżeli z takiego dodawania częściowego wypadnie nie więcéj niż 9, to wypadek podpiszemy pod kréską, pod kolumną cyfr dodanych; jeżeli zaś z takiego dodawania częściowego wypadnie więcéj niż 9, to z otrzymanéj liczb- oddzielamy dziesiątki, pozostałą część podpisujemy pod kolumną cyfr dodanych, a cyfrę dziesiątków dodajemy do cyfr następującéj kolumny (uważając ją w dalszym postępowaniu za cyfrę do owéj kolumny należącą).*

W dodawaniu do siebie wielu liczb, skutkiem wprawy nabytéj, przy wykonywaniu posuwając pióro (lub krédę) tak, aby kolejno stawało przy dodawanych cyfrach, nie wymawiamy cyfr dodawanych (przy których w danym momencie trzymamy pióro, czytéż krédę), lecz odrazu wypowiadamy sumę wypadającą z dodania téj cyfry. Tak np. w zadaniu:

*) Gdyby w piérwszéj od strony prawéj kolumnie (lub w kilku sąsiednich kolumnach poczynając od piérwszéj) były same zera, to: ponieważ niéma nic do postawienia na tym miejscu pod kréską, a ze względu na cyfry znaczące, jakie następnie pod kréską wypadnie postawić, miejsce to zajęte być winno, piszemy na nim zero (§ 3, us. 11).

75326 827 3320 40501 27 345 ——— 120346	odrazu mówimy (odpowiednio pióro przesuwając): 5, 12, 13, 13, 20, 26; piszę 6; 2, 6, 8, 8, 10, 12, 14; piszę 4; 1, 4, 9, 12, 20, 23; piszę 3; 2, 2, 5, 10; piszę 0; 1, 5, 12; piszę 12; otrzymałem sumę: 120346.

16. Jeżeli nam wypadnie wykonać dodawanie składników, ustawionych w poziomym wierszu, to niekiedy wykonywamy w ten sam sposób dodawanie, nie podpisawszy składników pod sobą, przekréślając tylko cyfry, w miarę ich dodania. Tak np., gdy mamy:

$$285+42+30+5967,$$

to mówimy: 7 (przekréślając je), 7 (przekréślając 0), 9 (przekréślając 2), 14 (przekréślając 5), i (postawiwszy znak $=$, w przyzwoitéj po nim odległości) piszemy 4,

$$28\cancel{5}+4\cancel{2}+3\cancel{0}+596\cancel{7}= \quad 4;$$

następnie 1, 7 (przekréślając 6), 10 (przekréślając 3) i t. d., tak iż działanie stopniowo będzie przyjmować piśmiennie takie postaci:

$$2\cancel{8}\cancel{5}+\cancel{4}\cancel{2}+\cancel{3}\cancel{0}+59\cancel{6}\cancel{7}= \quad 24; \; (1,\ 7,\ 10,\ 14,\ 22)$$
$$\cancel{2}\cancel{8}\cancel{5}+\cancel{4}\cancel{2}+\cancel{3}\cancel{0}+5\cancel{9}\cancel{6}\cancel{7}= \; 324; \; (2,\ 11,\ 13)$$
$$\cancel{2}\cancel{8}\cancel{5}+\cancel{4}\cancel{2}+\cancel{3}\cancel{0}+\cancel{5}\cancel{9}\cancel{6}\cancel{7}= 6324. \; (1,\ 6)$$

17. Chcąc sprawdzić, czy dodawanie jest dobrze wykonane, t. j. chcąc wykonać p r ó b ę [1]) d o d a w a n i a, możemy tę próbę oprzéć na tym, że suma nie zależy od porządku składników (us. 7). Możemy więc jakkolwiek inaczéj uporządkować składniki i dodać je do siebie; otrzymana suma winna być taż sama, co poprzednio. (Przypuszczamy tu, że omyłki, którąśmy mogli popełnić przy dodawaniu składników w początkowo przyjętym porządku, nie popełnimy przy innym ich zestawieniu, t. j. przy innym porządku składników dodawanych.) Taka próba jest p r ó b ą d o d a w a n i a p r z e z d o d a w a n i e.

Najprościéj (bo bez ponownego wypisywania składników) można wykonać próbę w ten sposób: jeżeliśmy w dodawaniu sprawdzanym cyfry kolumn poprzednio dodawali, zaczynając z dołu i wciąż ku górze postępując, to, przy sprawdzaniu, możemy cyfry kolumn dodawać z góry wciąż ku dołowi. Jest bowiém prawdopodobieństwo, że przy odmiennym porządku cyfr dodawanych w oddzielnych kolumnach nie popełnimy omyłki, któraby się w ten sam sposób na sumie odbić miała, jak omyłka w pierwotnym dodawaniu — jeżeliśmy ją zrobili.

---

[1]) Próbą działania nazywamy nowe działanie, mające na celu sprawdzenie wypadku działania poprzedniego.

18. Gdy mamy wykonać dodawanie liczb mianowanych prostych, to, aby można je było skupić w jednę liczbę, sumę, wszystkie dane liczby mianowane, t. j. składniki, winny być wyrażone przy pomocy téj saméj jednostki (§ 1, us. 11), przy pomocy któréj wyrazimy sumę, jako jednę liczbę mianowaną prostą. Gdy więc mamy np. dodać do siebie 3 godziny, 11 godzin, 5 godzin, to z doliczenia godzin do godzin wypadną nam godziny, których będzie tyle, ile otrzymamy z dodania liczb 3, 11, 5, t. j. liczba wszystkich godzin będzie wyrażoną przez sumę $3+11+5$. Widzimy więc z tego, że:

Ażeby dane liczby mianowane proste dodać do siebie i otrzymać z tego dodawania liczbę mianowaną prostą, potrzeba, aby wszystkie składniki były wyrażone przy pomocy téj saméj jednostki.

Suma, wypadająca z dodawania liczb mianowanych prostych, jest wyrażoną przy pomocy téj saméj jednostki, co składniki. Liczba oderwana, zachodząca w sumie, powstaje przez dodanie do siebie liczb oderwanych składników, tak, iż, aby dodać 3 godziny, 11 godzin, 5 godzin, wykonamy: $3+11+5=19$,

3 godz.	a ponieważ skupialiśmy z sobą godziny, więc
11 godz.	otrzymana liczba 19 jest liczbą godzin; dlatego
5 godz.	pod kréską podpisujemy: 19 godzin.
19 godz.	

Podobnie, mając zadanie: dodać do siebie 2056 funtów, 405 funtów, 14 funtów, 40527 funtów, podpiszemy pod sobą te składniki, nie zapominając oznaczenia jednostek, podkréślimy, liczby oderwane do siebie dodamy sposobem wiadomym i przy sumie, powstałéj z dodania liczb oderwanych, postawimy oznaczenie téj saméj jednostki, przy pomocy któréj są wyrażone składniki. Będzie więc:

$$\begin{array}{r} 2056 \text{ fun.} \\ 405 \text{ fun.} \\ 14 \text{ fun.} \\ 40527 \text{ fun.} \\ \hline 43002 \text{ fun.} \end{array}$$

Odpowiédź: z dodawania otrzymamy 43002 funty.

(Zadania arytmetyczne. § 2.).

---

[1]) Bardzo jest pożytecznie przy uczeniu arytmetyki przestrzegać, aby uczniowie wypisywali przy *każdéj* liczbie mianowanéj nazwanie jednostki. Takie zaznaczanie systematyczne liczb mianowanych i oderwanych, ciągłe ich rozróżnianie pobudza do ścisłego nadania miejsca właściwego każdéj liczbie w rozumowaniu przeprowadzanym, co, jak to zobaczymy w ciągu dalszym, prowadzi za sobą ważne następstwa.

§ 5. ODEJMOWANIE.

1. Przypuśćmy, że z dodawania dwu składników, z których jeden był np. 5, otrzymaliśmy sumę, np. 8, a chcemy się dowiedzieć, jaki był drugi składnik. Przypomnijmy sobie, że wtedy, gdyśmy odpowiedniéj wprawy nie posiadali, aby znaléść ów drugi składnik, postępowaliśmy tak: pięć i *jeden*, sześć (a tę jedność zaznaczaliśmy np. odchyleniem jednego palca); sześć i *jeden*, siedem (jeszcze odchylamy następny palec), siedem i *jeden*, osiem (znów odchylamy palec). Aby więc z liczby 5 otrzymać 8, trzeba było do 5-u dodać $1+1+1=3$, czyli szukany składnik drugi jest 3. Takim przeto postępowaniem, mając sumę dwu składników i jeden składnik, wynaleźliśmy składnik drugi. Działanie to nazywa się odejmowaniem. Możemy więc powiedzieć:

W odejmowaniu mamy na celu z danych: sumy dwu składników i jednego z tych składników — wyznaczenie drugiego składnika téj sumy.

2. Ponieważ tu do 5-u doliczaliśmy po jedności dopóty, dopóki nie doszliśmy do 8-u, więc właściwie odejmowanie wykonywa się zapomocą doliczania do mniejszéj z danych liczb tylu jedności, ilu ich potrzeba, aby od téj mniejszéj z danych liczb dojść do drugiéj, większéj. Zebranie zaś doliczonych jedności przedstawia liczbę szukaną.

Tak, że gdybyśmy w szeregu liczb naturalnych

1, 2, 3, 4, **5**, 6, 7, **8**, 9, 10, 11, 12 i t. d.

odrzucili tyle początkowych cyfr, ile wskazuje 5, mniejsza z danych liczb, a następnie prowadzili liczenie nanowo, zaczynając od 1 (więc: pokazując na 6, mówilibyśmy 1, i t. d.), to, przerywając je na miejscu, zajętym przez większą z liczb danych, przez to nowe liczenie doszlibyśmy właśnie do liczby szukanéj 3. Możemy więc powiedzieć, że:

Odejmowanie staje się liczeniem, jeżeli, odrzuciwszy w szeregu liczb naturalnych wszystkie liczby początkowe aż do mniejszéj z danych do odjęcia liczb włącznie, na pozostałych liczbach prowadzimy nanowo liczenie od jedności i przerywamy je na miejscu, zajętym przez drugą z liczb danych.

Dopóki, skutkiem wprawy, nie nabyliśmy możności prędszego wykonywania odejmowania, t. j. mówienia odrazu: 5 od 8-u jest 3, 6 od 13-u jest 7 i t. d., dopóty wykonywaliśmy odejmowanie, doliczając wciąż po jedności do mniejszéj liczby danéj, aż do otrzymania większéj z liczb danych. Tym właśnie sposobem udowodnić możemy najłatwiéj, że z odjęcia np. 5-u od 8-u wypada 3 — jeżeliby kto temu zaprzeczał.

3. Powiedzieliśmy, że w odejmowaniu, mając sumę dwu składników i jeden składnik, odnajdujemy drugi składnik. Owóż ta suma dana, czyli większa (§ 4, us. 3) z liczb danych nazywa się w odejmowaniu odjemną, druga zaś z liczb danych, czyli wiadomy składnik, nazywa się odjemnikiem. Liczba szukana, którą otrzymujemy z wykonania odejmowania, nazywa się resztą. A ponieważ odjemna jest sumą dwu składników, z których jeden (wiadomy) jest odjemnikiem, drugi zaś (szukany) jest resztą, więc *z dodania reszty do odjemnika wypadnie odjemna*, t. j. (§ 4, us. 4)

reszta + odjemnik = odjemnéj.

Mając to na względzie i używając powyższych nazw dla liczb wchodzących do odejmowania, możemy to, cośmy w ustępie 1-ym o odejmowaniu powiedzieli, wysłowić w ten sposób:

Odejmowanie jestto działanie, w którym, mając dane dwie liczby: odjemną i odjemnik, poszukujemy liczby, zwanéj resztą, po któréj dodaniu do odjemnika otrzymujemy odjemną.

W naszym zadaniu: od 8-u odjąć 5, liczba 8 jest odjemną, a 5 odjemnikiem; otrzymana liczba 3 jest resztą, bo $5+3=8$, co możemy (§ 4, us. 5) jeszcze inaczéj wysłowić: bo $3+5$ jest 8.

4. Ponieważ z dodania reszty do odjemnika otrzymujemy odjemną, więc reszta, wskazująca nam, ile trzeba do odjemnika doliczyć jedności, aby otrzymać odjemną, pokazuje nam oile odjemna jest większa od odjemnika (§ 4, us. 1, 3), oile się od niego różni, czyli: reszta pokazuje nam: jaka jest różnica między odjemną i odjemnikiem. Dlatego resztę nazywają różnicą i mówią, że *odejmowanie jestto działanie, za pomocą którego, mając dwie liczby: odjemną i odjemnik, dowiadujemy się, oile odjemna jest większa od odjemnika.* Gdy bowiém suma jest większa od każdego ze składników (§ 4, us. 3), więc *odjemna jest większa od odjemnika* o różnicę, czyli resztę. Mówimy jeszcze: w odejmowaniu odjemną zmniejszamy o odjemnik i otrzymujemy resztę. Więc zamiast mówić: od 8 odjąć 5, możemy mówić: 8 zmniejszyć o 5.

5. Zamiast resztą lub różnicą, liczbę wypadającą z odejmowania nazywamy także nadmiarem, lub niedomiarem, mianowicie: nadmiar odjemnéj nad odjemnik, a: niedomiar odjemnika do odjemnéj. Więc np., gdy mamy liczby 8 i 5, to: nadmiar 8-u nad 5 jest 3; niedomiar 5-u do 8-u jest 3.

6. Dla oznaczenia, że dwie liczby mamy od siebie odjąć, piszemy naprzód odjemną, a po niéj odjemnik, kładąc między nimi znak —, który czytamy mniéj, albo bez np. 8—5 czytamy: 8 mniéj 5, albo 8 bez 5-ciu. Używając zaś jeszcze znaku = (§ 4 us. 4), możemy to odejmowanie tak przedstawić:

$$8-5=3.$$

Ponieważ wyrażenie $8-5$ przedstawia liczbę 3, więc możnaby także wyrażenie $8-5$ nazywać resztą lub różnicą; (§ 4, us. 4, 6).

Upowszechniło się jednak nazywanie wyrażenia 8—5 tylko różnicą; a więc: *wskazane odejmowanie nazywamy często różnicą* liczb, do tego odejmowania wchodzących.

7. Zastanawiając się nad tym, cośmy mówili w ustępach 1-ym i 3-im, widzimy, że odejmowanie jest związane z dodawaniem tak, iż z liczb wchodzących do dodawania, np. $3+5=8$, możemy ułożyć dwa odejmowania: $8-5=3$ i $8-3=5$. Zestawiając to ze sobą:

$$3+5=8,$$
$$8-5=3,$$
$$8-3=5,$$

widzimy, że ta liczba, któréj szukaliśmy w dodawaniu, jest daną w odejmowaniu, i odwrotnie, liczba szukana w odejmowaniu jest daną w dodawaniu; możemy więc powiedzićć, że [1])

Odejmowanie jest działaniem odwrotnym dodawaniu dwu składników.

Ponieważ w odejmowaniu odjemna jest większa od odjemnika, więc w szeregu liczb naturalnych zajmuje miejsce dalsze niż odjemnik (jeden składnik) o tyle miejsc, ile wskazuje drugi składnik (§ 4, us. 2), t. j. różnica, będąca sama także liczbą tego szeregu. Powiemy więc o naszym odejmowaniu, że różnica dwu liczb z szeregu liczb naturalnych, jest także liczbą tego szeregu [2]).

Oczywiście, że, gdy do pewnéj liczby wypada nam jakąś liczbę dodać i tę samę liczbę odjąć, np. mając 8, dodać 3 i odjąć 3 (albo: odjąć 3 i dodać 3), liczba dana nie zmieni się: otyle bowiém liczbę 8 powiększamy (§ 4, us. 1), dodając 3, oile ją zmniejszamy (us. 4), odejmując 3. Zwykle wtedy mówimy: *dodanie i odjęcie téj saméj liczby, jako działania wprost sobie odwrotne, wzajemnie się znoszą.*

8. W § 4-m ustępie 9-ym widzieliśmy, że

a. *Jeżeli do któregokolwiek składnika sumy dodajemy pewną liczbę, to tymsamym do téj sumy dodajemy też samę liczbę.*

b. *Aby do sumy dodać pewną liczbę, można tę liczbę dodać do któregokolwiek z jéj składników.*

Z tego, że suma jest skupieniem jedności składników (§ 4, us. 6), wypada, że jeżeli jeden ze składników sumy rozłożymy na dwa (§ 4, us. 11) i zamiast całego początkowo danego składnika weźmiemy tylko jednę z tych dwu jego części, t. j. od tego składnika odejmiemy liczbę, będącą drugą jego częścią, to jedności téj liczby nie wejdą w skład su-

---

[1]) Dlaczego niéma działania odwrotnego dodawaniu trzech lub więcéj składników? Odpowiedź na to łatwa. Dodawanie trzech lub więcéj składników jest działaniem złożonym z kilku dodawań po dwa składniki (§ 4, us. 6). Dodawanie zaś może mieć odwrotne sobie działanie proste, gdy ono samo jest działaniem niezłożonym, a więc: tylko dodawanie dwu składników.

[2]) Łatwo zauważyć, że to ma miejsce tylko dzięki temu, że odjemna jest większą od odjemnika.

my nowéj, czyli suma początkowo dana stanie się o tęż samę liczbę mniejsza; innymi słowy:

c. *Jeżeli od któregokolwiek składnika sumy odejmujemy pewną liczbę, to tymsamym odejmujemy ją od sumy.*

Gdy od sumy kilku składników chcemy odjąć jakąś liczbę, t. j. chcemy, aby suma była skupieniem mniejszéj liczby jedności, mniejszéj o tyle jedności, ile ich jest w owéj liczbie, to, jeżeli pośród składników sumy jest składnik większy od owéj liczby, możemy go rozłożyć na dwie części: jednę równą owéj liczbie, drugą część pozostałą, i tę ostatnią właśnie wziąć zamiast całego tego składnika. Wtedy bowiém, na zasadzie własności c., od sumy odejmujemy owę liczbę *). A zatym

d. *Aby od sumy odjąć pewną liczbę, można ją odjąć od jednego z jéj składników, większych od téj liczby* **).

Z zestawienia ze sobą własności a. i c., albotéż własności b. i d. wypada, że suma składników się nie zmienia, jeżeli do jednego składnika dodamy pewną liczbę, a od innego odejmiemy tę samę liczbę; wtedy bowiém dodajemy do sumy i od niéj odejmujemy tę samę liczbę, skutkiem czego ta suma się nie zmienia (us. 7). Możemy więc powiedziéć:

e. *Jeżeli do jednego ze składników sumy dodajemy pewną liczbę, a od innego jednocześnie odejmujemy tę samę liczbę, to suma się nic zmienia.*

Możemy téż inaczéj wysłowić (por. § 4, us. 9) własności c., d. i e., mówiąc «zmniejszyć o», «powiększyć o»,zamiast «odjąć» (us. 4), «dodać».

9. Jeżeli więc mamy sumę *dwu* składników i chcemy, nie zmieniając jednego składnika, do téj sumy dodać, lub od niéj odjąć pewną liczbę, to, według własności b. i d., należy do drugiego składnika (bo innego już niéma) odpowiednio dodać, lub od niego odjąć tę samę liczbę. Tak np. jeżeli mamy sumę dwu składników, $13+5=18$, i, nie zmieniając składnika 5, dodajemy do sumy 18 liczbę np. 4, to tymsamym do drugiego składnika, do 13-u, wypadnie dodać tę liczbę 4, t. j. $(13+4)+5=18+4$.

Ponieważ zaś odjemna jest sumą reszty i odjemnika (us. 3), t. j.

$$\text{reszta} + \text{odjemnik} = \text{odjemnéj},$$

więc

aa. *Jeżeli do odjemnéj dodajemy, lub od niéj odejmujemy pewną liczbę, nie zmieniając odjemnika, to wypadnie odpowiednio do reszty dodać,*

---

*) Łatwo można to i poprzednie rozumowanie przeprowadzić na przykładach liczebnych.

**) Albo opuścić składnik równy téj liczbie, jeżeli taki składnik w sumie danéj się znajduje.

lub od niéj odjąć tę samę liczbę. Tak np., gdy, mając 18—5=13, do odjemnéj dodamy np. 4, to do reszty 13 wypadnie także dodać 4, i rzeczywiście: 22—5=17; również, gdy mając 18—5=13, od 18 odejmiemy 2, to skutkiem tego od reszty 13 wypadnie także odjąć 2, i rzeczywiście: 16—5=11.

Podobnież, gdy sumy *dwu* składników nie zmieniamy, a do jednego ze składników dodajemy pewną liczbę, to, według własności e., od drugiego składnika wypadnie odjąć tęż samę liczbę. Więc:

bb. *Jeżeli odjemnéj nie zmieniamy, a do odjemnika dodajemy, lub od niego odejmujemy pewną liczbę, to skutkiem tego tę samę liczbę wypadnie odpowiednio od reszty odjąć, lub do niéj dodać.* Np., gdy, mając 18—5=13, do odjemnika 5 dodamy 1, to od reszty 13 wypadnie odjąć 1, jakoż: 18—6=12; jeżeli zaś, mając 18—5=13, od odjemnika 5 odejmiemy 4, to do reszty 13 wypadnie dodać 4, i rzeczywiście: 18—1=17.

Gdy nakoniec, do odjemnéj i do odjemnika dodamy jednocześnie tę samę liczbę, to wskutek dodania jéj do odjemnéj, do reszty, według własności aa., wypadnie dodać tę liczbę, wskutek zaś dodania jéj do odjemnika, wypadnie od reszty, według własności bb., odjąć tę samę liczbę, zatym (us. 7) reszta zmianie nie ulegnie. Toż samo ma miejsce, gdy tak od odjemnéj, jak i od odjemnika tę samę liczbę odejmiemy. A więc:

cc. *Jeżeli jednocześnie albo do odjemnéj i odjemnika dodajemy tę samę liczbę, albo od odjemnéj i od odjemnika odejmujemy tę samę liczbę, to reszta się nie zmienia.* Np., gdy mamy 18—5=13, to, dodając do odjemnéj 18 i do odjemnika 5 tę samę liczbę, np. 2, otrzymamy resztę niezmienioną 13, i rzeczywiście 20—7=13; podobnież, jeżeli 18—5=13 i tak od odjemnéj 18 jak i od odjemnika 5 odejmiemy np. 4, to otrzymamy resztę także 13, i rzeczywiście: 14—1=13. (Tę własność moglibyśmy taksamo wyprowadzić, jak powyżéj własność aa.).

Możemy również inaczéj wysłowić własności powyższe, mówiąc: «zmniejszyć o», «powiększyć o», zamiast «odjąć», «dodać».

Przy pomocy nawiasów (§ 4, us. 9) nasze przykłady możemy wyraźniéj przedstawić w ten sposób:

$$18-5=13.$$

aa. $(18+4)-5=13+4$; $(18-2)-5=13-2$.
bb. $18-(5+1)=13-1$; $18-(5-4)=13+4$.
cc. $(18+2)-(5+2)=13$; $(18-4)-(5-4)=13$.

Z własności bb. wypada, że gdy do odjemnika w odejmowaniu np. 18—5=13 dodawać będziemy np. naprzód 1, później 4, następnie 3, dalej 2, to różnica o też liczby odpowiednio będzie się zmniejszała:

$$18-(5+1)=13-1,$$
$$18-(5+1+4)=13-1-4,$$
$$18-(5+1+4+3)=13-1-4-3,$$
$$18-(5+1+4+3+2)=13-1-4-3-2.$$

Jeżeli tu zamiast 13 napiszemy tę samę liczbę, przedstawioną (us. 6) przez różnicę 18—5, to mieć będziemy

$$18-(5+1+4+3+2)=18-5-1-4-3-2,$$

t. j. gdy od pewnéj liczby mamy odjąć sumę kilku składników, to możemy od liczby danéj odjąć naprzód jeden składnik, od otrzymanéj liczby drugi składnik i t. d., czyli: *gdy mamy od pewnéj liczby odjąć sumę dwu lub więcéj składników, to możemy to odejmowanie wykonać, uskuteczniając odejmowania częściowe oddzielnych składników.*

10. Gdybyśmy np. mieli od 59 odjąć 24, to zgodnie z tym, cośmy zauważyli o wykonywaniu pierwotnym odejmowania (us. 1, 2), należałoby do 24 doliczać po jedności dopóty, dopókibyśmy niedoszli do liczby 59; zebranie zaś wszystkich doliczonych jedności przedstawiłoby szukaną resztę.

Takie postępowanie byłoby zbyt długie i łatwoby do omyłek prowadziło.

Gdy idzie o rachunek pamięciowy (który się zawsze wyrabiał przed piśmiennym), to do krótszego wykonania tego odejmowania doprowadziła nas myśl dodawania do odjemnika odrazu całych dziesiątków, a więc: 24 i 10 jest 34; 34 i 10 jest 44; 44 i 10 jest 54; teraz już nie możemy dodać całego dziesiątka (bo wypadłoby 64, więcéj niż odjemna 59); dodaliśmy 30 i mamy 54; aby z 54 otrzymać 59, trzeba do 54 doliczyć 5 jedności; więc szukana liczba składa się z 30 i 5, czyli jest nią 35. — To postępowanie jeszcze skracamy, skutkiem nabytéj wprawy, i mówimy tak: mam odjąć 24 od 59; 24 od 54 jest 30; 54 od 59 jest 5; 30 i 5 jest 35. — Podobnie, gdy mamy od 887 odjąć 564, to: 564 od 864 jest 300; pozostaje odjąć 864 od 887; 864 od 884 jest 20 (zatym 300 i 20 jest 320); 864 od 887 (albo krócéj: i 4 od 7) jest 3; razem 323. — W przypadku, gdy mamy od 132 odjąć 47, tak rozumujemy: (nie mogąc powiedzieć 47 od 137, bo 137 większe od odjemnéj 132, mówimy) 47 od 127 jest 80; 127 od 132 jest 5; razem 85.

11. Aby obmyśléć krótsze postępowanie przy piśmiennym wykonywaniu odejmowania, łatwo, wobec związku zachodzącego między odejmowaniem a dodawaniem, chcieć, podobnie jak to robiliśmy w dodawaniu [1]), *odejmowanie zadane zastąpić przez odejmowania częściowe:*

---

[1]) I do pewnego stopnia w odejmowaniu pamięciowym.

jedności od jedności, dziesiątków od dziesiątków i t. d. — Aby te części odjemnéj i odjemnika, które oddzielnie będziemy od siebie odejmować, miéć blisko siebie *), *podpisujemy odjemnik pod odjemną tak, żeby jedności były pod jednościami*, a tymsamym dziesiątki pod dziesiątkami i t. d., podobnie jak to robiliśmy w dodawaniu. — Co się tyczy pisania reszt z odejmowań częściowych, to, również jak w dodawaniu, będzie najzręczniéj i najwyraźniéj, gdy *resztę z częściowego odejmowania jedności napiszemy pod jednościami i t. d.* — Aby zaś oddzielić dane liczby od szukanéj, *pod odjemnikiem prowadzimy kréskę poziomą,* pod którą pisać będziemy to, co z odejmowań częściowych otrzymamy. — Wykonajmy więc np. odejmowania 59 — 24; 887 — 564, 6829 — 3128,

$$\begin{array}{r} 59 \\ -24 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 887 \\ -564 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6829 \\ -3128 \\ \hline \end{array}$$

Tutaj wypadki odejmowań częściowych, czyto wykonywać je będziemy od strony prawéj, czytéż od strony lewéj, razem uważane, wprost przedstawią szukaną resztę

$$\begin{array}{r} 59 \\ -24 \\ \hline 35 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 887 \\ -564 \\ \hline 323 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6829 \\ -3128 \\ \hline 3701. \end{array}$$

Zauważymy tu, że, podobnie jak w dodawaniu, zamiast mówić: 2 dziesiątki od 5 dziesiątków jest 3 dziesiątki; lub 5 setek od 8 setek jest 3 setki, mówimy wprost: 2 od 5 jest 3 i piszemy 3 pod odejmowanymi cyframi, lub: 5 od 8 jest 3 i piszemy to 3 pod odejmowanymi cyframi, gdyż wczasie roboty mamy wciąż na oku, na których odpowiednio miejscach są odejmowane cyfry i na których piszemy wypadki z ich odjęcia.

W ostatnim przykładzie, gdy nam z odejmowania dziesiątków: 2 od 2-u, 2 — 2, nic nie zostało, napisaliśmy pod kréską 0, zgodnie z tym, cośmy o zerze mówili w § 3-im w ustępie 11-ym. Dlategotéż mówimy: 2 — 2 = 0, przez co pozornie możemy miéć resztę w tym także przypadku, gdy *odjemnik jest równy odjemnéj.*

Dlatego także, jeżeli mamy np. wskazane odejmowanie dwu równych sobie liczb, to, podpisując je pod sobą, jak w poprzedzających przykładach, pod kréską piszemy 0, które nam wyraźnie wskazuje, iż już zauważyliśmy, że reszty z tego odejmowania nie otrzymujemy; np.

$$\begin{array}{r} 256 \\ -256 \\ \hline 0. \end{array}$$

*) Nie wypisując roskładu odjemnéj i odjemnika na części, t. j. na... setki, dziesiątki, jedności.

Pozornie więc można wykonać odejmowanie, gdy odjemnik jest równy odjemnéj i otrzymać wtedy resztę, t. j. zero (oznaczające, ściśle mówiąc, brak liczby).

Skutkiem tego, zamiast mówić: w odejmowaniu odjemna jest większa od odjemnika (us. 4), powinniśmy to tak powiedzieć, żeby w tym wyrażeniu się naszym objąć tak przypadek, gdy odjemna jest większa od odjemnika, jak i przypadek, gdy odjemna jest równa odjemnikowi. Zrobimy to właśnie, wysławiając się w ten sposób: *odjemna jest nie mniejsza od odjemnika.*

Jeżeli mamy np. wykonać odejmowanie 53—28, to tu nie możemy wykonać częściowego odejmowania jedności: 3—8, bo tu odjemna jest mniejsza od odjemnika. Lecz mamy prawo rozłożyć liczbę na składniki w najdogodniejszy sposób (§ 4, us. 11); możemy więc naszę odjemną 53 tak rozłożyć na części, dziesiątki i jedności, aby te części odjemnéj były nie mniejsze od części odjemnika i aby z każdego częściowego odejmowania (dziesiątków od dziesiątków i jedności od jedności) wypadła jednocyfrowa liczba, tak, aby te reszty częściowych odejmowań, razem przeczytane, odrazu przedstawiły jednę liczbę. Nie możemy np. odjemnéj tak rozłożyć: 53 = 42 + 9, bo odejmując od tego 28 = 2 dziesiątki + 8, mielibyśmy wprawdzie jedno odejmowanie jedności od jedności, 9—8, ale drugie: 42—2 dzies. nie byłoby odejmowaniem dziesiątków od dziesiątków. Nie moglibyśmy również odjemnéj tak rozrozłożyć: 53 = 3 dziesiątki + 23 (jedności), bo odejmując od tego 28 = 2 dzies. + 8, otrzymalibyśmy z odjęcia jedności 23—8 = 15, liczbę dwucyfrową (a nie jednocyfrową), która wraz z resztą częściowego odejmowania dziesiątków 3—2 = 1 (dziesiątek) nie utworzyłaby odrazu szukanéj reszty, a trzebaby dopiéro zbiérać: 1 dziesiątek + 15 = 1 dzieś. + 1 dzieś. + 5 = 2 dzieś. + 5. Próbując tak różnych roskładów odjemnéj, przekonamy się, że najdogodniejszym (i jedynym takim) jest roskład 53 = = 4 dziesiątki + 13 (jedności), bo wtedy odejmując 28 = 2 dziesiątki + 8 (jedności) otrzymujemy z częściowych odejmowań: 2 od 4 jest 2 (dziesiątki), a: 8 od 13 jest (5 jedności); te reszty częściowe 2, 5, podpisane pod odejmowanymi cyframi, razem uważane, odrazu przedstawiają liczbę jednę: 25.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 4\ 13} \\ 5\ 3 \\ -2\ 8 \\ \hline 2\ 5 \end{array}$$

Podobnie, gdy mamy np. wykonać odejmowanie 7646—1278

$$\begin{array}{r} 7\,6\,4\,6 \\ -1\,2\,7\,8 \\ \hline \end{array}$$

to nie możemy wykonać ani odejmowania częściowego jedności: 6—8, ani odejmowania częściowego dziesiątków: 4—7, bo w każdym z tych odejmowań odjemna jest mniejsza od odjemnika, co być nie może.

Łatwo jednak temu zaradzić, jeżeli odjemną 7646 tak właśnie rozłożymy na części, aby, popiérwsze, dziesiątki odjemnéj były większe od dziesiątków odjemnika i jedności odjemnéj większe od jedności odjemnika, i powtóre, aby wtedy częściowe reszty postawione pod kréską, razem uważane, odrazu przedstawiały jednę liczbę. Próbując różnych rozkładów liczby 7646, przekonamy się, że obu tym warunkom zadosyć uczyni tylko taki rozkład: 7 tysięcy, 5 setek, 13 dziesiątków, 16 jedności, tak, że gdy go nadpiszemy nad odjemną i od odpowiednich części tak rozłożonéj odjemnéj będziemy odejmowali części odjemnika w jakimkolwiek porządku, np. od strony lewéj: 1 od 7 jest 6 (piszę); 2 od 5 jest 3; 7 od 13 jest 6; 8 od 16 jest 8, to wtedy te reszty (6 tysięcy 3 setki 6 dziesiątkow 8 jedności), razem uważane, przedstawiają szukaną resztę: 6368.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 7\ 5\ 13\ 16} \\ 7648 \\ -1278 \\ \hline 6368 \end{array}$$

Podobnież, gdy mamy np. 650588—25679, to tak postąpimy: ponieważ 8 jedności jest mniejsze od 9 jedności, trzeba w odjemnéj rozłożyć 8 dziesiątków na 7 dziesiątków i 1 dziesiątek, a ten 1 dziesiątek wyrazić jako 10 jedności, co razem z 8 jednościami da nam 18 jedności, które nadpisuję nad jednościami; pozostałe 7 dziesiątków, jako nie mniejsze od 7 dziesiątków w odjemniku, zostawiam (a więc z odejmowania częściowego dziesiątków reszty nie będzie); ponieważ daléj 5 setek odjemnéj jest mniéj niż 6 setek odjemnika, a w odjemnéj niéma tysięcy na czwartym miejscu, więc roskładamy 5 dziesiątków tysięcy na 4 dziesiątki tysięcy i 1 dziesiątek tysięcy, który wyrażam jako 10 tysięcy; z nich 9 tysięcy zostawiam, a 1 tysiąc wyrażam jako 10 setek, co razem z 5 setkami stanowi 15 setek. W ten sposób odjemna 50588 została rozłożoną na 6 setek tysięcy, 4 dziesiątki tysięcy, 9 tysięcy, 15 setek, 7 dziesiątków i 18 jedności. Tak rozłożywszy odjemną na części, mogę rospocząć odejmowanie z któréjkolwiek strony (choćby ze środka); zaczynając od strony prawéj, mam: 9 od 18 jest 9; 7 od 7, żadnéj reszty, ale piszę 0, aby zająć miejsce drugie, gdyż będą cyfry do postawienia na miejscu trzecim i dalszych; 6 od 15 jest 9; 5 od 9 jest 4; 2 od 4 jest 2; a gdy od 6 nie mam nic do odjęcia *), więc piszę 6. Mam więc resztę 624909.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 6\ 4\ 9\ 15\ 7\ 18} \\ 650588 \\ -25679 \\ \hline 624909 \end{array}$$

Widzimy więc, że to postępowanie, t. j. *wykonywanie odejmowania polega na rozłożeniu odjemnéj na części tak, aby każda część odjemnéj była nie większą od odpowiedniéj części odjemnika i aby reszty, wypadłe*

*) Mogliśmy także tak powiedzieć: przed 2 możemy sobie wyobrazić zero (§ 3, us. 12), więc 0 od 6, jest 6.

po wykonaniu oddzielnych odejmowań odpowiednich części, razem uważane, odrazu utworzyły jednę liczbę.

12. Gdybyśmy, wykonywając odejmowanie, zawsze nadpisywali nad odjemną jéj roskład, który nam dozwala w tak dogodny sposób zadane odejmowanie zastąpić przez odejmowania częściowe, to przygotowanie takie odjemnéj zajmowało by nam nieco czasu, a co ważniejsze, pozbawiałoby rachunek czystości, któréj musimy przestrzegać (§ 1, us. 9). Osobliwie jest to niedogodne, gdy np. odjemna wypada nam jako suma kilku liczb, od któréj mamy odjąć odjemnik, np. gdy mamy zadanie: od sumy liczb 256, 1342, 2766 odjąć liczbę 2689.

$$\begin{array}{r} 256 \\ 1342 \\ 2766 \\ \hline 4364 \\ -2689 \\ \hline 1675 \end{array}$$

Gdzież tu nad odjemną 4364 nadpisać odpowiedni jéj roskład? Trzebaby chyba umyślnie ją powtórnie w innym miejscu napisać i tam dopiéro wykonywać odejmowanie, poprzednio przygotowawszy ów roskład odjemnéj. Moglibyśmy wprawdzie ten roskład w pamięci zrobić, ale przy większych liczbach nie możnaby się na to spuszczać. Dlatego w praktyce ani tego roskładu nie nadpisujemy nad odjemną, ani go całego nie utrzymujemy w pamięci. Postępujemy zaś w następujący sposób. Ponieważ, przygotowując roskład odjemnéj na części, dla pewności (t. j. dla niepoprawiania się późniejszego) zaczynamy od strony prawéj, więc, nie dokonywając odrazu całego roskładu odjemnéj, wykonywać go będziemy (od strony prawéj) częściowo, wmiarę potrzeby dla wyznaczenia cyfry reszty. Tak w naszym zadaniu, wykonywając odejmowanie, powiemy: 9 większe od 4, więc roskładam [1]) 6 dziesiątków na 5 dziesiątków, które zostawiam, i 1 dziesiątek, który wyrażam jako 10 jedności, a one wraz z 4 jednościami stanowią 14 jedności: 9 od 14 jest 5; i t. d. Albo, opuszczając nazwy: dziesiątki, jedności i t. d. (us. 11), mówić będziemy: 9 większe od 4; roskładam 6 na 5 i 1; 1 na drugim miejscu jest 10 na piérwszym, więc 9 od 14 jest 5; 8 większe od 5; roskładam 3 na 2 i 1; 1 na trzecim jest 10 na drugim; 8 od 15 jest 7; 6 większe od 2; roskładam 4 na 3 i 1; 1 na czwartym jest 10 na trzecim; 6 od 12 jest 6; 2 od 3 jest 1; reszta: 1675.—Gdyby było np.

---

[1]) Używają tu «pożyczam», chociaż «zwracanie pożyczonego» późniéj miejsca niéma. Jak widzieliśmy, objaśnienie i wyrażanie się, zgodne z istotnym sposobem wykonywania roskładu odjemnéj, nie przedstawia żadnéj trudności do wprowadzenia ich w użycie — wobec niczym nieusprawiedliwionego «pożyczania».

Francuzi postępują inaczéj. Gdy np. mają wykonać odejmowanie

$$\begin{array}{r} 4\,3\,6\,4 \\ -2\,6\,3\,9 \\ \hline 1\,7\,2\,5 \end{array}$$

to rozumują w ten sposób: 9 większe od 4; dodaję do odjemnéj i odjemnika tę samę liczbę (us. 9), t. j. do odjemnéj 10 jedności, do odjemnika 1 dziesiątek; więc: 9 od 14 jest 5; 4 od 6 jest 2, i podobnie dalej: 6 większe od 3, więc 6 od 13 jest 7, a 3 od 4 jest 1; reszta: 1725. (Nadto zamiast mówić: odjemna, mówią: liczba większa, a: odjemnik rozumieją przez: liczbę mniejszą).

$$\begin{array}{r} 4067 \\ -2687 \\ \hline 1380 \end{array}$$

to mówilibyśmy: 7 od 7 piszę 0; 8 większe od 6, więc roskładam 4 na 3 i 1; 1 na czwartym jest 10 na trzecim, które roskładam na 9 i 1; 1 na trzecim jest 10 na drugim; 8 od 16 jest 8; 6 od 9 jest 3; 2 od 3 jest 1. Przed nabyciem odpowiedniéj wprawy, przy cyfrach, jak w tym zadaniu 4, 0, które winniśmy sobie wystawiać, jako zastąpione przez cyfry 3, 9, stawiamy zwykle u góry kropki, lub kréski. Późniéj, wprawiwszy się, tego nie robimy.

Z przykładów tego i poprzedzającego ustępów widzimy, że *dlatego rospoczynamy wykonywanie odejmowania od strony prawéj, że nie roskładamy uprzednio całéj odjemnéj odpowiednio na części, ale uskuteczniamy ten rozkład częściowo, wmiarę potrzeby wyznaczenia cyfry reszty*.

(Rospoczynanie od strony lewéj wyznaczania cyfr reszty, a tymsamym i roskładu częściowego odjemnéj, prowadziłoby niekiedy za sobą zmienianie tak cyfr reszty, jak i części roskładu odjemnéj).

13. Widzimy więc, że zwykłe postępowanie przy odejmowaniu da się ująć w takie prawidło:

*Aby odjąć od siebie dane dwie liczby, podpisujemy odjemnik pod odjemną tak, żeby jedności znalazły się pod jednościami, a pod odjemnikiem prowadzimy kréskę poziomą; następnie, zaczynając od strony prawéj, odejmujemy cyfry piérwszéj, drugiéj i t. d. kolumn od siebie, wykonywając jednocześnie, wmiarę potrzeby wyznaczenia cyfry reszty, roskład odjemnéj na części tak, aby każda część odjemnéj nie była mniejszą od odpowiedniéj części odjemnika i aby reszty wypadłe z odjęcia jedności do jedności, dziesiątków od dziesiątków i t. d., podpisane pod kréską, pod cyframi, z odjęcia których powstały, razem uważane, odrazu utworzyły jednę liczbę *), resztę. W tym celu, jeżeli która z cyfr odjemnika jest większa od odpowiedniéj cyfry odjemnéj, to tę część odjemnéj powiększamy o 10, stojącą zaś obok (ze strony lewéj) cyfrę odjemnéj zmniejszamy o 1; gdyby tą cyfrą było zero, to zamiast zera wystawiamy sobie 10, a poprzedzającą (od strony lewéj) zmniejszamy o 1 i t. d.*

14. Chcąc wykonać p r ó b ę o d e j m o w a n i a, możemy ją oprzéć na tym, że (us. 3)

$$\text{reszta} + \text{odjemnik} = \text{odjemnéj};$$

więc, jeżeli dobrze wykonaliśmy odejmowanie, to po dodaniu znalezionéj reszty do odjemnika, powinniśmy otrzymać odjemną. Np.

---

*) Jeżeli w którym z tych odejmowań częściowych część odjemnej równa jest odpowiedniej części odjemnika (us. 11), a także, gdy nad zerem odjemnika, po roskładzie odjemnej na części, zajdzie w niej także brak oddzielnej odpowiedniej części, zaznaczony przez zero, to w reszcie, ze względu na otrzymać się mające później cyfry znaczące reszty, na odpowiednim miejscu, aby je zająć (§ 3, us. 11), piszemy zero.

$$\text{jeżeli:}\quad \begin{array}{r} 4364 \\ -2689 \\ \hline 1675, \end{array} \quad \text{to:}\quad \begin{array}{r} 1675 \\ +2689 \\ \hline 4364 \end{array} \text{ (dobrze),} \quad \text{albo (§ 4, us. 5):}\quad \begin{array}{r} 2689 \\ +1675 \\ \hline 4364 \end{array} \text{ (dobrze).}$$

(Wszelkie próby, które prowadzą za sobą pisanie liczb nowych, albo w innym porządku, winniśmy pisać na boku, albotéż na osobnym kawałku papiéru, aby nie zmniejszać wyraźności rachunku głównego, § 1 us. 9.). Jest to więc *próba odejmowania przez dodawanie.*

Opiérając się zaś na tym, cośmy mówili w ustępie 7-ym, że z liczb wchodzących do dodawania dwu składników można utworzyć dwa odejmowania (jeżeli $8-5=3$, to $8-3=5$, bo oba te odejmowania są odwrotne temuż dodawaniu $5+3=8$), możemy wykonać *próbę odejmowania przez odejmowanie.* Jeżeli bowiém odejmowanie jest dobrze wykonane, to, po odjęciu reszty od odjemnéj, otrzymać powinniśmy poprzedni odjemnik, np.

$$\text{jeżeli:}\quad \begin{array}{r} 4364 \\ -2689 \\ \hline 1675, \end{array} \qquad \text{to:}\quad \begin{array}{r} 4364 \\ -1675 \\ \hline 2689 \end{array} \text{ (dobrze).}$$

15. Ponieważ odejmowanie jest działaniem odwrotnym dodawaniu dwu składników (us. 7), więc moglibyśmy wykonać *próbę dodawania dwu składników przez odejmowanie,* od znalezionéj sumy odejmując jeden (którykolwiek) ze składników; wtedy, powinnibyśmy otrzymać, jako resztę, drugi składnik. Więc np.

$$\text{jeżeli:}\quad \begin{array}{r} 323 \\ +564 \\ \hline 887, \end{array} \qquad \text{to:}\quad \begin{array}{r} 887 \\ -323 \\ \hline 564 \end{array} \text{ (dobrze).}$$

Do tegoż się sprowadza *próba dodawania wielu składników przez odejmowanie.* Mianowicie: wszystkie składniki sprawdzanego dodawania zastępujemy przez dwa, za jeden uważając którykolwiek z danych składników, a za drugi przyjmując sumę pozostałych składników, którą oddzielnie znaléść trzeba. Odjąwszy zaś ją od sumy sprawdzanego dodawania, powinniśmy jako resztę otrzymać ów oddzielnie uważany składnik tego dodawania. Albowiém, jeżeli sumę $5+3+4+7+6=25$ uważać będziemy jako sumę dwu składników, z których jeden jest np. 7, to:

$$25=5+3+4+7+6=7+(5+3+4+6)=7+18$$

i otrzymamy $25-18=7$. Więc np.

$$\text{jeżeli:}\quad \begin{array}{r} 75326 \\ 827 \\ 3320 \\ 40501 \\ 27 \\ 345 \\ \hline 120346, \end{array} \quad \text{to, gdy np.}\quad \begin{array}{r} 75326 \\ 827 \\ 3320 \\ 27 \\ 345 \\ \hline 79845, \end{array} \quad \text{otrzymamy:}\quad \begin{array}{r} 120346 \\ -79845 \\ \hline 40501 \end{array} \text{ (dobrze).}$$

Możemy także zrobić próbę dodawania przez dodawanie przy pomocy odejmowań częściowych w następujący sposób. Tak np. w powyższym przykładzie znalazszy sumę 120346;

120346 dodajemy też same składniki, wykonywając jednak dodawanie
~~1~~2~~1~~20 (czyto z góry na dół, czytéż odwrotnie) od strony lewéj (§ 4, us. 14). Po dodaniu cyfr piérwszéj (od strony lewéj) kolumny mamy 11, które odejmujemy od liczby 12 znalezionéj sumy, pozostaje 1, które piszemy na boku (lub na kawałku papiéru położonego pod znalezioną sumą; § 1, us. 9). To 1 z następującym zerem znalezionéj sumy tworzy liczbę 10. Dodawszy cyfry drugiéj kolumny, mamy 8, które od powyższych 10 odejmujemy; pozostaje 2; przekréśliwszy 1 piszę obok 2. To 2 z następującą cyfrą 3 sumy przedstawia liczbę 23. Dodawszy cyfry trzeciéj kolumny, mamy 22; po odjęciu téj liczby od 23, pozostaje 1; przekréśliwszy 2, piszę obok 1. Ta cyfra wraz z następującą cyfrą 4 sumy daje nam liczbę 14. Dodawszy cyfry przedostatniéj kolumny, otrzymaną sumę częściową 12 odejmujemy od powyższéj liczby; pozostaje 2; przekréśliwszy 1 piszę 2. To 2 z ostatnią cyfrą sumy daje liczbę 26. Dodawszy do siebie cyfry ostatniéj kolumny i dostrzegszy, że otrzymana stąd liczba 26 jest tą samą liczbą, co powyższa, przekréślamy 2 i [1]) widzimy, że nasze dodawanie jest dobrze zrobione, albowiém suma cyfr każdéj kolumny wraz z dziesiątkami, wydzielonymi z dodania cyfr następującéj (ze strony prawéj) kolumny (§ 4, us. 15), jest należycie uwzględniona w otrzymanéj sumie.

16. Gdy mamy wykonać odejmowanie liczb mianowanych prostych, to, ponieważ (us. 3)

odjemna = odjemnikowi + reszcie,

a w dodawaniu liczb mianowanych prostych (§ 4, us. 18), suma jest wyrażona przy pomocy téj saméj (jednéj) jednostki, przy pomocy któréj są wyrażone składniki, więc:

Ażeby z odejmowania liczb mianowanych prostych otrzymać liczbę mianowaną prostą, potrzeba, aby odjemna i odjemnik były wyrażone przy pomocy téj saméj jednostki.

Reszta, wypadająca z odejmowania liczb mianowanych prostych, jest wyrażona przy pomocy téj saméj jednostki, co odjemna i odjemnik.

Gdy zatym mamy np. od 67 funtów odjąć 29 funtów, to w reszcie otrzymamy funty. Liczba zaś tych funtów będzie $67 - 29 = 38$, a więc liczba oderwana, zachodząca w reszcie, powstaje z odjęcia liczby oderwanéj odjemnika od liczby oderwanéj odjemnéj. A więc: mając zadanie: od 67 funtów odjąć 29 funtów, podpiszemy 29 funtów pod 67 funtami, podkréślimy, odejmiemy liczbę oderwaną odjem-

[1]) Dla wyraźnego oznaczenia, że z odjęcia od 26 sumy liczb ostatniej kolumny nic się nie pozostanie, możemy przekréśliwszy 2, napisać: 0.

nika od liczby oderwanéj odjemnéj i przy reszcie, stąd otrzymanéj, dopiszemy miano jednostki, téj saméj, jaką mamy w odjemnéj i odjemniku:

$$\begin{array}{r} 67 \text{ fun.} \\ -29 \text{ fun.} \\ \hline 37 \text{ fun.} \end{array}$$

Odpowiédź: z odejmowania otrzymamy 38 funtów.

17. Gdy mamy od pewnéj liczby odjąć różnicę dwu liczb, np. od 23 odjąć (us. 6) różnicę 15 — 6, co przy pomocy nawiasu (§ 4, us. 9) da się przedstawić: 23 — (15 — 6), to, aby znaléść prawidło postępowania, możemy rozumować w ten sposób. Jeżelibyśmy mieli od 23 odjąć 15, to z tego odejmowania wypadłaby pewna reszta, czyli różnica, którą możemy przedstawić (us. 6), pisząc 23 — 15. Gdy zaś w zadaniu danym, zamiast odjemnika 15 (jak w zadaniu drugim), mamy odjemnik 15 — 6, to możemy powiedziéć, że w odejmowaniu: od 23 odjąć 15, mamy zmniejszyć odjemnik 15 o 6. Skutkiem tego, jak wiemy (us. 9), reszta z tego odejmowania, t. j. różnica 23 — 15, powiększy się o 6, t. j. będzie (23 — 15) + 6. To zaś wyrażenie oznacza, że od 23 mamy odjąć 15, a do liczby, stąd otrzymanéj dodać 6, co także wprost wypada z wyrażenia bez nawiasu 23 — 15 + 6; więc [1]):

$$23-(15-6)=23-15+6,$$

t. j. *aby od pewnéj liczby odjąć różnicę dwu liczb, należy od owéj liczby odjąć odjemną różnicy i do tego dodać odjemnik różnicy.*

18. Dopełnienie arytmetyczne. Gdy mamy daną jakąkolwiek liczbę, to spośród liczb utworzonych przez 1 z zerami, większych od liczby danéj, jest jedna najbliższa, t. j. najmniejsza z nich. Tak np., dla liczby 6982 najbliższa z większych liczb utworzonych przez 1 z zerami jest 10 000.

Dopełnieniem arytmetycznym liczby danéj nazywamy różnicę między najbliższą z większych liczb, utworzonych przez 1 z zerami, a liczbą daną.

Gdy więc mamy znaléść dopełnienie arytmetyczne liczby 5 692 800, to należałoby ją odjąć od 10 000 000, t. j. wykonać odejmowanie:

---

[1]) Albo nieco inaczéj: według własności bb. w ustępie 9-ym, z odejmowania 23 — 15 = 8 mamy

$$23-(15-6)=8+6;$$

jeżeli tu zamiast 8-u napiszemy tę samę liczbę, ale w postaci (us. 6) różnicy 23 — 15, to mieć będziemy

$$23-(15-6)=23-15+6,$$

skąd widzimy, że: aby od pewnéj liczby i t. d.

$$\begin{array}{r} 10000000 \\ -\,5692800 \\ \hline \end{array}$$

Nadpisując nad odjemną cały roskład jéj na części nie mniejsze od odpowiednich części odjemnika (us. 11), mieć będziemy cyfry 9 nad cyframi danéj liczby 5, 6, 9, 2, nad ostatnią zaś (od strony lewéj) znaczącą cyfrą, t. j. nad 8, mieć będziemy 10. Zamiast więc wykonywać odejmowanie od strony prawéj, możemy je wykonywać od strony lewéj, a nawet całkiem nie nadpisywać odjemnéj, tylko mając przed oczyma liczbę daną 5692800 wypisywać odrazu cyfry, powstające z odejmowania każdéj z początkowych (od strony lewéj) cyfr liczby danéj od 9, prócz ostatniéj cyfry znaczącéj, którą odejmiemy od 10, a nadto dopisać tyle zer, ile ich jest na końcu liczby danéj. Patrząc się więc na liczbę, wypowiadać będziemy wprost częściowe reszty 4, 3, 0, 7, 2, 0, 0 i w tym samym porządku je pisać, tak, że te cyfry utworzą nam szukane dopełnienie arytmetyczne liczby naszéj, t. j. 4 307 200. Podobnie, gdy mamy np. liczbę 939 409, patrząc się na nią wypowiadać będziemy odrazu częściowe reszty i zaraz je pisać: 0 (na początku, więc możemy go nie pisać, chyba, że i ono jest potrzebne), 6, 0, 5, 9, 1, tak, iż szukanym dopełnieniem naszéj liczby będzie liczba 60 591.

(Zadania arytmetyczne. § 3.)

ROZDZIAŁ III.

MNOŻENIE I DZIELENIE LICZB CAŁKOWITYCH.

§ 6. MNOŻENIE.

1. «Zadanie. Pewna osoba cztéry łokcie sukna kupiła, płacąc za każdy łokieć po złotych 6; wieleż dała za cztéry łokcie?

Liczba złotych, którą ma zapłacić, składać się powinna z cztéry razy 6, a zatym ta liczba równa będzie sumie liczb cztérech jednakowych, z których każda wyrażała 6 złotych:

$$\begin{array}{rr} & 6 \text{ zł.} \\ & 6 \text{ zł.} \\ & 6 \text{ zł.} \\ & \underline{6} \text{ zł.} \\ \text{suma:} & 24 \text{ zł.} \end{array}$$

Gdyby ta osoba, zamiast łokci cztérech sukna, więcéj daleko była kupiła, trzebaby wiele czasu i miejsca do napisania 6 tyle razy, ile było łokci, a dopieroż do zebrania tego wszystkiego w jednę sumę. Do tak długiéj roboty ciężkoby równie natężonéj baczności przyłożyć i omyłki się w niéj uchronić. A trafićby się nawet mogło, że życie człowieka nie wystarczyłoby na dokończenie takim sposobem podobnéj roboty.

Szukano więc, jakby skrócić takowe dodawanie; równość liczb, mających się dodawać, skrócenie to łatwym uczyniła.»[1])

Podobnych zadań, np.

Rodzina robotnika potrzebuje dziennie 4 funty chleba; ile potrzebuje funtów chleba w ciągu roku, który ma 365 dni?

Sprzedaje ktoś pszenicę, po 54 złp. korzec; po wymierzeniu okazało się pszenicy 25 korcy; ile sprzedający otrzyma złotych za tę pszenicę?

i t. d., nikt nie rozwiązuje zapomocą dodawania. Wykonywanie bowiém dodawania jednakowych składników zostało znacznie ułatwionym przez wprowadzenie różnych skróceń, które były możliwe właśnie dlatego, że składniki były jednakowe.

Ponieważ zaś takie zadania, które doprowadzają do dodawania jednakowych składników, bardzo często się zdarzają, więc postępowanie

---

[1]) *Arytm. dla sz. nar.*, str. 32.

skrócone w tym przypadku dodawania jest nader ważne i dlatego uważa się je za osobne działanie, zwane mnożeniem. Możemy więc powiedzieć, że:

Zapomocą mnożenia krócéj wykonywamy dodawanie jednakowych składników.

2. Gdy więc mamy np. dodawanie 6+6+6+6, to mamy tu do zauważenia: powtarzający się składnik, t. j. liczbę 6, i jeszcze to, że ta liczba 6 jest wzięta jako składnik 4 razy, t. j. mamy do zauważenia drugą liczbę, wskazującą nam, ile razy 6 jest wzięte jako składnik. Powtarzający się składnik nazywamy mnożną; liczbę, wskazującą nam, ile razy mnożna jest wzięta jako składnik, nazywamy mnożnikiem; liczbę zaś, którą z mnożenia otrzymamy, t. j. sumę, która wypadłaby z dodawania, zastąpionego przez mnożenie, nazywamy w mnożeniu iloczynem.

Gdy więc np. dodawanie 6+6+6+6, t. j. dodawanie 4-ch składników, z których każdy jest 6, zastępujemy przez mnożenie, to mnożną jest liczba 6, mnożnikiem jest liczba 4, a iloczynem liczba 24, t. j. suma tego dodawania, zastąpionego przez mnożenie 6-u przez 4.

Zamiast mówić: mnożę 6 przez 4, z uwagi, że iloczyn (jako suma) jest zebraniem 4 razy tylu jedności, ile ich jest w mnożnéj 6, mówimy często: 6 powiększam 4 razy*), albotéż: (mam, biorę, ile będzie?) 4 razy po 6 jedności, lub krócéj[1]): 4 razy 6. Powiemy zatym: mnożąc 6 przez 4, otrzymam 24, albo: 4 razy 6 jest 24.

Dla oznaczenia, że dwie liczby mamy przez siebie pomnożyć, piszemy naprzód mnożną, a po niéj mnożnik, kładąc między nimi znak $\times$ albo . (kropkę w części dolnéj wiersza). Tak więc 6×4, czyli $6 . 4$ czytamy: 6 pomnożone przez 4, albo: 4 razy 6. I napiszemy: $6\times4 = 24$.

Ponieważ zaś wyrażenie 6×4 przedstawia liczbę 24, iloczyn liczb 6 i 4, więc także 6×4 nazywamy często iloczynem liczb 6 i 4, t. j. wyrażenie, powstałe przez połączenie mnożnéj i mnożnika znakiem $\times$ lub ., nazywamy także iloczynem, czyli *wskazane mnożenie nazywamy często iloczynem* liczb, do tego mnożenia wchodzących.

Uwaga. Mnożną piszemy przed mnożnikiem dlatego, że ważniejszym jest wiedzieć, *co* mamy, od tego, *ile razy* to mamy, tak, iż np. 6×4 niewłaściwie jest czytać: 6 razy 4, ale należy**) czytać: 4 razy 6, albowiém 6

---

*) Należy się chronić błędnego wyrażania się: 6 powiększam o 4 razy. — Zamiast pomnożyć przez 2, pomnożyć przez 3, mówimy często: podwoić, potroić.

**) Mogło na to skrócenie oddziałać także to, że mówimy: pomnożyć pewną liczbę *razy;* np. ktoś pracą a oszczędnością pomnożył swój majątek 4 razy.

[1]) Gdy mówimy: 4 razy 6, dlatego naprzód wypowiadamy mnożnik 4, że niezręcznie jest powiedzieć: *sześć cztéry razy*, czego nawet przy pomocy cyfr napisać nie można, bo między cyframi 6 i 4 niéma powodu kłaść przecinka.

razy 4 jestto: 4+4+4+4+4+4=4×6, gdy 4 razy 6 jest: 6+6+6+ +6=6×4 (por. us. 5).

3. Jeżeli więc mamy pomnożyć 6×4, to mamy dane dwie liczby: mnożną 6 i mnożnik 4; powinniśmy zaś znaléść iloczyn, t. j. liczbę, która by powstała z dodawania 6+6+6+6, t. j. którąbyśmy otrzymali, biorąc mnożną jako składnik tyle razy, ile jedności jest w mnożniku. Możemy więc powiedziéć:

Mnożenie jestto działanie, zapomocą którego, mając dane dwie liczby, mnożną i mnożnik, odnajdujemy liczbę, zwaną iloczynem, którą otrzymalibyśmy z mnożnéj, biorąc ją jako składnik tyle razy, ile jest jedności w mnożniku.

Według tego, mnożnik może być jakąkolwiek liczbą z szeregu liczb naturalnych (§ 1, us. 6); może zatym w szczególnym przypadku być jednością. Mamy wtedy mnożną wziąć raz jako składnik, aby utworzyć iloczyn, np. 7×1=7, jest więc wtedy iloczyn = mnożnéj[1]). —

Ponieważ mnożenie jest skróconym dodawaniem jednakowych składników, więc objaśnienie mnożenia winno być oparte na tym, iż, wychodząc z dodawania jednakowych składników, dopatrywać będziemy skróceń, jakie w tym dodawaniu zrobić będzie można.

Zauważymy tu jeszcze, że rozważane tu mnożna i mnożnik są liczbami z szeregu liczb naturalnych; z tego zaś, że dodawanie składników, będących liczbami tego szeregu, doprowadza nas do sumy (iloczynu), będącego liczbą tego szeregu (§ 4, us. 2 i 6), wypada, że *iloczyn dwu liczb z szeregu liczb naturalnych jest także liczbą tego szeregu.*

4. Jednak w przypadku, gdy *mnożna i mnożnik są liczbami jednocyfrowymi*, odszukiwanie iloczynu musi się odbywać wprost przez dodawanie. Tak np., gdy pytamy się: ile będzie 4 razy 8, to, aby odnaléść iloczyn, postąpimy tak, jekeśmy robili, będąc dziećmi: odnajdziemy sumę 8+8+8+8=32.

W ten sposób odnajdując iloczyny liczb jednocyfrowych, t. j. wykonywając dodawania, w których mnożna jest wzięta jako składnik tyle razy, ile jedności ma mnożnik, nabywamy takiéj wprawy, iż z czasem jesteśmy w stanie odrazu wypowiedziéć (bez namysłu): 4 razy 8 jest 32, albo: 5 razy 9 jest 45, i t. d.

Ponieważ zaś przy mnożeniu liczb większych iloczyny liczb jednocyfrowych wciąż nam są potrzebne, więc winniśmy się starać przedewszystkim o to, aby rzeczywiście nabyć wprawy należytéj w wypowiadaniu bez namysłu iloczynów liczb jednocyfrowych.

---

[1]) Gdyby mnożna była jednością, np. 1×7, to, chociaż 1×7=1+1+1+1+1+1+ +1=7, niezawsze możemy powiedzieć, że iloczyn = mnożnikowi, gdyż to będzie miało miejsce tylko wtedy, gdy mnożna 1 jest liczbą oderwaną (por. us. 6).

Iloczyny liczb jednocyfrowych są zestawione w tak zwanéj tabliczce mnożenia:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

W téj tabliczce liczby, znajdujące się w którymkolwiek wiérszu poziomym (lub w któréjkolwiek kolumnie pionowéj), powstają każda z poprzedzającéj, przez dodanie liczby, w tym wiérszu (lub kolumnie) piérwszéj*). Tak np., w wiérszu siódmym, piérwszą liczbą jest 7; $7+7=$ $=14$ i dlatego drugą liczbą jest 14; $14+7=21$ i dlatego trzecią liczbą jest 21 i t. d. (taksamo w kolumnie siódméj). Takim sposobem w wiérszu siódmym, są liczby 7, $7+7$, $7+7+7$, $7+7+7+7$, i t. d., t. j. 7×1, 7×2, 7×3, 7×4, i t. d., t. j. iloczyny piérwszéj liczby siódmego wiérsza przez piérwsze liczby piérwszéj, drugiéj, trzeciéj, czwartéj i t. d. kolumn. Podobnie w kolumnie siódméj są postawione iloczyny piérwszéj liczby siódméj kolumny przez piérwsze liczby piérwszego, drugiego, trzeciego, czwartego i t. d. wiérszy. A więc, aby znaléść iloczyn dwu liczb jednocyfrowych [czyli, jak mówimy przez skrócenie (§ 4, us. 14): iloczyn dwu cyfr], należy go szukać na przecięciu się wiérsza, którego piérwszą liczbą jest jedna z tych cyfr, z kolumną, któréj piérwszą liczbą jest druga z tych cyfr. Tak np., iloczyn 8×6 znajdziemy albo na przecięciu się wiérsza, zaczynającego się od liczby 8, z kolumną, zaczynającą się od liczby 6, albotéż na przecięciu się kolumny, zaczynającéj się od liczby 8, z wiérszem, zaczynającym się od liczby 6**).

*) W piérwszym zaś wiérszu i w piérwszéj kolumnie są pokolei wypisane liczby od 1 do 9.

) Pomysł tabliczki mnożenia przypisują filozofowi starożytnéj Grecyi, Pitagorasowi, i dlatego nazywają ją **tabliczką Pitagorasa.

5. Zauważymy tu, że w mnożeniu *mnożnik ma odmienne znaczenie od mnożnéj.* Gdy *mnożna jest składnikiem*, pewnym, że tak powiemy, przedmiotem, to mnożnik oznacza tylko, ile razy mnożną mamy wziąć jako składnik, czyli *mnożnik wskazuje działanie,* które mamy wykonać na mnożnéj. Iloczyn zaś, jako suma, ma ten sam charakter, co mnożna. Zastępując mnożenie przez dodawanie, moglibyśmy uskutecznić rachunek, nie wypisując zgoła mnożnika, gdyż jeżeli np. mnożną jest 6, a mnożnikiem 4, to możemy znaléść iloczyn, nie pisząc w rachunku mnożnika, mianowicie: iloczyn $= 6+6+6+6 = 24$, gdy tymczasem bez wypisania mnożnéj obejść się nie możemy (por. us. 2, Uwaga).

6. Widoczniéj to się jeszcze przedstawi, gdy weźmiemy zadanie na mnożenie liczb mianowanych prostych. Np. pewna osoba kupiła 4 łokcie sukna, płacąc za każdy łokieć po złotych 6; wieleż dała za kupione sukno? Rozumować będziemy tak: ponieważ za jeden łokieć płaciła 6 złotych, to za 4 łokcie zapłaciła 4 *razy* więcéj (niż 6 złotych), a więc trzeba 6 *złotych* wziąć jako składnik 4 *razy*, czyli 6 *złotych* pomnożyć przez 4. Gdy mówimy: pomnożyć przez 4, to nie można tu dodać: łokcie; ta liczba 4 jest niezależną od tego, że w zadaniu odpowiadała liczbie kupionych łokci. Gdybyśmy np. kupowali nie 4 łokcie sukna, ale np. 4 kaczki, płacąc za każdą po złotych 6, to również powiedzielibyśmy: trzeba 6 złotych pomnożyć przez 4. Jest więc nam wszystko jedno w mnożeniu, czemu odpowiada nasz mnożnik 4 (łokciom, czy kaczkom). — Gdy mówimy: mnożę 6 złotych przez 4, to nie możemy przy 4-ch wypowiedziéć nazwania jednostki (§ 1, us. 10), a tymczasem przy mnożnéj: 6 złotych, wypowiedzieliśmy wyraźnie: złotych — mnożnik bowiém 4 oznacza właściwie działanie, mianowicie: ile razy mnożną mamy wziąć jako składnik. Z tego wypada, że *w mnożeniu liczb mianowanych mnożnik jest liczbą oderwaną.*

Gdy pomnożę 6 złotych przez 4,

$$6 \text{ zł.} \times 4 = 6 \text{ zł.} + 6 \text{ zł.} + 6 \text{ zł.} + 6 \text{ zł.} = 24 \text{ zł.},$$

to w iloczynie, jako sumie liczb mianowanych prostych (§ 4, us. 18), wypadły nam złote, t. j. iloczyn 24 zł., jest wyrażony przy pomocy téj samej jednostki, co mnożna, 6 zł. A więc: *w mnożeniu liczb mianowawanych iloczyn jest liczbą mianowaną, wyrażoną przy pomocy téj saméj jednostki, co mnożna*[1]). Liczba oderwana, zachodząca w iloczynie (§ 1, us. 10), jak np. w powyższym przykładzie: 24, jako iloczyn 6×4, jest niezależna od nazwania jednostki, t. j. jest iloczynem liczby oderwanéj mnożnéj, 6-u, przez mnożnik 4.

7. Gdy w mnożeniu liczb oderwanych, mamy na myśli tylko liczbę, którą otrzymamy jako iloczyn t. j. gdy nie zaznaczamy wyraźnie,

---

1) Tak, iż moglibyśmy napisać $6 \text{ zł.} \times 4 = (6 \times 4) \text{ zł.}$

która z liczb mnożonych jest mnożną, a tymsamym która jest mnożnikiem, wtedy ogólnie i mnożną i mnożnik nazywamy czynnikami iloczynu.

Właściwie istnieje tylko mnożenie dwu czynników, podobnie jak zasadniczym jest tylko dodawanie dwu składników (§ 4, us. 6). Ale liczbę, wypadającą np. z mnożenia 6×4, możemy sobie wystawić przedstawioną (us. 2) przez ten niewykonany iloczyn, a tymsamym tę liczbę 6×4 możemy pomnożyć jeszcze np. przez 3, t. j. $6\times4\times3$, co wyraźniéj przy pomocy nawiasu przedstawilibyśmy: $(6\times4)\times3$. Jeżeli liczbę, która stąd wypadnie, wystawimy sobie jeszcze pomnożoną np. przez 5, to będziemy mieli: $6\times4\times3\times5$, albo wyraźniéj: $[(6\times4)\times3]\times5$. I t. d. Takie wskazane kolejne mnożenia: $6\times4\times3$, $6\times4\times3\times5$ i t. d. nazywamy*): iloczynami wielu czynników, rozumiejąc przez to liczbę, która po uskutecznieniu działań wypadnie; postępowanie zaś, mające na celu otrzymanie liczby, przedstawionéj przez iloczyn wielu czynników, nazywamy mnożeniem wielu czynników. Ono, jak widzieliśmy, sprowadza się do kilku mnożeń po dwa czynniki przez siebie — jest więc działaniem złożonym, tak, iż zasadniczym jest tylko mnożenie dwu czynników.

8. Samo się przez się rozumié, że, gdy z zadań, doprowadzających do mnożenia liczb mianowanych, nie wykonywając odrazu mnożeń, otrzymamy iloczyn wielu czynników, jeden tylko z czynników iloczynu może być liczbą mianowaną i że przy pomocy téj saméj jednostki, w któréj on jest wyrażony, jest również wyrażony cały iloczyn. Weźmy np. zadanie: Sążeń ma 3 łokcie; łokieć ma 2 stopy; stopa ma 12 cali; ile sążeń ma cali? Kiedy jedna stopa ma 12 cali, to 2 stopy, czyli łokieć, ma cali 2 razy więcéj, t. j. 12 cali $\times2$, a sążeń, jako mający 3 łokcie, ma 3 razy więcéj cali niż łokieć, t. j. 3 razy więcéj niż 12 cali $\times2$, czyli sążeń ma cali: 12 cali $\times2\times3$. Tutaj mamy (us. 6) naprzód 12 cali $\times2=24$ cale, a następnie 24 cale $\times3=72$ cale, więc:

$$12 \text{ cali}\times2\times3=72 \text{ cale.}$$

9. Jeżeli mamy np. 6×4, to mamy 6 wziąć jako składnik 4 razy, czyli, ponieważ 6 jest skupieniem 6-u jedności, mamy każdą z 6-u jedności wziąć jako składnik 4 razy, a w ten sposób z każdéj jedności (liczby 6) powstanie liczba 4, czyli mieć będziemy 6 razy liczbę 4, czyli liczbę 4 pomnożoną przez 6, t. j. 4×6. A więc $6\times4=4\times6$, t. j.

Iloczyn dwu czynników nie zależy od ich porządku,

co mamy rozumiéć w ten sposób, iż przy mnożeniu dwu liczb (oderwanych) 4 i 6 przez siebie, otrzymamy tę samę liczbę z pomnożenia 6-u przez 4, co z pomnożenia 4-ch przez 6.

*) Podobnie, jak wskazane mnożenie dwu czynników nazywamy ich iloczynem (us 2).

Rozumowanie powyższe możemy piśmiennie tak przedstawić:

$$\begin{array}{rl} 6\times4=6+6+6+6= & 1+1+1+1+1+1 \\ & +1+1+1+1+1+1 \\ & +1+1+1+1+1+1 \\ & \underline{+1+1+1+1+1+1} \\ & 4+4+4+4+4+4=4\times6 \end{array}$$

[6×4 oznacza, że liczbę 6 mamy wziąć jako składnik 4 razy, co piszemy; każdy składnik 6 jest sumą 6-u jedności, co wypisujemy, pisząc składniki pod sobą*); ponieważ suma nie zależy od porządku składników, więc te jedności możemy dodawać do siebie w dowolnym porządku; dodając je kolumnami, otrzymamy $4+4+4+4+4+4$, t. j. 6 razy 4, czyli 4×6].

10. Gdy mamy iloczyn wielu czynników, np.

$$6\times4\times3\times5\times2,$$

to ten iloczyn możemy uważać jako złożony z czynnika 6, czynnika przedstawionego (us. 2) przez iloczyn 4×3 i czynników 5 i 2. A ponieważ iloczyn dwu czynników nie zależy od porządku, w jakim piszemy czynniki, więc $4\times3=3\times4$, a tymsamym

$$6\times4\times3\times5\times2=6\times3\times4\times5\times2,$$

Podobnie rozumując, moglibyśmy w iloczynie $6\times3\times4\times5\times2$ przestawić między sobą np. czynniki 6 i 3; wyrażenie $3\times6\times4\times5\times2$ przedstawiałoby tę samę liczbę, co poprzednie wyrażenia, tak, iż

$$6\times4\times3\times5\times2=3\times6\times4\times5\times2,$$

i t. d. Porównywając ze sobą te i różne inne wyrażenia iloczynu, jakie otrzymalibyśmy przez kolejne przestawianie dwu obok siebie stojących czynników, przypatrując się rozmaitemu porządkowi, w jakim te same czynniki w dwu różnych wyrażeniach po sobie następują, widzimy, że wogóle

Iloczyn nie zależy od porządku czynników.—

Jeżeli mamy np. iloczyn $6\times4\times3\times5\times2\times7$, a chcemy w nim częściowy iloczyn np. $4\times3\times2$ zastąpić przez wykonany iloczyn $4\times3\times2=24$ i postawić go np. po czynniku 5, to możność zrobienia tego udowodnimy w sposób następujący. Wiemy, że iloczyn nie zależy od porządku czynników, oraz, że, mając wskazany iloczyn kilku czynników, należy właściwie (us. 7) pierwszy jego czynnik pomnożyć przez drugi, otrzymany iloczyn przez trzeci i t. d. Mamy zatym:

$$\begin{aligned} 6\times4\times3\times5\times2\times7 &= 4\times3\times2\times6\times5\times7=12\times2\times6\times5\times7= \\ &= 24\times6\times5\times7=6\times5\times24\times7. \end{aligned}$$

*) Moglibyśmy wszystkie te jedności wypisać obok siebie, a następnie każde cztery jedności (zaczynając od początku, lub końca) zastąpić przez liczbę 4.

Podobnie, jeżeli w danym iloczynie chcemy czynniki 6, 3 i 2 zastąpić przez ich iloczyn wykonany, stawiając go na końcu, i mieć jednocześnie na początku iloczyn 5-u i 4-ch, to możemy uzasadnienie tego tak przeprowadzić:

$$6\times4\times3\times5\times2\times7=6\times3\times2\times5\times4\times7=18\times2\times5\times4\times7=$$
$$=36\times5\times4\times7=5\times4\times7\times36=20\times7\times36,$$

t. j. $6\times4\times3\times5\times2\times7=(5\times4)\times7\times(6\times3\times2)=20\times7\times36.$

Widzimy więc, że *w iloczynie (wskazanym) kilku czynników, możemy dowolnie wybrane czynniki zastępować przez wykonane ich iloczyny.*

11. Tego, że iloczyn nie zależy od porządku czynników, można ściśle dowieść w sposób następujący. Dowiedliśmy już (us. 9), że

a. *Iloczyn dwu czynników nie zależy od ich porządku.*

Na mocy tego łatwo będzie wyprowadzić, że

b. *Iloczyn nie zmienia się, gdy zmieniamy porządek dwu jego piérwszych czynników.* Np. $6\times4\times3\times5\times2$ ma być tą samą liczbą, co $4\times6\times3\times5\times2$. W piérwszym bowiém razie mamy liczbę, przedstawioną przez iloczyn 6×4, pomnożyć pokolei przez czynniki 3, 5, 2; w drugim zaś razie mamy liczbę, przedstawioną przez iloczyn 4×6, pomnożyć w téj saméj kolei przez też same czynniki 3, 5, 2. A że iloczyny 6×4 i 4×6, na mocy własności a., przedstawiają tę samę liczbę, więc mnożymy przez 3, 5, 2 w obu razach tę samę liczbę, przez co dochodzimy w obu razach do téj saméj liczby, t. j.

$$6\times4\times3\times5\times2=4\times6\times3\times5\times2.$$

c. *Iloczyn trzech czynników nie zmienia się, gdy przestawimy między sobą dwa ostatnie jego czynniki.* Np. $6\times3\times4$ ma być tą samą liczbą, co $6\times4\times3$. W iloczynie $6\times3\times4$ liczbę 6×3 możemy uważać jako mnożną, liczbę zaś 4 jako mnożnik; więc iloczyn $6\times3\times4$ oznacza, iż liczbę 6×3 mamy wziąć cztéry razy jako składnik. Każdy znowu z tych cztérech iloczynów 6×3, jako iloczyn mnożnéj 6 przez mnożnik 3, oznacza, iż mnożna 6 ma być wzięta trzy razy jako składnik. Mamy więc, pisząc każdy z cztérech składników 6×3, po zastąpieniu go przez sumę, w oddzielnym wiérszu, a następnie, (na zasadzie, że suma nie zależy od porządku składników), po zebraniu wypisanych składników kolumnami:

$$6\times3\times4=6\times3+6\times3+6\times3+6\times3=\begin{array}{ccc} 6 & +6 & +6 \\ +6 & +6 & +6 \\ +6 & +6 & +6 \\ +6 & +6 & +6 \\ \hline \end{array}$$
$$6\times4+6\times4+6\times4=6\times4\times3$$

(bo wypadło nam, że liczbę 6×4 mamy wziąć 3 razy jako składnik). Zatym

$$6\times3\times4=6\times4\times3.$$

d. *Iloczyn nie zmienia się, gdy przestawimy między sobę dwa ostatnie jego czynniki.* Np. $6\times4\times3\times5\times2$ ma być tą samą liczbą, co $6\times4\times3\times2\times5$. W obu razach mamy 6 pomnożyć przez 4, a następnie przez 3; liczbę, którą w ten sposób otrzymamy, nazwijmy L. Raz więc trzeba liczbę L pomnożyć przez 5, a później przez 2, t. j. $L \times 5 \times 2$, drugim zaś razem trzeba tę samę liczbę L pomnożyć przez 2, a później przez 5, t. j. $L \times 2 \times 5$. Lecz na mocy własności c. jest $L \times 5 \times 2 = L \times 2 \times 5$. Że zaś w obu tych wyrażeniach liczba L jest tymsamym, mianowicie liczbą, przedstawioną przez iloczyn $6 \times 4 \times 3$, więc zamiast L pisząc to jéj wyrażenie, mamy

$$6 \times 4 \times 3 \times 5 \times 2 = 6 \times 4 \times 3 \times 2 \times 5.$$

e. Iloczyn nie zmienia się, gdy przestawimy między sobą którekolwiek dwa czynniki sąsiednie. Np. $6 \times 4 \times 3 \times 5 \times 2 \times 7$ ma być tą samą liczbą, co $6 \times 4 \times 5 \times 3 \times 2 \times 7$. Na mocy własności d. mamy $6 \times 4 \times 3 \times 5 = 6 \times 4 \times 5 \times 3$, t. j. oba te iloczyny przedstawiają tę samę liczbę. Mnożąc te dwa wyrażenia téj saméj liczby przez 2, a następnie przez 7, dojdziemy do téj saméj liczby, t. j.

$$6 \times 4 \times 3 \times 5 \times 2 \times 7 = 6 \times 4 \times 5 \times 3 \times 2 \times 7.$$

f. *Nie zmieniając iloczynu, możemy którykolwiek jego czynnik sprowadzić na miejsce piérwsze, którykolwiek z pozostałych na drugie i t. d.* Opiérając się bowiém na własności e., możemy dopóty pewien czynnik, który chcemy sprowadzić na miejsce piérwsze, wciąż przemieszczać z każdym czynnikiem, który obok niego z lewéj strony znajdować się będzie, dopóki się on nie znajdzie na piérwszym miejscu. Podobnie będziemy postępować z czynnikiem, który chcemy widziéć na miejscu drugim i t. d. W taki sposób zawsze *możemy ustawić czynniki iloczynu w dowolnym porządku*, nie zmieniając jego wartości, czyli

Iloczyn nie zależy od porządku czynników.

12. Z téj własności (us. 10) wypada, że

Aby iloczyn pomnożyć przez pewną liczbę, można przez tę liczbę pomnożyć którykolwiek z jego czynników. Np., aby iloczyn $6 \times 4 \times 3 \times 5 = 360$ pomnożyć przez 2, można np. składnik 4 pomnożyć przez 2, bo, gdy $6 \times 4 \times 3 \times 5 \times 2 = 360 \times 2$, to, z uwagi, że iloczyn nie zależy od porządku czynników, zamiast $6 \times 4 \times 3 \times 5 \times 2$ możemy napisać $6 \times 4 \times 2 \times 3 \times 5$, a w tym wyrażeniu uważać (us. 2) iloczyn 4×2 za jednę liczbę. Mamy więc

$$6 \times (4 \times 2) \times 3 \times 5 = 6 \times 8 \times 3 \times 5 = 360 \times 2.$$

I nawzajem: *jeżeli którykolwiek czynnik iloczynu mnożymy przez pewną liczbę, to tymsamym ten iloczyn przez tę liczbę mnożymy*, bo jeżeli np. $6 \times 4 \times 3 \times 5 = 360$, to

$$6 \times (4 \times 2) \times 3 \times 5 = 6 \times 4 \times 2 \times 3 \times 5 = 6 \times 4 \times 3 \times 5 \times 2 =$$
$$= (6 \times 4 \times 3 \times 5) \times 2 = 360 \times 2.$$

Jeżeli zamiast, mówić «pomnożyć przez pewną liczbę», powiémy «powiększyć pewną liczbę razy» (us. 2), to powyższe własności możemy tak wysłowić: *aby iloczyn powiększyć pewną liczbę razy, można którykolwiek z jego czynników powiększyć tęż samę liczbę razy*, i: *jeżeli którykolwiek czynnik iloczynu powiększamy pewną liczbę razy, to skutkiem tego iloczyn powiększa się tęż samę liczbę razy.*

13. Gdy więc mamy np. iloczyn liczb 5 i 3 pomnożyć przez liczbę 6, to możemy przez tę liczbę 6 pomnożyć albo wprost liczbę, przedstawioną przez iloczyn 5×3, albo też przez 6 pomnożyć jeden z jego czynników, a liczbę, stąd otrzymaną, pomnożyć przez drugi czynnik. Te sposoby otrzymywania liczby, przedstawionéj przez iloczyn $5\times 3\times 6$, możemy, przy pomocy nawiasów, tak uwydatnić:

$$(5\times 3)\times 6=5\times(3\times 6)=(5\times 6)\times 3.$$

Liczba tych sposobów przedstawienia i otrzymania iloczynu $6\times 4\times 5$ znacznie się powiększy, gdy przestawiać będziemy między sobą czynniki (jakto łatwo widzieć przez zastąpienie w § 4 ustępie 10-ym znaków $+$ przez znaki $\times$). — Liczba sposobów otrzymania iloczynu czterech czynników będzie znacznie większą. I t. d. — Moglibyśmy (podobnie jak w dodawaniu, § 4, us. 10) powiedzieć: *mnożenie trzech lub więcéj czynników możemy uskutecznić przy pomocy mnożeń częściowych którychkolwiek czynników, wziętych w jakimkolwiek porządku* (porównaj drugą część us. 10-go, str. 64).

14. Jeżeli np. liczbę, przedstawioną przez sumę $4+5+6=15$, mamy pomnożyć przez 3, t. j.*) $(4+5+6)\times 3$, to należy sumę $4+5+6$ wziąć 3 razy jako składnik: $4+5+6+4+5+6+4+5+6$; a że dodawanie wielu składników może być uskutecznione przy pomocy częściowych dodawań którychkolwiek składników, wziętych w jakimkolwiek porządku (§ 4, us. 10), więc tę sumę możemy zastąpić przez sumy częściowe: jednę składników 4, drugą składników 5, trzecią składników 6, co przedstawimy, ujmując dla większéj wyraźności oddzielne sumy częściowe w nawiasy, tak: $(4+4+4)+(5+5+5)+(6+6+6)$; ale: $4+4+4=4\times 3$; $5\times 5\times 5=$ $=5\times 3$; $6+6+6=6\times 3$, tak, iż zastąpiwszy sumy częściowe przez te iloczyny, zamiast naszéj sumy miéć będziemy: $4\times 3+5\times 3+6\times 3$. Postępowanie to tak się piśmiennie przedstawi:

$$\begin{aligned}15\times 3&=(4+5+6)\times 3=4+5+6+4+5+6+4+5+6\\&=(4+4+4)+(5+5+5)+(6+6+6)=4\times 3+5\times 3+6\times 3\end{aligned}$$

(i rzeczywiście $15\times 3=12+15+18$). Zadanie więc nasze: sumę $4+5+6$ pomnożyć przez 3 sprowadziliśmy do sumy iloczynów każdego z oddzielnych składników danéj sumy przez tę liczbę 3, t. j. $(4+5+6)\times 3=$ $=4\times 3+5\times 3+6\times 3$. A więc:

*Aby sumę pomnożyć przez pewną liczbę**), można wszystkie składniki sumy pomnożyć przez tę liczbę.*

Jeżeli w iloczynach $(4+5+6)\times 3$, 4×3, 5×3, 6×3 zmienimy porządek czynników (us. 9), to otrzymamy: $3\times(4+5+6)=3\times 4+3\times 5+$ $+3\times 6$, czyli:

Aby liczbę daną pomnożyć przez sumę kilku liczb, można liczbę daną pomnożyć przez każdy ze składników téj sumy i otrzymane iloczyny do siebie dodać.

---

*) Gdybyśmy bez nawiasu napisali $4+5+6\times 3$, toby to nie oznaczało, że liczbę $4+5+6$ mamy pomnożyć przez 3, lecz tylko: liczbę 6 pomnożyć przez 3 i ten iloczyn dodać do sumy $4+5$.

**) Albo: powiększyć pewną liczbę razy.

Nawzajem: *jeżeli wszystkie składniki sumy mnożymy przez pewną (tę samę) liczbę, to skutkiem tego sumę przez tęż liczbę mnożymy*, a także: *jeżeli daną liczbę mnożymy przez każdy ze składników pewnéj sumy i te iloczyny do siebie dodamy, to tymsamym liczbę daną mnożymy przez tę sumę.* Bo np. jeżeli, mając sumę $4+5+6=15$, pomnożymy każdy jéj składnik np. przez 3, to $4\times3+5\times3+6\times3=4+4+4+5+5+5+6+$ $+6+6=(4+5+6)+(4+5+6)+(4+5+6)=(4+5+6)\times3=15\times3$,

t. j. $\quad 4\times3+5\times3+6\times3=(4+5+6)\times3,$

a także (us. 9) $\quad 3\times4+3\times5+3\times6=3\times(4+5+6).$

15. Z dodawania dwu składników, np. $4+2=6$, możemy przejść do odejmowania (§ 5, us. 7), np. $6-4=2$. Na mocy zaś dowiedzionych w ustępie poprzedzającym własności, mamy np. $4\times8+2\times8=6\times8$; z tego zaś dodawania dwu składników: $(4\times8)+(2\times8)=(6\times8)$ możemy przejść do odejmowania: $(6\times8)-(4\times8)=(2\times8)$, czyli, pisząc bez nawiasów (któreśmy dodali tylko dla uwydatnienia, że tak w dodawaniu, jak i w odejmowaniu, zachodzą tylko trzy liczby), $6\times8-4\times8=2\times8$. Jeżeli zaś tu w iloczynie 2×8 zamiast liczby 2 napiszemy (powyżej przywiedzione) jéj wyrażenie przez liczby odejmowania pierwotnego, t. j. napiszemy (§ 5, us. 6) różnicę $6-4$, to ostatnie odejmowanie możemy napisać tak:

$$6\times8-4\times8=(6-4)\times8, \text{ albo: } (6-4)\times8=6\times8-4\times8,$$

t. j. *jeżeli odjemną i odjemnik mnożymy przez tę samę liczbę, to skutkiem tego różnicę przez tę liczbę mnożymy*, i: *aby różnicę dwu liczb pomnożyć przez pewną liczbę, można odjemną i odjemnik pomnożyć przez tę liczbę.*

Z téj własności robimy niekiedy użytek przy wykonywaniu mnożenia. Tak np., gdy mamy liczbę 2359 pomnożyć przez 9, to z uwagi, że $9=10-1$,

$$2359\times9=2359\times(10-1)=2359\times10-2359, \text{ albo np.}$$
$$8995\times7=(9000-5)\times7=9000\times7-5\times7,$$
$$4326\times998=4326\times(1000-2)=4326\times1000-4326\times2, \text{ i t. d.}$$

16. Mamy dwie sumy, np. jednę $4+5+6$, drugą $8+9$; chcemy je przez siebie pomnożyć: $(4+5+6)\times(8+9)$. Jeżeli jednę z nich, $4+5+6$, będziemy uważać (§ 4, us. 6) jako przedstawienie liczby, to, aby tę liczbę pomnożyć przez sumę $8+9$, można ją pomnożyć przez każdy ze składników sumy $8+9$ i otrzymane iloczyny do siebie dodać (us. 14), t. j. $(4+5+6)\times8+(4+5+6)\times9$. W tych iloczynach mamy sumę $4+5+6$ pomnożyć raz przez liczbę 8, a drugim razem przez liczbę 9, co możemy uskutecznić, mnożąc każdy składnik sumy $4+5+6$ przez te liczby (us. 14), tak iż otrzymamy $4\times8+5\times8+6\times8+$ $+4\times9+5\times9+6\times9$. Mamy więc:

$$(4+5+6)\times(8+9)=4\times8+5\times8+6\times8+4\times9+5\times9+6\times9$$

(i rzeczywiście $15\times17=32+40+48+36+45+54$), t. j. *aby dwie sumy przez* *siebie pomnożyć, można każdy składnik jednéj sumy pomnożyć przez każdy składnik drugiéj, a otrzymane iloczyny częściowe do siebie dodać* [1]).

Gdybyśmy mieli trzy lub więcéj sum przez siebie pomnożyć, to sumę częściowych iloczynów, otrzymaną z pomnożenia dwu tych sum, pomnożylibyśmy w ten sam sposób przez trzecią i t. d.

17. Gdy idzie o wykonywanie mnożenia, to, jakeśmy mówili (us. 4), należy przedewszystkim postarać się o to, aby nabrać należytéj wprawy w wypowiadanie odrazu iloczynów liczb jednocyfrowych.

Gdy zaś już tę wprawę posiadamy, to tymsamym wiedzieć będziemy, że np. 5 dziesiątków $\times 7$ jest 35 dziesiątków, t. j., że gdy mamy 50×7, trzeba 35 tak napisać, aby cyfra 5 znalazła się na miejscu drugim (od strony prawéj) (§ 3, us. 9), a więc na miejscu piérwszym należy postawić zero (§ 3, us. 11); jest więc: $50\times 7=350$. Podobnie, gdy mamy np. 800×4, czyli 8 setek $\times$ 4, to otrzymamy 32 setki (§ 3, us. 10), więc $800\times 4=3200$. Taksamo $5000\times 8=40000$ i t. d. [2]).

Mieliśmy tu pomnożyć przez siebie dwie liczby, z których jedna była wyrażona przez cyfrę znaczącą z zerami, np. 800, druga zaś była liczbą jednocyfrową, np. 4. Iloczyn wyrażony został przez liczbę otrzymaną z pomnożenia cyfry znaczącéj jednego czynnika przez czynnik jednocyfrowy, $8\times 4=32$, do któréj to liczby dopisaliśmy dwa zera, t. j. zera, znajdujące się przy cyfrze znaczącéj w czynniku piérwszym; otrzymaliśmy 3200. A zatym wogóle,

Aby pomnożyć liczbę, wyrażoną przez cyfrę znaczącą z zerami, przez liczbę jednocyfrową, do (wiadomego z tabliczki mnożenia) *iloczynu czynnika jednocyfrowego i cyfry znaczącéj dopisujemy zera, znajdujące się przy téj cyfrze.*

18. Weźmy zadanie na mnożenie jakiéjkolwiek liczby wielocyfrowéj przez jednocyfrową, np. 692×4. Mamy więc tu znaléść (us. 3) liczbę, którą otrzymalibyśmy z mnożnéj 692, biorąc ją 4 razy jako składnik. Wykonajmy to dodawanie (§ 4, us. 15):

$$\begin{array}{r} 692 \\ 692 \\ 692 \\ \underline{692} \\ 2768 \end{array}$$

oczywiście, że, wprawiwszy się już w wypowiadanie odrazu iloczynów liczb jednocyfrowych, zamiast dodawać do siebie powoli 4 składniki 2, mówimy odrazu: 4 razy 2 jest 8, a tę cyfrę 8 podpisujemy pod kréską, pod cyframi dodanéj kolumny, t. j. pod cyframi 2 (składników); podobnie daléj, zamiast dodawać do siebie 4 składniki 9, mówimy odrazu: 4 razy 9 jest 36, pod-

---

[1]) Na téj własności ogólnéj opiéra się wykonywanie mnożenia (por. us. 20, 24).

[2]) Możnaby tu powiedzieć: ponieważ iloczyn nie zależy od porządku czynników (us. 9), więc i: $7\times 50=350$; $4\times 800=3200$ i t. d.; ten przypadek jednak, obecnie jeszcze nam niepotrzebny, będzie ogólniéj traktowany w ustępie 23-im.

pisujemy 6 pod cyframi 9 (składników), a 3 dodajemy wraz z cyframi kolumny trzeciéj, przy dodawaniu których znów mówimy krótko: 4 razy 6 jest 24; 24+3=27, co podpisujemy tak, aby 7 było pod cyframi 6.

Jeżeli zaś zamiast wypisywać składnik 692 cztéry razy, napiszemy go raz, a pod nim (aby była blisko) napiszemy *) liczbę 4, która nam oznaczać będzie, że powinniśmy sobie w umyśle wystawić liczbę 692 podpisaną pod sobą 4 razy, czyli 4 razy wziętą jako składnik (t. j. pod mnożną 692 podpisujemy mnożnik 4), a pod liczbą 4 poprowadzimy kréskę poziomą (jak w dodawaniu, t. j. dla oddzielenia liczb danych od szukanéj) i zupełnie taksamo będziemy postępować, jak poprzednio,

$$\begin{array}{r} 692 \\ \times 4 \\ \hline 2768 \end{array}$$

to mówić będziemy: 4 razy 2 jest 8, piszę 8 pod cyfrą 2 (mnożnéj); 4 razy 9 jest 36, piszę 6 pod cyfrą 9 (mnożnéj), a 3 dodam do tego, co otrzymam z uwzględnienia cyfry 6; 4 razy 6 jest 24; 24+3=27. Widzimy więc, że mnożenie liczby wielocyfrowéj przez jednocyfrową wykonywa się zupełnie tak, jak dodawanie kilku jednakowych składników. Tylko: w dodawaniu mamy te składniki wyraźnie wypisane wszystkie, gdy tymczasem w mnożeniu skracamy sobie postępowanie, pisząc raz tylko (powtarzający się) składnik i pod nim podpisując liczbę, oznaczającą, ile takich składników powinniśmy sobie wystawić wypisanych pod sobą. Tym się także objaśnia, dlaczego to mnożenie zaczynamy tak jak dodawanie (§ 4, us. 14): od strony prawéj.

Podobnie: mnożenie np. 740593×5 jest takim samym postępowaniem, jak dodawanie 5-u składników 740593:

$$\begin{array}{r} 740593 \\ 740593 \\ 740593 \\ 740593 \\ 740593 \\ \hline 3702965 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 740593 \\ \times 5 \\ \hline 3702965 \end{array}$$

tak w jednym bowiém, jak i w drugim działaniu mówimy: 5 razy 3 jest 15, piszę 5 pod 3, a 1 pozostaje do dodania dalszego; 5 razy 9 jest 45, 45+1=46, piszę 6 pod 9, a 4 pozostaje do dodania; 5 razy 5 jest 25, 25+4=29, piszę 9 pod 5, a 2 pozostaje do dodania dalszego, lecz stawiamy to 2 odrazu obok (t. j. pod 0), bo prócz tych 2-u niéma niczego innego do oznaczenia na tym miejscu; daléj: 5 razy 4 jest 20, stawiam 0 (§ 3, us. 11) pod 4, a 2 pozostaje do dodania, 5 razy 7 jest 35, 35+2=37, którąto liczbę piszę tak, aby jéj cyfra 7 była pod 7.

*) Wszystko jest jedno, pod którą cyfrą mnożnéj podpiszemy mnożnik, bo on nam tylko symbolizuje dodawanie, odmienne ma od mnożnéj znaczenie (us. 5); zwykle jednak mnożnik jednocyfrowy piszemy pod piérwszą od strony prawéj cyfrą znaczącą mnożnéj.

19. Widzimy więc wogóle, że postępowanie przy mnożeniu liczby wielocyfrowéj przez jednocyfrową możemy ująć w następujące prawidło:

Aby pomnożyć liczbę wielocyfrową przez jednocyfrową, podpisujemy mnożnik pod mnożną i, przeprowadziwszy pod mnożnikiem kréskę poziomą, mnożymy, zaczynając od strony prawéj, każdą cyfrę znaczącą mnożnéj przez mnożnik; jeżeli z takiego mnożenia częściowego wypadnie iloczyn nie większy od 9, to podpisujemy go pod kréską pod mnożoną cyfrą mnożnéj; jeżeli zaś ten iloczyn jest większy od 9, to z otrzymanéj liczby oddzielamy dziesiątki, a pozostałą część podpisujemy pod kréską pod mnożoną cyfrą mnożnéj, cyfrę zaś dziesiątków dodamy do iloczynu powstałego z mnożenia następującéj cyfry mnożnéj przez mnożnik; na niezajętych zaś miejscach (jeżeli one będą), *piszemy zera.*

20. Możemy dojść do tegoż prawidła, nie posiłkując się sposobem wykonywania dodawania, ale bespośrednio, opiérając się na tym, cośmy o mnożeniu (us. 3) powiedzieli.

Mamy np. pomnożyć 697×4, t. j. wziąć 697 cztéry razy jako składnik: $697+697+697+697$; a ponieważ możemy każdą liczbę tak rozłożyć na składniki, jak nam to będzie najdogodniéj (§ 4, us. 11), więc możemy każdy z tych składników rozłożyć (najprościéj) na setki, dziesiątki i jedności: $697=600+90+7$, a podstawiwszy te roskłady, możemy wskazane dodawanie wykonać przy pomocy dodawań częściowych którychkolwiek składników, wziętych w jakimkolwiek porządku (§ 4, us. 10); oddzielnie więc możemy wykonać dodawania częściowe setek, oddzielnie dziesiątków, oddzielnie jedności, a otrzymane wypadki do siebie dodać; przedstawimy to w ten sposób:

$$697\times4=697+697+697+697=\begin{array}{rrr} 600 & +90 & +7 \\ +600 & +90 & +7 \\ +600 & +90 & +7 \\ +600 & +90 & +7 \\ \hline 600\times4 & +90\times4 & +7\times4 \end{array}$$

(wykonywając częściowe dodawanie setek, mieliśmy 600 wziąć 4 razy jako składnik, a więc napisaliśmy 4 razy 600: taksamo powstało 90×4 i 7×4). A więc:

$$697\times4=600\times4+90\times4+7\times4,$$

t. j., aby pomnożyć 697×4, należy, wogóle mówiąc, 697 rozłożyć w najdogodniejszy sposób na części, każdą z tych części pomnożyć przez 4 i otrzymane iloczyny częściowe do siebie dodać [1]).

Możemy więc powiedzieć, że *wykonywanie mnożenia w przypadku, gdy mnożna jest liczbą wielocyfrową, a mnożnik jednocyfrową, polega na*

---

[1]) Na mocy dowiedzionego w ustępie 14-ym możemy wprost powiedzieć: mając 697×4, roskładam (§ 4, us. 11) na części $697=600+90+7$, i sprowadzam rzecz do (us. 14):

$$697\times4=(600+90+7)\times4=600\times4+90\times4+7\times4.$$

rozłożeniu mnożnéj w najdogodniejszy sposób na części, pomnożeniu każdéj części mnożnéj przez mnożnik i dodaniu do siebie otrzymanych iloczynów częściowych [1]).

Należy nam tu wykonać częściowe mnożenia: 600×4, 90×4 i 7×4, a iloczyny stąd powstałe do siebie dodać; mamy więc (us. 17):

$$\begin{array}{r} 600\times4=2400 \\ 90\times4=\ \ 360 \\ 7\times4=\ \ \ \ 28 \\ \hline 2788 \end{array} \qquad \text{czyli} \qquad \begin{array}{r} 697 \\ \times4 \\ \hline 2400 \\ 360 \\ 28 \\ \hline 2788 \end{array}$$

Tak właśnie wykonywamy pamięciowe mnożenie; mając pomnożyć 697×4 mówimy: mam 697 pomnożyć przez 4, t. j. 600 pomnożyć przez 4, 90 pomnożyć przez 4 i 7 pomnożyć przez 4, a to, co otrzymamy, dodać do siebie; więc 600 przez 4 jest 2400; 90 przez 4 jest 360; 2400 i 360 jest 2760; 7 przez 4 jest 28; 2760 i 28 jest 2788, a więc z pomnożenia 697-u przez 4 otrzymuję 2788.

Wracając się do piśmiennego wykonywania mnożenia, zauważymy, że w wypisanym dodawaniu nad cyfrą 8 mamy zera innych składników, więc cyfra ta znajdzie się w sumie, t. j. piérwsza cyfra (od strony prawéj) szukanego iloczynu zależy od piérwszéj cyfry iloczynu częściowego cyfry 7 mnożnéj przez mnożnik; podobnież, druga cyfra szukanego iloczynu zależy od liczby dziesiątków, które pozostały z mnożenia częściowego cyfry 7 mnożnéj przez mnożnik i od piérwszéj cyfry iloczynu częściowego cyfry 9 mnożnéj przez mnożnik, i t. d. *). Nie mamy więc potrzeby wypisywania oddzielnie składników 2400, 360, 28, ale, zaczynając od mnożenia 7-u przez 4 i mnożąc następnie 9 (na drugim miejscu) przez 4, a potym 6 (na trzecim) przez 4, wypiszemy odrazu sumę, t. j. szukany iloczyn 2788; a więc rachunek krótko i wyraźnie przedstawimy (§ 1, us. 9), pisząc

$$\begin{array}{r} 697 \\ \times\ 4 \\ \hline 2788 \end{array}$$

co nas doprowadza do prawidła już wypowiedzianego (us. 19).

21. Gdy mamy jakąkolwiek liczbę pomnożyć przez 10, np. 305×10, to mamy 305 jedności wziąć jako składnik 10 razy, czyli każda jedność z tych 305-u jedności, jako wzięta 10 razy jako składnik, stanie się sumą dziesięciu jedności, t. j. dziesiątkiem. Otrzymujemy więc

---

[1]) Jestto inne wyrażenie piérwszéj z własności dowiedzionych w ustępie 14-tym, a zarazem szczególnym przypadkiem własności dowiedzionéj w ustępie 16-ym.

*) Objaśnia się tym bespośrednio, dlaczego to mnożenie zaczynamy od strony prawéj.

305 dziesiątków, które trzeba napisać tak, aby cyfra 5 była na miejscu drugim od strony prawéj; aby więc zająć piérwsze miejsce, potrzeba na nim umieścić zero. Jest więc $305\times10=3050$, t. j., aby liczbę pomnożyć przez 10, należy do niéj dopisać zero. Jeżeli mamy 305×100, to podobnież należy 305 jedności wziąć jako składnik 100 razy; każda więc z 305-u jedności, jako wzięta sto razy jako składnik, stanie się sumą stu jedności, t. j. setką. Otrzymujemy zatym 305 setek. Aby zaś tę liczbę napisać, trzeba się postarać o to, aby cyfra 5 znalazła się na miejscu trzecim od strony prawéj, i dlatego na piérwszych dwu miejscach, aby je zająć, należy napisać zera. Jest więc $305\times100=30500$, t. j., aby liczbę pomnożyć przez 100, należy do niéj dopisać dwa zera *). I t. d.

Z tego, cośmy mówili w us. 17-m i 19-ym, łatwo wyprowadzić, że **) $10\times227=2270$; $10000\times350=3500000$ i t. d.

Możemy więc powiedziéć, że:

Aby pomnożyć przez siebie dwa czynniki, z których jeden jest przedstawiony przez jedność z zerami, należy przypisać wszystkie jego zera do drugiego czynnika z prawéj strony ***).

22. Z tego jeszcze wypada, że liczbę np. 40 możemy uważać jako powstałą z pomnożenia 4 przez 10, a więc $40=4\times10$; podobnie $1000=$ $=100\times10=10\times10\times10$; $14500=1450\times10=145\times100=145\times10\times$ $\times10$, i t. d.

Jeżeli więc, mając np. liczbę 30568, przedstawimy ją jako (§ 4, us. 11) sumę, $30568=30000+500+60+8$, a do trzech piérwszych części zastosujemy tu powyższe wyrażenia, to mieć będziemy

$$30568=3\times10000+5\times100+6\times10+8,$$
$$30568=3\times10\times10\times10\times10+5\times10\times10+6\times10+8,$$

albo jeszcze (us. 3)

$$30568=3\times10000+5\times100+6\times10+8\times1,$$
$$30568=3\times10\times10\times10\times10+5\times10\times10+6\times10+8\times1.$$

23. Gdy mamy wykonać mnożenie jakiéjkolwiek liczby przez liczbę wyrażoną przez cyfrę znaczącą z zerami, np. 305×700, to, ponieważ $700=7\times100$, zadanie nasze sprowadza się do odszukania iloczynu $305\times7\times100$, t. j. trzeba naprzód (us. 7) wykonać mnożenie 305×7, a iloczyn, stąd otrzymany, pomnożyć przez 100 ****), czyli do iloczynu $305\times7=2135$ dopisać (us. 21) dwa zera; otrzymujemy 213500.

---

*) Przy wykonywaniu pamięciowym powiemy również: mam 305 pomnożyć przez sto, będzie więc 305 setek, czyli 30 500.

**) Wyprowadzić zaś to można także z tego, co tu (us. 21) wyżéj mówimy, opiérając się na tym, że iloczyn nie zależy od porządku czynników.

***) Mówimy także: aby liczbę powiększyć np. 10 000 razy, należy do niéj dopisać cztéry zera i t. d.; i jeżeli do liczby dopiszemy np. dwa zera, to ją powiększamy 100 razy i t. d.

****) Tak właśnie będziemy wykonywali pamięciowe mnożenie 305-u przez 700.

Możemy to nieco inaczéj objaśnić w ten sposób. Mamy 305×700, t. j. 305 wziąć jako składnik 700 razy. Wyobraźmy sobie, żeśmy wypisali tę sumę 700-t składników 305. Ponieważ dodawanie wielu składników możemy zastąpić przez dodawania częściowe (§ 4, us. 10), więc możemy oddzielnie do siebie dodać piérwsze 7 składników, oddzielnie dalsze 7 i t. d., t. j. nasze dodawanie zastąpimy przez 100 dodawań częściowych, z których każde, jako dodawanie 7-u składników 305, może być zastąpione przez mnożenie 305-u przez 7; iloczyn zaś ten $305\times7=2135$ mamy wziąć 100 razy jako składnik, czyli pomnożyć go przez 100, a więc (us. 21) dopisać doń dwa zera; otrzymujemy 213500.

Gdy w tym przypadku podpisujemy mnożnik pod mnożną dla wykonania mnożenia, zwykle podpisujemy go tak, aby cyfra znacząca mnożnika była pod jednościami mnożnéj *):

$$\begin{array}{r} 305 \\ \times700 \\ \hline 213500 \end{array}$$

i mnożymy naprzód przez cyfrę znaczącą mnożnika, t. j. przez 7 (us. 19), a następnie do otrzymanego stąd iloczynu, t. j. do 2135, dopisujemy dwa zera.

Podobnie, gdy mamy np. pomnożyć 697 przez 40000, to napiszemy:

$$\begin{array}{r} 697 \\ \times40000 \\ \hline 27880000 \end{array}$$

pomnożymy 697 przez 4 i do otrzymanego iloczynu 2788 dopiszemy cztéry zera mnożnika.

Możemy więc powiedzieć, że:

Aby pewną liczbę pomnożyć przez cyfrę znaczącą z zerami, mnożymy ją naprzód przez tę cyfrę znaczącą, a do otrzymanego iloczynu dopisujemy z prawéj strony tyle zer, ile ich jest przy téj cyfrze w mnożniku

Gdy więc mamy np. 697×40000, to powyższe prawidło możemy tak (us. 7) przedstawić: $(697\times4)\times10000$. Lecz (us. 20) wiemy, że $697\times4=$ $=600\times4+90\times4+7\times4$, więc

$$697\times40000=(697\times4)\times10000=(600\times4+90\times4+7\times4)\times10000,$$

co dokładnie przedstawia szczegóły postępowania przy wykonywaniu mnożenia 697-u przez 40000 [1]).

Gdy chcemy np. 400×60, to (us. 22, 10):

$$400\times60=4\times100\times6\times10=4\times6\times100\times10=4\times6\times1000=$$
$$=24\times1000=24000,$$

---

*) Możemy bowiem tak podpisywać mnożnik pod mnożną, jak nam to najdogodniéj (por. us. 18 i 5).

[1]) Moglibyśmy także wprost tak powiedzieć: liczbę 697 roskładamy na składniki (§ 4, us. 11), $697=600+90+7$, a według dowiedzionego w ustępie 14-ym, mamy

$$697\times40000=(600+90+7)\times40000=600\times40000+90\times40000+7\times40000,$$

t. j. zamiast przypisywania czterech zer do iloczynu 697×4, możemy je odrazu uwzględniać przy mnożeniu części mnożnéj przez mnożnik.

t. j. *aby pomnożyć przez siebie dwie liczby, z których każda jest przedstawiona przez cyfrę znaczącą z zerami, możemy pomnożyć przez siebie cyfry znaczące i do otrzymanego iloczynu dopisać z prawéj strony zera obu czynników.*

Jeżeli mamy np. 69700×4000, to podobnież możemy zamiast 69700 napisać (us. 22): 697×100 i zamiast 4000 napisać 4×1000, a tymsamym $69700\times4000=697\times100\times4\times1000$. Iloczyn nie zależy od porządku czynników (us. 10), więc:

$$69700\times4000=697\times100\times4\times1000=697\times4\times100\times1000=$$
$$=697\times4\times10000.$$

A zatym możemy naprzód wykonać 697×4 i do otrzymanego iloczynu 2788 dopisać pięć zer, t. j. dwa zera mnożnéj i trzy zera mnożnika. Zwykle w podobnych przypadkach przedstawiamy rachunek w ten sposób:

$$\begin{array}{r} 69700 \\ \times4000 \\ \hline 278800000. \end{array}$$

Jeżeli mnożna ma na końcu zera, a mnożnik jest liczbą, przedstawioną przez cyfrę znaczącą z zerami, to wykonywamy mnożenie tak, jakgdyby tych zer nie było, a do iloczynu otrzymanego dopisujemy z prawéj strony końcowe zera mnożnéj i mnożnika *).

24. Weźmy zadanie na mnożenie liczb wielocyfrowych przez siebie, np. 7256×348. Mamy tutaj (us. 3) mnożną 7256 wziąć 348 razy jako składnik. Wystawmy sobie, żeśmy rzeczywiście wypisali

$$7256+7256+7256+7256+ \text{ i t. d. (348 razy).}$$

Ponieważ to dodawanie możemy uskutecznić przy pomocy częściowych dodawań składników (§ 4, us. 10), więc możemy oddzielnie dodać piérwszych 300 składników, oddzielnie dalszych 40 i nakoniec oddzielnie 8 pozostałych:

$$\underbrace{7256+7256+ \text{ i t. d.}}_{300 \text{ razy}} \underbrace{+7256+7256+ \text{ i t. d.}}_{40 \text{ razy}} \underbrace{+7256+7256 \text{ i t. d.}}_{8 \text{ razy}}$$

Tu piérwsza część, t. j. 300 jednakowych składników 7256, może być zastąpiona przez iloczyn 7256×300; podobnież, zamiast drugiéj części możemy napisać 7256×40 i zamiast trzeciéj 7256×8, tak, iż **)

$$7256\times348=7256\times300+7256\times40+7256\times8.$$

Z tego widzimy, *że mnożenie liczby wielocyfrowéj przez wielocyfrową polega na rozłożeniu mnożnika w najdogodniejszy sposób na części, pomnożeniu mnożnéj przez każdą z tych części mnożnika i dodaniu do siebie tak otrzymanych iloczynów częściowych.*

Należy tu nam wykonać częściowe mnożenia: 7256×300, $7256\times$ $\times40$, 7256×8, i tak otrzymane iloczyny do siebie dodać.

---

*) Ogólniéj w us. 26-ym.

**) Na mocy dowiedzionego w ustępie 14-ym, możemy wprost powiedzieć: 7256×348; rozkładamy (§ 4, us. 11) na części $348=300+40+8$ i sprowadzamy rzecz do mnożenia liczby 7256 przez sumę $300+40+8$ (us. 14), t. j.:

$$7256\times348=7256\times(300+40+8)=7256\times300+7256\times40+7256\times8.$$

Według us. 19-ego: $7256\times8=7000\times8+200\times8+50\times8+6\times8$: według zaś ustępu 23-ego (str. 73, odsyłacz[1]): $7256\times300=7000\times300+200\times\times300+50\times300+6\times300$; $7256\times40=7000\times40+200\times40+50\times40+ +6\times40$. Podstawiając te wyrażenia częściowych iloczynów w otrzymane powyżéj wyrażenie szukanego iloczynu:

$$7256\times348=7256\times300+7256\times40+7256\times8,$$

mieć będziemy:

$$\begin{aligned} 7256\times348 = {} & 7000\times300+200\times300+50\times300+6\times300 \\ & +7000\times40\ +200\times40\ +50+40\ +6\times40 \\ & +7000\times8\ +200\times8\ +50\times8\ +6\times8 \end{aligned}$$

(to nam także wypada bespośrednio z dowiedzionego w ustępie 16-ym, gdy sumę 7000+200+50+6 pomnożymy przez sumę 300+40+8), t. j. wrazie, gdy chcemy wyraźnie uwzględnić wykonywanie każdego mnożenia całéj mnożnéj przez oddzielne części mnożnika, należałoby powiedzieć, że *mnożenie liczby wielocyfrowéj przez wielocyfrową polega na rozłożeniu tak mnożnéj, jak i mnożnika, w najdogodniejszy sposób na części, wykonaniu częściowych mnożeń każdéj części mnożnéj przez każdą część mnożnika i dodaniu do siebie otrzymanych w ten sposób iloczynów.*

Wykonywając częściowe mnożenia według wiadomych (us. 19, 23) prawideł i dodając otrzymane iloczyny, mamy

$$\begin{array}{r} 7256 \\ \times300 \\ \hline 2176800 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7256 \\ \times40 \\ \hline 290240 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7256 \\ \times8 \\ \hline 58048 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2176800 \\ 290240 \\ 58048 \\ \hline 2525088. \end{array}$$

Takie postępowanie jest jednak zbyt długie (§ 1, us. 9). Postarajmy się je skrócić, oile tylko można.

Widzimy przedewszystkim, że tu trzy razy wypisywaliśmy mnożną, a liczby: 2176800, 290240, 58048 każdą dwa razy. Urządźmy więc postępowanie tak, aby mnożną napisać raz tylko i również raz tylko pisać iloczyny częściowe. Jeżeli te iloczyny częściowe mamy pisać raz tylko, to musimy je tak pisać jedne pod drugimi, jak to być powinno przy dodawaniu; a tymsamym oznaczenia mnożenia mnożnéj przez 300, przez 40 i przez 8 wszystkie powinny się znajdować nad składnikami dodawania. Osiągniemy to, pisząc nad składnikami *)

$$\begin{array}{r} 7256 \\ \times\ 348 \\ \hline \end{array}$$

co rozumieć będziemy w ten sposób, że mnożymy 7256 nie odrazu przez 348, ale oddzielnie przez części mnożnika, t. j. przez 300, 40, 8, a te iloczyny częściowe podpiszemy pod kreską, nakreśloną dlatego, aby oddzielić liczby dane, od liczb, które następnie do siebie dodać trzeba będzie.

*) Gdy mnożna i mnożnik nie kończą się zerami, to zwykle tak piszemy mnożnik pod mnożną, aby jedności były pod jednościami. (Por. us. 26).

Zauważymy tu, że możemy mnożną mnożyć przez części mnożnika, albo w porządku, jak wyżéj: 300, 40, 8, albotéż w porządku odwrotnym: 8, 40, 300, bo to zmieni tylko porządek składników sumy (§ 4, us. 7). Z tych dwu sposobów:

```
   7256            7256
   ×348            ×348
-------         -------
2176800           58048
 290240          290240
  58048         2176800
-------         -------
2525088         2525088
```

wybierzemy ten, który okaże się dogodniejszym. Gdybyśmy żadnych już więcéj skróceń nie robili, to jeden z tych sposobów byłby równie dobry jak drugi. Ale pragniemy porobić wszelkie możliwe skrócenia, któreby zachowywały rachunek wyraźnym (§ 1, us. 9). Zauważymy tu, że gdy mnożymy mnożną przez setki mnożnika, to w częściowym stąd iloczynie będą zawsze dwa zera na końcu (us. 23); ponieważ one zawsze będą, więc zrobimy godziwe skrócenie, nie pisząc ich, ale zostawiając dwa miejsca niezajęte, tak, iż na tych miejscach wyobrażać sobie powinniśmy zera; podobnież możemy nie pisać zera, zawsze znajdującego się na końcu iloczynu mnożnéj przez dziesiątki mnożnika. Będziemy więc mieli

```
   7256            7256
   ×348            ×348
-------         -------
21768             58049
 29024           29024
  58048         21768
-------         -------
2525088         2525088,
```

co pozwala nam, zamiast mówić: mnożymy mnożną przez 300, powiedzieć: mnożymy mnożną przez 3, ale za to pisać musimy otrzymywany iloczyn mnożnéj przez 3 tak, aby piérwsza (od strony prawéj) cyfra tego iloczynu była na trzecim miejscu, t. j. pod cyfrą 2 mnożnéj, albo, gdy jedności mnożnika są pod jednościami mnożnéj, — pod cyfrą 3 mnożnika; podobnież nie będziemy mówić: mnożę przez 40, ale przez 4, a otrzymany iloczyn postawimy tak, aby piérwsza jego cyfra była pod cyfrą 4 mnożnika. — Każde z tych częściowych mnożeń mnożnéj przez cyfrę mnożnika uskuteczniamy, zaczynając działanie od strony prawéj (us. 18, 19, 20). Z tego więc powodu, będzie zręczniéj mnożyć mnożną pokolei przez oddzielne cyfry mnożnika, zaczynając także od téj saméj strony, t. j. od prawéj, niż mnożyć mnożną przez kolejne cyfry mnożnika, zaczynając od strony lewéj, a każde częściowe mnożenie wykonywać od strony prawéj.

W ten sposób objaśniliśmy, dlaczego rachunek mnożenia 7256 przez 348 tak się zwykle piśmiennie przedstawia:

$$\begin{array}{r} 7256 \\ \times 348 \\ \hline 58048 \\ 29024 \\ 21768 \\ \hline 2525088. \end{array}$$

Podobnie, jeżeli mamy np. 302175×14023, to mnożenie to tak wykonamy:

$$\begin{array}{r} 302175 \\ \times 14023 \\ \hline 906525 \\ 604350 \\ 1208700 \\ 302175 \\ \hline 4237400025 \end{array}$$

pomnożymy mnożną przez 3 i podpiszemy iloczyn pod kréską tak, aby piérwsza jego (od strony prawéj) cyfra, t. j. 5, znalazła się pod cyfrą mnożnika, przez którąśmy mnożyli, t. j. pod 3; następnie pomnożymy mnożną przez 2 i ten iloczyn tak pod poprzednim podpisujemy, aby piérwsza jego cyfra, t. j. 0, znalazła się pod cyfrą 2 mnożnika (następna cyfra mnożnika, 0, służy tylko do zajęcia miejsca; niéma więc w mnożniku na trzecim miejscu części, przez którąbyśmy mieli mnożyć mnożną); mnożymy późniéj mnożną przez cyfrę 4 mnożnika, a otrzymany iloczyn podpisujemy w dalszym ciągu tak, aby piérwsza jego cyfra, t. j. 0, znalazła się pod cyfrą 4 mnożnika; nakoniec mnożymy mnożną przez cyfrę 1 mnożnika (us. 3), a iloczyn (równy mnożnéj) podpisujemy pod poprzednim tak, aby piérwsza jego cyfra, t. j. 5, znalazła się pod tą cyfrą 1 mnożnika. Tak wypisane iloczyny częściowe dodajemy do siebie, rozumiejąc na niezajętych miejscach zera, a otrzymana suma jest iloczynem liczb danych. — (W tym przykładzie wypadło nam napisać zera na końcu iloczynów częściowych mnożnéj przez 2 i przez 4; takie zera piszemy, bo one nie zawsze będą; nie byłoby ich na tych miejscach, gdyby w mnożniku, zamiast cyfr 2 i 4, były np. 5, lub 7.)

25. Widzimy więc wogóle, że postępowanie przy mnożeniu liczby wielocyfrowéj przez wielocyfrową możemy ująć w następujące prawidło:

Aby pomnożyć liczbę wielocyfrową przez wielocyfrową, podpisawszy mnożnik pod mnożną i poprowadziwszy pod mnożnikiem kréskę poziomą, mnożymy mnożną pokolei przez każdą znaczącą cyfrę mnożnika, poczynając od strony prawéj, według wiadomego prawidła (us. 19); *otrzymane iloczyny częściowe podpisujemy pod kréską jeden pod drugim tak, iżby piérwsza od strony prawéj cyfra każdego iloczynu częściowego była pod tą cyfrą mnożnika, przez którą dla otrzymania tego iloczynu mnożyliśmy mnożną, a następnie tak wypisane iloczyny częściowe do siebie dodajemy, wyobrażając sobie zera na miejscach niezajętych.*

26. Wrazie, gdy w mnożnéj, albo w mnożniku, albotéż jednocześnie w mnożnéj i w mnożniku znajdują się zera na końcu, mamy (us. 22, 10):

$$342100\times215=3421\times100\times215=3421\times215\times100,$$
$$3421\times205000=3421\times205\times1000=3421\times205\times1000,$$
$$341200\times215000=3412\times100\times215\times1000=3412\times215\times100000,$$

a więc ogólnie (21, 23): *jeżeli mamy pomnożyć przez siebie dwie liczby, z których jedna, lub obie są zakończone zerami, to możemy je naprzód pomnożyć przez siebie, jakgdyby tych zer nie było, a do otrzymanego iloczynu dopisać z prawéj strony końcowe zera czynników.* Rachunek wtedy zwykle tak przedstawimy:

$$\begin{array}{r} 342100 \\ \times215 \\ \hline 17105 \\ 3421 \\ 6842 \\ \hline 73551500, \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3421 \\ \times20500 \\ \hline 17105 \\ 6842 \\ \hline 70130500, \end{array} \qquad \begin{array}{r} 341200 \\ \times215000 \\ \hline 17060 \\ 3412 \\ 6824 \\ \hline 7335800000, \end{array}$$

27. Zdarza się niekiedy, że w mnożnéj jest znacznie mniéj cyfr (znaczących), niż w mnożniku. Prędzéj (§ 1, us. 9) wtedy wykonamy mnożenie,mnożąc mnożnik przez cyfry mnożnéj; a że przez to zachowujemy się tak, jakbyśmy przestawili między sobą czynniki, więc (us. 9) dochodzimy do téj saméj liczby w iloczynie, co wrazie ścisłego trzymania się prawidła (us. 25). Taktéż zwykle w tym przypadku postępujemy. Np.

$$\begin{array}{r} 42 \\ \times5167 \\ \hline 10334 \\ 20668 \\ \hline 217014, \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1002 \\ \times3417 \\ \hline 6834 \\ 3417 \\ \hline 3423834. \end{array}$$

Wrazie, gdy mamy pomnożyć przez siebie dwie liczby oderwane i gdy nie mamy potrzeby zaznaczać wyraźnie, która z mnożonych przez siebie liczb jest np. mnożną, to w tym przypadku, jeżeli chcemy, możemy liczbę, w któréj jest mniéj cyfr znaczących, napisać jako mnożnik (us. 9).— Jeżeli jednak rozumowanie, doprowadzające do mnożenia dwu liczb oderwanych przez siebie, wymaga, aby jednę z tych liczb uważać np. za mnożną (us. 5), albo jeżeli w mnożeniu liczb mianowanych (us. 6) sam charakter dwu liczb mnożonych przez siebie wyraźnie wskazuje, która z nich jest np. mnożną (us. 6), to nie można w rachunku napisać mnożnéj zamiast mnożnika i nawzajem.

Z uwagi jednak, że samo wykonanie mnożenia ma na celu tylko odszukanie iloczynu (tak, iż tego rachunku drobiazgowego nie robilibyśmy, gdybyśmy byli w stanie odrazu wypowiedzieć szukany iloczyn), jest dla nas rzeczą obojętną, czy my tym, czytéż innym sposobem otrzymujemy iloczyn, tymwięcéj, że nawet w mnożeniu liczb mianowanych możemy się oprzéć na tym,że liczba oderwana, zachodząca w iloczynie, jest niezależna od nazwania jednostki i powstaje z pomnożenia liczby oderwanéj mnożnéj przez mnożnik (us. 6.) Nie przestawiając więc w rachunku mnożnéj z mnożnikiem między sobą, możemy jednak wykonywać mnożenie, mnożąc mnożnik przez cyfry znaczące mnożnéj (według odpowiednio zmienionego prawidła us. 25), gdyż skutkiem téj zmiany w postępowaniu nie zmieni się liczba oderwana w iloczynie (us. 9); przy mnożeniu liczb mianowanych do tak otrzymanego iloczynu dopiszemy nazwanie jednostki mnożnéj (us. 6).

Np. stopa ma 12 cali; ile 4356 stóp ma cali? Ponieważ jedna stopa ma 12 cali, to 4356 stóp ma cali 4356 razy więcéj, i dlatego należy 12 cali pomnożyć przez (liczbę oderwaną) 4356; napiszemy:

$$\begin{array}{r l} 12 & \text{cali} \\ \times 4356 & \\ \hline 8712 & \\ 4356 & \\ \hline 52272 & \text{cale} \end{array}$$

zamiast jednak mnożyć (us. 25) kolejno 12×6, 12×5, 12×3 i 12×4 i zająć tymi iloczynami 4 wiérsze, możemy wykonać 4356×2, 4356×1 (us. 3) i otrzymane iloczyny częściowe pomieścić w dwu tylko wiérszach (§ 1, us. 9). Do otrzymanéj z dodania liczby: 522272 dopiszemy nazwanie jednostki mnożnéj (us. 6), t. j. cale. Odpowiédź: 4356 stóp ma 52272 cale.

28. Samo się przez się rozumié, że próbę mnożenia moglibyśmy wykonać przez dodawanie (us. 1, 3) i robimy to, ale tylko wtedy, gdy mnożnik jest bardzo małą liczbą.

Możemy jednak sprawdzenie liczby, otrzymanéj jako iloczyn, oprzéć na tym, że iloczyn nie zależy od porządku czynników (us. 9). Będzie to więc próba mnożenia przez mnożenie. Mianowicie: liczbę, która w mnożeniu sprawdzanym była mnożnikiem, pomnożymy według prawidła podanego w us. 25, przez poprzednią mnożną; jeżeli w iloczynie otrzymamy tę samę co poprzednio liczbę, to jest prawdopodobne, żeśmy sprawdzane mnożenie dobrze wykonali. Np.

$$\begin{array}{r} 3421 \\ \times 215 \\ \hline 17105 \\ 3421 \\ 6842 \\ \hline 735515, \end{array} \qquad \begin{array}{r l} 215 & \\ \times 3421 & \\ \hline 215 & \\ 430 & \\ 860 & \\ 645 & \\ \hline 735515 & \text{(dobrze).} \end{array}$$

29. Weźmy dwa iloczyny, każdy złożony z dwu czynników, i niech te iloczyny mają po jednym czynniku spólnym—pozostałe zaś ich czynniki niech będą od siebie różne. Np. 235×79 i 45×235. Przestawmy np.[1]) czynniki

---

[1]) Moglibyśmy przestawić między sobą czynniki piérwszego iloczynu; wtedy rozumowanie byłoby nieco odmienne.

drugiego iloczynu (us. 9); wtedy oba iloczyny 235×79 i 235×45 mieć będą tę samę liczbę 235 jako mnożną. Piérwszy iloczyn przedstawia sumę, którą otrzymalibyśmy, gdybyśmy liczbę 235 wzięli 79 razy jako składnik (us. 3), drugi zaś iloczyn przedstawia sumę, którą otrzymalibyśmy, biorąc tę samę liczbę 235 tylko 45 razy jako składnik. Ponieważ zaś suma jest zebraniem jedności składników (§ 4, us. 6), więc w piérwszéj sumie, prócz jedności 45-u składników 235, t. j. prócz wszystkich jedności drugiéj sumy, są jeszcze jedności 46-ego składnika 235, 47-ego składnika 235 i t. d., czyli piérwsza suma jest większa od drugiéj, a tymsamym iloczyn 235×79 jest większy od iloczynu 45×235. Czyli: *z dwu iloczynów dwuczynnikowych, mających jeden czynnik spólny, ten jest większy, którego pozostały czynnik jest większy.*

Jeżeli zaś mamy dwa iloczyny dwuczynnikowe i oba czynniki jednego iloczynu są większe od czynników drugiego iloczynu tak, iż większy czynnik piérwszego iloczynu jest większy od większego z czynników drugiego iloczynu i pozostały czynnik piérwszego iloczynu większy od pozostałego czynnika drugiego iloczynu, np. 235×479 i 375×228 (tu 479 większe od 375 i 235 większe od 228), to możemy utworzyć iloczyn pomocniczy, powstały z pomnożenia mniejszego czynnika iloczynu większych czynników przez większy czynnik iloczynu mniejszych czynników, t. j. 235×375. A wtedy, na mocy poprzedniego, iloczyn 235×479 jest większy od iloczynu 235×375, ten zaś iloczyn 235×375 jest większy od iloczynu 375×228, a więc tymsamym iloczyn 235×479 jest większy od iloczynu 375×228, t. j. *jeżeli mamy dwa iloczyny dwuczynnikowe i większy czynnik np. piérwszego iloczynu jest większy od większego z czynników drugiego iloczynu, a pozostały czynnik piérwszego iloczynu jest większy od pozostałego czynnika drugiego iloczynu, to iloczyn czynników większych jest większy od iloczynu czynników mniejszych.*

30. Jeżeli, mając wykonać np. 52401×367, chcemy zgóry wiedzieć, z ilu cyfr będzie złożony iloczyn, który otrzymamy po wykonaniu tego mnożenia, to utwórzmy dwa iloczyny dwu liczb, z których każda jest jednością z zerami, najbliższych czynników naszego iloczynu, mianowicie jeden iloczyn liczb większych, drugi zaś liczb mniejszych. Ponieważ dla liczby 52401 najbliższymi liczbami, utworzonymi przez jedność z zerami, są liczby 10000 i 100000, a dla 367-u liczby 100 i 1000, więc iloczyn większych liczb, t. j. 100000×1000, jest większy od naszego iloczynu, a iloczyn liczb mniejszych, t. j. 10000×100, jest mniejszy od naszego iloczynu:

$$\begin{array}{l} 100000\times 1000 = 100\,000\,000 \\ 52401\times 367 \\ 10000\times 100 = 1\,000\,000, \end{array}$$

a tymsamym dany iloczyn będzie miał nie więcéj cyfr*), niż iloczyn $100\,000\times 1000 = 100\,000\,000$, a nie mniéj, niż iloczyn $10\,000\times 100 =$

*) W naszym sposobie pisania liczb, jakakolwiek liczba w szeregu liczb naturalnych niéma więcéj cyfr od żadnéj z dalszych liczb tego szeregu.

$= 1\,000\,000$. Liczba 100 000 000 jest wprawdzie liczbą dziewięciocyfrową, ale najmniejszą ze wszystkich liczb dziewięciocyfrowych; więc nasz iloczyn, jako od téj liczby mniejszy, nie może mieć 9-u cyfr, ale conajwięcéj cyfr 8. A gdy znowu 1 000 000 jest najmniejszą liczbą siedmiocyfrową, więc nasz iloczyn, jako od niéj większy, nie może mieć wprawdzie mniéj niż 7 cyfr, ale może ich mieć także 7. Z tego widzimy, że o naszym iloczynie 52401×367 (liczby 5-cyfrowéj przez 3-cyfrową), nie wykonywając jeszcze mnożenia, powiedzieć możemy, że on będzie miał albo 8 cyfr, albotéż 7. — Zauważmy tu, że czynniki iloczynu miały cyfr: jeden 5, drugi 3; iloczyn zaś albo $8 = 5+3$, albo $7 = (5+3) - 1$, t. j. *iloczyn dwu liczb ma albo tyle cyfr, ile ich jest w mnożnéj i mnożniku razem, albo o jednę mniéj* [1]).

31. Jeżeli mamy przez siebie pomnożyć kilka liczb (us. 7), to należałoby piérwszą pomnożyć według wiadomych prawideł przez drugą, otrzymany iloczyn przez trzecią i t. d. Ponieważ jednak iloczyn nie zależy od porządku czynników (us. 10), więc, korzystając z tego, staramy się wmiarę wprawy, o ile można tylko, rachunek skrócić (§ 1, us. 9). Skrócenia te zależą od szczególnych przypadków, jakie dane do mnożenia czynniki przedstawiają. Możemy tu tylko parę ogólnych podać wskazówek.

Tak, dla skrócenia sobie roboty, mnożymy naprzód przez siebie czynniki największe, otrzymany iloczyn przez czynnik największy z pozostałych i t. d. Przez takie postępowanie będziemy mieli mnożenia końcowe przez małe liczby, a unikniemy mnożenia wielkiéj liczby przez wielką. Robić zaś tak możemy dlatego, że mamy prawo tak zmienić porządek czynników, aby piérwszym był największy, drugim największy z pozostałych i t. d.

Możemy także, w razie, gdy upatrzymy, że częściowy iloczyn niektórych czynników da nam liczbę dogodniejszą w mnożeniu, zastąpić go przez tę liczbę, gdyż w iloczynie wskazanym kilku czynników możemy dowolnie wybrane czynniki zastępować przez wykonane ich iloczyny (us. 10); zwykle przytym zera końcowe czynników oddzielamy i, przypisawszy je do jedności (us. 22), uważamy tak powstałą liczbę jako ostatni czynnik iloczynu. Np.

$$
\begin{aligned}
3\times8\times37\times2\times17\times40\times125\times6008\times300\times75 &= 6008\times(125\times8)\times\\
&\times(75\times4)\times(37\times3)\times(17\times3\times2)\times1000=6008\times1000\times300\times\\
&\times111\times102\times1000 = 6008\times102\times111\times3\times100000000=\\
&= 612816\times333\times100000000 = 20406772800000000.
\end{aligned}
$$

32. Gdybyśmy mieli wogóle dwa iloczyny o jednakowéj liczbie czynników, posiadające wszystkie, prócz jednego, spólne czynniki, to częściowy

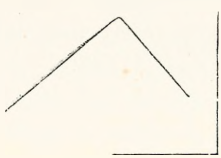
[1]) Wogóle: jeżeli liczbę cyfr mnożnéj nazwiemy m, a liczbę cyfr mnożnika nazwiemy n, to iloczyn ma cyfr albo $m+n$ albotéż $m+n-1$.

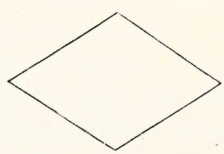
iloczyn wszystkich spólnych czynników w jednym i drugim iloczynie moglibyśmy uważać jako przedstawienie jednéj liczby (us. 10, 7) i w ten sposób sprowadzilibyśmy rzecz do przypadku rostrząsanego w ustępie 29-ym. Zatym: *z dwu iloczynów jednakowéj liczby czynników, posiadających wszystkie, prócz jednego, spólne czynniki, ten jest większy, którego ów pozostały czynnik jest większy.*

Stąd wypada, że *gdy o dwu iloczynach jednakowéj liczby czynników wiemy, że są sobie równe* (czyli, że one przedstawiają tę samę liczbę), *i gdy wiemy o wszystkich, prócz jednego, czynnikach jednego iloczynu, że są one jednocześnie czynnikami drugiego iloczynu, to i pozostały czynnik jednego iloczynu jest równy pozostałemu czynnikowi drugiego iloczynu.* Gdyby bowiém te czynniki były od siebie różne, to, według poprzedzającego, iloczyny dane nie przedstawiałyby téj saméj liczby, co się sprzeciwia temu, cośmy co do tych iloczynów tu przyjęli.

33. Figura[1]), utworzona przez cztéry linije proste równe, z których każda spotyka się tylko z dwiema z pozostałych linij i jest względem nich jednakowo nachylona, nazywa się k w a d r a t e m. Każda z tych linij prostych nazywa się b o k i e m kwadratu. Mówimy, że dwa boki kwadratu, spotykając się, tworzą k ą t p r o s t y.

Wogóle, gdy jakiekolwiek dwie linije proste, spotykając się, tworzą kąt taki, jak kąt utworzony przez dwa spotykające się boki kwadratu, to taki kąt nazywamy p r o s t y m. Mogą bowiém dwie linije proste, spotykające się, tworzyć kąt inny, n i e p r o s t y. Np. figura, którą tu mamy narysowaną, jest utworzona przez cztéry linije proste równe, ale żadna z nich, spotykając się z sąsiednią, nie tworzy kąta prostego. Chociaż więc wszystkie cztéry boki są równe, to jednak którykolwiek bok jest inaczéj nachylony względem jednego z boków sąsiednich, niż względem drugiego; dlatego ta figura nie jest kwadratem (nosi ona nazwę: romb).





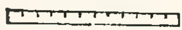
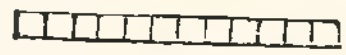
Jeżeli bok kwadratu jest długi na stopę, to mówimy, że pole tego kwadratu jest stopą kwadratową (albo krócéj, że ten kwadrat jest stopą kwadratową). Powiemy więc: s t o p a k w a d r a t o w a jestto pole kwadratu, którego bok jest długi na stopę. I podobnie: c a l k w a d r a-

---

[1]) Staram się tu podać przystępne dla początkujących wprowadzenie pojęć kwadratu, prostokąta, sześcianu i prostopadłościanu. Wrazie odpowiedniego przygotowania (i dostatecznego na to czasu), a także, rozumie się, przy powtórzeniu całego kursu, należy wprowadzić określenia, podane w tomie IV seryi III «Biblijoteki mat.-fiz.»

towy jestto pole kwadratu, którego bok ma długości cal; metr kwadratowy jestto pole kwadratu, którego bok równa się metrowi, i t. d. [1]).

Jeżeli zaś chcemy wyraźnie zaznaczyć, że mamy na myśli np. stopę, cal, metr, które możemy przedstawić długością linij, to wtedy mówimy: stopa linijowa, cal linijowy, metr linijowy i t. d. W tym znaczeniu zamiast «linijowy» używają niekiedy wyrażenia «bieżący» [2]). Gdy więc słyszymy np. «łokieć bieżący», to przez to wyrażenie rozumiéć mamy: łokieć linijowy.

34. Jeżeli bok kwadratu, który tu mamy obok narysowany, przedstawia [3]) nam stopę (linijową), to pole tego kwadratu przedstawi stopę kwadratową. Stopę (linijową) dzielimy zwykle na 12 równych części; wtedy każda z tych części nazywa się calem. Podzielmy na cale dwa przeciwległe boki tego kwadratu i odpowiadające punkty podziału połączmy z sobą linijami prostymi. Wtedy ta stopa kwadratowa rozłożoną zostanie na 12 części równych, z których każda ma postać pasa *)  szerokiego na jeden cal, a długiego na stopę, czyli na 12 cali. Ten pas możemy w podobny sposób rozłożyć na 12 równych części , z których każda □ jest kwadratem, mającym bok długi na cal, t. j. przedstawia nam cal kwadratowy; zatym w każdym takim pasie jest 12 cali kw. Widzimy więc, że możemy kwadrat, przedstawiający stopę kw., rozłożyć na 12 równych części (pasów), z których każdy ma 12 cali kw. Gdy więc jedna część (jeden pas) ma 12 cali kw., to stopa kw., jako równa 12-u takim częściom (pasom), ma cali kw. 12 razy więcéj. Więc, *aby się dowiedzieć, ile stopa kwadratowa ma cali kwadratowych, należy 12 cali kwadratowych pomnożyć przez (liczbę oderwaną) 12;* a zatym stopa kw. ma 144 cali kw.

```
  12 c. kw.
×12
  24
 12
 144 c. kw.
```

Podobnie, gdy, wiedząc, że metr (linijowy) ma 10 de-

[1]) Ogólniéj: powierzchnią, równoważną z kwadratem, którego bok jest długi na stopę, nazywamy stopą kwadratową; i t. d.

[2]) Niewłaściwie zaś jest mówić «łokieć zwyczajny», bo łokieć kwadratowy, lub sześcienny niczego nadzwyczajnego nie przedstawiają.

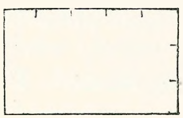
[3]) Dobrze jest przy wykładzie kreślić rysunki, o ile można, naturalnéj wielkości, posiłkując się starannie zrobionym wzorem miar. (Są w sprzedaży pręty drewniane, z zakończeniami mosiężnymi, wysokie na metr, mające na jednéj stronie podział na decymetry i t. d., na drugiéj na cale nowopolskie i t. d., na trzeciéj na cale angielskie, czyli rosyjskie, a na czwartéj na werszki.)

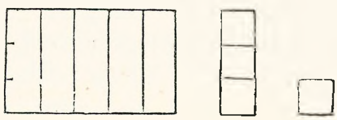
*) Powtarzając to po przejściu ustępu 35-go, można już, zamiast: ma postać pasa, mówić: jest prostokątem.

cymetrów, chcemy się dowiedzieć, ile metr kw. ma decymetrów kw., należy w taki sam sposób kwadrat, którego bok jest długi na metr, rozłożyć na 10 równych pasów, szerokich na decymetr, długich zaś na metr, czyli na 10 decymetrów, i każdy taki prostokąt w podobny sposób rozłożyć na 10 równych części, z których każda jest decymetrem kw. I znajdziemy, że, *aby się dowiedzieć, ile metr kwadratowy ma decymetrów kwadratowych, należy 10 decymetrów kwadratowych pomnożyć przez (liczbę oderwaną) 10;* a zatym metr kw. ma 100 decymetrów kw. — I t. d.

$$\begin{array}{r} 10 \text{ dm. kw.} \\ \times 10 \\ \hline 100 \text{ dm. kw.} \end{array}$$

35. Figura, utworzona przez cztéry linije proste, z których każda spotyka się tylko z dwiema z pozostałych, tworząc z nimi kąty proste, nazywa sią p r o s t o k ą t e m*). (Każdą z tych linij prostych nazywamy bokiem prostokąta.) Przypuśćmy, że ten prorostokąt ma jeden bok długi na 5 stóp, a sąsiedni długi na 3 stopy, czyli, jak zwykle mówimy, że długość tego prostokąta jest 5 stóp, a szerokość 3 stopy [1]). Aby się dowiedzieć, ilu stopom kw. równe jest pole tego prostokąta, nie będziemy do tego prostokąta przykładać kwadratu, przedstawiającego nam stopę kw., ale będziemy rozumować w sposób podobny, jak poprzednio. Mianowicie: ten prostokąt możemy rozłożyć na 5 części równych, z których każda jest prostokątem, mającym jeden bok długi na jednę stopę, a sąsiedni na 3 stopy; każdy zaś taki prostokąt (mniejszy) możemy rozłożyć na 3 części równe, z których każda jest kwadratem, mającym bok długi na stopę, czyli jest stopą kw. Widzimy więc, że dany prostokąt możemy rozłożyć na 5 prostokątów mniejszych równych, z których każdy ma trzy stopy kw.; a zatym dany prostokąt ma stóp kw. 5 razy więcéj niż jeden z tych prostokątów mniejszych, t. j. *aby się dowiedzieć, ile dany prostokąt ma stóp kwadratowych, należy 3 stopy kwadratowe pomnożyć przez (liczbę oderwaną) 5.* Dany więc prostokąt ma 15 stóp kw., t. j. pole tego prostokąta jest 15 razy większe od stopy kw. (A więc tu stopa kwadratowa służyła nam za j e d n o s t k ę do wyrażenia pola prostokąta danego; por. § 1, us. 1.)





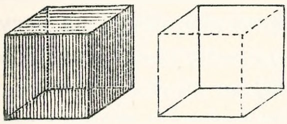
$$\begin{array}{r} 3 \text{ st. kw.} \\ \times 5 \\ \hline 15 \text{ st. kw.} \end{array}$$

36. Figura zamknięta kwadratami nazywa się s z e ś c i a n e m.

*) Kwadrat więc jest szczególnym przypadkiem prostokąta.

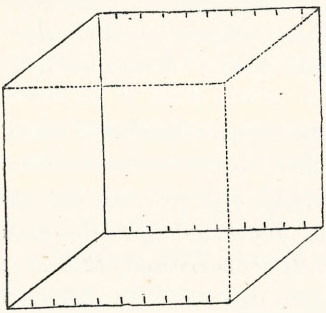
[1]) Albo: podstawa i wysokość.

Każdy z tych kwadratów nazywa się *ścianą* sześcianu; sześcian ma ścian sześć *). Liniją prostą, według której przecinają się dwie którekolwiek sąsiednie ściany sześcianu, nazywamy jego *krawędzią*. Sześcian ma 12 krawędzi. Ponieważ którykolwiek bok któregokolwiek kwadratu, stanowiącego ścianę sześcianu, jest jednocześnie bokiem kwadratu stanowiącego ścianę sąsiednią sześcianu, i t. d., więc wszystkie boki tych kwadratów, czyli wszystkie krawędzi sześcianu są sobie równe.



Jeżeli krawędź sześcianu jest długa na stopę, to mówimy, że objętość tego sześcianu jest stopą sześcienną (albo krócéj, że ten sześcian jest stopą sześcienną). Powiemy więc: *stopa sześcienna* jestto objętość [1]) sześcianu, którego krawędź jest długa na stopę. I podobnie: *cal sześcienny* jestto objętość sześcianu, którego krawędź ma długości cal; *metr sześcienny* jestto objętość sześcianu, którego krawędź równa się metrowi, i t. d.

37. Jeżeli krawędź sześcianu, który mamy tu obok narysowany [2]), przedstawia nam metr (linijowy), to objętość tego sześcianu przedstawi metr sześcienny. Metr (linijowy) ma 10 decymetrów. Podzielmy na decymetry trzy krawędzi sześcianu, będące przeciwległymi bokami dwu sąsiednich kwadratów, np. te, które są na naszym rysunku podzielone, i przez odpowiadające punkty podziału przesuńmy płaszczyzny. Wtedy ten metr sześcienny zostanie rozłożony na 10 części równych, warstw **), z których każda jest szeroka na jeden decymetr, a długa i wysoka na metr, czyli na 10 decymetrów. Tę warstwę możemy znowu w podobny sposób rozłożyć na 10 równych części, słupków ***), z których każdy ma na szero-



---

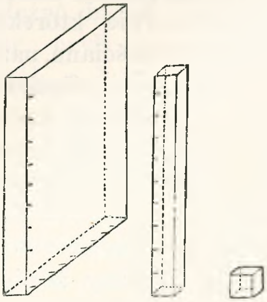
*) Nie każda jednak figura, która ma sześć ścian, jest sześcianem. (Należy uczniom pokazać jakiekolwiek sześciościany, które nie są sześcianami.)

[1]) Ogólniéj: objętość równa objętości sześcianu i t. d.

[2]) Lepiéj jest przy wykładzie używać sześcianu drewnianego, przepiłowanego na równe sześcianiki (np. na 1000, lub na 1728). Warstwy pionowe i słupki można łatwo odsuwać. Z tych sześcianików można ustawiać większe sześciany i prostopadłościany.

) *) Powtarzając to po przejściu ustępu 38-ego, można, zamiast: warstwa, słupek, mówić: prostopadłościan.

kość i długość jeden decymetr, a na wysokość 10 decymetrów. Nakoniec i ten słupek możemy w takiż sam sposób rozłożyć na 10 równych części, z których każda jest sześcianem, mającym krawędź długą na decymetr, t. j. przedstawia nam decymetr sześcienny; zatym w każdym takim słupku jest 10 decymetrów sz. Widzimy więc, że możemy sześcian, przedstawiający metr sześcienny, rozłożyć na 10 równych warstw, a każdą z tych warstw na 10 równych słupków, z których każdy ma 10 dm. sz. Gdy więc jeden słupek ma 10 decymetrów sz., to jedna warstwa, jako złożona z 10 takich słupków, ma decymetrów sz. 10 razy więcéj, a więc 10 dm. sz.×10, t. j. 100 dm. sz.



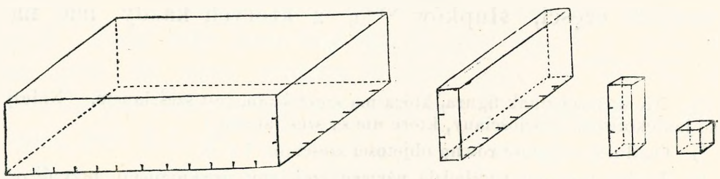
Metr zaś sz., jako równy 10 takim warstwom, ma decymetrów sz. 10 razy więcéj, a więc trzeba 100 dm. sz. × 10. Zatym, *aby się dowiedzieć, ile metr sześcienny ma decymetrów sześciennych, należy 10 decymetrów sześciennych pomnożyć przez (liczbę oderwaną) 10, a otrzymaną z tego mnożenia liczbę decymetrów sześciennych jeszcze raz pomnożyć przez (liczbę oderwaną) 10;* znajdziemy, że metr sz. ma 1000 decymetrów sz.

```
  10 dm. sz.
  10×
 100 dm. sz.
× 10
1000 dm. sz.
```

Podobnie należy postąpić, gdy, wiedząc, że stopa (linijowa) ma 12 cali, chcemy się dowiedzieć, ile stopa sześcienna ma cali sześciennych. A więc, *aby się dowiedzieć, ile stopa sześcienna ma cali sześciennych, należy 12 cali sześciennych pomnożyć przez (liczbę oderwaną) 12, a otrzymaną z tego mnożenia liczbę cali sześciennych jeszcze raz pomnożyć przez (liczbę oderwaną) 12;* zatym stopa sz. ma 1728 cali sz.—I t. d.

```
  12 c. sz.
  12
  24
 12
 144 c. sz.
  12
 288
144
1728 c. sz.
```

38. Figura zamknięta prostokątami nazywa się **prostopadłościanem**. (Każdy z tych



prostokątów jest ścianą prostopadłościanu; liniją prostą, według któréj przecinają się dwie sąsiednie ściany, nazywamy zawsze krawędzią.)

Przypuśćmy, że długość tego prostopadłościanu jest 12 decymetrów, szerokość 8 decymetrów, a wysokość 3 decymetry. Aby się dowiedzieć, ilu decymetrom sześciennym równa jest objętość tego prostopadłościanu, podobnież rozłożymy go na 12 prostopadłościanów mniejszych, równych sobie, a każdy z nich na 8 jeszcze mniejszych prostopadłościanów, równych sobie. Każdy z tych najmniejszych prostopadłościanów ma 3 decymetry sz.; a więc każdy z poprzednich prostopadłościanów ma decym. sz. 8 razy więcéj, t. j. 3 dm. sz. $\times$ 8 $=$ 24 dm. sz.; dany zaś prostopadłościan, jako złożony z 12-u prostopadłościanów, z których każdy ma objętości 24 dm. sz. ma dm. sz. 12 razy więcéj, t. j. 24 dm. sz. $\times$ 12. Zatym, *aby się dowiedzieć, ilu decymetrom sześciennym jest równa objętość danego prostopadłościanu, należy 3 decymetry sześcienne pomnożyć przez (liczbę oderwaną) 8, a otrzymaną z tego mnożenia liczbę decymetrów sześciennych pomnożyć przez (liczbę oderwaną) 12.* Dany więc prostopadłościan ma 288 dm. sz., t. j. jego objętość jest 288 razy większa od decymetra sześciennego. (A więc tu decymetr sześcienny służył nam za **jednostkę** do wymierzenia objętości prostopadłościanu danego.)

$$\begin{array}{rl} 3 & \text{dm. sz.} \\ \times 8 & \\ \hline 24 & \text{dm. sz.} \\ \times 12 & \\ \hline 48 & \\ 24 & \\ \hline 288 & \text{dm. sz.} \end{array}$$

39. Iloczyn jednakowych czynników. Jeżeli wszystkie czynniki iloczynu są tą samą liczbą, to taki iloczyn nazywamy **potęgą liczby**, będącéj powtarzającym się czynnikiem, np. $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$; — i nazywamy taki iloczyn potęgą **drugą**, **trzecią**, **czwartą** i t. d. liczby, zależnie od tego, ile razy ta liczba wchodzi w uważany iloczyn jako czynnik. Tak np. iloczyn $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ jest piątą potęgą liczby 3.

Skracając sobie pisanie takich iloczynów, umawiamy się, aby pisać jeden tylko czynnik, a liczbę oznaczającą, z ilu takich jednakowych czynników składa się nasz iloczyn, piszemy przy tym czynniku u góry z prawéj strony. Tak więc 5-ą potęgę liczby 3, t. j. iloczyn $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$, napiszemy 3^5, tak iż 3^5 i $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ przedstawiają tę samę liczbę: $3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$. Podobnie iloczyn $207 \times 207 \times 207 \times 207 = 207^4$, t. j. jest 4-ą potęgą liczby 207. Liczbę taką, jak w piérwszym przykładzie 5, a w drugim 4, oznaczającą, ile razy liczba, przy któréj ona się znajduje, zwana **podstawą potęgi** ma być wzięta jako czynnik, nazywamy **wykładnikiem potęgi**; mieliśmy tu podstawę 3 z wykładnikiem 5, oraz podstawę 207 z wykładnikiem 4.

Drugą potęgę liczby nazywamy także **kwadratem liczby**, tak $8 \times 8 = 8^2$ nazywamy albo: drugą potęgą liczby 8, albo: kwadratem liczby 8; trzecią zaś potęgę liczby nazywamy także **sześcianem liczby**; np. $5 \times 5 \times 5 = 5^3$ nazywamy albo: potęgą trzecią liczby 5, albotéż: sześcianem liczby 5. Liczby, które dadzą się wyrazić jako kwadrat lub jako sześcian liczby, nazywają niekiedy **liczbami kwadratowymi** lub odpowiednio **liczbami sześciennymi**. Tak np. liczby 64, 36, 144 są liczbami kwadratowymi, bo $64=8^2$, $36=6^2$, $144=12^2$; liczby zaś 8, 64, 343 są liczbami sześciennymi, bo $8=2^3$, $64=4^3$, $343=7^3$.

Korzystając z tego sposobu oznaczania iloczynów jednakowych czynników, możemy znacznie krócéj pisać niektóre iloczyny (us. 10); np.

$$3\times7\times7\times52\times4\times3\times31\times7\times31\times31\times7\times11=$$
$$=3\times3\times7\times7\times7\times7\times52\times4\times31\times31\times31\times11=$$
$$=3^2\times7^4\times52\times4\times31^3\times11.$$

Zauważymy tu, że liczby, przedstawione przez 1 z dwoma lub więcéj zerami (us. 22), są potęgami liczby 10:

$$100=10\times10=10^2,\ 1000=10\times10\times10=10^3,$$
$$10000=10\times10\times10\times10=10^4, \text{ i t. d.}$$

Więc np. $700\times3\times70\times70\times50\times51\times3000\times70$ możemy (us. 31) przedstawić tak: $7\times7\times7\times7\times3\times3\times5\times51\times1000000000=7^4\times3^2\times5\times51\times10^9$.

40. Jeżeli mamy pomnożyć np. 3^4 przez 3^5, to (us. 10)

$$3^4\times3^5=(3\times3\times3\times3)\times(3\times3\times3\times3\times3)=$$
$$=3\times3\times3\times3\times3\times3\times3\times3\times3=3^9=3^{4+5};$$

podobnież łatwo dowieść, że np. $3^4\times3^5\times3^2=3^{4+5+2}=3^{11}$, t. j. że *iloczyn dwu lub więcéj potęg téj saméj liczby jest także potęgą téj liczby, a jéj wykładnik jest sumą wykładników czynników.*—Ponieważ np. $3^5\times3=3^6=3^{5+1}$, więc drugi czynnik danego iloczynu, t. j. 3, możemy uważać za **potęgę piérwszą** liczby 3, gdyż ten czynnik zachowuje się w tym iloczynie tak, jakgdyby było napisane 3^1. Każdą więc liczbę możemy uważać za jéj piérwszą potęgę, więc np. $10=10^1$.

Odwrotnie (us. 10)

$$3^9=3\times3\times3\times3\times3\times3\times3\times3\times3=(3\times3\times3\times3\times3)\times(3\times3\times3\times3)=$$
$$=3^5\times3^4$$
$$3^9=3\times3\times3\times3\times3\times3\times3\times3\times3=(3\times3\times3)\times(3\times3)\times(3\times3\times3)\times3=$$
$$=3^3\times3^2\times3^3\times3^1$$

t. j. *potęgę pewnéj liczby możemy rozłożyć na czynniki, z których każdy jest potęgą téj liczby; suma wykładników czynników jest równą wykładnikowi danéj potęgi.*

41. Jakąkolwiek liczbę, np. 30568, możemy tak przedstawić (§ 4, us. 11; § 6, us. 22):

$$30568=30000+500+60+8=$$
$$=3\times10\times10\times10\times10+5\times10\times10+6\times10+8\times1,$$

czyli (us. 39, 40): $30568=3\times10^4+5\times10^2+6\times10^1+8\times1$.

Podobnie $856724=8\times10^5+5\times10^4+6\times10^3+7\times10^2+2\times10^1+4\times1$,

t. j. *dziesiątki, setki i t. d. każdéj liczby przedstawiają iloczyn liczby jednocyfrowéj przez potęgę liczby 10.* Jest to następstwem tego, że nasz systemat pisania liczb jest dziesiątkowym, t. j. ma za podstawę liczbę 10.

42. Gdybyśmy więc przy wypowiadaniu i pisaniu liczb przyjęli inną liczbę za podstawę, np. 6, to mielibyśmy *systemat szóstkowy*; podobnie moglibyśmy mieć *systematy ósemkowe, dwójkowe, dwunastkowe* i t. d. Wtedy, podobnie jak w systemacie dziesiątkowym, liczba jakakolwiek roskładałaby się na części, z których każda byłaby iloczynem liczby mniejszéj od 6-u (jak w dziesiątkowym: liczby jednocyfrowéj, t. j. mniejszéj od 10-u) przez pewną potęgę podstawy 6. Dla przedstawienia więc liczby używalibyśmy tylko cyfr: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Tak np., jeżeli się umówimy, aby przez ujęcie liczby w nawias [ ] i dodanie z prawéj strony u dołu, jako znaczka, liczby przyjętéj za podstawę, oznaczać przedstawienie liczby w innym, niż dziesiątkowy, systemacie, to

$$[250413]_6 = 2\times 6^5 + 5\times 6^4 + 4\times 6^2 + 1\times 6^1 + 3\times 1;$$
$$[67245]_8 = 6\times 8^4 + 7\times 8^3 + 2\times 8^2 + 4\times 8^1 + 5\times 1;$$
$$[12302]_5 = 1\times 5^4 + 2\times 5^3 + 3\times 5^2 + 2\times 1;$$
$$[1011011]_2 = 1\times 2^6 + 1\times 2^4 + 1\times 2^3 + 1\times 2^1 + 1\times 1.$$

Gdybyśmy przyjęli za podstawę liczbę większą od 10, np. liczbę 12, to wypadłoby mieć oddzielne (jednocyfrowe) znaki dla wszystkich liczb mniejszych od 12, czyli wprowadzić cyfry na oznaczenie liczb dziesięć i jedenaście. Jeżeli np. dziesięć oznaczymy cyfrą a, zaś jedenaście cyfrą b, to np.

$$[49a3b5]_{12} = 4\times 12^5 + 9\times 12^4 + a\times 12^3 + 3\times 12^2 + b\times 12^1 + 5.$$

43. Jeżeli chcemy *liczbę, napisaną w innym, niż dziesiątkowy, systemacie, przedstawić w systemacie dziesiątkowym* [1]), to należy ją w powyższy (us. 42) sposób rozłożyć na części, wynaléść iloczyny częściowe i następnie wziąć sumę tych iloczynów, która przedstawi nam daną liczbę, napisaną w systemacie dziesiątkowym. Tak więc:

$$[250413]_6 = 2\times 7776 + 5\times 1296 + 4\times 36 + 6 + 3 = 22185;$$
$$[67245]_8 = 2835;\quad [12302]_5 = 952;\quad [1011011]_2 = 91;$$
$$[49a3b5]_{12} = 4\times 12^5 + 9\times 12^4 + 10\times 12^3 + 3\times 12^2 + 11\times 12 + 5 = 1199801.$$

(Zadania arytmetyczne. § 4 i 5.)

---

§ 7. DZIELENIE.

1. Podobnie jak, mając sumę dwu składników i jeden jéj składnik, mogliśmy wynaléść drugi składnik téj sumy (§ 5, us. 1), — możemy mając iloczyn dwu czynników i jeden jego czynnik, wynaléść drugi czynnik tego iloczynu. Tak np., jeżeli wiemy, że z pomnożenia przez siebie dwu czynników, z których jeden był 3, otrzymaliśmy iloczyn 12, to możemy odszukać drugi z czynników tego iloczynu.

Wtedy, kiedyśmy jeszcze odpowiedniéj wprawy nie posiadali, zadanie to rozwiązywaliśmy, szukając stopniowo liczby takiéj, iżby iloczyn jéj

1) Zadanie odwrotne w § 7, us. 29.

i czynnika 3 był 12. Mówiliśmy więc: *raz* 3 jest 3 (zamało), *2* razy 3 jest 6 (mało), *3* razy 3 jest 9 (mało), *4* razy 3 jest (właśnie) 12; zatym: szukana liczba jest *4*.

Postępowanie, zapomocą którego, mając iloczyn dwu czynników i jeden z tych czynników, wynajdujemy drugi czynnik tego iloczynu, przedstawia działanie, zwane dzieleniem. Możemy więc powiedzieć:

Zapomocą dzielenia, mając iloczyn dwu czynników i jeden z tych czynników, wynajdujemy czynnik drugi.

2. Z powyższego przykładu widzimy, że dzielenie polega na dobiéraniu różnych liczb dotąd, dopóki nie natrafimy na taką, iżby iloczyn jéj i czynnika wiadomego był właśnie drugą liczbą daną, oraz, że postępowanie to jest właściwie próbowaniem. W tym próbowaniu zaś wydaje się najpewniejszym brać po kolei liczby 1, 2, 3, 4 i t. d., aż do wynalezienia liczby szukanéj.

Gdy mamy liczbę jednocyfrową, lub dwucyfrową podzielić przez jednocyfrową, to znakomitym jest dla nas ułatwieniem należyte przyswojenie sobie tabliczki mnożenia (§ 6, us. 4). Jeżeli bowiém dobrze pamiętamy iloczyny liczb jednocyfrowych, to np., mając iloczyn dwu czynników, 42, i jeden jego czynnik 6, dla odnalezienia czynnika drugiego nie będziemy próbować liczb 1, 2, 3 i t. d., ale odrazu powiemy: 7, bo $6\times7=42$.

Jak zaś to odszukiwanie drugiego czynnika sobie ułatwić, gdy dane są inne, większe liczby, — mówić będziemy późniéj.

3. Dany iloczyn dwu czynników nazywa się w dzieleniu dzielną, czynnik wiadomy nazywa się dzielnikiem, a czynnik szukany ilorazem. Mając to na względzie i używając powyższych nazw dla liczb, wchodzących do dzielenia, możemy to, cośmy w ustępie 1-ym o dzieleniu powiedzieli, wysłowić w ten sposób:

Dzielenie jestto działanie, zapomocą którego, mając dwie liczby: dzielną i dzielnik, odnajdujemy liczbę, zwaną ilorazem, taką, iżby iloczyn dzielnika i ilorazu przedstawił dzielną.

W zadaniu: podzielić 12 przez 3, liczba 12 jest dzielną, a 3 dzielnikiem; otrzymana liczba 4 jest ilorazem, bo iloczyn 3-ch i 4-ch jest 12. Jeżeli wiemy, że liczba 3 jest tu mnożną (§ 6, us. 5, 2), to zamiast mówić: bo iloczyn 3-ch i 4-ch jest 12, powiemy: bo $3\times4=12$; jeżeli zaś liczba 3 jest mnożnikiem, powiemy: bo $4\times3=12$. Mamy więc[1]) albo:

$$\textit{dzielnik}\times\textit{iloraz}=\textit{dzielnéj},$$

albo:

$$\textit{iloraz}\times\textit{dzielnik}=\textit{dzielnéj}.$$

Uwaga. Niekiedy idzie nam tylko o liczebną wartość ilorazu, a jest dla nas rzeczą obojętną, czy on w mnożeniu byłby mnożnikiem, czy-

[1]) Ogólnie: iloczyn dzielnika i ilorazu równa się dzielnej.

też mnożną (a tymsamym, czy dzielnik ma charakter mnożnéj, czy mnożnika); wtedy iloraz i dzielnik uważamy wogóle za czynniki (§ 6, us. 7) dzielnéj (jako ich iloczynu) i wtedy wszystko jest jedno, w jakim porządku (§ 6, us. 9) te czynniki w powyższym iloczynie piszemy.

4. Dla oznaczenia, że mamy dwie liczby przez siebie podzielić, piszemy naprzód dzielną, a po niéj dzielnik, stawiając między nimi znak: Tak więc np. 12:3 czytamy 12 podzielone przez 3. I napiszemy

$$12:3=4.$$

Ponieważ wyrażenie 12:3 przedstawia liczbę 4, iloraz, więc możemy je także nazwać ilorazem, t. j. *wskazane dzielenie nazywamy często ilorazem* liczb, w to wyrażenie wchodzących[1]).

5. Zastanawiając się nad tym, cośmy powiedzieli w ustępach 1-ym i 3-cim, widzimy, że dzielenie jest związane z mnożeniem tak, iż z liczb wchodzących do mnożenia np. $3\times4=12$, możemy ułożyć dwa dzielenia $12:3=4$ i $12:4=3$. Zestawiając to ze sobą:

$$\begin{aligned} 3\times4&=12, \\ 12:3&=4, \\ 12:4&=3, \end{aligned}$$

zauważyć możemy, że ta liczba, któréj szukaliśmy w mnożeniu, jest daną w dzieleniu, i odwrotnie, liczba szukana w dzieleniu jest daną w mnożeniu. Możemy więc powiedzieć, że *dzielenie jest działaniem odwrotnym mnożeniu dwu*[2]) *czynników*[3]).

6. Ponieważ w mnożeniu różny jest charakter mnożnéj i mnożnika (§ 6, us. 5) — mnożna jest składnikiem, a mnożnik wskazuje na działanie, t. j. oznacza, ile razy mnożna ma być wzięta jako składnik — więc w dzieleniu dzielnik, jako wogóle jeden z dwu czynników iloczynu, odpowiadać może albo mnożnéj, albotéż mnożnikowi, co zasługuje na bliższe rospatrzenie.

Jeżeli dzielnik odpowiada mnożnéj (składnikowi), to szukamy ilorazu, odpowiadającego mnożnikowi, który nam wskaże, ile razy dzielnik należy wziąć jako składnik, aby otrzymać dzielną. Innymi słowy: tu iloraz wskaże nam, ile razy dzielnik mieści się w dzielnéj.

Jeżeli zaś dzielnik odpowiada mnożnikowi, to szukamy ilorazu odpowiadającego mnożnéj, t. j. chcemy znaléść liczbę, którą biorąc jako składnik tyle razy, ile nam wskazuje dzielnik, otrzymamy dzielną. Czyli, mamy wynaléść liczbę, która byłaby częścią dzielnéj taką, że biorąc tych części tyle, ile jest jedności w dzielniku, miéć będziemy dzielną. Idzie więc

---

[1]) Częściej w innéj nieco postaci przedstawiamy wskazane dzielenie (por. § 17, us. 5).

[2]) Na pytanie: dlaczego niéma działania odwrotnego mnożeniu trzech lub więcéj czynników? mamy odpowiedź: zasadniczym jest tylko mnożenie dwu (§ 6, us. 7) czynników. (Por. § 5, us. 7.)

[3]) Por. us. 9.

nam tu o to, aby dzielną rozłożyć na tyle równych części, ile jest jedności w dzielniku, i przez to oznaczyć jednę tąką część.

Możemy więc powiedzieć, że mamy dwa przypadki w dzieleniu:

Jeżeli dzielnik odpowiada mnożnéj, to idzie nam o to, aby się dowiedzieć, ile razy dzielnik mieści się w dzielnéj. (W tym przypadku: dzielnik $\times$ iloraz $=$ dzielnéj.)

Jeżeli dzielnik odpowiada mnożnikowi, to idzie nam o to, aby rozłożyć dzielną na tyle równych części, ile jest jedności w dzielniku, i oznaczyć przez to jednę taką część. (W tym przypadku: iloraz $\times$ dzielnik $=$ mnożnéj.)

Widzimy więc, że istnieją dwa wzajem się wykluczające przypadki w działaniu odwrotnym mnożeniu[1]), tak, że gdy mamy dzielenie, to zadanie, które nas do tego dzielenia doprowadziło, samo nam wyznacza, jaki mamy przypadek przed sobą.

Jeżeli jednak jest ogólnie powiedziane tylko: podzielić np. 12 przez 3, to tu nie wiemy, czy w mnożeniu (us. 3) dwu czynników: dzielnika 3 i szukanego ilorazu, mamy dzielnik 3 uważać za mnożną, czyteż za mnożnik. Mając więc $12:3=4$, powiemy ogólnie: z podzielenia 12-u przez 3 otrzymujemy 4, a na szczegółowsze pytanie: co ta liczba 4 oznacza? możemy równie dobrze odpowiedzieć: iloraz 4 wskazuje nam, iż w dzielnéj 12 dzielnik 3 mieści się 4 razy, jakotéż: iloraz 4 wskazuje nam, że, roskładając dzielną 12 na 3 równe części, jako jednę taką część otrzymujemy 4 (albo innymi słowy: że 3-ą częścią 12-u jest 4).

Czy jednak dzielnik odpowiada mnożnéj, czytéż mnożnikowi, to liczba (oderwana), którą otrzymujemy w ilorazie, jest ta sama w obu przypadkach — znaczenie jéj tylko bywa różne, ze względu na to, o co nam w tym dzieleniu idzie.

7. Widoczniéj się to jeszcze przedstawi, gdy weźmiemy zadanie na działanie odwrotne mnożeniu liczb mianowanych (§ 6, us. 6). Tak np., względem zadania:

Pewna osoba kupiła 4 łokcie sukna, płacąc za każdy łokieć po złotych 6; wiele dała za kupione sukno?

$$6 \text{ zł.} \times 4 = 24 \text{ zł.}$$

Odp. Za kupione sukno dała 24 złote.,

mogą być dwa zadania odwrotne:

a. Pewna osoba za kupione sukno dała 24 złote, płacąc za każdy łokieć po złotych 6; ile kupiła łokci?

Dla znalezienia odpowiedzi, rozumować będziemy w ten sposób. Jeżeli za każdy łokieć ta osoba płaciła zł. 6, a za wszystko sukno

---

[1]) W działaniu odwrotnym dodawaniu, t. j. w odejmowaniu jest tylko jeden przypadek, bo w dodawaniu skłądniki nie mają różnego znaczenia, gdy tymczasem w mnożeniu mnożnik ma znaczenie odmienne od mnożnéj.

zapłaciła 24 zł., to kupiła tyle łokci, ile razy 6 zł. mieści się w 24 zł.; 24 zł. : 6 zł. = 4; znaleźliśmy więc, że 6 zł. mieści się w 24 zł. razy 4; że zaś powiedzieliśmy, iż ta osoba kupiła «tyle łokci, ile razy 6 zł. mieści się w 24 zł.», więc łokci było także 4:

24 zł : 6 zł. = 4; 4 łok.

Odp. Kupiła 4 łokcie.

b. Pewna osoba za 4 łokcie kupionego sukna dała 24 złote; po ile złotych zapłaciła za każdy łokieć sukna?

Tu rozumować wypadnie w ten sposób. Ponieważ za 4 łok. sukna ta osoba zapłaciła 24 zł., to za jeden (czyli: za każdy) łokieć sukna zapłaciła 4-ą część 24-ch zł.; trzeba więc 24 zł. rozłożyć na 4 równe części i tymsamym dowiedzieć się, jaką jest jedna taka część; 24 zł. : 4 = 6 zł.; 4-a więc część 24 zł. jest 6 zł.; więc za łokieć sukna zapłaciła 6 zł.

24 zł. : 4 = 6 zł.

Odp. Za każdy łokieć sukna płaciła po 6 złotych.

Przyglądając się uważnie powyższemu zadaniu na mnożenie i dwu, wyprowadzonym z niego, zadaniom na dzielenie liczb mianowanych prostych, widzimy, że w zadaniu a. dzielnik 6 zł. odpowiada mnożnéj, a przeto jest liczbą mianowaną, wyrażoną przy pomocy téj saméj jednostki, co dzielna (§ 6, us. 6); wtedy iloraz, jako odpowiadający mnożnikowi, jest liczbą oderwaną. W zadaniu zaś b., odwrotnie: dzielnik jest liczbą oderwaną, a więc iloraz jest liczbą mianowaną, wyrażoną przy pomocy téj saméj jednostki, co dzielna. Możemy więc o tych dwu przypadkach w dzieleniu liczb mianowanych*) powiedzieć:

Jeżeli dzielnik jest mianowany, to jest on wyrażony przy pomocy téj saméj jednostki, co dzielna; w tym przypadku dzielenia idzie nam o to, aby się dowiedzieć, ile razy dzielnik mieści się w dzielnéj. Na to właśnie wskazuje iloraz, który jest liczbą oderwaną i, stosownie do warunków zadania, może odpowiadać liczbie mianowanéj, jak np., w zadaniu a. otrzymany iloraz 4 (liczba oderwana) odpowiadał liczbie mianowanéj: 4-m łokciom.

Jeżeli dzielna jest liczbą mianowaną, a dzielnik oderwaną, to w tym przypadku dzielenia idzie nam o to, aby rozłożyć dzielną na tyle równych części, ile jest jedności w dzielniku, i oznaczyć przez to jednę taką część. Tę właśnie część wyznacza nam iloraz, który jest liczbą mianowaną, wyrażoną przy pomocy téj saméj jednostki, co dzielna.

Zauważymy tu jednak, że w jakichkolwiek jednostkach są wyrażone liczby, dane do podzielenia, byle liczby oderwane, zachodzące w tych liczbach mianowanych (§ 1, us. 10), były te same, np.

*) Dzielna w dzieleniu liczb mianowanych, jako odpowiadająca iloczynowi (§ 6, us. 6), jest zawsze mianowana.

24 zł. : 6 = 4 zł.,
24 zł. : 6 zł. = 4,
24 łok. : 6 łok. = 4,

zawsze liczba (oderwana), otrzymywana w ilorazie, jest ta sama, jak to z określenia dzielenia wypada. Stosownie zaś do tego, czy po niéj ma być postawione miano jednostki, czytéż nie, nabiéra ona znaczenia, odpowiadającego jednemu lub drugiemu przypadkowi dzielenia.

8. W tym przypadku dzielenia, gdy idzie nam o to, aby się dowiedziéć, ile razy dzielnik mieści się w dzielnéj [1]) (t. j. kiedy dzielnik odpowiada mnożnéj), możemy także powiedziéć, że idzie nam o to, aby się dowiedziéć, *ile razy dzielna jest większa od dzielnika* *), czyli: chcemy tu *dzielnikiem wymierzyć dzielną* (§ 1, us. 1). — A ponieważ w mnożeniu (§ 6, us. 2), powiększając mnożną (którą tu przedstawia dzielnik) pewną liczbę razy, otrzymujemy iloczyn (t. j. dzielną), więc możemy powiedziéć, że (odwrotnie) w tym przypadku dowiadujemy się, *ile razy trzeba zmniejszyć dzielną, aby z niéj otrzymać dzielnik.*

W przypadku zaś, gdy idzie nam o to, aby dzielną rozłożyć na tyle równych części, ile jedności jest w dzielniku i oznaczyć jednę taką część (t. j. gdy dzielnik odpowiada mnożnikowi), chcemy właśnie znaléść tę liczbę (mnożną — iloraz), którą powiększając (§ 6, us. 2) tyle razy, ile jedności jest w dzielniku, otrzymamy dzielną, a więc (odwrotnie), idzie nam tu o to, aby *otrzymać liczbę tyle razy od dzielnéj mniejszą, ile jest jedności w dzielniku*, czyli innymi słowy, aby *dzielną zmniejszyć tyle razy, ile jest jedności w dzielniku* **).

---

[1]) Niektórzy ten przypadek takdalece wyróżniają, iż rozważają osobne (?) działanie «mieszczenie się», albo «mierzenie», i nawet obmyślają oddzielny na nie znak. Nacisk jednak taki, którego nawet nie można ściśle przeprowadzić w dalszych częściach arytmetyki, jest przesadą, której być nie powinno przy nauczaniu poważnym. Tymwięcéj, że wtedy często uwalniałoby się ucznia od należytego rozważenia warunków zadania w celu zrozumienia, który przypadek dzielenia ma on przed sobą, gdyż sam widok znaku naprowadzałby go mechanicznie na formułowanie odpowiedzi. Z téj kwestyi jasno już sobie zdawano u nas sprawę przed stu laty:

«Trzeba także wytłomaczyć dzieciom, że... w dzieleniu dwa cele sobie założyć można, bo albo chcemy wiedziéć, ile razy jedna liczba w drugiéj zawiéra się, co wtenczas ma miejsce, gdy tak liczba dzieląca, jako i podzielna, wielość jednego gatunku rzeczy oznacza: naprzykład, gdy i ta i tamta znaczy czerwone złote, albo złote, i t. d., i wtenczas wieloraz będzie wyrażał liczbę samę przez się, to jest oznaczającą tylko, że tyle, a nie więcéj razy, inne dwie liczby jedna w drugiéj się znajdowała; albotéż liczby danéj do podzielenia szukamy części jakiéj, naprzykład połowy, trzeciej części, czwartéj i t. d., i natenczas liczba dzieląca żadnego gatunku rzeczy nie znaczy, albo przynajmniéj tak jest uważana; a zaś wieloraz wyraża liczbę znaczącą wielość tego samego rzeczy gatunku, który i liczba podzielna wyrażała... Tę różnicę przy każdym dopiéro przykładzie pokazywać mają Nauczyciele uczniom swoim, doświadczając ich piérwéj przez pytanie, czyli wieloraz w podanym im przykładzie, będzie znaczył jaki gatunek rzeczy, czyli nie?» (*Arytm. dla sz. nar.*, str. 49).

*) Tak np. 24 zł. : 6 zł. = 4 możemy przeczytać: 24 złote jest większe od 6-u złotych 4 razy, albo: wymierzając 24 złote 6-u złotymi, otrzymuję liczbę 4.

**) Tak np. 24 zł. : 4 = 6 zł. możemy przeczytać: zmniejszając 24 złote 4 razy, otrzymuję 6 złotych.

9. Oczywiście, że gdy pewną liczbę wypada nam przez jakąś liczbę pomnożyć i przez tę samę liczbę podzielić, np. 12 pomnożyć przez 3 i podzielić przez 3, to liczba dana nie zmieni się: tyle bowiém razy powiększamy (§ 6, us. 2) liczbę 12, mnożąc ją przez 3, ile razy ją zmniejszamy (us. 8), dzieląc ją przez 3, czyli dana liczba 12 pozostanie bez zmiany. Zwykle wtedy mówimy *pomnożenie i podzielenie przez tę samę liczbę, jako działania wprost odwrotne sobie, wzajemnie się znoszą.* To dzielenie, o którym tu jest mowa, winno być istotnie wprost odwrotne mnożeniu przez ów mnożnik, t. j. mowa tu jest o tym przypadku dzielenia, kiedy dzielnik odpowiada mnożnikowi. W działaniach więc na liczbach mianowanych wzajemnie się znoszą: mnożnik (liczba oderwana, § 6, us. 6) i dzielnik oderwany (us. 7). Np. (24 zł. $\times$ 6) : 6 $=$ 24 zł. i podobnie (24 zł. : 6) $\times$ 6 $=$ 24 zł.— Gdybyśmy jednak mieli np. (24 zł. : 6 zł.) $\times$ 6, to tu liczbę wypadłą z podzielenia 24 zł. przez 6 zł., t. j. (us. 7) liczbę oderwaną 4, mamy pomnożyć przez 6 i otrzymamy (liczbę oderwaną) 24, a nie liczbę daną: 24 zł. Jest zatym (24 zł. : 6 zł) $\times$ 6 $=$ 24. (Zawsze jednak liczba oderwana pozostaje bez zmiany.)

10. Weźmy teraz zadanie następujące: Pewna osoba kupiła 4 łokcie sukna; sukiennik chciał za nie (po 6 złotych za łokieć, t. j.) 24 złote, po targu jednak oddał to sukno za 22 złote; po ile złotych ta osoba płaciła za każdy 4 łokieć sukna? — Gdyby płaciła po 6 zł., toby zapłaciła za 4 łokcie 6 zł. $\times$ 4 $=$ 24 zł., co jest więcéj niż 22 zł.; płaciła więc za łokieć mniéj niż 6 złotych. Gdyby płaciła po 5 zł., toby zapłaciła za 4 łokcie 5 zł. $\times$ 4 $=$ 20 zł., co jest mniéj niż 22 zł.; płaciła więc za łokieć więcéj niż 5 złotych. Ponieważ płaciła mniéj niż 6, a więcéj niż 5 złotych, zatym ilość złotych, które płaciła za łokieć sukna wyraża się liczbą pośrednią między 5 i 6. W każdym jednak razie ta osoba zapłaciła za łokieć sukna 5 złotych i prócz tego kwotę mniejszą od jednego złotego. — Ponieważ za wszystko sukno, t. j. za 4 łokcie, zapłaciła 22 złote, a rachując łokieć po 5 zł. należałoby zapłacić 20 złotych, więc aby wiedzieć dokładnie, ile zapłaciła za łokieć, trzebaby jeszcze pozostałe 22 zł. — 20 zł. $=$ 2 zł. podzielić przez 4. Mielibyśmy tutaj dzielenie liczby 2 przez 4, t. j. liczby mniejszéj przez większą (por. us. 8), czym szczegółowo późniéj się zajmiemy [1]). Teraz zaś będziemy tylko zaznaczać, że pozostała nam z dzielnéj liczba mniejsza od liczby będącéj w dzielniku, którą należałoby jeszcze podzielić przez dzielnik. Powiemy więc w odpowiedzi na pytanie postawione w naszym zadaniu, że ta osoba za łokieć sukna płaciła 5 złotych i jeszcze to, co wypadnie z podzielenia 2-u złotych przez 4.

---

[1]) Por. § 16.

Gdybyśmy zaś mieli zadanie: Pewna osoba zapłaciła za sukno 22 złote, płacąc za każdy łokieć 4 złote; ile kupiła łokci? — to należałoby rozumować w ten sposób. Kupiła tyle łokci sukna, ile razy 4 złote mieści się w 22 złotych; a że 4 zł. mieści się w 22 złotych więcéj niż 5, a mniéj niż 6 razy, a nadto gdyby kupiła tylko 5 łokci, to za nie zapłaciłaby 4 zł. $\times$ 5 $=$ 20 zł., więc kupiła 5 łokci i prócz tego mniéj niż jeden łokieć sukna, za któreto sukno należy się 22 zł. — 20 zł. $=$ 2 zł.

11. Weźmy ogólne zadanie: podzielić 22 przez 4. Ilorazem nie jest liczba 5, bo $4 \times 5 = 20$, mniéj niż dzielna; nie jest nim również 6, bo $4 \times 6 = 24$, więcéj niż dzielna. Iloraz więc jest większy od 5, a mniejszy od 6, czyli jest liczbą pośrednią między 5 i 6, a tymsamym liczbą nienależącą do szeregu liczb naturalnych (§ 1, us. 6). Ilorazem więc jest tu liczba 5 wraz z tym, co wypadnie, gdy $22 - (4 \times 5) = 2$ podzielimy przez dzielnik 4.

Taką liczbę, jak powyżéj 5, posiadającą tę cechę, że iloczyn jéj i dzielnika jest mniejszy od dzielnéj, a jednocześnie iloczyn téj liczby, powiększonéj o jedność, i dzielnika, byłby już większy od dzielnéj, nazywamy i l o r a z e m n i e z u p e ł n y m [1]. Liczbę zaś, pozostającą z dzielnéj po odjęciu od niéj iloczynu dzielnika i ilorazu niezupełnego, a więc mniejszą zawsze od dzielnika, którą należałoby jeszcze podzielić przez dzielnik [2]), t. j. taką liczbę, jak powyżéj 2, nazywamy r e s z t ą d z i e l e n i a, albo krócéj: r e s z t ą. (Samo się przez się rozumie — jak to zresztą widzieliśmy w przykładach ustępu poprzedzającego — że, *jeżeli dzielna jest liczbą mianowaną, to i reszta jest liczbą mianowaną, wyrażoną przy pomocy téj saméj jednostki, co dzielna.)*

W powyższym przykładzie mieliśmy $22 - 4 \times 5 = 2$, czyli (§ 5, us. 3) $4 \times 5 + 2 = 22$, t. j.

dzielnik $\times$ *iloraz niezupełny* $+$ *reszta* $=$ *dzielnéj.*

Jeżeli zaś z dzielenia nie otrzymujemy reszty, np. przy dzieleniu 12-u przez 3, to często dla dobitności wyrażamy się, że resztą dzielenia jest zero, albo że po podzieleniu 12-u przez 3 otrzymujemy w reszcie zero, lub jeszcze, że 12 d z i e l i s i ę b e z r e s z t y przez 3. — Jeżeli reszta dzielenia jest zero, to iloczyn dzielnika i ilorazu $=$ dzielnéj (us. 3) i dlatego możnaby wtedy otrzymany iloraz nazywać ilorazem zupełnym.

---

[1]) Quotient incomplet (Legendre).

[2]) «Można także na początku zaraz tego Rozdziału (jak tu §-u) przygotowywać dzieci do pojęcia łatwiejszego nauki o liczbach łamanych, albo ułomkach... nic jednak o tych ułomkach jeszcze im nie wspominając, ale powiadając tylko, że podzielić liczbę jaką przez 2 jestto wziąć jéj połowę, podzielić ją przez 3 jestto wziąć jéj trzecią część i t. d. i że trafia się często dzielić liczby jedne przez drugie, które kilka lub więcéj razy w tamtych się zawierają, ale jeszcze pozostaje od nich jaka liczba mniejsza od téj, którąby ją dzielić powinna. Np. 2 znajduje się w 5 razy 2 i jeszcze zostaje 1 do podzielenia przez 2, liczbę większą.» (*Arytm. dla sz. nar.*, str. 46.)

Jednak iloraz zupełny nazywamy wprost: ilorazem, tak iż wtedy tylko mamy na uwadze iloraz niezupełny, gdy to wyraźnie wypowiadamy.

Jeżeli dana liczba dzieli się bez reszty przez jakąś liczbę, to mówimy, że dana liczba jest przez owę liczbę podzielna. Tak np., liczba 12 jest podzielna przez 3, jest podzielna przez 4; liczba 24 jest podzielna przez 6, przez 8, przez 12, i t. d. — Wrazie, gdy z podzielenia liczby danéj przez jakąś liczbę otrzymujemy resztę (różną od zera), to mówimy, że dana liczba nie jest podzielna, albo: jest niepodzielna przez tę liczbę. Np. liczba 22 jest niepodzielna przez 4; liczba 12 jest niepodzielna ani przez 8, ani przez 5, i t. d.

Jakąkolwiek liczbę, np. 14, zawsze możemy przedstawić (§ 6, us. 3, 4) jako 14×1, tak iż $14=14\times1$, a tymsamym (us. 5, 6) $14:14=1$; $14:1=14$. Podobnie, gdy mamy np. liczbę 5, to $5:5=1$ i $5:1=5$, i t. d. Czyli: *każda liczba jest podzielną przez samę siebie i przez jedność.*

12. Widzieliśmy, że dodawanie (§ 4, us: 2, 6), odejmowanie (§ 5, us. 7) i mnożenie (§ 6, us. 3) liczb z szeregu liczb naturalnych doprowadzało nas zawsze do liczby tego szeregu, gdy tymczasem dzieląc niekiedy przez siebie (jak w poprzednim ustępie $22:4$) dwie liczby z szeregu liczb naturalnych, otrzymujemy liczbę, do tego szeregu nie należącą. Skąd to pochodzi?

Ponieważ dodawanie jest skróconym liczeniem (§ 4, us. 2), a mnożenie, jako skrócone dodawanie jednakowych składników (§ 6, us. 3), jest tymsamym także skróconym liczeniem, więc oba te działania, wykonywane na liczbach z szeregu liczb naturalnych, bezwarunkowo zawsze doprowadzą nas do liczby, do tego szeregu należącéj, gdyż w liczeniu (§ 1, us. 7) z nimi tylko mamy do czynienia.

W odejmowaniu, działaniu odwrotnym, przy dowolnie wziętéj liczbie z szeregu liczb naturalnych, jako odjemnéj, odjemnikiem mogła być tylko liczba mniejsza (§ 5, us. 4), t. j. znajdująca się w tym szeregu przed odjemną.

Drugie działanie odwrotne, dzielenie, jako działanie odwrotne mnożeniu, t. j. dodawaniu jednakowych składników, wtedy tylko przy dowolnie wybranéj liczbie z szeregu liczb naturalnych, jako dzielniku, doprowadzić może do ilorazu należącego do tegoż szeregu, jeżeli dzielna zajmuje w tym szeregu miejsce albo dwa, albo trzy, albo cztéry i t. d. (wogóle całkowitą liczbę) razy dalsze (licząc od 1), niż dzielnik.

Wogóle więc, iloraz liczb z szeregu liczb naturalnych niezawsze jest liczbą tego szeregu.

13. W § 6-ym ustępie 12-ym widzieliśmy, że

a. *Aby iloczyn pomnożyć przez pewną liczbę, można przez tę liczbę pomnożyć którykolwiek z jego czynników.*

b. *Jeżeli którykolwiek czynnik iloczynu mnożymy przez pewną liczbę, to tymsamym ten iloczyn przez tę liczbę mnożymy.*

Jeżeli, mając np. iloczyn $5\times3\times4\times2\times6$, chcemy go podzielić przez jeden z jego czynników, np. przez 4, to zważmy, że (§ 6, us. 10)

$$5\times3\times4\times2\times6=5\times3\times2\times6\times4=(5\times3\times2\times6)\times4.$$

W ostatnim iloczynie, który możemy uważać jako iloczyn dwu czynników, jednego $5\times3\times2\times6$, a drugiego 4, możemy czynnik 4 przyjąć jako dzielnik, gdy dzielną przedstawiać będzie ten iloczyn dwu czynników (us. 1, 2). Wtedy ilorazem będzie pozostały czynnik, t. j. liczba przedstawiona (§ 6, us. 7) przez iloczyn $5\times3\times2\times6$, a więc

$$(5\times3\times4\times2\times6):4=5\times3\times2\times6,$$

t. j. *aby iloczyn podzielić przez jeden z jego czynników, należy wziąć iloczyn czynników pozostałych,* czyli — należy ów czynnik opuścić.

Opierając się na tym, jeżeli mamy np. iloczyn $5\times12\times7$ podzielić przez liczbę np. 3, przez którą jest podzielny czynnik 12 tego iloczynu, mamy

$$(5\times12\times7):3=(5\times3\times4\times7):3=5\times4\times7=5\times(12:3)\times7,$$ t. j.

c. *Aby iloczyn podzielić przez pewną liczbę, przez którą jeden z jego czynników jest podzielny, można ów czynnik przez tę liczbę podzielić.* I nawzajem:

d. *Jeżeli czynnik iloczynu podzielimy przez liczbę (przez którą ten czynnik jest podzielny), to skutkiem tego iloczyn przez tę liczbę będzie podzielony,* bo jeżeli np. mamy iloczyn $5\times12\times7$, to po pomnożeniu iloczynu $5\times(12:3)\times7=5\times4\times7$ przez 3, na mocy własności a., mieć będziemy

$$(5\times4\times7)\times3=5\times12\times7,$$

a tu możemy uważać (us. 1, 2) iloczyn $5\times4\times7=5\times(12:3)\times7$ jako iloraz w dzieleniu, w którym dzielną jest liczba $5\times12\times7$, a dzielnikiem 3, t. j.

$$5\times(12:3)\times7=(5\times12\times7):3.$$

Gdybyśmy zamiast mówić «podzielić przez pewną liczbę», mówili «zmniejszyć pewną liczbę razy» (us. 8), to moglibyśmy inaczéj wysłowić powyższe własności.

Z zestawienia ze sobą własności a. i c., albo też własności b. i d., wypada, że iloczyn (t. j. liczba przezeń przedstawiona) się nie zmienia, jeżeli jeden jego czynnik pomnożymy przez pewną liczbę, a inny przez tę samę liczbę podzielimy, albowiém wtedy iloczyn zostaje jednocześnie pomnożony i podzielony przez tęż samę liczbę, a więc (us. 9) zmianie nie ulega. Zatym

e. *Jeżeli jeden czynnik iloczynu mnożymy przez pewną liczbę, a inny jego czynnik jednocześnie przez tęż samę liczbę dzielimy* [1], *to iloczyn się nie zmienia.*

14. Przyjmijmy na uwagę dzielenie w przypadku, gdy reszta dzielenia jest różną od zera (us. 11). Podzielmy np. 22 przez 4; w ilorazie niezupełnym otrzymamy 5 a w reszcie 2, i

$$22=4\times5+2,$$

$$\text{dzielna}=\text{dzielnik}\times\text{iloraz niezupełny}+\text{reszta (us. 11).}$$

W drugiéj części mamy tu sumę dwu składników (jeden jest 4×5, drugi 2), przedstawiającą liczbę 22, którą, po wykonaniu dodawania, otrzymujemy jako sumę. Jeżeli więc chcemy tę sumę pomnożyć przez 3, to możemy (§ 6, us. 14) oba jéj składniki przez 3 pomnożyć,

$$22\times3=(4\times5)\times3+2\times3,$$

albo, na mocy własności a.,

$$22\times3=(4\times3)\times5+2\times3.$$

Ponieważ liczba 2×3 jest mniejsza [2] od liczby 4×3, więc, jeżeli liczbę 22×3 podzielimy przez 4×3, to otrzymamy (us. 11) jako iloraz niezupełny liczbę 5, zaś jako resztę dzielenia liczbę 2×3. Zestawiając zaś ze sobą

$$22=4\times5+2 \quad \text{i} \quad (22\times3)=(4\times3)\times5+(2\times3),$$

widzimy, że

A. *Jeżeli dzielną i dzielnik pomnożymy jednocześnie przez tę samę liczbę, to iloraz niezupełny się nie zmieni, a reszta zostanie przez tę samę liczbę pomnożona.*

Mając: $22\times3=4\times3\times5+2\times3$ i $22=4\times5+2$, zastąpmy w piérwszym iloczyny 22×3, 4×3 i 2×3 przez liczby, które one przedstawiają, $22\times3=66$, $4\times3=12$, $2\times3=6$. Stąd zaś wypada (us. 1, 2): $22=66:3$, $4=12:3$, $2=6:3$, co napiszmy zamiast tych liczb 22, 4, 2 w wyrażeniu $22=4\times5+2$. Miéć będziemy:

$$66=12\times5+6 \quad \text{i} \quad (66:3)=(12:3)\times5+(6:3),$$

skąd widzimy, że

B. *Jeżeli dzielną i dzielnik podzielimy jednocześnie przez tę samę liczbę, wrazie, gdy tak dzielna, jak i dzielnik są przez tę liczbę podzielne, to iloraz niezupełny się nie zmieni, a reszta zostanie przez tę samę liczbę podzielona.*

15. Wrazie, gdy dzielna jest podzielna przez dzielnik (us. 11, 2),

$$\text{dzielna}=\text{dzielnikowi}\times\text{iloraz.}$$

Jeżeli chcemy iloczyn, t. j. dzielną, pomnożyć przez pewną liczbę,

---

[1] Przyjmujemy tu na uwagę tylko przypadek, kiedy ów czynnik jest przez tę liczbę podzielny. (Ogólniéj w § 20, us. 8.)

[2] § 6, us. 29.

a jeden z czynników, dzielnik, pozostawić bez zmiany, to pozostały czynnik, iloraz, na mocy własności a. (us. 13), wypadnie przez tęż samę liczbę pomnożyć. Jeżeli zaś chcemy dzielną przez pewną liczbę podzielić, a dzielnik pozostawić bez zmiany, to podobnież, na mocy własności c., wypadnie podzielić iloraz *) przez tęż samę liczbę. Powiemy więc:

aa. *Jeżeli dzielną mnożymy lub dzielimy przez pewną liczbę, nie zmieniając dzielnika, to tymsamym iloraz odpowiednio mnożymy lub dzielimy przez tęż samę liczbę.*

Jeżeli dzielnéj nie zmienimy, a jeden z jéj czynników, dzielnik, mnożymy lub dzielimy przez pewną liczbę, to pozostały jéj czynnik, iloraz, na mocy własności e. (§ 13), wypadnie odpowiednio pomnożyć lub podzielić przez tę samę liczbę. A więc:

bb. *Jeżeli dzielnéj nie zmieniamy, a dzielnik mnożymy lub dzielimy przez pewną liczbę, to tymsamym iloraz odpowiednio dzielimy lub mnożymy przez tęż samę liczbę.*

Jeżeli nakoniec dzielną i dzielnik jednocześnie mnożymy lub jednocześnie dzielimy przez tę samę liczbę, to z zestawienia własności aa. i bb. wypada, że (us. 9) iloraz zmianie nie ulegnie. A więc:

cc. *Jeżeli dzielną i dzielnik albo jednocześnie mnożymy, albo jednocześnie dzielimy przez tę samę liczbę, to iloraz się nie zmienia.* (Tę własność moglibyśmy taksamo wyprowadzić, jak piérwszą z własności w tym ustępie.)

Własności te można inaczéj wysłowić, mówiąc «powiększyć pewną liczbę razy», «zmniejszyć pewną liczbę razy», zamiast «pomnożyć przez pewną liczbę», «podzielić przez pewną liczbę».

Jeżeli więc mamy np.

$$48 : 4 = 12,$$

to

aa. $(48\times2) : 4 = 12\times2$; $\quad (48 : 2) : 4 = 12 : 2$.

bb. $48 : (4\times2) = 12 : 2$; $\quad 48 : (4 : 2) = 12\times2$.

cc. $(48\times2) : (4\times2) = 12$; $\quad (48 : 2) : (4 : 2) = 12$.

Jeżeli więc np. $480 : 4 = 120$, to mnożąc dzielnik kolejno np. przez 3, 5, 2 miéć będziemy (bb.)

$$480 : (4\times3) = (120 : 3)$$
$$480 : (4\times3\times5) = (120 : 3) : 5$$
$$480 : (4\times3\times5\times2) = \{(120 : 3) : 5\} : 2$$

A jeżeli tu jeszcze zamiast 120 napiszemy tę liczbę w postaci (us. 4) ilorazu $480 : 4$, to miéć będziemy:

$$480 : (4\times3\times5\times2) = \{([480 : 4] : 3) : 5\} : 2,$$

t. j. *gdy mamy pewną liczbę podzielić przez iloczyn dwu lub więcéj czynników, to możemy*

*) Trzeba tu dzielić przez taką liczbę, aby nietylko dzielna, ale i iloraz były przez nią podzielne.

liczbę daną podzielić przez jeden czynnik, otrzymany iloraz przez drugi czynnik, ten zaś iloraz przez trzeci czynnik iloczynu i t. d. [1]).

Z własności: gdy dzielną i dzielnik podzielimy przez tę samę liczbę, to iloraz się nie zmieni, wypada, że *gdy mamy podzielić przez siebie dwa iloczyny kilku czynników, to spólne czynniki możemy w tych iloczynach opuścić*; np. mając podzielić iloczyn $15 \times 6 \times 8 \times 7 \times 11$ przez iloczyn $3 \times 11 \times 2 \times 6$, możemy opuścić spólne czynki 6 i 11 i dzielić $15 \times 8 \times 7$ przez 3×2; że zaś znowu $15 = 3 \times 5$, a $8 = 2 \times 4$, więc, wstawiając te wyrażenia dla liczb 15 i 8, mamy dzielić $3 \times 5 \times 2 \times 4 \times 7$ przez 3×2, czyli $5 + 4 \times 7$ dzielić przez 1:

$$(15 \times 6 \times 8 \times 7 \times 11) : (3 \times 11 \times 2 \times 6) = (15 \times 8 \times 7) : (3 \times 2) =$$
$$= (3 \times 5 \times 2 \times 4 \times 7) : (3 \times 2) = (5 \times 4 \times 7) : 1 = 140.$$

16. Gdy idzie o wykonanie dzielenia, to należy przedewszystkim, jakeśmy już mówili (us. 2), umieć korzystać z tabliczki mnożenia, t. j. nabrać wprawy w tym, aby przy danym iloczynie i jednym czynniku wypowiadać odrazu czynnik drugi. Tak np., iloczyn 6-u i jakiéj liczby jest 48?, a następnie inaczéj: ile razy 6 mieści się w 48-u? oraz: jak wielka jest 6-a część 48-u? (us. 6, 8).

Późniéj zaś, biorąc liczbę jedno lub dwucyfrową i dzieląc ją przez taką liczbę jednocyfrową, iżby iloraz niezupełny był mniejszy od dziesięciu (us. 11), przy pomocy tabliczki mnożenia odrazu będziemy w stanie powiedzieć, że, dzieląc np. 8 przez 3, otrzymamy 2 wraz z tym, co wypadnie z podzielenia 2 (bo 2 razy 3, czyli 6, jest mniejsze od 8 o 2) przez 3, że, dzieląc np. 52 przez 6, otrzymamy 8 wraz z tym, co wypadnie z podzielenia 4 (bo $52 - 48 = 4$) przez 6 i t. d. Piśmiennie zwykle w taki sposób to działanie przedstawiamy: obok dzielnéj piszemy z prawéj strony dzielnik, oddzieliwszy je od siebie kréską pionową, nieco u dołu przeciągniętą, pod dzielnikiem prowadzimy kréskę poziomą, pod którą będziemy pisać iloraz (albo iloraz niezupełny)

dzielna	dzielnik
	iloraz, albo iloraz niezupełny.

Gdy więc mamy np. podzielić 52 przez 6, to mieć będziemy jako iloraz niezupełny liczbę 8; aby otrzymać resztę dzielenia, wypadnie iloczyn 6×8, t. j. liczbę 48, odjąć od dzielnéj 52; z odjęcia wypadnie nam reszta 4. Napiszemy [2]) więc:

---

[1]) W tym ustępie, gdy była mowa o dzieleniu pewnéj liczby przez inną liczbę, przyjmowaliśmy na uwagę tylko przypadek, w którym odpowiednie dzielenie uskutecznia się bez reszty. O uogólnieniu własności, wyprowadzonych w tym ustępie, mówić będziemy w § 17, us. 7 i w § 20, us. 6.

[2]) Niektórzy jednak, osobliwie w Niemczech, piszą dzielnik z lewéj, a iloraz z prawéj strony dzielnéj, oddzielając te liczby od siebie kréskami pionowymi:

$$\begin{array}{r|l} 52 & \underline{6} \\ \underline{-48} & 8 \\ 4. & \end{array}$$

W podobny sposób przedstawimy i dzielenie w przypadku, gdy dzielna jest podzielna przez dzielnik (us. 11), a dla wyraźności w przedstawieniu, na tym miejscu, na którym w poprzednim przypadku postawiliśmy resztę, piszemy 0 (por. § 5, us. 11), co jest dla nas widoczną właśnie wskazówką, że dzielna dzieli się przez dzielnik bez reszty. Napiszemy więc, gdy mamy np. 48 : 6,

$$\begin{array}{r|l} 48 & \underline{6} \\ \underline{-48} & 8 \\ 0. & \end{array}$$

17. Gdy znajomość tabliczki mnożenia nie wystarcza nam dla wykonania dzielenia, t. j. gdy widzimy, że otrzymać powinniśmy liczbę większą od dziewięciu, np, gdy mamy 25438 : 6, to należałoby (us. 1, 2) próbować pokolei liczb 10, 11, 12 i t. d. Postępowanie jednak takie byłoby zbyt długie i nużące—należy obmyślić inne. Zauważmy, że gdy mamy zgadnąć jakąś liczbę, to naprzód staramy się wyrozumieć, między jakimi liczbami szukana liczba może się zawiérać, to jest wybadujemy, od jakiéj liczby jest większa i od jakiéj mniejsza. Naturalnie, że przy tym wyznaczaniu liczby mniejszéj i większéj od szukanéj, staramy się wybiérać takie liczby, iżby przekonanie się o tym, czy one są mniejsze lub większe od szukanéj, niewiele nas pracy kosztowało. Oczywiście, najdogodniejszymi będą liczby przedstawione przez jedność z zerami, bo właśnie najłatwiéj jest miéć iloczyn takiéj liczby i dzielnika.

Próbujmy więc. Gdybyśmy, mając

$$\begin{array}{r|l} 25438 & \underline{6} \\ & \end{array}$$

wzięli jako iloraz liczbę 10, byłoby [1]) $10 \times 6 = 60$, mniéj niż dzielna, więc 10 jest zamało; gdybyśmy wzięli 100, to $100 \times 6 = 600$, mniéj niż dzielna, więc 100 jest zamało; gdybyśmy wzięli 1000, to $1000 \times 6 = 6000$, mniéj niż dzielna, więc 1000 jest zamało; gdybyśmy wzięli 10000, to $10000 \times 6 = 60000$ jest już więcéj niż dzielna, więc 10000 jest zawiele. Szukana więc liczba jest większa niż 1000, a mniejsza niż 10000, skąd zarazem wypada, iż szukana liczba jest czterocyfrowa, t. j. złożona z tysięcy, setek, dziesiątków i jedności.

---

dzielnik | dzielna | iloraz; więc np. $6 \left| \begin{array}{r} 52 \\ \underline{-48} \\ 4. \end{array} \right| 8$

(**Wprowadzała to swego czasu do nas** *Arytm. dla sz. nar.*)

[1]) Starając się o bezwzględną dokładność powinniśmy tu (i podobnie daléj) mówić byłby iloczyn 10-u i 6-u równy 60-u. Z uwagi jednak, że idzie nam tu tylko o liczebną wartość ilorazu, możemy (us. 3, 6) w tym postępowaniu tak się wyrażać, jak nam dogodniej.

Starajmy się bliżéj podéjść do liczby szukanéj, próbując liczb większych od 1000, a mniejszych od 10000. Wybiérając z nich, podobnie jak poprzednio, liczby, których iloczyny przez dzielnik łatwo się otrzymują, weźmiemy pod uwagę liczby przedstawione przez cyfrę znaczącą z zerami. Gdybyśmy wzięli *) 2000, to $2000\times6=12000$, mniéj niż dzielna, więc 2000 zamało; gdybyśmy wzięli 3000, to $3000\times6=18000$, mniéj niż dzielna, więc 3000 zamało; gdybyśmy wzięli 4000, to $4000\times6=$ $=24000$, mniéj niż dzielna, więc 4000 zamało; gdybyśmy jednak wzięli 5000, to $5000\times6=30000$, jest już więcéj niż dzielna, więc 5000 zawiele. Szukana zatym liczba jest większa od 4000, a mniejsza od 5000, — jest więc ona złożona z liczby 4000 i pewnéj liczby mniejszéj od tysiąca (t. j., wogóle mówiąc, z setek, dziesiątków i jedności), czyli: jesteśmy pewni, że w liczbie szukanéj tysięcy mamy 4.

Wyznaczyliśmy więc tysiące ilorazu — w sposób dość dogodny. Chcielibyśmy móc w ten sam sposób znaléść następującą część liczby, t. j. setki.

Zważmy, że w dzielnéj zawarty jest iloczyn ilorazu przez dzielnik (us. 3, 11). Ponieważ w ilorazie miéć mamy liczbę czterocyfrową, którą możemy rozłożyć na tysiące, setki dziesiątki i jedności, więc (§ 6, us. 20) w dzielnéj zawarte są iloczyny częściowe: tysięcy ilorazu przez dzielnik, setek ilorazu przez dzielnik, dziesiątków ilorazu przez dzielnik i jedności ilorazu przez dzielnik. Powyżéj wyznaczyliśmy tysiące ilorazu, t. j. największą część ilorazu. Jeżeli więc chcemy w ten sam sposób wyznaczyć setki ilorazu, to należy nasze dzielenie sprowadzić do innego, w którymby największą częścią ilorazu były setki. To zaś osiągnąć jesteśmy w stanie, zmniejszając dzielną o część zależną od tysięcy ilorazu, czyli odejmując od dzielnéj iloczyn częściowy tysięcy ilorazu przez dzielnik, t. j. liczbę $400\times6=24000$. W pozostałéj z tego odejmowania reszcie, t. j. w liczbie 1438, jest zawarty tylko iloczyn setek ilorazu przez dzielnik, dziesiątków ilorazu przez dzielnik i jedności ilorazu przez dzielnik, czyli ta reszta 1438 jest nową dzielną, po podzieleniu któréj przez dzielnik 6, otrzymamy w ilorazie liczbę trzycyfrową. Postępując więc podobnie jak poprzednio, w celu wyznaczenia największéj części, t. j. setek, weźmiemy naprzód w ilorazie 100, wtedy $100\times6=600$, mniéj niż 1438, więc 100 jest zamało; gdybyśmy wzięli 200, to $200\times6=1200$, zamało; gdybyśmy wzięli 300, to $300\times6=1800$, zawiele; więc szukana teraz liczba trzycyfrowa jest zawarta między 200 i 300; jest przeto ona

$$\begin{array}{r|l} 25438 & \underline{\;6\;\;\;\;\;\;} \\ -24000 & 4000 \\ \hline 1438 & \end{array}$$

*) Możemy nie próbować ponownie liczby 1000, bo z poprzedniego wiemy, że iloraz jest większy od 1000.

złożona z liczby 200 i pewnéj liczby, mniejszéj od sta, t. j. dziesiątków i jedności; jesteśmy jednak pewni, że w szukanéj liczbie mamy 2 setki.

Aby w podobny sposób wyznaczyć pozostałą część ilorazu, należy od liczby 1438, w któréj są zawarte iloczyny częściowe setek ilorazu przez dzielnik, dziesiątków ilorazu przez dzielnik i jedności ilorazu przez dzielnik, odjąć część zależną od znalezionych już setek ilorazu, t. j. iloczyn częściowy setek ilorazu przez dzielnik, $200 \times 6 = 1200$. W pozostałéj z tego odejmowania reszcie, t. j. w liczbie 238, jest zawarty tylko iloczyn dziesiątków ilorazu przez dzielnik i jedności ilorazu przez dzielnik; jest więc ta liczba 238 nową dzielną, po podzieleniu któréj przez dzielnik 6, otrzymamy liczbę dwucyfrową. W celu wyznaczenia jéj dziesiątków tworząc znowu iloczyny $10 \times 6 = 60$; $20 \times 6 = 120$; $30 \times 6 = 180$; $40 \times 6 = 240$, widzimy, że szukana teraz liczba dwucyfrowa jest zawarta między 30 i 40,—jest więc ona złożona z 30-u i pewnéj liczby mniejszéj od dziesięciu, t. j. jedności;

$$\begin{array}{r|l} 25438 & 6 \\ \cline{2-2} -24000 & 4000 \\ \cline{1-1} 1438 & 200 \\ -1200 & \\ \cline{1-1} 238 & \end{array}$$

jesteśmy jednak pewni, że w szukanéj liczbie mamy dziesiątków 3. I gdy znów od liczby 238 odejmiemy iloczyn częściowy dziesiątków ilorazu przez dzielnik, $30 \times 6 = 180$, to pozostała z tego odejmowania reszta 58 przedstawia iloczyn jedności ilorazu przez dzielnik, któreto jedności możemy tu, z powodu, że dzielnik jest jednocyfrowy, wyznaczyć bespośrednio (us. 16); wogóle jednak (przy dwu lub więcéjcyfrowym dzielniku) postąpić winniśmy tak: $1 \times 6 = 6$, $2 \times 6 = 12, \ldots, 9 \times 6 = 54$.

$$\begin{array}{r|r} 25438 & 6 \\ \cline{2-2} -24000 & 4000 \\ \cline{1-1} 1438 & 200 \\ -1200 & 30 \\ \cline{1-1} 238 & 9 \\ \cline{2-2} -180 & 4239 \\ \cline{1-1} 58 & \\ -54 & \\ \cline{1-1} 4 & \end{array}$$

Chociaż i ten ostatni iloczyn częściowy jest mniejszy od 58, lecz ponieważ z poprzedniego wiemy, że szukana część ilorazu jest mniejszą od dziesięciu,—więc będzie nią 9 i, po odjęciu od 58-u częściowego iloczynu $9 \times 5 = 54$, pozostanie nam, jako reszta dzielenia, liczba 4. W ten sposób znaleźliśmy, że w ilorazie niezupełnym tego dzielenia mamy: 4 tysiące, 2 setki, 3 dziesiątki i 9 jedności, czyli liczbę 4239. Tak iż, zamiast podpisywać pod sobą oddzielnie części tego ilorazu niezupełnego, moglibyśmy, znalazszy, że tysięcy będzie 4, podpisać pod dzielnikiem tę cyfrę, a następnie, po oznaczeniu, że setek jest 3, postawić obok 4 z prawéj strony cyfrę 3 i t. d. *).—Znaleźliśmy więc, że iloraz z podzielenia 25438 przez 6, jest 4239 wraz z tym, co otrzymamy, gdy 4 podzielimy przez 6.

*) Dla udogodnienia, zbadawszy na początku, przy pomocy próbowania liczb 10, 100 i t. d., ile cyfr będzie w ilorazie, dobrze jest postawić w ilorazie odpowiednią liczbę kropek, aby przy pisaniu na miejscu piérwszéj, drugiéj i t. d. kropki odpowiednich cyfr, pozostałe kropki, przy tworzeniu iloczynów częściowych, uważać jako przedstawiające zera.

```
 25224 | 6
—24000 |42
  1224
 —1200
    24
```

Wrazie, gdybyśmy mieli naprzykład 25224 : 6, i wyznaczyli już, jak powyżéj, 4 tysiące i 2 setki w ilorazie, to, prowadząc działanie daléj, powiemy, że w liczbie, którą otrzymamy po odjęciu od 1224 iloczynu częściowego setek ilorazu przez dzielnik, $200 \times 6 = 1200$, t. j. w liczbie 24, znajdują się iloczyny pozostałych części ilorazu przez dzielnik, t. j. dziesiątków ilorazu przez dzielnik i jedności ilorazu przez dzielnik. W celu wyznaczenia dziesiątków, utworzywszy iloczyn $10 \times 6 = 60$; widzimy, że otrzymujemy więcéj niż 24, t. j. że w ilorazie pozostała część (dwucyfrowa) jest mniejsza od 10, czyli, że w ilorazie niéma dziesiątków do oznaczenia ich na miejscu, które one obok setek z prawéj strony powinny zajmować; napiszemy więc na tym miejscu zero, a liczba 24 posłuży nam do wyznaczenia jedności, co zrobimy sposobem wiadomym. — Iloraz więc z podzielenia 25224 przez 6 jest 4204.

```
 25224 | 6
—24000 | 4204
  1224
 —1200
    24
   —24
     0
```

Podobnie, jeżeli mamy

```
62496 | 124
```

zauważymy naprzód, że gdybyśmy wzięli jako iloraz liczbę 10, to $124 \times 10 = 1240$, zamało; gdyby wziąć 100, to $124 \times 100 = 12400$, zamało; a gdy weźmiemy 1000, to $124 \times 1000 = 124000$, zawiele. Iloraz więc jest zawarty między 100 i 1000, czyli jest liczbą trzycyfrową, a więc liczbą, którą można uważać, jako złożoną z setek, dziesiątków i jedności.

W celu wyznaczenia setek próbujmy: $124 \times 100 = 12400$, zamało, jak już wiemy; $124 \times 200 = 24800$, zamało; $124 \times 300 = 37200$, zamało; $124 \times 400 = 49600$, zamało; $124 \times 500 = 62000$, zamało, lecz $124 \times 600 = 74400$, zawiele, więc i t. d.—mamy w ilorazie 5 setek.

```
 62496 | 124
—62000 | 504
   496
  —496
     0
```

Rozumując tak, jak w poprzednim przykładzie, uzasadnimy, że obok 5 setek wypadnie postawić na miejscu dziesiątków 0, a tymsamym, że liczba 496 zawiéra w sobie iloczyn jedności ilorazu przez dzielnik. Tworząc więc pokolei iloczyny $124 \times 1 = 124$; $124 \times 2 = 248$; $124 \times 3 = 372$; $124 \times 4 = 496$, widzimy że w ilorazie obok zera należy na miejscu jedności postawić 4, a nadto, że, po podzieleniu dzielnéj 62496 przez dzielnik 124, otrzymamy jako iloraz liczbę 504.

Gdy zastanowimy się tu jeszcze nad takim postępowaniem, łatwo spostrzeżemy, że np. w piérwszym przykładzie, szukając iloczynu liczb 25438 i 6, naprzód dowiedzieliśmy się, że ten iloczyn zawiéra się między liczbami 1000 i 10000, następnie, że jest zawarty między liczbami 4000 i 5000, późniéj, że między 4200 i 4300, potym, że między 4230 i 4240, i nakoniec (us. 11), że między 4239 i 4240, t. j. widzimy, że postępowanie to polega właściwie na wyznaczeniu dwu liczb, jako liczb krańcowych, między którymi szukany iloraz się zawiéra, i na stopniowym (metodycznym) zbliżaniu do siebie tych liczb (krańcowych), obejmujących szukany iloraz.

Dzielenie jest jedynym z cztérech działań arytmetycznych, które wykonywamy od strony lewéj, a nie od prawéj. Wykonywając dzielenie od strony prawéj, możemy wypisywać cyfry ilorazu odrazu dobre, t. j. bez potrzeby zmieniania ich następnego, tylko wtedy, gdy dzielnik jest liczbą jednocyfrową i każda znacząca cyfra dzielnéj, osobno uważana, przedstawia liczbę przez ten dzielnik podzielną, np. 690309 : 3. We wszystkich zaś innych przypadkach, jak łatwo się o tym przekonać, musielibyśmy zmieniać raz postawione cyfry; często nie uniknęlibyśmy nawet potrzeby wykonywania dzielenia (częściowego) właśnie ze strony lewéj, a nadto suma reszt częściowych dzieleń może wypaść większa niż dzielnik, co wywołuje nową potrzebę zmiany cyfr ilorazu.

Widzimy więc, że to postępowanie, t. j. *wykonywanie dzielenia polega na tym, aby z części ilorazu: jedności, dziesiątków, setek, tysięcy i t. d., wyznaczyć naprzód część największą przy pomocy próbowania; następnie, odjąwszy od dzielnéj iloczyn znalezionéj największéj części ilorazu przez dzielnik, otrzymaną resztę uważać za nową dzielną, a tymsamym z części ilorazu, któryby wypadł z jéj podzielenia przez (ten sam) dzielnik, t. j. z jedności, dziesiątków, setek i t. d., wyznaczyć znowu przez próbowanie część największą, i t. d., dopóki nie zostaną wyznaczone najmniejsze części w ilorazie, t. j. jedności, a otrzymane w ten sposób części ilorazu do siebie dodać.*

18. W tym piśmiennym wykonywaniu dzielenia, któreśmy powyżéj na przykładach przedstawili, możemy porobić wszelkie możliwe skrócenia, byleby rachunek pozostał wyraźnym (§ 1, us. 9). Zauważyć więc naprzód możemy, że w częściowych iloczynach, np. tysięcy ilorazu przez dzielnik, są na końcu trzy zera (§ 6, us. 23), które zawsze będą, jakikolwiek jest dzielnik i jakakolwiek jest cyfra tysięcy w ilorazie; możemy więc te zera, podobnie jak w mnożeniu (§ 6, us. 24), jako łatwo domyślne, opuścić. Podobnie możemy opuścić dwa końcowe zera, zawsze się zjawiające w iloczynie częściowym setek ilorazu przez dzielnik. I t. d. Wtedy piśmienne przedstawienie wykonywania dzielenia w przykładach poprzedzającego ustępu tak się przedstawi:

```
 25438 | 6          25224 | 6          62496 | 124
-24    |----       -24    |----       -620   |----
 ----  | 4239      ----   | 4204      -----  | 504
  1438              1224                496
 -12               -12               -496
  ---               ---               ----
   238                24                 0.
  -18                -24
   ---               ---
    58                 0.
   -54
   ---
     4.
```

W ostatnim dzieleniu zostało zero w częściowym iloczynie 620, gdyż to zero jest przypadkowe, nie zawsze tu bywa: niebyłoby go, gdyby w ilorazie zamiast 5-u setek było np. 6 setek.

Przypatrując się jeszcze tym skróconym przedstawieniom wykonywania dzielenia, widzimy, że w piérwszych dwu dzieleniach końcowe cyfry dzielnéj przepisujemy kilkakrotnie, chociaż one tylko wtedy są potrzebne w rachunku, gdy pod nimi są pozostałe tu, po opuszczeniu zer, cyfry iloczynów częściowych. Ponieważ te cyfry znajdują się w dzielnéj, więc mamy je wciąż na widoku, a tymsamym (§ 1, us. 9) możemy je opuścić wszędzie, gdzie pod nimi są domyślne opuszczone zera częściowych iloczynów. Robiąc to, mamy:

```
 25438 | 6          25224 | 6
-24    |----       -24    |----
 ---   | 4239       ---   | 4204
  14                 12
 -12                -12
  ---                ---
   23                  24
  -18                 -24
   ---                 ---
    58                   0.
   -54
   ---
     4.
```

Ten zaś tak znacznie skrócony sposób przedstawiania piśmiennego dzielenia pozwala nam również skrócić sposób wyrażania się przy wykonywaniu tego rachunku, osobliwie, gdy zważymy, że, jak widać z tych przykładów, wmiarę użycia następujących po sobie cyfr dzielnéj wyznaczamy następujące po sobie cyfry ilorazu: tak np., w ostatnim dzieleniu piérwsze dwie cyfry dzielnéj, t. j. liczba 25, odpowiadają cyfrze 4 ilorazu, następująca cyfra dzielnéj 2 odpowiada cyfrze 2 ilorazu, następujące dwie cyfry dzielnéj 2 i 4 odpowiadają następnym znowu dwu cyfrom ilorazu 0 i 4. Skutkiem tego, wyznaczywszy w ilorazie cyfrę piérwszą, t. j. 4, nie potrzebujemy zastanawiać się nad tym, jakie części liczby ta cyfra nam przedstawia: dość tylko wiedzieć, że jest piérwszą (od strony lewéj) cyfrą ilorazu; cyfrę ilorazu, którą wyznaczymy przy pomocy następującéj cyfry dzielnéj, uważać będziemy za następującą, po wyznaczonéj poprzednio, cyfrę ilorazu, i t. d.

Zastanówmy się nad tym, jak, wrazie, gdy rachunek dzielenia np. liczby 25224 przez liczbę 6, prowadzić będziemy odrazu w (ostatniéj) skróconéj postaci, możemy wyznaczać kolejne cyfry ilorazu. Innymi słowy: w jaki sposób (będąc zupełnie w zgodzie z objaśnieniem, które szczegółowo podaliśmy w ustępie 17-ym) możemy wyrażanie się znacznie przez to skrócić, iż w czasie prowadzenia rachunku mówić będziemy tylko o tych liczbach, które pozostały w téj skróconéj postaci piśmiennego wykonywania dzielenia? Ponieważ z poprzedniego objaśnienia wiemy już dobrze, co te liczby przedstawiają, więc o tym nie będziemy już teraz wspominać. Idzie więc nam tylko o to, jak mamy, nie przeprowadzając poprzedniego rozumowania odrazu przeprowadzić cały ten skrócony rachunek, a tymsamym wyznaczyć kolejno wszystkie cyfry w ilorazie.

Widzimy, że tu tak się zachowujemy, jakgdybyśmy naprzód od liczby 25 odejmowali liczbę 24, t. j. iloczyn dzielnika 6 przez piérwszą (z lewéj strony) cyfrę ilorazu. Wystawmy sobie, że rospoczynamy dopiéro działanie. Oddzielamy więc przedewszystkim początkowe dwie cyfry dzielnéj i uważamy je jako liczbę oddzielną. Ta liczba 25 jest większa od dzielnika. Gdybyśmy się ograniczyli na piérwszéj cyfrze dzielnéj, 2, to przedstawiłaby nam ona liczbę mniejszą od dzielnika, a gdybyśmy wzięli liczbę 252, to ta liczba trzycyfrowa byłaby większa od dwucyfrowéj 25, która już jest większa od dzielnika. Widocznie więc, oddzielnie uważamy liczbę przedstawioną przez tyle początkowych cyfr dzielnéj, ile ich najmniéj potrzeba, aby ta liczba była większa od dzielnika (por. niżéj). — Od téj liczby mamy odjąć iloczyn dzielnika przez piérwszą cyfrę dzielnéj. Jak wyznaczyć tę cyfrę, aby jéj iloczyn przez dzielnik móc odjąć od 25 i aby téj cyfry późniéj już nie trzeba było zmieniać? Łatwo jest nie wziąć téj cyfry zbyt wielkiéj, bo wtedy jéj iloczynu przez dzielnik nie możnaby było odjąć od 25. Trzeba więc wziąć taką cyfrę, aby jéj iloczyn przez dzielnik nie był większy od 25 (§ 5, us. 11). Aby zaś nie trzeba było późniéj téj liczby powiększać, t. j. aby nie wziąć jéj zbyt małéj, należy wziąć taką, aby reszta po wykonaniu tego odejmowania była mniejszą od dzielnika (us. 11). — Tu nasuwa się uwaga, że gdybyśmy mieli 6224 : 6 (t. j. na początku dzielnéj zamiast 25 mieli 6), to jeszcze iloczyn dzielnika 6 przez jednocyfrową liczbę, czyli przez piérwszą cyfrę w ilorazie, którąby wtedy była 1, nie byłby większy od liczby przedstawionéj przez piérwszą cyfrę dzielnéj, 6. Z tego widzimy, że, mając zadanie: 6224:6, dla wyznaczenia cyfry piérwszéj w ilorazie, oddzielnie uważać należy liczbę przedstawioną przez tyle, wogóle mówiąc [1]), początkowych cyfr dzielnéj, ile ich potrzeba, aby ta liczba była równa dzielnikowi. Gdy więc ta liczba ma być w tym przypadku równa dzielnikowi, a w poprzednim od niego większa, to mówić będziemy ogólnie, że: oddzielnie uważamy liczbę, przedstawioną przez tyle początkowych cyfr dzielnéj, ile ich najmniéj potrzeba, aby ta liczba była już nie mniejsza od dzielnika. — Wracając się do naszego zadania, powiemy: oddzielnie uważając liczbę, utworzoną przez tyle, ile można najmniéj, początkowych cyfr dzielnéj 25 224, aby ta liczba była już nie mniejsza od dzielnika 6, t. j. liczbę 25, szukamy takiéj największéj jednocyfrowéj liczby, iżby iloczyn jéj i dzielnika był nie większy od 25. Tą największą z liczb jednocyfrowych (znajdziemy ją, wogóle mówiąc, przez próbowanie) jest tu liczba 4. Jest ona piérwszą (z lewéj strony) cyfrą ilorazu; podpisujemy ją więc pod dzielnikiem. — Iloczyn dzielnika przez tę cyfrę, $6\times4=24$, podpisujemy pod 25 i od 25 odejmujemy. Do otrzymanéj reszty przypisujemy [2]) następującą cyfrę dzielnéj, t. j. 2. Ta liczba 12 ma nam posłużyć do wyznaczenia następującéj cyfry w ilorazie. Mamy więc znaléść cyfrę w ilorazie, któréj iloczyn przez dzielnik nie byłby większy od 12. Taką cyfrą jest 2, którą piszemy obok poprzedniéj cyfry ilorazu, t. j. obok 4-ch. Iloczyn jéj i dzielnika, $6\times2=12$, odejmujemy od 12. Z tego odejmowania nie otrzymujemy reszty. Piszemy więc następującą cyfrę dzielnéj, 2, która powinna nam posłużyć do wyznaczenia następującéj cyfry ilorazu. Lecz ponieważ ta liczba 2 jest mniejsza od dzielnika, więc nie otrzymamy cyfry znaczącéj w ilorazie, odpowiadającéj téj cyfrze 2 dzielnéj. Piszemy więc w ilorazie, obok znalezionych już cyfr, 0. — Do téj cyfry 2 dopisujemy następującą cyfrę dzielnéj, 4, a ta liczba 24 ma nam służyć do wyznaczenia następującéj (ostatniéj, bo już przypisaliśmy ostatnią cyfrę dzielnéj) cyfry ilorazu. Szukamy więc znowu takiéj cyfry, żeby mnożąc przez nią dzielnik, otrzymać iloczyn nie większy od 24. Tą cyfrą jest 4, którą piszemy w ilorazie po zerze. Od 24 odejmu-

$$\begin{array}{r|l} 25224 & 6 \\ \cline{2-2} -24 & 4 \\ \cline{1-1} 12 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 25224 & 6 \\ \cline{2-2} -24 & 420 \\ \cline{1-1} 12 & \\ -12 & \\ \cline{1-1} 2 & \end{array}$$

---

[1]) Np. w zadaniu 2285 : 12 oddzielnie uważamy liczbę, przedstawioną przez piérwsze dwie cyfry dzielnéj, dla wyznaczenia piérwszéj cyfry w ilorazie.

[2]) To przypisanie cyfry zastępuje odejmowanie zera (domyślnego po 24) od cyfry 2 dzielnéj. Podobnie i daléj. Dla tego staramy się przypisywane w ten sposób cyfry stawić pod tymiż cyframi dzielnéj. Niewłaściwie, zamiast: przypisuję cyfrę, mówią często: «spuszczam», albo «składam» cyfrę.

jemy iloczyn $6\times4=24$ i ponieważ z tego odejmowania żadnéj nie otrzymujemy reszty, a niéma więcéj cyfr dzielnéj, na miejscu reszty piszemy *) zero (us. 16), które nam wyraźnie wskazuje, że dzielna jest przez dzielnik podzielną.

Gdy mamy [1]) np. 17040690:567, to ponieważ liczba utworzona przez tyle początkowych cyfr dzielnéj, ile ich ma dzielnik, t. j. liczba trzycyfrowa 170, jest mniejsza od dzielnika, więc wypadnie nam miéć naprzód na uwadze liczbę utworzoną przez piérwsze cztéry cyfry dzielnéj, t. j. 1704. Szukamy teraz największéj jednocyfrowéj liczby, przez którą mnożąc dzielnik, otrzymalibyśmy iloczyn nie większy od 1704. Gdy $567\times1=567$, $567\times2=1134$, $567\times3=1701$, $567\times4=2268$,

$$
\begin{array}{r|l}
17040690 & 567 \\ \cline{2-2}
-1701 & 30054 \\ \cline{1-1}
3069 & \\
-2835 & \\ \cline{1-1}
2340 & \\
-2268 & \\ \cline{1-1}
72 &
\end{array}
$$

widzimy, że powinniśmy w ilorazie, jako piérwszą (z lewéj strony) cyfrę, napisać 3. Odejmując iloczyn 1701 od liczby 1704, otrzymujemy w reszcie 3, do czego przypisujemy następującą cyfrę dzielnéj, 0. Liczba 30 jest mniejsza od dzielnika: piszemy więc w ilorazie, jako drugą, cyfrę 0. Do liczby zaś 30 przypisujemy następującą cyfrę dzielnéj, 6. Liczba 306 jest jeszcze mniejsza od dzielnika: piszemy więc znowu w ilorazie, jako następującą, cyfrę 0, a do liczby 306 przypisujemy następującą cyfrę dzielnéj, 9. Ta liczba 3069 nie jest już mniejsza od dzielnika. Szukamy więc jednocyfrowéj liczby, przez którą mnożąc dzielnik, otrzymalibyśmy iloczyn nie większy od 3069. Z poprzednio wypisanych iloczynów dzielnika przez jednocyfrowe liczby, widzimy, że ostatni, t. j.

---

*) Rospowszechnione pisanie kresek poziomych, albotéż przecinków, tak tu, jak i w poprzednich odejmowaniach (gdy niéma nic do oznaczenia pod odejmowanymi od siebie cyframi) nie jest niczym usprawiedliwione i jest zbyteczne.

[1]) «Ponieważ dzielenie liczby trudniejsze jest od poprzedzających trzech działań, należy użyć Nauczycielom wszystkich sposobów, ktoreby naukę o tymże dzieleniu ułatwiały.... Że zaś trudność w dzieleniu liczby po większéj części pochodzi z niepewności w naznaczeniu wielorazu, w któréjto niepewności dopóty dzieci zostawać będą, póki długim wprawianiem się nie nabędą łatwości w zgadnieniu bez zawodu, ilekroć liczba, którą dzielić mają, zamyka w sobie tę, która ją dzieli: przeto szczególnym będzie staranie Nauczycielów, aby podali sposób uczniom swoim, którym najłatwiéj i najprędzéj natrafić mogliby na prawdziwy wieloraz, wypadający z podzielenia liczby jednéj przez drugą. Osobliwie zaś w pamięci mieć to mają, gdy przyjdą do liczb dzielących złożonych z dwóch znaków. Tam naprzód zabawić się trzeba nad przykładami takimi, gdzie znak jedności jest mały względem znaku dziesiątków, naprzykład 81.... Postąpią daléj do przykładów, w którychby znowu znak dziesiątków był bardzo mały względem znaku jedności, naprzykład 18.... Potym wynajdywać będą takie liczby dzielące, których liczba, jedności wyrażająca, coraz bardziéjby zbliżała się do liczby dziesiątków. Takdługo zaś liczb dzielących, z więcéj jak ze dwóch znaków złożonych, podawać nie będą uczniom swoim, póki ci bez omyłki nie nauczą się zgadywać wielorazów w tych liczbach podzielnych, których dzielące liczby ze dwóch tylko znaków składać się będą.» (*Arytm. dla sz. nar.*, str. 45).

loczyn $567 \times 4 = 2269$, jest mniejszy od téj liczby 3069. Tworzymy inastępne iloczyny:

$$567 \times 5 = 2835, \quad 567 \times 6 = 3402;$$

wypadnie zatym w ilorazie postawić, jako następującą, cyfrę 5. Odejmując iloczyn 2835 od liczby 3069, otrzymujemy w reszcie liczbę 234, do któréj przypisujemy następującą (ostatnią) cyfrę dzielnéj, 0. Liczba 2340 nie jest mniejsza od dzielnika. Szukając odpowiedniéj cyfry ilorazu, możemy skorzystać z wypisanych już iloczynów dzielnika przez jednocyfrowe liczby. Widzimy, że iloczyn $567 \times 5 = 2268$ jest mniejszy od téj liczby, zaś iloczyn $567 \times 5 = 2835$ jest już większy. Napiszemy więc w ilorazie, jako ostatnią, cyfrę 4. Odjąwszy nakoniec iloczyn 2268 od liczby 2340, otrzymujemy, jako resztę dzielenia, liczbę 72.—Powiemy więc: z podzielenia 17 040 690 przez 567 otrzymujemy 30 054 wraz z tym, co wypadnie z podzielenia 72-u przez 567.

Widzimy nadto z tego dzielenia, że wrazie, gdy dzielnik jest liczbą, któréj iloczynów przez jednocyfrowe liczby odrazu sobie przedstawić nie jesteśmy w stanie, korzystnym jest wypisywanie na boku, lub na nałożonéj oddzielnéj kartce (§ 1, us. 9), tych iloczynów, wmiarę potrzeby ich tworzenia. Tu np. wypadłoby nam w ten sposób wypisać naprzód iloczyny od 567×2 do 567×4, a następnie dopisać jeszcze iloczyny 567×5 i 567×6. (Por. us. 19).—

W zadaniu np. 9600741 : 24, wyznaczywszy już piérwszą cyfrę ilorazu, 4, widzimy, że z odejmowania 96—96 nie otrzymujemy żadnéj reszty. Nie piszemy jednak zera (§ 5, us. 11), gdyż wypadnie nam w dalszym ciągu postawić cyfrę dzielnéj (§ 3, us. 12); brak więc wszelkiéj cyfry pod odejmowanymi liczbami, wobec postawionéj w tymże wiérszu następującéj cyfry dzielnéj dostatecznie nam wskaże, żeśmy z tego odejmowania nie otrzymali reszty. Piszemy tylko w tym wiérszu (w innych przypadkach bywa w nim reszta) następującą cyfrę dzielnéj. Jest nią 0, więc i w ilorazie odpowiednią cyfrą *) jest 0. Piszemy obok następną cyfrę dzielnéj, 0; znowu więc w ilorazie 0. Piszemy obok następną cyfrę 7; mamy więc teraz (§ 3, us. 12) liczbę 7, która jest mniejsza od dzielnika; piszemy więc znowu w ilorazie 0. Przypisując zaś do liczby 7 następującą cyfrę dzielnika 4, otrzymujemy liczbę 74, która jest już większa od dziel-

9600741	24
—96	400030
0074	
—72	
21	

*) Można to jeszcze dosadniéj objaśnić, postępując tak, jak w us. 17.

nika. Wyznaczywszy cyfrę 3 w ilorazie i dopisawszy do reszty z odjęcia 72 od 74, t. j. do 2, następującą cyfrę dzielnéj, 1, otrzymujemy liczbę, mniejszą od dzielnika. Piszemy więc w ilorazie, jako odpowiednią (ostatnią) cyfrę, 0, a liczba 21 przedstawi nam teraz resztę dzielenia. Otrzymaliśmy więc jako wypadek dzielenia: 400 030 wraz z tym, co wypadnie z podzielenia 21 przez 24.

19. Widzimy więc wogóle, że postępowanie przy dzieleniu liczb możemy ująć w następujące prawidło:

*Aby podzielić dane liczby przez siebie, piszemy naprzód dzielną, a obok niéj, z prawéj strony, dzielnik, oddzielając te liczby od siebie kréską pionową, nieco na dół przedłużoną *), pod dzielnikiem zaś prowadzimy kréskę poziomą **), pod którą pisać będziemy cyfry ilorazu. Zauważywszy naprzód, jakby osobną, liczbę, utworzoną przez tyle początkowych cyfr dzielnéj, ile ich najmniéj potrzeba, aby ta liczba była nie mniejszą od dzielnika, szukamy takiéj największéj cyfry, przez którą mnożąc dzielnik, otrzymalibyśmy iloczyn nie większy od téj zauważonéj liczby. Ta cyfra będzie piérwszą cyfrą ilorazu. Mnożymy przez nią dzielnik i otrzymany iloczyn odejmujemy od owéj liczby, przedstawionéj przez początkowe cyfry dzielnéj, podpisawszy go pod tą liczbą. Do wypadłéj z tego odejmowania reszty przypisujemy następującą cyfrę dzielnéj i znowu, mając tak powstałą liczbę, nie mniejszą od dzielnika, w taki sam sposób wyznaczamy następującą cyfrę ilorazu. I t. d. Jeżeli przypisawszy do reszty, otrzymanéj z odejmowania, następującą cyfrę dzielnéj, mamy liczbę mniejszą od dzielnika, to w ilorazie piszemy 0, a do owéj liczby przypisujemy jeszcze następującą cyfrę dzielnéj, w celu wyznaczenia następującéj cyfry ilorazu, i t. d. Wyznaczone w ten sposób cyfry, razem uważane, przedstawią nam liczbę szukaną, a liczba, otrzymana po odjęciu iloczynu dzielnika przez ostatnią cyfrę w ilorazie, będzie resztą dzielenia.*

Gdy mamy wykonać dzielenie, w którym dzielnik jest dość wielką liczbą, a spodziewamy się wielu cyfr w ilorazie, to korzystnym jest, dla ułatwienia sobie następnie tak wyznaczania cyfr ilorazu, jak i tworzenia iloczynów częściowych dzielnika przez cyfry ilorazu, wypisać uprzednio na boku, lub na oddzielnéj kartce (§ 1, us. 9), iloczyny dzielnika przez kolejne liczby jednocyfrowe, tymwięcéj, że taką tabliczkę łatwo tworzyć możemy przez dodawanie dzielnika do tegoż dzielnika i do kolejno w ten sposób otrzymywanych sum. Tak np., gdy mamy 25 807 156 427 podzielić przez 3742, utworzymy tabliczkę iloczynów dzielnika przez jednocyfrowe liczby:

---

*) Aby oddzielić iloraz od podpisywanych pod dzielną liczb, osobliwie w przypadku jednocyfrowego ilorazu (zob. us. 16).

**) Aby oddzielić iloraz szukany od danego dzielnika.

	3742	 1
(3742+3742)	7484	 2
(7484+3742)	11226	 3
(11226+3742)	14968	 4
(14968+3742)	18710	 5
(18710+3742)	22452	 6
(22452+3742)	26194	 7
(26194+3742)	29936	 8
(29936+3742)	33678	 9,

przy pomocy któréj widać odrazu, że piérwszą cyfrą w ilorazie jest 6, że od 25807 odjąć należy 22452, i t. d.

Możemy wrazie, gdy w dzielniku jest większa liczba, np. gdy mamy 25807156:3742, postępować w ten sposób. Idzie o wyznaczenie piérwszej cyfry w ilorazie, t. j. ilorazu z podzielenia liczby 25807 przez 3742. Ten iloraz nie może być większy od ilorazu z podzielenia 25 przez 3, więc, conajwyżéj, może być liczbą 8; nie może zaś być mniejszy od ilorazu z podzielenia 25 przez 4, a więc, conajmniéj, może być liczbą 6. Należy więc tu próbować liczb 8, 7, 6. Gdyby ilorazem miało być 8, to ósma część liczby 25807 nie mogłaby w żadnym razie być mniejszą od dzielnika, że zaś biorąc ósmą część liczby 25807, otrzymujemy: 32..., więc mniéj niż dzielnik, zatym 8 jest zbyt wielką, jako piérwsza, cyfrą ilorazu. Bierzemy siódmą część liczby 25807: otrzymujemy 36..., mniéj niż dzielnik, więc i 7 jest zbyt wiele. Śmiało więc możemy powiedzieć, że należy w ilorazie napisać pozostałą już jedyną z możliwych cyfr, t. j. 6 (i rzeczywiście, szósta część liczby 25807 jest 4..., niemniéj niż dzielnik). Podobnie postępować wypada przy wyznaczaniu następujących cyfr ilorazu.

20. Jeżeli mamy np. liczbę kończącą się zerami podzielić przez liczbę przedstawioną przez jedność z zerami, którychto zer jest niewięcéj niż końcowych zer w dzielnéj, np. 54260000:1000, to w ilorazie otrzymamy 54260, bo (us. 3; § 6, us. 21) $1000\times54260=$ $=54260000$, t. j. w ilorazie otrzymamy liczbę, powstałą z dzielnéj wskutek opuszczenia trzech jéj zer końcowych, t. j. tylu, ile jest zer przy jedności w dzielniku 1000, a więc: *aby liczbę kończącą się zerami podzielić przez liczbę, przedstawioną przez jedność z zerami, wrazie gdy tych zer przy jedności jest niewięcéj niż końcowych zer w dzielnéj, należy wziąć jako iloraz liczbę powstałą z dzielnéj przez opuszczenie tylu jéj zer końcowych, ile ich jest przy jedności w dzielniku.*

Jeżeli mamy np. 1704069000:56700, to, gdy dzielną i dzielnik podzielimy przez 100, iloraz niezupełny, jak wiemy, zmianie nie ulegnie, reszta tylko skutkiem tego zmniejszy się 100 razy (us. 14). Możemy zatym, zamiast dzielić 170469000 przez 56700, wykonać dzielenie 170469 : 567; to, co otrzymamy w ilorazie, będzie tymsamym, cobyśmy otrzymali, dzieląc przez siebie pierwotnie dane liczby; resztę tylko, jeżeli będzie, wypadnie nam powiększyć 100 razy. Tak np.

$$\begin{array}{r|l} 17040690\cancel{0}\cancel{0} & 567\cancel{0}\cancel{0} \\ \cline{2-2} -1701 & 30554 \\ \hline 3069 & \\ -2835 & \\ \hline 2340 & \\ -2268 & \\ \hline 72\times100=7200 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 62499\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0} & 1240\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0} \\ \cline{2-2} -6200 & 50 \\ \hline 499\times1000=499000 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 4830\cancel{0} & 23\cancel{0} \\ \cline{2-2} -46 & 210 \\ \hline 23 & \\ -23 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Stąd widzimy, że, *gdy mamy podzielić przez siebie liczby zakończone zerami, to, wykonywając działanie, możemy jednakową liczbę zer końcowych w dzielnéj i dzielniku opuścić, przypisując tylko do reszty, jeżeli ona będzie, tyleż zer, ileśmy ich opuścili w każdéj z danych liczb.*

Zauważmy, że nawet w przypadku, gdy dzielnik jest zakończony zerami, a ostatnia cyfra dzielnéj nie jest zerem, możemy, z uwagi, że w każdym razie tyle ostatnich cyfr dzielnéj, ile jest końcowych zer dzielnika, znajdzie się zawsze w reszcie, opuścić w czasie wykonywania dzielenia końcowe zera dzielnika i nie zważać na tyleż końcowych cyfr dzielnéj, które dopiéro, po wyznaczeniu ilorazu, przypiszemy do reszty dzielenia. Tak np.

$$\begin{array}{r|l} 254\cancel{3}\cancel{8} & 6\cancel{0}\cancel{0} \\ \cline{2-2} -24 & 42 \\ \hline 14 & \\ -12 & \\ \hline 238 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 483\cancel{5}\cancel{6}\cancel{7} & 23\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0} \\ \cline{2-2} -46 & 21 \\ \hline 23 & \\ -23 & \\ \hline 567 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 6249\cancel{9} & 124\cancel{0} \\ \cline{2-2} -620 & 50 \\ \hline 499 & \end{array}$$

Widzimy więc, że wogóle, *gdy dzielnik jest zakończony zerami, w czasie wykonywania dzielenia możemy opuścić tak te zera dzielnika, jak i taką samę liczbę końcowych cyfr dzielnéj, byle tylko do otrzymanéj reszty przypisać opuszczone cyfry dzielnéj.*

Wykonywanie piśmienne dzielenia przez liczbę jednocyfrową, gdy już posiadamy dostateczną wprawę, zwykle sobie skracamy znacznie pisząc tylko cyfry ilorazu i ostatnią (jeżeli jest) resztę. Np., gdy mamy podzielić

57803543 przez 9
6422615 iloraz
z resztą 8

postępujemy tak: 9 w 57-u 6 razy (piszę 6 pod 7-ką), $9\times6=54$, zostaje 3, 9 w 38-u 4 razy (piszę 4 pod 8-ką),..., 9 w 53-ch 5 razy (piszę 5 pod 3-ką), $9\times5=45$, pozostaje reszta dzielenia 8.

21. Próbę dzielenia możemy oprzéć na tym, że (us. 3, 11)

$$\text{iloraz} \times \text{dzielnik} = \text{dzielnéj},$$

$$\text{iloraz niezupełny} \times \text{dzielnik} + \text{reszta} = \text{dzielnéj}.$$

Jeżeli więc dzielenie dobrze wykonaliśmy, to, po pomnożeniu przez siebie liczby, otrzymanéj w ilorazie, i dzielnika, i dodaniu do tego iloczynu reszty, jeżeliśmy ją otrzymali, wypaść nam powinna dzielna. Np.

$$\begin{array}{r|l}
7500339 & 25 \\ \cline{2-2}
\ldots\ldots\ldots & 300013 \\
\ldots\ldots\ldots & \\ \cline{1-1}
14 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
300013 \\
\times 25 \\ \hline
1500065 \\
600026 \\ \hline
7500325 \\
+14 \\ \hline
7500339
\end{array} \text{ (dobrze).}$$

$$\begin{array}{r|l}
48300 & 230 \\ \cline{2-2}
-46 & 210 \\ \cline{1-1}
23 & \\
-23 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
230 \\
\times 210 \\ \hline
23 \\
46 \\ \hline
48300
\end{array} \text{ (dobrze).}$$

Jest to więc p r ó b a d z i e l e n i a p r z e z m n o ż e n i e.

Jeżeli mamy np. $230 \times 210 = 48300$, to gdy iloczyn 48300 będziemy uważać jako dzielną, możemy, z uwagi, że iloczyn nie zależy od porządku czynników, przyjąć którykolwiek z czynników za dzielnik, np. 210, wtedy (us. 3) pozostały czynnik, 230, będzie ilorazem; widzimy więc, że gdy poprzedni iloraz przyjmiemy za dzielnik, to jako iloraz otrzymać powinniśmy poprzedni dzielnik. Podobnie, gdy np. $7500339 = 300013 \times 25 + 14$, to po odjęciu od sumy 7500339 jednego składnika, 14, otrzymamy (§ 7, us. 3) drugi składnik (300013×25), tak iż

$$7500339 - 14 = 300013 \times 25;$$

przyjmując więc liczbę $(7500339 - 14)$ jako dzielną, a czynnik 300013 jako dzielnik, otrzymamy jako iloraz liczbę 25. A ponieważ w odejmowaniu

$$7500339 - 14 = (25 \times 300013)$$

odjemna = reszcie + odjemnik, więc

$$7500339 = 25 \times 300013 + 14,$$

z czego widzimy, że gdy liczbę 7500339 podzielimy przez liczbę 300013, poprzedni iloraz niezupełny, to otrzymamy, jako iloraz niezupełny liczbę 25, poprzedni dzielnik, i resztę 14, tę samę co poprzednio.—Opierając się na tym, możemy wykonać p r ó b ę d z i e l e n i a p r z e z d z i e l e n i e [1]), dzieląc dzielną przez tę liczbę, którąśmy otrzymali w ilorazie. Tak np. powyższe dzielenia sprawdzimy, wykonywając dzielenia

---

[1]) Próba mnożenia i dzielenia przez 9 w § 13, us. 17.

```
 48300 | 210          7500339 | 300013
—42    | 230         —600026  | 25
 63                   1500079
—63                  —1500065
   0 (dobrze).             14 (dobrze).
```

22. Ponieważ dzielenie jest działanie odwrotne mnożeniu dwu czynników (us. 5), więc możemy wykonać próbę mnożenia przez dzielenie, znaleziony iloczyn dzieląc czyto przez mnożną, czyteż przez mnożnik; wtedy w ilorazie otrzymać powinniśmy odpowiednio poprzedni mnożnik, lub mnożną, reszty zaś żadnéj wypaść nam nie powinno. Np.

```
  342100          73551500 | 342100
  ×215           —6842     | 215
 17005             5151
 3421             —3421
6842               17105
73551500          —17105
                       0 (dobrze).
```

23. Gdy mnożymy przez siebie dwie liczby, to nie możemy ściśle zgóry oznaczyć, wiele będzie cyfr iloczynu: wiemy tylko, że ich będzie albo tyle, ile jest w mnożnéj i w mnożniku razem, albo o jednę mniéj (§ 6, us. 30).

Gdy mamy podzielić liczbę np. 8-cyfrową przez 3-cyfrową, to wrazie, gdy początkowe 3 cyfry dzielnéj tworzą liczbę nie mniejszą od dzielnika (us. 18), posłużą już one do wyznaczenia jednéj (piérwszéj) cyfry w ilorazie; że zaś w miarę użycia (przypisywania do reszt) następujących cyfr dzielnéj wyznaczamy następujące cyfry w ilorazie (us. 18), więc w tym przypadku, prócz téj 1-éj cyfry, będzie cyfr tyle, ile jeszcze pozostało cyfr dzielnéj, czyli tyle, o ile jest więcéj cyfr w dzielnéj niż w dzielniku, t. j. 8—3. Wszystkich więc cyfr w ilorazie będzie $(8-3)+1=6$. — Jeżeli zaś początkowe 3 cyfry dzielnéj przedstawiają liczbę mniejszą od dzielnika, to dopiéro z początkowych $3+1=4$ cyfr dzielnéj (us. 18) wyznaczymy piérwszą cyfrę w ilorazie, a więc w tym przypadku będzie w ilorazie cyfr o jednę mniéj niż poprzednio, t. j. $8-3=5$ cyfr. A więc: *w ilorazie otrzymujemy tyle cyfr, o ile jest ich więcéj w dzielnéj niż w dzielniku, albo o jednę więcéj* [1]). Odrazu jednak, mając dane liczby, łatwo ściśle oznaczyć możemy, który z tych dwu przypadków miejsce mieć będzie, t. j. dokładnie powiedziéć, ile cyfr w ilorazie otrzymamy.

[1]) Wogóle: jeżeli liczbę cyfr dzielnéj nazwiemy p, a liczbę cyfr dzielnika q, to w ilorazie otrzymujemy cyfr $p-q$, albo $p-q+1$.

24. Weźmy dzielenie w przypadku, gdy dzielna nie jest podzielna przez dzielnik, np. 104 : 6. Otrzymamy iloraz niezupełny 17 i resztę 2, a więc (us. 11)

$$104 = 6 \times 17 + 2$$

dzielna = dzielnikowi × iloraz niezupełny + reszta.

Ponieważ reszta jest mniejsza od dzielnika, więc można znaleść liczbę, którą dodając do reszty, otrzymamy dzielnik: $6 - 2 = 4$. Stąd $6 = 4 + 2$ i (§ 5, us. 7) $6 - 4 = 2$. Możemy więc tę liczbę 2 zastąpić przez (§ 5, us. 6) różnicę $6 - 4$ i napisać

$$104 = 6 \times 17 + 6 - 4.$$

Tu mamy $6 \times 17 + 6$ i od liczby, stąd otrzymanéj, odjąć 4. Lecz iloczyn 6×17 jest sumą (§ 6, us. 2) siedemnastu składników 6; do niéj mamy tu jeszcze dodać ten sam składnik 6. Liczba więc $6 \times 17 + 6$ przedstawia sumę osiemnastu składników 6, czyli iloczyn 6×18. Od tej zaś liczby $6 \times 17 + 6 = 6 \times 18$ odejmując liczbę 4, otrzymujemy 104, t. j.

$$104 = 6 \times 18 - 4.$$

Tę liczbę 4, o którą reszta różni się od dzielnika, t. j. liczbę, którą należy dodać do reszty, aby otrzymać dzielnik, nazywać będziemy: dopełnieniem reszty do dzielnika, albo krócéj: d o p e ł n i e n i e m r e s z t y. Jest więc:

$2 + 4 = 6$, reszta + dopełnienie reszty = dzielnikowi.

Zauważmy jeszcze, że ponieważ $18 = 17 + 1$, a 17 jest ilorazem niezupełnym naszego dzielenia, więc liczba 18 przedstawia: iloraz niezupełny + 1. A więc to, cośmy powyżéj napisali,

$$104 = 6 \times 18 - 4,$$

możemy tak ogólnie przedstawić.

dzielna = dzielnikowi × (iloraz niezupełny + 1) — dopełnienie reszty.

Gdy więc, wykonywając dzielenie 1000 : 7, otrzymujemy resztę 6, to dopełnieniem reszty będzie tu liczba 1, bo $6 + 1 = 7$, i możemy napisać:

$$1000 = 7 \times 142 + 6 \quad \text{i} \quad 1000 = 7 \times 143 - 1.$$

25. Mając kilka liczb danych, możemy szukać takiéj liczby, którą biorąc zamiast każdéj z danych liczb, otrzymujemy też samę sumę, co z dodania liczb danych. Np., gdy mamy dane liczby: 5, 8, 27 i 16, to liczba 14 jest taką właśnie liczbą, bo

$$5 + 8 + 27 + 16 = 56,$$
$$14 + 14 + 14 + 14 = 56,$$

a więc

$$14 + 14 + 14 + 14 = 5 + 8 + 27 + 16.$$

Taką liczbę, jak tu 14, t. j. *liczbę, którą biorąc zamiast każdéj z danych liczb, otrzymujemy tę samę sumę, co z dodania danych liczb, nazywamy ś r e d n i ą a r y t m e t y c z n ą* [1] *liczb danych.*

[1] W znaczeniu średniéj arytmetycznéj odniedawna używają niekiedy wyrazu «przeciętna».

Ponieważ $14+14+14+14=14\times4$ (§ 6, us. 2), więc

$$14\times4=5+8+27+16,$$

skąd, uważając ilość $5+8+27+16$ jako dzielną, a czynnik 4, który nam przedstawia ilość liczb danych, jako dzielnik, mamy (us. 5)

$$(5+8+27\times16):4=14,$$

t. j., *aby otrzymać średnią arytmetyczną liczb danych, należy sumę tych liczb podzielić przez ich ilość.*

Jeżeli np. było w południe jednego dnia 15^0 (stopni) ciepła, drugiego 18^0, trzeciego 12^0, czwartego 10^0, piątego 8^0, szóstego 10^0, siódmego 11^0, to średnia arytmetyczna stanu ciepła w południe w ciągu tego tygodnia jest

$$(15^0+18^0+12^0+10^0+8^0+10^0+11^0):7=84^0:7=12^0.$$

Np. Ktoś skupił cztéry kawałki gruntu; za jeden, mający 4 morgi, płacił po 180 rs. za mórg; za drugi, mający 2 morgi, po 240 rs. za mórg; za trzeci, mający 3 morgi, po 225 rs. za mórg; nakoniec za czwarty, mający mórg obszaru, zapłacił 315 rs. Po ile płacił średnio za mórg? — Mamy tu znaléść średnią arytmetyczną 10-u liczb: 4-ch liczb 180 rs., 2-u liczb 240 rs., 3-ch liczb 225 rs. i liczby 315 rs., a więc:

$$(180\text{ rs.}\times4+240\text{ rs.}\times2+225\text{ rs.}\times3+315\text{ rs.}):10=2190\text{ rs.}:10=219\text{ rs.}$$

Odp. Płacił średnio za mórg 219 rs.

26. Uzupełnimy nieco to, cośmy w zakończeniu poprzedzającego §-u mówili o potęgach liczb.

Jeżeli mamy np. $3^9:3^4$, to z uwagi, że (§ 6, us. 40) $3^9=3^4\times3^5$, możemy nasze dzielenia tak przedstawić $(3^4\times3^5):3^4$. Mamy tu iloczyn dwu czynników 3^4 i 3^5 podzielić przez jeden z tych czynników; otrzymamy więc (us. 13) jako iloraz czynnik pozostały, t. j. liczbę 3^5; więc $3^9:3^4=3^5$. Nadto widzimy tu, że wykładnik ilorazu, 5, powstał z wykładników dzielnéj i dzielnika, 9 i 5 wskutek odjęcia od wykładnika dzielnéj wykładnika dzielnika, $5=9-4$. Więc $3^9:3^4=3^5=3^{9-4}$, t. j. *iloraz dwu potęg téj saméj liczby jest także potęgą téj liczby, któréj wykładnik jest różnicą wykładników dzielnéj i dzielnika.*

27. Jeżeli zastosujemy to do przypadku szczególnego, gdy dzielna i dzielnik są tymi samymi potęgami téj saméj liczby, to będziemy mieli w wykładniku różnicę liczb równych sobie (§ 5, us. 11), t. j. zero, np. $3^4:3^4=3^{4-4}=$ $=3^0$. Z drugiéj strony, dzieląc liczbę przez nią samę, otrzymujemy (us. 11) jedność $3^4:3^4=1$. Więc 3^0 jest to samo co 1; również $10^0=1$ i t. d. *Jakąkolwiek liczbę z wykładnikiem zero możemy uważać za przedstawienie jedności.*

28. Skutkiem tego możemy liczby np. 30568, 856724 (§ 6, us. 41) tak przedstawić:

$$30568 = 3\times10^4+5\times10^2+6\times10^1+8\times10^0,$$
$$856724 = 8\times10^5+5\times10^4+6\times10^3+7\times10^2+2\times10^1+4\times10^0,$$
i podobnie, np. (§ 6, us. 42)
$$[250413]_6 = 2\times6^5+5\times6^4+4\times6^2+1\times6^1+3\times6^0, \text{ i t. d.}$$

29. Jeżeli chcemy liczbę np. 22185 przedstawić w systemacie szóstkowym, to, ponieważ na piérwszym z prawéj strony miejscu ma być postawiona część liczby, jaka się zostanie po oddzieleniu z liczby 22185 wszystkich szóstek, należy wynaléść resztę z podzielenia 22185 przez 6. Iloraz niezupełny przedstawiać nam będzie szóstki; aby znaléść tę część liczby, którą wypadnie oznaczyć na miejscu drugim (z prawéj strony), trzeba z tych szóstek oddzielić wszystkie kwadraty liczby sześć, t. j. ten iloraz niezupełny podzielić jeszcze przez 6, a wtedy reszta będzie tym, co na miejscu drugim napisać nam wypadnie, iloraz zaś niezupełny przedstawi nam ile razy w danéj liczbie jest wszystkich $6^2 = 36$. I t. d. Więc

$$\begin{array}{llllll}
22185 & \multicolumn{1}{|l}{6} & & & & \\
\ldots\ldots & \multicolumn{1}{|l}{3697} & \multicolumn{1}{|l}{6} & & & \\
\ldots\ldots\ldots & & \multicolumn{1}{|l}{616} & \multicolumn{1}{|l}{6} & & \\
\overline{3}\ \ldots\ldots\ldots & & & \multicolumn{1}{|l}{102} & \multicolumn{1}{|l}{6} & \\
\overline{1}\ \ldots\ldots & & & & \multicolumn{1}{|l}{17} & \multicolumn{1}{|l}{6} \\
\overline{4}\ \ldots\ldots & & & & & \multicolumn{1}{|l}{2,} \\
\overline{0}\quad \overline{5} & & & & &
\end{array}$$

mamy więc tu:

$$\begin{aligned}
22185 &= 3697\times6+3 \\
&= (616\times6+1)\times6+3 = 616\times6^2+1\times6^1+3 \\
&= (102\times6+4)\times6^2+1\times6^1+3 = 102\times6^3+4\times6^2+1\times6^1+3 \\
&= (17\times6)\times6^3+4\times6^2+1\times6^1+3 = 17\times6^4+4\times6^2+1\times6^1+3 \\
&= (2\times6+5)\times6^4+4\times6^2+1\times6^1+3 = 2\times6^5+5\times6^4+4\times6^2+1\times6^1+3 \\
&= [250413]_6.
\end{aligned}$$

W podobny sposób, aby liczbę np. 1199801 przedstawić w systemacie np. dwunastkowym, wykonamy kolejne dzielenia przez podstawę 12, a oznaczywszy 10 przez cyfrę np. a i 11 przez cyfrę np. b, mamy $1199801 = [49a3b5]_{12}$.

W takito sposób możemy liczbę przedstawioną w systemacie dziesiątkowym wyrazić w innym systemacie.

(Zadania arytmetyczne. § 6, 7.)

ROZDZIAŁ IV.

MIARY. DZIAŁANIA NA LICZBACH WIELORAKICH.

§ 8. MIARY.

1. «Rzeczy do ważenia mogą być cięższe, albo lżejsze; mierzyć przypada czasem mniéj, a czasem więcéj; jedne rzeczy trzeba płacić drożéj, inne taniéj. Z tego powodu rozmaite wagi, miary i piéniądze postanowiono. Drobne naprzykład piéniądze wygodne są do wypłacania sum małych, nie zaś wielkich. Wagi, dostateczne na pomiarkowanie ciężarów w prostych towarach, nie są dostateczne [1]) na zważenie rzeczy droższych, gdzie uchybienie małe szkodęby znaczną kupującemu, albo przedającemu przyniosło. Trzeba więc było wielorakie miéć piéniądze, wagi i miary; trzeba było podzielić najwyższe gatunki na niższe, których więcéj albo mniéj jeden wyższy gatunek składałoby, aby tym sposobem wygodzie i potrzebie ludzkiéj dogodzić.» [2])

Rozmaite narody wytwarzały sobie dla swych potrzeb różne miary. Początkowo odnoszono wymiary różnych rzeczy do pewnych przedmiotów powszechnie znanych, jak np. do ziarn zboża, do długości wziętych z ciała ludzkiego i t. d. Ponieważ jednak te przedmioty mogły się od siebie różnić, a rozwijające się stosunki wymagały miar jednostajniejszych, więc starano się określić dokładniéj to, według czego mierzyć miano w pewnym kraju. Tak więc np. przy wymiarach, wziętych z ciała ludzkiego, miano na uwadze osoby, ważne stanowisko w narodzie zajmujące, które zwykle fizycznie bywały wówczas silnie rozwinięte; dlategoto np. stopa, miara od najdawniejszych czasów używana, u rozmaitych ludów nieco odmienna, jest jednak zawsze większa od zwykłéj teraz stopy ludzkiéj [3]).

---

[1]) «nie są dosyć».

[2]) *Arytm. dla sz. nar.*, str. 79.

[3]) U Egipcyjan i Żydów np. były między innymi miary: palec (t. j. szerokość palca), piędź (szerokość dłoni), stopa, krok, droga jednego dnia i t. d.—Podobnież w Anglii, według postanowienia Henryka I z r. 1101, gyrd (odpowiadający teraźniejszemu yardowi), miara długości do powszechnego użycia, jest długością ramienia tego króla do końca trzeciego palca. Miara ta dzieli się na trzy stopy, stopa na 12 cali, wielkość zaś cala wyznacza długość trzech wzdłuż ustawionych ziarn jęczmienia. Według różnych postanowień (ostatnie z r. 1494), ciężar 32 suchych ziarn pszenicy stanowił pennę (pennyweight), których 20 tworzyło uncyją, 12

Z czasem coraz więcéj uczuwać się dawała w każdym społeczeństwie potrzeba ujednostajnienia miar, t. j. posiadania pewnych stałych wzorów i rozciągnięcia kontroli nad kopijami tych wzorów, będącymi w powszechnym użyciu. Mimo, że w oddzielnych państwach takie wzory miar ustanawiano, że starano się o wyrób kopij dokładnych, że za używanie miar niedokładnych określano kary, doszło w wieku XVIII do tego, że w każdym prawie mieście oddzielnego państwa [1]) znajdowały się inne miary, a niekiedy nawet w tym samym mieście bywały różne miary do rozmaitych przedmiotów [2]). Było to bardzo niedogodne dla handlujących: rachunki stawały się kłopotliwymi, a nadużycia łatwymi. Niedogodności te więcéj się jeszcze uczuwać dawały w stosunkach wzajemnych różnych narodów, chociaż niekiedy porównywano ze sobą dość starannie miary uważane za obowiązujące w różnych państwach i ogłaszano tablice zamiany miar.

2. Potrzeba było mieć miary dokładne i stałe, niezmienne, a nadto tak dogodne, iżby wiele narodów, jeżeli nie wszystkie, przyjąć je zechciały za swoje. Należało więc obmyśléć miary takie, żeby zasada, na któréj miary są oparte, zmianie nie ulegała, tak iż, wrazie zatracenia wyrobionych wzorów, możnaby je zawsze nanowo odtworzyć dokładnie, a nadto, żeby ta zasada była tak wybraną, iżby nie była wzięta z warunków właściwych pewnemu jednemu krajowi, ale mogła być uważana za odnoszącą się równie dobrze do warunków jakiegokolwiek kraju i narodu.

Taki właśnie układ miar opracowali w ostatnich latach XVIII stulecia uczeni francuscy. Oparli oni ten układ na niezmieniających się wymiarach ziemi. Wymierzywszy część łuku południka ziemskiego, wnieśli z niéj o długości całego południka. Ćwierć téj długości południka wystawić sobie należy podzieloną na 10 000 000 równych części. Tę część nazwali *metrem* *).

Aby zaś jednocześnie wprowadzić ułatwienie we wszelkie rachunki z miarami, postanowiono, że przy podziałach wszędzie użytą będzie

---

zaś uncyj f u n t (pound); miara objętości: g a l l o n zawierała 8 funtów pszenicy czyli mieściła 61440 z i a r n p s z e n i c y.—S t o p a f r a n c u s k a dawna, t. z. p i e d d u r o i, albo «paryska», ma być, według podania, długością stopy Karola Wielkiego.

[1]) Miało to miejsce nietylko w Niemczech, we Włoszech, w Polsce, we Francyi i t. d., ale nawet w Anglii, w któréj jeszcze Charta magna libertatum (r. 1215) zastrzegła jednakowe wagi w całym państwie, co różnymi czasy było ponawiane, i w któréj wyrabianie wiarogodnych kopij wzorów miary długości i ciężaru (odlanych z rozkazu Elżbiety i w r. 1588 złożonych w skarbcu) dozwalane było tylko za osobnym przywilejem.

[2]) W Paryżu np., prócz zwykłego łokcia («aune»), istniał inny dla jedwabiu, mniejszy dla sukna, a jeszcze mniejszy dla płótna.—Liczba różnych miar do mierzenia powierzchni gruntu, używanych w północnej Francyi, wydawaćby się dziś mogła prawie bajeczną: były wsi, które miały po kilka własnych miar.

*) Należy uczniom pokazać wielkość metra i jego części (por. str. 83) Również daléj pokazywać jednostki średniéj wielkości, porównywać je z sobą i t. d.

liczba 10. Dla nazwania miary 10 razy większéj od metra przystawili na początku do wyrazu metr wyraz *deka* (zgrecka: 10), tak iż d e k a m e t r oznacza 10 metrów. Dla nazwania miary 10 razy większéj od dekametra, czyli 100 razy większéj od metra, użyli wyrazu *hekto* (zgrecka: 100), skąd h e k t o m e t r. Podobnież dla nazwania miary 10 razy większéj od hektometra, użyli dodatku *kilo* (zgrecka: 1000), skąd k i l o m e t r. Również na oznaczenie miary 10 000 razy większéj od metra, przy pomocy dodatku *myria* (zgrecka: 10 000), utworzono m y r y j a m e t r.—Co się zaś tyczy miar mniejszych od metra, to na oznaczenie części dziesiątéj, setnéj, tysiącznéj użyto odpowiednio dodatków *deci, centi* i *mili* (odpowiadających łacińskim nazwom 10, 100 i 1000), tak iż d e c y m e t r oznacza 10-ą część metra, c e n t y m e t r oznacza 10-ą część decymetra, czyli 100-ą metra, a milimetr oznacza 10-ą część centymetra, czyli 1000-ą metra.

Nadal, dla skrócenia, będziemy zamiast metr pisać często m., oraz

Dm. zamiast dekametr,	dm. zamiast decymetr,
Hm. zamiast hektometr,	cm. zamiast centymetr,
Km. zamiast kilometr,	mm. zamiast milimetr.
Mm. zamiast myryjametr,	

Są to więc

M i a r y d ł u g o ś c i czyli m i a r y l i n i j o w e.

m. = 10 dm. = 100 cm. = 1000 mm.
dm. = 10 cm. = 100 mm.
cm. = 10 mm.
Dm. = 10 m. = 100 dm. = 1000 cm. = 10 000 mm.
Hm. = 10 Dm. = 100 m. = 1000 dm. i t. d
Km. = 10 Hm. = 100 Dm. = 1000 m. i t. d.
Mm. = 10 Km. = 100 Hm. = 1000 Dm.= 10 000 m. i t. d.

Na m i l ę g i e o g r a f i c z n ą [1]) liczy się 7407 i prawie pół metra.

M i a r y p o w i e r z c h n i.

Przy wymierzaniu powierzchni różnych przedmiotów używają się:

m. kwadratowy *), dm. kw., cm. kw., mm. kw.,

a przy mierzeniu rozległości prowincyi, kraju i t. d.

Mm. kw., Km. kw.

Przy obliczaniu jednak powierzchni pola ornego, łąki, pastwiska, lasu, sadu i t. d., wogóle—gruntu **), używa się jako jednostki Dm. kw., który wtedy nazywa się

ar,

---

[1]) O mili gieograficznej zobacz niżej koniec ustępu 3-go.
[Francuskie «lieu» na lądzie ($^1/_{25}$ stopnia)=$^4/_9$ Mm., na morzu ($^1/_{20}$ st.)=$^5/_9$ Mm.]

*) Por. § 6, us. 33, 34.

**) Ale grunt pod budowle, a także często powierzchnie ogrodów w miastach oblicza się na m. kw.

jak również używa się miary większéj: 100 arów, która więc nazywa się hekto-ar, czyli **h e k t a r**; oznaczać ją będziemy krócéj Har.

M i a r y o b j ę t o ś c i.

Przy mierzeniu objętości różnych przedmiotów używa się miar: m. sześcienny *), dm. sz., cm. sz., mm. sz.

Ale przy wymierzaniu objętości [1]) zboża, owoców, a także cieczy w handlu, uważa się za jednostkę dm. sz., który wtedy nazywa się

litr;

przy większych objętościach zboża lub cieczy w handlu, jest używany z większych miar głównie **h e k t o l i t r**, t. j. 100 litrów, oraz niekiedy **d e k a l i t r**, t. j. 10 litrów; z miar zaś mniejszych od litra używane są niekiedy na oznaczenie objętości cieczy w handlu: **d e c y l i t r**, t. j. 10-a część litra, i **c e n t y l i t r**, t. j. setna część litra. Nazwy te piszą się zwykle krócéj, mianowicie Hl., Dl., dl., cl., a także l. zamiast litr.

M i a r y c i ę ż a r u, czyli w a g i.

Przy nagrzéwaniu lub oziębianiu jakiegokolwiek przedmiotu zmienia się jego objętość **), a tymsamym dwie jednakowe objętości tego samego przedmiotu przy różnéj temperaturze bywają niejednakowo ciężkie. Należy więc dla oznaczenia jednostki ciężaru wybrać taki przedmiot, któregoby objętość przy pewnéj temperaturze szczególnie się różniła od objętości przy wszelkiéj innéj temperaturze, a nadto taki, któryby łatwo można było mieć wszędzie ***) i bez trudności otrzymać go w stanie czystym ****). Te wszystkie własności posiada woda. Jest ona wszędzie, a skądkolwiek czerpana, po oczyszczeniu przez dystylacyją *), jest zawsze jednakowa. Nadto przy pewnéj temperaturze **), którą zwyczajnymi środkami otrzymać można, ma objętość najmniejszą, t. j. jest najgęstszą, najściślejszą ***). Dlatego woda najwięcéj się nadaje,

---

*) Por. § 6, us. 36, 37.

[1]) Jednostką przy wymierzaniu drzewa opałowego jest we Francyi m. sz., który się wtedy nazywa «stere»; używa się tam także «decistere».

**) Np. woda z naczynia, które wypełnia, przy znacznym ogrzaniu (jeszcze przedtym, nim wrzéć zacznie) wyléwa się, a coraz więcéj marznąca sprawia pękanie gontów, rossadza kamienie, butelki i t. d. Z téjże przyczyny części szyn, mostów żelaznych niezupełnie do siebie przystają. I t. d.

***) Żelazo, złoto, srebro i t. d. w niewielu tylko miejscowościach się dobywa.

****) Złoto, srebro, a osobliwie żelazo bardzo trudno mieć w stanie zupełnie czystym

*) Przyrząd do dystylowania wody znajduje się np. w każdéj aptece. Dystylacyja polega na przeprowadzeniu wody w stan pary i skropleniu téj pary w części chłodnéj przyrządu.

**) Przy 4 stopniach ciepła termometru Celsyjusza, czyli przy 3-ch i jednéj-piątéj stopnia ciepła termometru Réaumur'a.

***) Tak, iż wrazie, gdy następnie wodę będziemy albo wciąż ogrzéwać albo wciąż oziębiać, to jéj objętość będzie się wciąż powiększać, czyli gęstość wody będzie się wciąż zmniejszać.

aby jéj ciężar w pewnych warunkach uważać za jednostkę wagi. Przyjęto więc, że ciężar jednego cm. sz. wody dystylowanéj przy takiéj jéj temperaturze, przy któréj woda jest najgęstsza, uważa się za jednostkę miar ciężaru, czyli wag; ciężar ten nazywa się

gram.

Miary większe i mniejsze tworzą się podobnie, jak poprzednio. Mamy więc dekagram t. j. 10 gramów, hektogram t. j. 100 gramów, kilogram t. j. 1000 gramów; decygram t. j. 10-a część grama, centygram t. j. 100-a część grama i miligram t. j. 1000-a część grama. Dla skrócenia będziemy pisząc używać oznaczeń: g., Dg., Hg., Kg., dg., cg., mg.—Prócz tego większe ciężary liczy się na centnary metryczne [1]) po 100 Kg., oraz na beczki czyli tonny [2]) po 1000 Kg.—Według powszechnego dziś zwyczaju tam, gdzie te miary są w użyciu, pół kilograma w drobnym handlu nazywa się funtem.

Widzimy, że wszystkie te miary linijowe, powierzchni, objętości, oraz ciężaru, oparte są na téj saméj zasadniczéj mierze, t. j. na metrze. Dlatego ten układ miar nazywa się układem metrycznym, albo systematem metrycznym, a miary te nazywają się miarami metrycznymi.

Układ ten miar, przyjęty we Francyi w końcu wieku XVIII, został już teraz także wprowadzony w wielu państwach stałego lądu Europy, a w téj liczbie w Niemczech [3]) (r. 1875), w Austro-Węgrzech [4]) (r. 1876), jakotéż w wielu państwach pozaeuropejskich. Nadto we wszystkich dziełach naukowych wszelkie wymiary są przedstawiane w systemacie metrycznym.

3. We Francyi sprawę ujednostajnienia miar podjęła jeszcze Rada Filipa Długiego w r. 1321, lecz te usiłowania, jak i inne późniejsze, wobec krzyżujących się interesów osób wpływowych, spełzły na niczym. Dopiéro w l. 1778 i 1789, w różnych miastach Francyi, przy wybiéraniu deputowanych, stanowczo domagano się od nich obalenia różnorakich miar, «będących tylko powodem do nieporozumień, oszustw, a nawet ucisku». W skutek tego w r. 1790 zajęto się energicznie kwestyją ustalenia miar.

Ówcześni uczeni wskazywali dwa sposoby rozwiązania téj kwestyi, za-

---

[1]) Centnar metryczny czyli kental metryczny («quintal métrique».)

[2]) Tonna—«tonne», «tonneau».

[3]) W Niemczech dodano nazwy (które jednak, prócz funta, rzadko się spotykają): m.=Stab; dm.=Neuzoll; mm.=Strich; Dm.=Kette; litr=Kanne; połowa litra=Schoppen; Hl.=Fass; 50 litrów=Scheffel; 10 g =Neuloth; 500 g.=Pfund; 50 Kg.=Centner., ale tonna 1000 Kg. Nadto 7500 m. uznano za milę.

[4]) Prawnie w Austro-Węgrzech używa się następujących podziałów: Mm., Km., m., dm., cm., mm.; Mar., Har., ar., m. kw., dm. kw., mm. kw.; m. sz., dm. sz., cm. sz., mm. sz., Hl., l., dl., cl.; beczka, Kg., Dg., g., dg., cg., mg., a nadto dla drobnego handlu funt=500 g.

projektowane przeszło sto lat przedtym.—Myśl jednego z nich powziął Huyghens, twórca teoryi wahadła, który w r. 1664 zalecał, jako stopę zasadniczą, czyli «stopę czasu» (pes horarius) przyjąć trzecią część wahadła prostego, bijącego sekundy. Gdy zaś się okazało, że ta długość zależy od szerokości gieograficznéj miejsca, w którym bije wahadło, projektowano przyjąć zawsze za zasadę długość wahadła bijącego sekundy, ale już w pewnym miejscu oznaczonym, jak np. w Paryżu, albotéż na równiku [1]), lub nakoniec pod 45^0 szerokości gieograficznéj.—Inny sposób podał astronom Mouton z Lijonu w r. 1670, zalecając przyjąć za zasadę długość południka ziemskiego, a mianowicie długość łuku jednéj jego minuty, któraby się dzieliła na 10, 100, 1000 i t. d. rozmaicie nazwanych przezeń części.—Nadto w r. 1790 Bonné zaprojektował [2]) przyjęcie za zasadę miar określonéj części łuku równika, jako «stopy równikowéj».

W r. 1790 w Zgromadzeniu ustawodawczym Talleyrand przedstawił żądanie ustalenia miar, skutkiem czego uchwalono, aby komisarze akademii nauk w Paryżu spólnie z członkami, wybranymi z towarzystwa naukowego w Londynie, «pod szerokością 45^0, lub inną, którąby za odpowiedniejszą uznali, wyznaczyli długość wahadła i z niéj wyprowadzili wzór niezmienny dla wszystkich miar i wag». Akademija paryska wybrała komisyją, do któréj weszli uczeni Borda, Lagrange, Laplace, Monge i Condorcet; komisyja ta 19 marca r. 1791 postawiła takie wnioski. Chociaż długość wahadła sekundowego pod szer. 45^0 przedstawia się jako średnia długości pod innymi szerokościami, to jednak jest ona wogóle zależną od innego elementu, czasu, oraz od dowolnego podziału dnia na sekundy, a prócz tego jest ona zbyt małą, aby było właściwym przez nią wyrażać odległości miejsc znacznie od siebie oddalonych. Nadto jeszcze, nader ważnym jest wzgląd na to, że mniejszą może być niedokładność przy wyznaczaniu zasadniczéj miary ze starannie mierzonego dość wielkiego łuku południka lub równika, niż z najstaranniéj wymierzonéj tak niewielkiéj długości wahadła. Z dwu zaś pozostałych do wyboru długości: równika i południka, równik nie zaleca się większą prawidłowością od południków. A więc, z uwagi, że wyznaczenie długości mniéj ściśle daje się wykonać, niż wyznaczenie szerokości, oraz, że pod równikiem niewielu ludzi przebywa, gdy tymczasem przez każdą miejscowość przechodzi południk, komisyja zaleca, aby «jednostką rzeczywistą» miar była ćwiartka południka ziemskiego, jéj zaś dziesięciomilijonowa [3]) część «jednostką do użycia powszechnego», a za zasadę przy wyznaczeniu jednostki wag przyjąć pewien

---

[1]) Wielkimi zwolennikami téj zasady byli Bouguer i Lacondamine, którzy wymierzyli (1735—1746) część łuku Peruwii (dł. gieog. $298^0 44' 0''$) od $-3^0 4' 32''$ do $+0^0 2' 31''$ sz. g. Kazali oni długość wahadła sekundowego pod równikiem wykuć w kamieniu z napisem: «Mensurae naturalis exemplar, utinam et universalis».

[2]) Artykuł Muncke'go *Mass* w Gehler'a *Physikalisches Wörterbuch* (VII, 1836).

[3]) Przez to uczyniono ją niezależną od podziału koła na stopnie, minuty i sekundy.

ciężar wody dystylowanéj, ważonéj w próżni przy téj temperaturze, przy któréj ona przechodzi ze stanu stałego w ciekły. W tym celu należy wymierzyć część łuku południka paryskiego od Dunkierki do Barcelony, która przedstawia więcéj niż $9^0 1/2$, przecina równoleżnik średni (t. j. 45^0) i kończy się tak z jednéj jak z drugiéj strony u poziomu morza. Nadto należałoby wyznaczyć liczbę wahań, któreby miara ustanowić się mająca robiła w ciągu doby, w próżni, przy poziomie morza i temperaturze lodu topniejącego, pod 45^0 sz., aby w danym razie można było odtworzyć tę miarę przy pomocy wahadła. W ten sposób (jak się wyraża komisyja) «gdyby pamięć tych prac się zatarła, a tylko same ich wyniki się zachowały, nie przedstawiałyby one niczego, coby posłużyć mogło do poznania, który mianowicie naród powziął tę ideę i przeprowadził jéj wykonanie».

Ten projekt Zgromadzenie narodowe przyjęło 26 marca tegoż roku, a król w cztéry dni późniéj go zatwierdził. Zajęto się natychmiast w akademii nauk najrozmaitszymi studyjami przygotowawczymi do dokładnego doprowadzenia do skutku prac, pomyślanych według tak obszernego planu [1]), a następnie utworzono osobną komisyją, mającą wykonać zamierzone roboty.—Po rozwiązaniu akademii w sierpniu r. 1793 ustanowiono w kwietniu r. 1795 osobną Komisyją wag i miar, którą składali Berthollet, Borda, Brisson, Coulomb, Delambre, Haüy, Lagrange, Laplace, Méchain, Monge, Prony i Vandermonde, oraz (późniéj weszli) Darcet i Lefèvre-Gineau.—W czerwcu r. 1792 Méchain i Delambre rospoczęli obserwacyje różnych stacyj dla późniejszego obliczania trójkątów, piérwszy dla południowéj, drugi dla północnéj części południka—wśród bardzo niesprzyjających warunków, jako następstwa ówczesnego położenia Francyi. Zwalczając najrozmaitsze przeszkody, zmuszeni nawet przez pewien czas zawiesić swe prace, przeprowadzili je ze wszelką starannością i dokładnością możliwą. Do brania kątów użyto koła powtarzającego Bordy, które dozwalało wyznaczać dowolną wielokrotność kąta, a tymsamym w odpowiednim stosunku zmniejszać nieuniknione niedokładności, tak iż one prawie znikały. Na 90 trójkątów, łączących krańcowe punkty, było aż 36 takich, w których błąd sumy trzech kątów był mniejszy od $1''$, a największy taki błąd w trzech trójkątach niedochodził tylko do $5''$, t. j. nie dochodził do $1/_{120}$ jednego stopnia. Obserwacyje azymutu (a także szerokości gieog.) były czynione nietylko w obu punktach krańcowych, ale i w trzech punktach pośrednich; różnice wypadłe z rozmaitego ich uwzględniania w rachunkach nie wyniosły $1/_{240000}$ długości mierzonego łuku. Wymierzeniem dwu [2]) podstaw, jednéj przy Melun, a drugiéj blisko Perpignan, zajął się Delambre i uskutecznił te pomiary z uwzględnieniem najdrobiazgowszym

---

[1]) W tych pracach przygotowawczych brali udział: prócz osób, które weszły późniéj w skład Komisyi wag i miar, Lavoisier, Meunier i Tillet (wkrótce zmarli).

[2]) Drugą podstawę wymierzono tylko dla sprawdzenia dokładności pomiarów.

wszelkich okoliczności zapomocą linijałów (prętów, nazwanych «modules») platynowych, redukując odczytaną długość do 13° R., czyli 16°1/4 C., wymierzając kąty pochyłości linijałów, aby zapomocą rachunku wynaléść ich długość poziomą. Długość tych podstaw wyrażono w sążniach peruwijańskich («toise de Pérou»), t. j. przyjęto [1]) za jednostkę w tych wymiarach długość tego sążnia żelaznego, który był użyty przy mierzeniu części łuku w Peruwii (pos. str. 125, odsyłacz). Po zredukowaniu do poziomu morza, długość podstawy przy Melun wyniosła 6075^s,90, a długość podstawy blizko Perpignan 6006^s,249; wyprowadzając zaś tę ostatnią z poprzedniéj rachunkiem zapomocą łańcucha 53 trójkątów, je łączących, otrzymano więcéj tylko o 0^s,160, t. j. o 11,52 cala, gdy odległość tych podstaw od siebie wynosiła około 33 000 s. Te obserwacyje i pomiary zostały ukończone w listopadzie r. 1798.

Wobec tak przeciągających się robót, wskutek postanowienia Konwentu, jeszcze z d. 7 kwietnia r. 1795, zaprowadzono we Francyi metr tymczasowy (prowizoryczny), oraz ustanowiono nazwy (us. 2) tak miar linijowych, powierzchni i objętości, jak i mających się w przyszłości oznaczyć miar ciężaru [2]). W lipcu tegoż roku Borda i Brisson wyznaczyli ów metr tymczasowy jako długość wzoru miedzianego przez 10°C. równą 443,44 linij sążnia (żelaznego) peruwijańskiego przy 13° R.

W końcu r. 1798 zjechali się do Paryża uczeni państw wówczas Francyi przyjaznych, aby wziąć udział w sprawdzaniu robót dokonanych i w pracach dalszych Komisyi. Niektórzy z nich, jak holender Van Swinden, szwajcar Trallès, włosi Fabbroni, Mascheroni i Vassali byli wielce czynni i pomocni. Nadto mechanicy paryscy Lenoir i Fortin, dokładnością w wykończeniu przyrządów i pomysłowością w obmyśleniu niektórych z tych narzędzi, dla całéj sprawy od jéj początku wciąż świadczyli ważne usługi.—Po drobiazgowym sprawdzeniu dotychczasowych rachunków, obliczono długość mierzonéj części południka od Dunkierki do Monjouy koło Barcelony (stanowiącéj 9°,67380), po zredukowaniu do poziomu morza, na 551584,72 sążnia peruwijańskiego. Z tego, jakoteż z rezultatów pomiaru łuku w Peruwii, wniesiono, że spłaszczenie (iloraz z podzielenia różnicy średnicy równika i osi ziemi przez średnicę równika) południka ziemskiego jest $^1/_{334}$; na zasadzie zaś tego wypadła długość ćwierci południka ziemskiego 5 130 740 sążni per., a zatym metr = 0,513074 sążnia per., czyli 443,295936 linii sążnia per., przy jego temperaturze 13°R., czyli 16$^1/_4$C., gdyż przy téj temperaturze wymierzo-

---

[1]) Dlatego także wszelkie późniejsze obrachowania długości łuków różnych południków dokonywają się w tychże sążniach. (Sążeń = 6 stopom, pieds du roi, czyli «paryskim»; stopa = 12 calom; cal = 12 linijom).

[2]) Metr pochodzi od μέτρον, miara: ar od łacińskiego «arare», orać; litr wyprowadzają od wyrazu greckiego λίτρα, ciężar funta, choć była w użyciu we Francyi odpowiednia miara objętości, zwana «litron»; gram od γράμμα, gramma, oznaczająca pewien niewielki ciężarek, a «stère» od στερεός, twardy.

no podstawy. Postanowiono więc, że wzór metra, wyrobiony z platyny ma mieć przy temperaturze lodu topniejącego długość równą 443,296 linii sążnia peruwijańskiego (żelaznego), przy jego temperaturze $16^0 1/4$C. — Borda i Cassini zapomocą nader starannych wyznaczeń znaleźli, że długość wahadła sekundowego w próżni w Obserwatoryjum paryskim przy $16^0 1/4$C. wynosi 440,5593 lin. per., czyli 0,993977 metra [1]. — oznaczeniem miar ciężaru zajęli się Lefèvre-Gineau i Fabbroni. Z uwagi, że nader trudno otrzymać i utrzymać wodę w temperaturze lodu topniejącego, t. j. ściśle w temperaturze 0^0C. lub R., jak również, że wtedy, ze względu na bliskość przejścia wody w stan stały, może zachodzić dość znaczna zmiana gęstości, a tymsamym zmiana ciężaru danéj objętości wody, jakoteż z uwagi, że z szeregu doświadczeń, robionych spólnie z Trallès'em, okazało się, że woda przy 4^0C. jest najgęstsza [2], wybrano wodę w téj właśnie temperaturze, jako mającą posłużyć do wyznaczenia wzoru ciężaru. Z wielu doświadczeń, przy pomocy drobiazgowych rachunków wyznaczono ciężar platynowy, który w próżni równoważy ciężar decymetra sześciennego wody dystylowanéj, mającéj temperaturę 4^0C., i ten ciężar przyjęto jako kilogram [3]. — Sprawozdanie ostateczne o wyliczeniu długości południka i wyznaczeniu z niéj długości metra, opracowane przez Van Swinden'a, Komisyja przyjęła 30 kwietnia r. 1799, a sprawozdanie Trallès'a o jednostce wag 30 maja. Po odczytaniu raportu ogólnego Van Swinden'a na pełnym posiedzeniu Instytutu narodowego nauk i sztuk 17 czerwca, Komisyja przedstawiła (stosownie do wzmiankowanego wyżéj postanowienia Konwentu z d. 7 kwietnia r. 1795) w d. 22 czerwca (r. 1799) prototypy platynowe metra i kilograma [4]) obu izbom Ciała prawodawczego i złożyła je tegoż dnia w archiwum państwowym. Dlatego te wzory noszą nazwę metra archiwowego i kilograma archiwowego. Te wzory [6] winny być używane tylko w przypadkach szczególnéj ważności [7].

Z obliczeń pomiarów niektórych południków, jakie następnie były do-

---

[1]) Everett, *Units and physical constants* (1879), przyjmuje tu długość równą 0,99390 m., a długość wahadła sekundowego pod 45^0 szer. 0,99356 m.

[2]) Nowsze badania wykazały, że woda jest najgęstszą przy 4^0,08C.

[3]) Lefèvre-Gineau, porównywając ciężar kilograma z funtem, nazywanym «la pile de Charlesmagne» (wzorem z początku wieku XIV, starannie zachowanym), znalazł, że Kg. =18827, 15 ziarna («grain, poids de marc»), których ten funt zawierał 9216. Stopa («pied du roi») sześcienna wody dystylowanéj temperatury 4^0C. ważyła w próżni tych funtów 70 i 223 ziarna. Kg. archiwowy ma kształt walca, którego wysokość jest równa średnicy podstawy.

[4]) Niezależnie od tego Komisyja poleciła wykonać z równą starannością kilka metrów żelaznych z zakończeniami z mosiądzu, równych metrowi archiwowemu przy temperaturze lodu topniejącego, oraz kilka kilogramów z mosiądzu, ważących w próżni tyleż, co kilogram archiwowy—mających służyć do sprawdzania miar do użycia rospowszechnianych.

[5]) Wszystkie zaś rękopisy oryginalne złożył Delambre, po wydrukowaniu dzieła, o którym niżéj, w obserwatoryjum paryskim.

[6]) W r. 1806 metr i kilogram platynowe, porównane z archiwowymi (wraz ze wszystkimi przyrządami, przy wszelkich robotach używanymi) złożono w obserwatoryjum paryskim, aby umożliwić poza archiwum sprawdzanie naukowe miar.

[7]) Wszystkie dane, obliczenia, raporty i t. d. są zestawione w dziele Delambre'a *Base du système métrique décimal* (3 tomy, 1806—1810), z którego tu korzystałem.

konane [1]), wypada [2]), że średnia [3]) długość ćwierci południka jest 10 000 205 metrów [4]). — Właściwie więc nie należy metra uważać za jednę-dziesięciomilijonową część ćwiartki południka, ale jako długość, która, według najnowszych obliczeń, mieści się w ćwierci średniego południka ziemskiego 10 000 205 razy.

W latach 1870, 1872 i 1875 odbywały się w Paryżu narady delegatów wielu państw w celu utworzenia instytucyi, czuwającéj nad zachowaniem oryginałów metra i kilograma i wyrabiającéj dokładne ich kopije. Wskutek powziętych uchwał powstał w r. 1875 w Paryżu, spólnie przez różne państwa utrzymywany, stały Komitet międzynarodowy wag i miar.

4. Różnorakie miary, używane w Polsce [5]), usiłowano ujednostajnić na sejmie w r. 1565. Konstytucyja tego sejmu łokieć miary krakowskiéj na cały kraj stanowi. Co do korca, który był najrozmaitszéj (wielce od siebie różnéj) objętości, kazano tymczasowo we wszystkich województwach Korony, wraz z Mazowszem i Rusią, trzymać się miary, jakiéj główne miasto każdego województwa używa; co do trunków jednak polecono, iż one mają być w całéj Koronie kwartą krakowską mierzone, a 4 kwarty mają iść na garniec,

---

1) Z pomiarów południków, różnymi czasy dokonanych, uważają się za *najważniejsze* pomiary: południka w Peruwii, o którym poprzednio była mowa; południka francuskiego od Dunkierki do Montjouy, a daléj (częścią przez Méchain) do Formentery przez Biot i Arago, tak iż południka tego, dług. gieogr. $20^0 0' 0''$, wymierzono (1792—1806) część od $51^0 2' 8'',50$ do $38^0 39' 56'',11$ szer. g.; połuduika Indyj Wschodnich, dł. $95^0 20' 0''$, przez (1802—1843) Lambton'a i Everest'a część od $8^0 9' 32'',30$ do $20^0 30' 48'',89$ sz.; południka Rosyi, dł. $44^0 23' 14''$, przez (1820—1853) Struve'go, Hansteen'a, Selander'a i Tenner'a część od $70^0 40' 11'',3$ do $45^0 20' 2'',8$ sz. (przewodniczącym oddziału, wymierzającego część od 52^0 do 46^0, był Adam Prażmowski); południka pruskiego, dł. $38^0 9' 40''$, przez (1831—1834) Bessel'a i Bayer'a część od $54^0 13' 11'',466$ do $55^0 43' 40'',446$.

2) Według Listing'a artykułu w *Astronomische Nachrichten*, r. 1878, N. 2228.

3) Południki nie są równe sobie; równik ziemski nie jest kołem, lecz elipsą, któréj spłaszczenie jest znacznie mniejsze od spłaszczenia elips różnych południków. Wogóle kształt ziemi nie może być uważany za bryłę foremną; szczególny kształt, ziemi właściwy, nazwano gieojdą.

4) Listing obrachowywa bryłę (elipsojdę obrotową) o kołowym równiku i (równych sobie) eliptycznych południkach, mającą tę samę objętość, co ziemia. W téj bryle spłaszczenie południka wypada $\frac{1}{288,4800}$; połowa średnicy równika 6 377 377 m.; połowa osi ziemskiéj 6 355 270 m.; długość ćwierci połndnika 10 000 205 m.; długość ćwierci równika 10 017 560 m.; promień kuli, mającéj objętość równą objętości ziemi, 6 370 000 m.; długość wahadła sekundowego pod 45^0 sz. g. 0,9935721 m.; długość mili gieograficznéj $\left(\frac{1}{5400}\right.$ obwodu równika$\left.\right)$ 7420,415 m.

Najczęściéj długość mili gieograficznéj wyprowadzają jako piętnastą część średniego stopnia południka ziemskiego, więc

$$\frac{10\,000\,000}{90.15}\text{ m.} = 7407,407\text{ m.} = 4286,695\text{ sążnia nowopolskiego.}$$

5) Przy opracowywaniu tego ustępu miałem pod ręką: Czackiego (1800—1801) *O litewskich i polskich prawach* (wydanie z l. 1843—1844); *Volumina legum*, t. VII; W. A. Maciejowskiego *Historja dawnych polskich miar i wag w zarysie* (*Ekonomista*, r. 1868); J. Kołobrzega-Kolberga *Porównanie miar i wag...* (wydanie 2-gie, 1838); artykuł Pauker'a w *Jahrbuch*'u Schumacher'a z r. 1836, i t. d.

garncy zaś 72 na beczkę [1]). Funt, czyli dwie grzywny, ma zawierać 32 łuty, albo 48 skojców [2]). Inna zaś była grzywna, używana w Koronie, a inna na Litwie [3]); funtów 32 tworzą kamień, a 5 kamieni przedstawiają centnar (= 160 funtom). Nawoływano również na tym sejmie o ujednostajnienie różnych wielkością łanów (od r. 1374 bowiém płacono po 2 «grosze» z łanu), oraz o określenie innych miar gruntu, jak: włóka, śrebie, ślad — lecz tego nie załatwiono wtedy.—W Litwie miary były jednostajniejsze. Długo jednak nie była określona, używana od najdawniejszych czasów, miara objętości beczką zwana. Drugi (1564) a wyraźniéj trzeci (1588) statuty litewskie stanowią, iż beczka powinna mieć miarę czterech korcy krakowskich [4]).— Uchwały, powzięte na sejmie r. 1565, miały być wprowadzone w ten sposób: wszystkie miary i wagi, na sejmie wycechowane, dano pod dozór wojewodom, a każdy z nich zjechawszy zaraz po sejmie do głównego miasta swego województwa, winien był je oddać urzędowi starościńskiemu z nakazem, aby były na ratuszu każdego miasta i miasteczka chowane i wydawane tym, którzyby podobne sprawić sobie zechcieli; kopije, uznane za sprawiedliwe, burmistrz powinien ocechować i do użytku oddać interesantowi.—Postanowienia te jednak, osobliwie w Koronie, nie były wykonywane, a z czasem powiększyły ilość używanych przedtym miar. Były więc najrozmaitsze łokcie [5]) i stopy [6]), znacznie bardzo różniące się od siebie korce używane w różnych miejscowościach [7]), przeróżne miary powierzchni, oraz rozmaite wagi. Wogóle, miary «nietylko co powiat, ale co miasteczko różniły się» [8]).

Dopiéro wskutek postanowienia sejmu w r. 1764 na wniosek Komisyi skarbu koronnego uporządkowano *miary w Koronie* «cum provinciis annexis». — Łokieć, który był zachowany na ratuszu warszawskim, jako równy krakowskie-

---

[1]) A 24 garnce na baryłę.—Konstytucyja sejmu w r. 1598 pozwoliła województwu krakowskiemu mieć beczki do piwa o 62 garncach.

[2]) Skojcami także aż do początku wieku XVI nazywano podwójne «grosze».

[3]) Za Kruse'm (1784) i Gerhardt'em (1791) podaje Czacki grzywnę koronną=4198 assom holenderskim, a litewską (równą królewieckiéj), za Kruse'm, = 4076 a. h. (Grzywna holenderska = 5120 a. h. = 246,0839 grama.)

[4]) Toż samo stwierdza uchwała sejmowa r. 1613.

[5]) «Łokieć lwowski, ile z różnych ułamków regiestrów za Zygmunta Augusta, Stefana Batorego i Zygmunta III widzieć można, miał $1^1/_4$ łokcia krakowskiego. Rozumiém, że arszyn, miara tatarska, któréj Rusini używali, będąc miarą w handlu tego rodzaju, dał egzystencyją temu lwowskiemu łokciowi.» (Cz.)

[6]) Niezawsze 2 stopy, używane w pewnéj miejscowości, stanowiły łokieć tamże.

[7]) Tak np. w r. 1660 stwierdzono, że korzec pilecki ma półtora korca krakowskiego, że korczyk olsztyński ma korczyków krakowskich (po 14 garncy) trzy i t. d. Według dokumentów z r. 1569, korcy 4 oświecimskich = 5 krakowskim, ćwiertnia poznańska dzieliła się na 4 wiertele po 18 garncy (dotąd w kaliskim liczą zboże na «wirtele» po 16 garncy); kościańska ćwiertnia miała 2 toruńskie. I t. d.—Łaszt oddawna na Mazowszu ma 30 korcy, czyli 60 półkorcy (korczyków), jednak w *Arytm. dla sz. nar.* i wydanym również przez Komisyją Edukacyjną *Elementarzu dla szkół parafijalnych narodowych* (1785) podano: «łaszt zawiera w sobie korcy warszawskich 27».

[8]) «Nie naszego tylko kraju ta była wada.» (Cz.).— O różnorakich u nas miarach można częściowo powziąć pojęcie z dzieła Czackiego i tablic Kolberga. Tu przytaczam tylko ważniejsze.

mu [1]), przyjęto za normalny [2]), z podziałem: sążeń = 3 łokciom, ł. = 2 stopom; stopa = 12 calom; cal = 12 linijom, linija = 12 punktom. Długość tego łokcia przedstawia 264 linij [3]) stopy paryskiéj (= 0,595539 metra).—Jako korzec obowiązujący ogłoszono korzec warszawski, czyli mazowiecki z podziałem na 4 ćwierci, albo 32 garnce (ale korczyk gdański = 16 garncom), a garniec = 4 kwartom = 16 kwaterkom. Do płynów zaś beczka = $14^2/_5$ konwi = 72 garncom [4]), z dalszym podziałem garnca na kwarty i kwaterki. Ten garniec (koronny) obejmuje 190 cali sześciennych paryskich [jest więc kwarta [5]) koronna = 0,942228 litra].—Za funt dla Korony przyjęty został funt wrocławski; podziały: centnar = 5 kamieniom, kamień = 32 funtom; funt = 2 grzywnom = 32 łutom, a nadto funt okrętowy, szyfunt («szafunt») = 13 kamieniom. Funt koronny miał przedstawiać ciężar 8442 assów holenderskich; garniec wody dystylowanéj, przy 10°R. i przy $27^3/_4$ cala par. ciążenia atmosfery, ma ważyć 9,3055 tych funtów, czyli łokieć sz. wody 480 funtów. [Poszukiwania Eitelwein'a okazały, że funt wrocławski, a więc i koronny [6]), = 405,228 grama.] — Sejm polecił rozesłać po kraju nacechowane wzory, a nadto wiarogodne egzemplarze złożyć tak na ratuszu warszawskim, jak i w archiwum skarbowym.

Miary dla Litwy ustanowiono ostatecznie, na wniosek Komisyi skarbowéj litewskiéj, na sejmie r. 1766.—Łokieć pozostał dawny, ogólnie na Litwie używany od wieku XIII, doskonale równy dwu stopom paryskim, czyli 288 linijom [7]) par. (= 0,649679 m.).—Jako podstawę miar objętości, bardzo dobrze określono garniec (mały) litewski, który w kształcie walcowym mieć

---

1) W tablicach Kolberga łokieć wolnego miasta Krakowa = 0,616969 m., a stopa = 0,356421 m., ł. zaś lwowski = 2 stopom = 0,593931 m.—Obecnie w Galicyi przyjmuje się (używane przed wprowadzeniem w r. 1876 systematu metrycznego): ł. krak. = 0,616399 m., st. krak. = 0,298011 m., ł. lw. = 0,594272 m., st. lw. = 0,296799 m., nadto arszyn (we Lwowie) = 0,817058 m. (według tablicy w *Arytmetyce* Bączalskiego, wydanéj we Lwowie w r. 1875).

2) «Nie wzruszając miary prętowéj starodawnéj co do włók». — Należy laskę mierniczą, czyli wierzbcę, uważać jako początkowo równą 15 łokciom chełmińskim starym, o których niżéj.

3) «Komisyja edukacyjna, potwierdzając dzieła klasyczne o gieometryi wydane, zdała się uprawnić mniemanie, że stopa miała $1308^1/_2$ linij dziesiątkowych (—t. j. dziesiątych części linii—) stopy paryskiéj, a tak łokieć miałby 2615 linij dziesiątkowych... Łokieć, który w magistracie miasta Warszawy zachowany został i który komisyja skarbowa koronna w 1764 r. wzięła za prawidło, składał się z linij (sic) 2640; inne łokcie były $2^1/_2$ dziesiątkowymi (sic) linijami mniejsze, lecz to brano za omyłkę.» (Cz.) Prawdopodobnie wyraz dziesiątkowe jest w tym zdaniu przestawiony: powinnoby być «z linij dziesiątkowych 2640; inne łokcie były $2^1/_2$ linijami mniejsze».

4) Wprawdzie to postanowienie sejmowe mówi wyraźnie o wzorach kłody, miary kłodowéj, ale ich niczym nie określa. A nawet Czacki wyraźnie mówi, że nie wie, jakie to były miary.—Używany antał (antałek) jest czwartą częścią téj beczki, a więc zawiera 18 garncy.—Dojnica, używana na Ukrainie i Litwie, miewała od 8 garncy do 2 korcy.—Koniuszka = 2 garncom.

5) Kwarta krak. = 0,960953 l., a lw. = 0,96132 l. (*Ar.* B.)

6) Funt krak. = 405,493 g., a lw. = 420,045 g. (*Ar.* B.)

7) Zatym łokieć litewski = $\frac{12}{11}$ łokcia koronnego.

powinien wewnętrznie $7^5/_8$ cali litewskich (czyli paryskich) głębokości, a $4^7/_8$ cali w średnicy; garniec = 4 kwartom = 8 półkwartówkom. Do zboża i wogóle ciał sypkich przyjęto następujący podział: beczka = 4 ćwierciom = 8 ośminom = 16 szesnastkom = 144 garncom (małym) [1]), do płynów zaś beczka dzieli się na 72 garnce cechowe (czyli duże, t. j. ma także 144 garncy małych); czasza do miodów ma 6 garncy cechowych czyli 12 małych. [Garniec więc mały (szynkowy), zwykle późniéj wprost garncem litewskim nazywany, jako objętość 142,32426 cali sz. par., = 2,823199 litra [2]).]—Funt litewski został określony, jako cztery-piąte funta berlińskiego. Centnar ma 5 kamieni, kamień 40 funtów, funt 32 łuty (jednak funt rzeźniczy na mocy zwyczaju miał 50 łutów). [Ponieważ funt berliński = 468,53588 grama, więc funt litewski [3]) = 374,8287 g.]

Co do miar powierzchni gruntów, istniało wprawdzie w ustawie ekonomicznéj r. 1557 opisanie [4]) włóki, czyli [5]) łanu. Z tego opisania wypada, że sznur = 75 łokciom = 10 prętom, mórg [6]) = 3 sznurom kw. = 300 prętów kw., włóka = 30 morgom. — Przytoczonymi wyżéj postanowieniami sejmowymi nie ujęto późniéj powierzchni gruntów w oznaczone miary. Używano więc wciąż najróżnorodniejszych miar. Czacki z urzędu obrachowywał niektóre z używanych miar gruntowych i ułożył odpowiednią tablicę. Rezultaty jego obliczenia z protokółów referendaryi koronnéj przeszły do różnych dzieł. Zauważyć tu należy, że przyjętą na Mazowszu w r. 1576 włókę chełmińską (jéj podział: włóka = 30 morgom; mórg = 300 prętom kw.; pręt kw. = 100 pręcikom kw.; pręcik kw. = 100 ławkom kw., przy pręcie równym $7^1/_2$ łokciom, tak iż włóka = 506 250 łokciom kw.) z czasem wymierzano, uważając za podstawę łokieć warszawski (późniejszy koronny), a nie chełmiński [7]), a mimoto utrzymano dla niéj nazwę włóki cheł-

---

[1]) Na łaszt królewiecki szło beczek litewskich 8 i ćwierci 3, a na łaszt rygski (który miał 45 purów rygskich) beczek 8 i ośmina.—Pur żmujdzki, używany dotąd na Litwie i na Białorusi, = 24 garncom lit., tak iż beczka litewska = 6 purom żm. Używany zaś dawniéj w niektórych okolicach na Białorusi pur białyniecki (od: «Białynicze») = 71 gar. lit., tak iż becz. lit. = 2 p. b. i 2 garncom.—Z używanych przedtym na Polesiu i Podlasiu szanków, szanek dawny = 48 gar. lit, a nowy = 24 gar. lit. Obecnie na Polesiu będące w użyciu szanki są równe 32 gar. «rządowym», a 4 szanki idą na beczkę; że zaś tamże przyjmują 8 g. «rząd.» jako równe 9 g. «komisyjnym», zatym ta beczka odpowiada litewskiéj.

[2]) Jeden więc garniec litewski = 3 kwartom koronnym, będąc nieznacznie od nich mniejszy. Dlatego przyjmuje się 4 gar. lit. = 3 gar. kor., a więc beczkę litewską równą 3 korcom koronnym i 12 garncom kor.

[3]) Zatym funt koronny = 1,056493 funta litewskiego.

[4]) «To jest uroczysty i prawny przepis pomiaru: z zapomnieniem ustawy ekonomicznéj, zapomniano o prawdziwych pomiaru prawidłach.» (Cz.)

[5]) «Łan i włóka niczym się od siebie nie różnią, tylko nazwiskiem.» (Zaborowskiego *Jeometrya praktyczna*, r. 1786.) — «Włóki było zarobne pole, łany zaś do zarobienia były przeznaczone. (Cz.)

[6]) «Murgi seu jutrzyny», «morgi sive jutrzyny» (Długosz, *Liber beneficiorum* III). Początkowo mórg oznaczał obszar, który można zorać w ciągu dnia, od rana, od «jutra».

[7]) Łokieć chełmiński stary = 255,44 linii par., ł. cheł. nowy = 259,43 l. p. (gdy ł. warsz., jak widzieliśmy, = 264 l. p.).

mińskiéj; dodano tylko podział morga na 3 sznury kwadratowe. Owóż, przy pomocy tych miar, mających za podstawę łokieć koronny, a nazywanych chełmińskimi, a niekiedy chełmińsko-polskimi, z obliczeń Czackiego wypada, że z używanych miar:

łan frankoński większy =	1 włóce	20 morg.	1 sznur. kw.	38 pręt. kw.	
„ „ mniejszy =	1 „	10 „	1 „	10 „	40 pręcik. kw.
„ teutoński [1]) inaczéj niemiecki =	1 „	13 „		60 „	
„ kmiecy większy =		21 „	1 „	51 „	20 „
„ „ mniejszy =		6 „	2 „	48 „	
„ rewizorski [2]) =	3 włókom.				

Z tablic zaś Kolberga wynika, że inne w Polsce używane miary można przez takież, tak zwane chełmińskie [3]), miary tak wyrazić [4]):

włóka chełmińska stara =		28 morgom		26 pręt. kw.	
„ „ nowa =		28 „	2 sz. kw.	91 „	15 pręck. kw.
„ litewska [5]) =	1 włóce	5 „	2 „	10 „	74 „
mórg magdeburski (180 prętów [6]) kw.) =			1 „	27 „	98 „
włóka magdeburska (30 morgów mag.) =		12 „	2 „	39 „	44 „
mórg (Joch) wiedeński (1600 sążni w. [7]) kw.) =			2 „	88 „	51 „

5. Na zalety układu metrycznego miar zwrócono u nas bardzo wcześnie uwagę. Już w r. 1802 Aleksander Sapieha wydał: *Tablice stosunku nowych miar i wag francuzkich z litewskiemi i polskiemi miarami i wagami;* późniéj Aleksander Chodkiewicz w r. 1811 ogłosił: *Tablice stosunku dawnych miar i wag francuzkich i koronno-litewsko-polskich z miarami i wagami nowémi a przyjętémi we Francyi.* [8])

---

[1]) W województwie sieradzkim, według dekretów starościńskich z lat 1762 i 1778, śrebie równało się łanowi teutońskiemu.

[2]) Przy rewizyi wójtostw. Łan ten pisarze sądowi nazywali łanem chełmińskim co z czasem przez niebaczność sądy powtarzały (Cz.) — Bywały zwyczajem uświęcone inne jeszcze miary. Tak np. w okolicach Żarnowca kieliszek pola był 128-ą częścią łanu (Cz.).
Staje łanu frankońskiego jest długością $217^1/_2$ łokcia kor.; staje łanu kmiecego większego = 84 ł. k., mniejszego = 100 ł. k. (Związek staja z łanem opisuje Czacki.)

[3]) Jedna taka włóka równa się w miarach nowopolskich 1 włóce, 2 morgom, 20 prętom, kw. i 94,8596 pręcika kw.

[4]) Opuszczając ułamki pręcika kwadratowego.

[5]) Miała taki sam podział jak chełmińska z dodaniem sznura kw. = 100 prętom kw. (Więc wł. lit. = także 506 250 ł. lit. kw.) Włóka litewska osadna = 33 morgom litewskim.

[6]) Pręt téj miary = 12 stóp reńskich. Stopa reńska (czyli pruska r. 1816) = 139,13 l. par. = 0,3138535 metra.
Takich 120 prętów kw. tworzyło używany u nas w niektórych dzielnicach mórg reński polny, zaś 160 tych prętów kw. liczono na mórg reński leśny, choć w tym ostatnim przyjmowano niekiedy za podstawę pręt linijowy = 16 stopom reńskim.

[7]) Sążeń wiedeński = 840,76 l. par. Przyjmuje się sąż. w. = 1,896484 m. (*Ar.* B.)

[8]) W obu tych pracach wyrachowania są oparte na przytoczonym wyżéj dziele Czackiego.

Zmiany polityczne w końcu XVIII i na początku XIX wieku, przeistaczały miary koronne coraz na inne, wskutek wprowadzenia w niektórych częściach kraju ówczesnych miar pruskich i austryjackich. Stało się to powodem nowego zamieszania w użyciu miar w księstwie warszawskim i późniejszym królestwie polskim.

Z inicyjatywy i przy ciągłym spółudziale Staszica, deputacyja Towarzystwa przyjaciół nauk w Warszawie [1]), wyznaczona w r. 1816, zajęła się uporządkowaniem miar. Myśl związania miar z miarami układu metrycznego wywołała obmyślenie nowego systematu. Na bespośrednie wprowadzenie układu metrycznego nie odważono się wtedy, z uwagi na trudności, jakieby to wobec zakorzenionych zwyczajów nastręczało. Ówcześnie zresztą w żadnym państwie o tym nie myślano [2]).—Postanowiła więc deputacyja zatrzymać miejscowe nazwy, podziały i mniéjwięcéj tę samę wielkość jednostek, zmieniając je tylko otyle, aby one dały się wyrazić całkowicie i dogodnie przez miary systematu metrycznego. Mianowicie: określono łokieć jako długość 576 milimetrów, kwartę jako równą litrowi, a funt jako równy 405 504 miligramom [3]).— Projekt ten wskutek postanowienia Rady administracyjnéj z d. 13 czerwca r. 1818 został zatwierdzony, a miary te stały się obowiązującymi w Królestwie od d. 1 stycznia r. 1819. — Te miary, dla odróżnienia od dawniejszych, nazywają miarami nowopolskimi [4]).

---

[1]) Deputacyją składali kasztelan A. Chodkiewicz (prezydujący), profesorowie królewsko-warszawskiego uniwersytetu: J. Celiński, A. Dąbrowski, J. Hoffman M. Kado, A. Kitajewski, K. Szaniawski, oraz rektor szkół pijarskich J. Bystrzycki. (Protokółów obrad deputacyi, mimo usilnych starań, odnaleść nie mogłem.)

[2]) Nawet we Francyi w r. 1812 pozwolono czasowo używać miar zbliżonych nazwami i mniejwięcej wymiarami do dawniejszych; te miary przejściowe były określone jako pewne części jednostek metrycznych, a wzory wszystkie winny były mieć odpowiednie napisy. Z owych czasów datuje się dotąd używany we Francyi funt («lalivre»), równy połowie kilograma (us. 1).

[3]) Z zestawienia tych miar z miarami z lat 1764 i 1766 wypada:
łokieć n.-p. = 0,967191 ł. kor. = 0,886592 ł. lit. (= 255,33846 linii par.)
garniec n.-p. = 1,061314 g. kor. = 1,416830 g. lit.
funt n.-p. = 1,000680 f. kor. = 1,081840 f. lit.
Widzimy więc, że z miar poprzednich (koronnych) uległy największéj stosunkowo zmianie miary do wymierzania zboża i cieczy, a starano się o największą zgodność co do funta.

Ustanowiono nadto miary drożne: mila = 8 staj milowych, przyjmując staje milowe = 1852 łok. + 1 c. + 6,46 linii. Chciano długość staja milowego uczynić równą długości wersty rosyjskiéj, iżby mila była równą 8 werstom. Wskutek niedokładnego wówczas wyrachowania stosunku miary rosyjskiéj do metra, staje to jest nieco dłuższe od wersty. Z przyczyny zaś, że urzędy pocztowe liczyły w Królestwie na milę werst 7, co się powoli upowszechniło, mila prawna została zupełnie zaniedbaną.

Dawniéj mila nie była u nas żadnym (oile wiém) postanowieniem prawnym określona. Czacki w swych wyrachowaniach rozległości kraju i jego części liczy mil 20 na stopień i przyjmuje, że mila = 9328 łokciom koronnym. Kolberg w swych tablicach zaznacza, że: «Mil używano dwojakich w Polsce: gieograficznych, czyli większych, których idzie 15 na 1 stopień, i mniejszych, których liczono 20 na 1 stopień.» «Mil litewskich szło 12,44 na stopień gieograficzny», ale nie objaśnia na czym oparł tę daną co do mil litewskich.

[4]) Ten układ miar przedstawia pierwsze poza Francyją wprowadzenie zasad systematu metrycznego.

Miary nowopolskie.

Miary długości czyli miary linijowe.

Sążeń = 3 łokciom; łokieć = 2 stopom = 4 ćwierciom; stopa = 12 calom; cal = 12 linijom; linija = 2 milimetrom.

Miary miernicze: sznur = 10 prętom = 75 łokciom; pręt = 10 pręcikom; pręcik [1]) = 10 ławkom. (Jest więc pręt równy 15 stopom.)

Miary powierzchni.

Sążeń kwadratowy; łokieć kw.; stopa kw.; cal kw.; linija kw.; milimetr kw.

Miary większych obszarów gruntu: włóka = 30 morgom; mórg = 3 sznurom kw. = 300 prętom kw. [2]); pręt kw. = 100 pręcikom kw.; pręcik kw. = 100 ławkom kw.

Miary objętości.

Sążeń sześcienny, łokieć sz.; stopa sz.; cal sz.; linija sz.; milimetr sz.

Miary do ciał sypkich: korzec = 4 ćwierciom; ćwierć = 8 garncom; garniec = 4 kwartom (kwarta równa litrowi).

Miary do płynów: garniec = 4 kwartom; kwarta = 4 kwaterkom; kwaterka = 2 półkwaterkom. Beczka = 25 garncom [3]).

Miary ciężaru czyli wagi.

Centnar = 4 kamieniom [4]); kamień = 25 funtom; funt = 32 łutom; łut = 12 672 miligramom.

Właściwie ustanowiono taki podział funta: funt = 16 uncyjom; uncyja = 2 łutom; łut = 4 drachmom; drachma = 3 skrupułom; skrupuł = 24 granom; gran = $5\,^1/_2$ granikom; granik = 8 miligramom. Jednak w ogólnym handlu uncyje, drachmy, skrupuły, grany i graniki nie przyjęły się.

Jako funt aptekarski utrzymywał się wciąż dawny, funt norymberski $\left(=\frac{23}{15}\right.$ grzywny kolońskiéj = 358 510,6 miligrama = 28 łutom + 1 drachmie + 11 granom + 42, 626 mg. wagi n.-p.$\left.\right)$, z podziałem: funt = 12 uncyjom; uncyja = 8 drachmom; drachma = 3 skrupułom; skrupuł = 20 granom.

Według postanowienia z d. 1 grudnia r. 1815 dla mennicy, jako waga

---

[1]) Pręcik, albo «stopa gieometryczna», = 432 mm.

[2]) Mórg taki (300-prętowy, przy stopie n.-p. jako podstawie) nazywają teraz chełmińskim, albo niekiedy nowochełmińskim. Przy robocie polnej na wymiar przyjmuje się za mórg powierzchnią 200 prętów kw.; taki mórg 200-prętowy nazywają często morgiem magdeburskim.

[3]) Postanowienie późniejsze Komisyi rząd. spraw wewnętrznych. Więc beczka n.-p. = Hl.— Liczą także na oksefty po 60 garncy, na stągwie po 50 garncy.

[4]) Przy tranzakcyjach na niektóre towary, kamienie mają zwyczajem uświęconą inną liczbę funtów. Tak np. kamień mydła, świec, wosku ma 32 funty, a 4 takie kamienie przedstawiają centnar wełny = 128 funtom. Kamień siana ma 24 funty, a 5 takich kamieni stanowią centnar siana = 120 funtom.—Używana niekiedy miara oko = 3 funtom.

złota i srebra przepisana została grzywna kolońska (4864,677... assów hol.), której ciężar = 233,8123 grama, czyli 0,576596 funta n.-p., albo 18 łutom + 1 drachmie + 2 skrupułom + 9,92 grana wagi n.-p., z podziałem: grzywna = 16 łutom [1]), łut = 18 granom (menniczym).

Przy wyrobach jubilerskich używa się oddawna karatu angielskiego = 0,20528 grama [2]). Karat dzieli się na 12 granów karatowych.

6. W d. 14 marca r. 1848 Rada administracyjna Królestwa postanowiła, aby, stosownie do ukazu z d. 1 lutego tegoż roku «we wszystkich czynnościach tak rządowych jak i prywatnych w królestwie polskim, poczynając od d. 1 maja r. 1849, mają być używane miary i wagi w Rosyi istniejące». «Wszakże przy rozgraniczeniach i wogólności przy pomiarach gruntów, winny być na planach i regiestrach pomiarowych wymierzone przestrzenie, obok miar rosyjskich, oznaczone zarazem i na miary miejscowe, dotąd używane, jako konieczne do rostrzygnięcia zachodzić mogących sporów.» [3])

Miary rosyjskie są związane z długością stopy angielskiéj [4]), która została przyjęta za miarę rosyjską za panowania Piotra I. Odpowiedniego ukazu nie odnaleziono, lecz wiadomym jest, iż sażeń, według tego postanowienia została określona jako długość 7 takich stóp, a więc arszyn, jako długość 28 cali angielskich. Ukaz 11 (23) października r. 1835 [5]) uregulował układ miar rosyjskich.

Według tego ukazu: zasadą miary rosyjskiéj linijowéj jest sażeń równa 7 spółczesnym stopom angielskim z podziałem na 3 arszyny po 28 cali, czyli

---

[1]) Zupełnie czyste srebro nazywano 16-łutowym, albo 16-éj próby.

[2]) Zupełnie czyste złoto nazywają 24-karatowym.

[3]) Artykuł 5 tego postanowiania R. ad.

[4]) Aktem parlamentu z r. 1824 uznano długość sztaby metalicznéj, wyrobionéj w r. 1760 przez Bird'a (i złożonéj przez ówczesną komisyją parlamentarną do rewizyi miar i wag w archiwum parlamentu), przy 62° Fahrenheit'a (czyli $13^0 1/_3$R., albo $16^0 2/_3$C.), za typ yarda dla całego państwa. Na mocy tego aktu, wrazie zatracenia lub uszkodzenia tego typu, należało za yard przyjąć długość 36 cali, których 39,1393 ma przedstawiać długość wahadła, bijącego sekundy w próżni u poziomu morza, pod szerokością gieograficzną Londynu, przy 62°F. Po zniszczeniu jednak tego wzoru w czasie pożaru parlamentu w r. 1826, nie przystąpiono do wyznaczenia, według wskazań tego aktu, nowego yarda normalnego, lecz od r. 1836 zaczęto zbierać w państwie całym długości niezaprzeczalne różnych przedmiotów, a z nich z wielkim prawdopodobieństwem odtworzono yard zatracony, który przez postanowienie parlamentu z r. 1855 został uznany za normalny. Nie podano jednak wskazówek, jak postąpić wrazie zatracenia lub uszkodzenia tego nowego wzoru, przedstawiającego obecnie wielkość prawną yarda, tak, iż określeniem yarda jest teraz wyłącznie długość owéj sztaby z r. 1855. (Yard = 3 stopom.)

Ogólnie dotąd (od r. 1819) przyjmuje się, iż przy temperaturze $16^0 2/_3$C. wzorów angielskich, a 0°C. wzorów metrycznych:

metr = 39,37079 c. ang.; stopa ang. = 0,3047944 m.

Everett (zob. wyżéj str. 128) przyjmuje za Clarke'm (1866):

Metr = 39,370432 c. ang.; st. ang. = 0,304797 m.; yard = 0,914392 m.

[Tenże: mila ang. (lądowa) = 1609,33 m., morska = 1852,30 m.; pound avoirdupois = 453,59265 g.; ton, czyli beczka ang., = 1016,05 Kg.]

[5]) *Полное собранiе законовъ россiйской имперiи*, zbiór drugi, t. X, N. 8459.

16 werszków; zasadniczą jednostką wag rosyjskich jest wzór funta, przedstawiający ciężar 25,019 cali sześciennych [1]) wody dystylowanéj w próżni przy $13^0 {}^1/_3$R., zupełnie równy funtowi pozłacanemu mennicy petersburskiéj, zrobionemu w r. 1747; funt aptekarski jest $^7/_8$ funta rosyjskiego; dla ciał ciekłych wiadro obejmuje w próżni 30 funtów wody dystylowanéj, przy $13^0 {}^1/_3$R., czyli przedstawia objętość 750,57 cala sz., dla ciał zaś sypkich czetwieryk obejmuje w takichże warunkach 64 funty wody, czyli przedstawia objętość 1601,22 cala sz.; sażeń i funt, jako główne zasady miar i wag, dla trwałości, należy zrobić z platyny i zachowywać oddzielnie we właściwym miejscu [2]).

Miary rosyjskie.

Miary długości czyli miary linijowe.

Sażeń = 3 arszynom; arszyn = 16 werszkom.

Sażeń = 7 stopom; stopa = 12 calom; cal = 10 linijom. (Stopa ros. ma prawie 305 milimetrów.)

Miara drożna: wersta = 500 sażeniom. Na milę przyjmuje się 7 werst.

Miary powierzchni.

Sażeń kwadratowa; arszyn kw.; werszek kw.; stopa kw.; cal kw.; linija kw.

Miary większych obszarów gruntu: diesiatyna = 2400 sażeniom kw.; wersta kw.

Miary objętości.

Sażeń sześcienna; arszyn sz.; werszek sz.; stopa sz.; cal sz.; linija sz.

Miary do ciał sypkich: czetwiert = 2 ośminom = 8 czetwierykom; czetwieryk = 8 garncom **). (Czetwieryk ma nieco więcéj niż 1601 cali sz. ros., oraz nieco więcéj niż 26 litrów.)

Miary do płynów. Beczka = 40 wiadrom; wiadro = 8 sztofom = 10 krużkom; krużka = 10 czarkom. (Wiadro ma nieco więcéj niż 750 i pół c. sz. ros., jak również nieco więcéj niż 12 i ćwierć litra.)

Drew sażeń ma na długość i wysokość sażeń, na szerokość zaś najczęściéj 12 werszków ***), a niekiedy 8 lub 10 werszków.

---

[1]) Jestto liczba przybliżona, zamiast 25,01893 c. sz., znalezionéj przez Kupffer'a, prowadzącego prace przygotowawcze do tego ukazu. (Skutkiem tego czetwieryk powinienby obejmować 1601,21152 c. sz. ros.)

[2]) Wnosząc z wzmiankowanego wyżéj postanowienia R. ad. (art. 3), sażeń jest zachowana w twierdzy petersburskiéj.

*) Stopa ros. jest większa od stopy n.-p. prawie o 17 mm.

**) Garniec ros. obejmuje 3 kwarty i niewieleco więcéj, niż kwaterkę n.-p.

***) Wtedy więc cztery takie sażenie drew utworzą sażeń sześcienną.

Miary ciężaru, czyli wagi.

Berkowiec = 10 pudom; pud = 40 funtom; funt = 32 łutom; łut = 3 zołotnikom; zołotnik = 96 dolom. [Funt ros. przedstawia ciężar nieco większy od 25-u cali sz. ros. wody dystylowanéj, oraz stanowi prawie tyle, co 409 i pół grama *); 64 funty wody wchodzą w czetwieryk, a w wiadro wchodzi wody 30 funtów.]

Wagi aptekarskie: funt aptekarski (przedstawiający ciężar 28 łutów ros.) ma 12 uncyj; uncyja = 8 drachmom; drachma = 3 skrupułom; skrupuł = 20 granom.

Związek miar rosyjskich z metrycznymi wynika z tego, że przy $13^0 {}^1/_3$R. wzorów rosyjskich, a 0^0R. wzorów metrycznych

stopa ros. = 0,3047944 m.,

czyli, że

m. = 39,37079 cala ros.

Jest więc [1])

arszyn = 0,7111870 m.; wersta = 1,066780 Km.;
diesiatyna = 1,0924997 Hara;
czetwiert = 2,0990175 Hl.; wiadro = 12,298931 l.;
funt. ros. = 0,409497 Kg.

Związek miar rosyjskich z nowopolskimi urzędownie określają *Tablic zamiany miar i wag rossyjskich na polskie i nawzajem, w Komitecie miar i wag ułożone, a z mocy artykułu 7-go postanowienia Rady administracyjnéj Królestwa z dnia 2/14 Marca 1848 roku przez Kommissyę rządową spraw wewnętrznych i duchownych dla powszechnego użytku wydane* [2]). Według tych tablic,

stopa n.-p. = 0,9448989600 st. ros.; st. ros. = 1,0583142138 st. n.-p.
sążeń = 0,8099133943 sażeni; sażeń = 1,2346999161 sążnia; (takiż związek łokcia i arszyna)
wersta = 617 sążni + 2 stopy + 1 cal + 2,4 linii n.-p.;
pręt = 2,0247834857 sażeni; sażeń = 0,4938799665 pręta;
mórg = 0,5124685201 diesiatyny = 1229 sażen. kw. + 45 st. kw. + 42 c. kw. + 91,36 linii k. r.;
diesiatyna = 1,9513393761 morga = 1 morgowi + 285 pręt. kw. + 40 pręc. kw. + 18,11 ławki k.
sążeń sz. = 0,5312705522 sażenia sz.; sażeń sz. = 1,8822801224 sążnia sz.;
garniec n.-p. = 1,2196110769 garnca ros.; garniec ros. = 3,2797340690 kwarty n.-p.;
czetwiert = 1,8448504138 korca = 1 korcowi + 2 ćwierciom + 4 garn. + 1 kwar. + 3,6 kwaterki;
korzec = 4,8784443078 czetwieryka = 4 czetwierykom + 7,03 garnca ros.
garniec n.-p. = 0,3252304330 wiadra; wiadro = 3,0747430087 garnca n.-p.
funt n.-p. = 0,9902137997 funta ros.; funt ros. = 1,0098329164 funta n.-p.

(Zadania arytmetyczne. § 8.)

---

*) Funt rosyjski jest cięższy od funta n.-p. prawie o 4 gramy.

[1]) Петрушевскій и Еремѣевъ, *Сравнительныя таблицы десятичныхъ и русскихъ мѣръ* (1868). Te właśnie tablice są obecnie powszechnie używane przy obliczeniach odpowiednich.

[2]) R. 1849. W tablicach tych niema objaśnienia, na jakiéj podstawie były oparte wyliczenia, które doprowadziły do tak wielu cyfr dziesiętnych....

§ 9. WYRAŻANIE LICZBY WIELKORAKIÉJ JAKO LICZBY MIANOWNÉJ PROSTÉJ, I ODWROTNIE.

1. Jeżeli mamy liczbę wieloraką (§ 1, us. 11), np. 15 łok.+ +1 st.+8 cali, więc wyrażoną w jednostkach: łokieć, stopa, cal, a chcemy ją wyrazić w najdrobniejszéj z tych jednostek, t. j. w calach *), to wypadnie nam rozumować w sposób następujący. Ponieważ łok. ma 2 st., więc 15 ł. mieć będzie stóp 15 *razy więcéj;* trzeba zatym *liczbę mianowaną* 2 st. pomnożyć przez liczbę oderwaną 15; otrzymamy liczbę mianowaną 30 st. (wyrażoną przy pomocy téj saméj jednostki, co mnożna, § 6, us. 6). Zamiast więc 15-u łok. mamy 30 st., a że w danéj liczbie wielorakiéj mamy prócz tego 1 st., przeto, dodawszy do 30 st. tę 1 st., otrzymamy 31 st. Ponieważ st. ma 12 c., więc 31 st. ma cali 31 *razy więcéj;* dlatego trzeba 12 c. pomnożyć przez *liczbę oderwaną* 31. Do otrzymanych zaś w iloczynie 372 c. należy jeszcze dodać 8 c.; otrzymamy 380 c.

```
  2 st.
×15
 30 st.
×1 st.
 31 st.

  12 c.
×31
  12
 36
 372 c.
×8 c.
 380 c.
```

Odp. 15 ł.+1 st.+8 c.=380 c.

Podobnie rozumować będziemy wrazie, gdy np. 2 morgi+240 pr. kw.+85 st. kw. mamy wyrazić w st. kw. Rachunek zaś tak przedstawimy:

```
 300 pr. kw.              225 st. kw.
×2                       ×840
 600 pr. kw.              900
+240 pr. kw.            1800
 840 pr. kw.            189000 st. kw.
                           +85 st. kw.
                        189085 st. kw.
```

Odp. 2 m.+240 pr. kw.+85 st. kw.=189 085 st. kw.

2. Jeżeli mamy liczbę, wyrażoną w jednostkach układu metrycznego, np.

3 Km.+8 m.+6 dm.+5 cm.

przedstawić w cm., to albo postępować będziemy w ten sposób:

3 Km.=1000 m.×3=3000 m.; 3000 m.+8 m.=3008 m.;

3008 m.=10 dm.×3008=30080 dm.; 30080 dm.+6 dm.=30006 dm.

30086 dm.=10 cm.×30086=300860 cm.; 300860 cm.+5 cm.=300865 cm.;

*) Mówi się także: zamienić 15 ł.+1 st.+8 c. na cale (ale nie: zamienić liczbę i t. d.)

[O przedstawianiu liczby mianowanéj prostéj w jednostkach drobniejszych, niż te, które wchodzą w dane wyrażenie téj liczby, mówiliśmy już poprzednie w § 6, us. 27.]

albotéż, zważywszy, że Km.$=$1000 m.$=$100 000 cm., powiemy krócéj że 3 Km. to 3 setki tysięcy cm., 8 m. to 8 setek cm., 6 dm. to 6 dziesiątków cm., i mieć będziemy

3 Km.$+$8 m.$+$6 dm.$+$5 cm.$=$300 000 cm.$+$800 cm.$+$60 cm.$+$5cm.
$=$300 865 cm.

Podobnież, jeżeli chcemy np. 3 m. sz.$+$86 dm. sz.$+$250 cm. sz. wyrazić w cm. sz., to, zważywszy, że m. sz.$=$1000 dm. sz., a dm. sz. $=$1000 cm. sz., tak iż m. sz.$=$1000 000 cm. sz., mamy

3 m. sz.$+$86 dm. sz.$+$250 cm. sz.$=$3 000 000 cm. sz.$+$86 000 cm. sz.$+$
$+$250 cm. sz.
$=$3 086 250 cm. sz.

3. Jeżeli mamy liczbę mianowaną prostą, t. j. wyrażoną przy pomocy jednéj jednostki, i taką, że w niéj jest tych jednostek więcéj, niż ich się mieści w jednorodnéj jednostce większéj, to możemy dla wyrażenia danéj liczby mianowanéj prostéj użyć téj większéj jednostki. Powstaje wtedy często *) liczba wieloraka. Tak np. gdy mamy 3378 cali n.-p., to w téj liczbie jest więcéj cali, niż ich jest w stopie; możemy więc dla wyrażenia téj liczby użyć stopy. Ponieważ stopa ma 12 c., więc w liczbie 3378 c. będzie *tyle stóp, ile razy* 12 c., mieści się w 3378-u c. Należy więc podzielić 3378 c. przez 12 c. Otrzymamy w ilorazie (§ 7, us. 7) *liczbę oderwaną* 281, która nam wskazuje, ile razy 12 c. mieści się w 3378 c. Ale powiedzieliśmy, że «będzie tyle stóp, ile razy 12 c. mieści się w 3378 c.»; znalazszy więc, że «mieści się 281 razy», widzimy, że «jest 281 c.» (Otrzymana więc bespośrednio z dzielenia *liczba oderwana* 281 *odpowiada liczbie mianowanéj* 281 c.) W liczbie więc 3373 c. jest 281 st.; lecz nadto zostaje (w reszcie dzielenia) 6 c.; zatym, możemy daną liczbę mianowaną prostą 3378 c. wyrazić, jako 281 st.$+$6 c., t. j. jako liczbę wieloraką.—

```
 3378 c. | 12 c.
—24      | 281
   97      281 st.
 —96
    18
  —12
     6
```

Ponieważ jednak 281 st. jest więcéj niż 2 st., które tworzą już jednostkę jednorodną większą, łokieć, możemy więc jeszcze liczbę 281 st. wyrazić przy pomocy téj jednostki, t. j. łokcia. Łok. ma 2 st., więc w 281 st. będzie tyle łokci, ile razy 2 st. mieszczą się w 281 st. Dzieląc więc 281 st. przez 2 st., otrzymamy w ilorazie liczbę oderwaną 140, która odpowiada liczbie mianowanéj 140 ł. Że zaś ponad te łokcie jest jeszcze w téj liczbie 1 st., więc 281 st.$=$140 ł.$+$1 st.—Ponieważ

```
281 st. | 2 st.
 . . .  | 140
  1 st.   140 ł.
```

*) Mówimy «często», bo wyrażając niekiedy liczbę mianowaną prostą, np. 20 kwart, przy pomocy jednorodnéj jednostki większéj, jak tu garnca, mieć będziemy liczbę mianowaną prostą, a nie wieloraką, jak np. tu: 5 garncy.

140 ł. jest więcéj niż 3 ł., które stanowią jednorodną jednostkę większą, sążeń; więc możemy znowu 140 ł. wyrazić przy pomocy sążnia.

140 ł.	3 ł.	W 140 ł. będzie tyle sążni ile razy 3 ł. mieszczą
. . .	46	się w 140 ł.; mieszczą się 46 razy, więc sążni jest
2 ł.	46 sąż.	46; a gdy nam zostało nadto 2 ł., więc 140 ł.

=46 sąż.+2 ł.—Mamy więc:

3378 c.=281 st.+6 c.; ale 281 st.=140 ł.+1 st.; zatym:

3378 c.=140 ł.+1 st.+6 c.; że zaś 140 ł.=46 sąż.+2 ł., więc ostatecznie:

Odp. 3378 c. n.-p.=46 sąż.+2 ł.+1 st.+6 c. *).

Podobnież rozumując wrazie, gdy mamy np. 3 147 000 cali sz. ros., przedstawimy rachunek w ten sposób:

3147000 c. sz.	1728 c. sz.	1821 st. sz.	343 st. sz.
. . . .	1821	1715	5
312 c. sz.	1821 st. sz.	106 st. sz.	5 saż. sz.

Odp. 3 147 000 c. sz. ros.=5 saż. sz.+106 st. sz.+352 c. sz.

4. Jeżeli chcemy liczbę mianowaną prostą, wyrażoną przy pomocy jednostki układu metrycznego, np. 28 342 021 mg., wyrazić w większych jednostkach: g. i Kg., to również ponieważ g.=1000 mgr., to w liczbie 28 342 021 mg. będzie tyle g., ile razy 1000 mg. mieści się w 28 342 021 mg.; mieści się (§ 7, us. 20) 28 342 razy, a nadto zostaje 21 mg.; w danéj więc liczbie jest 28 342 g.+21 mg. Gdy zaś Kg. ma 1000 g., to w 28 342 g. będzie tyle Kg., ile razy 1000 g. mieści się w 28 342 g.; w liczbie 28 342 g. 1000 g. mieści się 28 razy, a nadto zostaje 42 g.; jest więc w niéj 28 Kg.+342 g. Możemy więc powiedzieć, że 28 342 021 mg.=28 Kg.+342 g.+21 mg. — Możemy tu także inaczéj rozumować. Ponieważ Kg.=1000 g., a g.=1000 mg., a tymsamym Kg.=1 000 000 mg., więc w liczbie 28 342 021 mg. tyle jest Kg., ile jest milijonów mg., a nadto tyle g., ile w pozostałéj liczbie jest tysięcy mg., przyczym będzie jeszcze tyle mg., ile w danéj liczbie ich pozostanie, po oddzieleniu (wszystkich) tysięcy mg. Gdy więc w danéj liczbie jest 28 milijonów mg., a nadto 342 tysięcy mg. i prócz tego 21 mg., to

28 342 021 mg.=28 Kg.+342 g.+21 mg.

(Zadania arytmetyczne. § 9, 10.)

---

*) O naszéj liczbie łatwiéj sobie wyrobimy pojęcie, gdy ją przedstawimy w postaci: 46 sąż.+2 ł.+1 st.+6 c., niż wrazie, gdy mamy ją daną w postaci: 3378 c. W miarach zaś układu metrycznego jest to prawie obojętnym.

§ 10. DODAWANIE I ODEJMOWANIE LICZB WIELORAKICH.

1. Gdy mamy dodać do siebie liczby wielorakie, np. *a)* 3 dnie *)+18 godzin+50 minut+45 sekund; *b)* 4 d.+19 g + +54 m.; *c)* 7 d.+15 m.+24 s. i *d)* 6 d.+4 g.+44 m.+8 s., to należy nam tu znaléść liczbę, któraby zawiérała w sobie wszystkie części składników. Ta suma będzie, wogóle mówiąc, wyrażoną przy pomocy jednostek: dzień, godzina, minuta, sekunda—będzie liczbą wieloraką. Ponieważ w jéj wyrażenie wejdą dnie, więc w tym wyrażeniu, obok dni, liczba godzin nie może być 24, ani większą; podobnie, liczba minut w tym wyrażeniu sumy nie może być 60, ani większą. Liczbę dni w sumie otrzymamy z dodania dni składników, liczbę godzin w sumie otrzymamy z dodania godzin składników, i t. d.; należy więc oddzielnie wykonać częściowe dodawania dni, godzin, minut i sekund składników, i dlatego składniki dane tak pod sobą podpiszemy, aby dnie były pod dniami i t. d. Wrazie, gdy z takiego dodawania częściowego (godzin, minut, sekund) wypadnie nam tych jednostek więcéj, niż ich się mieści w większéj jednostce (dniu, godzinie, minucie), to otrzymaną w sumie częściowéj liczbę mianowaną prostą wyrazić wypadnie jako liczbę wieloraką (§ 9, us. 3) przy pomocy téj właśnie jednostki większéj. Ponieważ część téj (częściowéj) sumy, wyrażona przy pomocy jednostki większéj, np. dnie, otrzymane z dodania godzin, nie mogą w ostatecznéj sumie oddzielnie być zaznaczone, więc wypadnie je dodać do liczby dni, otrzymanych z dodania dni składników. Aby więc odrazu w ostatecznéj sumie wypisać np. liczbę dni i nie potrzebować téj liczby zmieniać wskutek tego, że z dodania godzin możemy otrzymać dnie, należy uskutecznić dodawanie godzin przed dodawaniem dni; podobnie dodawanie minut, przed dodawaniem godzin, oraz dodawanie sekund przed dodawaniem minut. Widzimy więc, że wogóle częściowe dodawania należy wykonywać, poczynając od części składników wyrażonych przy pomocy najmniejszéj z jednostek. Dodając więc sekundy do siebie, otrzymamy 77 s.; nie podpisując téj liczby pod dodanymi częściami składników, gdyż ta liczba sekund oczywiście nie jest mniejszą od 1 minuty, na stronie znaj-

3 d.	+18 g.	+30 m.	+45 s.
4 d. **)	+19 g.	+54 m.	
7 d.	+15 g.		+24 s.
6 d.	+ 4 g.	+44 m.	+ 8 s.
22 d.	+10 g.	+29 m.	+17 s.

77 s.	60 s.	149 m.	60 m.	58 g.	24 g.
−60	1	−120	2	−48 g.	2
17 s.	1 m.	9 m.	2 g.	10 g.	2 d.

*) Właściwie: doby.

**) Zamiast ponownie wypisywać d., g., m., s. (i podobnie w innych zadaniach) stawić można znaczki: „ albo — (kréski).

dujemy jéj wyrażenie, jako liczby wielorakiéj, przy pomocy jednostek: minuta i sekunda. Otrzymawszy 1 m.+17 s., podpisujemy 17 s. pod sekundami składników, a 1 m. dodajemy wraz z minutami składników, i t. d.; w ten sposób wprost pod kréską, oddzielającą liczby dane od szukanéj, podpisujemy odrazu ostateczne wyrażenie sumy.

2. Podobnie:

2 Km. kw.+46 Hm. kw.+ 920 m. kw.			
3 Km. kw.+88 Hm. kw.+ 380 m. kw.	(Hm. kw.=10 000 m. kw.)		
10 Km. kw.+92 Hm. kw.+ 325 m. kw.			
17 Km. kw.+26 Hm. kw.+1625 m. kw.			

Moglibyśmy także każdy ze składników wyrazić w m. kw. (§ 9, us. 2) wtedy przedstawilibyśmy to dodawanie w ten sposób:

$$
\begin{array}{r}
2460920 \text{ m. kw.} \\
3880380 \text{ m. kw.} \\
10920325 \text{ m. kw.} \\
\hline
17261625 \text{ m. kw.,}
\end{array}
$$

a tę liczbę przedstawilibyśmy jako liczbę wieloraką (§ 9, us. 4) przy pomocy tych samych jednostek, które wchodzą do zadania, t. j. Km. kw., Hm. kw. i m. kw.

17 261 825 m. kw.=17 Km. kw.+26 Hm. kw.+1625 m. kw.

Weźmy jeszcze dodawanie:

14 Kg.+ 82 g.+45 cg.+6 mg.	20 mg.=2 cg.
12 Kg.+ 43 g.+15 cg.+9 mg.	144 dg.=1 g.+44 cg.
4 Kg. +82 cg.+5 mg.	
30 Kg.+126 g.+44 cg.	

Widzimy z tego, że przy dodawaniu liczb wielorakich, wyrażonych w układzie metrycznym, postępuje się podobnie, jak przy dodawaniu liczb oderwanych. Ponieważ jednostka większa ma jednostek mniejszych 10, 100,..., więc możemy odrazu w wyrażeniu sumy pod dodawanymi kolumnami cyfr podpisywać odpowiednią cyfrę. (Tak np. dodając tu centygramy, możemy tak mówić: 4, 9, 14; piszę 4; 9, 10, 14; piszę 4; setka zaś centygramów stanowi gram; a daléj: 4, 6; piszę 6; 4, 12; piszę 2; Kg. ma tysiąc g., więc obok 26 g. piszę także i 1 setkę gramów.)

Wyrażając zaś wszystkie składniki w miligramach, możemy tak wykonać to działanie:

$$
\begin{array}{r}
14082456 \text{ mg.} \\
12043159 \text{ mg.} \\
4000825 \text{ mg.} \\
\hline
30126440 \text{ mg.}
\end{array}
= 30 \text{ Kg.}+126 \text{ g.}+44 \text{ cg.}
$$

3. Jeżeli w zadaniu, które nas doprowadza do dodawania, składnik jest wyrażony jako data, to należy tę datę przedstawić jako czas upłyniony.

Np. Ktoś wyjechał z pewnego miejsca 4 maja r. 1880 o godzinie 3-éj minut 45 po południu, a powrócił po upływie 2 lat 10 miesięcy 29 dni 13 godzin 30 minut; kiedy więc wrócił?—Trzeba tu datę: 4 maja r. 1880 o godzinie 3-éj minut 45 po południu wyrazić jako czas upłyniony. Był rok 1880-y, a więc od narodzenia Chrystusa przeszło lat 1879; był miesiąc maj, piąty w roku, a więc prócz tych lat, skończyło się miesięcy 4; był dzień 4-y piątego miesiąca, a więc przeszło już od końca miesiąca czwartego dni 3; była godzina 3 po południu, a więc w tym dniu od północy przeszło godzin 12+3, t. j. 15 godzin, a nadto minut 45. Możemy więc tę datę tak wyrazić jako czas upłyniony: 1879 l.+4 m.+3 d.+15 g.+45 m. Więc:

	1879 l.+	4 m.+	3 d.+	15 g.+	45 m.
+	2 l.+	10 m.+	29 d.+	13 g.+	30 m.
	1882 l.+	3 m.+	2 d.+	5 g.+	15 m.

Po częściowym dodaniu dni, 1+29+3=33 dnie, nie możemy odrazu oddzielić dnie od miesiąca, bo nie wiemy, któryto będzie miesiąc, wypadły z tych dni, nie wiemy mianowicie, wiele dni on zawiérać będzie. Dlatego, zanotowawszy na stronie 33 dnie, widzimy, że z dodania 10 m. i 4 m. otrzymamy 14 m.; czyli rok i 2 m.; tym więc miesiącem, który wypadnie z dodania dni, będzie miesiąc trzeci w roku, marzec, mający dni 31. Z dodania więc dni otrzymamy 1 miesiąc i 2 dnie. Otrzymaną liczbę 1882 l.+3 m.+2 d.+5 g.+15 m. wypadnie wyrazić jako datę; będzie więc rok (bieżący) 1883-ci, miesiąca 4-go, więc kwietnia, dzień 3-ci, o godzinie 5 minut 15 rano.—Odp. Wrócił do tego miejsca 3-go kwietnia r. 1883-go o godzinie 5-éj minut 15 rano.

Gdybyśmy zamiast 29 dni mieli 27 dni, to z wykonania dodawania częściowego dni otrzymalibyśmy 31 dni, t. j. tyle właśnie dni, ile ich jest w wypadającym tu z dodania dni miesiącu marcu; tak iż w otrzymanéj sumie nie byłoby dni. Zamieniając zaś tę sumę na datę, mielibyśmy w niéj: 1-y kwietnia.

Gdybyśmy zaś, mając w tym zadaniu np. 27 dni, mieli jednak zamiast 10-u 9-ć miesięcy, to, zaznaczywszy na stronie, że z dodania dni, otrzymujemy dni 31 i przeszedszy do częściowego dodawania miesięcy, miéć będziemy 4 m.+ 9 m.=13 m.=1 r.+1 m. Tym więc miesiącem, który wypadnie z dodania częściowego dni, będzie miesiąc drugi w roku, luty, który miéć może albo 28, albo 29 dni. Wskazówkę tego, którą z tych dwu liczb mamy tu uwzględnić, dostarczy nam dopiéro dodanie lat. 1+2+1879=1882 lata, a więc będzie to miesiąc luty roku 1883-go, zwyczajnego, i miéć będzie 28 dni. W tym przeto przypadku dni 31 = 1 m. + 3 dniom; w sumie będziemy mieli 2 m. + 3 dnie, a w dacie: 4-y marca.

4. Jeżeli mamy np. od 10 sąż. kw. + 5 łok. kw. + 2 st. kw. + + 46 cali kw. odjąć 4 sąż. kw. + 4 ł. kw. + 3 st. kw. + 82 cale kw., to odejmowanie to należy uskutecznić przy pomocy odejmowań częściowych, t. j. sążni kw. od sążni kw., łokci kw. od ł. kw. i t. d.

	10 sąż. kw.	+ 5 ł. kw.	+ 2 st. kw.	+ 46 c. kw.
—	4 sąż. kw.	+ 4 ł. kw.	+ 3 st. kw.	+ 82 c. kw.
	6 sąż. kw.		+ 2 st. kw.	+ 108 c. kw.

Aby zaś te odejmowania częściowe można było wykonać, potrzeba, aby w każdym z nich odjemna nie była mniejszą od odpowiedniego odjemnika. Należy więc daną odjemną tak przedstawić, t. j. tak rozłożyć na części, aby każda część odjemnéj nie była mniejsza od odpowiedniéj części odjemnika. Gdybyśmy uprzednio ten roskład odjemnéj wykonali i nadpisali go nad odjemną, to moglibyśmy odejmowania częściowe wykonywać w jakimkolwiek porządku. Ponieważ jednak chcemy ten roskład odjemnéj uskuteczniać częściowo, tylko w miarę potrzeby, a niezmieniać już tego, co raz napiszemy w reszcie, więc zaczynamy z prawéj strony, t. j. od odejmowania najmniejszych jednostek. — 82 c. kw. jest więcéj niż 46 c. kw. Więc 2 st. kw. roskładam na 1 st. kw., którą zostawiam, i 1 st. kwad., którą wyrażam jako 144 c. kwad.; 144 c. kw. + 46 c. kw. = 190 c. kwad.; odejmę więc 82 c. kwad. od 190 c. kw. *); pozostanie 108 c. kw., które podpisuję pod kréską pod c. kwadratowymi. 3 st. kw. jest większe od 1 st. kw.; roskładam więc 5 ł. kw. na 4 ł. kw., które zostawiam, i 1 ł. kw., który wyrażam jako 4 st. kw.; 4 st. kw. + 1 st. kw. = 5 st. kw.; 3 st. kw. od 5 st. kw. jest 2 st. kw., które piszę pod stopami kwadratowymi. Mam teraz odjąć 4 ł. kw. od 4 ł. kw.; nie będzie więc w reszcie łokci kwadratowych. 4 sąż. kw. od 10 sąż. kw. jest 6 sąż. kw., które podpisuję pod sąż. kw. — Odp. 6 sąż. kw. + 2 st. kw. + 108 c. kw.

5. Wrazie, gdy mamy np. od 30 Kg., 26 g. i 446 mg. odjąć 15 Kg., 68 g. i 684 mg.,

	30 Kg.	+ 26 g.	+ 446 mg.
—	15 Kg.	+ 68 g.	+ 684 mg.
	14 Kg.	+ 957 g.	+ 762 mg.

to, z uwagi, że w układzie metrycznym każda jednostka większa ma jednostek mniejszych 10, albo 100, albo i t. d., t. j. wogóle liczbę przedstawioną przez jedność z zerami, możemy przy wykonywaniu częściowych odejmowań odrazu stawić cyfry pod kolumnami cyfr odejmowanych. Tak odejmując tu mg., mam 4 od 6-u 2, które

*) Wrazie, gdyby były większe liczby (np. przy miarach sześciennych), przestrzegając czystości w wykonaniu rachunków, zamiast nadpisywać, jakby tu np. nad 46 liczbę 190, lepiéj pisać na stronie częściowe takie odejmowanie, jak tu 82 c. kw. od 190 c. kw.

zaraz mogę napisać (bo ta cyfra już się nie zmieni) pod kréską; podobnie dalej: 8 od 14-stu 6 (piszę je); 6 od 13-stu 7 (piszę); użyty tu 1 tysiąc mg. został wzięty z gramów odjemnéj przez zamienienie 1 g. na mg. (gr. ma 1000 mg.); mam więc w odjemnéj już tylko 25 g. Odejmując dalej, mam 8 od 15-u 7 (piszę); 6 od 11-u 5 (piszę); użyta tu 1 setka gr. została wzięta z kilogramów, przez zamienienie 1 Kg. na g.; ale Kg. ma 1000 g., t. j. 10 setek; zostało więc z nich jeszcze 9 setek g., które napiszę przed 5 dziesiątkami. Odejmując nakoniec 15 Kg. od 29 Kg., mieć będziemy w reszcie 14 Kg. — Odp. 14 Kg. + 957 g. + 762 mg.

Moglibyśmy tu łatwo wyrazić odjemną i odjemnik jako liczby mianowane proste wyrażone w jednostce najmniejszéj, mg.; po wykonaniu zaś odejmowania należałoby resztę wyrazić jako liczbę wieloraką przy pomocy jednostek wchodzących w zadanie. Byłoby więc:

$$\begin{array}{r} 30026446 \text{ mg.} \\ -\,15068684 \text{ mg.} \\ \hline 14957762 \text{ mg.} \end{array} = 14 \text{ Kg.} + 957 \text{ g.} + 762 \text{ mg.}$$

3. Jeżeli w zadaniu, które nas doprowadza do odejmowania, odjemna lub odjemnik jest dany jako data, to należy tę datę wyrazić jako czas upłyniony.

Np. Ktoś, po niebytności w pewnym miejscu przez 2 lata + 9 miesięcy + 29 dni + 13 godzin + 30 minut, powrócił 6 marca r. 1884 o godzinie 5 minut 15 rano; kiedy więc z tego miejsca wyjechał. — Zamieniając wchodzącą tu datę na czas upłyniony, otrzymamy 1883 l. + + 2 m. + 5 d. + 5 g. + 15 m.; wypadnie więc wykonać odejmowanie:

$$\begin{array}{rrrrr} 1883 \text{ l.} + & 2 \text{ m.} + & 5 \text{ d.} + & 5 \text{ g.} + & 15 \text{ m.} \\ -\quad 2 \text{ l.} + & 9 \text{ m.} + & 27 \text{ d.} + & 13 \text{ g.} + & 30 \text{ m.} \\ \hline 1880 \text{ l.} + & 4 \text{ m.} + & 6 \text{ d.} + & 15 \text{ g.} + & 45 \text{ m.} \end{array}$$

Otrzymawszy w reszcie 45 m., a następnie 15 g., wypada nam tu odjąć 27 d. od 4 d. Rozkładam więc 2 m. na 1 m., który zostawiam, i 1 miesiąc, który zamieniam na dnie. Ten miesiąc jest drugi w roku, luty; mieć on może albo 28, albo 29 dni. Ponieważ to jest luty roku 1884-go (przestępnego), więc ma 29 dni; 29 d. + 4 d. = 33 d.; 33 d. — 27 d. = 6 d., które piszę w reszcie. Następnie otrzymamy 4 m. i 1880 l. Wypadłą resztę trzeba jeszcze wyrazić jako datę. — Odp. Wyjechał z tego miejsca 7 maja r. 1881 o godz. 3-éj minut 45 po południu.

Weźmy zadanie, w którym tak odjemna, jak i odjemnik są przedstawione jako daty. Np. Ktoś wyjechał z pewnego miejsca 7 maja r. 1881 o godzinie 3-éj minut 45 po południu, a wrócił 6 marca r. 1884 o godz. 5-éj minut 15 rano; ile trwała jego nieobecność w tym miejscu?

Wyraziwszy te daty, jako czas upłyniony od początku naszéj ery, mieć będziemy odejmowanie:

	1883 l.+	2 m.+	5 d.+	5 g.+	15 m.
—	1880 l.+	4 m.+	6 d.+	15 g.+	45 m.
	2 l.+	9 m.+	27 d.+	13 g.+	30 m.

Gdy tu przystępujemy do częściowego odejmowania dni, wypada nam jeden miesiąc, drugi w roku, więc luty r. 1884-go, zamienić na dnie; ma on 29 d.; 29 d.+4 d.=33 d.; 33 d.—6 d.=27 d. — Odp. Jego nieobecność w tym miejscu trwała 2 l.+9 m.+27 d.+13 g.+30 m.

Możemy w takich zadaniach przy wyrażaniu obu dat, jako czasu upłynionego, nie używać jednostki miesiąca, ale po latach wystawić wprost liczbę wszystkich dni upłynionych od początku roku bieżącego. Tak np., w powyższym zadaniu od początku r. 1881 (zwyczajnego) do 7 maja przeszło dni 31+28+31+30+6=126 dni; od początku zaś r. 1884 (przestępnego) do 6 marca upłynęło dni 31+29+5=65 dni.

	1883 l.+	65 d.+	5 g.+	15 m.
—	1880 l.+	126 d.+	15 g.+	45 m.
	2 l.+	303 d.+	13 g.+	30 m.

Tu przy częściowym odejmowaniu dni wypadnie 1883 l. rozłożyć na 1882 l. i 1 rok; ten rok (1883-i) ma dni 365; 365 d.+ +64 d.=429 d.; 429 d.—126 d. =303 d. — Gdybyśmy się tak przedstawioną odpowiedzią: 2 l.+303 d. +13 g.+30 m. nie zadowalali, a chcieli z tych 303 d. oddzielić miesiące, to należałoby przyjąć tu pod uwagę, że w téj liczbie 303 dnie, miesiące liczą się ponad 2 lata od chwili wyjazdu, t. j. że je liczyć należy od 7 maja r. 1883-ego; wchodzą więc tu miesiące: maj *) (31 dni), czerwiec (30 dni) i t. d. **). W każdym razie liczba 303, jako znacznie większa od 270, obejmuje 9 miesięcy. Suma zaś dni tych 9-u miesięcy będzie tu: 31+30+31+31+30+31+30+31+31= =276 dni; 303 dnie—276 d.=27 d. W warunkach więc naszego zadania [1]) 303 dnie=9 m.+27 dni.

Wogóle w zadaniach tak na dodawanie, jak i na odejmowanie, w które wchodzą daty, należy być bardzo ostrożnym [2]).

(Zadania arytmetyczne. § 11, 12.)

*) Właściwie: od 7 maja do 7 czerwca; od 7 czerwca do 7 lipca, i t. d., ale możemy się wprost wyrażać: maj, czerwiec i t. d., bo tu idzie tylko o ostatni dzień miesiąca.

**) Gdyby był luty (albo raczéj miesiąc od pewnego dnia lutego do tegoż dnia marca), to trzebaby zważać na to, jaki rok bieżący odpowiada odjemnéj.

[1]) W innych warunkach mogłoby 303 dni, przy 9 miesiącach, przedstawiać inną liczbę dni (28 d., 29 d., a nawet 30 d.).

[2]) Niewłaściwym jest obchodzenie pozornych trudności przy wykonywaniu podobnych zadań przez przyjmowanie w nich, iż każdy miesiąc ma dni 30. Starannym wyjaśnieniem można przecież trudności pokonać. Błędnym zaś rezultatem zadawalać się nie należy.

§ 11. MNOŻENIE I DZIELENIE LICZB WIELORAKICH.

1. Postępowanie przy mnożeniu liczb wielorakich bespośrednio wynika z tego, cośmy mówili o dodawaniu liczb wielorakich (§ 10, 1), bo mnożenie jestto skrócone dodawanie jednakowych składników. Np.

3 mor.+186 pr. kw.+64 st. kw.	
3 mor.+186 pr. kw.+64 st. kw.	3 mor.+186 pr. kw.+64 st. kw.
3 mor.+186 pr. kw.+64 st. kw.	× 4
3 mor.+186 pr. kw.+64 st. kw.	14 mor.+145 pr. kw.+31 st. kw.
14 mor.+145 pr. kw.+31 st. kw.	

256 st. kw.	225 st. kw.	745 pr. kw.	300 pr. kw.
225	1	600	2
31 st. kw.	1 pr. kw.	145 pr. kw.	2 m.

Z tego naprzód widzimy, że mnożnik, jako oznaczający, ile razy mnożna ma być wzięta jako składnik, jest zawsze liczbą oderwaną. Jeżeli np. to mnożenie wypadło nam z zadania: «Ktoś sprzedał cztéry równe place; w każdym było po 3 morgi, 186 pr. kw. i 64 st. kw.; ile razem sprzedał?» — to do tego mnożenia doszliśmy zapomocą takiego rozumowania: kiedy jeden sprzedany plac obejmował 3 morgi+186 pr. kw.+64 st. kw., to 4 takie place obejmowały *4 razy* więcéj; trzeba więc 3 morgi+186 pr. kw.+64 st. kw. pomnożyć przez liczbę oderwaną 4.

Mnożenie zaś samo, podobnie jak dodawanie (i dla tych samych powodów), uskuteczniamy, poczynając od najmniejszych jednostek. Mnożymy więc 64 st. kw.×4; otrzymamy 256 st. kw.; ponieważ zaś większa jednostka, pr. kw., ma 225 st. kw., więc należy liczbę mianowaną prostą 256 st. kw. przedstawić jako liczbę wieloraką przy pomocy jednostek pręta kw. i stopy kw. (§ 9, 1); otrzymujemy 1 pr. kw.+31 st. kw.; 31 st. kw. podpisujemy pod stopami kw. mnożnéj, a 1 pr. kw. dodajemy do iloczynu powstałego z pomnożenia prętów kw. mnożnéj przez mnożnik. I t. d.

2. Moglibyśmy to działanie wykonać inaczéj, mianowicie: liczbę wieloraką 3 m.+186 pr. kw.+64 st. kw. wyrazić jako liczbę mianowaną prostą, t. j. wyrazić w st. kw.; tę liczbę stóp kw. pomnożyć przez liczbę oderwaną 4, a otrzymaną w iloczynie liczbę mianowaną prostą (st. kw.) wyrazić znowu jako liczbę wieloraką:

$$\begin{array}{r}
300 \text{ pr. kw.} \\
\times 3 \phantom{\text{ pr. kw.}} \\
\hline
900 \text{ pr. kw.} \\
+186 \text{ pr. kw.} \\
\hline
1086 \text{ pr. kw.}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
244414 \text{ st. kw.} \\
\times 4 \text{ st. kw.} \\
\hline
977656 \text{ st. kw.}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
977656 \text{ st. kw.} & 225 \text{ st. kw.} \\
\hline
776 & 4345 \\
1015 & 4345 \text{ pr. kw.} \\
1156 & \\
31 \text{ st. kw.} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
225 \text{ st. kw.} \\
\times 1086 \phantom{\text{ st. kw.}} \\
\hline
1350 \phantom{\text{ st. kw.}} \\
1800 \phantom{\text{ st. kw.}} \\
225 \phantom{\text{ st. kw.}} \\
\hline
244350 \text{ st. kw.} \\
+64 \text{ st. kw.} \\
\hline
244414 \text{ st. kw.}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
4345 \text{ pr. kw.} & 300 \text{ pr. kw.} \\
\hline
1345 & 14 \\
145 \text{ pr. kw.} & 14 \text{ morgów.}
\end{array}$$

Odp. 14 morgów + 145 pr. kw. + 31 st. kw.

Z tego widzimy, iż ten sposób postępowania jest znacznie dłuższy od poprzednio podanego, w którym nadto z mniejszymi liczbami mamy do czynienia.

3. Niedogodności te znikają jednak, gdy mamy do czynienia z liczbami danymi w układzie metrycznym; wtedy bowiém tak wyrażanie liczby wielorakiéj jako mianowanéj prostéj, jak i postępowanie odwrotne odbywają się bardzo prędko. Np. Łut n.-p. waży tyleż, co 12 g. + 672 mg.; wiele w centnarze (stufuntowym) jest Kg., g. i t. d. — Tu należy przedewszystkim znaléść, ile centnar ma łutów. Ponieważ c. = 100 fun., a f. = 32 ł., więc c. = 32 ł. × 100 = 3200 ł. A gdy ł. = 12 g. + 672 mg., zatym, aby znaléść wyrażenie c. w wagach metrycznych, należy 12 g. + 672 mg., czyli 12672 mg. pomnożyć przez liczbę oderwaną 3200, i

$$\begin{array}{r}
12672 \text{ mg.} \\
\times 3200 \phantom{\text{ mg.}} \\
\hline
25344 \phantom{\text{ mg.}} \\
38016 \phantom{\text{ mg.}} \\
\hline
40550400 \text{ mg.}
\end{array} = 40 \text{ Kg.} + 550 \text{ g.} + 400 \text{ mg.}$$

4. W powyższym przykładzie widzieliśmy, że należy koniecznie mnożnik odnieść do tego pojęcia, któremu odpowiada mnożna: trzeba było centnar wyrazić w łutach, bo mnożna odpowiadała łutowi.

Podobnież wypadnie postąpić, gdy będziemy mieli np. zadanie: Ktoś kazał równo obsiać żytem pole, mające 5 włók + 16 morgów obszaru, i osobiście sprawdził, że na obsianie morga wyszło: 1 korzec + 2 ćwierci + 3 garnce; ile potrzeba żyta na obsianie całego pola? — Potrzeba żyta tyle *razy* więcéj niż 1 k. + 2 ć. + 3 g., ile *razy* obszar 5 w.+16 m. jest większy od obszaru morga. Należy więc liczbę wieloraką 5 w. + 16 m. wyrazić w morgach; otrzymamy 160 morgów. Potrzeba zatym żyta 160 *razy* więcéj niż 1 k. + 2 ć. + 3 g., t. j. tę liczbę wieloraką trzeba pomnożyć przez liczbę oderwaną 160. Rachunek tak się przedstawi:

30 m.
×5
150 m.
+16 m.
166 m.

1 k.+2 ć.+3 g.
×166
264 k.+2 ć.+2 g.

498 g. | 8 g.
. . . | 62
2 g. 62 ć.

332 ć.
+62 ć.
394 ć. | 4 ć.
. . . | 98
2 ć. 98 k.

166 k.
+98 k.
264 k.

5. W dzieleniu, jako w działaniu odwrotnym mnożeniu dwu czynników, dzielna odpowiada iloczynowi, dzielnik zaś jednemu z czynników, t. j., albo mnożnéj, albo mnożnikowi (§ 6, us. 6). Skutkiem więc tego, w dzieleniu liczb wielorakich będą dwa przypadki, zależnie od tego, czy dzielnik jest liczbą wieloraką *), czyteż liczbą oderwaną.

Tak np., jeżeli: Posiadacz placu, mającego obszaru 14 morgów +145 pr. kw.+31 st. kw., podzielił go na równe części tak, iż każda część obejmowała 3 m.+186 pr. kw.+64 st. kw.; na ile części on ten plac podzielił?—to powiemy, iż podzielił na tyle części, ile *razy* 14 m.+145 p. kw.+31 st. kw. jest większe od 3 m.+186 p. kw.+64 st. kw. Dzielenie więc będzie miało na celu oznaczenie, ile razy dzielna jest większa od dzielnika. Otrzymana zaś liczba oderwana (odpowiadająca w mnożeniu mnożnikowi) przedstawi liczbę sprzedanych placów.

Jeżelibyśmy zaś mieli zadanie: Posiadacz placu, mającego obszaru 14 morgów + 145 pr. kw. + 31 st. kw., sprzedając, podzielił go na cztéry równe place; jak wielki był każdy ze sprzedanych placów?—to tu, oczywiście, w dzieleniu idzie nam o to, aby liczbę wieloraką 14 m.+145 pr. kw.+31 st. kw. rozłożyć na cztéry równe części i wyznaczyć, jak wielką jest każda z tych części. Otrzymana w ilorazie liczba wieloraka—wogóle mówiąc, mianowana—przedstawi nam właśnie, jak wielką jest jedna taka część.

Osobno rozważymy te dwa przypadki.

---

*) Wogóle: mianowaną. (Por. § 7, us. 7, 8.)

6. Gdy dzielna jest liczbą wieloraką, a dzielnik liczbą wieloraką lub mianowaną prostą (wogóle: liczbą mianowaną), to, mając się dowiedzieć, ile razy dzielnik mieści się w dzielnéj, czyli wymierzyć dzielną dzielnikiem, najdogodniéj możemy to uskutecznić, wyrażając dzielną i dzielnik jako liczby mianowane proste w téj saméj jednostce — a więc w najdrobniejszéj z jednostek, wchodzących w wyrażenia liczb danych [1]. Dzielenie więc to sprowadzamy do dzielenia dwu liczb mianowanych prostych, wyrażonych przy pomocy téj saméj jednostki (§ 7, us. 7).

Np. Ile z 78 cent. + 75 f. ołowiu zrobić można kul ważących po 2 f. + 6 ł.? — Kul zrobić można tyle, ile razy ciężar 78 c. + 75 f. jest większy od ciężaru 2 f. + 6 ł., t. j. ile razy 2 f. + 6 ł. pomieści się w 78 c. + 75 f. Aby więc ostatni ciężar wymierzyć ciężarem 2-u f. + 6-u ł., wyrazimy tak dzielną, jak i dzielnik jako liczby mianowane proste przy pomocy najdrobniejszéj z wchodzących tu jednostek, t. j. łuta.

$$\begin{array}{r}100\text{ f.}\\ \underline{78}\\ 7800\text{ f.}\\ \underline{+75\text{ f.}}\\ 7875\text{ f.}\end{array}\qquad\begin{array}{r}32\text{ ł.}\\ \underline{\times 2}\\ 64\text{ ł.}\\ \underline{+6\text{ ł.}}\\ 70\text{ ł.}\end{array}\qquad\begin{array}{r|l}252000\text{ ł.} & 70\text{ ł.}\\ \cline{2-2} & 3600\\ & 3600\text{ kul.}\end{array}$$

$$\begin{array}{r}32\text{ ł.}\\ \underline{\times 7875}\\ 252000\text{ ł.}\end{array}$$

Oczywiście, że, gdy mamy do czynienia z liczbami systematu metrycznego, postępujemy taksamo. Np. Na ile placów można podzielić Km. kw., jeżeli w każdym placu ma być 62 ary + 50 m. kw.

Km. kw. = 1 000 000 m. kw.; 62 ary + 50 m. kw. = 6250 m. kw.

$$\begin{array}{r|l}1000000\text{ m. kw.} & 6250\text{ m. kw.}\\ \cline{2-2} \underline{\cdots\cdots} & 16\\ 0 & 16\text{ placów.}\end{array}$$

7. Gdy dzielna jest liczbą wieloraką, a dzielnik liczbą oderwaną, to moglibyśmy podobnież, wyraziwszy dzielną jako liczbę mianowaną prostą, sprowadzić działanie do dzielenia mianowanéj prostéj przez oderwaną, otrzymaną zaś w ilorazie liczbę mianowaną prostą (wyrażoną przy pomocy téj saméj jednostki, co dzielna) przedstawić jako liczbę wieloraką.

---

[1] Inne postępowanie wymagałoby rozumowania wielce drobiazgowego, prowadziłoby często do nader złożonych rachunków i pociągaćby za sobą mogło potrzebę zmieniania cyfr wyznaczanych w ilorazie.

Tak mianowicie postępujemy zwykle przy dzieleniu liczb, wyrażonych w systemacie metrycznym. Np. Jeżeli 2 cent. metr. + 12 Kg. + 500 g. prochu użyto do 68 wystrzałów działowych, to ile średnio użyto prochu na jeden wystrzał? Należy 2 c. m. + 12 Kg. + 500 g. rozłożyć na 68 równych części i oznaczyć jak wielką jest jedna taka część,

2 c. m. + 12 Kg. + 500 g. = 212500 g.

$$\begin{array}{r|l} 212500\text{ g.} & 68 \\ \cline{2-2} \underline{\cdots\cdots} & 3125\text{ g.} = 3\text{ Kg.} + 125\text{ g.} \\ 0 & \end{array}$$

Postępujemy więc wtedy odwrotnie, niż przy mnożeniu liczb wielorakich w us. 2 i 3.

Mając jednak wykonać dzielenie liczby wielorakiéj, wyrażonéj nie w systemacie metrycznym, możemy odrazu w ilorazie wyznaczyć szukaną liczbę wieloraką przez postępowanie odwrotne temu, któregośmy używali przy mnożeniu liczb wielorakich w us. 1 i 4, t. j., naprzód wyznaczymy część ilorazu wyrażoną przy pomocy największéj jednostki; pozostałą resztę dzielnéj wyrazimy w mniejszéj (następującéj) jednostce i wyznaczymy odpowiadającą część ilorazu, i t. d.

Np. Plac, mający obszaru 14 morgów + 145 pr. kw. + 31 st. kw., sprzedany został w czterech równych częściach; jak wielki był każdy ze sprzedanych placów?

$$\begin{array}{rl|l} 14\text{ m.} + 145\text{ pr. kw.} + & 31\text{ st. kw.} & 4 \\ \cline{3-3} \underline{-12} & & 3\text{ m.} + 186\text{ pr. kw.} + 64\text{ st. kw.} \\ 2\text{ m.} = 600\text{ pr. kw.} & & \\ \underline{+145\text{ pr. kw.}} & & \\ 745\text{ pr. kw.} & & \\ \underline{34} & & \\ \underline{25} & & \\ 1\text{ pr. kw.} = & 225\text{ st. kw.} & \\ & \underline{+31\text{ st. kw.}} & \\ & 256\text{ st. kw.} & \\ & \underline{16} & \\ & 0 & \end{array}$$

Tu dzieląc 14 m. przez liczbę oderwaną 4, otrzymujemy w ilorazie 3 m. wraz z tym, co wypadnie z podzielenia 2-u morgów przez 4. Ale, gdy mórg = 300 pr. kw., to z podzielenia 2 m. przez 4 otrzymamy tyleż, co z podzielenia 300 pr. kw. $\times$ 2 = 600 pr. kw. przez 4. Że zaś, prócz otrzymać się stąd mających pr. kw. w ilorazie, otrzymamy jeszcze pręty kw. z podzielenia 145 pr. kw. dzielnéj przez 4, więc w ilorazie pręty kwadratowe otrzymamy z podzielenia 600 pr. kw. + 145 p. k. = = 745 pr. kw. I t. d.

(Wrazie, gdyby w dzielnéj nie było 31 st. kw., ale np. 34 st. kw., to wyznaczywszy w ilorazie 64 st. kw., mielibyśmy jeszcze 3 st. kw. do podzielenia przez 4, czyli 144 cale kw. × 3, t. j. 432 c. kw. przez 4, coby nam dało jeszcze w ilorazie 108 cali kw.—W takich zadaniach, wrazie, gdy, po wyznaczeniu części ilorazu, wyrażonéj w najdrobniejszéj jednostce dzielnéj, zostaje jeszcze reszta, należy, jeżeli można, wyrażać resztę przy pomocy jeszcze drobniejszych jednostek, dla wyznaczenia odpowiednich części w ilorazie.)

(Zadania arytmetyczne. § 13, 14, 15.)

ROZDZIAŁ V.

PODZIELNOŚĆ LICZB.

§ 12. DZIELNIK I WIELOKROTNA LICZBY DANÉJ. LICZBY PIÉRWSZE.

1. Jeżeli liczba dana [1]) dzieli się przez pewną drugą bez reszty, to, jak wiemy (§ 7, us. 11), nazywamy ją p o d z i e l n ą przez tę drugą liczbę; np. 24 jest podzielne przez 6. Liczba zaś, która dzieli liczbę daną bez reszty, nazywa się d z i e l n i k i e m liczby danéj. W powyższym przykładzie liczba dana 24 ma np. dzielnik 6, dzielnik 8 i t. d. A zatym

Dzielnikiem liczby danéj nazywamy liczbę, przez którą liczba dana jest podzielna.

Oczywiście, że dzielnik jakiéjkolwiek liczby nie może być od niéj większy.

Dzielnik liczby danéj jest téż jéj czynnikiem. Daną bowiém liczbę możemy przedstawić jako iloczyn tego dzielnika przez liczbę, wypadłą z podzielenia liczby danéj przez ten właśnie dzielnik (§ 7, us. 3, 11); tak np. $24 = 6 \times 4$. Dlatego wyrażenia: «czynnik liczby danéj», «dzielnik liczby danéj» są jednoznaczne.

2. Liczbę, przez którą należy pomnożyć dzielnik liczby danéj, aby jako iloczyn otrzymać właśnie liczbę daną, nazywać będziemy d z i e l n i k i e m d o p e ł n i a j ą c y m ów dzielnik, albo dzielnikiem dopełniającym liczbę daną. Jeżeli więc 6 jest dzielnikiem 24-ch, to 4 jest dzielnikiem dopełniającym ów dzielnik, bo $6 . 4 = 24$. Oczywiście, dzielnik dopełniający jest ilorazem z podzielenia liczby danéj przez odpowiedni dzielnik, a nadto sam jest dzielnikiem [2]) liczby danéj, gdyż jest jéj czynnikiem.

Każdy dzielnik liczby danéj ma odpowiedni dzielnik dopełniający. Np. liczba 24 ma dzielniki 6, 8, 4, 1 i t. d.; odpowiadające im dzielniki dopełniające są 4, 3, 6, 24 i t. d.

---

[1]) W tym rozdziale przez «liczbę» należy rozumiéć zawsze liczbę całkowitą (§ 1, us. 5).

[2]) E u k l i d e s, *Elementa*, księga VII, podanie 40.

3. Jeżeli mamy pewną liczbę daną, np. 6, to liczba, przez tę daną liczbę podzielna, jak np. 24, nazywa się jéj (liczbą) wielokrotną [1]), bo można tę liczbę utworzyć, kilkakrotnie *) biorąc liczbę daną jako składnik. Tak np. $24 = 6+6+6+6$.

Liczbą wielokrotną liczby danéj nazywamy liczbę, podzielną przez liczbę daną, albo, mówiąc ogólnie [2]): *liczbą wielokrotną liczby danéj nazywamy liczbę, która może być wyrażona jako suma składników równych liczbie danéj*, albo jeszcze (§ 6, us. 3): *liczbą wielokrotną liczby danéj nazywamy liczbę, która powstaje z danéj, wskutek pomnożenia jéj przez jakąś liczbę* [3]).

Gdy więc np. 6 jest dzielnikiem 24-ch, to nawzajem, 24 jest wielokrotną 6-u.

Ponieważ, mnożąc liczbę daną przez jakąkolwiek liczbę, otrzymujemy wielokrotną liczby danéj, a liczb (przez które mnożyć możemy liczbę daną) jest nieskończenie wiele (§ 1, us. 6) więc *jest nieskończenie wiele wielokrotnych liczby danéj.*

Każda liczba jest dzielnikiem i wielokrotną saméj siebie; tak np. 24 jest dzielnikiem 24-ch i wielokrotną 24-ch, bo $24 = 24 . 1$ (§ 6, us. 3). — Każda liczba ma dzielniki: liczbę 1 i samę siebie.

4. Jeżeli, zaznaczywszy, że liczba dana, np. 24 ma dzielnik 6, zauważymy następnie, że znowu ten dzielnik, t. j. liczba 6, ma dzielnik 3, to, gdy dzielnikiem, dopełniającym dzielnik 6 liczby 24, jest 4, a dzielnikiem, dopełniającym dzielnik 3 liczby 6, jest 2, mamy:

$$24 = 6 . 4, \qquad \text{gdzie } 6 = 3 . 2,$$

czyli (§ 6, us. 7, 10)

$$24 = (3 . 2) . 4 = 3 . (2 . 4) = 3 . 8,$$

t. j. 3 jest téż dzielnikiem liczby danéj 24. A więc: *dzielnik dzielnika liczby danéj jest téż dzielnikiem liczby danéj*, albo, zauważywszy, że liczba 24 jest wielokrotną 6-u, — *dzielnik liczby danéj jest dzielnikiem wielokrotnéj téj liczby.*

5. Każdą liczbę można przedstawić jako iloczyn dwu różnych czynników, np. $24 = 4 . 6$; $7 = 7 . 1$; $35 = 5 . 7$; $37 = 1 . 37, \ldots$, a więc: *każda liczba ma conajmniéj dwa dzielniki.*

Liczba może mieć jednak więcéj dzielników, np. 24 ma osiem dzielników: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24; liczba 81 ma dzielników pięć: 1, 3, 9, 27, 81. Jednak liczby np. 7, 37, 11, 23 i t. d. mają każda tylko dwa dzielniki: jedność i samę siebie. Takie liczby nazywamy

---

[1]) Przymiotnika «wielokrotna» używa się taksamo, jak: odjemna, mnożna i t. d.

*) Kilkunastokrotnie,...

[2]) W szczególnym przypadku wielokrotna liczby danéj może być jéj równa.

[3]) (Całkowitą.)

liczbami piérwszymi. Liczby zaś, które mają dzielników więcéj, jak np. 24, 81, 35 i t. d., nazywamy liczbami złożonymi.

Liczbą piérwszą nazywamy liczbę, podzielną tylko przez jedność i przez samę siebie.

Liczba podzielna przez inną jeszcze liczbę, prócz jedności i saméj siebie, nazywa się liczbą złożoną.

Liczbę 1 zalicza się do liczb piérwszych.

Liczby podzielne przez 2 nazywają się parzystymi; liczby przez 2 niepodzielne nazywają się nieparzystymi [1]).

Wszystkie liczby piérwsze, z wyjątkiem 2-u, są nieparzyste.

6. *Każda liczba* (zaczynając od 2) *ma conajmniéj jeden dzielnik, będący liczbą piérwszą* [2]) *różną od 1.*

Jeżeli dana liczba jest piérwsza, to, oczywiście, tym dzielnikiem jest ona sama.

Jeżeli zaś dana liczba jest złożona, to ma dzielnik różny (większy) od 1, a zarazem różny (mniejszy) od niéj saméj. Jeżeli ten dzielnik jest liczbą piérwszą — twierdzenie nasze jest okazane. Jeżeli zaś ten dzielnik jest liczbą złożoną, to ma on znów dzielnik, mniejszy od siebie, a większy od 1, który jest też (us. 4) dzielnikiem liczby danéj. Jeżeli ten dzielnik jest piérwszy, twierdzenie jest okazane; jeżeli zaś jest liczbą złożoną, to ma znów dzielnik, mniéjszy od siebie, a większy od 1, który, jako dzielnik dzielnika liczby danéj, jest jéj dzielnikiem. Jeżeli ten dzielnik jest piérwszy i t. d. Postępując w ten sposób, otrzymujemy zawsze dzielniki liczby danéj wciąż zmniejszające się, ale zawsze większe od 1; liczba tych zmniejszających się dzielników jest ograniczona (gdyż i liczba dana jest ograniczona). Jest więc w tym ciągu dzielników dzielnik ostatni. Gdyby on był liczbą złożoną, to miałby znów dzielnik od siebie mniejszy, a większy od jedności; nie byłby więc ostatnim. Ostatni przeto z tych dzielników liczby danéj jest liczbą piérwszą.

7. Gdyby szereg liczb piérwszych,

$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19, \ldots,$$

był ograniczony, to niech np. 19 będzie największą liczbą piérwszą, o możliwości istnienia któréj jesteśmy przekonani. — Utwórzmy iloczyn wszystkich,

---

1) Euklides, ks. VII, definicyje 6, 7.

[Każda liczba nieparzysta jest sumą czterech kwadratów, z których dwa są sobie równe, np. $67 = 5^2 + 5^2 + 4^2 + 1^2 = 8^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 7^2 + 3^2 + 3^2 + 0^2 = 7^2 + 4^2 + 1^2 + 1^2$; $5 = 2^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2$, a wogóle: aby utworzyć jakąkolwiek liczbę, potrzeba, conajwięcéj, czterech kwadratów, np. $10 = 3^2 + 1^2$; $16 = 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2$.]

[Z roskładu bespośredniego wielu liczb parzystych na dwa składniki (nie ma zaś dotąd na to dowodu matematycznego) wypada, że każda liczba parzysta jest sumą dwu liczb piérwszych, np. $16 = 13 + 3$; $18 = 13 + 5$; w takim razie każda liczba nieparzysta jest sumą trzech liczb piérwszych, z których jedną jest 1.]

2) Euklides, ks. VII, podanie 33: «każda liczba złożona jest podzielna przez pewną liczbę piérwszą»; pod. 34: «każda liczba jest albo piérwsza, albo podzielna przez liczbę piérwszą». Przytoczone wyżéj dowodzenie jest parafrazą euklidesowego.

przy tym przypuszczeniu, liczb piérwszych, i do tego iloczynu dodajmy 1. Ta liczba

$$1 . 2 . 3 . 5 . 7 . 11 . 13 . 17 . 19 + 1$$

nie będzie podzielną ani przez 19, ani przez żadnę różną od 1 liczbę piérwszą, mniejszą od 19, gdyż, dzieląc przez którąkolwiek z nich, zawsze otrzymamy resztę dzielnéj: 1. A gdy nasza liczba, jak każda, ma dzielnik, będący liczbą piérwszą (us. 6), to tym dzielnikiem może być tylko liczba piérwsza [1]) większa od 19. Istnieje więc, wbrew przypuszczeniu, liczba piérwsza, większa od 19. Podobnie możemy dowieść, że istnieje zawsze liczba piérwsza, większa od jakkolwiek wielkiéj oznaczonéj liczby piérwszéj [2]). A więc

Liczb piérwszych jest nieskończenie wiele.

8. Gdy chcemy się dowiedzieć, czy dana liczba jest piérwsza, czy złożona, to dosyć jest dowiadywać się, czy jest ona podzielną tylko przez liczby piérwsze. Gdy bowiém pewna liczba ma, jako dzielnik, liczbę złożoną, to jest także podzielna przez liczby piérwsze,

---

[1]) Wprawdzie początkowe takie liczby $1.2+1$, $1.2.3+1$, i t. d. są piérwsze, lecz już $1.2.3.5.7.11.13+1 = 30031 = 59.509$.

[2]) Euklides, ks. IX, pod. 20: «ilość liczb piérwszych jest większa od jakiéjkolwiek danéj ich ilości». Takaż zasada dowodzenia. —

Gdy jakąkolwiek liczbę dzielimy np. przez liczbę 4, to jako resztę dzielenia otrzymać możemy (§ 7, us. 11) albo 1, albo 2, albo 3, albo 0. Gdy więc iloraz niezupełny oznaczymy dla ogólności literą np. a, to jakąkolwiek liczbę (dzielną) można zawsze przedstawić (§ 7, us. 11, 3) zapomocą jednego z 4-ch wzorów

$$4.a+1, \quad 4.a+2, \quad 4.a+3, \quad 4.a.$$

Wtedy wszystkie liczby możemy rozdzielić na 4 klasy, odpowiadające tym wzorom. Każdy z tych wzorów obejmuje klasę liczb, napisanych w odpowiednim poziomym wierszu tablicy

$$\left\{\begin{array}{lllllll} 1, & 5, & 9, & 13, & 17, & 21, & 25, \ldots \\ 2, & 6, & 10, & 14, & 18, & 22, & 26, \ldots \\ 3, & 7, & 11, & 15, & 19, & 23, & 27, \ldots \\ 4, & 8, & 12, & 16, & 20, & 24, & 28, \ldots \end{array}\right.$$

(obejmującéj wszystkie liczby). Wszystkie te klasy (a więc i wszystkie liczby) można też wyrazić jednym wzorem ogólnym

$$4.a+b,$$

jeżeli się umówimy aby litera b przybiérać mogła wartości 0, 1, 2, 3. — Taksamo jakąkolwiek liczbę można przedstawić zapomocą wzoru

$$10.a+b,$$

w którym więc b może mieć wartości 0, 1, 2, . . . , 9; wtedy wszystkie liczby można rozdzielić na 10 klas; oddzielną klasę utworzą liczby, dające przy dzieleniu przez 10 tę samę resztę, t. j. odpowiadające téj saméj wartości na b. — Również np. liczby parzyste są postaci $2.a$, liczby nieparzyste postaci $2.a+1$. — Podobnie jak powyżéj według liczb 4, 10, 2, możemy wszystkie liczby dzielić na klasy według jakiéjkolwiek liczby, tak iż, gdy przez m oznaczymy pewną dowolnie wybraną liczbę, wszystkie liczby możemy przedstawić zapomocą wzoru

$$m.a+b,$$

w którym więc b otrzymywać może wartości 0, 1, 2, . . . , $m-2$, $m-1$, a liczby, odpowiadające téj saméj wartości na b, utworzą oddzielną klasę. —

[Lejeune-Dirichlet dowiódł, że jeżeli liczby m i b są piérwsze względem siebie (§ 14, us. 2), to istnieje nieskończenie wiele liczb piérwszych, należących do klasy $m.a+b$.]

[Każda liczba piérwsza postaci $4.a+1$ jest sumą dwu kwadratów; np. $13 = 4.3+1 = 3^2+2^2$; $109 = 4.27+1 = 10^2+3^2$. Każda liczba piérwsza postaci $8.a+3$ jest sumą trzech kwadratów; np. $67 = 8.8+3 = 7^2+3^2+3^2$.]

będące dzielnikami owego dzielnika złożonego; tak np. liczba 36 ma dzielnik 12, ale $12=4.3=2.6$; gdy więc 12 jest dzielnikiem 36-u, to liczby 2 i 3, dzielniki liczby 12, są téż dzielnikami liczby 36. Jeżeli więc znaleźliśmy, że liczba np. 847 nie jest podzielna przez 2, to nie mamy czego próbować, czy ona jest podzielna przez 4, 6, 8, 10, 12 i t. d. (bo musiałaby być wtedy podzielną przez 2); podobnie, dowiedziawszy się następnie, że ta liczba 847 nie jest podzielna przez 3, nie mamy czego próbować, czy jest podzielna przez 9, 15, 21, 27 i t. d.

Gdy więc, dla oznaczenia, czy dana liczba jest piérwsza, czy złożona, będziemy badać, czy ona jest podzielna przez liczby piérwsze; to prowadzić możemy owo poszukiwanie, zaczynając od liczb piérwszych mniejszych, aby przez to zachować w tym poszukiwaniu pewien ład, a nadto często ułatwić [1]) je sobie. Mając więc daną liczbę, dowiadywać się będziemy naprzód, czy ma ona dzielnik 2. Jeżeli przez 2 dzieli się bez reszty, to oczywista już, że jest liczbą złożoną. Jeżeli nie, to należy zbadać, czy jest podzielną przez 3. Jeżeli nie, to należy oznaczyć, czy jest podzielną przez 5. Jeżeli i przez 5 nie, to czy przez 7, i t. d.

Gdyby liczba dana miała jakiś dzielnik, to mogłaby być przedstawiona jako iloczyn tego dzielnika przez dzielnik dopełniający (us. 2). Wiemy zaś, że, jeżeli w iloczynie dwu czynników jeden czynnik powiększamy, to drugi się zmniejsza (§ 7, us. 13). Gdy więc, dzieląc liczbę daną kolejno przez liczby piérwsze 2, 3, 5, 7, 11,... i znajdując, że ona przez żadnę z tych liczb nie jest podzielna, dojdziemy do takiéj liczby piérwszéj, iż z podzielenia danéj liczby przez tę liczbę piérwszą otrzymujemy w ilorazie liczbę od niéj (t. j. od dzielnika tego dzielenia) mniejszą, to już możemy zaniechać dalszego poszukiwania. Gdyby bowiém dana liczba była podzielną przez owę liczbę piérwszą, lub przez inną, od niéj większą, to dzielnikiem dopełniającym byłaby liczba, od owéj liczby piérwszéj mniejsza. A więc liczba dana miałaby dzielnik (us. 2) mniejszy od owéj liczby piérwszéj, a przecież z poszukiwania dotychczasowego już wiemy, że to być nie może. A zatym:

Jeżeli, mając daną liczbę, badamy pokolei, czy ona jest podzielną przez każdą z liczb piérwszych 2, 3, 5, 7, 11, . . ., i jeżeli znajdujemy, że ona przez żadnę z tych liczb nie jest podzielna, a postępowanie to doprowadziliśmy do tego, że w pewnym dzieleniu liczby danéj przez którąś z tych

[1]) Gdy bowiém mamy np. liczbę 303 i, nie zbadawszy, czy ona jest podzielna przez 3, próbować będziemy, czy jest podzielna przez większe liczby piérwsze, np. przez 5, 7, 11, 13, 17 i t. d., to poszukiwania te byłyby dość mozolne, a całkiem niepotrzebne, bo $303=3.101$, a 101 jest liczba piérwsza, więc tymsamym liczba nasza nie jest podzielna przez żadnę z liczb między 3 i 101.

liczb piérwszych wypadła nam już w ilorazie liczba mniejsza od dzielnika, to dana liczba jest liczbą piérwszą [1]).

Tak np., chcemy zbadać, czy 101 jest liczbą piérwszą;

101	2	101	3	101	5	101	7	101	11
...	50	...	33	...	20	...	14	...	9 (mn. niż dz-k);
1		2		1		3		2	

liczba więc 101 jest piérwszą.

9. Aby utworzyć tablicę początkowych liczb piérwszych, możemy postąpić w taki sposób. W szeregu liczb naturalnych 1, 2, 3, ~~4~~, 5, ~~6~~, 7, ~~8~~, ~~9~~, ~~10~~, 11, ~~12~~, 13, ~~14~~, ~~15~~, ~~16~~, 17, ~~18~~, 19, ~~20~~, ~~21~~, ~~22~~, 23 i t. d. przekréślmy codrugą liczbę, zostawiając jednak 2; pozbędziemy się w ten sposób wszystkich liczb (4, 6, 8, 10 i t. d.), podzielnych przez 2. Obok 2 jest liczba nieprzekréślona 3; zostawiając ją, przekréślmy każdą z liczb, zajmujących daléj cotrzecie miejsce, która jeszcze nie była przekréślona, jako już podzielne przez 2. Obok 3 piérwsza nieprzekréślona jest 5; zostawiając ją, przekréślmy każdą z liczb, zajmujących daléj copiąte miejsce, która jeszcze przekréślona nie była. Obok 5 piérwsza nieprzekréślona liczba jest 7 *); zostawiając ją, przekréślmy i t. d. Pozostaną więc nieprzekréślonymi, liczby, które przez żadnę liczbę mniejszą od siebie, prócz 1, nie są podzielne, t. j. liczby podzielne tylko przez jedność i przez samę siebie, czyli liczby piérwsze.

Jeżeli tu, zamiast przekréślać (lub zmazywać) różne liczby z szeregu liczb naturalnych, będziemy w miejscach, przez nie zajętych, wywiercać otwory, to w ten sposób otrzymamy tak zwane sito Eratostenesa.

Jeżeli np., przekréśliwszy już w ten sposób codrugą, cotrzecią, copiątą, cosiódmą i cojedenastą liczbę, zatrzymaliśmy się, to wszystkie pozostałe liczby, mniejsze od liczby $13.13=169$ są piérwszymi, bo jakakolwiek z tych nieprzekréślonych liczb, a więc niepodzielna przez 2, 3, 5, 7, 11, np. 167 nie może się dzielić przez większą liczbę piérwszą (t. j. przez 13, lub większą), bo gdy 167 jest liczbą mniejszą od 169, a $169:13=13$, to, dzieląc 167 przez 13, otrzymamy liczbę mniejszą od 13, jak również, gdybyśmy 167 dzielili przez liczbę większą od 13. Jeżeliby więc liczba 167 była podzielną przez 13 lub przez większą liczbę, to byłaby podzielną przez różną od 1 liczbę piérwszą,

[1]) Wychodzi to na to samo, co: *jeżeli liczba dana nie jest podzielną przez żadną z liczb piérwszych, mniejszych od takiéj liczby, któréj kwadrat* (§ 6, us. 39) *jest od danéj liczby większy, to dana liczba jest piérwszą.* Np. liczba 211 jest mniejsza od $15^2=225$ i nie jest podzielna przez liczby piérwsze, mniejsze od 15, t. j. przez liczby 2, 3, 5, 7, 11 i 13; jest więc liczbą piérwszą.

*) Zostawiamy 3, 5, 7, . . ., gdyż one są liczbami piérwszymi, jako niepodzielne przez żadną, prócz jedności, z liczb mniejszych (poprzedzających).

mniejszą od 13 (us. 8), t. j. przez jednę z liczb 2, 3, 5, 7, 11, co być nie może. Zatym: *jeżeli, tworząc sito Eratostenesa, przekreśliliśmy w szeregu liczb naturalnych liczby podzielne przez kilka początkowych liczb piérwszych, to wszystkie nieprzekreślone liczby, mniejsze od iloczynu następującéj liczby piérwszéj przez siebie (t. j. mniejsze od kwadratu następującéj liczby piérwszéj), są liczbami piérwszymi.*

Widzieliśmy (us. 8), jak wielu niekiedy potrzeba wyliczeń, aby się przekonać, czy dana dość wielka liczba, jest piérwszą, czyteż złożoną. Dlatego od dawnych czasów układano tablice liczb piérwszych. Najwięcéj rospowszechnioną jest tablica Burckhardt'a, obejmująca wszystkie liczby piérwsze, mniejsze od 3 036 000, a także najmniejsze dzielniki liczb złożonych [1]).

Podajemy tu tablicę liczb piérwszych, mniejszych od 1500.

1	89	223	359	503	659	827	997	1163	1321
2	97	227	367	509	661	829	1009	1171	1327
3	101	229	373	521	673	839	1013	1181	1361
5	103	233	379	523	677	853	1019	1187	1367
7	107	239	383	541	683	857	1021	1193	1373
11	109	241	389	547	691	859	1031	1201	1381
13	113	251	397	557	701	863	1033	1213	1399
17	127	257	401	563	709	877	1039	1217	1409
19	131	263	409	569	719	881	1049	1223	1423
23	137	269	419	571	727	883	1051	1229	1427
29	139	271	421	577	733	887	1061	1231	1429
31	149	277	431	587	739	907	1063	1237	1433
37	151	281	433	593	743	911	1069	1249	1439
41	157	283	439	599	751	919	1087	1259	1447
43	163	293	443	601	757	929	1091	1277	1451
47	167	307	449	607	761	937	1093	1279	1453
53	173	311	457	613	769	941	1097	1283	1459
59	179	313	461	617	773	947	1103	1289	1471
61	181	317	463	619	787	953	1109	1291	1481
67	191	331	467	631	797	967	1117	1297	1483
71	193	337	479	641	809	971	1123	1301	1487
73	197	347	487	643	811	977	1129	1303	1489
79	199	349	491	647	821	983	1151	1307	1493
83	211	353	499	653	823	991	1153	1319	1499

[1]) *Table des diviseurs* i t. d., Paryż, 1817.

Zamiast w takiéj tablicy wypisywać wszystkie liczby, jedne pod drugimi (oczywiście ograniczamy się liczbami nieparzystymi), możemy jedności (1, 3, 5, 7, 9) liczby nadpisać u góry w jednym wierszu poziomym, a dziesiątki z lewéj strony tablicy w kolumnie pionowéj. Zyskuje się tym sposobem wiele na objętości tablicy. Wtedy liczbie np. 45 odpowiada w tablicy miejsce, należące do tego wiersza poziomego, w którym na początku postawiono 4 (dziesiątki), a zarazem do tego wiersza pionowego w którym u góry oznaczone są 5 (jedności). Na tym właśnie miejscu znajdujemy liczbę 3, t. j. najmniejszy, nie licząc 1, dzielnik liczby 45.

	1	3	5	7	9
	.	.	.	.	3
1	.	.	3	.	.
2	3	.	5	3	.
3	.	3	5	.	3
4	.	.	3	.	7
5	3	.	5	3	.

i t. d.

Jest więc 26 liczb pierwszych mniejszych od 100, 169 mniejszych od 1000, 240 mniejszych od 1500 i t. d. [1]).

---

§ 13. CECHY PODZIELNOŚCI.

1. Jeżeli mamy danych kilka liczb, np. 15, 30, 20, z których każda ma ten sam dzielnik 5, czyli kilka takich liczb, z których każda jest wielokrotną (§ 12, us. 3) 5-u, to każda z danych liczb może być przedstawiona jako suma składników 5. A więc i suma tych liczb, 15+30+20, jest téż sumą składników 5, czyli liczbą wielokrotną 5-u, a zatym liczbą, mającą także dzielnik 5. Widzimy więc, że [2])

Dzielnik każdéj z kilku liczb jest dzielnikiem sumy, czyli: *suma kilku wielokrotnych pewnéj liczby jest wielokrotną téj liczby* [3]).

2. Podobnie, gdy mamy dwie liczby, np. 35 i 21, z których każda ma dzielnik 7, czyli jest wielokrotną 7-u, to, gdy od piérwszéj $35=7+7+7+7+7$ odejmiemy drugą $21=7+7+7$, (z uwagi, że od składników 7 odejmując składniki 7, miéć będziemy w reszcie składniki 7) otrzymamy $35-21=7+7$, liczbę wielokrotną 7-u, czyli podzielną przez 7. Zatym:

Dzielnik każdéj z dwu liczb jest dzielnikiem ich różnicy, czyli: *różnica dwu wielokrotnych pewnéj liczby jest wielokrotną téj liczby.*

Stąd wypada, że *dzielnik sumy dwu składników i jednego z tych składników jest dzielnikiem drugiego składnika* [4]). Gdy np. $60=36+24$, to liczba 12, będąca dzielnikiem (sumy) 60 i (jednego składnika) 36,

---

Na miejscu, odpowiadającym liczbie np. 37, znajdujemy kropkę, wskazującą, iż liczba 37 jest piérwszą. — Liczbie np. 243 odpowie miejsce tego poziomego wiérsza, w którym na początku postawiono 24, i tego pionowego, w którym u góry jest 3.

[1]) Jest 1230 liczb mniejszych od 10 000; 9592 mniejszych od 100 000; 78 493 mniejszych od 1 000 000.

[Jeżeli literą a oznaczymy jakąkolwiek liczbę większą od 3, to między liczbami a i $2a-2$ jest, conajmniéj, jedna liczba piérwsza (twierdzenie Bertrand'a).]

[Prawo następstwa liczb piérwszych jest nieznane. — Wielomian o jednéj zmiennéj nie może, przy różnych wartościach na zmienną, przedstawiać samych tylko liczb piérwszych (Legendre); np. jeżeli wielomian $a+bx+cx^2$ przy $x=\alpha$ przedstawia liczbę piérwszą p, to liczba, którą ten wielomian przedstawia przy $x=\alpha+py$, gdzie y ma jakąkolwiek wartość całkowitą, t. j. liczba $a+b\alpha+c\alpha^2+bpy+2\alpha cpy+cp^2y^2=p+p\,(by+2\alpha cy+cpy^2)$, jest przez p podzielna, a więc nie jest liczbą piérwszą; taksamo z wielomianem stopnia wyższego.]

[2]) Euklides, ks. V, pod. 1: «jeżeli każda z kilku liczb jest takąż wielokrotną odpowiedniéj z kilku innych (w takiéjże ilości) liczb, to suma piérwszych jest takąż wielokrotną sumy drugich.»

[3]) Stąd wprost wypada własność, wypowiedziana w § 12, us. 4-ym, bo gdy 24 jest wielokrotną 6-u a 3 jest dzielnikiem 6-u, to dzielnik każdego ze składników sumy 6+6+6+6 jest dzielnikiem sumy (wielokrotnéj) 24-ch.

[4]) Euklides, ks. 5, pod. 5.

jest téż dzielnikiem ich różnicy $60-36=24$, t. j. drugiego składnika sumy — 24-ch.

3. *Jeżeli liczba dana jest wyrażona jako suma dwu składników, z których jeden jest podzielny przez pewną liczbę, a drugi nie, to i dana liczba nie jest przez nią podzielna, a wtedy reszta z podzielenia liczby danéj jest taż sama, co reszta z podzielenia tego właśnie niepodzielnego jéj składnika.* Jeżeli np. $86=60+26$, gdzie 60 jest podzielne przez 12, a 26 nie, to i 86 nie jest podzielne przez 12. Suma bowiém liczb $60=12+12+12+12+12$ i $26=12+12+2$ nie da się wyrazić jako suma składników 12, gdyż prócz nich wejdzie w nią jeszcze składnik 2, który był resztą z podzielenia $26:12$, a jest także resztą z podzielenia $86:12$, gdyż $86=(12+12+12+12+12)+(12+12+2)=12.7+2$.

4. Gdy potrzeba dowiedzieć się, czy dana liczba jest przez pewną liczbę podzielna, albo, jeżeli jest niepodzielna, jaka, po uskutecznieniu dzielenia, wypadnie reszta, to *w niektórych przypadkach* możemy znaléść odpowiédź prościéj, niż przez bespośrednie dzielenie tych liczb. Odpowiednie ku temu wskazówki, oparte na tylkoco dowiedzionych własnościach, nazywają się c e c h a m i   p o d z i e l n o ś c i liczby danéj przez pewne liczby [1]).

5. Gdy mamy liczbę daną, np. 3347, podzielić przez 2, to łatwo zauważymy, że ponieważ każdy dziesiątek jest podzielny przez 2, przeto i 334 dziesiątki liczby danéj (t. j. część jéj 3340) są podzielne przez 2 (us. 1), tak, że gdy naszę liczbę przedstawimy jako sumę

$$3347=3340+7,$$

to piérwszy jéj składnik jest przez 2 podzielny. Stosownie więc do tego, czy drugi składnik (7) jest podzielny przez 2, czytéż nie, będzie także (us. 1, 3) ich suma, t. j. liczba dana, przez 2 podzielną lub niepodzielną, a w ostatnim razie reszta z podzielenia liczby danéj przez 2 będzie taż sama, co reszta z podzielenia tego drugiego składnika przez 2. Tym zaś drugim składnikiem jest liczba, przedstawiona przez ostatnią cyfrę (licząc od strony lewéj) danéj liczby. Powiemy więc wogóle:

Reszta z podzielenia liczby przez 2 jest taż sama, co z podzielenia liczby, przedstawionéj przez ostatnią jéj cyfrę.

Z tabliczki zaś mnożenia wiemy, że z liczb jednocyfrowych podzielne są przez 2 liczby 2, 4, 6, 8. Nadto, dana liczba jest oczywiście podzielną przez 2, gdy ostatnia jéj cyfra nie przedstawia żadnéj liczby, t. j. gdy ostatnia cyfra jest zerem, np. liczba 3340 (gdyż

---

[1]) Warunki podzielności przez 6, 12, 15 i t. d. w § 15, us. 11 (a także w § 14, us. 18).

wtedy jest ona sumą samych tylko 10-ów, podzielnych przez 2 (us. 1). Widzimy więc, że można powiedziéć:

Liczba jest podzielną przez 2, gdy się kończy na 0, albo 2, albo 4, albo 6, albo 8.

Liczby, podzielne przez 2, nazywają się, jak wiemy (§ 12, us. 5), parzystymi. Liczby 2, 4, 6, 8 są parzyste [1]). Powiedziéć więc jeszcze możemy, że *)

Liczba jest parzystą, gdy się kończy na 0, lub gdy ostatnia jéj cyfra przedstawia liczbę parzystą.

Ponieważ 10 jest podzielne przez 5, więc taksamo roskładając liczbę daną na dziesiątki i pozostałą część, a następnie podobnie rozumując, znajdziemy, że:

Reszta z podzielenia liczby przez 5 jest taż sama, co reszta z podzielenia liczby, przedstawionéj przez jéj ostatnią cyfrę.

Liczba dzieli się przez 5 bez reszty, gdy jéj ostatnią cyfrą jest 0 albo 5.

6. Gdy chcemy znaléść cechę podzielności przez 4, to nie możemy już liczby np. 3347, tak roskładać na dwa składniki, jak poprzednio, bo 10 nie jest podzielne przez 4 (niezawsze więc dziesiątki liczby będą przez 4 podzielne). Lecz zważmy, że 100 ma dzielnik 4; możemy więc naszę liczbę tak rozłożyć na składniki: na setki i na pozostałą część,

$$3347 = 3300 + 47.$$

Ponieważ każda setka jest podzielna przez 4, więc i 33 setki, t. j. piérwszy składnik 3300, są podzielne przez 4. Drugi zaś składnik (47) jest liczbą, przedstawioną przez dwie ostatnie cyfry liczby danéj. A więc:

Reszta z podzielenia liczby przez 4 jest taż sama, co reszta z podzielenia liczby, przedstawionéj przez dwie jéj ostatnie cyfry.

Liczba jest podzielna przez 4, jeżeli liczba, którą przedstawiają ostatnie jéj dwie cyfry, jest podzielna przez 4, lub jeżeli jest zakończona na dwa zera **).

Ponieważ nadto 100 jest podzielne również przez 25, a więc:

Reszta z podzielenia liczby przez 25 jest taż sama, co reszta z podzielenia liczby, przedstawionéj przez dwie ostatnie jéj cyfry.

Liczba dzieli się przez 25, gdy się kończy na dwa zera, lub gdy dwie jéj ostatnie cyfry przedstawiają liczbę 25, albo 50, albo 75.

---

[1]) Gdy, jak np. w algiebrze, i 0 uważamy jako liczbę, to wypada przyjąć, że i one jest parzyste (jak również podzielne przez jakąkolwiek liczbę).

*) Albo: liczba jest parzystą, gdy się kończy na 0, 2, 4, 6, 8. (Ale nie można mówić: liczba jest podzielna przez 2, gdy jest parzysta.)

**) A nie: jeżeli ostatnie dwie jéj cyfry są podzielne przez 4.

7. Liczba 8, przez którą 100 nie jest podzielne, jest dzielnikiem liczby 1000; więc gdy liczbę np. 1213597 rozłożymy na tysiące i pozostałą część:

$$1213597 = 1213000 + 597,$$

to piérwszy składnik jest podzielny przez 8. A zatym:

Reszta z podzielenia liczby przez 8, jest taż sama, co reszta z podzielenia liczby, przedstawionéj przez trzy ostatnie jéj cyfry.

Liczba jest podzielna przez 8, jeżeli trzy jéj ostatnie cyfry przedstawiają liczbę podzielną przez 8. Np. liczba 82301738 nie jest podzielna przez 8, bo liczba 738 nie jest podzielna przez 8.

Podobnie dla liczby 125, która jest także dzielnikiem [1]) liczby 1000.

8. Można warunek podzielności przez 8 inaczéj jeszcze, dogodniéj wyrazić. Parzysta liczba setek (jako suma liczb 200, us. 1) jest podzielna przez 8, nieparzysta zaś liczba setek daje resztę 4 (bo $100 = 8.12 + 4$, a każda nieparzysta liczba setek może być rozłożoną na parzystą liczbę setek $+ 100$, a więc da zawsze tęż samę resztę, co 100; us. 3). Gdy więc mamy liczbę o parzystych setkach, np. 520672, to w sumie

$$520672 = 520600 + 72$$

piérwszy składnik jest podzielny przez 8; gdy zaś mamy liczbę o nieparzystych setkach, np. 215728, to ją możemy tak przedstawić (§ 5, us. 8):

$$215728 = 215700 + 28 = (215700 - 4) + (28 + 4),$$

a tu piérwszy składnik: $215700 - 4$ jest również podzielny przez 8. Więc:

Liczba jest podzielna przez 8 wrazie gdy liczba jéj setek jest parzysta, jeżeli dwie jéj ostatnie cyfry przedstawiają liczbę podzielną przez 8; wrazie zaś, gdy liczba jéj setek jest nieparzystą, — jeżeli dwie ostatnie jéj cyfry przedstawiają liczbę, która, powiększona o 4, staje się podzielną przez 8.

9. Ponieważ ani 10, ani 100, ani 1000 i t. d., t. j. wogóle liczba, przedstawiona przez jedność z zerami, nie jest podzielna przez 3, więc nie możemy korzystać z roskładów, podobnych powyższym (us. 5, 6, 7), dla wyprowadzenia cechy podzielności przez 3. Ale, przekonywając się właśnie o tym, t. j. dzieląc 10, 100, 1000 i t. d. przez 3,

$$10 = 3.3 + 1,\ 100 = 3.33 + 1,\ 1000 = 3.333 + 1, \ldots,$$

spostrzegamy, że te liczby 10, 100, 1000 i t. d. mogą być rozłożone

---

[1]) Liczba np. 50 jest téż dzielnikiem liczby 1000, ale cecha podzielności przez nią zależy tylko od dwu ostatnich cyfr liczby, gdyż 50 jest już dzielnikiem liczby 100.

na dwa składniki: jeden wielokrotny 3-ch (jak 3.3; 3.33;...), a drugi 1, t. j.

$$10 = 9 + 1,\ 100 = 99 + 1,\ 1000 = 999 + 1, \dots$$

Jeżeli więc chcemy znaléść cechę podzielności przez 3, to powinniśmy z tego właśnie skorzystać. Jeżeli mamy np. liczbę 2456 to, jak wiemy (§ 6, us. 22), możemy ją tak przedstawić:

$$2456 = 2 . 1000 + 4 . 100 + 5 . 10 + 6.$$

Ponieważ $10 = 9 + 1$ i, aby sumę kilku liczb pomnożyć przez pewną liczbę, można wszystkie jéj składniki pomnożyć przez tę liczbę (§ 6, us. 14), więc $5.10 = 5.9 + 5.1 = 5.9 + 5$; podobnież, gdy $100 = 99 + 1$, to $100.4 = 99.4 + 4$, i gdy $1000 = 999 + 1$, to $2.1000 = 2.999 + 2$, a zatym

$$2456 = 2.999 + 2 + 4.99 + 4 + 5.9 + 5 + 6.$$

Suma nie zależy od porządku składników (§ 4, us. 7), więc

$$2456 = 2.999 + 4.99 + 5.9 + 2 + 4 + 5 + 6;$$

Dodawanie może być uskutecznione przy pomocy częściowych dodawań składników (§ 4, us. 10); możemy zatym oddzielnie, jako jednę liczbę, uważać sumę $2.999 + 4.99 + 5.9$, a oddzielnie, jako drugą, sumę $2 + 4 + 5 + 6$:

$$2456 = (2.999 + 4.99 + 5.9) + (2 + 4 + 5 + 6).$$

Nasza liczba jest teraz rozłożona na dwa składniki, z których piérwszy, jako suma wielokrotnych liczby 3, jest téż (us. 1) wielokrotną 3-ch, zatym (us. 3) podzielność liczby danéj przez 3 zależy od podzielności drugiego składnika: $2 + 4 + 5 + 6$ przez 3. Składnik zaś ten jest utworzony przez sumę liczb, przedstawionych przez oddzielne cyfry liczby danéj; tę sumę nazywamy: sumą cyfr [1]) danéj liczby. A więc:

Reszta z podzielenia liczby przez 3 jest taż sama, co reszta z podzielenia sumy jéj cyfr.

Liczba jest podzielna przez 3, jeżeli suma jéj cyfr jest podzielna przez 3.

10. Ponieważ

$$10 = 9 + 1,\ 100 = 99 + 1,\ 1000 = 999 + 1,\ 10000 = 9999 + 1, \dots,$$

a składniki 9, 99, 999 i t. d. są wielokrotne 9-u, więc, rozumując podobnie, jak w ustępie poprzedzającym, znajdziemy, że:

Reszta z podzielenia liczby przez 9 jest taż sama, co reszta z podzielenia sumy jéj cyfr.

Liczba jest podzielna przez 9, jeżeli suma jéj cyfr jest podzielna przez 9.

---

[1]) Niczym nie daje się usprawiedliwić zastępowanie w niektórych nowszych naszych podręcznikach tego utartego terminu przez przetłomaczony żywcem z niemieckiego: «suma poprzeczna» (Quersumme) liczby danéj.

11. Przerabiając powyższe wyprowadzenie cechy podzielności przez 3 i 9 na różnych liczbach, łatwo nam się nasunąć może pod uwagę, że 99 jest wielokrotne 11-u, że choć 999 nie jest podzielne przez 11, ale znów 9999 jest wielokrotne 11-u i t. d. Może więc na zasadzie téj własności, że każdą z liczb 100, 10 000, 1 000 000,... można rozłożyć na część wielokrotną 11-u i 1, dałoby się oprzéć wyprowadzenie cechy podzielności przez 11? Rzeczywiście, daną liczbę, np. 2 819 091, możemy rozłożyć na setki, dziesiątki tysięcy, milijony (setki milijonów,...) i pozostałą część,

$$2819091 = 2.1000000 + 81.10000 + 90.100 + 91,$$

albo

$$2819091 = 2.999999 + 2 + 81.9999 + 81 + 90.99 + 90 + 91$$
$$= (2.999999 + 81.9999 + 90.99) + (2 + 81 + 90 + 91),$$

skąd widzimy, że:

Reszta z podzielenia liczby danéj przez 11 jest taż sama, co reszta z podzielenia sumy oddzielnych liczb, stanowiących w liczbie danéj, licząc od strony prawéj, grupy dwucyfrowe.

Liczba jest podzielna przez 11, jeżeli, podzieliwszy ją od strony prawéj na grupy dwucyfrowe, otrzymamy, jako sumę liczb, stanowiących te grupy, liczbę podzielną przez 11.

12. Tę cechę podzielności przez 11 oparliśmy [1]) na tym, że liczby 100, 10 000, 1 000 000 i t. d., po podzieleniu przez 11, dają wszystkie resztę 1. Dzieląc zaś liczby 1 000, 100 000, 10 000 000 i t. p. przez 11, dostrzeżemy, że one dają wszystkie tę samę resztę: 10. Jeżelibyśmy więc do tych liczb (a także i do liczby 10) dodali po 1, to otrzymalibyśmy wielokrotne 11-u. Aby jednak liczb tych nie zmienić, dodajemy [2]) do nich i odejmujemy (§ 5, us. 8) po 1:

$$10 = 10 + 1 - 1 = 11 - 1;\quad 1000 = 1001 - 1;\quad 100000 = 100001 - 1$$

i t. d. Gdy więc mamy daną np. liczbę 92829, to, przedstawiwszy ją tak

$$92829 = 9.10000 + 2.1000 + 8.100 + 2.10 + 9$$

i zważywszy, że (§ 6, us. 14, 15)

$$9.10000 = 9.9999 + 9;\ 2.1000 = 2.1001 - 2;\ 8.100 = 8.99 + 8;\ 2.10 = 2.11 - 2,$$

mieć będziemy

$$92829 = 9.9999 + 9 + 2.1001 - 2 + 8.99 + 8 + 2.11 - 2 + 9$$
$$= (9.9999 + 2.1001 + 8.99 + 2.11) + 9 - 2 + 8 - 2 + 9$$

[1]) Ponieważ 999, 999 999,... są liczbami podzielnymi przez 37, więc podobnie, podzielność liczby przez 37 zależy od podzielności sumy liczb, stanowiących grupy trzycyfrowe liczby danéj (licząc zawsze od strony prawéj).

[2]) Korzystając z dopełnienia reszty (§ 7, us. 24), możnaby wprost powiedzieć: dzieląc 10, 1000, 100 000 i t. d. przez 11, wprowadźmy dopełnienia reszt; wtedy każda z tych liczb rozłoży się na część wielokrotną 11-u i dopełnienie reszty 10-u, t. j. 1, którą od części wielokrotnéj 11-u należy odjąć.

Ponieważ liczba, ujęta w nawias, jest wielokrotną 11-u i do niéj dodajemy liczby 9, 8, 9, t. j. sumę $9+8+9$, czyli sumę cyfr, znajdujących się w liczbie danéj na miejscach nieparzystych (licząc zawsze od strony prawéj), a odejmujemy liczby 2 i 2, t. j. sumę $2+2$, czyli sumę cyfr, znajdujących się na miejscach parzystych, więc możemy powiedzićć, że

Liczba jakakolwiek może być wyrażona przez wielokrotną 11-u, powiększoną o sumę cyfr, znajdujących się w niéj na miejscach nieparzystych, a zmniejszona o sumę cyfr, znajdujących się na miejscach parzystych.

Ponieważ liczba nasza

$$92829 = \text{wielokrotnéj 11-u} + (9+8+9) - (2+2),$$

zatym podzielność jéj przez 11 zależy od podzielności téj jéj części, która jest przedstawiona przez różnicę $(9+8+9)-(2+2)$. Jeżelibyśmy jednak mieli np. liczbę 908492, to odpowiedniego odejmowania $(2+4)-(9+8+9)$ wykonaćby nie można (§ 5, us. 4, 11). Zawszeby jednak było

$$908492 = \text{wielokrotnéj 11-u} + (2+4) - (9+8+9).$$

W tym przypadku wypadnie postąpić tak, jak wogóle przy wykonywaniu odejmowania (§ 5, us. 11), t. j. oddzielimy z tego, co jest przedstawione przez «wielokrotna 11-u» taką (najmniejszą) wielokrotną 11-u, aby już ona, wraz z sumą $2+4$, była nie mniejsza od sumy $9+8+9$. Tu należy oddzielić 2.11 (pozostanie zawsze: wielokrotna 11-u; us. 2). Mamy więc

$$908492 = \text{wielokrotnéj 11-u} + (2+4+2.11) - (9+8+9).$$

Podzielność zatym naszéj liczby przez 11 zależy od podzielności różnicy $(2+4+2.11)-(9+8+9)$. Widzimy więc, że:

Reszta z podzielenia liczby danéj przez 11 jest taż sama, co reszta z podzielenia różnicy, wypadłéj z odjęcia od sumy cyfr, znajdujących się w liczbie danéj na miejscach nieparzystych, sumy cyfr na miejscach parzystych, przyczym wrazie, gdy piérwsza z tych sum jest mniejsza od drugiéj, należy ją powiększyć o taką wielokrotną 11-u, aby stała się nie mniejszą od drugiéj.

Liczba jest podzielna przez 11, jeżeli różnica, otrzymana z odjęcia od sumy cyfr, zajmujących w niéj miejsca nieparzyste (lub od téj sumy, powiększonéj o pewną wielokrotną 11-u), sumy cyfr, znajdujących się w téj liczbie na miejscach parzystych, jest 0 albo liczba podzielna przez 11.

13. Podobnie rzecz się ma z podzielnością przez 7 — trzeba tylko wziąć pod uwagę grupy trzycyfrowe. Jakoż $1000 = 7.142 + 6$, albo, wprowadzając dopełnienie reszty (§ 7, us. 24), $1000 = 7.143 - 1 = 1001 - 1$; następnie $1\,000\,000 = 7.142\,857 + 1 = 999\,999 + 1$; $1\,000\,000\,000 =$

$=7.142857142+6=7.142857143-1=1\,000\,000\,001-1$ i t. d., t. j. 1 z 3-a, 9-u, 15-u i t. d. zerami daje dopełnienie reszty 1, zaś 1 z 6-u, 12-u i t. d. zerami daje resztę 1. Jeżeli więc mamy np. liczbę 23 056 784 921, to

$$\begin{aligned}23056784921&=23.1000000000+56.1000000+784.1000+921\\&=23.1000000001-23+56.999999+56+784.1001-784+921\\&=\text{wielokrotnéj 7-u}+(56+921)-(23+784).\end{aligned}$$

Zauważmy, że taksamo rzecz się ma z podzielnością przez 13, albowiem $1000=13.76+12$; $1000000=13.76923+1$ i t. d., tak iż np.

$$23056784921=\text{wielokrotnéj 13-u}+(56+921)-(23+784).$$

Liczba jest podzielna przez 7 lub 13, jeżeli, podzieliwszy ją od strony prawéj na grupy [1]) *trzycyfrowe i oddzielnie dodawszy liczby tworzące piérwszą (z prawéj strony), trzecią i t. d. grupy, a oddzielnie liczby tworzące drugą, czwartą i t. d. grupy, otrzymamy, jako różnicę między piérwszą (powiększoną, jeżeli potrzeba, o pewną wielokrotną odpowiednio 7-u lub 13-u) i drugą z tych sum, 0, albo liczbę podzielną odpowiednio przez 7 lub 13* [2]).

14. Powyższe cechy podzielności przez 3 i 9, przez 11, przez 37, przez 7 i 13, można, przy pomocy wiadomości z algiebry, tak wprost uzasadnić.

Gdy mamy np. liczbę 723456, to możemy ją tak przedstawić (§ 6, us. 35):

$$\begin{aligned}723456&=7.10^5+2.10^4+3.10^3+4.10^2+5.10+6\\&=7.(10^5-1)+2.(10^4-1)+3.(10^3-1)+4.(10^2-1)+5.(10-1)+\\&\quad+7+2+3+4+5+6.\end{aligned}$$

Każdy z dwumianów 10^5-1, 10^4-1 i t. d. jest podzielny przez $10-1=9$ i przez 3, dzielnik 9-u (§ 12, us. 4), a więc podzielność przez te liczby zależy od sumy $7+2+3+4+5+6$ i t. d. (us. 9, 10).

Podobnież

$$\begin{aligned}723456&=7.(10^5+1)+2.(10^4-1)+3.(10^3+1)+4.(10^2-1)+5.(10+1)-\\&\quad-7+2-3+4-5+6,\end{aligned}$$

a tu każdy z wypisanych dwumianów jest podzielny przez $10+1=11$, więc i t. d. (us. 12).

Również

$$\begin{aligned}9723456&=9.10^6+72.10^4+34.10^2+56\\&=9.(10^6-1)+72.(10^4-1)+34.(10^2-1)+9+72+34+56,\end{aligned}$$

a każdy z tych dwumianów jest podzielny przez $10^2-1=99$ i przez dzielnik 99-u, t. j. przez 11; więc i t. d. (us. 11).

Taksamo

$$\begin{aligned}3056784901&=3.10^9+56.10^6+784.10^3+901\\&=3.(10^9-1)+56.(10^6-1)+784.(10^3-1)+3+56+784+901.\end{aligned}$$

---

[1]) Albo[2]): *jeżeli podzieliwszy na grupy sześciocyfrowe, otrzymamy, jako sumę liczb stanowiących te grupy, liczbę podzielną odpowiednio przez 7 lub 13* (por. us. 11).

[2]) Również *reszta z podzielenia* i t. d.

Każdy z tych dwumianów jest podzielny przez $10^3 - 1 = 999$, a zatym i przez dzielnik téj liczby, t. j. przez 37; więc i t. d. (us. 11, odsyłacz).

Jeszcze:

$$23056784901 = 23.(10^9+1)+56.(10^6-1)+784.(10^3+1)-3+56-784+901;$$

tu dwumiany są podzielne przez $10^3+1=1001$, a zatym i przez dzielniki téj liczby, 7 i 13 (oraz przez 11); więc i t. d. (us. 13).

15. Przy pomocy własności (niżéj: § 14, us. 13): gdy liczbę, mającą pewien dzielnik, podzielimy przez liczbę piérwszą względem tego dzielnika, to iloraz otrzymany jest przez ów dzielnik także podzielny — możemy otrzymać inną jeszcze cechę podzielności przez 7. Przedstawmy liczbę w postaci (§ 12, us. 8, odsyłacz) $10.a+b$. Odejmijmy od niéj liczbę wielokrotną 7-u, przez co warunek podzielności przez 7 się nie zmieni (us. 2, 3); odejmijmy mianowicie $21.b$. Pozostanie w reszcie $10.a-20b$, co gdy podzielimy przez 10, liczbę piérwszą względem 7-u, otrzymamy $a-2.b$. A więc *liczba $10.a+b$ jest podzielna przez 7, pod warunkiem, aby $a-2.b$ było podzielne przez 7.* Np. liczba 33292 jest podzielna przez 7, jeżeli liczba $3329-2.2=3325$ jest podzielna przez 7; to znowu zależy od podzielności liczby $332-2.5=322$ przez 7, i t. d. Zatym, *chcąc zbadać, czy liczba dana jest podzielna przez 7, należy od ilości jéj dziesiątków odjąć podwojone jedności, z otrzymaną resztą taksamo postąpić i t. d., a stosownie do tego, czy tą drogą dojdziemy do liczby podzielnéj, czyteż do niepodzielnéj przez 7, liczba dana będzie również podzielna, lub nie, przez 7.*

$$\begin{array}{r} 3329\mathbf{2} \\ -4 \\ \hline 332\mathbf{5} \\ -10 \\ \hline 32\mathbf{2} \\ -4 \\ \hline 28 \end{array}$$

W sposób podobny można udowodnić analogiczne cechy podzielności przez inne liczby (piérwsze względem 10-u), wychodząc z postaci danéj liczby $10.a+b$. Mianowicie:

Dla 3-ch i 9-u warunek: $a+b$ (do $10.a+b$ dodając $9.b$ i dzieląc sumę przez 10) [1].

Dla 11-u warunek: $a-b$ (od $10.a+b$ odejmując $11.b$ i dzieląc resztę przez 10) [2].

Dla 13-u warunek: $a+4.b$ (do $10.a+b$ dodając $3.13.b=39.b$ i dzieląc sumę przez 10).

Dla 17-u warunek: $a-5.b$ (od $10.a+b$ odejmując $3.17.b=51.b$ i dzieląc resztę przez 10).

Dla 19-u warunek: $a+2.b$ (do $10.a+b$ dodając $19.b$ i dzieląc sumę przez 10).

Dla 23-ch warunek: $a+7.b$ (do $10.a+b$ dodając $3.23.b=69.b$ i dzieląc sumę przez 10).

Dla 29-u warunek: $a+3.b$ (do $10.a+b$ dodając $29.b$ i dzieląc sumę przez 10).

I t. d.

Te cechy podzielności wyprowadził Antoni Żbikowski z dowiedzionych przez siebie twierdzeń o podzielności wogóle przez liczbę piérwszą względem

---

[1] Ta cecha wychodzi na jedno z podaną w us. 9 i 10.

[2] Ta cecha wychodzi na jedno z podaną w us. 12.

10-u [1]). Z uwagi zaś, że przed ogłoszeniem (r. 1860) owych twierdzeń i jednoczesnym wyprowadzeniem z nich, jako przypadków szczególnych, cech powyższych [2]), one (prócz, rozumie się, dawno rospowszechnionych cech podzielności przez 3, 9 i 11) nie były znane — słusznie te cechy podzielności przez 7, 13, 17 i t. d. nazwać możemy cechami Żbikowskiego.

16. Należy jeszcze rozważyć, w jaki sposób roskład liczby według potęg 10-u (§ 6, us. 41) mógłby dostarczyć cech podzielności przez różne liczby.

Dla ogólności, oddzielne cyfry liczby danéj, którą nazwijmy L, oznaczmy literami c ze znaczkami (wskaźnikami) liczebnymi, oznaczającymi miejsce (licząc od strony prawéj) przez nie zajmowane, tak, iż np. c_3 oznaczy cyfrę na trzecim miejscu, a c_n cyfrę na n-ym miejscu. Weźmy wogóle liczbę n-cyfrową. Jak wiemy (§ 7, us. 28)

$$L = c_n\, c_{n-1} \dots c_3\, c_2\, c_1 = c \,.\, 10^{n-1} + \dots + c_4 \,.\, 10^3 + c_3 \,.\, 10^2 + c_2 \,.\, 10^1 + c_1 \,.\, 10^0,$$

albo (§ 7, us. 27; § 4, us. 8)

$$L = c_1 + c_2 \,.\, 10 + c_3 \,.\, 10^2 + c_4 \,.\, 10^3 + \dots + c_n \,.\, 10^{n-1}.$$

Szukając cechy podzielności przez liczbę, którą nazwijmy d, podzielmy przez nią obie strony téj równości. W sumie po prawéj, dzieląc każdy ze składników (§ 18, us. 3) przez d, dzielmy w nim przez d, (poczynając od drugiego składnika) czynnik (§ 7, us. 13; § 20, us. 8), przedstawiający potęgę 10-u; otrzymamy wtedy warunek podzielności niezależny od cyfr danéj liczby, o co nam właśnie idzie. Będzie więc

$$\frac{L}{d} = \frac{c_1}{d} + c_2 \,.\, \frac{10}{d} + c_3 \,.\, \frac{10^2}{d} + c_4 \,.\, \frac{10^3}{d} + \dots + c_n \,.\, \frac{10^{n-1}}{d}.$$

Całkowitą część ilorazu z dzielenia k-cyfrowéj liczby, przedstawionéj przez 1 z zerami przez d, t. j. z dzielenia $10^{k-1} : d$, nazwijmy i_k, a resztę dzielenia r_k; wtedy (oczywiście $i_1 = 0, r_1 = 1$)

$$\frac{L}{d} = \frac{c_1}{d} + c_2 \,.\, \left(i_2 + \frac{r_2}{d}\right) + c_3 \,.\, \left(i_3 + \frac{r_3}{d}\right) + \dots + c_n \,.\, \left(i_n + \frac{r_n}{d}\right)$$

$$= c_2 \,.\, i_2 + c_3 \,.\, i_3 \,.\, + c_4 \,.\, r_4 + \dots + c_n \,.\, i_n + \frac{c_1 + c_2 \,.\, r_2 + c_3 \,.\, r_3 + \dots + c_n \,.\, r_n}{d}.$$

Ponieważ suma $c_2 \,.\, i_2 + c_3 \,.\, i_3 + \dots c_n \,.\, i_n$ jest liczbą całkowitą, więc liczba L będzie przez d podzielna pod warunkiem, żeby (us. 3) suma $c_1 + c_2 \,.\, r_2 + c_3 \,.\, r_3 + \dots + c_n \,.\, r_n$ była przez d podzielna. Należy więc przedewszystkim dla każdéj

---

[1]) Zobacz na końcu książki: Przypisek I.

[2]) Elementarny dowód dr. Żbikowski ogłosił tylko dla 7-u (r. 1868): gdy do liczby $10.a + b$ dodamy i od niéj odejmiemy $20.b$, to otrzymamy $10.a + b + 20.b - 20.b = 10.(a - 2.b) + 21.b$; ponieważ $21.b$ jest podzielne przez 7, więc jeżeli $a - 2.b$ jest podzielne przez 7, to liczba dana jest podzielna przez 7. (*Grudzień, 1882 r.*)

[P. Żbikowski, w odpowiedzi na zakomunikowane mu podane tu w tekście uzasadnienia, nadesłał mi obecnie (kwiecień, 1883) elementarne dowody dla innych liczb, analogiczne do powyższego dla 7-u.]

liczby d wyznaczyć liczby $r_2, r_3, r_4, \ldots$, t. j. reszty z dzielenia $10, 10^2, 10^3, \ldots$ przez d, a wtedy łatwo już będzie odkryć warunek podzielności przez d.

$d=2$. Wtedy $r_2=r_3=r_4=\ldots=0$; więc warunek podzielności przez 2 wypada z $\frac{c_1}{2}$ (us. 5).

$d=3$. Wtedy $r_2=r_3=r_4=\ldots=1$; więc warunek podzielności przez 3 wypada z $\frac{c_1+c_2+c_3+\ldots}{3}$ (us. 9).

$d=4$. Wtedy $r_2=2, r_3=r_4=\ldots=0$; mamy więc warunek $\frac{c_1+2c_2}{4}$, t. j. aby suma piérwszéj cyfry i dwa razy wziętéj drugiéj była podzielna przez 4. (Jeżeli do téj sumy dodamy liczbę podzielną przez 4, mianowicie $8 . c_2$, to przedstawimy ten warunek inaczéj: $\frac{c_1+10 . c_2}{4}=\frac{c_2c_1}{4}$, us. 6.)

$d=5$. Warunek $\frac{c_1}{5}$ (us. 5).

$d=6$ [1]). Wtedy: $r_2=r_3=r_4=\ldots=4$, a warunek $\frac{c_1+4c_2+4c_3+\ldots}{6}$

$d=7$. Wtedy: $r_1=1, r_2=3, r_3=2, r_4=6, r_5=4, r_6=5, r_7=1, r_8=3$, i t. d.; reszty więc te, powtarzając się, tworzą peryjod 1, 3, 2, 6, 4, 5. Należy więc cyfry 1-ą, 7-ą, 13-ą i t. d. zostawić bez zmiany, 2-ą, 8-ą, 14-ą i t. d. pomnożyć przez 3, i t. d., a jeżeli ta suma $c_1+3 . c_2+ +2 . c_3+6 . c_4+4 . c_5+5 . c_6+c_7+3 . c_8+\ldots$ jest podzielna przez 7, to i dana liczba jest podzielna przez 7. Wprowadzając dopełnienia reszt (§ 7, us. 24) liczb 6, 4, 5, moglibyśmy powiedzieć, że warunkiem jest podzielność sumy $c_1+3 . c_3+2 . c_3-c_4-3 . c_5-2 . c_6+c_7+3 . c_8+\ldots$; poszukiwanie wtedy nieco się uproszcza, ale zawsze złożonym być nieprzestaje [2]).

$d=8$. Wtedy $r_2=2, r_3=4, r_4=r_5=\ldots=0$. Warunek $\frac{c_1+2 . c_2+4 . c_3}{8}$. (Jeżeli dodamy liczbę podzielną przez 8, mianowicie $8 . c_2+96 . c_3$, to ten warunek przedstawimy inaczéj, mianowicie: $\frac{c_1+10 . c_2+100 . c_3}{8}=\frac{c_3c_2c_1}{8}$, us. 7.)

$d=9$; $r_2=r_3=\ldots=1$; warunek $\frac{c_1+c_2+\ldots}{9}$ (us. 10).

$d=10$; $r_2=r_3=\ldots=0$; warunek $c_1=0$.

$d=11$; $r_1=1, r_2=10, r_3=1, r_4=10$, i t. d.; warunek $\frac{c_1+10 . c_2+c_3+10 . c_4+c_5+10 . c_6+\ldots}{11}=\frac{c_2c_1+c_4c_3+c_6c_5+\ldots}{11}$ (us. 11).

---

1) Co do warunku podzielności przez 6, 12 i t. d., patrz niżéj w § 14, us. 18.

2) I tu dodając i odejmując odpowiednie wielokrotne 7-u, doszlibyśmy do cech podanych w us. 13.

$d = 12$; $r_1 = 1$, $r_2 = 10$; $r_3 = r_4 = \ldots = 4$, a więc

$$\frac{c_1 + 10 \,.\, c_2 + 4 \,.\, c_3 + 4 \,.\, c_4 + 4 \,.\, c_5 + \ldots}{12}$$

I t. d.

17. PRÓBY MNOŻENIA I DZIELENIA PRZEZ 9. Mamy dowieść następującego twierdzenia ogólnego:

Reszta, otrzymana z podzielenia iloczynu dwu [1] *czynników przez pewną liczbę, jest taż sama, co reszta, wypadła z podzielenia przez nią iloczynu reszt, otrzymanych z podzielenia obu czynników oddzielnie przez tęż liczbę.*

Dowiedziemy, że np. reszta, otrzymana z podzielenia iloczynu $88 \,.\, 35$ (t. j. liczby 3080) przez 12, jest taż sama, co reszta wypadła z podzielenia iloczynu reszty z dzielenia $89 : 12$ przez resztę z dzielenia $35 : 12$. Wiemy (§ 6, us. 14), że

$$88 \,.\, 35 = (12 \,.\, 7 + 4) \,.\, 35 = 12 \,.\, 7 \,.\, 35 + 4 \,.\, 35$$

i że (us. 3) reszta z podzielenia liczby $88 \,.\, 35$ przez 12 jest taż sama, co reszta z podzielenia liczby $4 \,.\, 35$ przez 12. Lecz znów $4 \,.\, 35 = 4 \,.\, (12 \,.\, 2 + 11) =$ $= 4 \,.\, 12 \,.\, 2 + 4 \,.\, 11$, więc

$$88 \,.\, 35 = (12 \,.\, 7 \,.\, 35 + 12 \,.\, 4 \,.\, 2) + 4 \,.\, 11,$$

i znów (us. 3) reszta z podzielenia iloczynu $88 \,.\, 35$ przez 12, jest równa reszcie z podzielenia iloczynu $4 \,.\, 11$ przez 12, t. j. iloczynu reszty z podzielenia czynnika 88 przez 12 i reszty z podzielenia czynnika 35 przez 12.

Jeżeli więc chcemy, opierając się na tym twierdzeniu, przy pomocy dzielenia przez 9, sprawdzić mnożenie wypisane, to tak postąpić możemy: $8 + 8 = 16$, więc reszta z podzielenia $88 : 9$ (us. 10) jest 7; $3 + 5 = 8$, reszta z podzielenia $35 : 9$ jest 8; iloczyn reszt $7 \,.\, 8 = 56$; $5 + 6 = 11$; więc reszta z podzielenia (iloczynu reszt) $56 : 9$ jest 2. Szukamy teraz reszty z dzielenia znalezionego iloczynu (3080) przez 9; $3 + 8 = 11$; z dzielenia $11 : 9$ otrzymujemy resztę 2, tę samę, co z dzielenia iloczynu reszt przez 9. Możemy więc z pewnym prawdopodobieństwem wnosić, że to mnożenie jest dobrze wykonane. Oczywiście, ta próba nie wykryje omyłki w iloczynie (nadmiaru lub niedomiaru) o wielokrotną 9-u (us. 3), jak również nie wykryje tego, że np. jedna cyfra jest za wielką o tyle jedności, o ile druga jest za małą.

$$\begin{array}{rl}
88 & 7 \\
\times 35 & \underline{8} \\
\hline
440 & 1; \\
\underline{264} & \\
3080 & 1.
\end{array}$$

Aby sprawdzić dzielenie przy pomocy dzielenia przez 9, odejmujemy resztę dzielenia od dzielnéj; otrzymana liczba jest iloczynem dzielnika przez iloraz; więc reszta otrzymana z jéj podzielenia przez 9 jest taż sama, co reszta iloczynu reszt wypadłych z podzielenia

$$\begin{array}{r|l}
17040690 & 567 \\
\cline{2-2}
\ldots\ldots\ldots & 30054 \\
\ldots\ldots\ldots & \\
\cline{1-1}
72 & \\
\hline
17040618 &
\end{array}$$

[1] Lub: ilukolwiek.

dzielnika przez 9 i z podzielenia ilorazu przez 9. Tu $5+6+7=18$; reszta 0; jakakolwiek więc będzie reszta z podzielenia ilorazu, będzie iloczyn 567. 30054 wielokrotny 9-u; więc i reszta z podzielenia 17040618 powinna być 0. Jakoż $1+7+4+6+1+8=27$. Możemy więc z pewnym prawdopodobieństwem wnosić, że to dzielenie jest dobrze wykonane.

Podobnie możnaby wykonywać próbę mnożenia lub dzielenia przez 11 (us. 11, 12), lecz to, jak i dzielenie przez pewne inne liczby (np. przez 7 i t. d.) nie byłoby tak dogodne w zastosowaniu, jak dzielenie przez 9.

Teoretycznie możnaby podobne próby wykonywać zapomocą dzielenia przez jakiekolwiek liczby. Lecz dzielenie przez 2, 5, 10 mogłoby wykryć tylko błąd w ostatniéj cyfrze; przez 4, 25, 100 tylko w dwu ostatnich cyfrach; przez 3 byłoby mniéj korzystne niż przez 9, bo nie wykrywałoby nadmiarów lub niedomiarów wielokrotnych 3-ch, które wrazie, gdy nie są wielokrotne 9-u, mogłyby być wykryte próbą przez 9. I t. d.

(Zadania arytmetyczne. § 15.)

---

§ 14. SPÓLNY DZIELNIK KILKU LICZB. NAJWIĘKSZY SPÓLNY DZIELNIK KILKU LICZB. DWIE LICZBY PIÉRWSZE WZGLĘDEM SIEBIE.

1. *Liczba, przez którą jednocześnie jest podzielna każda z danych liczb, nazywa się spólnym dzielnikiem tych liczb danych.* Np. liczby 36, 84, 672 i 120 są wszystkie podzielne przez 1, 2, 3, 4, 6, 12; każda więc z liczb 1, 2, 3, 4, 6, 12 jest spólnym dzielnikiem liczb 36, 84, 672 i 120.

Jeden z tych spólnych dzielników liczb danych jest największy; nazywa się go największym spólnym dzielnikiem liczb danych. Tak np. 12 jest największym spólnym dzielnikiem liczb 36, 84, 672 i 120.

Największym spólnym dzielnikiem kilku liczb danych nazywamy największą ze wszystkich liczb, przez które jednocześnie jest podzielna każda z liczb danych.

Nadal, przez skrócenie, zamiast: największy spólny dzielnik, pisać często będziemy: nsd.

2. *Dwie liczby, nie mające żadnego spólnego dzielnika, prócz jedności, nazywają się liczbami piérwszymi względem siebie.* Np. liczby 24 i 35, z których piérwsza ma dzielniki: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, a druga: 1, 5, 7, 35, nie mają żadnego spólnego dzielnika, prócz 1-ci. Możemy więc jeszcze powiedzieć, że dwie liczby piérwsze względem siebie mają nsd. 1.

3. *Jeżeli dwie liczby nie są piérwszymi względem siebie, to mają, conajmniéj, jeden spólny dzielnik, będący liczbą piérwszą, różną od jedności.* Spólny bowiém ich

dzielnik, różny od 1, jeżeli nie jest liczbą pierwszą, jest sam podzielny przez liczbę pierwszą (§ 12, us. 6), która więc (§ 12, us. 4) jest dzielnikiem tak jednéj, jak i drugiéj z danych liczb, czyli jest ich spólnym dzielnikiem.

4. a. *Dwie liczby piérwsze, są piérwszymi względem siebie*, np. 7 i 37, bo każda z nich ma tylko dzielnik 1 i samę siebie, a one są od siebie różne — żadnego przeto spólnego dzielnika, prócz 1, miéć nie mogą.

b. *Liczba piérwsza i liczba, przez tamtę niepodzielna, są piérwszymi względem siebie* [1]; np. 11 i 56, bo jeżeli liczba 56 jest niepodzielna przez liczbę piérwszą 11, która ma tylko dzielniki 1 i 11, to liczby 11 i 56 nie mogą miéć żadnego spólnego dzielnika, prócz 1.

5. *Jeżeli z dwu liczb jedna jest przez drugą podzielna, to mniejsza jest największym spólnym dzielnikiem tych dwu liczb* [2]. Np. z dwu liczb 8 i 56 druga jest podzielna przez piérwszą, a więc 8 jest dzielnikiem 8-u i 56-u, t. j. jest ich spólnym dzielnikiem, i jest nadto nsd.-em tych liczb 8 i 56, gdyż 8 przez liczbę większą od 8-u nie jest podzielne.

6. Dowiedliśmy (§ 13, us. 2), że dzielnik sumy dwu składników i jednego ze składników jest dzielnikiem drugiego składnika. Jeżeli więc, mając dwie liczby, np. 132 i 36, podzielimy piérwszą przez drugą, to

$$132 = 36 \,.\, 3 + 24$$

i każdy spólny dzielnik liczb 132 i 36, a więc i (§ 12, us. 4) wielokrotnéj 36-u, t. j. liczby 36.3, jako dzielnik sumy dwu składników (132) i jednego składnika (36.3), jest dzielnikiem drugiego składnika, 24-ch, reszty z dzielenia 132 : 36. Możemy więc powiedziéć, że każdy spólny dzielnik liczb 132 i 36, jako dzielnik 24-ch, jest též spólnym dzielnikiem liczb 36 i 24.

Nawzajem, każdy spólny dzielnik dwu liczb 36 i 24, jako dzielnik każdego ze składników 36.3 i 24, jest dzielnikiem ich sumy (§ 13, us. 1), t. j. liczby 132, a tymsamym jest spólnym dzielnikiem liczb 132 i 36.

Gdy więc każdy spólny dzielnik liczb 132 i 36 jest spólnym dzielnikiem liczb 36 i 24 i nawzajem, każdy spólny dzielnik liczb 36 i 24 jest spólnym dzielnikiem liczb 132 i 36, to *wszystkie spólne dzielniki liczb 132 i 36 są tymiż samymi, co wszystkie spólne dzielniki liczb 36 i 24*, a zatym i nsd. liczb 132 i 36 jest jednocześnie nsd.-em liczb 36 i 24. Powiemy więc:

Jeżeli z dwu liczb jedna nie jest przez drugą podzielna, to one mają

---

[1] Euklides, ks. VII, pod. 31.

[2] Euklides, ks. VII, pod. 2, przypadek 1-y zadania: znaléść nsd. (miarę) dwu liczb, które nie są piérwszymi względem siebie.

ten sam największy spólny dzielnik, co: mniejsza z tych liczb i reszta z podzielenia większéj z nich przez mniejszą.

7. Chciejmy odnaléść nsd. dwu liczb, np. 945 i 360. Szukany nsd. jest zarazem (us. 4) nsd.-em liczby 360 i reszty z dzielenia $945:360$; $945=2.360+225$. Zamiast więc szukać nsd.-a liczb 945 i 360, możemy szukać nsd.-a liczb 360 i (téj reszty) 225. Lecz znowu, dzieląc 360 przez 225, otrzymamy $360=1.225+135$. Zamiast więc szukać nsd.-a liczb 360 i 225, możemy szukać nsd.-a liczb 225 i 135. I t. d. Ponieważ tu wciąż coraz mniejsze otrzymujemy liczby (§ 7, us. 11), więc liczba takich dzieleń jest ograniczona [1]). Dojdziemy nakoniec do reszty 0, t. j. do takich dwu liczb, z których jedna jest przez drugą podzielna, a więc (us. 5) ich nsd.-em będzie mniejsza z nich, t. j. dzielnik ostatniego dzielenia. Ten więc dzielnik ostatniego dzielenia, jako nsd. dwu liczb, mających ten sam nsd., co każde dwie poprzednio dzielone przez siebie liczby, jest téż nsd.-em liczb danych [2]).

Przedstawimy tu rachunek poszukiwania nsd.-a *a)* liczb 945 i 360, *b)* liczb 35 i 1136.

a)

945 | 360
720 | 2

360 | 225
225 | 1

225 | 135
135 | 1

135 | 90
90 | 2

90 | 45 nsd.
90 | 2
0

b)

1136 | 35
105 | 32
86
70

35 | 16
32 | 2

16 | 3
15 | 5

5 | 1 nsd.
5 | 5
0

[1]) Ilość dzieleń, które należy uskutecznić przy poszukiwaniu nsd.-a dwu liczb, jest nie większą od 5 razy wziętéj ilości cyfr mniejszéj z liczb danych (Lamé w protokołach akademii nauk w Paryżu, 1844).

Szereg liczb, w którym początkowymi są liczby 1, 2, a każda następująca jest sumą dwu poprzedzających, t. j. szereg

1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, . . .,

posiada tę własność, iż, przy poszukiwaniu nsd.-a dwu liczb, z których mniejsza nie jest większą od pewnéj liczby tego szeregu, ilość dzieleń nie jest większą od ilości dzieleń, potrzebnych dla odnalezienia nsd.-a owéj właśnie liczby z tego szeregu i liczby następującéj po niéj w tymże szeregu. Np., niewięcéj potrzeba dzieleń dla odnalezienia nsd.-a liczb 945 i 360, niż dla liczb 377 i 610.

Tylu zaś potrzeba dzieleń dla odnalezienia nsd.-a dwu liczb tego szeregu, ile wskazuje miejsce zajęte w tym szeregu przez mniejszą z tych liczb. Np., dla odszukania nsd.-a tak liczb 144 i 89, jak i np. 1597 i 89, potrzeba 10-u dzieleń, bo 89 jest w tym szeregu na 10-ym miejscu.

[2]) Euklides, ks. VII, pod. 2, przyp. 2.

W piérwszym przykładzie poszukiwanie nsd.-a liczb 945 i 360 sprowadzało się kolejno do poszukiwania (us. 6) nsd.-a liczb 360 i 225, liczb 225 i 135, liczb 135 i 90, liczb 90 i 45, z których już piérwsza była podzielna przez drugą; więc mniejsza z nich, t. j. 45 (dzielnik ostatniego dzielenia), jest nsd.-em każdéj pary dzielonych tu przez siebie liczb, a więc i liczb danych 945 i 360. W drugim zaś przykładzie otrzymaliśmy tą samą drogą, jako nsd. liczb 1136 i 35, liczbę 1; więc (us. 2) te liczby dane są piérwsze względem siebie [1]). Powiemy więc:

Aby odnaléść największy spólny dzielnik dwu liczb, należy liczbę większą podzielić przez mniejszą, mniejszą przez resztę piérwszą, resztę piérwszą przez resztę drugą i t. d., dopóki nie wypadnie reszta 0; wtedy ostatni dzielnik jest poszukiwanym największym spólnym dzielnikiem dwu liczb danych.

Ponieważ, jak wiemy, w tym poszukiwaniu nsd.-a pewnych dwu danych liczb, dwie którekolwiek dzielone przez siebie liczby mają ten sam nsd., co dane dwie liczby, więc jeżeli, prowadząc to poszukiwanie, dojdziemy do dzielenia przez siebie liczb, o których wiemy, że są piérwsze względem siebie, to nie mamy co działania daléj prowadzić, gdyż wtedy i dane liczby są piérwszymi względem siebie. Tak np., poszukując powyżéj nsd.-a liczb 1136 i 35 doszliśmy do dzielenia liczb 16 i 3, z których ostatnia jest piérwsza, a poprzednia nie jest przez nią podzielna (us. 4); możemy więc zaprzestać dalszego rachunku, gdyż już widoczna, że także liczby 1136 i 35 są piérwszymi względem siebie.

8. Poszukując w ten sposób nsd.-a różnych liczb, łatwo możemy dostrzéc, że do powiedzianego w ustępie 4-ym możemy teraz dodać:

c. *Dwie liczby po sobie następujące w szeregu liczb naturalnych są piérwszymi względem siebie* (gdyż ich nsd. jest jednocześnie nsd.-em mniejszéj z tych liczb i reszty 1; jest on więc 1). Np. 25 i 24, albo 38 i 39.

d. *Dwie liczby nieparzyste, po sobie następujące w szeregu liczb naturalnych, są piérwszymi względem siebie* (gdyż ich nsd. jest nsd.-em mniejszéj z tych liczb i reszty 2, przez którą tamta, jako nieparzysta, jest niepodzielna (us. 4, b.). Np. 25 i 27, albo 117 i 119.

9. Na zasadzie dowiedzionego w us. 6, wiemy, że wszystkie spólne dzielniki liczb 945 i 360 (us. 7) są też same, co liczb 360 i 225, jak również też same, co liczb 225 i 135, co liczb 135 i 90, co nakoniec liczb 90 i 45. Lecz 90 jest wielokrotną 45, więc dzielniki liczby

[1]) Euklides, ks. VII, pod. 1.

90 i 45, a więc i liczb 945 i 360, są dzielnikami liczby 45, nsd.-a liczb 945 i 360. A zatym [1]),

Spólne dzielniki dwu liczb są też same, co dzielniki ich największego spólnego dzielnika.

10. Mamy znaléść nsd. kilku liczb, np. cztérech liczb

945, 360, 60 i 95.

Ponieważ każdy spólny dzielnik tych cztérech liczb jest spólnym dzielnikiem dwu liczb: 945 i 360, a zarazem (us. 9) dzielnikiem nsd.-a tych dwu liczb, t. j. (jakeśmy znaleźli us. 7) liczby 45, więc każdy spólny dzielnik wypisanych cztérech liczb jest spólnym dzielnikiem trzech liczb

45, 60, 95.

Nawzajem, każdy spólny dzielnik tych trzech liczb, jako dzielnik 45-u, jest téż dzielnikiem liczb 945 i 360, wielokrotnych 45-u (§ 12, us. 4), czyli: jest spólnym dzielnikiem początkowo danych cztérech liczb. Z tego wypada, że wszystkie spólne dzielniki liczb 945, 360, 60 i 95 są tymiż samymi, co wszystkie spólne dzielniki liczb 45, 60 i 95, a zatym i nsd. liczb 945, 360, 60 i 95 jest ten sam, co nsd. liczb 45, 60 i 95. — Podobnie rozumując, znajdziemy, że znowu nsd. liczb 45, 60 i 95 jest nsd.-em liczb 15 (nsd.-a 45-u i 60-u) i 95. Największy zaś spólny dzielnik liczb 15 i 95 jest 5. Więc 5 jest nsd.-em liczb 945, 360, 60 i 95. — Możemy więc powiedzieć:

Aby wyznaczyć największy spólny dzielnik trzech lub więcéj liczb danych, należy, odnalazszy go dla dwu [2]) z danych liczb, poszukiwać następnie największego spólnego dzielnika dwu liczb, z których jedną jest znaleziony już największy spólny dzielnik dwu danych liczb, a drugą trzecia [3]) z danych liczb, i t. d. [4]).

11. Wiemy (§ 7, us. 14), że gdy dzielną i dzielnik albo jednocześnie pomnożymy, albo jednocześnie podzielimy przez tę samę liczbę, to reszta dzielenia będzie przez tęż liczbę odpowiednio albo pomnożona, albo podzielona. Jeżeli więc, odnalazszy (us. 7) nsd. dwu danych liczb, pomnożymy je obie przez tęż samę liczbę i ponownie poszukiwać będziemy największego spólnego dzielnika tak zmienionych liczb, to wszystkie kolejne reszty będą przez tęż samę liczbę pomnożone, a tymsamym będzie przez nią pomnożony poprzedni nsd., jako jedna z tych reszt. Również, jeżelibyśmy obie dane liczby podzielili przez tę samę liczbę, to wszystkie kolejne reszty będą przez tę liczbę podzielone i, jako nsd., otrzymalibyśmy nsd. liczb danych, przez tę samę liczbę podzielony. A więc:

---

[1]) Euklides, ks. VII, pod. 2, wniosek.
[2]) Którychkolwiek.
[3]) Którakolwiek z pozostałych.
[4]) Euklides, ks. 7, pod. 3.

Jeżeli dwie liczby albo jednocześnie pomnożymy albo jednocześnie podzielimy przez pewną liczbę, to skutkiem tego największy ich spólny dzielnik będzie przez tęż liczbę odpowiednio pomnożony, albo podzielony.

12. Z tego bespośrednio wypada, że

Gdy dwie liczby podzielimy przez ich największy spólny dzielnik, to otrzymamy liczby piérwsze względem siebie, gdyż, skutkiem tego, ich nsd. stanie się 1-ścią. Tak np., liczby 108 i 48 mają nsd. 12; gdy liczby 108 i 48 podzielimy przez ten nsd. 12, to jednocześnie ich nsd. dzielimy przez siebie i, jako nsd. nowych liczb, otrzymujemy 1; jakoż, 9 i 4 są liczbami piérwszymi względem siebie.

13. *Jeżeli iloczyn dwu czynników jest podzielny przez liczbę piérwszą względem jednego czynnika, to czynnik pozostały jest przez tę liczbę podzielny* [1]. Jeżeli np. iloczyn 44.105 jest podzielny przez liczbę 35, piérwszą względem czynnika 44, to należy dowieść, że drugi czynnik 105 jest podzielny przez 35. Ponieważ 44 i 35 są liczby piérwsze względem siebie, przeto ich nsd. jest 1. Jeżeli więc te liczby pomnożymy przez 105, to (us. 11) nsd. liczb 44.105 i 35.105 jest $1 \times 105 = 105$. Iloczyn 44.105, według założenia, jest podzielny przez 35; iloczyn 35.105, jako wielokrotny 35-u, jest podzielny przez 35, a więc (us. 9) i ich nsd., t. j. liczba 105, jest podzielna przez 35.

Z tego wypada, że (§ 7, us. 13):

$$(44 . 105) : 35 = 44 . (105 : 35),$$

t. j. iloraz z podzielenia liczby 44.105 przez 35, liczbę piérwszą względem jéj dzielnika 44, posiada dzielnik 44. Czyli: *gdy liczbę, mającą pewien dzielnik, podzielimy przez liczbę piérwszą względem tego dzielnika, to iloraz otrzymany jest przez ów dzielnik także podzielny.*

14. *Jeżeli iloczyn kilku czynników jest podzielny przez liczbę piérwszą, to przynajmniéj jeden z jego czynników jest przez tę liczbę podzielny* [2].

Jeżeli mamy iloczyn dwu czynników, np. 44.105, podzielny przez liczbę piérwszą 7, to wrazie, gdyby przez tę liczbę był podzielny piérwszy czynnik iloczynu, prawdziwość naszego twierdzenia byłaby oczywistą. Wrazie zaś, gdy, jak tu, czynnik 44 nie jest podzielny przez 7, to (us. 4, b.) liczby 7 i 44 są piérwszymi względem siebie, a skutkiem tego (us. 13) drugi czynnik 105 jest podzielny przez 7.

Gdybyśmy mieli iloczyn kilku czynników, np. 44.25.72.105 podzielny przez liczbę piérwszą 7, to, uważając ten iloczyn jako iloczyn dwu czynników: 44 i liczby 25.72.105, na zasadzie powyższego widzimy, że ponieważ 44 nie jest podzielne przez 7, drugi czynnik 25.72.105, jest podzielny przez 7. Gdy zaś ten iloczyn 25.72.105 dwu czynników: 25 i liczby 72.105 jest po-

---

[1] Euklides, ks. VII, pod. 25: liczba, która jest dzielnikiem jednéj z dwu liczb piérwszych względem siebie, jest piérwszą względem drugiéj z tych liczb.

[2] Euklides, ks. VII, pod. 32.

dzielny przez 7, a czynnik jego piérwszy nie jest podzielny przez 7, to drugi czynnik, 72.105, jest podzielny przez 7. I t. d.

15. Z powyższego wypada:

a. *Gdy liczba piérwsza jest dzielnikiem potęgi pewnéj liczby, to jest dzielnikiem téj liczby* [1]), gdyż jeżeli np. 5 jest dzielnikiem 25^3, to jest (§ 6, us. 39) dzielnikiem iloczynu 25.25.25, a więc (us. 14) dzieli czynnik tego iloczynu, t. j. liczbę 25.

b. *Gdy dwie liczby są piérwsze względem siebie, to i jakiekolwiek ich potęgi są także liczbami piérwszymi względem siebie* [2]). Np. 8 i 21 są liczbami piérwszymi względem siebie; należy okazać, że np. 8^9 i 21^{12} są téż piérwszymi względem siebie. Gdyby bowiém liczby 8^9 i 21^{12} nie były piérwszymi względem siebie, to miałyby (us. 3) spólny dzielnik, będący liczbą piérwszą, który, będąc dzielnikiem 8^9, byłby, według a., dzielnikiem 8, a będąc dzielnikiem 21^{12}, byłby dzielnikiem 21, czyli byłby spólnym dzielnikiem liczb 8 i 21, co być nie może.

16. *Liczba piérwsza względem każdéj z kilku liczb jest piérwsza względem ich iloczynu* [3]). Gdyby bowiém np. liczba 25, piérwsza względem każdéj z liczb: 24, 36, 48, 56, nie była piérwszą względem ich iloczynu 24, 36, 48, 56, to ten iloczyn i liczba 25 miałyby (us. 3) spólny dzielnik będący liczbą piérwszą, która byłaby (us. 14) dzielnikiem jednego z czynników iloczynu, a więc ten czynnik i liczba 25 nie byłyby liczbami piérwszymi względem siebie.

17. *Liczba podzielna przez dwie liczby piérwsze względem siebie, lub przez kilka liczb, z których każde dwie są piérwszymi względem siebie, jest podzielną przez ich iloczyn.*

Np. Liczba 1800 jest podzielna przez liczby 4, 5, 9, z których tak liczby 4 i 5, jak liczby 5 i 9, jakotéż liczby 4 i 9 są, oddzielnie uważane, dwiema liczbami piérwszymi względem siebie; chcemy dowieść, że liczba 1800 jest podzielna przez iloczyn $4.5.9 = 180$.

Ponieważ 1800 jest podzielne przez 4, więc (§ 12, us. 2) $1800 = 4.450$. Gdy 1800 jest podzielne przez 5, to i iloczyn 4.450 jest podzielny przez 5; że zaś czynnik 4 jest piérwszy względem 5, to (us. 13) czynnik 450 jest podzielny przez 5 i $450 = 5.90$, a więc $1800 = 4.5.90$. Gdy znowu 1800 jest podzielne przez 9, to i iloczyn 4.5.90 jest podzielny przez 9; że zaś 9 jest liczbą piérwszą tak względem 4 jak i względem 5, więc jest liczbą piérwszą względem (us. 16) iloczynu 4.5, tak iż, uważając iloczyn 4.5.90 jako iloczyn dwu czynników: jednego 4.5, drugiego 90, widzimy, że ten iloczyn jest podzielny przez liczbę 9, piérwszą względem czynnika 4.5, skutkiem

---

1) Na mocy tego, można uogólnić to, co powiedziano w ustępie 8 d., dowodząc, że *Dwie liczby nieparzyste, których różnica jest potęgą liczby 2, są piérwsze względem siebie;* np. 25 i 33, 27 i 91, i t. d.

2) Euklides, ks. VII, pod. 27, 29.

3) Euklides, ks. VII, pod. 26.

czego (us. 13) drugi jego czynnik 90 jest podzielny przez 9. Zatym, wyrażając 90 jako iloczyn 9-u przez dzielnik dopełniający, mamy $90 = 9.10$, a tymsamym $1800 = 4.5.9.10 = (4.5.9).10$, z czego widoczna, że liczba 1800 jest podzielną przez iloczyn $4.5.9 = 180$.

18. Z powyższego wypada bespośrednio [1]):

Jeżeli liczba jest podzielna przez 2 i przez 3, to jest podzielna przez 6.
Jeżeli liczba jest podzielna przez 3 i przez 4, to jest podzielna przez 12.
Jeżeli liczba jest podzielna przez 3 i przez 5, to jest podzielna przez 15.
Jeżeli liczba jest podzielna przez 3 i przez 8, to jest podzielna przez 24.
I t. d. [2]).

---

§ 15. ROSKŁAD LICZBY NA CZYNNIKI PIÉRWSZE. WSZYSTKIE DZIELNIKI LICZBY. SPÓLNA WIELOKROTNA KILKU LICZB. NAJMNIEJSZA SPÓLNA WIELOKROTNA KILKU LICZB.

1. Jeżeli pewna liczba jest złożona, t. j. ma dzielnik różny od saméj siebie i od 1, to możemy ją wyrazić jako iloczyn dwu czynników różnych od 1: tego dzielnika i dzielnika dopełniającego (§ 12, us. 2). Jeżeli następnie jeden z czynników tego iloczynu (lub oba) nie jest liczbą piérwszą, to możemy go znów w tym iloczynie zastąpić przez iloczyn dwu czynników różnych od 1. I t. d. Postępowanie to będziemy mogli prowadzić dotąd, dopóki wszystkie czynniki iloczynu, przedstawiającego daną liczbę, nie będą już wyłącznie liczbami piérwszymi. Tak np.

$$450 = 10.45 = 2.5.45 = 2.5.5.9 = 2.5.5.3.3.$$

Takie wyrażenie liczby danéj przez iloczyn czynników, będących wyłącznie liczbami piérwszymi, nazywa się r o s k ł a d e m l i c z b y n a c z y n n i k i p i é r w s z e.

Rozłożyć liczbę na czynniki piérwsze jestto znaléść takie liczby piérwsze, których iloczyn przedstawia liczbę daną.

Zwykle te czynniki piérwsze wypisuje się w roskładzie w porządku liczb rosnących; więc $450 = 2.3.3.5.5$.

---

[1]) Te cechy wyprowadzone są także niżéj w § 15, us. 11.

[2]) Wyprowadzony w § 13, us. 16 warunek podzielności przez 6 jest sumą tam podanych warunków podzielności przez 2 i 3. We wzór ogólny $\left(\text{ostatni na } \frac{L}{d}\right)$ wprowadźmy dopełnienia reszt, t. j. wszystkie i powiększmy o 1; wtedy dla $d = 6$ dopełnieniem reszty będzie

$$c_1 + c_2 + c_3 + \ldots - \frac{c_1 + 4.c_2 + 4.c_3 + \ldots}{6} = \frac{5.e_1 + 2.c_2 + 2.c_3 + \ldots}{6} =$$
$$= \frac{3.c_1 + 2.c_1 + 2.c_2 + 2.c_3 + \ldots}{6} = \frac{c_1}{2} + \frac{c_1 + c_2 + c_3 + \ldots}{3}.$$

Podobnie z warunkiem (tamże) podzielności przez 12, i t. d.

2. *Każda liczba, która nie jest piérwszą, jest iloczynem liczb piérwszych.*

Jak wiemy (§ 12, us. 6), każda liczba, jeżeli nie jest piérwszą, ma dzielnik, będący liczbą piérwszą różną od 1. Jeżeli zatym liczbę daną wyrazimy jako iloczyn tego dzielnika przez dzielnik dopełniający (§ 12, us. 2), to, wrazie gdy ten dzielnik dopełniający jest liczbą piérwszą, prawdziwość twierdzenia jest tymsamym okazana. Jeśli zaś jest on liczbą złożoną, to w tym iloczynie możemy go zastąpić znowu przez iloczyn: jego dzielnika, będącego liczbą piérwszą różną od 1, przez odpowiedni jego dzielnik dopełniający. Jeżeli ten ostatni nie jest liczbą piérwszą, to jeszcze zastąpimy go przez iloczyn i t. d. Ponieważ każdy z tych dzielników dopełniających jest dzielnikiem poprzedniego, mniejszym od niego, a większym od jedności, więc ciąg tych dzielników jest ograniczony. Ostatni z tych dzielników nie jest liczbą złożoną, bo inaczéj możnaby go znowu wyrazić przez iloczyn liczby piérwszéj, różnéj od 1, i dzielnika dopełniającego, więc nie byłby ostatnim. Zatym ostatni z tych dzielników dopełniających jest téż liczbą piérwszą. A że wszystkie pozostałe czynniki iloczynu, przedstawiającego liczbę daną, są liczbami piérwszymi, więc zawsze liczbę złożoną możemy wyrazić jako iloczyn czynników, będących liczbami piérwszymi.

3. *Jeden jest tylko możliwy roskład liczby na czynniki piérwsze.*

Przypuśćmy, że, jako roskład liczby danéj na czynniki piérwsze, otrzymaliśmy $2 \times 5 \times 5 \times 7 \times 31$ i że innym jakimś sposobem jesteśmy w stanie otrzymać jeszcze odmienny od powyższego roskład téjże saméj liczby danéj na czynniki piérwsze. Czynnik 2 piérwszego iloczynu, jako dzielnik liczby danéj, dzieli także drugi iloczyn, przedstawiający tę samę liczbę; że zaś 2 jest liczbą piérwszą i drugi iloczyn jest przez nią podzielny, więc przez 2 jest podzielny (§ 14, us. 14) przynajmniéj jeden z jego czynników. Gdy zaś te czynniki są liczbami piérwszymi, a liczba piérwsza, prócz 1, jest podzielna tylko przez samę siebie, więc podzielny przez 2 czynnik drugiego iloczynu jest właściwie liczbą 2. Podobnież okażemy, że z pozostałych czynników (tworzących pewien iloczyn) piérwszego roskładu czynnik 5 ma sobie równy czynnik 5 w drugim roskładzie, że znowu z pozostałych czynników piérwszego roskładu czynnik 5 ma sobie równy między pozostałymi czynnikami drugiego roskładu czynnik 5 i t. d. Więc dwa te iloczyny czynników piérwszych, przedstawiające tę samę liczbę, są utworzone przez te same czynniki, wchodzące do owych iloczynów tę samę liczbę razy.

Z tego także wypada, że roskład liczby na czynniki piérwsze nie zależy od sposobu, jakim go otrzymujemy.

4. Gdy chcemy rozłożyć na czynniki piérwsze liczbę np. 17 050, to będziemy naprzód poszukiwali mniejszych jéj czynników piérwszych. Korzystając bowiém z cech podzielności (§ 13), możemy łatwo dostrzéc czynniki mniejsze, a nadto, miéć wtedy będziemy dzielenia przez mniejsze liczby, co jest dla nas ważne z tego względu,

iż chcemy (jeżeli można) odrazu wypisywać dzielniki dopełniające (us. 1), t. j. ilorazy tych dzieleń. Tak, z uwagi, że nasza liczba kończy się na 0, wnosimy, że jest podzielną przez 2. Dzielenie wypiszemy tak (§ 7, us. 20):

17050	2
8525	

Więc $17050 = 2.8525$. Należy czynnik 8525 (jeżeli on jest złożony) zastąpić przez iloczyn czynników piérwszych. Liczba 8525 kończy się na 5, więc jest niepodzielna przez 2; suma jéj cyfr jest $8+5+2+5=20$, więc ta liczba nie jest podzielna przez 3; kończy się na 5, więc jest podzielna przez 5. Dzielmy więc przez 5:

8525	5
1705	

Zatym $8525 = 5.1705$, skutkiem czego $17050 = 2.5.1705$. W tym znów wyrażeniu należy liczbę 1705 zastąpić przez iloczyn liczb piérwszych. Ona nie może już być podzielną ani przez 2, ani przez 3, bo poprzednia liczba 8525, jéj wielokrotna, (§ 12, us. 4) nie była przez te liczby podzielna. Próbujemy więc daléj, poczynając od 5. Jest przez 5 podzielna. Więc:

1705	5
341	

i $1705 = 5.341$, a tymsamym $17050 = 2.5.5.341$. Chcąc liczbę 341 zastąpić przez iloczyn liczb piérwszych, zaczynamy od badania jéj podzielności przez 5. Przez 5 jest niepodzielna, bo się kończy na 1. Dzielimy [1] 341 przez 7 (na stronie); otrzymujemy resztę 5, więc ta liczba nie jest podzielną przez 7. Przez 11; tu $41+3=44$ (albo: $1+3=4$; $4-4=0$), więc nasza liczba jest podzielna przez 11. Dzielimy:

341	11
31	

więc $341 = 11.31$ i $17050 = 2.5.5.11.31$. Otrzymana liczba 31 jest piérwszą (bo jest mniejsza od 6.6 i nie jest podzielna przez 2, 3, 5; § 12, us. 8). Ostatnie zatym wyrażenie liczby jest jéj roskładem na czynniki piérwsze.

Przyglądając się temu postępowaniu, łatwo dostrzeżemy, że możemy je łącznie tak przedstawić:

17050	2
8525	5
1705	5
341	11
31	

$$17050 = 2.5.5.11.31.$$

Aby liczbę rozłożyć na czynniki piérwsze, należy naprzód znaléść tę najmniejszą z liczb piérwszych, przez którą dana liczba jest podzielna; uskutecznić dzielenie przez tę liczbę i, jeżeli ten iloraz nie jest liczbą piérwszą,

---

[1] Albo (§ 13, us. 15): $34 - 2.1 = 32$ jest niepodzielne przez 7, więc i liczba 341 jest niepodzielna przez 7.

znowu znaléść najmniejszą z liczb piérwszych, przez którą on jest podzielny; wykonawszy to dzielenie, jeżeli nowy iloraz nie jest liczbą piérwszą, należy jeszcze znaléść najmniejszą liczbę piérwszą, przez którą on jest podzielny, i t. d., dopóki nie otrzymamy ilorazu będącego liczbą piérwszą. Iloczyn wszystkich tych dzielników i ostatniego ilorazu przedstawia roskład na czynniki piérwsze liczby danéj.

Jeżeli dostrzegamy, że liczba jest iloczynem dwu lub więcéj liczb znanych, to można postępowanie uprościć, roskładając każdą z tych liczb oddzielnie, a iloczyn wszystkich ich czynników (us. 1) przedstawi [1]) roskład danéj liczby na czynniki piérwsze. Tak np. powyższa liczba $17\,050 = 1705 \,.\, 10$,

$$10 = 2 \,.\, 5; \quad \begin{array}{r|l} 1705 & 5 \\ 341 & 11 \\ 31 & \end{array} \qquad 17\,050 = 2 \,.\, 5 \,.\, 5 \,.\, 11 \,.\, 31.$$

Podobnie np. $99\,900 = 9 \,.\, 111 \,.\, 100$

$$9 = 3 \,.\, 3; \quad \begin{array}{r|l} 111 & 3 \\ 37 & \end{array} \quad 100 = 2 \,.\, 5 \,.\, 2 \,.\, 5, \quad \text{i } 99\,900 = 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 5 \,.\, 37.$$

Wprowadzając potęgi (§ 6, us. 39), możemy każdy czynnik raz tylko wypisać z właściwym wykładnikiem. Wtedy:

$$17\,050 = 2 \,.\, 5^2 \,.\, 11 \,.\, 31; \quad 99\,900 = 2^2 \,.\, 3^3 \,.\, 5^2 \,.\, 37.$$

5. Chcemy znaléść wszystkie dzielniki pewnéj liczby.

Rozłóżmy ją na czynniki piérwsze.

Dzielniki piérwsze liczby danéj są czynnikami tego roskładu. Gdy bowiém liczba dana jest podzielna przez liczbę piérwszą, to można ją wyrazić jako iloczyn téj liczby piérwszéj przez dzielnik dopełniający, który znowu roskładając taksamo daléj (us. 1), otrzymamy nasz [1]) roskład liczby danéj na czynniki piérwsze. Do tego przeto roskładu wchodzi ów dzielnik piérwszy liczby danéj.

Co się tyczy dzielników złożonych liczby danéj, to naprzód, różne czynniki piérwsze, wchodzące do roskładu takiego dzielnika na czynniki piérwsze, jako dzielniki dzielnika liczby danéj (§ 12, us. 4), są dzielnikami (piérwszymi) liczby danéj; a więc znajdują się pośród czynników roskładu liczby danéj. — Każdy zaś z tych różnych czynników piérwszych dzielnika wchodzi do roskładu liczby danéj conajmniéj tyle razy, ile do roskładu dzielnika. Jeżeli np. dzielnik liczby danéj w swym roskładzie ma czynnik piérwszy 3 dwa razy, t. j. 3 . 3, to ten dzielnik może być wyrażony jako iloczyn liczby $3 \,.\, 3 = 9$ przez pewną liczbę (§ 12, us. 1); liczba więc 9 jest dzielnikiem dzielnika liczby danéj, a zatym jest (§ 12, us. 4) dzielnikiem liczby danéj.

[1]) Us. 3.

Przeto i liczba dana może być wyrażona jako iloczyn 9 przez pewien dzielnik dopełniający. Gdy zaś w tym wyrażeniu liczby danej liczbę 9 zastąpimy przez 3.3, a dzielnik dopełniający przez jego roskład na czynniki piérwsze (us. 1), to otrzymamy roskład naszéj liczby na czynniki piérwsze [1]), pośród których są, conajmniéj, dwa czynniki 3. Gdy więc wszystkie czynniki piérwsze, na które może być rozłożony jakikolwiek dzielnik złożony liczby danéj, znajdują się pośród czynników roskładu liczby danéj, to, aby otrzymać jéj dzielniki złożone, należy z czynników jéj roskładu utworzyć różne (wszystkie możliwe) iloczyny, biorąc te czynniki po dwa, po trzy i t. d. — A więc,

Aby mićć wszystkie dzielniki liczby danéj, należy, rozłożywszy ją na czynniki piérwsze, a) *wybrać z nich wszystkie różne,* b) *utworzyć z nich wszystkie różne iloczyny, biorąc te czynniki po dwa, po trzy i t. d.,* oraz c) *dołączyć dzielnik 1* (na który roskład liczby danéj na czynniki piérwsze bespośrednio nie naprowadza).

Gdy więc chcemy wypisać wszystkie dzielniki liczby np. 540, to możemy postąpić w następujący sposób. Rozłożywszy daną liczbę na czynniki piérwsze

$$540 = 2.2.3.3.3.5$$

i napisawszy dzielnik: 1,

weźmiemy, jako dzielniki, różne czynniki piérwsze roskładu: 2, 3, 5,

i każdy dzielnik wciąż mnożyć będziemy przez wszystkie inne czynniki roskładu, nie mniejsze od największego z czynników już wchodzących do owego dzielnika; otrzymamy w ten sposób, jako dzielniki, wszystkie różne iloczyny, do których wejdą:

po dwa czynniki roskładu: 2.2, 2.3, 2.5, 3.3, 3.5,

po trzy czynniki roskładu: 2.2.3, 2.2.5, 2.3.3, 2.3.5, 3.3.3, 3.3.5,

po cztéry czynniki roskładu: 2.2.3.3, 2.2.3.5, 2.3.3.3, 2.3.3.5, 3.3.3.5,

po pięć czynników roskładu: 2.2.3.3.3, 2.2.3.3.5, 2.3.3.3.5,

sześć czynników roskładu: 2.2.3.3.3.5.

Uskuteczniwszy zaś wskazane mnożenia, otrzymujemy wszystkie dzielniki liczby danéj: 1, 2, 3, 5, 4, 6, 10, 9,..., 270, 540.

6. Możemy inaczéj tak otrzymać te dzielniki. Mamy

$$540 = 2^2 . 3^3 . 5.$$

Uwzględniając naprzód 1 i tylko czynniki 2, mamy dzielniki

$$1, 2, 2^2;$$

---

[1]) Us. 3.

Uwzględniając następnie czynniki 3, mieć będziemy dzielniki: naprzód, tylkoco wypisane (albo, inaczéj mówiąc, otrzymane z tylkoco wypisanych przez pomnożenie ich przez 1), a następnie, z nich powstałe przez pomnożenie ich oddzielnie przez 3, oddzielnie przez 3^2 i oddzielnie przez 3^3. Uwzględniając jeszcze czynnik 5, mieć będziemy dzielniki: naprzód, wszystkie dotąd otrzymane (czyli: otrzymane z dotąd wypisanych przez pomnożenie ich przez 1), a następnie, powstałe z tamtych przez pomnożenie ich przez 5. Otrzymujemy więc w ten sposób dzielniki:

$$
\begin{array}{rrr}
1\,, & 2\,, & 2^2, \\
3\,, & 2.3\,, & 2^2.3\,, \\
3^2, & 2.3^2, & 2^2.3^2, \\
3^3, & 2.3^3, & 2^2.3^3, \\
5\,, & 2.5\,, & 2^2.5\,, \\
3.5\,, & 2.3.5\,, & 2^2.3.5\,, \\
3^2.5\,, & 2.3^2.5\,, & 2^2.3^2.5\,, \\
3^3.5\,, & 2.3^3.5\,, & 2^2.3^3.5\,.
\end{array}
$$

Z tego widzimy, że wszystkie dzielniki naszéj liczby mogą być przedstawione przez składniki [1]) sumy, wypadłéj z mnożenia (§ 6, us. 16)

$$(1+2+2^2).(1+3+3^2+3^3).(1+5),$$

gdy każdy składnik piérwszéj sumy pomnożymy przez każdy drugiéj, a każdy składnik sumy tych iloczynów częściowych przez każdy składnik trzeciéj sumy (i t. d., gdyby było więcéj sum).

Dzielników tych będzie tyle, ile otrzymamy z pomnożenia przez siebie powiększonych o jedność wykładników wszystkich (różnych) czynników roskładu. Tu np. mamy dzielników

$$(2+1).(3+1).(1+1)=24,$$

Sumę ich przedstawia oczywiście iloczyn [2])

$$(1+2+2^2).(1+3+3^2+3^3).(1+5)=1680.$$

Jeżeli liczba równa się sumie wszystkich swoich dzielników, mniejszych od niéj saméj [3]), to nazywa się **liczbą doskonałą** [4]). Początkowe liczby doskonałe są następujące:

---

[1]) Czyli, wyrażając się, jak w algiebrze, — przez oddzielne wyrazy tego iloczynu.

[2]) Każda z sum, wchodzących jako czynnik do tego iloczynu, może być wyrażona jako iloraz z podzielenia różnicy jednakowych potęg dwu liczb, przez różnicę piérwszych potęg tychże liczb. Gdy więc wogóle, w przypuszczeniu, że a, b, c, są różnymi od siebie liczbami piérwszymi, mamy np. liczbę

$$a^m.b^n.c^p,$$

to suma jéj

$$(m+1).(n+1).(p+1)$$

dzielników jest

$$(1+a+a^2+\ldots+a^m).(1+b+b^2+\ldots+b^n).(1+c+c^2+\ldots+c^p)=$$
$$=\frac{a^{m+1}-1}{a-1}.\frac{b^{m+1}-1}{b-1}.\frac{c^{p+1}-1}{c-1}.$$

[3]) T. j. z wyłączeniem dzielnika równego liczbie danéj.

[4]) Euklides, ks. VII, def. 22.

$$6=2.3,\quad (1+2).(1+3)-6=1+2+3=6;$$
$$28=2^2.7,\quad (1+2+2^2).(1+7)-28=1+2+4+7+14=28;$$
$$496=2^4.31,\quad (1+2+2^2+2^3+2^4).(1+31)-496=$$
$$=1+2+4+8+16+31+62+124+248=496.$$

Wszystkie dotąd znane liczby doskonałe dadzą się przedstawić zapomocą wzoru

$$(2^m-1).2^{m-1}$$

przy założeniu, że 2^m-1 jest liczbą piérwszą. Łatwo dowiéść, że liczba, którą ten wzór przedstawia, jest doskonałą [1]).

Ponieważ 2^m-1 jest liczbą piérwszą [2]), zatym suma wszystkich dzielników liczby, przedstawionéj przez wzór powyższy, jest [3])

$$(1+[2^m-1]).(1+2+2^2+\ldots+2^{m-1})=2^m.(2^m-1),$$

a odejmując od niéj dzielnik, równy liczbie danéj, otrzymamy

$$2^m.(2^m-1)-(2^m-1).2^{m-1}=(2^m-1).2^{m-1},$$

czego należało dowiéść. Liczbami więc doskonałymi [4]) są:
$(2^2-1).2=6$; $(2^3-1).2^2=28$; $(2^5-1).2^4=496$; $(2^7-1).2^6=8128$ i t. d.

Jeżeli suma wszystkich dzielników jednéj liczby, od niéj mniejszych, równa się drugiéj liczbie, i nawzajem, to takie dwie liczby [5]) nazywają się **liczbami zaprzyjaźnionymi** [6]). Np.

$$220=2^2.5.11;\quad (1+2+2^2).(1+5).(1+11)-220=284, \text{ a}$$
$$284=2^2.71;\quad (1+2+2^2).(1+71)-284=220;$$

zatym liczby 220 i 284 są [7]) parą liczb zaprzyjaźnionych. Inną parę tworzą liczby [8])

17296 i 18416,

inną jeszcze liczby [9])

9363584 i 9437056

i t. d. [10]).

---

1) Euklides już dowiódł téj własności, którą wysłowił (ks. IX, pod 36) w ten sposób: biorąc tyle, od 1 zacząwszy, liczb, powstających jedna z drugiéj wskutek podwojenia, żeby ich suma stała się liczbą piérwszą, miéć będziemy, jako iloczyn téj sumy przez ostatnią z owych liczb, liczbę doskonałą.

2) Ma więc dzielniki: 1 i 2^m-1.

3) Mnożąc różnicę $2-1$ (to jest 1) przez liczbę, przedstawioną przez sumę $1+2\ldots+2^{m-1}$ (§ 6, us. 15, 14), otrzymamy $1+2+\ldots+2^{m-1}=2^m-1$.

4) Badaniem własności liczb doskonałych zajmował się u nas w wieku XVII Jan Brożek (Broscius). Zob. na końcu książki: **Przypisek II.**

5) Możnaby je tak określić: dwie liczby takie, iż suma wszystkich (bez wyłączenia żadnego) dzielników każdéj z nich oddzielnie jest równa sumie obu tych liczb, tworzą parę liczb zaprzyjaźnionych.

6) Piérwszy na nie miał zwrócić uwagę Pitagoras.

7) Ta tylko para była znana starożytnym.

8) Tę parę ogłosił Brożek w roku 1652.

9) Tę parę ogłosił Schooten w roku 1656.

10) Zob. na końcu książki: **Przypisek II.**

7. Liczba jest wielokrotną każdego ze swych dzielników (§ 12, us. 3); tak np. liczba 540 jest wielokrotną każdego ze swych dzielników, np. 90, 60, 270. Inaczéj możemy powiedziéć, że liczba 540 jest spólną wielokrotną liczb 90, 60, 270.

Spólną wielokrotną kilku liczb danych nazywamy liczbę, podzielną przez każdą z liczb danych.

Dla jakichkolwiek liczb danych istnieje nieskończenie wiele spólnych wielokrotnych, gdyż, mnożąc którąkolwiek ich wielokrotną przez jakąkolwiek liczbę (§ 12, us. 3), otrzymamy również wielokrotną liczb danych (§ 12, us. 4). Jedna atoli z nich wszystkich jest najmniejszą spólną wielokrotną liczb danych.

Najmniejszą spólną wielokrotną kilku liczb danych nazywamy najmniejszą z liczb podzielnych jednocześnie przez każdą z liczb danych.

Nadal, przez skrócenie, zamiast: najmniejsza spólna wielokrotna, pisać często będziemy: nsw.

8. Jeżeli mamy znaléść nsw.-ą np. liczb 7056, 1620, 119 070, to możemy, rozłożywszy je na czynniki piérwsze,

$$7056 = 2.2.2.2.3.3.7.7,$$
$$1620 = 2.2.3.3.3.3.5,$$
$$119070 = 2.3.3.3.3.3.5.7.7,$$

tak rozumować. Ponieważ każda z liczb danych jest dzielnikiem liczby szukanéj, więc (us. 5) wszystkie czynniki piérwsze każdéj liczby wchodzą do roskładu na czynniki piérwsze liczby szukanéj. Tak np., czynników 2 wchodzi do roskładu piérwszéj liczby cztéry, drugiéj dwa, trzeciéj jeden, więc do roskładu liczby szukanéj wejdą cztéry czynniki 2, bo gdyby ich było mniéj, to nie możnaby z czynników jéj roskładu utworzyć iloczynu, któryby przedstawiał jéj dzielnik 7056. Podobnież dostrzeżemy, że do roskładu liczby szukanéj wejdzie pięć czynników 3, jeden czynnik 5 i dwa czynniki 7. Z czynników tego iloczynu

$$2.2.2.2.3.3.3.3.3.5.7.7 = 952560$$

można utworzyć częściowe iloczyny, które przedstawią (us. 5) liczby dane 7056, 1620, 119 070; więc ten iloczyn przedstawia spólną wielokrotną liczb danych. Przedstawia on nadto nsw.-ą liczb danych, gdyż opuszczenie w nim choćby jednego któregokolwiek czynnika nie dozwoliłoby na utworzenie z pozostałych czynników jednéj lub więcéj liczb danych. (Tak np., gdybyśmy opuścili czynnik 2, nie moglibyśmy z pozostałych utworzyć iloczynu równego liczbie 7056; gdybyśmy zaś opuścili czynnik 5, nie utworzylibyśmy z pozostałych ani liczby 1620, aniteż 119 070.) Możemy więc powiedziéć:

Aby odnaléść najmniejszą spólną wielokrotną kilku liczb danych, można, rozłożywszy je na czynniki piérwsze, każdy z czynników wziąć tyle razy, ile razy on najwięcéj wchodzi do któregokolwiek z tych roskładów, *a iloczyn tych czynników przedstawi najmniejszą spólną wielokrotną liczb danych.*

(Wykonywając mnożenie wybranych czynników, należy zaczynać od większych; § 6, us. 31.)

Gdybyśmy mieli znaléść nsw.-ą np. liczb

7056, 810, 1620, 119070, 11907, 90,

to, z uwagi, że liczby 810 i 90 są dzielnikami liczby 1620, a liczba 11907 jest dzielnikiem liczby 119070, możemy przy odszukiwaniu nsw.-éj nie zważać na te liczby 810, 90, 11907, gdyż 810 i 90, jako dzielniki liczby 1620, a 11907, jako dzielnik liczby 119070, są dzielnikami (§ 12, us. 4) spólnéj wielokrotnéj liczb 1620 i 119070, a więc odnaleziona nsw. liczb 7056, 1620 i 119070 jest téż nsw.-ą wszystkich danych tu sześciu liczb.

9. Jeżeli tak przedstawimy te rozkłady:

$$7056 = 2^4 . 3^2 . 7^2,$$
$$1620 = 2^3 . 3^4 . 5,$$
$$119070 = 2 . 3^5 . 5 . 7^2,$$

to nsw. $= 2^4 . 3^5 . 5 . 7^2$. A więc *aby znaléść najmniejszą spólną wielokrotną kilku liczb, można, rozłożywszy je na czynniki piérwsze, wziąć iloczyn wszystkich różnych czynników, wchodzących do owych rozkładów, nadając każdemu wykładnik największy z tych, które ów czynnik w tych rozkładach posiadał.*

10. *Gdy dwie liczby są piérwsze względem siebie, to ich iloczyn jest ich najmniejszą spólną wielokrotną* [1]), gdyż te liczby nie mają spólnego dzielnika prócz jedności; czynniki więc piérwsze, na które może się rozłożyć jedna z tych liczb, są wszystkie różne od czynników rozkładu drugiéj, a więc wszystkie czynniki tak jednéj, jak i drugiéj z nich wejdą do rozkładu nsw.-éj. Np.

$$28 = 2 . 2 . 7; \quad 45 = 3 . 3 . 5;$$
$$\text{nsw.} = 2 . 2 . 3 . 3 . 5 . 7 = (2 . 2 . 7) . (3 . 3 . 5) = 28 . 45.$$

Gdy więc dostrzeżemy, że dwie liczby, których nsw.-ą mamy znaléść, są piérwsze względem siebie, to dla otrzymania ich nsw.-éj należy wprost je przez siebie pomnożyć.

Podobnież, *gdy liczby dane są takie, że każde dwie z nich są piérwsze względem siebie, to ich iloczyn jest ich najmniejszą spólną wielokrotną.* Wszystkie bowiém czynniki rozkładu którejkolwiek z danych liczb są różne od czynników rozkładu każdéj z pozostałych. Tak więc:

nsw. 35, 8, 27, 121 jest 35 . 8 . 27 . 121.

Opiérając się na dowiedzionym w § 14, us. 16, łatwo możemy ten przypadek sprowadzić do poprzedniego. Nsw. liczb 35 i 8, jako liczb piérwszych względem siebie, jest 35 . 8. Ten iloczyn 35 . 8, liczb piérwszych względem

---

[1]) Euklides, ks. VII, pod. 36, przyp. 1.

27, jest liczbą piérwszą względem 27; zaś nsw. dwu liczb 35.8 i 27, jako liczb piérwszych względem siebie, jest 35.8.27, i t. d.

11. Wszystkie spólne wielokrotne liczb danych powstać mogą z ich nsw.-éj wskutek pomnożenia téj ostatniéj przez pewne liczby. W roskładzie bowiém jakiéjkolwiek spólnéj wielokrotnéj na czynniki piérwsze znajdują się wszystkie czynniki piérwsze roskładu nsw.-éj (gdyż, wbraku któregokolwiek, owa liczba nie byłaby wielokrotną jednéj lub kilku liczb danych; us. 8). Innymi słowy: spólne wielokrotne liczb danych sa wielokrotnymi najmniejszéj spólnéj wielokrotnéj tych liczb. Albo jeszcze: *liczby podzielne przez kilka liczb są podzielne przez ich najmniejszą spólną wielokrotną* [1]). A więc np.

Liczby podzielne jednocześnie przez 2 i 3 są podzielne przez 6.

Liczby podzielne jednocześnie przez 4 i 3 są podzielne przez 12.

Liczby podzielne jednocześnie przez 3 i 5 są podzielne przez 15.

Liczby podzielne jednocześnie przez 2, 3 i 7 są podzielne przez 42

I t. d. *).

12. Ponieważ różne od 1 dzielniki liczby są (us. 5) albo oddzielnymi czynnikami roskładu liczby na czynniki piérwsze, albo iloczynami tych czynników, przeto różne od jedności spólne czynniki kilku liczb są albo oddzielnymi czynnikami wchodzącymi jednocześnie do wszystkich roskładów tych liczb, albo iloczynami takich czynników. A więc największy spólny dzielnik kilku liczb jest iloczynem wszystkich czynników, jednocześnie znajdujących się we wszystkich roskładach liczb danych na czynniki piérwsze. Tak np., gdy

$$3150 = 2.3.3.5.5.7,$$
$$1800 = 2.2.2.3.3.5.5,$$
$$4950 = 2.3.3.5.5.11,$$

to nsd. $= 2.3.3.5.5 = 450$.

Aby znaléść największy spólny dzielnik kilku liczb, można, rozłożywszy je na czynniki piérwsze, wziąć iloczyn wszystkich czynników, wchodzących jednocześnie do każdego z tych roskładów.

Jeżeli zaś te roskłady tak przedstawimy:

$$3150 = 2.3^2.5^2.7;\quad 1800 = 2^3.3^2.5^2;\quad 4950 = 2.3^2.5^2.11,$$

to nsd. $= 2.3^2.5^2$, t. j., *aby znaléść największy spólny dzielnik kilku liczb, można, rozłożywszy je na czynniki piérwsze, wziąć iloczyn różnych czynników, spólnych wszystkim roskładom, nadając każdemu czynnikowi wykładnik najmniejszy z tych, które on w tych roskładach posiadał.*

13. Najmniejsza spólna wielokrotna dwu liczb: $1800 = 450.4$ i $4950 = 450.11$, jest (§ 7, us. 9)

[1]) Euklides, ks. VII, pod. 37 (por. także ks. IX, pod. 14).

*) Liczby podzielne przez 6 i 4 są podzielne przez 12; liczby podzielne przez 4 i 8 są podzielne przez 8, i t. d.

$2.2.2.3.3.5.5.11 = 450.4.11 = (450.4.450.11):450 = (1800.4950):450$, t. j. *najmniejsza spólna wielokrotna dwu liczb równa się ich iloczynowi, podzielonemu przez największy spólny dzielnik tych liczb* [1]).

Mając więc nsd. dwu liczb, można, dla znalezienia ich nsw.-éj, pomnożyć jednę z tych liczb przez dzielnik drugiéj, dopełniający nsd. [2]).

Gdy mamy kilka liczb danych, to [3]), znalazszy w ten sposób nsw.-ą dwu liczb, znajdziemy ją dla liczby tylkoco otrzymanéj i dla trzeciéj z liczb danych, i t. d.

Jeżeli więc tu nsd. odnajdywać będziemy zapomocą kolejnego dzielenia (§ 14, us. 7), to, według powyższych wskazań, mamy możność wyznaczenia nsw.-éj kilku liczb danych, bez roskładania ich na czynniki piérwsze.

(Zadania arytmetyczne. § 16.)

---

1) Możnaby tego wprost dowieść ogólnie przed wprowadzeniem roskładu na czynniki piérwsze, opierając się na prawdach dowiedzionych w § 14, w sposób podobny do użytego w § 14 us. 6 (t. j. dowodząc, że wszystkie spólne wielokrotne liczb 1800 i 4950 są wielokrotnymi liczby 450, 4, 11, i nawzajem). Szczególnym tego przypadkiem przedstawi się własność dowiedziona tu w us. 10.

2) Euklides, ks. VII, pod. 36, przyp. 2.

3) Podobnie, jak w § 14, us. 10.

ROZDZIAŁ VI.

LICZBY UŁAMKOWE.

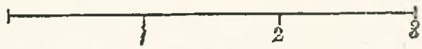
§ 16. UZUPEŁNIENIE NAUKI O DZIELENIU LICZB CAŁKOWITYCH, CZYLI: O POWSTAWANIU UŁAMKA.

1. a. Pewna osoba kupiła 23 łokcie taśmy i zapłaciła za nie 4 złote; za ile łokci zapłaciła jeden złoty?

Ponieważ [1]) za 4 złote kupiła 23 łokcie, więc za jeden złoty kupiła 4 razy mniéj niż 23 ł., t. j. 4-ą część 23-ch łokci; trzeba więc 23 ł. zmniejszyć 4 razy, czyli (§ 7, us. 7, 8) 23 ł. rozłożyć na 4 części równe i wyznaczyć jednę taką część. Wykonajmy to dzielenie:

$$\begin{array}{r|l} 23\ \text{ł.} & 4 \\ \cline{2-2} -20 & 5\ \text{ł.} \\ \cline{1-1} 3\ \text{ł.} & \end{array}$$

Ta osoba zatym (§ 7, us. 10, 11) za jeden złoty kupiła 5 łokci wraz z tym [2]), co wypadnie, gdy jeszcze 3 ł. : 4, t. j. gdy 3 ł. rozłożymy na 4 części równe i weźmiemy jednę taką część. Jeżeli łokieć przedstawimy tu kréską 

to trzy łokcie będą 

Podzielmy je na 4 części równe 

i weźmy jednę taką część 

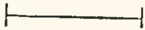
Owóż, tak wielka właśnie długość, wzięta razem z 5-ciu łokciami, (któreto 5 łokci są ilorazem niezupełnym) przedstawi nam iloraz zupełny, t. j. będzie rozwiązaniem naszego zadania.

---

1) «Na początku téj części ostrzec mi przychodzi Nauczycielów, aby szczególną na to baczność mieli, żeby ich uczniowie, nie napamięć i za samymi tylko regułami idąc, uczyli się rachunku na liczbach łamanych, ale przy każdym przykładzie, im podanym, zastanawiali się i uważali, jakby ich sam rozum do tego, a nie innego sposobu rachowania prowadził, choćby żadnych prawideł na to nie było, które zapewne nie skądinąd się wzięły, tylko z pilnego uważania i rostrząsania natury każdego w szczególności działania.» *Arytm. dla sz. nar.*, str. 106.

2) Gdyby uczeń chciał pozostałą część ilorazu wyrazić tu w calach, to można zwrócić jego uwagę, że tu nie o to idzie, i stwierdzić to zamianą tego zadania na inne, w którymby dzielnik był np. 5. «Choćby ten łokieć kto chciał obórcić na stopy, ćwierci, lub jakiekolwiek inne mniejsze części, na które łokieć zwykł się dzielić, nie natrafiłby jednak na liczbę części łokcia oznaczającą, którąby liczba 5 zupełnie i bez reszty dzieliła.» *Arytm. dla sz. nar.*, str. 107.

Jak tę długość, którą trzeba brać razem z 5-u łokciami dla przedstawienia ilorazu zupełnego, wyrazić bespośrednio zapomocą naszéj jednostki, łokcia?

Zważmy, że jeżeli nasz łokieć 

podzielimy na 4 części równe 

to (ponieważ na 4 części teraz dzielimy *jeden* łokiéć, a poprzednio dzieliliśmy *trzy* łokcie) każda taka czwarta część łokcia jest *trzy razy mniejsza*, niż czwarta część 3-ch łokci; aby więc miéć tyleż, co poprzednio, trzeba już wziąć nie jednę, ale *trzy* części czwarte [1]) łokcia:

Widzimy więc, że wypadek z podzielenia 3 ł.:4 możemy wyrazić, jako 3 czwarte części łokcia. Zwykle mówi się krócéj: trzy-czwarte łokcia. — Dzieląc liczby przez siebie, otrzymujemy liczbę, iloraz. Więc i trzy-czwarte łokcia jest liczbą, a mianowicie: trzy-czwarte łokcia jest liczbą mianowaną, a trzy-czwarte — liczbą oderwaną.

Liczba taka nazywa się ułamkiem.

Jak napisać tę liczbę trzy-czwarte? — Co tu mamy? 4-te części. Ile ich jest? 3. — Widzimy więc, że mamy tu części jedności, które się nazywają: 4-te; podobnie, mogłyby być i inne części jedności, które się nazywać będą: 5-te, 6-te, 11-te i t. d. Pisząc zatym naszę liczbę: trzy-czwarte, musimy nazwę tych części wyraźnie zaznaczyć. W przedstawieniu więc piśmiennym liczby: trzy-czwarte, wejdzie liczba 4, jako wskazanie nazwy, miana, tych części; tę liczbę nazywamy mianownikiem ułamka. Części tych jest tu 3. Ta liczba 3, jako wynik odbytego policzenia czwartych części jedności, nazywa się licznikiem ułamka i również wejść winna do piśmienneego przedstawienia naszéj liczby trzy-czwarte, gdyż mogłaby być inna liczba, np. dwie-czwarte. Ułamek tak się pisze: nad mianownikiem piszemy licznik, oddzieliwszy je od siebie poziomą *) kréską. Zatym: trzy-czwarte napiszemy: $\frac{3}{4}$

Gdy zaś mamy przeczytać napisany ułamek, to, wymówiwszy

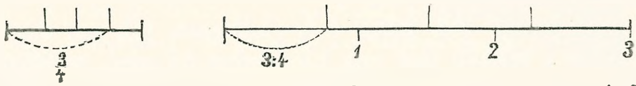
---

1) Wrazie potrzeby można to jeszcze dostępniéj przedstawić, układając zadania odpowiednie, np. z 3-ch łokci wstążki zrobiono 4 jednakowe kokardki; jak, mając łokieć wstążki, odciąć tyle, ile potrzeba na jednę taką kokardkę? albo: 4-éj robotnicy, mają wieczorem oprócz wynagrodzenia pieniężnego, otrzymać razem 3 bochenki chleba; jeden robotnik ukończył swą robotę w południe i chce odéjść; dają mu zapłatę pieniężną, lecz chleb jeszcze nieupieczony — jest jednak bochenek dawniejszego chleba; czy można i jak z tego bochenka wydzielić robotnikowi odchodzącemu jego porcyją chleba? i t. d.

*) Pisze się także często kréskę pochyłą od prawéj ku lewéj, kładąc licznik z lewéj u góry, a mianownik z prawéj u dołu, jak np. $^3/_4$. Niedogodne to jest jednak przy większych rachunkach z ułamkami.

liczbę znajdującą się w liczniku (jeżeli odpowiedni liczebnik główny odmienia się przez rodzaje) w rodzaju żeńskim (gdyż domyśla się wyrazu: część, lub: części), wypowiadamy mianownik jako liczebnik porządkowy, zgadzając go z wymówionym już licznikiem. Jednak $\frac{1}{2}$ czyta się także p ó ł, a $\frac{1}{4}$ ć w i e r ć.

Wracając do naszego zadania, widzimy, że choć inne jest postępowanie przy dzieleniu 3 łokci przez 4, niż przy odnajdywaniu $\frac{3}{4}$ łokcia,



to jednak wypadek jest ten sam. Dlatego możemy powiedzieć, że z rozłożenia 3 ł. na 4 części równe otrzymujemy, jako jednę taką część, $\frac{3}{4}$ łokcia,

$$3\text{ ł.} : 4 = \frac{3}{4}\text{ ł.},$$

a tymsamym, że z rozłożenia 23 ł. na 4 części równe otrzymujemy, jako jednę taką część, 5 ł. $+ \frac{3}{4}$ ł. Zwykle nie pisze się tu znaku $+$, ale wprost: $5\frac{3}{4}$ ł. (a mówi się: pięć *i* trzy-czwarte łokcia),

$$23\text{ ł.} : 4 = 5\frac{3}{4}\text{ ł.}$$

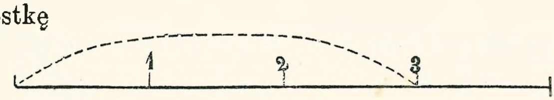
Odpowiédź. Ta osoba za złoty kupiła $5\frac{3}{4}$ łokcia taśmy.

b. Pewna osoba kupiła 23 łokcie taśmy, płacąc złoty za 4 łokcie; ile złotych zapłaciła za wszystkie 23 łokcie taśmy?

Ponieważ za 4 ł. płaciła złoty, więc za 23 ł. zapłaciła tyle złotych, ile razy 4 ł. mieści się w 23 ł. Trzeba zatym 23 ł. podzielić przez 4 ł., a otrzymana liczba oderwana odpowie liczbie złotych (§ 7, us. 7, 10).

$$\begin{array}{r|l} 23\text{ ł.} & 4\text{ ł.} \\ \cline{2-2} -20 & 5 \\ \cline{1-1} 3\text{ ł.} & \end{array}$$

Dowiedzieliśmy się, że 4 ł. mieści się w 23 ł. więcéj niż 5 razy, a mniéj niż 6 razy. 5 jest ilorazem niezupełnym, gdyż jeszcze potrzeba 3 ł. : 4 ł. Zapłaciła zatym 5 złotych i prócz tego tyle, ile się należy za 3 ł., gdy się płaci złoty za 4 ł. Ponieważ jeden złoty należy się za 4 ł., więc za 3 ł. należy się mniéj niż jeden złoty. Należéć się będzie taka część złotego, jaką częścią 4-ch łokci jest 3 łokcie. Aby zaś znaléść, jaką częścią 4-ch ł. jest 3 ł., trzeba za jednostkę, którą mamy wymierzyć 3 łokcie, przyjąć 4 łokcie. Mając więc łokieć |————| nakréślimy linią, przedstawiającą 4 łokcie, t. j. naszę jednostkę



Wtedy możemy 3 ł. uważać jako powstałe z téj linii (jednostki), wskutek podzielenia jéj na 4 części równe i oddzielenia 3-ch takich części. Więc 3 ł. przedstawiają $\frac{3}{4}$ téj linii, t. j. 3 ł. stanowią $\frac{3}{4}$ części 4-ch łokci (jednostki). A zatym, wymierzając 3 łokcie 4-ma łokciami, otrzymujemy (§ 1, us. 1) liczbę $\frac{3}{4}$. Widzimy przeto, że

$$3\text{ ł.} : 4\text{ ł.} = \frac{3}{4}.$$

Liczba $\frac{3}{4}$ oznacza tu tylko, jaką część 4-ch ł. przedstawiają 3 ł., t. j. wynika z podzielenia 3 ł. przez 4 ł. (taksamo, jak np. z podzielenia 3 funtów przez 4 funty); jest ona niezależną od tego, w jakich jednostkach są wyrażone liczby mianowane, które dzielimy przez siebie, jest liczbą oderwaną (§ 7, us. 7) — jest to więc $\frac{3}{4}$ *jedności*. Skutkiem tego

$$23\text{ ł.} : 4\text{ ł.} = 5\frac{3}{4}.$$

Jeżeli mówimy, że zapomocą dzielenia 23 ł. : 4 ł. dowiadujemy się, ile razy 4 ł. mieści się w 23 ł., to wypadnie powiedzieć: mieści się $5\frac{3}{4}$ raza [1]). Mówiliśmy zaś, że ta osoba zapłaciła tyle złotych, ile razy 4 ł. mieści się w 23 ł.; mieści się $5\frac{3}{4}$ raza, a więc:

Odpowiédź. Ta osoba zapłaciła za kupione 23 łokcie taśmy $5\frac{3}{4}$ złotego [2]). —

Oczywista już teraz, że gdy mamy dzielenie liczb oderwanych w przypadku, gdy dzielna nie jest podzielną (§ 7, us. 11) przez dzielnik, np. 23 : 4, to (objaśniając czyto jak pod a., czytéż jak pod b.) otrzymamy

$$23 : 4 = 5\frac{3}{4}.$$

Widzimy więc, że, wskutek wprowadzenia ułamków, jesteśmy w stanie w każdym przypadku wyznaczyć dokładnie iloraz z podzielenia dwu jakichkolwiek liczb całkowitych.

2. Wyrażenia, używane w arytmetyce, powstały przy wykonywaniu zadań najprostszych, to jest takich, w których liczby tak dane, jak i wypadające z uskutecznionych działań, były całkowite. Dlatego ma miejsce niekiedy niezgodność znaczenia pewnego wyrażenia w arytmetyce ze znaczeniem jego w zwykłym użyciu, a mia-

---

[1]) Mówią niekiedy niewłaściwie: $5\frac{3}{4}$ raz*y* (chociaż: $5\frac{3}{4}$ złotego, a nie: złotych). Wszakże nie można powiedzieć półtora raz*y*?; nie można więc uniknąć używania formy raz*a*.

[2]) Podobnie, gdy mamy np. 12 łutów wymierzyć ciężarem funta, czyli ciężarem 32 łutów, to otrzymamy taką część funta, jaką częścią 32-u łutów jest 12 łutów. Otrzymamy liczbę oderwaną $\frac{12}{32}$, czyli $\frac{3}{8}$. A więc 12 łutów jest $\frac{3}{8}$ funta (§ 1, us. 3).

nowicie, znaczenie, w jakim się je stosuje w arytmetyce, jest często obszerniejsze. Chociaż więc w powszednim użyciu wyraz «razy» stosuje się tylko do liczb całkowitych, to jednak powszechnie przyjęto, iż się go używa i wtedy, gdy wypadnie, jak np. w powyższym zadaniu, powiedzieć: 4 łokcie mieści się w 23 łokciach $5\frac{3}{4}$ raza.

3. Gdy dzielimy dwie liczby oderwane przez siebie, to zawsze, choćby dzielna nie była podzielną przez dzielnik, otrzymamy iloraz. Jeżeli zaś zadanie pewne doprowadza nas do dzielenia, to niezawsze ułamek w ilorazie przedstawia wprost zrozumiałą [1]) odpowiedź na pytanie; nieraz nawet ten ułamek może wskazywać, że zadanie jest niemożliwe do rozwiązania, a niekiedy, że ono jest tylko niejasno postawione.

Weźmy np. znane zadanie o kołach zębatych. Wiadomo, że jeżeli zęby dwu kół zębatych o siebie się zaczepiają, to wczasie ruchu koło, mające zębów więcéj (a więc większe), tyle razy wolniéj się obraca od drugiego, ile razy liczba jego zębów jest większa od liczby zębów koła mniejszego. Zadanie: ktoś, mając koło zębate o 100 zębach, poleca dorobić dla połączenia z nim drugie koło, któreby obracało się dokładnie 8 razy prędzéj; ile ono ma miéć zębów? Ponieważ to koło ma się obracać 8 razy prędzéj, więc ma miéć 8 razy mniéj zębów. $100\text{ z.} : 8 = 12\frac{1}{2}$ z. Ten ułamek wskazuje, że zadanie jest niemożliwe.

Weźmy teraz takie zadanie: Piotr i Paweł strzelali do tarczy i dali razem 10 strzałów; wiemy, że po jednym strzale Piotra Paweł daje zawsze dwa strzały; ile razy strzelał Piotr? Tu wypadłoby rozumować w ten sposób. Ponieważ 1 strzał Piotra przypada na 2 strzały Pawła, t. j. z trzech razem przez obu danych strzałów jeden jest Piotra, więc Piotr strzelił tyle razy, ile razy 10 strzałów ich obu jest większe od 3 strzałów, również przez obu danych. $10\text{ s.} : 3\text{ s.} = 3\frac{1}{3}$, t. j. Piotr dał $3\frac{1}{3}$ strzałów, co niéma sensu. Zadanie jednak jest możliwe — nie jest ono tylko należycie wysłowione, t. j. niedomówiono w nim, jak oni zaczynali strzelać. Jeżeliby np. dodać: Paweł zaczynał i po dwu jego strzałach Piotr dał swój piérwszy strzał, albo: Paweł zaczynał i po jednym jego strzale Piotr dał swój piérwszy strzał, to 10-y strzał należał do Pawła, a Piotr strzelał $(10 - 1)\text{ s.} : 3\text{ s.} = 3$ razy; jeżeliby zaś było powiedziane: zaczynał Piotr, to 10-y strzał należał do Piotra i Piotr strzelał $[(10 - 1)\text{ s.} : 3\text{ s.}] + 1 = 4$ razy.

Dzielenia zaś liczb oderwanych, odpowiadające tak piérwszemu zadaniu, niemożliwemu, jak i drugiemu, niedość jasno wysłowionemu, prowadzą zawsze do dokładnych i zrozumiałych wypadków liczebnych,

$$100 : 8 = 12\frac{1}{2}, \qquad 10 : 3 = 3\frac{1}{3},$$

---

[1]) Np. ułamki osób w rachunkach statystycznych.

chociaż otrzymane ułamki wskazują, że te ilorazy nie odpowiadają pojęciom rzeczywistym, do których się one w owych zadaniach odnoszą.

---

§ 17. O LICZBACH UŁAMKOWYCH WOGÓLE.

1. Widzieliśmy (§ 16, us. 1), że ułamek $\frac{3}{4}$ powstał z jedności, wskutek rozłożenia jéj na 4 równe części i zebrania 3-ch takich części. Podobnie, $\frac{5}{8}$ powstało z rozłożenia jedności na 8 równych części i wzięcia 5-u takich części, $\frac{1}{7}$ (jedna-siódma) powstała z rozłożenia jedności na 7 równych części i wzięcia jednéj z nich i t. d. Powiemy więc ogólnie [1]:

Ułamkiem nazywamy jednę lub więcéj razem wziętych części, otrzymanych z rozłożenia jedności na części równe. Mianownik ułamka wskazuje, na ile równych części jedność została rozłożoną, a licznik — ile takich części wzięto.

2. W przeciwstawieniu ułamkom, jedność i liczby, będące skupieniem samych tylko jedności, np. 5, 24, nazywamy liczbami całkowitymi (§ 1, us. 5).

Liczbę taką, jak np. $5\frac{3}{4}$, t. j. przedstawiającą skupienie jedności i jéj części, powstałych z jedności wskutek rozłożenia jéj na części równe, nazywamy całkowitą z ułamkiem.

Tak ułamek, jak i całkowitą z ułamkiem nazywamy wogóle liczbą ułamkową.

W arytmetyce *) *mamy do czynienia z liczbami całkowitymi i ułamkowymi.*

3. Oczywiście, że jeżeli jedność rozłożymy np. na 5 części równych i weźmiemy tych piątych części pięć, t. j. $\frac{5}{5}$, to otrzymamy znowu naszę jedność; jest więc $1=\frac{5}{5}$. Podobnie $1=\frac{7}{7}$ i t. d. A więc *jedność możemy przedstawiać w postaci ułamka, którego licznik jest równy mianownikowi.*

Taksamo liczbę np. 3 możemy przedstawić, jako 3 razy po 5 piątych jedności, czyli 15 piątych, $\frac{15}{5}$, albo np. jako $\frac{21}{7}$ i t. d. Z tego

---

[1] Częścią jedności jest wogóle wszelka liczba mniejsza od jedności, lecz gdy mówimy np. 7-ma część jedności, to rozumiemy część jedności, którą otrzymujemy, roskładając jedność na 7 *równych* części. W arytmetyce przez «ułamek» rozumieć należy tylko taką część jedności, którą z téj jedności otrzymać można przez rozłożenie jéj na części równe i, mówiąc wogóle, przez skupienie razem pewnéj ilości tych części — a nie np., część jedności z tążjednością niespółmierną. — Już Euklides (ks. VII, def. 3 i 4) tak pojmował ułamek.

*) § 1, us. 8.

widzimy, że gdy chcemy liczbę 3 przedstawić w postaci ułamka z pewnym mianownikiem, to należy za licznik wziąć liczbę 3 razy większą od mianownika, $3=\frac{5\cdot3}{5}=\frac{15}{5}$, $3=\frac{7\cdot3}{7}=\frac{21}{7}$ i t. d., t. j. *całkowitą można przedstawić w postaci ułamka z dowolnym mianownikiem, biorąc za jego licznik iloczyn mianownika przez tę całkowitę.*

Gdy mamy całkowitą z ułamkiem, np. $5\frac{3}{4}$, to, wyrażając całkowitą także w 4-ych częściach jedności, mieć ich będziemy $4.5=20$; zamiast więc mówić: 5 i $\frac{3}{4}$, możemy powiedzieć: dwadzieścia-czwartych i trzy-czwarte. Mamy więc tu 4-e części, a tych 4-ych części mamy 20 i 3, czyli 23; a więc

$$5\frac{3}{4}=\frac{4\cdot5+3}{4}=\frac{23}{4}.$$

Wyraziliśmy tu całkowitą z ułamkiem w postaci ułamka, mającego za mianownik mianownik ułamka danego; nazywa się to włączeniem całkowitéj z ułamkiem w ułamek. A więc, *aby całkowitą z ułamkiem włączyć w ułamek, należy za mianownik ułamka wziąć mianownik ułamka danego, a za licznik sumę iloczynu mianownika przez całkowitą i licznika ułamka danego.*

Przywykliśmy pojmować, że «ułamek» czegoś jest od tego «czegoś» mniejszy. Dlatego liczbę nie mniejszą od jedności (t. j. jedność, lub liczbę od jedności większą), wyrażoną w postaci ułamka, nazywamy ułamkiem niewłaściwym. W przeciwstawieniu temu, ułamek mniejszy od jedności nazywamy ułamkiem właściwym. Więc np. liczby $\frac{5}{7}$, $\frac{1}{8}$ i t. d. są ułamkami właściwymi, gdy tymczasem liczby $\frac{7}{7}$, $\frac{128}{5}$, $\frac{44}{11}$ i t. d. są ułamkami niewłaściwymi.

Ułamek niewłaściwy ma licznik nie mniejszy od mianownika.

Widoczna, że ułamek niewłaściwy, przedstawiający czyto całkowitą z ułamkiem, czytéż całkowitą, jest liczbą ułamkową (us. 2); możemy więc wogóle powiedzieć, że: *liczbą ułamkową nazywamy liczbę wyrażoną w częściach otrzymanych z rozłożenia jedności na części równe.* Liczba np. 4 jest całkowitą; dopóki jednak rozważamy ją w postaci np. $\frac{44}{11}$, dopóty jest ona liczbą ułamkową, gdyż jest wyrażona przy pomocy 11-ych części jedności.

Gdy mówimy «całkowita z ułamkiem», to przez ułamek rozumiemy wtedy zawsze ułamek właściwy.

4. Gdy mamy ułamek niewłaściwy, to, oczywiście, możemy go wyrazić czyto jako całkowitą, czytéż jako całkowitą z ułamkiem Tak gdy mamy np. $\frac{49}{11}$, to tu z 49-u jedenastych, każde 11-cie przedstawiają 1; będzie więc tyle jedności, ile razy z 49-u jedenastych można oddzielić po 11 jedenastych, t. j. jaką (całkowitą) liczbę razy mieści się 11 w 49-u. Trzeba więc 49:11; otrzymany iloraz niezupełny 4 wskazuje, ile w ułamku niewłaściwym $\frac{49}{11}$ jest jedności. Te 4 jedności stanowią 44 jedenastych; pozostaje więc jeszcze 5 jedenastych, $\frac{5}{11}$. Zatym

$$\frac{49}{11}; \qquad \begin{array}{r|l} 49 & 11 \\ \cline{2-2} -44 & 4 \\ \cline{1-1} 5 & \end{array} \qquad \frac{49}{11}=4\frac{4}{11}.$$

Jeżeli zaś mamy np. $\frac{44}{11}$, to podobnie, dzieląc 44:11, otrzymujemy 4, a tu te 4 jedności stanowią właśnie 44 jedenastych, zatym $\frac{44}{11}=4$. Takie wyrażanie ułamka niewłaściwego jako całkowitéj lub jako całkowitéj z ułamkiem nazywa się **wyciąganiem całkowitéj z ułamka niewłaściwego**. Powiemy więc ogólnie: *aby z ułamka niewłaściwego wyciągnąć całkowitą, należy jego licznik podzielić przez mianownik; iloraz niezupełny przedstawia całkowitą, a reszta dzielnéj jest licznikiem ułamka o tym samym mianowniku, co mianownik ułamka danego.* Jeżeli licznik danego ułamka niewłaściwego jest podzielny przez mianownik, to iloraz jest całkowitą, którą przedstawiał dany ułamek niewłaściwy.

Zwykle, otrzymawszy wskutek wykonanych działań ułamek niewłaściwy, wyciągamy z niego całkowitą, gdyż przez to wyraźniéj pojmiemy wielkość téj liczby.

5. Zupełnie w ten sam sposób, jak w § 16, us. 1, moglibyśmy tu wprost dowieść, że jakiekolwiek dzielenie dwu liczb doprowadza nas do rezultatu, który możemy przedstawić zapomocą ułamka, mającego dzielnik jako mianownik, a dzielną jako licznik.

Tak np., wypadek z dzielenia 49:5, w tym razie, gdy nam idzie o to, aby wyznaczyć 5-tą część liczby 49, t. j. gdy mamy liczbę 49 rozłożyć na 5 części równych i wyznaczyć jedną taką część, jest ten sam, co wtedy, gdy tylko 1 rozłożymy na 5 równych części, lecz za to weźmiemy takich części 49. Więc tu $49:5=\frac{49}{5}$.

Podobnie, chcieć przez dzielenie 49:5 dowiedzieć się, ile razy 5 mieści się w 49-u, wychodzi na to samo, co chcieć wymierzyć liczbę 49 liczbą 5, t. j. wyznaczyć ile w liczbie 49 jest jednostek równych liczbie 5 i ile prócz tego jest 5-ych części téj jednostki (§ 16, us. 1, b.), albo: ile liczba 49 zawiéra w sobie 5-ych części jednostki, za którą przyjmujemy liczbę 5. I tu więc $49:5=\frac{49}{5}$.

Dlategoto, aby oznaczyć, że mamy np. liczbę 49 podzielić przez 5, można przedstawiać to albo (§ 7, us. 4):

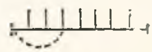
$$49:5,$$

albotéż

$$\frac{49}{5}.$$

Zauważymy tu jeszcze, że gdy mamy dzielenie liczb mianowanych, np. 49 zł. : 5, to podobnie możemy je przedstawić tak: $\frac{49 \text{ zł.}}{5}$; albo, z uwagi, że otrzymamy tu wypadek mianowany (§ 7, us. 7), t. j., że otrzymamy złote, których będzie $\frac{49}{5}$, możemy także tak napisać: $\frac{49}{5}$ zł. Taksamo dzielenie 49 zł. : 5 zł. możemy przedstawić $\frac{49 \text{ zł.}}{5 \text{ zł.}}$, albo, z uwagi, że tu otrzymamy liczbę oderwaną, wprost: $\frac{49}{5}$.

Z tego wszystkiego wypada, że *na ułamek możemy patrzéć, jako na wskazane dzielenie, w którym dzielną jest licznik, dzielnikiem mianownik, a ilorazem wartość ułamka* (t. j. liczba, którą jest ten ułamek).

6. Ponieważ mianownik ułamka oznacza, na ile części równych jedność została podzielona, więc wrazie, gdy, nie zmieniając licznika, mianownik powiększamy, powiększa się ilość części, na które jedność jest podzielona, a tymsamym, oddzielne części stają się mniejsze. Że zaś tych części bierzemy tyleż, co poprzednio (bo licznika nie zmieniamy), więc wartość ułamka staje się mniejszą — i tyle razy mniejszą, ile razy mianownik stał się większym. Tak np., gdy, mając pewną jedność, wyznaczymy ułamek $\frac{3}{4}$ , a następnie tylko jego mianownik powiększymy np. 2 razy, to ułamek $\frac{3}{8}$  będzie od poprzedniego 2 razy mniejszy. Również np. od ułamka $\frac{3}{4}$ ułamek $\frac{3}{4 \cdot 5} = \frac{3}{20}$ jest 5 razy mniejszy. A więc:

a. *Jeżeli, nie zmieniając licznika ułamka, powiększamy jego mianownik pewną liczbę razy, to wskutek tego wartość ułamka tyleż razy się zmniejsza.*

Podobnie znajdziemy, że jeżeli w danym ułamku tylko jego mianownik zmniejszymy, wówczas części jedności staną się większe; a więc, biorąc ich tyleż, ile ich było w danym ułamku, otrzymujemy ułamek, którego wartość jest od poprzedniego większa — i większa tyleż razy, ile razy części jedności stały się większe, t. j. ile razy zmniejszyliśmy mianownik. Zatym od ułamka $\frac{3}{20}$ ułamek $\frac{3}{20:5} = \frac{3}{4}$ jest 5 razy większy, t. j.

b. *Jeżeli, nie zmieniając licznika ułamka, zmniejszamy jego mianownik pewną liczbę razy, to wskutek tego wartość ułamka tyleż razy się powiększa.*

Jeżeli mianownika ułamka nie zmieniamy, a jego licznik powiększamy, to oczywiście ilość takich samych części ułamka staje się większą i wartość ułamka powiększa się tyle razy, ile razy więcej mamy teraz takich części, t. j. ile razy powiększamy licznik. Np. od ułamka $\frac{3}{17}$ ułamek $\frac{3.5}{17}$ jest 5 razy większy. A więc:

c. *Jeżeli, nie zmieniając mianownika ułamka, powiększamy jego licznik pewną liczbę razy, to wskutek tego wartość ułamka tyleż razy się powiększa.*

Taksamo znajdziemy, że np. od ułamka $\frac{8}{15}$ ułamek $\frac{8:4}{15}=\frac{2}{15}$ jest 4 razy mniejszy, t. j.

d. *Jeżeli, nie zmieniając mianownika ułamka, zmniejszamy jego licznik pewną liczbę razy, to wskutek tego wartość ułamka tyleż razy się zmniejsza.*

Zestawiając z sobą własności a. i c., widzimy, że jeżeli jednocześnie licznik i mianownik ułamka powiększymy jednakową liczbę razy, to wartość ułamka tyle razy się powiększy wskutek powiększenia się licznika, ile razy się zmniejszy wskutek powiększenia się mianownika, a więc (por. § 7, us. 9) zmianie nie ulegnie. Np. $\frac{3}{4}=\frac{3.2}{4.2}=\frac{6}{8}$. Podobnie z zestawienia własności b. i d. wypadnie, że np. $\frac{15}{35}=\frac{15:5}{35:5}=\frac{3}{7}$. A zatym:

e. *Jeżeli licznik i mianownik ułamka albo jednocześnie powiększamy, albo jednocześnie zmniejszamy jednakową liczbę razy, to wartość ułamka się nie zmienia.*

7. Ponieważ możemy ułamek uważać jako wskazane dzielenie (us. 5), więc w powyższych (us. 6) własnościach możemy, zamiast:

licznika, mianownika, wartości ułamka,

rozumiéć odpowiednio:

dzielną, dzielnik, iloraz.

Zauważymy jednak, że te własności wyprowadziliśmy tu (us. 6) dla wszelkich ułamków; możemy je zatym odnieść do przypadku, gdy dzielna (licznik) nie jest podzielną przez dzielnik (mianownik), a nawet gdy jest od niego mniejszą, wyrażając wtedy iloraz zupełny tego dzielenia (§ 16, us. 1; § 17, us. 4) odpowiednio przez całkowitą z ułamkiem, lub przez ułamek właściwy. Z tego wypada, że własności, wypowiedziane w us. 7-ym § 15-go, są własnościami ogólnymi [1]), choć

---

[1]) Zawsze jednak, gdy tu (us. 6, 7) mówimy o zmniejszaniu pewną liczbę razy (dzielenia przez pewną liczbę), czyto dzielnej (licznika) czyteż dzielnika (mianownika), przyjmujemy na uwagę tylko przypadek, kiedy odpowiednie dzielenie uskutecznia się bez reszty. Ogólniej w § 20, us. 6, 7.

tam mogliśmy je wyprowadzić tylko dla przypadku, gdy dzielna była podzielną przez dzielnik [1]).

8. Wiemy, że wartość ułamka się nie zmienia, gdy jego licznik i mianownik mnożymy przez tę samę liczbę. Jeżeli więc mamy ułamek np. $\frac{36}{48}$, to, mnożąc licznik i mianownik jednocześnie kolejno przez 2, 3, 4, 5 i t. d., otrzymujemy ułamki

$$\frac{72}{96},\ \frac{108}{144},\ \frac{144}{192},\ \frac{180}{240}\ \text{i t. d.}$$

Wszystkie nieskończenie wiele ułamków, któreby można w ten sposób otrzymać, posiadają tę samę wartość, przedstawiają tę samę liczbę. Są to więc różne postaci téj saméj liczby, tego samego ułamka. Tę samę jednak liczbę, którą przedstawiliśmy tu w postaciach $\frac{36}{48}$, $\frac{72}{96}$ i t. d., można jeszcze inaczéj przedstawić. Wszakże możemy licznik i mianownik ułamka $\frac{36}{48}$ dzielić przez tę samę liczbę, mianowicie przez ich spólne dzielniki 2, 3, 4, 6, 12; otrzymamy więc jeszcze postaci téj saméj liczby

$$\frac{18}{24},\ \frac{12}{16},\ \frac{9}{12},\ \frac{6}{8},\ \frac{3}{4}.$$

I tak jednak nie wyczerpaliśmy jeszcze wszystkich postaci téj liczby, bo np. z postaci $\frac{18}{24}$ (którą otrzymaliśmy dzieląc licznik i mianownik danego ułamka $\frac{36}{48}$ przez 2), mnożąc jéj licznik i mianownik przez liczby piérwsze względem 2, np. przez 3, 5, 7, 11, 13, 15 i t. d., otrzymamy znowu odmienne postaci téj saméj liczby, mianowicie

$$\frac{54}{72},\ \frac{90}{120},\ \frac{126}{168}\ \text{i t. d.;}$$

podobnież z postaci $\frac{12}{16}$ otrzymamy jeszcze inne postaci téj saméj liczby, mnożąc licznik i mianownik przez różne liczby piérwsze względem 3, i t. d.

Z tego widzimy, jak rozmaicie powstają różne postaci ułamka z takiéj jego postaci, jak np. $\frac{36}{48}$. Czy nie ma postaci, z któréjby wszystkie inne powstać mogły w sposób jednostajny? (us. 10.)

9. Gdy licznik i mianownik ułamka podzielimy przez ich spólny dzielnik, to otrzymamy w ten sposób inną postać ułamka, wyrażonąprzy pomocy liczb mniejszych, a więc prostszą. Tak np., dzieląc licznik

---

[1]) Z tego bespośrednio wypada, że własności us. 6-go nie mogą być uważane jako prosty wynik z wyprowadzonych w nauce o dzieleniu liczb całkowitych własności us. 15-go w § 7-ym, gdyż są ogólniejsze. Często jednak na to nie zważają.

i mianownik ułamka $\frac{90}{120}$ przez ich spólny dzielnik, np. 10, otrzymamy postać prostszą $\frac{9}{12}$. Takie postępowanie, prowadzące do zastąpienia danéj postaci ułamka przez inną, wyrażoną przy pomocy liczb mniejszych, nazywa się skracaniem ułamka. Zatym *skrócić ułamek jestto wyrazić go w innéj postaci zapomocą liczb mniejszych.* I mówi się: skracając ułamek $\frac{90}{120}$ przez 10 możemy go zastąpić przez $\frac{9}{10}$.

Skróciwszy ułamek $\frac{90}{120}$ przez 10 otrzymaliśmy $\frac{9}{12}$. Lecz i w tym ułamku licznik i mianownik mają jeszcze spólny dzielnik 3; możemy go więc jeszcze skrócić przez 3; otrzymamy $\frac{3}{4}$. Téj postaci nie możemy już zastąpić prostszą, bo licznik i mianownik są liczbami piérwszymi względem siebie. Ta więc postać nie może być już daléj skracaną — jest postacią nieskracalną. Oczywiście, z ułamka danego $\frac{90}{120}$ moglibyśmy wprost otrzymać postać jego nieskracalną, podzieliwszy jego licznik i mianownik przez ich największy spólny dzielnik 30 (§ 14, us. 12).

Ponieważ postać nieskracalna ułamka jest jego najprostszą postacią, więc (§ 1, us. 9), jeżeli tylko niéma wyraźnéj potrzeby przedstawiania go w pewnéj szczególnéj postaci (por. us. 13), zawsze powinniśmy go doprowadzić do postaci nieskracalnéj i w takiéj go w rachunkach podawać. Tak np. jeżeli po rozwiązaniu jakiegoś zadania w ostatecznym wypadku otrzymujemy ułamek, to zawsze powinniśmy go przedstawić w postaci nieskracalnéj.

Aby ułamek skrócić, należy odnaléść spólny dzielnik licznika i mianownika i przezeń je podzielić. Pomocnymi nam w tym są cechy podzielności (§ 13; § 15, us. 11).

Aby dany ułamek doprowadzić do postaci nieskracalnéj, należy dla licznika i mianownika odnaléść największy spólny dzielnik i przezeń je podzielić. Można to niekiedy osiągnąć, korzystając z cech podzielności i stopniowo skracając ułamek. Np.

$$\frac{630}{840}=\frac{63}{84}=\frac{21}{28}=\frac{3}{4};\quad \frac{396}{352}=\frac{99}{88}=\frac{9}{8}.$$

W niektórych jednak razach koniecznie trzeba się uciéc do odszukania wprost nsd.-a licznika i mianownika (przez kolejne dzielenie; § 14, us. 7). Tak np., gdy mamy ułamek $\frac{50803}{106636}$, to znane cechy podzielności nie dają nam wskazówki, czy licznik i mianownik mają spólny dzielnik, czyteż są liczbami piérwszymi względem siebie, a tymsamym, czy ten ułamek jest już w postaci nieskracalnéj. Aby stanowczo na to odpowiedziéć, trzeba poszukiwać nsd.-a. Jakoż, znajdziemy, że jest nim liczba 503, przez którą skróciwszy, otrzymamy postać nieskracalną $\frac{101}{212}$.

Jeżeli mamy np. ułamek $\frac{12}{3}$, to, skróciwszy go przez 3, mieć będziemy $\frac{12}{3}=\frac{4}{1}=4$ (us. 3), t. j. gdy wskutek działań wykonywanych wypada nam ułamek o mianowniku 1, to możemy odrazu pisać jako całkowitą licznik tego ułamka. Z tego jeszcze wypada, że, nawzajem, *zawsze możemy uważać całkowitą jako ułamek o mianowniku równym jedności.*

10. Zastanówmy się teraz nanowo nad otrzymywanymi w us. 8-m różnymi postaciami ułamka $\frac{36}{48}$. Nieskracalną postacią tego ułamka jest postać $\frac{3}{4}$, otrzymana wskutek podzielenia licznika i mianownika przez nsd. 12. Nawzajem więc, postać $\frac{34}{48}$ powstaje z postaci $\frac{3}{4}$ przez pomnożenie jéj licznika i mianownika przez 12. Wszystkie zatym postaci, które powstały z postaci $\frac{36}{48}$ przez pomnożenie licznika i mianownika kolejno przez 2, 3, 4, 5 i t. d., powstają z postaci nieskracalnéj wskutek pomnożenia jéj licznika i mianownika przez 12.2, 12.3, 12.4 i t. d. — Postać $\frac{18}{24}$ powstała z postaci $\frac{36}{48}$ wskutek skrócenia przez 2, dzielnik liczby 12 (§ 14, us. 9); powstaje więc ona z postaci $\frac{3}{4}$ przez pomnożenie jéj licznika i mianownika przez dzielnik liczby 12, dopełniający dzielnik 2. Te zatym postaci, które powstają z postaci $\frac{18}{24}$ przez pomnożenie jéj licznika i mianownika przez liczby 3, 5, 7, 11, 15 i t. d., powstają z postaci nieskracalnéj $\frac{3}{4}$ przez pomnożenie jéj licznika i mianownika przez 6.3, 6.5, 6.7, 6.11, 6.15 i t. d. — I t. d. — Widzimy więc, że *każda postać ułamka powstaje z jego postaci nieskracalnéj wskutek pomnożenia jéj licznika i mianownika przez tęż samę liczbę.*

To, cośmy tu dotąd mówili, opiéra się na tym, że jeżeli dwie liczby mnożymy lub dzielimy przez pewne też same liczby, to skutkiem tego ich nsd. zostaje przez też liczby odpowiednio pomnożony lub podzielony (§ 14, us. 11). A więc, mając postaci ułamka, z których jedne powstają z innych wskutek pomnożenia lub podzielenia licznika i mianownika przez pewne też same liczby, dojdziemy zawsze z któréjkolwiek z tych postaci, wskutek podzielenia jéj licznika i mianownika przez ich nsd., do téj saméj postaci nieskracalnéj tego ułamka, gdyż zawsze w liczniku i mianowniku otrzymamy też same dwie liczby piérwsze względem siebie (§ 14, us. 11, 12).

Należy jeszcze dla większéj ścisłości udowodnić, że jakiekolwiek wogóle są dane postaci tego samego ułamka, to, dzieląc licznik i mianownik każdéj z tych postaci przez ich nsd., otrzymujemy tę samę postać nieskracalną. Innymi słowy: należy udowodnić, że *jeżeli dwa ułamki w postaciach nieskracalnych są równe* [1], *to ich liczniki, jak również ich mianowniki są tymiż samymi liczbami.* Jakoż, przypuśćmy, że ułamek w postaci nieskracalnéj np. $\frac{5}{8}$ jest równy innemu ułamkowi w postaci nieskracalnéj: $\frac{l}{m}$. Przyjmujemy więc, że tak liczby 5 i 8, jak i liczby (całkowite) l i m są piérwsze względem siebie i że $\frac{l}{m} = \frac{5}{8}$. Te ułamki są równe, t. j. przedstawiają tę samę liczbę; gdy zatym każdy z nich powiększymy m razy, to otrzymamy również dwa wyrażenia pewnéj téj saméj liczby, a więc równe:

$$l = \frac{5 \cdot m}{8}.$$

Ponieważ liczba l jest całkowitą, więc iloczyn $5 \cdot m$ jest podzielny przez 8. Gdy zaś 8 jest liczbą piérwszą względem czynnika 5, zatym czynnik pozostały, m, jest podzielny przez 8 (§ 14, us. 13). Jeżeli przeto dzielnik liczby m, dopełniający jéj dzielnik 8, nazwiemy n, to

$$m = 8 \cdot n \quad \text{i} \quad l = \frac{5 \cdot 8 \cdot n}{8} = 5 \cdot n,$$

t. j. liczby l i m mają spólny dzielnik n. Ponieważ zaś przyjęliśmy, że liczby l i m są piérwsze względem siebie, zatym ich spólny dzielnik $n = 1$, wskutek czego

$$m = 8 \quad \text{i} \quad l = 5$$

— istnieje więc jedna tylko postać nieskracalna ułamka.

Ponieważ każda postać ułamka powstaje z jego postaci nieskracalnéj wskutek pomnożenia jéj licznika i mianownika przez odpowiednią tę samę liczbę, a licznik i mianownik mnożyć możemy przez jakiekolwiek liczby, zatym ogólnie:

Różne postaci ułamka powstają z jego postaci nieskracalnéj wskutek jednoczesnego pomnożenia jéj licznika i mianownika przez oddzielne liczby 1, 2, 3, 4, 5, 6 i t. d., t. j. przez oddzielne liczby z szeregu liczb naturalnych. Że zaś ten szereg liczb jest nieograniczony, zatym: *istnieje nieskończenie wiele postaci każdego ułamka.*

11. Ponieważ każda postać ułamka powstaje z postaci nieskracalnéj wskutek pomnożenia jéj licznika i mianownika przez tę samę liczbę, zatym możemy powiedzieć, że licznik i mianownik jakiéjkolwiak postaci ułamka są «równokrotne» odpowiednio licznika i mianownika jego postaci nieskracalnéj. Tak np. $\frac{12}{15} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{4+4+4}{5+5+5}$.

---

[1] T. j. przedstawiają tę samę liczbę.

Gdy więc, mając np. dane dwie postaci tegoż ułamka, np. $\frac{20}{25}$ i $\frac{12}{15}$, utworzymy ułamek, którego licznikiem jest suma liczników tych postaci, a mianownikiem suma ich mianowników, $\frac{20+12}{25+15}$, lub ułamek, którego licznikiem jest różnica ich liczników, a mianownikiem różnica ich mianowników, $\frac{20-12}{25-15}$, to oczywiście licznik i mianownik każdego z takich ułamków są również równokrotnymi odpowiednio licznika i mianownika nieskracalnéj postaci $\frac{4}{5}$ tegoż ułamka. A więc: takie ułamki są także postaciami tegoż samego ułamka, co dane postaci. Możemy to tak wyrazić: jeżeli np.

$$\frac{20}{25}=\frac{12}{15},$$

to

$$\frac{20+12}{25+15}=\frac{20}{25}=\frac{12}{15} \quad \text{i} \quad \frac{20-12}{25-15}=\frac{20}{25}=\frac{12}{15}.$$

12. Jeżeli licznik i mianownik ułamka (właściwego) podzielimy przez licznik, to w liczniku otrzymamy 1, w mianowniku zaś całkowitą z ułamkiem. Dzieląc np. licznik i mianownik ułamka $\frac{35}{1136}$ przez 35, otrzymamy w liczniku 1, a w mianowniku $32\frac{16}{35}$, czyli $32+\frac{16}{35}$. Mamy więc

$$\frac{35}{1136}=\cfrac{1}{32+\cfrac{16}{35}}.$$

Jeżeli postąpimy taksamo z ułamkiem $\frac{16}{35}$, to otrzymamy

$$\frac{16}{35}=\cfrac{1}{2+\cfrac{3}{16}},$$

co pisząc w wyrażeniu poprzednim, zamiast $\frac{16}{35}$, mieć będziemy

$$\frac{35}{1136}=\cfrac{1}{32+\cfrac{1}{2+\cfrac{3}{16}}}.$$

Postępując daléj podobnie, mamy jeszcze $\frac{3}{16}=\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{3}}$, a tymsamym

$$\frac{35}{1136}=\cfrac{1}{32+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{3}}}}.$$

Taka, jak powyższa postać ułamka nazywa się **ułamkiem ciągłym** i mówimy, żeśmy ułamek $\frac{35}{1136}$ «rozwinęli na ułamek ciągły». — Widzimy, że tu, dla otrzymania ułamka ciągłego, przedstawiającego ułamek $\frac{35}{1136}$, należało podzielić 1136 przez 35, następnie 35 przez resztę poprzedniego dzielenia 16, a późniéj 16 przez resztę poprzedzającego dzielenia 3, t. j. postępować tak, jak przy wyszukiwaniu największego spólnego dzielnika liczb 1136 i 35 [por. § 14, us. 7, *b.*)], a stopniowo w ten sposób otrzymywane ilorazy niezupełne 32, 2, 5, 3 wypisywać jako części całkowite mianowników kolejnych.

Badanie własności ułamków ciągłych, tak podobnych powyższemu, jak i ogólniejszych, wchodzi w zakres algiebry [1]).

13. Mając danych kilka ułamków, np. $\frac{5}{12}, \frac{9}{16}, \frac{11}{18}$, zważmy, że piérwsza z tych liczb jest wyrażona w 12-ych, druga w 16-ych, trzecia w 18-ych częściach jedności. Jeżelibyśmy zaś chcieli wyrazić wszystkie te liczby w jednakowych częściach jedności, to należałoby naszym ułamkom nadać takie postaci, aby ich mianowniki były tą samą liczbą; mianownik bowiém wskazuje, na ile — a więc i na jakie — części jedność została podzieloną. Nazywa się to **sprowadzaniem ułamków do spólnego mianownika**. Zatym

Sprowadzić ułamki do spólnego mianownika jestto wyrazić je w postaciach, mających tęż samę liczbę w mianowniku.

Zwykle każdy z ułamków, które mamy sprowadzić do spólnego mianownika, mamy dany w postaci nieskracalnéj; jeżeli zaś nie, to wyrażamy go w niéj uprzednio. Jakakolwiek zresztą jest postać każdego z danych ułamków, to możemy z niéj wyprowadzić inne, mnożąc jéj licznik i mianownik przez też same liczby. Aby więc dane ułamki wyrazić w postaciach, mających tę samę liczbę w mianowniku, należy licznik i mianownik każdego z danych ułamków pomnożyć przez tak dobraną liczbę, iżby mianowniki otrzymanych stąd postaci wszystkich ułamków były tą samą liczbą. Ten zatym spólny mianownik, jako powstający z każdego z mianowników, wskutek pomnożenia go przez pewną liczbę (a więc przezeń podzielny), jest spólną wielokrotną (§ 15, us. 7) mianowników ułamków danych. Tak np., aby ułamki $\frac{5}{12}, \frac{9}{16}, \frac{11}{18}$ sprowadzić do spólnego mianownika, należy naprzód wyznaczyć spólną wielokrotną mianowników 12, 16, 18. Moglibyśmy za-

---

[1]) W § 20, us. 5 będzie tylko wzmianka najelementarniejsza o zadaniu odwrotnym powyższemu, t. j. o tym, jak, mając podobny ułamek ciągły, otrzymać ułamek, którego rozwinięciem jest ten właśnie ułamek ciągły.

[Wprawdzie ułamki ciągłe skończone (jako wyrażenia skończone ułamków zwyczajnych) mają cechy, kwalifikujące je do tego, aby ich własności były rostrząsane w arytmetyce, to jednak, z uwagi, że ważność teoryi ułamków ciągłych polega na zastosowaniu jéj wyników do liczb niewymiernych, a tymsamym nieliczne możliwe zastosowania jéj do rozwinięć ułamków zwyczajnych, są zgoła podrzędne; jak również z uwagi, że przy wykładzie w arytmetyce własności ułamków ciągłych najważniejszéj, określającéj prawo tworzenia stopniowego ułamków zbliżonych (reduktów), udowodnić nie można — słusznie czynią rozmaici poważni autorowie, wyłączając z zakresu arytmetyki jakiekolwiek badanie własności ułamków ciągłych.]

danie nasze rozwiązać, biorąc jakąkolwiek spólną wielokrotną — możemy jednak *najprościéj* *) je rozwiązać, biorąc najmniejszą spólną wielokrotną mianowników. Znajdziemy, jako nsw.-ą (§ 15, us. 8) mianowników 12, 16, 18 liczbę 144; ta więc liczba będzie spólnym mianownikiem. Należy zatym dane ułamki $\frac{5}{12}, \frac{9}{16}, \frac{11}{18}$ wyrazić w postaciach, mających za mianownik liczbę 144, czyli licznik i mianownik każdego z tych ułamków pomnożyć przez taką liczbę, iżby w mianowniku znalazła się liczba 144, a więc np. licznik i mianownik ułamka $\frac{9}{16}$ pomnożyć przez dzielnik liczby 144, dopełniający jéj dzielnik 16 (t. j. przez iloraz z podzielenia mianownika spólnego przez mianownik ułamka). A więc:

$$\frac{5}{12}, \frac{9}{16}, \frac{11}{18};$$

$$\begin{array}{l} 12 = 2.2.3 \\ 16 = 2.2.2.2 \\ 18 = 2.3.3 \\ \hline 2.2.2.2.3.3 = 144; \end{array}$$

$$144:12 = 12, \qquad \frac{5}{12} = \frac{5 \cdot 12}{144} = \frac{60}{144};$$

$$144:16 = 9, \qquad \frac{9}{6} = \frac{9 \cdot 9}{44} = \frac{81}{144};$$

$$144:18 = 8, \qquad \frac{11}{18} = \frac{11 \cdot 8}{144} = \frac{88}{144}.$$

Aby dane ułamki sprowadzić do spólnego mianownika, (wyraziwszy je w postaciach nieskracalnych) odnajdujemy najmniejszą spólną wielokrotną ich mianowników, którą przyjmujemy za mianownik każdego ułamka, a za jego licznik bierzemy iloczyn poprzedniego licznika przez iloraz z podzielenia spólnego mianownika przez mianownik poprzedni tego ułamka.

W przypadku, gdy mianowniki ułamków danych są takimi liczbami, iż każda jest piérwszą względem każdéj z pozostałych, to ich nsw.-ą jest ich iloczyn (§ 15, us. 10), a tymsamym licznikiem postaci danego ułamka, mającéj tę spólną wielokrotną za mianownik, będzie iloczyn jego licznika i mianowników wszystkich ułamków pozostałych. Np.

$$\frac{3}{8}, \frac{4}{9}, \frac{6}{7}, \frac{9}{25};$$

nsw. liczb 8, 9, 7, 25 jest $8.9.7.25 = 12600$; zatym:

---

*) Dlategoto właśnie wyrażamy uprzednio każdy z danych ułamków w postaci nieskracalnéj.

$$\frac{3}{8}=\frac{3\cdot9\cdot7\cdot25}{12600}=\frac{4725}{12600},\quad \frac{4}{9}=\frac{4\cdot8\cdot7\cdot25}{12600}=\frac{5600}{12600}\text{ i t. d.}$$

Podobnie, sprowadzając np. $\frac{3}{8}$ i $\frac{4}{9}$ do spólnego mianownika, otrzymamy

$$\frac{3}{8}=\frac{3\cdot9}{72}=\frac{27}{72},\quad \frac{4}{9}=\frac{4\cdot8}{72}=\frac{32}{72}.$$

14. Wypada nam niekiedy oznaczyć, który z dwu danych ułamków jest większy, t. j. dwa dane ułamki z sobą porównać.

a. Jeżeli dane dwa ułamki mają jednakowe mianowniki, to oczywiście ten z nich jest większy, w którym większą jest ilość tych samych części jedności, to jest którego licznik jest większy. Tak np. z ułamków $\frac{5}{9}$ i $\frac{7}{9}$ drugi jest większy. Na oznaczenie, że jedna liczba jest większa od drugiéj używamy znaku $>$, pisząc liczbę większą po stronie roztwartości tego znaku. Napiszemy więc $\frac{7}{9}>\frac{5}{9}$, co czytamy: $\frac{7}{9}$ większa od $\frac{5}{9}$; albotéż napiszemy: $\frac{5}{9}<\frac{7}{9}$, co przeczytamy: $\frac{5}{9}$ mniejsza od $\frac{7}{9}$.

b. Jeżeli dane dwa ułamki mają jednakowe liczniki, to, oczywiście, ten z nich jest większy, który przedstawia tę samę ilość większych części jedności; części zaś jedności są tym większe, im na mniéj części jedność została podzieloną, czyli im mianownik ułamka jest mniejszy. Z dwu więc np. ułamków $\frac{5}{8}$ i $\frac{5}{11}$ jest $\frac{5}{8}>\frac{5}{11}$.

c. Jeżeli zaś mamy dane dwa ułamki o różnych tak licznikach, jak i mianownikach, to, aby wyznaczyć, który z nich jest większy, sprowadzamy je do spólnego mianownika *), a tymsamym ten przypadek do przypadku a. Tak np. $\frac{5}{12}$ i $\frac{7}{15}$; tu $\frac{5}{12}=\frac{25}{60}$, $\frac{7}{15}=\frac{28}{60}$, a więc $\frac{28}{60}>\frac{25}{60}$, czyli $\frac{7}{15}>\frac{5}{12}$. Jeżeliby tu zaś z dwu liczb jedna była ułamkiem niewłaściwym, a druga ułamkiem właściwym, to piérwsza oczywiście jest większą. Tak np. $\frac{9}{8}>\frac{356}{378}$.

Gdy, mając kilka ułamków, chcemy je uporządkować według ich wielkości, zaczynając np. od największego, a ułamki te nie mają (wszystkie) ani jednakowego mianownika, ani jednakowego licznika, to należy je uprzednio sprowadzić do spólnego mianownika. Trzeba to zrobić nawet w przypadku, kiedy mamy dane np. takie ułamki:

---

*) Niekiedy dogodniéj sprowadzić je do spólnego licznika, co się odbywa podobnie jak sprowadzanie do spólnego mianownika. Np.

$$\frac{4}{237}\text{ i }\frac{6}{355};\quad \frac{4}{237}=\frac{12}{237.3}=\frac{12}{711};\quad \frac{6}{355}=\frac{12}{355.2}=\frac{12}{710};\text{ więc }\frac{4}{237}<\frac{6}{355}.$$

$\frac{7}{12}$, $\frac{7}{15}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{8}{13}$, gdyż tu nie widać, który z dwu ułamków $\frac{8}{15}$ i $\frac{7}{12}$, który z dwu ułamków $\frac{7}{12}$ i $\frac{8}{13}$, jak również, który z dwu ułamków $\frac{7}{15}$ i $\frac{8}{13}$ jest większy. Sprowadziwszy je tedy do spólnego mianownika, mamy

$$\frac{7}{12}=\frac{455}{780},\quad \frac{7}{15}=\frac{364}{780},\quad \frac{8}{15}=\frac{416}{780},\quad \frac{8}{13}=\frac{480}{780};$$

więc $\frac{8}{13}>\frac{7}{12}>\frac{8}{15}>\frac{7}{15}$.

15. Jeżeli, mając dwa ułamki nierówne, np. $\frac{3}{4}$ i $\frac{5}{7}$, utworzymy ułamek, którego licznik jest sumą liczników ułamków danych, a mianownik sumą ich mianowników, $\frac{3+5}{4+7}$, to jaką jest wartość tego ułamka względem wartości ułamków danych?

Porównajmy ułamek $\frac{3+5}{4+7}$ z ułamkiem $\frac{3}{4}$. Według powyższego (c.), należy te ułamki sprowadzić do spólnego mianownika. Czyniąc to, mamy

$$\frac{3+5}{4+7}=\frac{(3+5)\cdot 4}{(4+7)\cdot 4}=\frac{3\cdot 4+5\cdot 4}{(4+7)\cdot 4},\quad \frac{3}{4}=\frac{3\cdot(4+7)}{(4+7)\cdot 4}=\frac{3\cdot 4+3\cdot 7}{(4+7)\cdot 4}.$$

Ponieważ $3\,.\,7>5\,.\,4$, więc i $3\,.\,4+3\,.\,7>3\,.\,4+5\,.\,4$, skutkiem czego (a.) $\frac{3}{4}>\frac{3+5}{4+7}$. Porównywając podobnie ułamek $\frac{3+5}{4+7}$ z ułamkiem $\frac{5}{7}$, znajdziemy, że $\frac{3+5}{4+7}>\frac{5}{7}$. Jest więc

$$\frac{3}{4}>\frac{3+5}{4+7}>\frac{5}{7},$$

t. j. wartość ułamka $\frac{3+5}{4+7}$ jest pośrednią między wartościami ułamków danych $\frac{3}{4}$ i $\frac{5}{7}$. (Por. us. 11.)

Jeżeli mamy kilka ułamków, np. $\frac{7}{12}$, $\frac{7}{15}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{8}{13}$, i uporządkujemy je, zaczynając np. od największego, więc (us. 14): $\frac{8}{13}>\frac{7}{12}>\frac{8}{15}>\frac{7}{15}$, to, na mocy powyższego, wypada nam, iż $\frac{8}{13}>\frac{8+7}{13+12}>\frac{7}{12}$; a że $\frac{7}{12}>\frac{8}{15}$, więc także

$$\frac{8}{13}>\frac{8+7}{13+12}>\frac{8}{15}.$$

Biorąc zaś dwa ostatnie ułamki, t. j. $\frac{8+7}{13+12}$ i $\frac{8}{15}$, mamy znowu $\frac{8+7}{13+12}>\frac{8+7+8}{13+12+15}>\frac{8}{15}$, a że $\frac{8}{13}>\frac{8+7}{13+12}$ i $\frac{8}{15}>\frac{7}{15}$, więc mamy także

$$\frac{8}{13}>\frac{8+7+8}{13+12+15}>\frac{7}{15}.$$

Biorąc znowu dwa ostatnie z tych ułamków i podobnie z nimi postępując, znajdziemy, że

$$\frac{8}{13} > \frac{8+7+8+7}{13+12+15+15} > \frac{7}{15}.$$

A zatym: *gdy, mając danych dwa lub więcéj ułamków, utworzymy ułamek, którego licznik jest sumą liczników ułamków danych, a mianownik jest sumą ich mianowników, to ten ułamek jest większy od najmniejszego, a mniejszy od największego z ułamków danych.*

16. Zastosujemy to do przypadku, gdy z dwu ułamków jeden jest jednością, przedstawioną w postaci ułamka (us. 3). Weźmy np. $\frac{8}{13}$ i $1 = \frac{6}{6}$ i jeszcze np. $\frac{13}{8}$ i $1 = \frac{6}{6}$; według powyższego, mieć będziemy:

$$1 > \frac{8+6}{13+6} > \frac{8}{13} \quad \text{i} \quad \frac{13}{8} > \frac{13+6}{8+6} > 1.$$

Z tego zaś, iż

$$\frac{8+6}{13+6} > \frac{8}{13} \quad \text{i} \quad \frac{13+6}{8+6} < \frac{13}{8},$$

widzimy, że *jeżeli jednocześnie do licznika i do mianownika ułamka właściwego dodamy tę samę liczbę, to wartość ułamka się powiększy,* i *jeżeli jednocześnie do licznika i do mianownika ułamka niewłaściwego, większego od jedności, dodamy tę samę liczbę, to wartość ułamka się zmniejszy.*

Zamiast $8+6$ i $13+6$ pisząc odpowiednio 14 i 19, a wskutek tego (§ 5, us. 6) zamiast 8 i 13 pisząc odpowiednio $14-6$ i $19-6$, mieć będziemy zamiast poprzedniego:

$$\frac{14}{19} > \frac{14-6}{19-6} \quad \text{i} \quad \frac{19}{14} < \frac{19-6}{14-6},$$

t. j. *jeżeli jednocześnie od licznika i mianownika ułamka właściwego odejmiemy tę samę liczbę, to wartość ułamka się zmniejszy,* i *jeżeli jednocześnie od licznika i mianownika ułamka niewłaściwego większego od jedności odejmiemy tę samę liczbę, to wartość ułamka się powiększy.*

(Zadania arytmetyczne. § 17.)

---

§ 18. DODAWANIE I ODEJMOWANIE LICZB UŁAMKOWYCH.

1. Jak wiemy (§ 4, us. 6), dodawanie liczb całkowitych jest działaniem, zapomocą którego odnajdujemy jednę liczbę, zwaną sumą, którаby była skupieniem wszystkich jedności składników. Gdy zaś pośród danych liczb są liczby ułamkowe, to podobnie, działanie, doprowadzające nas do jednéj liczby, będącéj skupieniem wszystkich danych liczb, a więc skupieniem wszystkich części liczb danych (czyli wogóle mówiąc, jedności i części jedności tych składników), nazwiemy także dodawaniem, a owę liczbę — ich sumą. Powiemy więc teraz ogólnie:

Dodawanie jestto działanie, zapomocą którego, mając dwie lub więcéj liczb danych, zwanych składnikami, odnajdujemy liczbę, zwaną sumą, która jest skupieniem jedności składników.

2. Weźmy np. zadanie: dodać do siebie ułamki: $\frac{3}{5}, \frac{4}{15}$ i $\frac{5}{12}$,

$$\frac{3}{5}+\frac{4}{15}+\frac{5}{12}.$$

Idzie tu o odnalezienie jednéj liczby, sumy, którąby była skupieniem wszystkich części składników, t. j. trzech-*piątych*, cztérech-*piętnastych* i pięciu-*dwunastych*. Ta zaś (jedna) liczba szukana będzie wyrażona w pewnych *jednakowych* częściach jedności, którychto części pewna ilość przedstawi piérwszy, inna drugi, a pozostała trzeci składnik. Z tego wypada, że suma może być wyrażona w takich pewnych częściach jedności, w jakich może być téż wyrażony każdy ze składników. Innymi słowy: mianownikiem sumy będzie spólny mianownik składników. Należy więc dane ułamki sprowadzić do spólnego mianownika (§ 17, us. 13). Tu (najmniejszym) spólnym mianownikiem jest mianownik 60; mamy więc

$$\frac{3}{5}+\frac{4}{15}+\frac{5}{12}=\frac{36}{60}+\frac{16}{60}+\frac{25}{60}.$$

Skupiając teraz 36-sześćdziesiątych, 16-sześćdziesiątych i 25-sześćdziesiątych w jednę liczbę, otrzymamy oczywiście sześćdziesiąte części, których będzie $36+16+25$, a więc

$$\frac{3}{5}+\frac{4}{15}+\frac{5}{12}=\frac{36}{60}+\frac{16}{60}+\frac{25}{60}=\frac{36+16+25}{60}=\frac{77}{60}=1\frac{17}{60}.$$

Podobnie np.

$$\frac{3}{5}+\frac{4}{15}+\frac{5}{12}+\frac{1}{120}=\frac{72}{120}+\frac{32}{120}+\frac{50}{120}+\frac{1}{120}=\frac{72+32+50+1}{120}=\frac{145}{120}=$$
$$=1\frac{45}{120}=1\frac{3}{8}.$$

Oczywiście, że, gdyby dane do dodania ułamki posiadały już jednakowe mianowniki, postępowanie z nimi byłoby prostsze. Tak np.

$$\frac{3}{32}+\frac{5}{32}+\frac{15}{32}+\frac{1}{32}=\frac{3+5+15+1}{32}=\frac{24}{32}=\frac{3}{4}.$$

Aby dodać do siebie dane ułamki, należy, wrazie, gdy ich mianowniki są różne, sprowadzić je do spólnego mianownika, a liczniki tych postaci dodać do siebie: otrzymana stąd liczba jest licznikiem sumy, mianownikiem zaś jéj tenże sam mianownik spólny.

Taksamo postępowalibyśmy, gdyby dane ułamki były niewłaściwe. Zwykle jednak z ułamków niewłaściwych, przed przystąpieniem do ich dodawania, wyciągamy całkowite, tak iż rzecz sprowadza się do przypadku, gdy między składnikami są całkowite z ułamkami.

3. Wiemy z powyższego, że np. $\frac{35}{32}+\frac{5}{32}+\frac{147}{32}+\frac{64}{32}=\frac{35+5+147+64}{32}$

Z tego zaś wypada, iż nawzajem

$$\frac{35+5+147+64}{32}=\frac{35}{32}+\frac{5}{32}+\frac{147}{32}+\frac{64}{32}.$$

A jeżeli na każdy z tych ułamków (w liczniku pierwszego mamy liczbę wyrażoną przez sumę) będziemy patrzéć jako na wskazane dzielenie (§ 17, us. 5), to możemy to także inaczéj tak napisać:

$$(35+5+147+64):32=35:32+5:32+147:32+64:32,$$

t. j. [1]) *aby sumę podzielić przez pewną liczbę, można wszystkie składniki podzielić przez tę liczbę* (por. § 6, us. 14).

4. Weźmy przypadek, gdy składnikami są, wogóle mówiąc, całkowite z ułamkami, np.

$$\frac{3}{5}+5\frac{13}{15}+1\frac{5}{6}+4.$$

Ponieważ nam tu idzie o to, aby znaléść liczbę, która jest skupieniem jedności i części jedności składników, zatym sama przez się nasuwa się tu potrzeba skupienia z sobą oddzielnie jedności, a oddzielnie części jedności składników, a więc należy dodać do siebie oddzielnie całkowite i oddzielnie ułamki.

Aby takie postępowanie uzasadnić, należy uprzednio dowiéść, że suma nie zależy od porządku składników i w tym także przypadku, gdy składniki są liczbami ułamkowymi, oraz, że można dane dodawanie wykonać przy pomocy dodawań częściowych, a mianowicie: jednego dodawania całkowitych i drugiego dodawania ułamków.

a. Na powyższym zadaniu starajmy się dowiéść, że suma nie zależy od porządku składników. Włączając całkowite z ułamkami w ułamki (§ 17, us. 3), sprowadzając ułamki do spólnego mianownika, wyrażając całkowitą w postaci ułamka z tymże spólnym mianownikiem i korzystając z tego, cośmy uzasadnili w ustępie 2-im, mamy kolejno

$$\begin{aligned}\frac{3}{5}+5\frac{13}{15}+1\frac{5}{6}+4 &= \frac{3}{5}+\frac{88}{15}+\frac{11}{6}+4\\ &=\frac{18}{30}+\frac{176}{30}+\frac{55}{30}+4\\ &=\frac{18}{30}+\frac{176}{30}+\frac{55}{30}+\frac{120}{30}\\ &=\frac{18+176+55+120}{30}.\end{aligned}$$

[1]) Téj własności możnaby dowiéść inaczéj w nauce o liczbach całkowitych, ale tylko dla przypadku, gdy każdy ze składników sumy jest przez owę liczbę podzielny.

Otrzymaliśmy tu w liczniku sumę $18+176+55+120$. W téj sumie liczb całkowitych możemy zmienić dowolnie porządek składników (§ 4, us. 7, 8). Pisząc więc tę sumę np. tak: $120+176+18+55$, mamy

$$\frac{3}{5}+5\frac{13}{15}+1\frac{5}{6}+4=\frac{120+176+18+55}{30},$$

albo (us. 3)

$$\frac{3}{5}+5\frac{13}{15}+1\frac{5}{6}+4=\frac{120}{30}+\frac{176}{30}+\frac{18}{30}+\frac{55}{30},$$

skąd nakoniec, po wyciągnięciu całkowitych (§ 17, us. 4) i skróceniu ułamków, mamy

$$\frac{3}{5}+5\frac{13}{15}+1\frac{5}{6}+4=4+5\frac{13}{15}+\frac{3}{5}+1\frac{5}{6}.$$

Widzimy więc, że wogóle, jakimikolwiek są składniki, czy liczbami całkowitymi, czytéż liczbami ułamkowymi, zawsze *suma nie zależy od porządku składników.* —

b. Wiemy, że w naszym zadaniu $5\frac{13}{15}$ i $1\frac{5}{6}$ są skróceniami, zastępującymi $5+\frac{13}{15}$ i $1+\frac{5}{6}$ (por. str. 193), tak iż

$$\frac{3}{5}+5\frac{13}{15}+1\frac{5}{6}+4=\frac{3}{5}+5+\frac{13}{15}+1+\frac{5}{6}+4,$$

albo, po sprowadzeniu ułamków do spólnego mianownika 30 i wyrażeniu całkowitych w postaci ułamków z tymże mianownikiem 30,

$$\frac{3}{5}+5\frac{13}{15}+1\frac{5}{6}+4=\frac{18}{30}+\frac{150}{30}+\frac{26}{30}+\frac{30}{30}+\frac{25}{30}+\frac{120}{30},$$

czyli (us. 2)

$$\frac{3}{5}+5\frac{13}{15}+1\frac{5}{6}+4=\frac{18+150+26+30+25+120}{30}.$$

Ponieważ wskazane w liczniku dodawanie składników (całkowitych) możemy uskutecznić przy pomocy dodawań częściowych którychkolwiek składników, wziętych w jakimkolwiek porządku (§ 4, us. 10), zatym

$$18+150+26+30+25+120=(150+30+120)+(18+26+25),$$

wskutek czego

$$\frac{3}{5}+5\frac{13}{15}+1\frac{5}{6}+4=\frac{(150+30+120)+(18+26+25)}{30},$$

lub (us. 3)

$$\frac{3}{5}+5\frac{13}{15}+1\frac{5}{6}+4=\frac{150+30+120}{30}+\frac{18+26+25}{30}$$

$$=\left(\frac{150}{30}+\frac{30}{30}+\frac{120}{30}\right)+\left(\frac{18}{30}+\frac{26}{30}+\frac{25}{30}\right),$$

albo nakoniec, wyciągając całkowite i skracając ułamki,

$$\frac{3}{5}+5\frac{13}{15}+1\frac{5}{6}+4=(5+1+4)+\left(\frac{3}{5}+\frac{13}{15}+\frac{5}{6}\right),$$

t. j. *gdy w dodawaniu, które mamy wykonać, są, wogóle mówiąc, całkowite z ułamkami, to możemy dodawać do siebie oddzielnie całkowite, a oddzielnie ułamki, a suma liczb, otrzymanych z tych dwu dodawań częściowych, przedstawi sumę danych składników.*

Ponieważ w naszym zadaniu $\frac{3}{5}+5\frac{13}{15}+1\frac{5}{6}+4$ idzie nam o wyznaczenie liczby, którąby była skupieniem jedności, więc 5-u, 1-néj i 4-ch jedności, i części jedności, więc $\frac{3}{5}$, $\frac{13}{15}$ i $\frac{5}{6}$, zatym należy wykonać oddzielnie dodawanie tych całkowitych i oddzielnie dodawanie tych ułamków, a dwie te sumy częściowe, razem wzięte, dadzą szukaną sumę składników. Mamy więc

$$\frac{3}{5}+5\frac{13}{15}+1\frac{5}{6}+4=(5+1+4)+\left(\frac{3}{5}+\frac{13}{15}+\frac{5}{6}\right)$$
$$=10+\frac{18+26+25}{30}=10+\frac{69}{30}=10+2\frac{3}{10}$$
$$=(10+2)+\frac{3}{10}=12\frac{3}{10}.$$

Widzimy z tego, że, aby nie zmieniać już raz otrzymanéj sumy z dodania całkowitych, praktyczniéj będzie zacząć od dodawania ułamków (które zwykle piśmiennie wykonywamy na stronie); jeżeli zaś z tego dodawania otrzymamy ułamek niewłaściwy, to wyciągniemy zaraz z niego całkowitą i dodawać ją będziemy wraz z całkowitymi składników, a do otrzymanéj stąd liczby przypiszemy pozostały ułamek (właściwy) częściowéj sumy ułamków. A więc, mając dane powyższe zadanie, postąpimy w ten sposób:

$$\frac{3}{5}+5\frac{13}{15}+1\frac{5}{6}+4^*=12\frac{3}{10}.$$
$$\frac{3}{5}+\frac{13}{15}+\frac{5}{6}=\frac{18+26+25}{30}=2\frac{9}{30}=2\frac{3}{10};$$

* oznacza, że to, co jest po gwiazdce, piszemy dopiéro po ukończeniu rozumowania, które nas do tego doprowadziło.

a następnie wykonywamy odrazu (§ 4, us. 16): $2+5+1+4=12$ i piszemy tam, gdzie *, $=12\frac{3}{10}$. Powiemy więc ogólnie:

Aby wykonać dodawanie danych liczb ułamkowych, oddzielnie dodajemy naprzód do siebie ułamki, z téj częściowéj sumy, jeżeli ona jest ułamkiem niewłaściwym, wyciągamy całkowitą, którą dodajemy następnie wraz z całkowitymi składników: otrzymana stąd liczba całkowita, wraz z ułamkiem właściwym, otrzymanym poprzednio w częściowéj sumie ułamków, przedstawi sumę liczb danych.

Podobnie np.

$$\begin{array}{r} 3542\,\frac{7}{8} \\ 2561\,\frac{1}{2} \\ 379\,\frac{5}{6} \\ \hline 6484\,\frac{5}{24}. \end{array} \qquad \frac{7}{8}+\frac{1}{2}+\frac{5}{6}=\frac{21+12+20}{24}=\frac{53}{24}=2\frac{5}{24};$$

5. Z tego, że własność: «suma nie zależy od porządku składników» odnosi się tak do liczb całkowitych, jak i do liczb ułamkowych (us. 4 a.), wypada także, że to wszystko, o czym mówiliśmy w § 4-ym, us. 9, 10 i 11, stosuje się nietylko do liczb całkowitych, ale i do liczb ułamkowych, jak o tym podobnie przeprowadzając rozumowanie na przykładach liczebnych [1]), łatwo przekonać się można.

6. Odejmowanie, jako działanie odwrotne dodawaniu dwu składników, ma na celu z danych: sumy dwu składników i jednego z tych składników wyznaczenie drugiego składnika téj sumy. To zadanie istniéć może niezależnie od tego, czy składniki są liczbami całkowitymi, czyteż ułamkowymi. Podane więc w us. 3-im § 5-go określenie odejmowania jest ogólne. Zatym wogóle:

Odejmowanie jestto działanie, w którym, mając dane dwie liczby, odjemną i odjemnik, poszukujemy liczby, zwanéj resztą, po któréj dodaniu do odjemnika otrzymujemy odjemną.

Odjemna jest nie mniejsza od odjemnika (§ 5, us. 4 i 11).

7. Ponieważ odjemna jest sumą odjemnika i reszty, więc, jeżeli od ułamka mamy odjąć ułamek, to odjemną możemy uważać (us. 2), jako skupienie równych części jedności, którychto części pewna ilość jest przedstawiona przez odjemnik, a pozostała przez resztę szukaną. Szukana więc reszta może być wyrażona w takich częściach jedności, w jakich można wyrazić odjemną i odjemnik, a przeto za mianownik reszty możemy wziąć spólny mianownik odjemnéj i odjemnika. Gdy więc mamy np.

$$\frac{5}{6}-\frac{5}{9},$$

to należy te ułamki sprowadzić do spólnego mianownika, co uskuteczniając, mamy

$$\frac{5}{6}-\frac{5}{6}=\frac{15}{18}-\frac{10}{18}.$$

---

[1]) Dla ogólności dobrze jest wybierać przykłady, w które wchodzą tak liczby całkowite, jak i ułamkowe. Oszczędzając miejsca, nie przeprowadzamy tu tego: droga wskazana w us. 4-ym w alineach a. i b.

Odejmując zaś od piętnastu-*osiemnastych*, dziesięć-*osiemnastych*, otrzymamy oczywiście *osiemnaste* części, których będzie 15—10; więc

$$\frac{5}{6}-\frac{5}{9}=\frac{15}{18}-\frac{10}{18}=\frac{15-10}{15}=\frac{5}{18}.$$

Oczywiście, że gdyby dane do odjęcia ułamki posiadały już jednakowe mianowniki, to postępowanie z nimi byłoby prostsze. Tak np.

$$\frac{11}{12}-\frac{7}{12}=\frac{11-7}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}.$$

Aby odjąć od siebie dwa dane ułamki, należy, wrazie gdy ich mianowniki są różne, sprowadzić je do spólnego mianownika, a liczniki tych postaci odjąć od siebie; otrzymana stąd liczba jest licznikiem reszty, mianownikiem zaś jéj tenże sam mianownik spólny.

Z tego, że np. $\frac{24}{7}-\frac{5}{7}=\frac{25-5}{7}$, wypada nawzajem

$$\frac{24-5}{7}=\frac{24}{7}-\frac{5}{7},$$

czyli (§ 17, us. 5)

$$(24-5):7=24:7-5:7,$$

t. j. [1] *aby różnicę dwu liczb podzielić przez pewną liczbę, można odjemną i odjemnik podzielić przez tę liczbę* (por. § 6, us. 15).

8. a. Jeżeli od całkowitéj z ułamkiem mamy odjąć całkowitą z ułamkiem, to, podobnie jak w dodawaniu, zastąpimy to odejmowanie przez odejmowania częściowe: osobno wykonamy odejmowanie ułamków, osobno całkowitych, a suma tych reszt częściowych przedstawi resztę liczb danych. Aby jednak te odejmowania częściowe można było uskutecznić, potrzeba, aby w każdym odjemna była nie mniejszą od odjemnika. Całkowita odjemnéj nie może być mniejsza od całkowitéj odjemnika, gdyż inaczéj dana odjemna byłaby mniejszą od danego odjemnika, co być nie może. Ale zdarzyć się może, że ułamek odjemnéj jest mniejszy (§ 17, us. 14) od ułamka odjemnika.

Weźmy np.

$$8\frac{5}{6}-3\frac{5}{9}.$$

tu $\frac{5}{6}>\frac{5}{9}$, więc, gdy $\frac{5}{6}-\frac{5}{9}=\frac{15-10}{18}=\frac{5}{18}$, a $8-3=5$, mamy $8\frac{5}{6}-3\frac{5}{9}=5\frac{5}{18}$. Piśmiennie ten rachunek tak przedstawiamy:

$$8\frac{5}{6}-3\frac{5}{9}*=5\frac{5}{18}.$$

$$\frac{5}{6}-\frac{5}{9}=\frac{15-10}{18}=\frac{5}{18};$$

* oznacza, że to, co jest po gwiazdce, piszemy dopiero po ukończeniu rozumowania, które nas do tego doprowadziło.

[1]) Można tu zrobić taką samą uwagę, jak przy us. 3

a następnie, wykonawszy wprost odejmowanie całkowitych ($8-3=5$), piszemy tam, gdzie *, $=5\frac{5}{18}$.

Jeeeli jednak mamy zadanie

$$8\frac{5}{9}-3\frac{5}{6},$$

to tu nie możemy od $\frac{5}{9}$ odjąć $\frac{5}{6}$; należy więc odjemną tak rozłożyć na części, iżby w odjemnéj znalazł się ułamek większy od ułamka odjemnika. Łatwo się przekonać, iż będzie najdogodniéj, gdy z całkowitych odjemnéj oddzielimy jedność i tę jedność wraz z ułamkiem odjemnéj włączymy (§ 17. us. 3) w ułamek: $8\frac{5}{9}=7+1\frac{5}{9}=7+\frac{14}{9}$ wtedy, wykonywając częściowe odejmowanie ułamków,

$$\frac{14}{9}-\frac{5}{6}=\frac{28-15}{18}=\frac{13}{18},$$

otrzymujemy ułamek właściwy [1]), który dopisując do reszty z częściowego odejmowania całkowitych: $7-3=4$, otrzymujemy, jako różnicę liczb danych: $4\frac{13}{18}$. Postępowanie to piśmiennie tak przedstawimy:

$$8\frac{5}{9}-3\frac{5}{6}*=4\frac{13}{18}.$$

$$\frac{5}{9}-\frac{5}{6}=\frac{10-15}{18},$$

$$1\frac{5}{9}-\frac{5}{6}=\frac{28-15}{18}=\frac{13}{18};$$

* oznacza tu i daléj toż samo, co poprzednio.

a następnie, wykonawszy wprost odejmowanie całkowitych ($7-3=4$), piszemy tam, gdzie *, $=4\frac{13}{18}$.

b. Od całkowitéj z ułamkiem odjąć ułamek (rozumiemy tu, oczywiście, ułamek właściwy), np. (rozumowanie takież jak w poprzednim przypadku)

$$5\frac{3}{8}-\frac{3}{5}*=4\frac{31}{40}. \qquad 5\frac{3}{5}-\frac{3}{8}*=5\frac{9}{40}.$$

$$1\frac{3}{8}-\frac{3}{5}=\frac{55-24}{40}=\frac{31}{40}; \qquad \frac{3}{5}-\frac{3}{8}=\frac{24-15}{40}=\frac{9}{40};$$

Jeżeli w tym lub poprzednim przypadku w odjemnéj i w odjemniku mamy jednakowe ułamki, np. $8\frac{5}{9}-3\frac{5}{9}$, to reszta, jako liczba, po któréj dodaniu do odjemnika otrzymać mamy odjemną,

[1]) Ta reszta + ułamek odjemnika = 1 + ułamek (dany) odjemnéj. Ponieważ ułamek odjemnika jest większy od ułamka odjemnéj, więc ta reszta jest mniejsza od jedności.

zawiérającą ułamek $\frac{5}{9}$, który jest już w odjemniku, będzie właściwie liczbą, którą tylko trzeba dodać do całkowitéj odjemnika, aby otrzymać całkowitą odjemnéj, to jest reszta będzie liczbą całkowitą. Jakoż, $8\frac{5}{9} - 3\frac{5}{9} = 5$; podobnie np. $5\frac{3}{8} - \frac{3}{8} = 5$. Możemy więc powiedziéć: jeżeli ułamki odjemnéj i odjemnika są jednakowe, to reszta jest całkowita.

c. Od całkowitéj odjąć całkowitą z ułamkiem, np.

$$8 - 3\frac{4}{7}.$$

Mamy tu znaléść resztę, t. j. taką liczbę, iż dodając ją do $3\frac{4}{7}$ otrzymalibyśmy 8; w reszcie więc będzie ułamek, który razem z $\frac{4}{7}$ stanowić będzie 1-ść, a ta 1-ść wraz z całkowitymi odjemnika i reszty wyda 8. Należy więc z 8-u jedności odjemnéj oddzielić jednę, od niéj odjąć $\frac{4}{7}$, a ułamek, jaki stąd otrzymamy, dopisać do reszty, wypadłéj z odejmowania 7 — 3. Aby zaś od 1 odjąć $\frac{4}{7}$, przedstawimy 1 w postaci ułamka (§ 17, us. 3) z tymże mianownikiem 7. A więc

$$8 - 3\frac{4}{7}{}^{*} = 4\frac{3}{7}.$$

$$1 - \frac{4}{7} = \frac{7-4}{7} = \frac{3}{7};$$

d. Od całkowitéj odjąć ułamek (rozumowanie takież, jak w poprzednim przypadku), np.

$$9 - \frac{7}{16}{}^{*} = 8\frac{9}{16}.$$

$$1 - \frac{7}{16} = \frac{16-7}{16} = \frac{9}{16}.$$

e. Gdy zaś mamy od całkowitéj z ułamkiem odjąć całkowitą, np. $8\frac{3}{5} - 5$, to mamy tu znaléść liczbę, która dodana do 5 daje $8\frac{3}{8}$; w liczbę więc szukaną wejdzie ułamek $\frac{3}{5}$, obok tego, co wypadnie z odejmowania całkowitych, a więc

$$8\frac{3}{8} - 5 = 3\frac{3}{5}.$$

Zbiérając to wszystko, powiemy ogólnie:

Aby wykonać odejmowanie dwu danych liczb ułamkowych, odejmujemy od siebie oddzielnie ułamki i oddzielnie całkowite, a resztę z częściowego odejmowania ułamków przypisujemy do reszty z częściowego odejmowania całkowitych. Jeżeliby jednak ułamek odjemnéj był mniejszy od *ułamka odjemnika, to uprzednio całkowitą odjemnéj zmniejszamy o jedność, którą z ułamkiem odjemnéj włączamy w ułamek; jeżeliby zaś odjemna była liczbą całkowitą, to podobnie, zmniejszamy uprzednio tę całkowitą o jedność, którą przedstawiamy w postaci ułamka z takim mianownikiem, jaki ma ułamek odjemnika.*

9. Można łatwo okazać, że własności sumy i reszty, wyprowadzone w § 5, us. 8 i 9, (podobnie jak własności, o których mowa wyżéj w us. 5) mają miejsce również i dla liczb ułamkowych.

(Zadania arytmetyczne. § 18.)

---

§ 19. MNOŻENIE LICZB UŁAMKOWYCH.

1. Gdy mamy pomnożyć przez siebie dwie liczby całkowite, np. 8×3, to, jak wiemy (§ 6, us. 3), aby otrzymać iloczyn, możemy mnożną wziąć jako składnik tyle razy, ile jedności jest w mnożniku. Jeżeli jednak chcemy na liczbach ułamkowych uskutecznić działanie, odpowiadające mnożeniu liczb całkowitych, natenczas, w przypadku, gdy mnożnik jest liczbą ułamkową, np. gdy chcemy pomnożyć 8 przez $\frac{3}{4}$,

$$8 \times \frac{3}{4},$$

nie może być mowy o tym, abyśmy mieli 8 wziąć $\frac{3}{4}$ raza jako składnik. Wypowiedziane przeto w ten sposób, jak powyżéj, powstawanie iloczynu z mnożnéj nie może się stosować do tego przypadku.

Aby więc pojąć, jakie znaczenie mieć powinno: $8 \times \frac{3}{4}$ zgodnie z tym, co oznacza: 8×3, należy nam jeszcze raz się zastanowić nad mnożeniem liczb całkowitych i tak wysłowić się o powstawaniu iloczynu z mnożnéj, aby to mogło się także odnosić do przypadku, gdy mnożnik jest liczbą ułamkową.

Powiedzieliśmy, że w mnożeniu liczb całkowitych, np. 8×3, otrzymujemy iloczyn z mnożnéj, biorąc ją jako składnik tyle razy, ile w mnożniku jest jedności. Aby zaś wyraźnie zaznaczyć, ile w mnożniku jest jedności, należy (§ 4, us. 5) mnożnik przedstawić jako sumę jedności, więc $3 = 1 + 1 + 1$. A gdy «mnożenie jestto działanie, zapomocą którego, mając dane dwie liczby, mnożną i mnożnik, odnajdujemy liczbę, zwaną iloczynem, którą otrzymalibyśmy z mnożnéj, biorąc ją jako składnik tyle razy, ile jest jedności w mnożniku», przeto możemy powiedzieć:

ponieważ mnożnik $3 = 1 + 1 + 1$,
więc iloczyn $= 8 + 8 + 8 = 24$.

Przyglądając się temu, widzimy, że dla utworzenia mnożnika z jedności, trzeba było *jedność wziąć jako składnik trzy razy,* i taksamo, dla utworzenia iloczynu z mnożnéj, trzeba *mnożną wziąć jako składnik trzy razy;* możemy więc powiedziéć, że «iloczyn powstaje z mnożnéj w taki sam sposób, w jaki mnożnik powstał z jedności». Tak się wyrażając o powstawaniu iloczynu z mnożnéj, w niczym nie naruszamy naszego pojęcia o mnożeniu: toż samo, co poprzednio, innymi tylko słowy teraz wyrażamy.

Moglibyśmy nawet tak się wyrażać o powstawaniu iloczynu z mnożnéj odrazu, t. j. wtedy, gdyśmy zaczynali mówić o mnożeniu liczb całkowitych. Nie robiliśmy zaś tak poprzednio tylko z tego powodu, że w mnożeniu liczb całkowitych powstawanie iloczynu z mnożnéj w taki sposób, w jaki mnożnik powstał z jedności, wychodzi na jedno z tym, że iloczyn otrzymujemy z mnożnéj, biorąc ją jako składnik tyle razy, ile jedności jest w mnożniku; ten zaś ostatni sposób wyrażania się był dosadniejszy i, w każdym razie, przy początku nauki łatwiéj zrozumiały.

To, że «iloczyn tak powstaje z mnożnéj, jak mnożnik powstał z jedności» możemy odniéść i do przypadku, gdy mnożnik jest liczbą ułamkową. Tak np., gdy mamy $8 \times \frac{3}{4}$, to, ponieważ mnożnik $\frac{3}{4}$ powstał *z jedności* w taki sposób (§ 16, us. 1), iż 1 zmniejszyliśmy 4 razy i to, co stąd wypadło, t. j. $\frac{1}{4}$, wzięliśmy 3 razy jako składnik, aby podobnie utworzyć iloczyn z *mnożnéj,* należy mnożną 8 zmniejszyć 4 razy, a otrzymawszy wskutek tego 2, wziąć to 2 jako składnik 3 razy; będziemy więc mieli $2+2+2=6$; jest zatym $8 \times \frac{3}{4}=6$.

Możemy więc powiedziéć ogólnie:

Mnożenie jestto działanie, zapomocą którego, mając dwie liczby, mnożną i mnożnik, odnajdujemy liczbę, zwaną iloczynem, którą możemy otrzymać z mnożnéj w taki sam sposób, w jaki mnożnik powstaje z jedności.

2. Rzecz prosta, że początkowo uskuteczniono mnożenie na liczbach całkowitych; późniéj dopiéro mnożono przez siebie liczby ułamkowe. Tym się objaśnia nazwa tego działania: «mnożenie», jednoznaczna z powiększaniem. Rzeczywiście, gdy liczbę daną mnożymy przez 2, 3, i t. d. (wogóle, przez liczbę większą od 1), to otrzymujemy liczbę większą od danéj. Gdy zaś, jak wyżéj *mnożyliśmy* np. liczbę 8 przez $\frac{3}{4}$ (przez ułamek mniejszy od 1), to otrzymaliśmy liczbę 6, *mniejszą* od mnożnéj 8, którąśmy pomnożyli przez $\frac{3}{4}$. Okazuje to, iż działanie dobrze już znane, uskuteczniane na liczbach całkowitych i słusznie wtedy zwane mnożeniem, stosowano później także i w tym przypadku, gdy mnożnik był wogóle ułamkowy, choćby mniejszy od jedności, pozostawiając dlań zawsze nazwę: «mnożenie» i używając słowa: «mnożę» nawet wtedy, gdy wskutek tego działania, (przy mnożniku mniejszym od 1) w rzeczywistości liczba się zmniejszała.

Dlatego w arytmetyce wyrazy: «mnożę», «mnożenie» mają niekiedy znaczenie niezgodne z ich zwykłym rozumieniem; wskutek tego «mnożyć» niezawsze znaczy: powiększyć (por. us. 9).

3. Wiemy, że całkowitą z ułamkiem możemy włączyć w ułamek (§ 17, us. 2), a całkowitą przedstawić w postaci ułamka o mianowniku równym 1 (§ 17, us. 9), więc zadanie np. $2\frac{3}{5} \times \frac{3}{4}$ możemy sprowadzić do zadania $\frac{13}{5} \times \frac{3}{4}$ podobnie zadanie np. $\frac{8}{11} \times 6$ do zadania $\frac{8}{11} \times \frac{6}{1}$. Mnożenie więc jakichkolwiek liczb ułamkowych może być zawsze sprowadzone do mnożenia ułamka przez ułamek.

Aby jednak wprost przeprowadzić rozumowanie także wtedy, kiedy, czyto mnożna, czytéż mnożnik są liczbami całkowitymi, oddzielnie rozważymy mogące się tu zdarzyć przypadki *).

a. Pomnożyć ułamek przez całkowitą, np. $\frac{5}{7} \times 4$. Otrzymaliśmy mnożnik 4 z jedności, biorąc ją 4 razy jako składnik, $4 = 1 + 1 + 1 + 1$; więc iloczyn powstanie z mnożnéj $\frac{5}{7}$, gdy weźmiemy ją jako składnik 4 razy; $\frac{5}{7} + \frac{5}{7} + \frac{5}{7} + \frac{5}{7} = \frac{5+5+5+5}{7}$ (§ 18, us. 2). Tu w liczniku mamy 5 wziąć 4 razy jako składnik, a to dodawanie jednakowych składników możemy zastąpić (§ 6, us. 2) przez mnożenie 5×4, a więc nasz iloczyn jest $\frac{5 \times 4}{7}$, t. j.

$$\frac{5}{7} \times 4 = \frac{5 \times 4}{7}.$$

Aby ułamek pomnożyć przez całkowitą, należy licznik pomnożyć przez całkowitą: otrzymana stąd liczba jest licznikiem iloczynu, mianownikiem zaś mianownik danego ułamka. Mówi się często krócéj: aby ułamek pomnożyć przez całkowitą należy jego licznik przez tę całkowitą pomnożyć.

Wykonywając w naszym przykładzie mnożenie w liczniku, otrzymujemy w iloczynie $\frac{20}{7} = 2\frac{6}{7}$. — Przeprowadzając to rozumowanie np. na tablicy, dobrze jest jednocześnie jego ślad zaznaczać w ten sposób:

*) Zaczniemy od tego, w którym rozumowanie jest najprostsze.

$\frac{5}{7}\times 4^* = \frac{5\times 4}{7} = \frac{20}{7} = 2\frac{6}{7}$. * oznacza, iż to, co jest po gwiazdce, piszemy dopiero po ukończeniu rozumowania, które nas do tego doprowadziło.

mnożnik $4 = 1+1+1+1$

iloczyn $= \frac{5}{7}+\frac{5}{7}+\frac{5}{7}+\frac{5}{7} = \frac{5+5+5+5}{7} = \frac{5\times 4}{7}$

Taksamo rozumować będziemy, mając do pomnożenia ułamek niewłaściwy przez całkowitą, np. $\frac{17}{3}\times 4$.

b. Pomnożyć całkowitą przez ułamek np. $6\times\frac{3}{8}$. Tu mnożnik $\frac{3}{8}$ powstał z jedności w taki sposób, iż 1 zmniejszyliśmy 8 razy i otrzymawszy $\frac{1}{8}$ wzięliśmy tę część jedności jako składnik 3 razy, $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$; należy więc w tenże sam sposób utworzyć iloczyn z mnożnéj 6, t. j. mnożną 6 zmniejszyć 8 razy i otrzymaną (§ 16, us. 1; § 17, us. 5) liczbę $\frac{6}{8}$ wziąć jako składnik także 3 razy, $\frac{6}{8}+\frac{6}{8}+\frac{6}{8}$. Lecz to $=\frac{6+6+6}{8}$. W liczniku mamy dodawanie jednakowych składników, $6+6+6$; można je zastąpić przez mnożenie 6×3. Nasz więc iloczyn jest $\frac{6\times 3}{8}$, t. j.

$$6\times\frac{3}{8} = \frac{6\times 3}{8}.$$

Aby całkowitą pomnożyć przez ułamek, należy całkowitą pomnożyć przez licznik: otrzymana stąd liczba jest licznikiem iloczynu, mianownikiem zaś mianownik ułamka danego.

Przeprowadzając to rozumowanie, dobrze jest jednocześnie ślad jego zaznaczać piśmiennie, np. w ten sposób:

$6\times\frac{3}{8}^* = \frac{6\times 3}{8} = \frac{18}{8} = 2\frac{1}{4}$. * oznacza tu i dalej toż samo, co poprzednio.

mnożnik $\frac{3}{8}$. . . . 1 zmn. 8 r.; otrzym. $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$

iloczyn . . . . 6 zmn. 8 r.; otrzym. $\frac{6}{8}$; $\frac{6}{8}+\frac{6}{8}+\frac{6}{8} = \frac{6+6+6}{8} = \frac{6\times 3}{8}$

Taksamo rozumować będziemy, gdyby było np. $7\times\frac{5}{3}$.

c. Pomnożyć ułamek przez ułamek, np. $\frac{4}{5}\times\frac{3}{8}$. Tu mnożnik... (jak wyżéj); należy więc w tenże sam sposób utworzyć iloczyn z mnożnéj $\frac{4}{5}$, t. j. mnożną $\frac{4}{5}$ zmniejszyć 8 razy, co uskutecznimy, (§ 17, us. 6, a.) mnożąc przez 8 jéj mianownik, $\frac{4}{5\times 8}$, i wziąć tę liczbę 3 razy jako składnik, $\frac{4}{5\times 8}+\frac{4}{5\times 8}+\frac{4}{5\times 8}$. Lecz to $=\frac{4+4+4}{5\times 8}$; zastępując zaś w liczniku dodawanie jednakowych składników przez mnożenie, $4+4+4=4\times 3$, otrzymujemy $\frac{4\times 3}{5\times 8}$, t. j.

$$\frac{4}{5}\times\frac{3}{8} = \frac{4\times 3}{5\times 8}.$$

Aby ułamek pomnożyć przez ułamek, należy za licznik iloczynu wziąć iloczyn liczników danych ułamków, a za mianownik iloczyn ich mianowników [1]). Mówi się często krócéj: aby ułamek pomnożyć przez ułamek, należy pomnożyć licznik przez licznik, a mianownik przez mianownik.

W ciągu tego rozumowania, możemy jednocześnie ślad jego zaznaczać, pisząc np.

$$\frac{4}{5}\times\frac{3}{8}*=\frac{4\times3}{5\times8}=\frac{12}{40}=\frac{3}{10}.$$

mnożnik $\frac{3}{8}$ .... 1 zmn. 8 r.; otrzym. $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$

iloczyn .... $\frac{4}{5}$ zmn. 8 r.; otrzym. $\frac{4}{5\times8}$; $\frac{4}{5\times8}+\frac{4}{5\times8}+\frac{4}{5\times8}=$

$$=\frac{4+4+4}{5\times8}=\frac{4\times3}{5\times8}.$$

Taksamo rozumować będziemy, gdyby było np. $\frac{17}{3}\times\frac{3}{8}$, $\frac{6}{7}\times\frac{5}{3}$, $\frac{5}{1}\times\frac{3}{4}$ i t. d.

d. *Wrazie, gdy albo mnożna, albo mnożnik, albo mnożna i mnożnik jednocześnie, są całkowitymi z ułamkami, włączamy je w ułamki, przez co sprowadzamy rzecz do jednego z poprzedzających przypadków* [2]).

4. Jeżeli mamy znaléść iloczyn trzech lub więcéj liczb, pośród których są ułamkowe, np.

$$\frac{55}{63}\times\frac{3}{4}\times\frac{14}{15}\times3\times12\frac{1}{2}\times\frac{1}{7},$$

czyli, mówiąc wyraźniéj, jeżeli mamy $\frac{55}{63}$ pomnożyć przez $\frac{3}{4}$, otrzymany stąd iloczyn pomnożyć przez $\frac{14}{15}$, a ten iloczyn pomnożyć następnie przez 3 i t. d., to według prawideł, podanych w poprzedzającym ustępie, mamy:

$$\frac{55}{63}\times\frac{3}{4}=\frac{55\times3}{63\times4}$$

$$\frac{55\times3}{63\times4}\times\frac{14}{15}=(*)\,\frac{55\times3\times14}{63\times4\times15}$$

$$\frac{55\times3\times14}{63\times4\times15}\times3=\frac{55\times3\times14\times3}{63\times4\times15}$$

$$\frac{55\times3\times14\times3}{63\times4\times15}\times12\frac{1}{2}=\frac{55\times3\times14\times3}{63\times4\times15}\times\frac{25}{2}=\frac{55\times3\times14\times3\times25}{63\times4\times15\times2}$$

$$\frac{55\times3\times14\times3\times25}{63\times4\times15\times2}\times\frac{1}{7}=(**)\,\frac{55\times3\times14\times3\times25}{63\times4\times15\times2\times7},$$

[1]) To prawidło widocznie obejmuje w sobie prawidła a. i b., jako przypadki szczególne.

[2]) Por. niżéj us. 7.

(*) Licznik mnożnéj, t. j. liczbę przedstawioną (§ 6, us. 2) przez iloczyn 55×3, mnożymy przez licznik mnożnika, t. j. przez 3, a mianownik mnożnéj i t. d.

(**) $55\times3\times14\times3\times25\times1=55\times3\times14\times3\times25$ (§ 6, us. 3).

a więc

$$\frac{55}{63}\times\frac{3}{4}\times\frac{14}{15}\times 3\times 12\frac{1}{2}\times\frac{1}{7}=\frac{55}{63}\times\frac{3}{4}\times\frac{14}{15}\times 3\times\frac{25}{2}\times\frac{1}{7}=$$

$$=\frac{55\times3\times14\times3\times25}{63\times4\times15\times2\times7},$$

t. j., *aby znaléść iloczyn kilku czynników pośród których są ułamkowe, należy, włączywszy całkowite z ułamkami* (jeżeli są) *w ułamki, za licznik iloczynu wziąć iloczyn liczników i całkowitych, a za jego mianownik iloczyn mianowników.*

Należałoby następnie wykonać mnożenia, wskazane w liczniku i mianowniku ułamka $\frac{55\times3\times14\times3\times25}{63\times4\times15\times2\times7}$, późniéj zaś, jeżeli można, ułamek skrócić, t. j. *liczby przedstawione przez te iloczyny* w liczniku i mianowniku podzielić przez tę samę liczbę. Lecz wiemy, że, aby iloczyn kilku czynników podzielić przez pewną liczbę, możemy jeden z jego czynników przez tę liczbę podzielić (§ 7, us. 13); więc, zamiast naprzód uskuteczniać wskazane mnożenia w liczniku i mianowniku, a dopiéro tak otrzymane liczby dzielić przez ich spólne dzielniki, będzie korzystniéj, gdy, przed wykonaniem tych mnożeń, podzielimy jednocześnie jeden czynnik licznika i jeden mianownika przez ich spólny dzielnik, taksamo postąpimy z drugą, trzecią, i t. d. parą takich czynników, dopóki nie dojdziemy do tego, że każdy czynnik licznika będzie liczbą piérwszą względem każdego czynnika mianownika [1]). Możemy więc tu np. tak postąpić: czynnik licznika 55 i czynnik mianownika 15 podzielimy przez 5, w zmienionych iloczynach czynniki 3 l. i 3 m. podzielimy przez 3, następnie czynniki 14 l. i 7 m. przez 7, czynniki 2 l. i 2 m. przez 2, czynniki 3 l. i 63 m. przez 3,

$$\frac{55\times3\times14\times3\times25}{63\times4\times15\times2\times7}=\frac{11\times3\times14\times3\times25}{63\times4\times3\times2\times7}=^{(*)}\frac{11\times14\times3\times25}{63\times4\times2\times7}=\frac{11\times2\times3\times25}{63\times4\times2}=$$

$$=\frac{11\times3\times25}{63\times4}=\frac{11\times25}{21\times4}=\frac{275}{84}=3\frac{23}{84}.$$

Zwykle nie wypisujemy tak, jak tu zrobiliśmy, tych postaci ułamka iloczynu, lecz przekréślamy skracane czynniki licznika i mianownika ułamka $\frac{55\times3\times14\times3\times25}{63\times4\times15\times2\times7}$, lub częściéj, co na jedno wychodzi, odrazu przekréślamy w iloczynie $\frac{55}{63}\times\frac{3}{4}\times\frac{14}{15}\times 3\times\frac{25}{2}\times\frac{1}{7}$ licznik któregokolwiek ułamka, lub czynnik całkowity, z mianownikiem innego, jak tylko dostrzeżemy, że one mają spólny dzielnik (możemy

[1]) Wtedy i ich iloczyny będą liczbami piérwszymi względem siebie (§ 14, us. 16), t. j. uskuteczniwszy mnożenie, otrzymamy nieskracalną postać ułamka, przedstawiającego iloczyn liczb danych.

(*) «Aby iloczyn podzielić przez jeden z jego czynników, należy wziąć iloczyn czynników pozostałych, czyli należy ów czynnik opuścić» (§ 7, us. 13).

bowiém z téj pary liczb uważać jednę jako czynnik licznika, a drugą jako czynnik mianownika iloczynu), a nad nimi piszemy te liczby, które wypadają po podzieleniu ich przez ten spólny dzielnik *). Wypadających w ten sposób jedności nie piszemy; jeżeli jednak wszystkie czynniki licznika iloczynu się skrócą, to należy napisać w liczniku iloczynu 1 (która jest iloczynem jedności wypadłych wskutek częściowych skracań), np. $\frac{6}{55} \times \frac{11}{18} = \frac{6 \times 11}{55 \times 18} = \frac{1}{11 \times 3} = \frac{1}{33}$; podobnie jeżeli wszystkie czynniki mianownika iloczynu się skrócą, to wypadłoby napisać w mianowniku 1, — lecz wtedy (§ 18, us. 9) otrzymujemy całkowitą, np. $\frac{3}{4} \times 24 \times 1\frac{2}{3} = \frac{3 \times 24 \times 5}{4 \times 3} = \frac{6 \times 5}{1} = 6 \times 5 = 30$.

5. Jeżeli w iloczynie dwu lub więcéj czynników, pośród których są ułamkowe, np. w iloczynie $\frac{55}{63} \times \frac{3}{4} \times \frac{14}{15} \times 3 \times 12\frac{1}{2} \times \frac{1}{7}$, przestawimy jakkolwiek czynniki, to skutkiem tego w liczniku i mianowniku ułamka $\frac{55 \times 3 \times 14 \times 3 \times 25}{63 \times 4 \times 15 \times 2 \times 7}$, do którego dany iloczyn się sprowadza, zajdzie zmiana porządku czynników. Ponieważ zaś tak iloczyn $55 \times 3 \times 14 \times 3 \times 25$, jak i iloczyn $63 \times 4 \times 15 \times 2 \times 7$ od porządku czynników nie zależy (§ 6, us. 10), więc wszelkie przestawienie czynników danego iloczynu nie zmienia liczby, którą ten iloczyn przedstawia. Widzimy więc, że wogóle:

Iloczyn nie zależy od porządku czynników.

6. Z tego zaś wypada, że własności iloczynu, wypowiedziane w § 6 (druga część ustępu 10, ustęp 12) są ogólne, t. j. że one stosują się do iloczynów tak liczb całkowitych, jak i ułamkowych.

7. Wróćmy jeszcze do mnożenia dwu czynników, w przypadku, gdy jeden z nich, lub oba są całkowitymi z ułamkami. Na mocy własności, o których mowa wyżéj w ustępach 3 i 5, oraz tego, co wiemy o dodawaniu liczb ułamkowych (§ 18, us. 4, 2, 3, 5), łatwo przeprowadzimy rozumowanie, którego tutaj ślad tylko (oszczędzając miejsca) zaznaczamy.

a. $$5\frac{2}{7} \times 3 = 5\frac{2}{7} + 5\frac{2}{7} + 5\frac{2}{7} = 5 + \frac{2}{7} + 5 + \frac{2}{7} + 5 + \frac{2}{7} =$$
$$= (5 + 5 + 5) + \left(\frac{2}{7} + \frac{2}{7} + \frac{2}{7}\right)$$
$$= 5 \times 3 + \frac{2}{7} \times 3.$$

*) Trudności druku nie pozwalają nam tu tego przedstawić.

b. $5\frac{2}{7}\times\frac{3}{4}=\frac{37}{7\times4}+\frac{37}{7\times4}+\frac{37}{7\times4}=\frac{35+2}{7\times4}+\frac{35+2}{7\times4}+\frac{35+2}{7\times4}$

$=\left(\frac{35}{7\times4}+\frac{35}{7\times4}+\frac{35}{7\times4}\right)+\left(\frac{2}{7\times4}+\frac{2}{7\times4}+\frac{2}{7\times4}\right)$

$=\left(\frac{5}{4}^{(*)}+\frac{5}{4}+\frac{5}{4}\right)+\frac{2\times3}{7\times4}$

$=\frac{5\times3}{4}+\frac{2\times3}{7\times4}$, a to wychodzi na to samo, co

$=5\times\frac{3}{4}+\frac{2}{7}\times\frac{3}{4}$.

c. $5\frac{2}{7}\times2\frac{3}{4}=5\frac{2}{7}\times\frac{11}{4}=5\times\frac{11}{4}+\frac{2}{7}\times\frac{11}{4}$ na mocy *b.*), lecz to (us. 5)

$=\frac{11}{4}\times5+\frac{11}{4}\times\frac{2}{7}=2\frac{3}{4}\times5+2\frac{3}{4}\times\frac{2}{7}$, co, według a. i b.,

$=2\times5+\frac{3}{4}\times5+2\times\frac{2}{7}+\frac{3}{4}\times\frac{2}{7}$

$=5\times2+\frac{2}{7}\times2+5\times\frac{3}{4}+\frac{2}{7}\times\frac{3}{4}$.

Powiemy więc wogóle, że *gdy mamy całkowitą z ułamkiem pomnożyć przez całkowitą z ułamkiem, to możemy utworzyć częściowe iloczyny: całkowitéj mnożnéj przez całkowitą mnożnika, ułamka mnożnéj przez całkowitą mnożnika, całkowitéj mnożnéj przez ułamek mnożnika, ułamka mnożnéj przez ułamek mnożnika, i wziąć sumę tych iloczynów.* Bywa to niekiedy dogodnym. Np.

$101\frac{1}{36}\times360\frac{25}{101}^{*}=36360+10+25+\frac{25}{3636}=36395\frac{25}{3636}$.

$101\times360=36360$; $\frac{1}{36}\times360=10$; $101\times\frac{25}{101}=25$; $\frac{1}{36}\times\frac{25}{101}=\frac{3636}{25}$;

8. Jeżeli mówimy np. «trzy-czwarte dwudziestu», to mamy tu na myśli liczbę, którą otrzymamy, gdy 20 rozłożymy na 4 części równe i takich części weźmiemy 3. Winniśmy więc tutaj uskutecznić toż samo z liczbą 20, aby otrzymać $\frac{3}{4}$ dwudziestu, co trzeba zrobić z jednością, aby otrzymać $\frac{3}{4}$ jedności (§ 16, us. 1). A więc: $\frac{3}{4}$ liczby 20 taksamo powstaje z 20-u, jak $\frac{3}{4}$ z 1-ści. A więc (us. 1), mówiąc «trzy-czwarte dwudziestu», mamy na myśli liczbę, którą przedstawia iloczyn $20\times\frac{3}{4}$ (mnożna 20, mnożnik $\frac{3}{4}$), t. j. liczbę 15. Podobnie np. $\frac{3}{4}$ liczby $2\frac{1}{2}$ jest $2\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{15}{8}=1\frac{7}{8}$; $\frac{19}{8}$ liczby $2\frac{2}{3}$ jest $2\frac{2}{3}\times\frac{19}{8}=$ $=6\frac{1}{3}$; i t. d.

(*) § 17, us. 6 e.

Ułamek liczby danéj jest liczbą, którą otrzymamy z danéj, gdy ją przez ten ułamek pomnożymy.

Zamiast mówić: $\frac{19}{8}$ liczby $2\frac{2}{3}$, moglibyśmy powiedzieć: $2\frac{3}{8}$ liczby $2\frac{2}{3}$. Zwykle jednak wtedy mówimy albo: $\frac{19}{8}$ liczby $2\frac{2}{3}$ albotéż: 2 liczby $2\frac{2}{3}$ i $\frac{3}{8}$ liczby $2\frac{2}{3}$.

Podobnie, jeżeli powiemy np. «dwie-piąte trzech-czwartych dwudziestu», to ponieważ «trzy-czwarte dwudziestu» oznacza liczbę, przedstawioną przez iloczyn $20 \times \frac{3}{4}$, więc $\frac{2}{5}$ téj liczby jest $\left(20 \times \frac{3}{4}\right) \times \frac{2}{5} = 20 \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{5}$. Zatym przytoczone wyrażenie oznacza liczbę $20 \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = 6$.

9. Jeżeli jakąkolwiek liczbę daną mamy pomnożyć przez ułamek właściwy, np. przez $\frac{5}{6}$, to, na mocy powyższego, możemy powiedzieć, że mamy wziąć $\frac{5}{6}$-ych liczby danéj, a więc nie weźmiemy wszystkich sześciu szóstych części, razem stanowiących tę liczbę, ale tylko 5 z tych części, a więc niecałą liczbę. Skutkiem tego, po pomnożeniu, otrzymamy liczbę mniejszą od danéj. Powiemy więc, że (por. us. 2)

Mnożąc jakąkolwiek liczbę przez ułamek właściwy, zmniejszamy ją.

Podobnie znajdziemy, że *mnożąc jakąkolwiek liczbę przez liczbę większą od 1, zwiększamy ją.*

10. W przypadku szczególnym, miéć będziemy np. $\frac{5}{7}$ liczby $\frac{7}{5}$, co oznacza $\frac{7}{5} \times \frac{5}{7} = 1$; podobnie: $\frac{1}{7}$ liczby 7 oznacza $7 \times \frac{1}{7} = 1$, 9 liczb $\frac{1}{9}$ oznacza $\frac{1}{9} \times 9 = 1$, $\frac{3}{8}$ liczby $2\frac{2}{3}$ oznacza $2\frac{2}{3} \times \frac{3}{8} = \frac{8}{3} \times \frac{3}{8} = 1$. Widzimy z tego, że, aby z liczby danéj, wskutek pomnożenia jéj przez pewien czynnik, otrzymać 1, należy za ten czynnik przyjąć liczbę, któréj licznik jest mianownikiem liczby danéj, a mianownik licznikiem liczby danéj (stosuje się to także np. do drugiego przykładu, bo $7 = \frac{7}{1}$).

Gdy mówimy $\frac{5}{7}$ liczby $\frac{7}{5}$, to liczba $\frac{7}{5}$ przedstawia części jedności; moglibyśmy więc powiedzieć: «pięć-siódmych siedmiu-piątych jedności jest jedność» (podobnie: jedna-siódma siedmiu jedności jest jedność). To jest, mając *jedność*, wziąwszy jéj $\frac{7}{5}$-ych części, a tego, cośmy przez to otrzymali, biorąc $\frac{5}{7}$-ych części, dochodzimy znowu do *jedności.* Skutek więc piérwszego działania, dokonanego na jedności, znieśliśmy przez działanie drugie, tak iż znowu mamy jedność. Dlatego każde takie dwie liczby jak $\frac{5}{7}$ i $\frac{7}{5}$, jak $\frac{1}{7}$ i 7, jak 9 i $\frac{1}{9}$, jak $\frac{3}{8}$ i $2\frac{2}{3}$, nazywają się jedna odwrotnością drugiéj. Jest więc liczba $\frac{5}{7}$ odwrotnością liczby $\frac{7}{5}$ i, nawzajem, liczba $\frac{7}{5}$ odwrotnością liczby $\frac{5}{7}$, i t. d.

11. W mnożeniu dwu liczb idzie nam o to, aby z mnożnéj otrzymać iloczyn w taki sposób, w jaki mnożnik powstaje z jedności. Inne więc jest znaczenie mnożnéj niż mnożnika. Gdy mnożna jest pewnym, że tak powiemy, przedmiotem, *mnożnik wskazuje na działanie*, które mamy wykonać na mnożnéj. Iloczyn zaś ma ten sam charakter, co mnożna. Tak np. gdy mamy 8 pomnożyć przez $\frac{3}{4}$, to mnożnik $\frac{3}{4}$ wskazuje tylko na działanie, które mamy wykonać na liczbie 8: rozłożyć ją na 4 równe części i takich części wziąć 3. (Por. § 6, us. 5).

12. Widoczniéj się to przedstawi, gdy weźmiemy mnożenie liczb mianowanych. — Np. Łokieć sukna kosztuje $9\frac{2}{3}$ złotego; ile kosztuje $\frac{3}{4}$ łokcia? Ponieważ jeden łokieć kosztuje $9\frac{2}{3}$ zł., więc $\frac{3}{4}$ łokcia kosztują trzy-czwarte $9\frac{3}{4}$ złotego, t. j. (us. 9) należy $9\frac{2}{3}$ zł. $\times \frac{3}{4} = \frac{29}{3}$ zł. $\times \frac{3}{4} = \frac{29 \cdot 3}{3 \cdot 4}$ zł. $= \frac{29}{4}$ zł. $= 7\frac{1}{4}$ zł. W mnożeniu tym mnożnik $\frac{3}{4}$ wskazał nam, co należy zrobić z mnożną, aby otrzymać iloczyn. — Podobnie, gdy mamy np. zadanie: Łokieć sukna kosztuje $9\frac{2}{3}$ złotego; ile kosztuje $3\frac{3}{4}$ łokcia?, to zauważymy, że gdy jeden łokieć kosztuje $9\frac{2}{3}$ zł., to $3\frac{3}{4}$ łokcia kosztuje $3\frac{3}{4}$ raza (§ 16, us. 2) więcéj, t. j, należy $9\frac{2}{3}$ złotego pomnożyć przez $3\frac{3}{4}$; $9\frac{2}{3}$ zł. $\times 3\frac{3}{4} = \frac{29}{3}$ zł. $\times \frac{15}{4} = \frac{29 \cdot 15}{3 \cdot 4}$ zł. $= 36\frac{1}{4}$ zł. — Z tego jeszcze wynika, że zawsze (por. § 6, us. 6) *w mnożeniu liczb mianowanych mnożnik jest liczbą oderwaną, a iloczyn jest liczbą mianowaną, wyrażoną przy pomocy téj saméj jednostki, co mnożna.*

13. Przerobimy tu kilka zadań na mnożenie liczb mianowanych ułamkowych, podając je jaknajprościéj [1]).

---

[1]) Zwykle w zadaniach przytaczamy różne okoliczności, aby uczeń, wnikając w nie, sam rozumowaniem doszedł do wskazania, jakie mianowicie i nad którymi liczbami należy wykonać działania. Tu zaś idzie nam tylko o to, aby wskazać, jak się uskutecznia samo mnożenie.

a. $\frac{3}{5}$ godziny wyrazić w minutach. — Godzina ma minut 60, więc $\frac{3}{5}$ godziny jest to samo, co $\frac{3}{5}$-te 60-u minut; trzeba więc 60 m. $\times \frac{3}{5} =$ $= \frac{60 \cdot 3}{5}$ m. $=$ 36 m. Odp. $\frac{3}{5}$ godziny $=$ 36 minutom.

b. $\frac{3}{5}$ doby wyrazić w godzinach. — Rozumując taksamo, mieć będziemy 24 g. $\times \frac{3}{5} = \frac{24 \cdot 3}{5}$ g. $= 14\frac{2}{5}$ g. Odp. $\frac{3}{5}$ doby $= 14\frac{2}{5}$ godziny.

c. $\frac{3}{5}$ doby wyrazić w godzinach i minutach. — Znaleźliśmy już, że $\frac{3}{5}$ doby $= 14\frac{2}{5}$ g.; należy więc jeszcze ułamek godziny wyrazić w minutach; $\frac{2}{5}$ g. $=$ 60 m. $\times \frac{2}{5} = \frac{60 \times 2}{5}$ m. $=$ 24 m. Odp. $\frac{3}{5}$ doby $=$ 14 g. $+$ 24 m.

d. $\frac{3}{7}$ doby wyrazić w godzinach, minutach i sekundach. —

$\frac{3}{7}$ d. $=$ 24 g. $\times \frac{3}{7} = \frac{24 \cdot 3}{7}$ g. $= 10\frac{2}{7}$ g.

$\frac{2}{7}$ g. $=$ 60 m. $\times \frac{2}{7} = \frac{60 \cdot 2}{7}$ m. $= 17\frac{1}{7}$ m.

$\frac{1}{7}$ m. $=$ 60 s. $\times \frac{1}{7} = \frac{60}{7}$ s. $= 8\frac{4}{7}$ s.

Odp. $\frac{3}{7}$ d. $=$ 10 g. $+$ 17 m. $+ 8\frac{4}{7}$ s.

e. W 4 morgach $+ 42\frac{2}{3}$ pręta kwadratowego ile jest stóp kw.? —

4 m. $+ 42\frac{2}{3}$ p. k. $=$ 300 p. k. $\times$ 4 $+ 42\frac{2}{3}$ p. k. $= 1242\frac{2}{3}$ p. k.

p. k. $=$ 225 s. k.

$1242\frac{2}{3}$ p. k. $=$ 225 s. k. $\times 1242\frac{2}{3} = \frac{225 \cdot 3728}{3}$ s. k. $=$

$= (75 \times 3728)$ s. k. $=$ 279600 s. k.

Odp. W 4 mor. $+ 42\frac{2}{3}$ pr. kw. jest 279600 st. kw.

f. Metr. $= 3\frac{17}{36}$ stopy nowopolskiéj; ile w hektarze jest stóp kw.? —

Har $=$ 10000 m. k. $= \frac{125 \times 125 \times 10000}{36 \times 36}$ st. k. $= \frac{9765625}{81}$ s. k. $=$

$= 120563\frac{22}{81}$ st. kw.

Odp. W hektarze jest $120563\frac{22}{81}$ stopy kw. nowopolskiéj.

g. Znaléść $\frac{3}{5}$ liczby wielorakiéj 18 sąż. $+$ 2 ł. $+$ 8 cali. — Trzeba 18 s. $+$ 2 ł. $+$ 8 c. rozłożyć na 5 równych części i takich części wziąć 3, czyli: daną liczbę podzielić przez 5, a to, co otrzymamy, pomnożyć przez 3.

$$\begin{array}{r|l}
18\,\text{s.} + 2\,\text{ł.} + 18\,\text{c.} & 5 \\ \cline{2-2}
\underline{-15\quad\quad\quad\quad} & 3\,\text{s.} + 2\,\text{ł.} + 8\frac{2}{5}\,\text{c.} \\
3\,\text{s.} = 9\,\text{ł.}\quad\quad & \quad\quad\times 3 \\ \cline{2-2}
\underline{+2\,\text{ł.}}\quad\quad & 11\,\text{s.} + 1\,\text{ł.} + 1\frac{1}{5}\,\text{c.} \\
11\,\text{ł.}\quad\quad & \\
\underline{-10\quad}\quad\quad & \\
1\,\text{ł.} = 24\,\text{c.} & \\
\underline{+18\,\text{c.}} & \\
42\,\text{c.} & \\
\underline{-40\,\text{c.}} & \\
2\,\text{c.} &
\end{array}$$

$$8\frac{2}{5}\,\text{c.} \times 3 = \frac{42\,.\,3}{5}\,\text{c.} = 25\frac{1}{5}\,\text{c.}$$

$$25\frac{1}{5}\,\text{c.} = 1\,\text{ł.} + 1\frac{1}{5}\,\text{c.}$$

Odp. $\frac{3}{5}$ liczby 18 sąż. + 2 ł. + 8 c. jest 11 sąż. + 1 ł. + $1\frac{1}{5}$ cala.

h. Gdybyśmy mieli np. te 18 s. + 2 ł. + 8 c. pomnożyć przez $3\frac{2}{5}$, co możemy tak oznaczyć

$$(18\,\text{s.} + 2\,\text{ł.} + 8\,\text{c.}) \times 3\frac{2}{5},$$

to albo $\left(3\frac{2}{5} = \frac{17}{5}\right)$ mnożną podzielilibyśmy przez 5 i otrzymany iloraz pomnożylibyśmy przez 17, albotéż oddzielnie wykonalibyśmy $(18\,\text{s.} + 2\,\text{ł.} + 8\,\text{c.}) \times 3$, a oddzielnie, jak w g., pomnożylibyśmy téż mnożną przez $\frac{2}{5}$, i wzięli sumę tych iloczynów częściowych.

(Zadania arytmetyczne. § 19.)

---

§ 20. DZIELENIE LICZB UŁAMKOWYCH.

1. Dzielenie, jako działanie odwrotne mnożeniu dwu czynników ma na celu z danych: iloczynu dwu czynników i jednego z tych czynników wyznaczenie drugiego czynnika tego iloczynu. To zadanie istniéć może niezależnie od tego, czy czynniki są liczbami całkowitymi, czyteż ułamkowymi. Podane więc w us. 3-im § 7-go określenie dzielenia jest ogólne. Zatym wogóle:

Dzielenie jestto działanie, zapomocą którego, mając dwie liczby: dzielną i dzielnik, odnajdujemy liczbę, zwaną ilorazem, taką, iżby iloczyn dzielnika i ilorazu przedstawił dzielną.

Gdy więc np. mamy $8 : \frac{1}{2}$, to mamy tu znaléść taką liczbę, którą mnożąc przez $\frac{1}{2}$, otrzymamy 8, t. j. taką liczbę, któréj $\frac{1}{2}$ jest liczbą 8. Jeżeli więc $\frac{1}{2}$ liczby szukanéj jest 8, to cała liczba jest 2 razy większa od 8, t. j. szukaną liczbą jest $8 \times 2 = 16$, więc $8 : \frac{1}{2} = 16$.

Zadanie, w którym mając daną pewną część liczby, szukamy téj liczby, np. zadanie:

$\frac{3}{4}$ pewnéj liczby jest 6; jakato jest liczba?,

jako zadanie, w którym, mając jeden z dwu czynników iloczynu i iloczyn (por. § 19, us. 8), szukamy drugiego czynnika, sprowadza się do dzielenia danéj liczby przez liczbę, wskazującą, jaką częścią szukanéj liczby jest ta dana liczba — jak tu np. do dzielenia $6 : \frac{3}{4}$.

2. Ponieważ, jak widzieliśmy (§ 19, us. 2, 9), wyrazy: «mnożę», «mnożenie» mają w arytmetyce niekiedy obszerniejsze znaczenie niż w użyciu zwykłym, więc i ściśle związane z nimi znaczenie wyrazów: «dzielę», «dzielenie» winno również w odpowiednich przypadkach niezgadzać się z pospolitym ich rozumieniem. Rzeczywiście, według zwykłego pojmowania, gdy dzielimy jakiś przedmiot, to go zmniejszamy; tymczasem widzieliśmy tylkoco, że *dzieląc* 8 przez $\frac{1}{2}$ otrzymaliśmy 16, t. j. liczbę *większą* od dzielnéj *). A więc «podzielić» niezawsze znaczy: zmniejszyć (por. us. 4).

To, cośmy wyżéj powiedzieli, odnosi się do tego tylko przypadku (§ 7, us. 6, 7, 8) dzielenia, kiedy dzielnik odpowiada mnożnikowi (§ 19, us. 1, 11, 12). Gdy bowiém dzielnik odpowiada mnożnéj, t. j. gdy nam idzie o to, ile razy dzielnik mieści się w dzielnéj, to wtedy powiemy: liczba 8 jest od liczby $\frac{1}{2}$ większa 16 razy [1]).

3. Włączając całkowitą z ułamkiem w ułamek, a całkowitą przedstawiając w postaci ułamka z mianownikiem 1, moglibyśmy zawsze dzielenie dwu liczbułamkowych sprowadzić do dzielenia ułamka przez ułamek. Aby jednak wprost przeprowadzić rozumowanie także wtedy, kiedy, czyto dzielna, czytéż dzielnik są liczbami całkowitymi, oddzielnie rozważymy trafić się tu mogące przypadki.

Właściwie w każdym z mogących tu być przypadków należałoby oddzielnie przeprowadzać dwa rozumowania: raz przyjmując, że dzielnik odpowiada, mnożnikowi, drugi raz przyjmując, że on odpowiada mnożnéj. Rozumowanie w drugim przypuszczeniu byłoby zawilsze, niż w piérwszym. Z uwagi więc, że liczba (oderwana), którą jako iloraz otrzymamy (bez względu na to, któremu czynnikowi iloczynu ona odpowiada), zawsze wypadnie ta sama, a tylko zna-

---

*) Np. możemy podzielić 8 jabłek przez 4 albo przez 16, nie potrzebując dla wykonania działania i okazania ilorazu więcéj jabłek, niż dane. Gdy tymczasem nie możemy, mając tylko 8 jabłek, pokazać tyle jabłek, ile wypada z podzielenia 8 jabł. : $\frac{1}{2}$, t. j. tyle, ile trzeba, aby, po pomnożeniu ich przez $\frac{1}{2}$, otrzymać 8 jabłek.

[1]) Związek z obszerniejszym rozumieniem wyrazu «mnożę» okazałby się wtedy np. w zadaniu 8 łok. : 16 łok. (O tym była już mowa w § 16, us. 1 b., 2.)

czenie jéj będzie różne, zależnie od tego, o co nam w tym dzieleniu idzie (por. także § 7, us. 6, 7), zadowalamy się rozumowaniem łatwiejszym [1]), t. j. przeprowadzonym w przypadku, gdy dzielnik odpowiada mnożnikowi.

a. Podzielić ułamek przez całkowitą, np. $\frac{3}{4}:5$. Mamy tu znaléść liczbę (iloraz), która pomnożona przez dzielnik da dzielną; a więc iloraz pomnożony przez 5 (czyli 5 ilorazów) równa się $\frac{3}{4}$; sam zatym iloraz jest 5 razy mniejszy od $\frac{3}{4}$. Aby przeto otrzymać iloraz, trzeba ułamek $\frac{3}{4}$ zmniejszyć 5 razy, co uskutecznimy (§ 17, us. 6, a.), mnożąc przez 5 jego mianownik, $\frac{3}{4\times 5}$. Jest więc

$$\frac{3}{4}:5=\frac{3}{4\times 5}.$$

Aby ułamek podzielić przez całkowitą, należy mianownik pomnożyć przez całkowitą: otrzymana liczba jest mianownikiem ilorazu, licznikiem zaś licznik danego ułamka. Mówi się często krócéj: aby ułamek podzielić przez całkowitą należy jego mianownik przez tę całkowitą pomnożyć.

Przeprowadzając to rozumowanie, możemy jednocześnie ślad jego piśmiennie tak zaznaczać:

$$\frac{3}{4}:5\,{*}=\frac{3}{4\times 5}=\frac{3}{20}.$$

* oznacza, iż to, co jest po gwiazdce, piszemy dopiéro po ukończeniu rozumowania, które nas do tego doprowadziło.

$$5 \text{ ilorazów} = \frac{3}{4}$$

$$\text{iloraz} = \frac{3}{4\times 5};$$

Taksamo rozumowalibyśmy, gdyby było np. $\frac{23}{7}:8$, lub np. $\frac{20}{27}:5$.

Gdy jednak mamy np. $\frac{20}{27}:5$, to zamiast tego, żeby, dla zmniejszenia 5 razy ułamka $\frac{20}{27}$, mnożyć przez 5 jego mianownik $\left(\frac{20}{27\cdot 5}\right)$, możemy (§ 17, us. 6 d.) jego licznik podzielić przez 5, przez co odrazu iloraz otrzymamy w postaci $\frac{20:5}{27}$ (do którój doszlibyśmy z postaci $\frac{20}{27\cdot 5}$, skracając ją przez 5). Więc: *jeżeli mamy podzielić ułamek przez cał-*

[1]) Przeprowadzimy owo rozumowanie na takim np. zadaniu: 8 łok. : $\frac{3}{5}$ łok. Wypadnie nam w ilorazie liczba oderwana, przez którą mnożąc $\frac{3}{5}$ ł., otrzymamy 8 ł. Więc: jeżeli $\frac{3}{5}$ ł. pomnożone przez iloraz = 8 łokciom, to $\frac{1}{5}$ ł. pomnożona przez iloraz = $\frac{8}{3}$ ł., a 1 łokieć pomnożony przez iloraz [czyli: iloraz (liczba oderwana) z dodaniem miana — łokieć (§ 6, us. 3)] = $\frac{8.5}{3}$ łokcia; sam zatym iloraz = $\frac{8.5}{3}$.

kowitą, a licznik ułamka jest przez tę całkowitą podzielny, to dzielimy jego licznik przez tę całkowitą.

b. Całkowitą podzielić przez ułamek, np. $6 : \frac{5}{8}$. Ponieważ iloraz, pomnożony przez $\frac{5}{8}$, wyda liczbę 6; więc $\frac{5}{8}$ ilorazu jest liczbą 6. Gdy 5-ósmych ilorazu jest liczbą 6, to 1-ósma ilorazu, jako liczba 5 razy mniejsza od 6-u, może być przedstawiona (§ 17, us. 5) przez $\frac{6}{5}$. Jeżeli zaś 8-a część ilorazu jest $\frac{6}{5}$, to sam iloraz jest liczbą 8 razy większą od $\frac{6}{5}$; aby więc mieć iloraz, należy $\frac{6}{5}$ powiększyć 8 razy, t. j. (§ 17, us. 6 c.) licznik tego ułamka przez 8 pomnożyć, $\frac{6 \times 8}{5}$. Jest zatym

$$6 : \frac{5}{8} = \frac{6 \times 8}{5}.$$

Aby całkowitą podzielić przez ułamek, należy całkowitą pomnożyć przez mianownik: otrzymana stąd liczba jest licznikiem ilorazu, mianownikiem zaś licznik ułamka danego.

Ślad tego rozumowania tak zaznaczymy

$$6 : \frac{5}{8} * = \frac{6 \times 8}{5} = \frac{48}{5} = 9\frac{3}{5}.$$

* oznacza tu i dalej toż samo, co poprzednio.

$$\frac{5}{8} \text{ ilorazu} = 6$$

$$\frac{1}{8} \text{ ilorazu} = \frac{6}{5}$$

$$\text{iloraz} = \frac{6 \times 8}{5};$$

Taksamo rozumowalibyśmy, gdybyśmy mieli np. $8 : \frac{24}{5}$, lub np. $1 : \frac{3}{7}$.

c. Ułamek podzielić przez ułamek, np. $\frac{3}{4} : \frac{5}{8}$. Tu iloraz, pomnożony przez $\frac{5}{8}$, wyda liczbę $\frac{3}{4}$; więc $\frac{5}{8}$ ilorazu jest liczbą $\frac{3}{4}$. Gdy $\frac{5}{8}$ ilorazu jest liczbą $\frac{3}{4}$, to $\frac{1}{8}$ ilorazu jest liczbą 5 razy mniejszą od $\frac{3}{4}$, więc, aby mieć $\frac{1}{8}$ ilorazu, należy ułamek $\frac{3}{4}$ zmniejszyć 5 razy, t. j. jego mianownik przez 5 pomnożyć, $\frac{3}{4 \times 5}$. Jeżeli zaś $\frac{1}{8}$ ilorazu jest liczbą $\frac{3}{4 \times 5}$, to iloraz jest liczbą 8 razy większą; więc, aby mieć iloraz, należy ułamek $\frac{3}{4 \times 5}$ powiększyć 8 razy, t. j. jego licznik przez 8 pomnożyć, $\frac{3 \times 8}{4 \times 5}$. Jest zatym

$$\frac{3}{4} : \frac{5}{8} = \frac{3 \times 8}{4 \times 5}.$$

Aby ułamek podzielić przez ułamek, należy za licznik ilorazu wziąć iloczyn licznika dzielnéj przez mianownik dzielnika, a za mianownik iloczyn mianownika dzielnéj przez licznik dzielnika.

Ślad tego rozumowania tak zaznaczymy:

$$\frac{3}{4} : \frac{5}{8} * = \frac{3\times8}{4\times5} = \frac{3\times2}{5} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}.$$

$$\frac{5}{8} \text{ ilorazu} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{8} \text{ ilorazu} = \frac{3}{4\times5}$$

$$\text{iloraz} = \frac{3\times5}{4\times5};$$

Taksamo rozumowalibyśmy, gdybyśmy mieli np. $\frac{17}{3} : \frac{3}{8}$, $\frac{6}{7} : \frac{5}{3}$, $\frac{5}{1} : \frac{3}{4}$ i t. d.

Na mocy tego prawidła, gdy mamy jaką liczbę napisaną w postaci ułamka podzielić przez ułamek, to odrazu w liczniku owéj liczby piszemy jako czynnik mianownik dzielnika, a w jéj mianowniku piszemy jako czynnik licznik dzielnika. Np.

$$\frac{6\cdot3}{5\cdot7\cdot13} : \frac{11}{9} = \frac{6\cdot3\cdot9}{5\cdot7\cdot13\cdot11}.$$

Zauważymy jeszcze, że gdy mianowniki dzielnéj i dzielnika są jednakowe, np. $\frac{3}{7} : \frac{4}{7}$, to skracając ułamek, który otrzymać mamy w ilorazie, $\frac{3\cdot7}{4\cdot7}$ przez 7 (t. j. przez spólny mianownik dzielnéj i dzielnika), możemy odrazu jako iloraz danego tu dzielenia napisać iloraz z podzielenia liczników, t. j,

$$\frac{3}{7} : \frac{4}{7} = \frac{3}{4}.$$

Również znajdziemy, że np.

$$\frac{3}{5} : \frac{3}{7} = \frac{7}{5}.$$

d. *Wrazie, gdy albo dzielna, albo dzielnik, albo dzielna i dzielnik jednocześnie są całkowitymi z ułamkami, włączamy je w ułamki,* przez co sprowadzamy rzecz do jednego z poprzedzających przypadków.

4. Rozumowania, przeprowadzone w poprzedzającym ustępie, możemy zastąpić nieco odmiennym. Mianowicie:

a. $\frac{3}{4} : 5$. Ponieważ 5 ilorazów jest liczbą $\frac{3}{8}$, to iloraz szukany jest piątą częścią $\left(\frac{1}{5}\right)$ liczby $\frac{3}{4}$; lecz $\frac{1}{5}$ liczby $\frac{3}{4}$ (§ 19, us. 8) jest $\frac{3}{4} \times \frac{1}{5}$, więc iloraz z podzielenia $\frac{3}{4}$ przez 5 może być przedstawiony przez iloczyn z pomnożenia $\frac{3}{4}$ (t. j. dzielnéj) przez $\frac{1}{5}$, t. j. przez odwrotność (§ 19, us. 10) liczby 5 (dzielnika). Zaznaczymy to rozumowanie, pisząc

$$\frac{3}{4} : 5^* = \frac{3}{4} \times \frac{1}{5}.$$

$$5 \text{ ilorazów} = \frac{3}{4}$$

$$\text{iloraz} = \frac{1}{5} \text{ liczby } \frac{3}{4} = \frac{4}{3} \times \frac{1}{5};$$

b. $6 : \frac{5}{8}$. Gdy $\frac{5}{8}$ ilorazu jest liczbą 6, to $\frac{1}{8}$ ilorazu jest $\frac{1}{5}$ liczby 6, a iloraz jest: 8 razy $\frac{1}{5}$ liczby 6, czyli: $\frac{8}{5}$ liczby 6, t. j. $6 \times \frac{8}{5}$; może zatym on być przedstawiony przez iloczyn dzielnéj 6 przez odwrotność dzielnika $\frac{5}{8}$. Zaznaczymy to rozumowanie, pisząc

$$6 : \frac{5}{8}{}^* = 6 \times \frac{8}{5}.$$

$$\frac{5}{8} \text{ ilorazu} = 6$$

$$\frac{1}{8} \text{ ilorazu} = \frac{1}{5} \text{ liczby } 6$$

$$\text{iloraz} = \frac{8}{5} \text{ liczby } 6 = 6 \times \frac{8}{5};$$

c. $\frac{3}{4} : \frac{5}{8}$. Gdy $\frac{5}{8}$ ilorazu jest liczbą $\frac{3}{4}$, to $\frac{1}{8}$ ilorazu jest $\frac{1}{5}$ liczby $\frac{3}{4}$, a iloraz jest: 8 razy $\frac{1}{5}$ liczby $\frac{3}{4}$ czyli: $\frac{8}{5}$ liczby $\frac{3}{4}$, t. j. $\frac{3}{4} \times \frac{8}{5}$, a więc iloczynem dzielnéj $\frac{3}{4}$ przez odwrotność dzielnika $\frac{5}{8}$. Ślad tego rozumowania możemy tak zaznaczać:

$$\frac{3}{4} : \frac{5}{8}{}^* = \frac{3}{4} \times \frac{8}{5}.$$

$$\frac{5}{8} \text{ ilorazu} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{8} \text{ ilorazu} = \frac{1}{5} \text{ liczby } \frac{3}{4};$$

$$\text{iloraz} = \frac{8}{5} \text{ liczby } \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \times \frac{8}{5}$$

Zauważymy jeszcze, że gdy mamy przez siebie podzielić dwie liczby całkowite, np. $40 : 5$, to podobnie możemy rozumować: 5 ilorazów $= 40$, więc iloraz jest $\frac{1}{5}$ liczby 40, czyli $40 \times \frac{1}{5}$, t. j. jest iloczynem dzielnéj przez odwrotność dzielnika.

Z powyższego wypada, że ogólnie:

Iloraz może być przedstawiony zapomocą iloczynu dzielnéj przez odwrotność dzielnika.

Dlategoto można w przypadkach b. i c. ustępu poprzedzającego tak się wyrażać: aby całkowitą podzielić przez ułamek, można całkowitą pomnożyć przez odwrotność ułamka dzielnika; aby ułamek podzielić przez ułamek, można ułamek dzielnéj pomnożyć przez odwrotność ułamka dzielnika.

Nawzajem, jeżeli mamy np. iloczyn $\frac{3}{20} \times \frac{11}{7}$, to możemy go zastąpić przez iloraz $\frac{3}{20} : \frac{7}{11}$.

Z tegoż jeszcze wypada, że *dzieląc jakąkolwiek liczbę przez ułamek właściwy, zwiększamy ją,* wychodzi to bowiém na toż samo, co gdybyśmy ją pomnożyli przez ułamek niewłaściwy (§ 19, us. 9).

5. Jak wiemy (§ 17, us. 5), możemy dzielenie oznaczać, pisząc ułamek, w którego liczniku umieścimy dzielną, w mianowniku zaś dzielnik. Taksamo można postępować wrazie, gdy dzielna, lub dzielnik, albo obie te liczby jednocześnie są ułamkami: otrzymamy w ten sposób ułamek o ułamkowym liczniku albo mianowniku. Taki jednak ułamek, stosując prawidła na dzielenie ułamków, możemy sprowadzić do ułamka o liczniku i mianowniku całkowitym. Np.

$$\frac{\frac{3}{4}}{5} = \frac{3}{4} : 5 = \frac{3}{4 \cdot 5}; \quad \frac{5}{\frac{3}{4}} = 5 : \frac{3}{4} = \frac{5 \cdot 4}{3}; \quad \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{7}} = \frac{3}{4} : \frac{5}{7} = \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 5}.$$

Podobnie np.

$$\frac{2\frac{1}{2}}{\frac{3}{4} \times 1\frac{4}{7}} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{3}{4} \times \frac{11}{7}} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 7}{2 \cdot 3 \cdot 11}, \qquad \frac{5 \times \frac{3}{2}}{7 : \frac{11}{2}} = \frac{5 \times \frac{3}{2}}{7 \times \frac{2}{11}} = \frac{5 \cdot 3 \cdot 11}{2 \cdot 7 \cdot 2}$$

Ułamek, w którego liczniku i mianowniku jest liczba ułamkowa, może być sprowadzony do ułamka, którego licznik i mianownik są liczbami całkowitymi.

W us. 12-ym § 17-go rozwinęliśmy ułamek zwyczajny na ułamek ciągły. Na mocy powyższego, możemy teraz wykonać zadanie odwrotne. Gdy mamy np. ułamek ciągły

$$\cfrac{1}{32 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{3}}}},$$

to kolejno

$$\frac{1}{5+\frac{1}{3}}=\frac{1}{\frac{16}{3}}=\frac{3}{16},\quad \frac{1}{2+\frac{1}{5+\frac{1}{3}}}=\frac{1}{2+\frac{3}{16}}=\frac{1}{\frac{35}{16}}=\frac{16}{35},$$

$$\frac{1}{32+\frac{1}{2+\frac{1}{5+\frac{1}{3}}}}=\frac{1}{32+\frac{16}{35}}=\frac{1}{\frac{1136}{35}}=\frac{35}{1136}.$$

6. W us. 7-ym § 17-go widzieliśmy, że własności, wypowiedziane w us. 15-ym §-u 7-go mają miejsce także w przypadku, gdy dzielna nie jest podzielna przez dzielnik, lub jest od niego mniejsza. W obu jednak przytoczonych miejscach mówiliśmy o powiększaniu lub zmniejszaniu całkowitą ilość razy czyto całkowitéj dzielnéj, czytéż całkowitego dzielnika, t. j. o mnożeniu lub dzieleniu ich przez liczbę całkowitą, a nadto dzieliliśmy dzielną lub dzielnik tylko przez taką liczbę, przez którą one były podzielne.

Chcemy teraz zbadać, jak się zmienia iloraz, gdy dzielną lub dzielnik, jakimikolwiek są one liczbami: całkowitymi, czy ułamkowymi, mnożymy lub dzielimy przez jakąkolwiek, całkowitą lub ułamkową, liczbę. Gdy zaś całkowitą można przedstawić w postaci ułamka, więc ograniczymy się do liczb ułamkowych, przez co nie zmniejszymy ogólności wypadków.

Jeżeli mamy dzielenie

$$\frac{3}{8}:\frac{5}{2}=\frac{3}{20},$$

to (§ 19, us. 5, 6, 3; § 20 us. 4)

$$\left(\frac{3}{8}\times\frac{7}{11}\right):\frac{5}{2}=\left(\frac{3}{8}\times\frac{7}{11}\right)\times\frac{2}{5}=\frac{3}{8}\times\frac{7}{11}\times\frac{2}{5}=\left(\frac{3}{8}\times\frac{2}{5}\right)\times\frac{7}{11}=\frac{3}{20}\times\frac{7}{11};$$

$$\left(\frac{3}{8}:\frac{7}{11}\right):\frac{5}{2}=\left(\frac{3}{8}\times\frac{11}{7}\right)\times\frac{2}{5}=\frac{3}{8}\times\frac{11}{7}\times\frac{2}{5}=\left(\frac{3}{8}\times\frac{2}{5}\right)\times\frac{11}{7}=\frac{3}{20}\times\frac{11}{7}=$$

$$=\frac{3}{20}:\frac{7}{11}.$$ A więc ogólnie:

a. *Jeżeli dzielną mnożymy lub dzielimy przez jakąkolwiek, czyto całkowitą, czytéż ułamkową liczbę, nie zmieniając dzielnika, to tymsamym iloraz odpowiednio mnożymy lub dzielimy przez tęż samę liczbę.* —

$$\frac{3}{8}:\left(\frac{5}{2}\times\frac{7}{11}\right)=\frac{3}{8}:\frac{(5\times7)}{(2\times11)}=\frac{3}{8}\times\frac{2\times11}{5\times7}=\frac{3}{8}\times\frac{2}{5}\times\frac{11}{7}=\left(\frac{3}{8}\times\frac{2}{5}\right)\times\frac{11}{7}=$$

$$=\frac{3}{20}:\frac{7}{11};$$

$$\frac{3}{8}:\left(\frac{5}{2}:\frac{7}{11}\right)=\frac{3}{8}:\frac{(5\times11)}{(2\times7)}=\frac{3}{8}\times\frac{2\times7}{5\times11}=\frac{3}{8}\times\frac{2}{5}\times\frac{7}{11}=\left(\frac{3}{8}\times\frac{2}{5}\right)\times\frac{7}{11}=$$

$$=\frac{3}{20}\times\frac{7}{11}.$$ A zatym:

b. *Jeżeli dzielnéj nie zmieniamy, a dzielnik mnożymy lub dzielimy przez jakąkolwiek, czyto całkowitą, czyteż ułamkową liczbę, to tymsamym iloraz odpowiednio dzielimy lub mnożymy przez tęż samę liczbę.* —

Z zestawienia tych własności wypada, że

c. *Jeżeli dzielną i dzielnik albo jednocześnie mnożymy, albo jednocześnie dzielimy przez jakąkolwiek, czyto całkowitą, czyteż ułamkową liczbę, to iloraz się nie zmienia.*

7. Gdy dzielna i dzielnik są tu, w szczególnym przypadku, całkowite, to możemy je uważać (§ 17, us. 5) za licznik i mianownik ułamka, iloraz zaś przedstawia wartość ułamka, t. j. liczbę, którą jest ten ułamek. Moglibyśmy więc z powyższego wnieść o zmianie ułamka wskutek pomnożenia lub podzielenia jego licznika albo mianownika przez jakąkolwiek, czyto całkowitą, czyteż ułamkową liczbę. Wyprowadzimy to jednak wprost. Weźmy np. ułamek $\frac{3}{4}$. Wtedy (§ 19, us. 5, 6, 3; § 20, us. 4, 5):

$$\frac{3\times\frac{5}{7}}{4}=\left(3\times\frac{5}{7}\right):4=\left(3\times\frac{5}{7}\right)\times\frac{1}{4}=3\times\frac{5}{7}\times\frac{1}{4}=\left(3\times\frac{1}{4}\right)\times\frac{5}{7}=$$
$$=\frac{3}{4}\times\frac{5}{7};$$

$$\frac{3:\frac{5}{7}}{4}=\frac{3\times\frac{7}{5}}{4}=\left(3\times\frac{7}{5}\right)\times\frac{1}{4}=3\times\frac{7}{5}\times\frac{1}{4}=\left(3\times\frac{1}{4}\right)\times\frac{7}{5}=\frac{3}{4}\times\frac{7}{5}=$$
$$=\frac{3}{4}:\frac{5}{7}.$$ A więc ogólnie:

a. *Jeżeli, nie zmieniając mianownika, mnożymy lub dzielimy jego licznik przez jakąkolwiek, czyto całkowitą, czyteż ułamkową liczbę, to wskutek tego ułamek zostaje przez tęż liczbę odpowiednio pomnożony lub podzielony.* —

$$\frac{3}{4\times\frac{5}{7}}=3:\left(4\times\frac{5}{7}\right)=3:\frac{4\times5}{7}=\frac{3\times7}{4\times5}=\frac{3}{4}\times\frac{7}{5}=\frac{3}{4}:\frac{5}{7};$$

$$\frac{3}{4:\frac{5}{7}}=3:\left(4:\frac{5}{7}\right)=3:\frac{4\times7}{5}=\frac{3\times5}{4\times7}=\frac{3}{4}\times\frac{5}{7}.$$ A zatym:

b. *Jeżeli, nie zmieniając licznika ułamka, mnożymy lub dzielimy jego mianownik przez jakąkolwiek, czyto całkowitą, czyteż ułamkową liczbę, to wskutek tego ułamek zostaje przez tęż liczbę odpowiednio podzielony lub pomnożony.*

c. *Jeżeli licznik i mianownik ułamka albo jednocześnie mnożymy, albo jednocześnie dzielimy przez tęż samę jakąkolwiek, czyto całkowitą, czyteż ułamkową liczbę, to wartość ułamka się nie zmienia.*

8. Możemy podobnie uogólnić własności, wyprowadzone w § 7, us. 13. Mamy iloczyn kilku czynników podzielić przez pewną liczbę; np.

$$\left(\frac{4}{5}\times 8\times\frac{7}{11}\times\frac{13}{15}\right):\frac{3}{4}=\frac{4}{5}\times 8\times\frac{7}{11}\times\frac{13}{15}\times\frac{4}{3}=\frac{4}{5}\times 8\times\left(\frac{7}{11}\times\frac{4}{3}\right)\times\frac{13}{15}=$$
$$=\frac{4}{5}\times 8\times\left(\frac{7}{11}:\frac{3}{4}\right)\times\frac{13}{15}.$$

I nawzajem, z ostatniego wyrażenia możemy przejść do piérwszego. *Aby iloczyn podzielić przez jakąkolwiek, czyto całkowitą, czytéż ułamkową liczbę, można którykolwiek jego czynnik przez tę liczbę podzielić;* nawzajem: *jeżeli czynnik iloczynu podzielimy przez jakąkolwiek, czyto całkowitą, czytéż ułamkową liczbę, to wskutek tego iloczyn zostaje przez tęż liczbę podzielony.*

Łącząc te własności iloczynu z wypowiedzianymi w us. 12-ym §-u 6-go, a uogólnionymi w us. 6-ym §-u 19-go, możemy powiedzieć: *jeżeli jeden czynnik iloczynu mnożymy przez jakąkolwiek, czyto całkowitą, czytéż ułamkowę liczbę, a inny jego czynnik jednocześnie przez tęż samę liczbę dzielimy, to iloczyn się nie zmienia.*

9. Przerobimy tu kilka zadań na dzielenie liczb mianowanych.

a. Za $2\frac{3}{4}$ metra materyi jedwabnéj zapłacono $56\frac{5}{6}$ złp.; po czemu płacono metr téj materyi? — Metr sukna kosztował $2\frac{3}{4}$ raza mniéj, niż $56\frac{5}{6}$ złp. Należy więc $56\frac{5}{6}$ zł. podzielić przez $2\frac{3}{4}$,

$$56\frac{5}{6}\text{ zł.}:2\frac{3}{4}=\frac{341}{6}\text{ zł.}:\frac{11}{4}=\frac{341\cdot 4}{6\cdot 11}\text{zł.}=\frac{31\cdot 2}{3}\text{zł.}=30\frac{2}{3}\text{ zł.}$$

Odp. Metr téj materyi kosztuje $30\frac{2}{3}$ zł.

b. Za $\frac{3}{4}$ metra sukna zapłacono $8\frac{2}{3}$ złp.; ile więc zapłaconoby za metr tego sukna? — $\frac{3}{4}$ metra kosztuje $8\frac{3}{5}$ zł. czyli: $\frac{3}{4}$ tego (ilości złotych), co należy zapłacić za metr, jest $8\frac{2}{5}$ zł. Gdy więc $\frac{3}{4}$ szukanéj liczby jest $8\frac{2}{5}$ zł., t. j. gdy szukana liczba pomnożona przez $\frac{3}{4}$ równa się $8\frac{2}{5}$ zł., to, aby owę liczbę otrzymać, należy $8\frac{2}{5}$ zł. podzielić przez $\frac{3}{4}$,

$$8\frac{2}{5}\text{ zł.}:\frac{3}{4}=\frac{42}{5}\text{zł.}\times\frac{4}{3}=\frac{42\cdot 4}{5.3}\text{zł.}=\frac{56}{5}\text{zł.}=11\frac{1}{5}\text{ zł.}$$

Odp. Za metr tego sukna zapłaconoby $11\frac{1}{5}$ zł.

c. Za złoty kupiono $29\frac{1}{3}$ metra sznura; ileby wypadło zapłacić za 110 m. takiego sznura? — Wypadłoby zapłacić tyle złotych, ile razy 110 m. jest większe od $29\frac{1}{3}$ m. Należy więc 110 m. podzielić przez $29\frac{1}{3}$,

$$110 \text{ m.} : 29\frac{1}{3} \text{ m.} = 110 \text{ m.} : \frac{88}{3} \text{ m.} = \frac{110 \cdot 3}{88} = \frac{15}{4} = 2\frac{3}{4}.$$

Znaleźliśmy, że 110 m. jest większe od $29\frac{1}{3}$ m. $2\frac{3}{4}$ raza. Że zaś powiedzieliśmy, że za 100 m. wypadnie zapłacić tyle złotych, ile razy 110 m. jest większe od $29\frac{1}{3}$ m., zatym: wypadnie zapłacić $2\frac{3}{4}$ zł.

d. Za 110 metrów sznura zapłacono złoty; ile więc jest warte $29\frac{1}{3}$ m. tego sznura? — $29\frac{1}{3}$ m. tego sznura jest warte taką część złotego, jaką częścią 110-u metrów jest $29\frac{1}{3}$ m. Aby się zaś tego dowiedzieć, należy $29\frac{1}{3}$ m. podzielić przez 110 m.,

$$29\frac{1}{3} \text{ m.} : 110 \text{ m.} = \frac{88}{3} \text{ m.} : 110 \text{ m.} = \frac{88}{3 \cdot 110} = \frac{4}{15}.$$

Odp. Wypadnie zapłacić $\frac{4}{15}$ zł.

e. $76\frac{1}{2}$ minuty wyrazić w częściach godziny.—Ponieważ godzina ma 60 m., więc w $76\frac{1}{2}$ m. jest tyle godzin, ile razy $76\frac{1}{2}$ m. jest większe od 60 m.; trzeba więc $76\frac{1}{2}$ m. podzielić przez 60 m.,

$$76\frac{1}{2} \text{ m.} : 60 \text{ m.} = \frac{153}{2} \text{ m.} : 60 \text{ m.} = \frac{153}{120} = \frac{51}{40} = 1\frac{11}{40};\ 1\frac{11}{40} \text{ g.}$$ [1])

Odp. $76\frac{1}{2}$ m. $= 1\frac{11}{40}$ g.

f. Możemy liczbę wieloraką wyrazić jako liczbę mianowaną prostą nietylko przy pomocy najmniejszéj z jednostek, wchodzących w wyrażenie danéj liczby (por. § 9, us. 1, 2). Np.

9 morgów + 180 prętów kw. wyrazić w częściach włóki. —

$$180 \text{ pr. kw.} : 300 \text{ pr. kw.} = \frac{180}{300} = \frac{3}{5};\ 180 \text{ pr. kw.} = \frac{3}{5} \text{ morga;}$$

$$9\frac{3}{5} \text{ m.} : 30 \text{ m.} = \frac{48}{5} \text{ m.} : 30 \text{ m.} = \frac{48}{5 \cdot 60} = \frac{8}{25};\ 9\frac{3}{5} \text{ m.} = \frac{8}{25} \text{ włóki.}$$

Odp. 9 morgów + 180 prętów kw. $= \frac{8}{25}$ włóki.

(Zadania arytmetyczne. § 20.)

---

[1]) Możemy także tak rozumować: minuta jest $\frac{1}{60}$ g., zatym $76\frac{1}{2}$ m. $= \frac{1}{60}$ g. $\times 76\frac{1}{2}$ i t. d.

ROZDZIAŁ VII.

LICZBY DZIESIĘTNE.

§ 21. O LICZBACH DZIESIĘTNYCH WOGÓLE.

1. Jeżeli pewną długość mierzymy np. łokciem i znajdujemy, że w niéj łokieć mieści się dokładnie np.

682 037

razy, to ta liczba (§ 1, us. 2) składa się z takich części: 6-u setek tysięcy, 8-u dziesiątków tysięcy, 2-u tysięcy, 3-ch dziesiątków i 7-u jedności. W téj liczbie obok setek tysięcy, z prawéj ich strony, są oznaczone części liczby 10 razy mniejsze od setek tysięcy (§ 3, us. 15), t. j. dziesiątki tysięcy *). Obok dziesiątków tysięcy, z prawéj ich strony, są oznaczone części liczby 10 razy mniejsze, t. j. tysiące. Obok tysięcy byłyby z prawéj strony oznaczone części liczby 10 razy mniejsze, t. j. setki, gdyby one były w naszéj liczbie; a że ich niéma, przeto na miejscu, które przez nie byłoby zajętym, jest napisane zero (§ 3, us. 11). Obok zera, wskazującego tu, że w naszéj liczbie niéma setek, z prawéj jego strony są oznaczone części liczby 10 razy mniejsze od setek, t. j. dziesiątki. Obok dziesiątków, z prawéj ich strony, są oznaczone części liczby 10 razy mniejsze, t. j. jedności. Czyli wogóle, obok pewnych części liczby oznaczamy z prawéj ich strony części liczby 10 razy od nich mniejsze.

Przypuśćmy, że w mierzonéj długości łokieć całkowicie mieści się 682 037 razy, i że pozostaje jeszcze jéj część, mniejsza od łokcia, w któréj dziesiąta część łokcia mieści się np. 9 razy. Wtedy, z uwagi, żeśmy dotąd obok pewnych części liczby z prawéj strony wciąż oznaczali części liczby 10 razy mniejsze, moglibyśmy, stosując tę samę zasadę, te 9 części dziesiątych jedności, jako części liczby 10 razy mniejsze od jedności, napisać obok jedności, z prawéj ich strony. Byłoby więc [1]):

6820379

---

*) Z którychto 8-u dziesiątków tysięcy każdy jest 10 razy mniejszy od każdéj z 6-u setek tysięcy.

[1]) W tym ustępie i następującym, a niekiedy i w dalszych, po liczbach dziesiętnych niéma znaków przestankowych.

Nie możemy jednak téj liczby tak napisanéj pozostawić: możnaby bowiém 9 dziesiątych jedności wziąć za 9 jedności, 7 jedności za 7 dziesiątków i t. d. Trzeba oznaczyć, że cyfra 9 nie przedstawia tu jedności, ale dziesiąte jéj części (gdy takie oznaczenie wprowadzimy, t. j. gdy wyraźnie wskażemy, że cyfra 9 oznacza dziesiąte części jedności, to tymsamym cyfra 7 przedstawiać będzie jedności, cyfra 3 dziesiątki i t. d.). W tym celu po cyfrze, mającéj przedstawiać jedności, t. j., jak tu, po cyfrze 7, napiszemy przecinek [1]), tak iż w liczbie

682 037,9

dziesiąte części jedności, oznaczone obok jedności z prawéj ich strony, są od jedności oddzielone przecinkiem. Wskutek tego, licząc miejsca od przecinka w lewą stronę, mamy, jak poprzednio, jedności na miejscu piérwszym, dziesiątki na drugim i t. d.

Podobnie, jeżeliby mierzona długość była taką, iż po odmierzeniu 682 037-u łokci i 9-u dziesiątych części łokcia, pozostała jeszcze jéj część mniejsza od jednéj dziesiątéj części łokcia, w któréjby część łokcia, 10 razy mniejsza od dziesiątéj jego części, t. j. setna część łokcia, mieściła się np. 5 razy, to, postępując według téj saméj zasady, możemy te 6 setnych, jako części 10 razy mniejsze od dziesiątych części jedności, napisać obok dziesiątych części z prawéj strony, tak iż będzie

682 037,95.

Mamy teraz już po przecinku dwa miejsca zajęte: na miejscu piérwszym po przecinku są oznaczone dziesiąte części jedności, a na miejscu drugim po przecinku części setne jedności.

Gdybyśmy nadto w podobnyż sposób mieli do oznaczenia części 10 razy mniejsze od setnych części jedności, t. j. tysiączne części jedności, i było ich np. 4, to według téj saméj zasady napisalibyśmy

682 037,954

tak iż tysiączne części jedności znalazłyby się na miejscu trzecim po przecinku.

Gdyby jeszcze były do oznaczenia części 10 razy mniejsze od tysiącznych części jedności, t. j. dziesięciotysiączne części jedności, i było ich np. 8, to podobnież oznaczymy je na miejscu czwartym po przecinku, tak iż mieć będziemy

682 037,9548

I t. d. Stotysiączne więc części jedności znajdą się na miej-

---

[1]) Najwięcéj dla takiego oznaczania jest rospowszechnione używanie przecinka, chociaż zdarza się dość często, że po jednościach piszą albo kropkę w dolnéj części wiersza, albo kropkę w górnéj części wiersza, albo zostawiają tylko po jednościach widoczny odstęp pusty, albo nakoniec wszystkie cyfry po jednościach z prawéj strony piszą znacznie mniejsze.

scu piątym po przecinku, milijonowe na miejscu szóstym po przecinku i t. d.

Widzimy z tego, że w ten sposób, stosując tę samę zasadę, według któréj piszemy liczby całkowite, możemy przedstawiać części liczby mniejsze od jedności.

Ponieważ zaś podstawą naszego sposobu pisania liczb całkowitych jest liczba dziesięć, więc taż liczba dziesięć jest podstawą takiego pisania części liczby mniejszych od jedności. Dlatego te części (dziesiąte jedności, dziesiąte dziesiątych jedności czyli setne, dziesiąte setnych czyli tysiączne, . . .) w taki sposób wypisane, nazywają się częściami dziesiętnymi, a liczba, w którą wchodzą części dziesiętne, liczbą dziesiętną [1]. Powiemy więc:

Liczbą dziesiętną nazywamy liczbę, w któréj części mniejsze od jedności są napisane według téj saméj zasady, według któréj piszemy liczby całkowite.

Cyfry, znajdujące się w liczbie dziesiętnéj po przecinku, nazywamy cyframi dziesiętnymi téj liczby.

2. Jeżeli, mając już

682 037,95

chcemy jeszcze w téj liczbie oznaczyć 8 dziesięciotysiącznych, to cyfrę 8 wypada, jako mającą przedstawiać dziesięciotysiączne części, napisać na miejscu czwartym po przecinku. Dwa miejsca po przecinku są już zajęte, aby więc móc napisać 8 na miejscu czwartym, trzeba zająć miejsce trzecie, na którym bywają oznaczane części tysiączne, cyfrą zero, podobnie, jak to robiliśmy w liczbach całkowitych (§ 3, us. 9, 10, 11). Napiszemy więc

682 037,9508

Taksamo, jeżeli liczba składa się z samych tylko części dziesiętnych, np. z części: 9-u dziesiątych, 5-u setnych i 8-u dziesięciotysiącznych, i chcemy tę liczbę napisać jako dziesiętną, to wypadnie 9 napisać na miejscu piérwszym po przecinku, 5 na drugim, a 8 na czwartym. Przecinek zaś piszemy po cyfrze, oznaczającéj jedności (us. 1), dla oddzielenia jedności od części mniejszych od jedności. Gdy więc w naszéj liczbie niéma jedności, po których należy ów przecinek umieścić, napiszemy przed przecinkiem, aby zająć miejsce jedności, cyfrę zero. W ten sposób tak napiszemy naszę liczbę dziesiętną:

0,9508

---

[1]) Może ze względu na to, że mówimy: systemat dziesiątkowy pisania liczb, byłoby odpowiedniéj mówić: liczba dziesiątkowa, ale dziś nie czas już zmieniać tego powszechnie przyjętego wyrażenia.

Podobnie, gdy mamy do napisania, jako dziesiętną, liczbę: 8 dziesięciotysiącznych, to należy 8 umieścić na czwartym miejscu po przecinku; a że niéma części liczby do oznaczenia na miejscach piérwszym, drugim i trzecim po przecinku, przeto na tych miejscach, aby je zająć, piszemy cyfry zero. Liczbę więc 8 dziesięciotysiącznych tak przedstawimy jako dziesiętną:

0,0008

Z tego widzimy, że to, cośmy w us. 11-ym § 3-go powiedzieli o cyfrze zero w liczbach całkowitych, stosuje się wprost do liczb dziesiętnych.

3. Mieliśmy tu liczby dziesiętne

0,9508 i 0,0008

mniejsze od jedności. Liczby dziesiętne mniejsze od jedności nazywają się ułamkami dziesiętnymi. Możemy więc powiedzieć albo

Ułamkiem dziesiętnym nazywamy liczbę dziesiętną mniejszą od jedności, albo

Ułamkiem dziesiętnym nazywamy liczbę mniejszą od jedności, napisaną według téj saméj zasady, według któréj piszemy liczbę całkowitą.

4. Gdy mamy np. liczbę dziesiętną 682037,9508, to wszystkie «części dziesiętne» (us. 1) téj liczby przedstawia ułamek 0,9508; prócz tych «części» dziesiętnych, w téj liczbie jest 682037 jedności, czyli, jak zwykle mówimy, 682037 «całkowitych» [1]), tak iż

$$682\,037{,}9508 = 682\,037 + 0{,}9508.$$

Podobnie np. w liczbie 682,00012 mamy 682-ie całkowite, a jéj części dziesiętne są przedstawione przez ułamek 0,00012, tak iż

$$682{,}00012 = 682 + 0{,}00012.$$

Jeżeli zatym liczba dziesiętna jest większa od jedności, to ją można wyrazić jako sumę liczby całkowitéj i ułamka dziesiętnego.

Liczbę całkowitą, która pozostaje z liczby dziesiętnéj po oddzieleniu ułamka dziesiętnego, nazywamy także częścią całkowitą téj liczby dziesiętnéj. Tak np. częścią całkowitą liczby 682,00012 są: 682 całkowite.

5. Liczbę np.

64,0900127

możemy tak przeczytać: «64 całkowite, 9 setnych, 1-a stotysiączna, 2 milijonowe i 7 dziesięciomilijonowych».

Z uwagi jednak, że w liczbie dziesiętnéj, części liczby oznaczone na jakimkolwiek miejscu są 10 razy większe od części liczby oznaczonych obok z prawéj strony, a tymsamym sto razy większe od czę-

---

[1]) Nie można jednak mówić: «całości», bo tu całością jest liczba 682037,9508.

ści oznaczonych z prawéj strony na drugim skolei miejscu, 1000 razy większe od części oznaczonych z prawéj strony na trzecim skolei miejscu i t. d., możemy o częściach dziesiętnych naszéj liczby powiedzieć, że: 9 setnych jest to samo, co 90 tysiącznych, co 900 dziesięciotysiącznych, co 9000 stotysiącznych, co 90 000 milijonowych, co 900 000 dziesięciomilijonowych, a 1-na stotysiączna jest to samo, co 10 milijonowych, co 100 dziesięciomilijonowych, 2 zaś milijonowe jest to samo, co 20 dziesięciomilijonowych. Części więc dziesiętne naszéj liczby przedstawiają $900\,000 + 100 + 20 + 7$ dziesięciomilijonowych; czyli 900 127 dziesięciomilijonowych, tak iż liczbę naszę możemy tak przeczytać: «64 całkowite i 900 127 dziesięciomilijonowych».

Zważywszy jeszcze, że jedność jestto 10 000 000 dziesięciomilijonowych, możemy, czytając liczbę naszę, zamiast mówić: 64 całkowite (64 jedności), powiedzieć 640 000 000 dziesięciomilijonowych. A że nadto mamy w téj liczbie 900 127 dziesięciomilijonowych, zatym możemy ją jeszcze tak przeczytać: «640 900 127 dziesięciomilijonowych».

Gdy w liczbie dziesiętnéj jest część całkowita, to, jeżeli w niéj po przecinku jest niemniéj, niż dwie cyfry znaczące (§ 3, us. 7), możemy ją przeczytać trzema sposobami; jeżeli zaś w niéj po przecinku jest tylko jedna cyfra znacząca, np. 64,0008, to dwoma sposobami; ułamek zaś dziesiętny można przeczytać odpowiednio dwoma sposobami, np. 0,9508, lub jednym tylko, np. 0,0008. Ogólnie zaś powiemy:

*Liczbę dziesiętną możemy przeczytać trzema sposobami: albo, przeczytawszy część całkowitą, wymawiamy oddzielnie pokolei każdą cyfrę znaczącą po przecinku, dodając zaraz nazwanie części liczby, jakie bywają oznaczane na miejscu, które ta cyfra zajmuje; albo, przeczytawszy część całkowitą, czytamy liczbę, przedstawioną przez cyfry, znajdujące się po przecinku, jakgdyby to ich zgrupowanie tworzyło liczbę całkowitą *), dodając tylko nazwanie części liczby, oznaczanych na miejscu, zajętym przez ostatnią cyfrę po przecinku; alboteż czytamy tę liczbę jako całkowitą, jakgdyby przecinka nie było, i dodajemy tylko nazwanie części liczby, oznaczanych na miejscu, zajętym przez ostatnią cyfrę po przecinku.*

6. Ułamek np. dziesiętny 0,0900127, przedstawia liczbę 900 127 dziesięciomilijonowych (us. 5) jedności, która, jak wiemy (§ 17, us. 1), może być przedstawiona w ten sposób $\frac{900\,127}{10\,000\,000}$. Takie przedstawienie téj liczby, tudzież przedstawienia podobne innych liczb, które dotąd (roz. VI) nazywaliśmy «ułamkami», będziemy, w przeciwstawieniu ułamkom dziesiętnym, nazywać ułamkami zwyczajnymi. Owóż, uła-

*) Por. § 3, us. 12.

mek dziesiętny 0,0900127 przedstawia tę samę liczbę, co ułamek zwyczajny $\frac{900127}{10000000}$, tak iż

$$0{,}0900127 = \frac{900127}{10000000}.$$

Podobnie np. (us. 4; § 16, us. 1 a.)

$$64{,}0900127 = 64 + 0{,}0900127 = 64 + \frac{900127}{10000000} = 64\frac{900127}{10000000}.$$

A zatym *ułamek dziesiętny możemy zastąpić przez ułamek zwyczajny, pisząc jako jego licznik liczbę, przedstawioną przez cyfry znajdujące się po przecinku, jakgdyby to ich zgrupowanie przedstawiało oddzielną liczbę całkowitą, a jako mianownik liczbę, przedstawioną przez 1 z tylu zerami, ile w danym ułamku jest wszystkich cyfr dziesiętnych* [1]).

Podobnie liczba np. dziesiętna 64,0900127, jako przedstawienie 640900127-u dziesięciomilijonowych (us. 5) jedności, może być zastąpiona przez ułamek zwyczajny, t. j.

$$64{,}0900127 = \frac{640900127}{10000000}.$$

A więc ogólnie:

*Liczbę dziesiętną możemy zastąpić przez ułamek zwyczajny, pisząc jako jego licznik liczbę daną, opuściwszy w niéj przecinek, a jako mianownik liczbę, przedstawioną przez 1 z tylu zerami, ile w danéj liczbie jest wszystkich cyfr dziesiętnych *).*

7. Ponieważ w liczbie dziesiętnéj np. 237,9548, prócz 237 całkowitych, mamy 9 dziesiątych, 5 setnych, 4 tysiączne i 8 dziesięciotysiącznych (us. 1, 5), zatym, wyrażając 9 dziesiątych, 5 setnych, 4 tysiączne, oraz 8 dziesięciotysiącznych jako ułamki zwyczajne, możemy naszę liczbę wyrazić jako sumę 237 jedności i tych ułamków zwyczajnych, t. j.

$$237{,}9548 = 237 + \frac{9}{10} + \frac{5}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{8}{10000}.$$

Pisząc jeszcze (§ 6, us. 22), zamiast 237 sumę $2\times 100 + 3\times 10 + 7\times 3$, mieć będziemy

---

1) Niewłaściwie mówią: «ułamek dziesiętny jestto ułamek, którego mianownik jest albo 10, albo 100, albo i t. d. — wogóle 1 z zerami», gdyż, jeżeli tylko ułamek ma mianownik, to jednocześnie nie jest już dziesiętnym. Dodać jeszcze można, że takie określenie ułamków dziesiętnych nie obejmuje ułamków dziesiętnych nieskończonych (choćby tylko peryjodycznych).

[J. A. Serret w *Traité d'arithmétique* (wyd. 6-e, 1875), powiedziawszy uprzednio, że «części dziesiętne jedności są te, które otrzymujemy, dzieląc jedność na 10, 100, 1000, ... części równych», takie podaje określenie: «liczbą dziesiętną nazywa się liczba, która wyraża, ile pewna wielkość zawiera jedności i części dziesiętnych jedności.»]

*) Niekiedy można tak otrzymane ułamki zwyczajne następnie skrócić, np. $2{,}75 = 2\frac{75}{100} = 2\frac{3}{4}$; $0{,}125 = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8}$.

$$237{,}9548 = 2 \times 100 + 3 \times 10 + 7 \times 1 + \frac{9}{10} + \frac{5}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{8}{10000},$$

albotéż (§ 6, us. 22)

$$237{,}9548 = 2 \times 10 \times 10 + 3 \times 10 + 7 \times 1 + \frac{9}{10} + \frac{5}{10 \times 10} + \\ + \frac{4}{10 \times 10 \times 10} + \frac{8}{10 \times 10 \times 10 \times 10},$$

co właśnie nam wskazuje, że przy pisaniu naszéj liczby dziesiętnéj służyła nam jako podstawa liczba 10, gdyż każda z części liczby, oznaczonych w liczbie danéj na jakimkolwiek miejscu, jest 10 razy większa od części liczby oznaczonych obok z prawéj strony (por. § 3, us. 16).

Pisząc $9 \times \frac{1}{10}$ zamiast $\frac{9}{10}$, $5 \times \frac{1}{10 \times 10}$ zamiast $\frac{5}{10 \times 10}$ i t. d. i wprowadzając wykładniki, możemy liczbę np. 6237,9548 tak przedstawić (§ 6, us. 41, § 7, us. 28):

$$6237{,}9548 = 6 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 7 \times 10^0 + 9 \times \frac{1}{10^1} + \\ + 5 \times \frac{1}{10^2} + 4 \times \frac{1}{10^3} + 8 \times \frac{1}{10^4},$$

t. j. *jedności, dziesiątki i t. d. każdéj liczby przedstawiają iloczyn liczby jednocyfrowéj przez potęgę liczby 10, części zaś jéj dziesiąte, setne i t. d. przedstawiają iloczyn liczby jednocyfrowéj przez odwrotność* (§ 19, us. 10) *potęgi liczby 10*, co jest następstwem tego, że nasz systemat pisania liczb jest dziesiątkowy [1]).

8. Jeżeli mamy np. 137,028 i po cyfrze ostatniéj po przecinku, t. j. po cyfrze 8, napiszemy jedno lub więcéj zer, to liczba np.

137,028000

przedstawiać nam zawsze będzie 137 całkowitych 2 setne i 8 tysiącznych — taksamo, jak poprzednio: 137,028. Możemy więc powiedzieć, że *liczba dziesiętna się nie zmieni, jeżeli po przecinku z prawéj strony ostatniéj cyfry znaczącéj dopiszemy ilekolwiek zer.* (Por. § 3, us. 12.)

Jeżeli mamy liczbę całkowitą, np. 34, to kładąc przecinek po cyfrze, przedstawiającéj jedności, t. j. po cyfrze 4, możemy po przecinku napisać zera, gdyż np. liczba 34,0000 także przedstawia 34 jedności; zatym, *mając liczbę całkowitą, możemy po cyfrze, zajmującéj miejsce piérwsze, umieścić przecinek, a po nim dopisać ilekolwiek zer.*

Dopisujemy zera, jako końcowe cyfry dziesiętne, ilekroć to w czasie wykonywanego rachunku okazuje się pożytecznym. Nawzajem, jeżeli, wykonywając pewien rachunek, otrzymujemy, jako wypadek tego rachunku, liczbę dziesiętną, w któréj ostatnimi cyframi dziesiętnymi są zera, to te zera możemy opuścić.

---

[1]) Taksamo moglibyśmy pisać np. ułamki szóstkowe w systemacie szóstkowym i t. d. (por. § 6, us. 42; § 7, us. 28).

9. Jeżeli mamy dwie takie np. liczby dziesiętne:

805,2479 i 80,52479

to możemy powiedzieć, że, przesuwając w piérwszéj liczbie przecinek o jedno miejsce (czyli: o jednę cyfrę) wprawo, otrzymujemy z niéj liczbę drugą. Wskutek tego przesunięcia przecinka 8 setek powstało 8 dziesiątków, t. j. z każdéj setki powstał dziesiątek, czyli każda setka została zmniejszona 10 razy; podobnież z 5 jedności powstało 5 dziesiątych, t. j. każda jedność została zmniejszona 10 razy; z 2 dziesiątych powstały 2 setne, t. j. każda dziesiąta została zmniejszona 10 razy i t. d. Gdy więc wskutek przesunięcia przecinka o jedno miejsce wprawo każda część liczby została zmniejszona 10 razy, to i cała liczba zmniejszyła się 10 razy. — Nawzajem, moglibyśmy powiedzieć, że piérwszą liczbę otrzymujemy z drugiéj, przesuwając w niéj przecinek o jedno miejsce wlewo, i podobnie objaśnić, że, wskutek tego, każda część liczby drugiéj została powiększona 10 razy, czyli, że wskutek przesunięcia przecinka o jedno miejsce wlewo liczba powiększa się 10 razy.

Podobnież, wprost rozważając np. dwie liczby dziesiętne

805,2479 i 80 524,79

wniesiemy, że, wskutek przesunięcia przecinka o dwa miejsca wprawo, liczba powiększa się 100 razy, a wskutek posunięcia przecinka o dwa miejsca wlewo liczba zmniejsza się 100 razy.

I t. d. Powiemy więc:

Liczbę dziesiętną powiększamy lub zmniejszamy 10, 100, 1000, 10000,... razy, gdy przecinek przesuwamy o 1, 2, 3, 4,... miejsca odpowiednio wprawo lub wlewo.

Jeżeli np. mamy liczbę 2,37 powiększyć 10 000 razy, to należy w niéj przecinek przesunąć o 4 miejsca wprawo. W danéj liczbie mamy tylko 2 cyfry dziesiętne; możemy jednak (us. 8) wystawić sobie, że z prawéj strony ostatniéj cyfry dziesiętnéj znajdują się zera, a mianowicie, że jest ich tyle, ile nam potrzeba, aby 4 miejsca po przecinku były zajęte, t. j. że po cyfrze 7 znajdują się dwa zera. Przesuwając więc przecinek o 4 miejsca wprawo, otrzymamy w tym przypadku, jako liczbę od danéj 10 000 razy większą, liczbę całkowitą 23 700. — Podobnie, gdybyśmy chcieli też samę liczbę 2,37 zmniejszyć np. 10 000 razy, to wypadłoby przecinek przesunąć o 4 miejsca wlewo. Z lewéj strony jest zajęte w naszéj liczbie tylko jedno miejsce, ale możemy (§ 3, us. 12) wystawić sobie, że z lewéj strony części całkowitéj są dopisane zera, mianowicie, że je mamy na miejscach drugim, trzecim i czwartym. Gdy więc przesuniemy przecinek wlewo o 4 miejsca, to wypadnie jeszcze, z uwagi, że wskutek tego otrzymamy liczbę złożoną tylko z części dziesiętnych, t. j. ułamek dziesiętny, napisać przed przecinkiem cyfrę zero (us. 2). Ostatecznie więc będziemy mieli 0,000237.

Podobnież, chcąc np. liczbę 734 powiększyć np. 100 razy, możemy ją sobie wystawić (us. 8) jako 734,00, tak iż przesuwając, przecinek o 2 miejsca wprawo, otrzymamy 73400 *). Również np. 1 zmniejszając 100 razy, otrzymamy 0,01. — A jeżelibyśmy pragnęli liczbę 734 zmniejszyć raz 100, a drugim razem 100000 razy, to zważymy wprost, że, aby zmniejszyć liczbę 734 razy 100, możemy każdą z 734-ch jedności zmniejszyć 100 razy, wskutek czego mieć będziemy 734 setne części jedności, t. j. (us. 5) liczbę 7,34; zmniejszając zaś owę liczbę 734 razy 100000, możemy podobnie każdą z jedności téj liczby zmniejszyć 100000 razy, wskutek czego otrzymamy 734 stotysiączne, t. j. 0,00734. — Gdy np. liczbę 56020 zmniejszymy 100 razy, to otrzymany 560,20 czyli (us. 8) liczbę 560,2.

10. W us. 2-im § 9-go widzieliśmy, jak łatwo liczbę wieloraką, wyrażoną w jednostkach układu metrycznego, przedstawić jako liczbę mianowaną prostą. Mówiliśmy tam jednak o wyrażeniu takiéj liczby wielorakiéj tylko jako mianowanéj prostéj całkowitéj, t. j. przy pomocy najmniejszéj z wchodzących jednostek, lubteż jednostki jeszcze mniejszéj. Możemy jednak wyrazić tę liczbę w jednorodnych jednostkach metrycznych jakiéjkolwiek wielkości.

Tak np. gdy mamy (§ 9, ns. 2) 300865 cm., a chcemy tę liczbę wyrazić w metrach, to, zważywszy, że cm. jest setną częścią metra, mieć będziemy 3008,65 m. Jeżelibyśmy zaś naszę liczbę 300865 cm. wyrazić chcieli w kilometrach, to zważywszy, że cm. jest stotysiączną częścią kilometra, mieć będziemy 3,00865 Km. Jest więc

$$300865 \text{ cm.} = 3008{,}65 \text{ m.} = 3{,}00865 \text{ Km.}$$

Podobnie, jeżeli chcemy np. 2 Dm. kw. + 5 m. kw. + 8,75 cm. kw. wyrazić w m. kw., to możemy wprost, zważywszy, że Dm. kw. przedstawia setkę m. kw., że dm. kw. jest setną częścią m. kw., a cm. kw. jest dziesięciotysiączną m. kw., napisać

$$2 \text{ Dm. kw.} + 5 \text{ m. kw.} + 15 \text{ dm. kw.} + 8{,}75 \text{ cm. kw.} = 205{,}150875 \text{ m. kw.}$$

(tu 7 dziesiątych cm. kw., jako 7 dziesiątych dziesięciotysiącznéj m. kw., przedstawia 7 stotysiącznych m. kw., a 5 setnych cm. kw., jako 5 setnych dziesięciotysiącznéj m. kw., przedstawia 5 milijonowych m. kw.). Gdybyśmy otrzymaną liczbę chcieli wyrazić w Hm. kw., to, z uwagi, że m. kw. jest dziesięciotysiączną częścią Hm. kw., mieć będziemy

$$205{,}150875 \text{ m. kw.} = 0{,}0205150875 \text{ Hm kw.}$$

*) Por. § 6, us. 21.

Podobnie np.
2 dm. sz. + 74,25 mm. sz. = 0,00200007425 m. sz. = 2 000,07425 cm. sz.

Również łatwo możemy wykonywać zadania odwrotne, np. 28 342,021 g. = 28 Kg. + 342 g. + 21 mg.

11. Możemy teraz już rozwiązywać takie np. zadania (por. str. 135, 122):

a. Wyrazić korzec nowopolski przy pomocy hektolitra. — Kwarta n.-p. = litrowi; korzec = 4 kw. × 8 × 4; a więc:

korzec n.-p. = 128 kwart = 128 l. = 1,28 Hl.

b. Wyrazić funt n.-p. w częściach kilograma. — Łut n.-p. = = 12 672 mg., a więc funt n.-p. = 12 672 mg. × 32 i

funt n.-p. = 405 504 mg. = 0,405504 Kg.

c. Wyrazić łokieć n.-p. w częściach ćwierci południka ziemskiego. — Łok. n.-p. = 2 mm. × 12 × 12 × 2; ćwierć południka ziemskiego 10 000 000 m.; a więc:

łok. n.-p. = 576 mm. = 0,576 m. = 0,0000000576 ćwierci południka ziemskiego.

d. Ile Kg. waży stopa sz. n.-p. wody dystylowanéj przy takiéj jéj temperaturze, przy któréj woda jest najgęstszą? — Stopa linijowa n.-p. = 2 mm. × 12 × 2; stopa sz. n.-p. = 288 mm. sz. × 288 × 288; gram jestto ciężar cm. sz. takiéj wody; a więc

stopa sz. n.-p. = 23 887 872 mm. sz. = 23 887,872 cm. sz.

ciężar stopy sz. n.-p. wody = 23 887,872 g. = 23,887872 Kg.

e. Ile włóka n.-p. ma hektarów? — Ar = Dm. kw. = 100 m. kw.; włóka n.-p. = 288 mm. kw. × 288 × 225 × 300 × 30; a więc

włóka n.-p. = 168 061 600 000 mm. kw. = 168 061,6 m. kw.
= 1 680,616 ara = 16,80616 Hara.

12. Gdy mamy dwie liczby całkowite, mające różną ilość cyfr, to liczba, mająca więcéj cyfr, jest większą; np. jeżeli mamy liczby całkote: 3-cyfrową i liczbę 4-ocyfrową, to w ostatniéj jest przynajmniéj 1 tysiąc, gdy tymczasem piérwsza liczba jest mniejsza od tysiąca. Gdy zaś mamy dwa ułamki dziesiętne, np.

0,64 i 0,59249075,

to możemy zauważyć, że w drugim ułamku mamy, prócz 5-u dziesiątych, następujące części: 9 setnych, które przedstawiają mniéj niż 10 setnych, czyli mniéj niż 1-ę dziesiątą; 2 tysiączne, które przedstawiają mniéj niż 1 setną, tak iż 9 setnych wraz z 2-ema tysiącznymi przedstawiają mniéj niż 9 setnych + 1 setna, t. j. mniéj niż 10 setnych, czyli mniéj niż 1 dziesiątą; 4 dziesięciotysiączne, o których podobnie wypadnie nam powiedzieć, że one wraz z 9-u setnymi i 2-ema tysiącznymi przedstawiają liczbę mniejszą od 1 dziesiątéj, i t. d

Drugi więc ułamek przedstawia liczbę mniejszą od 6-u dziesiątych — gdy piérwszy jest liczbą większą *) od 6-u dziesiątych: jest więc

$$0,64 > 0,59249075.$$

Oczywiście, że z dwu liczb: 598,778947 i 1000,012 druga jest większa.

Podobnie, mając dwa ułamki

$$0,8062878 \quad \text{i} \quad 0,80645$$

łatwo spostrzeżemy, że w piérwszym części: 2 dziesięciotysiączne, 8 stotysięcznych, 7 milijonowych i 8 dziesięciomilijonowych przedstawiają razem mniéj niż 3 dziesięciotysiączne, tak iż piérwszy ułamek, jest mniejszy od 8-u dziesiątych, 6-u tysiącznych i 3 dziesięciotysięcznych (razem wziętych), a więc jest mniejszy od drugiego ułamka,

$$0,8062878 < 0,80645.$$

Podobnie

$$405,8062878 < 405,80645,$$

t. j. *jeżeli dwie liczby* [*całkowite**) lub dziesiętne*] *mają początkowe cyfry na odpowiednich miejscach jednakowe, to ta z tych liczb jest większa, w któréj piérwsza (licząc od strony lewéj) z różnych od siebie cyfr przedstawia więcéj części liczby, oznaczanych na odpowiednim miejscu.*

Z tego wypada, że: *zgrupowanie ilukolwiek i jakichkolwiek cyfr dziesiętnych na pewnych miejscach przedstawia mniejszą liczbę, niż cyfra 1 napisana na miejscu poprzedzającym to miejsce, na którym się znajduje piérwsza z owych cyfr*; np. 0,000878 < 0,001; podobnie: 0,00999 < 0,01.

Powyższe rozważania doprowadzają jeszcze do tego, że *pewna liczba jedynym tylko sposobem może być przedstawiona jako dziesiętna.* Gdyby bowiém pewna cyfra dziesiętna, t. j. cyfra, znajdująca się na pewnym miejscu, mogła być inną, to odpowiednie dwa wyrażenia owéj liczby różniłyby się przynajmniéj o 1-ę część dziesiętną, oznaczaną na owym miejscu, a téj różnicy nie mogłyby pokryć różnice, wynikające z odmiennych cyfr na miejscach dalszych.

13. Niekiedy zapomocą rachunku otrzymujemy takie drobne części liczby, których w rzeczywistości nie mamy co uwzględniać. Np. Piotr kupił 100 łokci materyi, za którą zapłacił rub. 267 i kop. 85, czyli, ponieważ kopiéjka jest setną częścią rubla, zapłacił rub. 267,85; jeden łokieć téj materyi odstępuje Pawłowi po cenie kosztu; ile Paweł ma Piotrowi zwrócić za ten łokieć materyi? Ponieważ 100 ł. kosztuje rub. 267,85, więc jeden łokieć kosztuje 100 razy mniéj, t. j. rub. 2,6785 (us. 9). Ma więc Paweł zwrócić Piotrowi rub. 2,6785, czyli 2 rub. i 67,75 kop. Ponieważ jednak kopiéjka jest najmniejszą z bę-

---

*) Ogólniéj: nie mniejszą od 6-u dziesiątych, gdyż byłoby to samo, gdybyśmy mieli ułamki

$$0,6 \quad \text{i} \quad 0,59249075.$$

**) Np. 56079 i 56081.

dących w obiegu monet, więc Paweł może zapłacić tylko 2 rub. i 67 kop., czyli tylko 2,67 rub. Tu więc dokładną byłaby liczba 2,6785 rub., ale przy wypłacie można przyjąć zamiast niéj liczbę bliską dokładnéj, czyli, jak się zwykle mówi, liczbę przybliżoną do dokładnéj, mianowicie 2,67 rub. Ta liczba przybliżona różni się tu od dokładnéj o to, cośmy opuścili, t. j. o 8 tysiącznych i 5 dziesięciotysiącznych rubla, czyli o 0,0085 rub. Ponieważ zaś różnica téj liczby przybliżonéj od dokładnéj, t. j. 0,0085 rub., jest mniejsza (us. 12) od 0,01 rub., więc mówimy, że niedokładność, t. j. błąd, wynosi tu mniéj niż 0,01, czyli, że liczba 2,67 jest przybliżona do dokładnéj (2,6785) więcéj niż na 0,01, albo *) krócéj: przybliżona na 0,01. — Zamiast mówić: liczba przybliżona (do liczby dokładnéj) mówimy często krócéj: przybliżenie (liczby dokładnéj). Liczbę zaś, od któréj błąd ma być mniejszy, jak np. tu liczbę 0,01, nazywamy zwykle stopniem przybliżenia [1]).

Popełniliśmy tu błąd 0,0085 rub., który wprawdzie jest mniejszy od 0,01 rub., ale jest już większy od 0,005 rub. (us. 12), t. j. od 0,5 k., czyli od połowy kopiéjki. Wskutek tego, biorąc przybliżenie 2,67 rub., opuściliśmy więcéj niż połowę kopiejki (czyli więcéj niż połowę 0,01 rubla). Gdy tymczasem, gdybyśmy oznaczyli wartość łokcia téj materyi o 1 kopiéjkę więcéj, t. j. oznaczyli ją jako 2,68 rub., to popełnilibyśmy błąd mniejszy od połowy kopiéjki. Liczba więc 2,68 rub. jest przybliżeniem liczby dokładnéj 2,6785 rub. również na 0,01 rub., ale jest bliższą téj liczby dokładnéj niż poprzednie jéj przybliżenie 2,67 rub.

Mamy więc tu dwa przybliżenia liczby dokładnéj 2,6785 rub., jedno 2,67 rub., drugie 2,68 rub. — oba na 0,01 rub. Piérwsze z tych przybliżeń jest mniejsze od liczby dokładnéj; błąd jego trzebaby dodać do niego, aby otrzymać liczbę dokładną; nazywa się ono przybliżeniem z niedomiarem. Drugie zaś przybliżenie jest większe od liczby dokładnéj; błąd jego trzebaby od niego odjąć, aby mieć liczbę dokładną; nazywa się ono przybliżeniem z nadmiarem [2]). — Jeżeli np. w powyższym zadaniu idzie nam tylko o to, aby błąd nie był większy od 0,01 rub., to wszystko jedno, które z przybliżeń weźmiemy, czy 2,67 rub., czyteż 2,68 rub. Jeżeli jednak chcemy, aby błąd nie był większy od połowy 0,01-éj rubla, czyli nie większy od 0,005 rub., to wypadnie tu wziąć przybliżenie z nadmiarem, t. j. 2,68 r.

Przypuśćmy jednak, że Piotr zapłacił za owe 100 łokci materyi

---

*) Mówimy także: liczba 2,67 jest wyrażeniem liczby dokładnéj 2,6785 «ze ścisłością do 0,01».

[1]) Prawie zawsze stopień przybliżenia wyraża się przez 1 z zerami lub 1 na pewnym miejscu po przecinku. Stopnie przybliżenia inaczéj wyrażone najczęściéj sprowadzamy do poprzednich. Więcéj o tym w tomie III seryi III «Bibl. mat.-fiz.».

[2]) Por. § 5, us. 5.

np. 267,25 rub., to i w tym także przypadku, wrazie, gdy idzie tylko o to, aby błąd był mniejszy od 0,01 rub., Paweł może zwrócić Piotrowi albo 2,67 rub., albo 2,68 rub.; wrazie jednak, gdy idzie o to, aby z tych dwu przybliżeń wziąć to, w którym błąd jest mniejszy, Paweł powinien zwrócić Piotrowi w tym przypadku 2,67 rub. —

Podobnie np., jeżeli chcemy mieć pewne pojęcie o prędkości roschodzenia się głosu w powietrzu, a z doświadczenia, któreśmy wykonali, wypadło nam, że ta prędkość wynosi np. 1178 stóp n.-p. na sekundę, to jeżeli chcemy tak się wyrazić, żeby nieścisłość była mniejsza od 100 stóp, powiedzieć możemy równie dobrze, że to doświadczenie dało nam, jako prędkość głosu, 1100 stóp n.-p. na sekundę, jak że ono nam dało, jako prędkość głosu, 1200 stóp n.-p. na sekundę. Obie te liczby będą przybliżeniami liczby rzeczywiście z doświadczenia otrzymanéj na 100 stóp n.-p., piérwsze z niedomiarem, drugie z nadmiarem. Jeżeli zaś z tych dwu przybliżeń na 100 stóp, chcemy wziąć to, które jest bliższe liczby otrzymanéj z doświadczenia, to weźmiemy przybliżenie z nadmiarem, t. j. powiemy, że otrzymaliśmy, jako prędkość głosu, 1200 stóp n.-p. na sekundę.

Znajdujemy np., że, według starannych wyrachowań, stopa rosyjska, czyli angielska = 0,3047944 metra. Jeżeli chcemy, jako długość téj stopy, wziąć liczbę przybliżoną na 1 mm. (t. j. na 0,001 m.) i taką, aby z możliwych zawsze dwu takich liczb, wziąć tę, którąby była bliższa rzeczywistéj długości téj stopy (t. j. właściwie wziąć przybliżenie na 0,0005 m.), to, z uwagi, że piérwsza z opuszczonych cyfr jest 7, weźmiemy, jako żądane przybliżenie owéj stopy, długość 0,305 m. — Gdy zaś z taką samą ścisłością chcemy wziąć przybliżenie arszyna, a z tablic wiadomo, że arszyn = 0,7111870 m., to, z uwagi, że piérwsza z opuszczonych cyfr 1 (na 4-ym miejscu) jest mniejsza od 5, weźmiemy, jako żądane przybliżenie arszyna, długość 0,711 metra. — Gdy podobnie, wiedząc, że garniec n.-p. = 0,32523 wiadra, chcemy z dwu przybliżeń na 0,01 wiadra, wziąć to, które jest bliższe wielkości rzeczywistéj garnca, to z uwagi, że po piérwszéj z opuszczonych cyfr, t. j. po cyfrze 5, są cyfry znaczące, tak iż części téj liczby, którą opuszczamy, t. j. liczba 0,00523, jest większa od 0,005, wypadnie wziąć tu jako wielkość garnca n.-p. przybliżenie z nadmiarem, t. j. 0,33 wiadra. — Gdy nakoniec znajdziemy się w tym przypadku, że mamy opuścić jednę tylko cyfrę, a tą jest 5 (albo cyfrę 5 z samymi tylko zerami po niéj następującymi), to możemy wziąć dowolnie którekolwiek z dwu przybliżeń; zwykle jednak bierzemy w tym przypadku przybliżenie z nadmiarem. Powiemy więc ogólnie *):

*) Stosuje się to i do liczb przybliżonych na 10,100 i t. d.; lecz wtedy, zamiast mówić: piérwsza z opuszczonych cyfr, należałoby powiedzieć: piérwsza z cyfr, które zastępujemy przez zera.

Gdy pierwsza z opuszczonych cyfr liczby, któréj wartością przybliżoną się zadowalamy, przedstawia 5 lub więcéj części liczby na tym miejscu oznaczanych, to bierzemy przybliżenie z nadmiarem, t. j. do części, przedstawionych przez ostatnią z pozostających cyfr, dodajemy 1-ę; w innych zaś razach bierzemy przybliżenie z niedomiarem, t. j. pozostających cyfr nie zmieniamy.

Gdy np. mamy wziąć przybliżenie liczby 2,5679965 na 0,00001, to wypadnie wziąć przybliżenie z nadmiarem, t. j. 2,56800. I jeżeli chcemy zaznaczyć, z jaką ścisłością ta liczba jest wzięta, t. j. jeżeli chcemy wyraźnie wskazać, że ta liczba jest przybliżeniem dokładnéj na 0,00001, to winniśmy w niéj końcowe zera zachować (us. 8). — Dlategoto właśnie w jednym z powyższych przykładów mieliśmy: arszyn = 0,7111870 m.

14. Ponieważ liczby dziesiętne możemy zastąpić przez ułamki zwyczajne (us. 6), zatym aby dodać do siebie, odjąć od siebie, pomnożyć lub podzielić przez siebie liczby dziesiętne, moglibyśmy je zastąpić przez całkowite z ułamkami zwyczajnymi, lub przez ułamki zwyczajne, i następnie wykonać te działania według wskazówek, podanych w rozdziale poprzedzającym [1]). Z uwagi jednak, że w liczbach dziesiętnych części mniejsze od jedności są napisane według téj saméj zasady, co liczby całkowite, należy wykonywanie tych działań na liczbach dziesiętnych oprzéć wprost na rozumowaniu podobnym do tego, które nas doprowadziło do prawideł wykonywania owych działań na liczbach całkowitych. Dlategotéż przy wyprowadzaniu odpowiednich prawideł dla liczb dziesiętnych, możemy przyjąć za wiadome to, co wiemy już o wykonywaniu tych działań na liczbach całkowitych, ale nie będziemy korzystać z tego, że liczby dziesiętne możemy zastąpić przez ułamki zwyczajne, a tymwięcéj stosować prawideł dla tych ostatnich już wyprowadzonych.

(Zadania arytmetyczne. § 21, 22.)

---

§ 22. DODAWANIE I ODEJMOWANIE LICZB DZIESIĘTNYCH.

1. Jak wiemy (§ 4, us. 6), dodawanie liczb całkowitych jest działaniem, zapomocą którego odnajdujemy jednę liczbę zwaną sumą, któraby była skupieniem wszystkich jedności składników. Gdy zaś pośród danych liczb są dziesiętne, to podobnie, działanie, doprowadzające nas do jednéj liczby, będącéj skupieniem wszystkich liczb danych, a więc skupieniem wszystkich części liczb danych (czyli,

---

[1]) Co jednak nie mogłoby nas doprowadzić do ilorazu, wyrażonego jako liczba dziesiętna.

wogóle mówiąc, jedności i części jedności tych składników), nazwiemy także dodawaniem, a liczbę owę — ich sumą. Powiemy więc ogólnie:

Dodawanie jestto działanie, zapomocą którego, mając dwie lub więcéj liczb danych, zwanych składnikami, odnajdujemy liczbę, zwaną sumą, która jest skupieniem jedności i części jedności składników.

2. Mówiąc o dodawaniu liczb całkowitych, dowodziliśmy, że suma nie zależy od porządku składników, że aby do sumy dodać pewną liczbę, można tę liczbę dodać do któregokolwiek składnika, i że dodawanie trzech lub więcéj składników może być uskutecznione przy pomocy dodawań częściowych którychkolwiek składników, wziętych w jakimkolwiek porządku (§ 4, us. 5—10). Jeżeli zważymy, że, mając np.

$$0{,}03 + 0{,}5 + 2,$$

możemy te liczby wyrazić w najmniejszych z wchodzących do téj sumy częściach jedności, t. j. w setnych, że więc: $0{,}03 = 0{,}01 + 0{,}01 + 0{,}01$; $0{,}5$ jest równe 50-u takim składnikom, a 2 jest równe 200-u takim składnikom, to możemy tę sumę wyrazić jako sumę samych tylko składników $0{,}01$. A łącząc oddzielnie naprzód np. piérwszych 50 tych składników w jednę liczbę, następnie dalszych 200 również w jednę liczbę i nakoniec podobnież pozostałe 3 składniki, otrzymamy

$$0{,}50 + 2{,}00 + 0{,}03, \text{ czyli (§ 21, us. 8) } 0{,}5 + 2 + 0{,}03,$$

z czego widzimy, że piérwsza z przytoczonych prawd odnosi się i do liczb dziesiętnych. Na tym zaś się opiérając, łatwo już dowiedziemy w takiż sam sposób, jak to było zrobione dla liczb całkowitych, że i dwie pozostałe z wypowiedzianych prawd również stosują się do liczb dziesiętnych.

3. Bespośrednio z tego wypada, że to wszystko, cośmy mówili o wykonywaniu dodawania liczb całkowitych (§ 4, us. 14—16), może być odniesione do dodawania liczb dziesiętnych. Nie powtarzając teraz szczegółowo wszystkich podanych wtedy objaśnień, powiemy tu tylko, że mając np. wykonać dodawanie

$$8{,}846 + 79 + 286{,}97 + 0{,}5,$$

(ponieważ suma nie zależy od porządku składników i to dodawanie uskutecznić możemy przy pomocy dodawań częściowych) oddzielnie wyznaczymy najmniejsze, t. j. tysiączne części sumy, oddzielnie setne i t. d. W tym celu podpiszemy składniki pod sobą tak, aby jedności były pod jednościami. Z uwagi, że tu części tysiączne wchodzą tylko do jednego składnika i jest ich 6, w sumie będzie również tysiącznych 6; piszę zatym pod kréską

$$\begin{array}{r@{,}l} 8 & 846 \\ 79 & \\ 286 & 97 \\ 0 & 5 \\ \hline 375 & 316 \end{array}$$

pod tysiącznymi 6. Setnych jest w jednym składniku 4, w drugim 7; razem setnych 11, czyli 1 dziesiąta i 1 setna; podpisuję więc pod setnymi 1, a 1 dziesiątą dodaję do dziesiątych. Wszystkich więc dziesiątych jest 23, czyli 2 jedności i 3 dziesiąte: pod dziesiątymi piszę 3, a 2 jedności dodam do jedności. Otrzymawszy z dodania jedności 25 i napisawszy pod jednościami 5, kładę po téj cyfrze, jako oznaczającéj *) jedności, przecinek (us. 1), i t. d.

Powiemy więc ogólnie:

Aby dodać do siebie liczby dziesiętne, podpisujemy je jedne pod drugimi tak, żeby jedności znajdowały się pod jednościami, i dodajemy je w ten sam sposób, jakgdybyśmy dodawali liczby całkowite, a w sumie kładziemy przecinek po cyfrze, odpowiadającéj tym cyfrom składników, po których znajdują się przecinki.

Przyglądając się powyższemu przykładowi, zauważyć jeszcze możemy, że przy dodawaniu części całkowitych, dodając np. setki, nie zważamy na to, że w składnikach piérwszym i czwartym niéma setek; taksamo dodając tu np. setne części, nie zważamy na to, że ich niéma ani w składniku drugim, ani w czwartym.

4. Weźmy teraz takie zadanie. Dane są liczby

5,470235   0,002   8,303667   117   3,98267   i   0,00004

a chcemy znaléść tylko przybliżoną, np. na 0,001 (§ 21, us. 13), wartość sumy tych liczb. Idzie o to, ażeby tę przybliżoną wartość sumy wyznaczyć wprost, t. j. bez wyznaczania takich części sumy, które nie wejdą do owéj przybliżonéj wartości sumy, lub nie będą miały na nią wpływu. Takie dodawanie, w którym, mając na widoku przybliżoną wartość sumy, odrazu nie wykonywamy tych części rachunku, które następnie okazaćby się mogły niepotrzebnymi, nazywa się d o d a w a n i e m s k r ó c o n y m.

Mamy tu składników 6, t. j. mniéj niż 10. Gdy więc weźmiemy zamiast każdego składnika liczbę doń przybliżoną na 0,0001, to wtedy błąd z powodu wzięcia tych przybliżonych wartości wszystkich składników jest mniejszy od 0,0001 $\times$ 10, t. j. mniejszy od 0,001. Gdy więc mamy te składniki pod sobą podpisane, to uwzględnimy w nich tylko piérwsze 4 cyfry dziesiętne. Dodając tedy do siebie te przybliżone wartości składników, otrzymamy 134,7584. Ponieważ w składnikach opuściliśmy pewne części, przeto ta suma 134,7584 jest widocznie mniejsza od dokładnéj sumy piérwotnie danych składników. Że zaś, jakeśmy tylkoco widzieli, błąd, powstały z zadowolenia się przybliżonymi na 0,0001 wartościami składników, jest

$$\begin{array}{r@{,}l}
5 & 4702\cancel{3}\cancel{5} \\
0 & 002 \\
8 & 3036\cancel{6}\cancel{7} \\
117 & \\
3 & 9826\cancel{7} \\
0 & 0000\cancel{4} \\
\hline
134 & 758\cancel{4} \\
134 & 759
\end{array}$$

*) Gdyby tu było zero, należałoby powiedzieć: po zerze, zajmującym miejsce, na którym są oznaczane jedności.

mniejszy od 0,001, zatym dokładna suma jest mniejsza od 134,7584+0,001, czyli jest mniejsza od 134,7594. Jest tedy dokładna suma pierwotnie danych składników zawarta między 134,7584 a 134,7594. A gdy różnica między tymi liczbami krańcowymi jest wszystkiego 0,001, to, biorąc jakąkolwiek liczbę pośrednią, np. najdogodniéj 134,759, jesteśmy (wogóle mówiąc) tymbliżéj dokładnéj wartości sumy.

Aby, przy danym stopniu przybliżenia sumy, wykonać skrócone dodawanie niewięcéj niż 10-u składników, należy wziąć wartości składników przybliżone na 10-tą część stopnia żądanego przybliżenia sumy, dodać je do siebie i w otrzymanéj liczbie, opuściwszy ostatnią cyfrę dziesiętną, do części oznaczonych na ostatnim z pozostałych miejscu dodać 1-nę.

W podobny sposób dojdziemy do tego, że

Aby, przy danym stopniu przybliżenia sumy, wykonać skrócone dodawanie więcéj niż 10-u, a mniéj niż 100-u składników, należy wziąć wartości składników przybliżone na 100-ną część stopnia żądanego przybliżenia sumy, dodać je do siebie i w otrzymanéj liczbie, opuściwszy ostatnie dwie cyfry dziesiętne, do części oznaczanych na ostatnim z pozostałych miejscu dodać 1-nę. — I t. d.

5. Odejmowanie, jako działanie odwrotne dodawaniu dwu składników, ma na celu z danych: sumy dwu składników i jednego z tych składników wyznaczenie drugiego składnika téj sumy. To zadanie istnieć może niezależnie od tego, czy składniki są liczbami całkowitymi, czyteż ułamkowymi. Podane więc w us. 3-im § 5-go określenie odejmowania jest ogólne. Zatym wogóle:

Odejmowanie jestto działanie, w którym, mając dane dwie liczby: odjemną i odjemnik, poszukujemy liczby, zwanéj resztą, po któréj dodaniu do odjemnika otrzymujemy odjemną.

Łatwo dowieść, że wypowiedziane w us. 8-ym i 9-ym § 5-go własności sumy i różnicy danych liczb mają miejsce w przypadku, gdy te liczby są dziesiętne.

6. Wychodząc również z tego, że odejmowanie jest działaniem odwrotnym dodawaniu dwu składników, nie trudno będzie spostrzec, że to wszystko, cośmy mówili o wykonywaniu odejmowania liczb całkowitych (§ 5, us. 11—17), może być odniesione do odejmowania liczb dziesiętnych. Nie powtarzając szczegółowo wszystkich podanych wtedy objaśnień, powiemy tu tylko, że, mając wykonać np. obok wypisane odejmowanie, zaczynamy je od wyznaczenia najmniejszych części reszty. Ponieważ w odjemnéj jest 6 stotysiącznych, a w odjemniku stotysiącznych nié-

$$\begin{array}{r} 709{,}23406 \\ -6{,}28 \\ \hline 702{,}95406 \end{array}$$

ma, więc te 6 stotysiącznych pozostaną niezmienione, t. j. w reszcie *) będzie stotysiącznych 6, którąto cyfrę piszemy pod stotysiącznymi (postępujemy przeto taksamo, jak później, przy odejmowaniu części całkowitych tych liczb, z ich tysiącami). Podobnież z 4-ma tysiącznymi, i z uwagi, że w reszcie niéma dziesięciotysiącznych, na miejscu, któreby one zajęły, t. j. po tysiącznych (gdyż po nich są jeszcze części stotysiączne) piszemy zero (§ 21, us. 2). Aby wyznaczyć w reszcie setne, ponieważ 8 jest mniejsze od 3, roskładamy 2 dziesiąte odjemnéj na 1 dziesiątą, którą zostawiamy, i 1 dziesiątą, którą wyrażamy jako 10 setnych; one wraz z 3 setnymi stanowią 13 setnych. Odjąwszy 8 od 13-u, otrzymujemy 5, które piszemy pod setnymi. 2 dziesiąte jest więcéj niż 1 dziesiąta; roskładamy więc 9 jedności na 8 jedności, które zostawiamy, i jedność, którą wyrażamy jako 10 dziesiątych, i odejmuję 2 od 11; resztę 9 piszemy pod dziesiątymi. 6 od 8 jest 2, które piszemy pod jednościami, a po téj cyfrze 2 kładziemy przecinek (§ 21, us. 1). I t. d. — Taksamo odejmowalibyśmy np. 708,23406 — 39.

Podobnie, jeżeli mamy wykonać np. odejmowanie

$$\begin{array}{r} 8,34 \\ -2,06723 \\ \hline 6,27277 \end{array}$$

to zauważymy, że dla wyznaczenia najmniejszych, t. j. stotysiącznych **), części reszty, należy 4 setne odjemnéj rozłożyć na 3 setne, które zostawimy, i 1 setną, którą wyrazimy jako 10 tysiącznych; te 10 tysiącznych potrzeba znowu rozłożyć na 9 tysiącznych, które zostaną, i 1 tysiączną, którą wyrazimy jako 10 dziesięciotysiącznych; te zaś 10 tysiącznych wypadnie znowu rozłożyć na 9 dziesięciotysiącznych, które pozostaną, i 1 dziesięciotysiączną, którą wyrazimy jako 10 stotysiącznych. Widzimy więc, że wskutek tego roskładu, w tym przypadku ostatnia (licząc od lewéj strony) znacząca cyfra 4 zostanie zastąpiona przez 3, nad następującymi cyframi odjemnika 7 i 2 znajdą się w odjemnéj cyfry 9, a nad cyfrą 3, ostatnią odjemnika, mieć będziemy 10. Będziemy więc tak wykonywać odejmowanie: 3 od 10-u 7, 2 od 9-u 7, 7 od 9-u 2, 6 od 13-u i t. d. — Taksamo odejmowalibyśmy np. 8 — 0,06723.

Powiemy więc ogólnie:

Aby odjąć od siebie dwie liczby dziesiętne, podpisujemy odjemnik pod

---

*) Możemy także powiedzićć tak: ponieważ odjemna jest sumą odjemnika i reszty, a w odjemniku niéma stotysiącznych, zatym, aby po dodaniu reszty do odjemnika, móc otrzymać te 6 stotysiącznych, które są w odjemnéj, powinniśmy je mieć w reszcie, i t. d.

**) Można tu dodać, że one powinny się znaléść w reszcie; gdyż, gdyby w reszcie nie było stotysiącznych, to po dodaniu reszty do odjemnika, otrzymalibyśmy w odjemnéj 3 stotysiączne, których w odjemnéj niéma. Winno więc w reszcie być tyle stotysiącznych, aby po dodaniu ich do 3 stotysiącznych odjemnika otrzymać tyle stotysiącznych, żeby po wydzieleniu z nich większych części, t. j. dziecięciotysiącznych, nie pozostało już stotysiącznych, czyli, aby było 10 stotysiącznych. I t. d.

odjemną tak, żeby jedności znalazły się pod jednościami, i wykonywamy odejmowanie w ten sam sposób, jakgdybyśmy wykonywali odejmowanie liczb całkowitych, a w reszcie kładziemy przecinek po cyfrze, odpowiadającéj tym cyfrom liczb danych, po których znajdują się przecinki. W przypadku więc, gdy w odjemnéj jest mniéj cyfr dziesiętnych, niż w odjemniku, ostatnią cyfrę dziesiętną odjemnika odejmujemy od 10, każdą pozostałą z tych cyfr, nie mającą nad sobą cyfry w odjemnéj, odejmujemy od 9, a ostatnią cyfrę znaczącą w odjemnéj zmniejszamy o 1.

7. Gdy chcemy np. wyznaczyć różnicę dwu liczb 43,5672 i 25,89604 przybliżoną na 0,01, to aby wykonać odpowiednie o d e j m o w a n i e   s k r ó c o n e, należy wziąć przybliżone także na 0,01 wartości odjemnéj i odjemnika i odjąć je od siebie:

$$\begin{array}{r} 43{,}56\cancel{7}\cancel{2} \\ -\;25{,}89\cancel{6}\cancel{0}\cancel{4} \\ \hline 17{,}67 \end{array}$$

Wtedy bowiém tak w odjemnéj jak i w odjemniku popełniamy błąd mniejszy od 0,01; zatym w reszcie opuszczamy różnicę między takimi dwiema liczbami, z których każda jest mniejsza od 0,01. Tymwięcéj przeto ta różnica (t. j. błąd w różnicy danych liczb) jest mniejsza od 0,01. Różnica więc $43{,}56 - 25{,}89 = 17{,}67$ przedstawia żądane przybliżenie różnicy liczb danych.

Aby, przy danym stopniu przybliżenia różnicy, wykonać skrócone odejmowanie dwu liczb, należy wziąć wartości liczb danych z tymże stopniem przybliżenia i odjąć je od siebie.

(Zadania arytmetyczne. § 23.)

---

§ 23. MNOŻENIE LICZB DZIESIĘTNYCH.

1. Gdy mamy pomnożyć np. 8 przez 3, to, jak wiemy (§ 6, us. 3), aby otrzymać iloczyn, możemy mnożną wziąć jako składnik tyle razy, ile jest jedności w mnożniku. Jeżeli atoli chcemy pomnożyć 8 np. przez 0,01 lub przez 0,03, to tu nie może być mowy o tym, abyśmy mieli 8 wziąć odpowiednio 0,01 raza lub 0,03 raza jako składnik. Tak więc wypowiedziane, jak powyżéj, powstawanie iloczynu z mnożnéj nie może się stosować do tych przypadków. Należy więc tak się wysłowić o powstawaniu iloczynu z mnożnéj, aby to mogło się także odnosić do przypadku, gdy mnożnik jest liczbą dziesiętną.

Aby 8 pomnożyć przez 3, mamy 8 wziąć jako składnik tyle razy, ile w mnożniku jest jedności, czyli

$$\begin{array}{lll} \text{ponieważ} & \text{mnożnik } 3 & = 1 + 1 + 1 \\ \text{więc} & \text{iloczyn} & = 8 + 8 + 8 = 24 \end{array}$$

i możemy [1]) powiedzieć, że «iloczyn powstaje z mnożnéj w taki sam sposób, jak mnożnik powstał z jedności».

Gdy więc np. mamy $8 \times 0{,}01$, to ponieważ mnożnik 0,01 powstał z *jedności* w taki sposób, iż, 1 zmniejszyliśmy 100 razy (§ 21, us. 9), więc, aby podobnie utworzyć iloczyn z *mnożnéj*, należy tu mnożną 8 zmniejszyć 100 razy, co czyniąc, otrzymamy 0,08; jest zatym $8 \times 0{,}01 = 0{,}08$. Również, gdy mamy np. $8 \times 0{,}03$, to, z uwagi, że mnożnik powstał z jedności w taki sposób, iż 1 zmniejszyliśmy 100 razy i to, cośmy stąd otrzymali, t. j. 0,01, wzięliśmy 3 razy jako składnik, aby podobnie utworzyć iloczyn z *mnożnéj*, należy mnożną 8 zmniejszyć 100 razy, a otrzymawszy wskutek tego 0,08, wziąć te 0,08 jako składnik 3 razy; będziemy więc mieli $0{,}08 + 0{,}08 + 0{,}08 = 0{,}24$; jest zatym $8 \times 0{,}03 = 0{,}24$.

Możemy więc powiedzieć ogólnie:

Mnożenie jestto działanie, zapomocą którego, mając dwie liczby, mnożną i mnożnik, odnajdujemy liczbę, zwaną iloczynem, którą możemy otrzymać z mnożnéj w taki sam sposób, w jaki mnożnik powstaje z jedności.

2. Weźmy naprzód pod uwagę przypadek, kiedy mamy **liczbę dziesiętną pomnożyć przez liczbę całkowitą**, np. $3{,}207 \times 4$. Tu mnożnik powstał z jedności wskutek tego, żeśmy ją wzięli jako składnik 4 razy; ażeby więc otrzymać iloczyn, należy mnożną 3,207 wziąć jako składnik 4 razy, t. j.

$$\text{gdy mnożnik} = 1 + 1 + 1 + 1$$
$$\text{to iloczyn} = 3{,}207 + 3{,}207 + 3{,}207 + 3{,}207;$$

a zatym, ten przypadek mnożenia sprowadza się bespośrednio do dodawania. A że to dodawanie (§ 22, us. 3) uskutecznia się tak, jakgdyby składniki były liczbami całkowitymi, a wiemy, że wtedy dodawanie równych składników możemy zastąpić przez mnożenie (§ 6, us. 1), zatym wypadnie wykonać mnożenie:

$$\begin{array}{r} 3{,}207 \\ 3{,}207 \\ 3{,}207 \\ 3{,}207 \\ \hline 12{,}828 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3{,}207 \\ \times 4 \\ \hline 12{,}828 \end{array}$$

tak, jakgdybyśmy mieli mnożyć 3207 przez 4, a tylko w iloczynie, t. j. w sumie poprzedniego dodawania, wypadnie przecinek umieścić po cyfrze, odpowiadającéj jednościom składników, a więc po cyfrze 2.—Gdybyśmy mieli mnożyć nie przez 4, ale np. przez 40, to, po dodaniu do siebie 40-u składników 3,207, otrzymalibyśmy 128,280; w téj liczbie przecinek jest po cyfrze 8, którą otrzymujemy również po

[1]) Jeżeli wykład liczb dziesiętnych jest prowadzony przed ułamkami zwyczajnymi to należy cały początek tego ustępu rozwinąć szczegółowiej, jak w us. 1-ym § 19-go.

dodaniu do siebie jedności składników. Możemy to jeszcze tak wypowiedzieć: wypisawszy sumę tak, jakbyśmy to zrobili w razie, gdyby np. składniki były liczbami całkowitymi; czyli: wypisawszy iloczyn tak, jakbyśmy to zrobili w razie, gdyby mnożna była liczbą całkowitą, oddzielamy w nim następnie przecinkiem z prawéj strony tyle cyfr na «dziesiętne» (§ 21, us. 1), ile ich było w każdym z tych równych sobie składników, czyli, ile ich było w mnożnéj.

Jeżeli w iloczynie końcowe cyfry dziesiętne są zerami, to możemy je następnie opuścić (§ 21, us. 8). Będzie więc np. $3{,}207 \times 400 = 1282{,}800 = 1282{,}8$; $42{,}865 \times 6 = 257{,}190 = 257{,}19$; $3{,}25 \times 4 = 13{,}00 = 13$. Widzimy zatym, że, wogóle mówiąc, w iloczynie może być ostatecznie mniéj cyfr dziesiętnych, niż w mnożnéj.

3. Jeżeli zaś weźmiemy przypadek ogólniejszy, t. j. kiedy mamy liczbę dziesiętną pomnożyć przez liczbę dziesiętną, np.

$$3{,}207 \times 4{,}05,$$

to podobnież, wskazówki ku temu, jak tu postąpić należy, dostarczy nam to, cośmy poprzednio powiedzieli (us. 1) o powstawaniu iloczynu. Mnożnik 4,05 powstał z *jedności* w taki sposób, iż 1-śc zmniejszyliśmy 100 razy i to, cośmy wskutek tego otrzymali, t. j. 0,01, wzięliśmy jako składnik 405 razy. Należy więc również *mnożną* 3,207 zmniejszyć 100 razy, i to, co wskutek tego otrzymamy (§ 21, us. 9), t. j. 0,03207, wziąć jako składnik 405 razy, t. j.

mnożnik ... 1 zmn. 100 r.; otrz. 0,01 ; $\underbrace{0{,}01 + 0{,}01 + 0{,}01 + \ldots}_{405 \text{ razy}}$

iloczyn ... 3,207 zmn. 100 r.; otrz. 0,03207; $\underbrace{0{,}03207 + 0{,}03207 + 0{,}003207 + \ldots}_{405 \text{ razy}}$

W mnożnéj są 3 cyfry dziesiętne, w mnożniku 2; zmniejszyliśmy naprzód mnożną 100 razy, t. j. powiększyliśmy w niéj ilość cyfr dziesiętnych o tyle, ile ich jest w mnożniku, tak iż w téj liczbie 0,03207 jest tyle cyfr dziesiętnych, ile ich jest w mnożnéj i mnożniku razem (3 + 2). Wtedy już działanie sprowadzone zostało do dodawania 405-u składników 0,03207; czyli do przypadku poprzedzającego, t. j. do mnożenia $0{,}03207 \times 405$, które, jak wiemy (us. 2), uskutecznia się tak, jakgdyby mnożna była całkowitą, t. j. jakgdybyśmy mieli pomnożyć 3207 przez 405,

$$\begin{array}{r} 3{,}207 \\ \times\, 4{,}05 \\ \hline 16035 \\ 12828 \\ \hline 12{,}98835 \end{array}$$

a tylko w iloczynie stąd otrzymanym, t. j. w liczbie 1298835, należy z prawéj strony oddzielić tyle cyfr na dziesiętne, ile ich jest w téj liczbie 0,03207. W téj zaś liczbie, jak widzieliśmy, jest tyle cyfr dziesiętnych, ile ich było razem w mnożnéj i mnożniku danego zadania. Możemy przeto powiedzieć, że, mając pomnożyć $3{,}207 \times 4{,}05$, pomnożymy te liczby przez siebie, jakgdyby one były całkowitymi, t. j. nie zważając na przecinki, a w otrzymanym iloczynie oddzielimy z prawéj strony tyle cyfr na dziesiętne, ile ich było w mnożnéj i mnożniku razem. Oczywiście, że rozważany tu przypadek obejmuje w sobie tak przypadek poprzedni (us. 2), jak i ten, kiedy mnożna jest liczbą całkowitą, a mnożnik dziesiętną (np. $8 \times 0{,}03$; us. 1), gdyż w tych przypadkach, oddzielając w iloczynie na dziesiętne tyle cyfr, ile ich było w mnożnéj i mnożniku razem, oddzielimy ich tyle, ile ich jest w tym właściwie czynniku danego iloczynu, który jest liczbą dziesiętną. Możemy więc powiedzieć ogólnie:

Aby pomnożyć przez siebie dwie liczby dziesiętne, należy je mnożyć przez siebie, nie zważając na przecinki, jakgdyby liczby całkowite, a w otrzymanym iloczynie oddzielić z prawéj strony tyle cyfr na dziesiętne, ile ich było w mnożnéj i mnożniku razem.

Ostatnie z tych cyfr dziesiętnych mogą być niekiedy zerami (np. $32{,}5 \times 0{,}112 = 3{,}6400 = 3{,}64$); w takim razie, po opuszczeniu tych zer końcowych (§ 21, us. 8), otrzymamy ostatecznie w iloczynie mniéj cyfr dziesiętnych, niż ich było w mnożnéj i mnożniku razem.

4. Łatwo to zastosować do iloczynu ilukolwiek czynników. Tak np. gdy mamy $0{,}4325 \times 0{,}032 \times 1{,}5$, to, rozważając, że mamy pomnożyć naprzód dwa piérwsze czynniki przez siebie, a otrzymany stąd iloczyn częściowy pomnożyć przez czynnik trzeci, dojdziemy do tego, że należy w iloczynie liczb (§ 3, us. 12) $4325 \times 32 \times 15 = 2074500$ oddzielić na dziesiętne z prawéj strony 8 cyfr, tak iż szukanym iloczynem jest liczba 0,020745.

5. Wyznaczymy liczby, przedstawione przez dwa iloczyny:

$$0{,}4325 \times 0{,}032 \times 1{,}5 \times 7 \quad \text{i} \quad 0{,}032 \times 1{,}5 \times 7 \times 0{,}4325,$$

różniące się od siebie tylko porządkiem czynników, gdy, odnalazszy iloczyny

$$4325 \times 32 \times 15 \times 7 \quad \text{i} \quad 32 \times 15 \times 7 \times 4325,$$

oddzielimy tak w jednym, jak w drugim z prawéj strony 8 cyfr na dziesiętne. Że zaś wypisane iloczyny czynników całkowitych, jako różniące się od siebie tylko porządkiem tych czynników, przedstawiają tę samę liczbę (§ 6, us. 10), przeto i dwa iloczyny, mające pośród swych czynników liczby dziesiętne, przedstawiają również tę samę liczbę. Widzimy zatym, że wypowiedziana w us. 10-ym § 6-ego własność iloczynu: «iloczyn nie zależy od porządku czynników», stosuje się również do przypadku, gdy pośród czynników iloczynu są liczby dziesiętne.

Opiérając się zaś na tym, łatwo już dowieść możemy, że własności, wypowiedziane w us. 10-ym i 12—15-go § 6-go, mają także miejsce wtedy, kiedy pośród liczb danych są dziesiętne, choćbyśmy je mnożyli przez liczbę dziesiętną.

6. Mnożenie skrócone. Mamy np. 456,2595731×28,63549329, a chcemy wyznaczyć wartość iloczynu tylko przybliżoną na 0,01. Gdy np. weźmiemy przybliżoną na 0,00001 wartość mnożnéj, to błąd z tego powodu powstały w iloczynie będzie mniejszy od 0,00029; gdy podobnie mnożnik ograniczymy do milijonowych części, to, skutkiem tylko tego, błąd powstały w iloczynie będzie mniejszy od 0,000457. Wskutek więc wzięcia jednoczesnego tych przybliżonych wartości tak mnożnéj jak i mnożnika, iloczyn będzie miał wartość przybliżoną [1]) na $0{,}00029 + 0{,}000457 < 0{,}001$.—Jeżeli więc, jak w danym zadaniu, suma mnożnéj i mnożnika jest mniejsza od 1000, a stopień przybliżenia iloczynu jest 0,01, to najprościej dojdziemy do otrzymania żądanéj tu wskazówki postępowania, gdy weźmiemy wartości mnożnéj i mnożnika przybliżone na $0{,}01 : 1000 = 0{,}00001$. Wypadnie zatym pomnożyć przez siebie 456,25957 × 28,63549; w otrzymanym zaś iloczynie odrzucimy części mniejsze od 0,01, lecz do części oznaczonych na ostatnim miejscu, t. j. do setnych, dodamy 1-nę, gdyż braliśmy wartości tak mnożnéj jak i mnożnika przybliżone z niedomiarem.

Ten sposób, wogóle mówiąc, niewiele skraca robotę.

7. Jest jednak inny sposób wykonywania mnożenia skróconego przy danym stopniu przybliżenia iloczynu, znacznie dogodniejszy, sposób Oughtred'a, który teraz wyłożymy.

a. Przypuśćmy, że mamy pomnożyć 45625,95731 przez 2863,549. Podpiszmy te liczby pod sobą tak, żeby jedności były pod jednościami:

$$\begin{array}{r} 45625{,}95731 \\ \times\ 2863{,}549 \\ \hline \end{array}$$

Zauważmy, że np. jedności w iloczynie wypadną z pomnożenia 5-u jedności mnożnéj przez 3 jedności mnożnika, 2-u dziesiątków mnożnéj przez 5 dziesiątych mnożnika i t. d., jak również z pomnożenia 9-u dziesiątych mnożnéj przez 6 dziesiątków mnożnika i t. d. Wprawdzie mogą niekiedy wypaść jeszcze jedności z pomnożenia jedności mnożnéj przez części dziesiąte mnożnika, dziesiątków mnożnéj przez setne mnożnika i t. d., jak również—dziesiątych mnożnéj przez jedności mnożnika, setnych mnożnéj przez dziesiątki mnożnika i t. d., ale te oddzielnie przyjmiemy późniéj na uwagę; teraz zaś na nie zważać nie będziemy. W takim razie, gdy «ograniczamy iloczyn do jedności,» zadowolimy się mnożeniem 45625,957 × 2000, czyli 45625957 × 2, i (podobnież) 4562595 × 8, 456259 × 6, 45625 × 3, 4562 × 5, 456 × 4, 45 × 9. Te więc iloczyny częściowe będą wyrażone w jednościach. Dlatego, jeżeli cyfry mnożnika podpiszemy tak pod cyframi mnożnéj, aby każda cyfra mnożnika znalazła się pod pierwszą (od prawéj strony) z mnożonych przez nią cyfr mnożnéj:

---

[1]) Iloczyn opuszczonéj części mnożnéj przez opuszczoną część mnożnika będzie tu mniejszy od 0,0000000001.

$$\begin{array}{r}
45625{,}95731 \\
\underline{9453682} \\
91251914 \\
36500760 \\
2737554 \\
136875 \\
22810 \\
1824 \\
\underline{405} \\
130652142
\end{array}$$

(cyfry więc mnożnika następować będą po sobie w porządku odwrotnym), to, gdy drugi iloczyn częściowy tak podpiszemy pod piérwszym, aby piérwsza jego cyfra (0 z pomnożenia 5-u przez 8) znalazła się pod piérwszą cyfrą (4) piérwszego iloczynu, i gdy podobnie podpiszemy dalsze iloczyny częściowe, jako sumę tych częściowych iloczynów, wyrażonych w jednościach, otrzymamy liczbę 130 652 142, która przedstawia iloczyn danych liczb «ograniczony do jedności».

Gdyby się zdarzyło, że w mnożnéj niéma dość cyfr, aby nad piérwszą z prawéj strony cyfrą odwróconego mnożnika znalazła się cyfra mnożnéj (jak tu 7 nad 2), to dopełniamy mnożną zerami; tak np., gdyby w poprzednim przykładzie zamiast danéj mnożnéj była nią liczba 45 625,9 , to możnaby po 9 dopisać dwa zera, mające odpowiadać cyfrom 8 i 2 mnożnika. Gdyby zaś w mnożniku było tu więcej cyfr dziesiętnych niż cyfr w całkowitéj części mnożnéj, np. gdyby zamiast danéj mnożnéj była nią liczba 25,95731 , to w tym działaniu nie posługiwalibyśmy się cyframi 4 i 9 mnożnika, nad którymi nie byłoby cyfr mnożnéj.

$$\begin{array}{r}
76305{,}403678956 \\
\underline{8750364452} \\
152610807356 \\
38152701835 \\
3052216144 \\
305221612 \\
45783240 \\
2289162 \\
38150 \\
5341 \\
\underline{608} \\
194169063{,}448
\end{array}$$

Aby w taki sposób w iloczynie np. liczb 76 305,403678956 i 2544,630578 «ograniczonym do tysiącznych», otrzymać częściowe iloczyny (więc również wyrażone w częściach tysiącznych), podpisujemy jedności mnożnika pod tysiącznymi mnożnéj, a tymsamym daléj dziesiątki mnożnika pod dziesięciotysiącznymi mnożnéj i t. d., dziesiąte mnożnika pod setnymi mnożnéj i t. d. W sumie zaś, otrzymanéj z dodania tych iloczynów częściowych, wyrażonych w częściach tysiącznych, oddzielamy 3 cyfry na dziesiętne.

b. Idzie teraz o wyznaczenie, od czego jest mniejszy błąd iloczynu, otrzymanego wskutek takiego mnożenia.—W przykładzie piérwszym mnożąc 45625,957 przez 2000, opuszczamy iloczyn $0{,}00031 \times 2000$; owóż, jakimikolwiek są opuszczone tu cyfry mnożnéj na 4-ym i 5-ym miejscach po przecinku, zawsze ta opuszczona część mnożnéj jest mniejsza (§ 21, us. 12) od 0,001, a tymsamym opuszczona wskutek tego część iloczynu jest mniejsza od $0{,}001 \times 2000 = 2$. Taksamo znajdziemy, że mnożąc $45\,625{,}95 \times 800$, opuszczamy $0{,}00731 \times 800 < 0{,}01 \times 800 = 8$. I t. d. Błąd więc będzie mniejszy od $2 + 8 + 6 + 3 + 5 + 4 + 9$ jedności.—Podobnie znajdziemy, że w przykładzie drugim błąd jest mniejszy od $2 + 5 + 4 + 4 + 6 + 3 + 5 + + 7 + 8$ tysiącznych części jedności.—Gdybyśmy zaś w ten sposób otrzymali iloczyny $45\,625{,}9 \times 2863{,}549$ i $25{,}95731 \times 2863{,}549$, «ograniczone do jedności», to, w piérwszym z tych dwu mnożeń

$$\begin{array}{r} 45625{,}900 \\ \underline{9453{,}682} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 25{,}95731 \\ \underline{9453682} \end{array}$$

wykonywając mnożenia przez cyfry 2, 8, 6, mnożylibyśmy przez nie całą mnożną, a więc błąd byłby mniejszy od $3 + 5 + 4 + 9$ jedności. W drugim zaś z tych mnożeń, prócz tego, co opuściliśmy, mnożąc przez oddzielne cyfry mnożnika, a co, według powyższego, jest mniejsze od $2 + 8 + 6 + 3 + 5$, opuściliśmy nadto iloczyn mnożnéj przez część 0,049 mnożnika, który jest mniejszy od iloczynu $100 \times 0{,}05 = 5$, t. j. mniejszy od piérwszéj skolei zaniedbanéj cyfry mnożnika, powiększonéj o 1, tak iż tu błąd sumy iloczynów częściowych jest mniejszy od $2 + 6 + 8 + 3 + 5 + (4 + 1)$ jedności.—Łatwo widzieć, że gdyby w tym ostatnim przykładzie nie było w mnożniku cyfr 9, to błąd ów byłby już mniejszy od $2 + 6 + 8 + 3 + 5 + 4$ jedności.— A zatym ogólnie:

Błąd sumy iloczynów częściowych, wyrażony w tychże, co one, częściach, jest mniejszy od sumy tych cyfr mnożnika, przez które nie były mnożone wszystkie cyfry mnożnéj, i piérwszéj z zaniedbanych cyfr mnożnika, którąto sumę należy powiększyć o 1, jeżeli w mnożniku takich zaniedbanych cyfr jest więcéj niż jedna.

c. Widzieliśmy, że w piérwszym z wykonanych tu w ustępie a. przykładów błąd jest mniejszy od $2 + 8 + \ldots + 9 = 37$ jedności, zatym iloczyn jest większy od 130 652 142, a mniejszy od 130 652 179; ostatnie dwie cyfry są niepewne; może więc być mowa tylko o wartości iloczynu przybliżonéj na 100 jedności; weźmiemy jako taką (§ 21, us. 13) liczbę 130 652 200. W przykładzie drugim błąd, jak widzieliśmy, jest mniejszy od $2 + 5 + \ldots + = 44$ tysiącznych; może więc być tylko mowa, o wartości iloczynu przybliżonéj na 0,1; jako taką weźmiemy 194 169 063,5.

[Tu w obu razach, z dwu, jakie zdawały się możliwymi, przybliżonych wartości iloczynu, wzięliśmy wartość większą. Robiliśmy to dlatego, że chociaż niekiedy, bez powiększenia ostatnich z zatrzymywanych części iloczynu o 1-nę, wszystkie zatrzymane cyfry mogą być zgodne z odpowiednimi cyframi wartości dokładnéj iloczynu, to jednak może się zdarzyć, że nawet po takim powiększeniu otrzymujemy przybliżenie, co do którego nie jesteśmy pewni, czy ono nie jest przybliżeniem z niedomiarem (a nie, jakby się zdawało, koniecznie z nadmiarem). Np. wyznaczając iloczyny częściowe iloczynu $4672{,}0324 \times 95{,}876$ w setnych częściach jedności, otrzymujemy, jako sumę tych iloczynów częściowych, 447 935,69; błąd jest mniejszy od $9 + 5 + 8 + + 7 + 6 = 35$ setnych; wiemy zatym tylko, że wartość iloczynu jest większa od 447 935,69, a mniejsza od 447 935,69 + 0,35, t. j. mniejsza od 447 936,04, tak iż bezpieczniéj jako przybliżoną na 1-ść wartość tego iloczynu wziąć nie 447 935, co mogłoby tu być błędnym, ale 447 936.]

Z tego jeszcze wypada, że gdybyśmy chcieli otrzymać wartość iloczynu liczb w piérwszym przykładzie przybliżoną nie na 100, ale np. na 1-ść, to, zważywszy, że suma cyfr mnożnika, wyznaczająca, od czego jest mniejszy błąd sumy iloczynów częściowych, będzie, wogóle mówiąc, nie większa od 100, należy iloczyny częściowe wyrazić w częściach setnych jedności, a tym-samym tak podpisać w odwrotnym porządku cyfry mnożnika pod mnożną, aby jedności mnożnika były pod częściami setnymi mnożnéj. Gdybyśmy zaś chcieli otrzymać wartość iloczynu tychże liczb przybliżoną np. na 0,001, to należałoby tak te cyfry mnożnika podpisać, aby jego jedności znalazły się pod stotysięcznymi częściami mnożnéj. I t. d. T. j. jeżeli suma cyfr mnożnika, od któréj będzie mniejszy błąd sumy iloczynów częściowych, jest, jak w poprzednich przykładach, większa od 10, a nie większa od 100, to tak podpisujemy cyfry mnożnika w odwrotnym porządku pod mnożną, aby jedności mnożnika znalazły się pod takimi częściami mnożnéj, które odpowiadają 100-néj części żądanego stopnia przybliżenia iloczynu, i wtedy w otrzymanéj sumie iloczynów częściowych nie zważamy na 2 ostatnie cyfry. Jeżeliby owa suma była nie większa od 10, to dość, aby jedności mnożnika znalazły się pod częściami mnożnéj, odpowiadającymi 10-téj części stopnia żądanego przybliżenia iloczynu, i wtedy w sumie iloczynów częściowych nie zważamy na 1 ostatnią cyfrę. Jeżeliby owa suma była większa od 100, a nie większa od 1000, to należy, aby jedności mnożnika znalazły się pod częściami mnożnéj, odpowiadającymi 1000-néj części stopnia żądanego przybliżenia iloczynu; wtedy w sumie iloczynów częściowych nie zważamy na 3 ostatnie cyfry. I t. d.—Najczęściéj w różnych wyliczeniach miewamy ten przypadek, kiedy owa suma cyfr mnożnika, od któréj ma być mniejszy błąd sumy iloczynów częściowych, jest większa od 10, a nie większa od 100.

d. Powiemy więc ogólnie:

Aby, przy danym stopniu przybliżenia iloczynu, wykonać skrócone mnożenie, tak podpisujemy pod mnożną cyfry mnożnika, iżby, stosownie do tego, czy liczba, od któréj jest mniejszy błąd sumy iloczynów częściowych (określona wyżéj w ustępie b.) *jest: nie większa od 10, większa od 10 a nie większa od 100, większa od 100 a nie większa od 1000 i t. d., cyfra jedności mnożnika znalazła się pod cyfrą mnożnéj, oznaczającą takie jéj części, jakie wyznacza odpowiednio 10-ta, 100-na, 1000-na i t. d. część stopnia żądanego przybliżenia iloczynu, a inne cyfry mnożnika znalazły się w porządku odwrotnym, t. j. dziesiątki z prawéj strony obok jedności i t. d., dziesiąte z lewéj strony obok jedności i t. d. Mnożymy następnie mnożną oddzielnie przez każdą cyfrę mnożnika, zaniedbując jednak w każdym takim mnożeniu cyfry mnożnéj, znajdujące się z prawéj* *strony owéj cyfry mnożnika, przez którą mnożymy; częściowe iloczyny, stąd otrzymywane, podpisujemy jedne pod drugimi tak, żeby ich piérwsze (z prawéj strony) cyfry były pod sobą. Dodawszy do siebie te iloczyny częściowe, otrzymamy sumę wyrażoną w takich częściach, pod jakimi częściami mnożnéj znajduje się cyfra jedności mnożnika. Nie zważając [1]) zaś w téj sumie odpowiednio [2]) na 1-nę, 2-e, 3-y i t. d. ostatnie cyfry, a do części, oznaczonych na bespośrednio poprzedzającym miejscu, dodając 1-nę, otrzymujemy żądaną wartość przybliżoną iloczynu.*

Jeżeli więc mamy np. znaléść wartości dwu iloczynów $4{,}67843216 \times 45{,}3285638$ i $4{,}6784 \times 45{,}328563$, przybliżone na 0,001, to naprzód zważymy, że suma wszystkich cyfr mnożnika jest mniejsza od 100; mniejszą więc od 100, a prawdopodobnie większą od 10 będzie owa liczba, od któréj okaże się mniejszym błąd sumy częściowych iloczynów. Dlatego podpisujemy cyfrę jedności mnożnika (5) pod częściami, które nam wyznacza iloraz $0{,}001 : 100 = 0{,}00001$, t. j. pod stotysiącznymi częściami mnożnéj [tak podpisawszy, zauważyć możemy, że istotnie, jakeśmy przewidywali, każda z sum, $4 + 5 + 3 + 2 + 8 + 5 + 6 + (3 + 1)$, $2 + 8 + 5 + 6 + 3$ jest większa od 10-u], i według powyższego prawidła znajdziemy żądane wartości tych iloczynów:

4,67843216	4,678400
836582354	36582354
18713728	18713600
2339215	2339200
140352	140352
9356	9356
3736	3736
230	230
24	24
21206641	21206498
212,067;	212,065.

e. Zważmy jeszcze, że zamiast wyznaczać liczbę, od któréj jest mniejszy błąd sumy iloczynów częściowych, przy pomocy cyfr mnożnika (ustęp b.), moglibyśmy tego dokonać za pomocą cyfr mnożnéj. Zrobimy to tu ze względu, iż to będzie nam późniéj (§ 24, us. 10) potrzebne.

W piérwszym z dwu ostatnich przykładów opuściliśmy iloczyny: części mnożnika 0,0000038 i 4-ch jedności mnożnéj, któryto iloczyn jest mniejszy od $0{,}00001 \times 4 = 0{,}00004$; części mnożnika 0,0000638 i 0,6 mnożnéj, który

---

[1]) T. j. opuszczając je, jeżeli to są cyfry dziesiętne, a zastępując je zerami w razie przeciwnym.

[2]) T. j. zależnie od tego, jak wielką jest wzmiankowana poprzednio liczba, od któréj jest mniejszy błąd sumy iloczynów częściowych.

jest mniejszy od $0{,}0001 \times 0{,}6 = 0{,}00006$; $0{,}0005638 \times 0{,}07 < 0{,}00007$, i t. d., $5{,}3285638 \times 0{,}000002 < 0{,}00002$; nakoniec iloczyn całego mnożnika przez 0,00000015 mnożnéj, który jest mniejszy od $100 \times 0{,}0000002 = 0{,}00002$. Ostatecznie tedy, błąd sumy wszystkich częściowych iloczynów w tym przykładzie jest mniejszy od $4 + 6 + 7 + 8 + 4 + 3 + 2 + (1 + 1)$ stotysiącznych. Podobnie znajdziemy, że w drugim z tych przykładów ów błąd jest mniejszy od $4 + 6 + 7 + 8 + 4$ stotysiącznych. Jeżeli zaś wyliczamy iloczyny $4627{,}0534 \times 7592{,}6$ i $8547{,}25 \times 86749$, «ograniczone do jedności»,

$$\begin{array}{r} 4627{,}0534 \\ \underline{62957} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8547{,}2500 \\ \underline{94768} \end{array}$$

to znajdziemy, że wyrażając liczbę, od któréj jest mniejszy błąd sumy iloczynów częściowych, przy pomocy cyfr mnożnéj, będzie nią odpowiednio:

$$7 + 5 + 3 + 4, \qquad 2 + 5.$$

A zatym ogólnie:

Błąd sumy iloczynów częściowych, wyrażony w tychże, co one, częściach, jest mniejszy od sumy cyfr mnożnéj, które nie były mnożone przez wszystkie cyfry mnożnika, i piérwszéj z zaniedbanych cyfr mnożnéj, którąto sumę należy powiększyć o 1, jeżeli w mnożnéj takich zaniedbanych cyfr jest więcéj niż jedna.

(Zadania arytmetyczne. § 24.)

---

§. 24. DZIELENIE LICZB DZIESIĘTNYCH.

1. Dzielenie, jako działanie odwrotne mnożeniu dwu czynników, ma na celu z danych: iloczynu dwu czynników i jednego z tych czynników wyznaczenie drugiego czynnika tego iloczynu. To zadanie istniéć może niezależnie od tego, czy czynniki są liczbami całkowitymi, czyteż dziesiętnymi. Podane więc w us. 3-im § 7-go określenie dzielenia jest ogólne. Zatym wogóle:

Dzielenie jestto działanie, zapomocą którego, mając dwie liczby: dzielną i dzielnik, odnajdujemy liczbę, zwaną ilorazem, taką, iżby iloczyn dzielnika i ilorazu przedstawił dzielną.

Gdy więc mamy np. $8 : 0{,}5$, to mamy znaléść taką liczbę, którą mnożąc przez 0,5, otrzymamy 8, t. j. mamy znaléść taką liczbę, 0,5 któréj jest liczbą 8. Jeżeli więc 0,5 liczby szukanéj jest 8, to 5 liczb szukanych jest 80, a liczba szukana jest $80 : 5 = 20$; więc $8 : 0{,}5 = 20$.

2. Weźmy naprzód pod uwagę przypadek, kiedy mamy liczbę dziesiętną podzielić przez liczbę całkowitą, np. *)

---

*) Można zacząć od przykładów jeszcze prostszych, np. $126{,}936 : 3$, $136{,}476 : 2$: i t. d.

257,19 : 6. Ponieważ iloczyn ilorazu i dzielnika przedstawi dzielną, w któréj są części dziesiętne, a dzielnik jest liczbą całkowitą, zatym (§ 23, us. 2) w ilorazie będą części dziesiętne, t. j. iloraz z podzielenia liczby dziesiętnéj przez całkowitą będzie liczbą dziesiętną. Ponieważ $6 \times 10 = 60$ jest liczbą mniejszą niż dzielna, a $6 \times 100 = 600$ jest liczbą większą niż dzielna, zatym iloraz jest liczbą większą od 10, a mniejszą od 100, t. j. część całkowita (§ 21, us. 4) ilorazu jest liczbą dwucyfrową (§ 7, us. 17, 23). Wiemy więc, że w części całkowitéj ilorazu będą dwie cyfry—ale ile w ilorazie będzie cyfr dziesiętnych, tego przewidziéć nie możemy, gdyż w iloczynie liczby dziesiętnéj i całkowitéj może być mniéj cyfr dziesiętnych, niż w jego czynniku, będącym liczbą dziesiętną (§ 23, us. 2). Wykonywając to dzielenie, wyznaczymy początkowe cyfry 4 i 2 ilorazu sposobem wiadomym (§ 7, us. 17—19). Ponieważ, jak wiemy, te dwie cyfry przedstawiają część całkowitą ilorazu, więc po cyfrze 2 wypadnie umieścić przecinek. Zaznaczyć tu zaraz możemy, że przecinek wypadło położyć po téj cyfrze ilorazu, którąśmy wyznaczyli, przypisawszy do odpowiedniéj reszty ostatnią cyfrę części całkowitéj dzielnéj. Zauważmy, że, po wyznaczeniu piérwszéj cyfry ilorazu, do pozostałéj reszty 1 przypisaliśmy wprost następującą cyfrę dzielnéj 7 dlatego, że owa cyfra 1 (jako odpowiadająca cyfrze dzielnéj 5) oznaczała część liczby 10 razy większą od części liczby bespośrednio obok z prawéj strony oznaczonych, jakimi właśnie są części liczby, przedstawione przez tę cyfrę 7. Podobnież, po wyznaczeniu drugiéj cyfry ilorazu pozostała reszta 5 przedstawia części liczby 10 razy większe od części liczby, przedstawionéj przez cyfrę 1; dlatego przypisawszy tę cyfrę 1 do owéj reszty, wyznaczymy następującą cyfrę ilorazu zupełnie taksamo, jak wyznaczyliśmy dwie jego piérwsze cyfry, t. j. poszukamy takiéj najwiekszéj cyfry (jednocyfrowéj liczby), przez którą mnożąc dzielnik 6 otrzymamy iloczyn nie większy od 51. Trzecią więc cyfrą w ilorazie, a więc piérwszą po przecinku, będzie 8. Odjąwszy 48 od 51, otrzymamy nową resztę 3, która przedstawia części liczby dziesięć razy większe od oznaczonych w dzielnéj przez następującą cyfrę 9. Przypisawszy więc do téj reszty cyfrę 9, wyznaczymy czwartą, t. j. drugą po przecinku cyfrę w ilorazie, mianowicie 8. Po odjęciu 36 od 39 pozostanie nam reszta dzielenia 3, oznaczająca też same części liczby, co cyfra 9 dzielnéj, t. j. setne. Wypadło więc nam, że iloraz z podzielenia 257,19 : 6 jest 42,86 wraz z tym (§ 7, us. 11), co wypadnie, gdy podzielimy 3 setne przez 6. Będzie więc tu liczba 42,86 ilorazem niezupełnym, a liczba 0,03 resztą dzielenia (por. § 7, us. 11).

```
 257,19 | 6
—24     |42,86
  17
 —12
   51
  —48
    39
   —36
     3
```

Gdybyśmy się zadowolili częściami setnymi w ilorazie, t. j. przybliżoną na 0,01 wartością ilorazu (§ 21, us. 13), moglibyśmy tu przyjąć jako iloraz albo 42,86, albotéż 42, 87. Jeżeli jednak nie chcemy poprzestać na téj wartości przybliżonéj, to zauważymy, że mamy tu jeszcze do podzielenia 3 (setne) przez dzielnik. Możemy zaś sobie wystawić, że w dzielnéj po ostatniéj cyfrze dziesiętnéj (9) znajdują się zera (§ 21, us. 8; § 23; us. 2). Przypisując więc do téj reszty 3, jako następującą cyfrę dzielnéj, 0, wyznaczymy, w taki sam sposób, jak poprzednie, następującą cyfrę ilorazu 5, która, jak widzimy, jest tu ostatnią jego cyfrą. Otrzymaliśmy więc, jako szukany iloraz, liczbę 42,865; rzeczywiście, iloczyn liczb 42,865 i 6 jest 257,190, czyli 257, 19.

257,19 | 6
...... | 42,865
39
—36
30
—30
0

Widzimy więc, że, aby podzielić liczbę dziesiętną przez całkowitą, należy dzielenie uskuteczniać w taki sam sposób, jak dzielenie liczb całkowitych, kładąc w ilorazie przecinek po téj cyfrze, którą w tym dzieleniu wyznaczymy, uwzględniwszy ostatnią przed przecinkiem cyfrę dzielnéj, a jeżeli po wyczerpaniu wszystkich cyfr danych w dzielnéj pozostaje jeszcze reszta, to możemy działanie daléj prowadzić, przypisując tak do téj reszty, jak i do następnych (jeżeli będą) po zerze.

Gdy mamy np. 2,1 : 4, to, ponieważ 1 $\times$ 4 jest mniéj niż dzielna, w ilorazie nie będzie części całkowitéj— składać się on będzie z samych tylko części dziesiętnych (§ 21, us. 2), będzie ułamkiem dziesiętnym. Wypadnie więc mówić: 2 jest mniejsze od 4, więc na miejscu całkowitych piszę w ilorazie 0 (przecinek); wystawiam sobie następującą cyfrę dzielnéj 1 przypisaną do 2; 4 w 21 mieści się 5 razy, piszę w ilorazie po przecinku 5; 4 $\times$ 5 = 20; po odjęciu od 21 pozostaje 1; dopisuję zero i t. d.

2,1 | 4
—20 | 0,525
10
—8
20
—20
0

Jeżeli mamy np. 0,0003 : 4, to wypadnie mówić: w dzielnéj niéma całkowitych, niéma więc ich i w ilorazie; piszę 0, (przecinek); cyfra dzielnéj 3, znajdująca się na 4-ym po przecinku miejscu, jeszcze nie wyznacza cyfry ilorazu; piszę więc w nim na piérwszych 4-ch miejscach po przecinku zera *); do 3-ch zaś dopisuję 0; 30 jest większe od 4; wyznacza więc następującą cyfrę ilorazu 7 i t. d.

0,0003 | 4
30 | 0,000075
—28
20
—20
0

*) Albo: w dzielnéj niéma dziesiątych, setnych, i tysiącznych: nie będzie więc ich w ilorazie, przeto piszę w nim po przecinku trzy zera; cyfra dzielnéj 3 nie wyznacza cyfry w ilorazie, piszę więc w nim jeszcze jedno zero i t. d.

3. Weźmy teraz przypadek ogólniejszy: liczbę dziesiętną podzielić przez liczbę dziesiętną, np.

2,8719 : 0,06.

Mamy tu znaléść taką liczbę, iloraz, iżby iloczyn ilorazu i dzielnika 0,06 był równy dzielnéj 2,5719. Możemy więc powiedziéć, że 0,06 ilorazu jest liczbą 2,5719. Jeżeli 0,06 ilorazu jest liczbą 2,5719, to 6 ilorazów jest liczbą 100 razy większą, t. j. (§ 21, us. 9) 257,19. Ponieważ zaś 6 ilorazów jest liczbą 257,19, to iloraz wypadnie, gdy 257,19 : 6. To jest

0,06 ilorazu = 2,5719

6 ilorazów = 2,5719 × 100 = 257,19

iloraz = 257,19 : 6.

Widzimy więc, że ten przypadek sprowadza się do przypadku poprzedzającego. Aby więc znaléść iloraz z podzielenia 2,5719 : 0,06, należy w dzielnéj przesunąć przecinek wprawo o 2 miejsca, t. j. o tyle miejsc, ile jest cyfr dziesiętnych w dzielniku, i 257,19 : 6, t. j. podzielić tak zmienioną dzielną przez liczbę powstałą z dzielnika wskutek opuszczenia w nim przecinka. Że zaś znaleźliśmy (us. 2), iż 257,19 : 6 = 42,865, zatym także 2,5719 : 0,06 = 42,865.—Zauważyć tu jednak należy, że gdybyśmy, otrzymawszy w ilorazie 42,86, przerwali dzielenie, to wtedy wypadek dzielenia przedstawiłby się tak: 42,86 (iloraz niezupełny) wraz z tym, co wypadnie gdy 0,03 podzielimy przez 6, czyli (wprowadzając pierwotnie dany dzielnik) wraz z tym, co wypadnie gdy 0,0003 podzielimy przez dzielnik 0,06. Resztą więc pierwotnie danego dzielenia nie jest 0,03, otrzymane przy wykonywaniu dzielenia pomocniczego 257,19 : 6, lecz 0,0003, t. j. reszta dzielenia jest wyrażona w najmniejszych częściach jedności, danych w dzielnéj.

4. Jeżeli dzielna i dzielnik są liczbami dziesiętnymi, a w dzielniku jest tyle cyfr dziesiętnych, co w dzielnéj, lub więcéj, to dzielenie sprowadzi się do dzielenia dwu liczb całkowitych, np. dzielenie 1,089 : 0,072 do dzielenia 1089 : 72, a dzielenie 10,89 : 0,072 do dzielenia 10890 : 72. Wrazie, gdy w takim dzieleniu liczb całkowitych dzielna nie jest podzielna (§ 7, us. 11) przez dzielnik, to w ilorazie znajdzie się część mniejsza od jedności (§ 7, us. 11), którą należy wyrazić (§ 21, us. 1) przy pomocy dziesiątych części jedności. Idzie więc nam teraz o wyznaczenie ilorazu z podzielenia dwu liczb całkowitych przez siebie, jako liczby dziesiętnéj.

Zadanie takie sprowadza się bespośrednio do przypadku, rostrząsanego w ustępie 2-im. Gdy mamy np. 1089 : 72

$$
\begin{array}{r|l}
1089 & 72 \\
-72 & 15{,}125 \\
\hline
369 & \\
360 & \\
\hline
90 & \\
-72 & \\
\hline
180 & \\
-144 & \\
\hline
360 & \\
-360 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

i, wyznaczywszy piérwsze dwie cyfry ilorazu, przekonaliśmy się, że pozostaje reszta 9, to, z uwagi, że możemy w dzielnéj po cyfrze na piérwszym miejscu (9) umieścić przecinek, a po nim dopisać ilekolwiek zer (§ 21, us. 8), możemy daléj prowadzić dzielenie, jak w przypadku dzielenia liczby dziesiętnéj przez całkowitą, t. j. kładąc w ilorazie po cyfrze 5 przecinek, do owéj reszty 9 dopisując 0, wyznaczając następującą cyfrę ilorazu i t. d. Otrzymamy 1089 : 72 = 15,125.— Podobnie znajdziemy, że 10890 : 72 = 151,25. Wskutek zaś tego także 1,089 : 0,072 = 15,125, a 10,89 : 0,072 = 151,25.

Taksamo znajdziemy, że np. 21 : 4 = 5,25; 3 : 4 = 0,75; 29 : 1250 = 0,0232; 0,02 : 0,0005 = 40; 7 : 0,125 = 56 i t. d.

5. Zastanawiając się nad dzieleniami, przeprowadzonymi w us. 2—4, możemy powiedzieć:

Aby podzielić liczbę dziesiętną przez liczbę dziesiętną, posuwamy w dzielnéj przecinek o tyle miejsc wprawo, ile jest cyfr dziesiętnych w dzielniku, a tak zmienioną dzielną dzielimy przez liczbę całkowitą, powstałą z dzielnika wskutek opuszczenia w nim przecinka, t. j. sprowadzamy w ten sposób zadanie do dzielenia albo liczby dziesiętnéj przez całkowitą, albo też całkowitéj przez całkowitą.

Mając liczbę dziesiętną podzielić przez całkowitą, uskuteczniamy dzielenie nie zważając na przecinek, jakgdyby dzielna była również całkowitą, kładąc tylko w ilorazie przecinek po cyfrze, którą wyznaczyliśmy przy pomocy ostatniéj cyfry części całkowitéj dzielnéj, a wrazie, gdy, po wyczerpaniu wszystkich danych cyfr dzielnéj, pozostaje jeszcze reszta, prowadzimy działanie daléj, przypisując po zerze tak do téj reszty, jak i do reszt następujących *).

Mając liczbę całkowitą podzielić przez całkowitą, wrazie gdy piérwsza jest niepodzielna przez drugą, możemy przyjąć, że w dzielnéj po cyfrze, zajmującéj miejsce piérwsze, znajduje się przecinek, po którym następują zera, i postępować tak, jak przy dzieleniu liczby dziesiętnéj przez całkowitą.

6. Weźmy zadanie 70,77 : 11. Wykonywając to dzielenie, dochodzimy do reszty 4, którąśmy już mieli jako resztę trzecią, tam, gdzie umieszczona jest *. Przypisawszy więc 0, otrzymamy znowu

---

*) Jeżeli więc po przypisaniu już jednego zera otrzymujemy liczbę mniejszą od dzielnika, to wypadnie w ilorazie napisać zero (por. § 7, us. 17, 18) i do téj reszty przypisać następującą cyfrę dzielnéj, t. j. drugie zero, i t. d.

```
 70,77  | 11
—66     |------
 ---    | 6,4336
  47
 —44
  ---
   37
  —33
   ---
   *40
   —33
    ---
     70
    —66
     ---
      4
```

w ilorazie cyfrę 3, a następnie znowu resztę 7, do którćj przypisawszy 0, otrzymamy znowu w ilorazie 7, i t. d. do nieskończoności. Dzielenie więc to będzie się ciągnęło do nieskończoności, gdyż nie dojdziemy do reszty 0, a w ilorazie będziemy mieli nieskończony ciąg powtarzających się dwu cyfr 3 i 6, tak iż

$$70,77 : 11 = 6,4336363636\ldots;$$

tu kropki oznaczają, iż te cyfry 3, 6 wciąż w tymże samym porządku po sobie następują do nieskończoności. Podobnie

$$7077 : 11 = 643,363636\ldots$$

Taksamo znajdziemy, dzieląc 3 : 35,

$$3 : 35 = 0,08571428571428557142\ldots$$

Powiemy więc: *jeżeli, przy wyznaczaniu cyfry dziesiętnćj ilorazu, otrzymujemy w dzieleniu resztę, którąśmy mieli poprzednio, już po wyczerpaniu wszystkich danych cyfr w dzielnćj, to, od tćj cyfry począwszy, dalsze cyfry dziesiętne ilorazu będą wciąż następowały po sobie w tymże samym porządku do nieskończoności* [1]).

Takie ułamki dziesiętne, jak ostatni, lub jak w poprzedniéj liczbie dziesiętnéj ułamek 0,43363636..., z uwagi, że w ich wyrażeniu wchodzi nieskończona ilość cyfr dziesiętnych, są ułamkami dziesiętnymi nieskończonymi. W przeciwstawieniu im, o ułamku takim, jak np. 0,525, mówimy, że on jest ułamkiem dziesiętnym skończonym.

7. Wrazie więc, gdy w ilorazie otrzymujemy ułamek dziesiętny nieskończony, nie może być mowy o tym, byśmy mogli w ten sposób otrzymać iloraz zupełny. Zadowolić się więc wtedy należy wartością przybliżoną ilorazu. Według więc tego, cośmy mówili w us. 13-ym § 21-go, jako wartość ilorazu z podzielenia 70,77 : 11 przybliżoną np. na 0,001 przyjmiemy 6,434, jako wartość przybliżoną na 0,0001 przyjmiemy 6,4336 i t. d.

Po wyczerpaniu w czasie dzielenia wszystkich cyfr pierwotnie danych w dzielnéj, wszystkie przybliżone z niedomiarem *) wartości ilorazu odpowiadać będą temu, cośmy (§ 7, us. 11) nazwali «ilorazem niezupełnym», a reszty, otrzymywane w czasie dzielenia, odpowiadające tym ilorazom niezupełnym (t. j. otrzymywane po wyznaczeniu ostat-

[1]) O czytaniu takiéj liczby w § 25, us. 5.

*) W poprzedniej więc liczbie jako taką wartość przybliżoną na 0,001 mieć będziemy 6,433.

niéj z zatrzymanych cyfr w tych ilorazach), przedstawią «reszty dzielenia».

8. Opiérając się na tym, że tak własność: «iloczyn nie zależy od porządku czynników», jak i własności, wypowiedziane w us. 12-ym § 6-go, mają miejsce również wtedy, kiedy pośród liczb danych są dziesiętne (§ 23, us. 5), łatwo dowieść, że własności, wypowiedziane w us. 13-ym i 15-ym § 7-go, stosują się również do przypadku, kiedy pośród liczb danych są dziesiętne i kiedy mnożymy lub dzielimy przez liczby dziesiętne.—Jeżeli zaś, wykonywając dzielenie liczb dziesiętnych, doszliśmy do pewnego ilorazu niezupełnego i reszty dzielenia (por. us. 2, 3, 7), to własności, wypowiedziane w us. 14-ym § 7-go, miéć tu także będą swoje zastosowanie.

9. Dzielenie skrócone. O dzieleniu, odpowiadającym temu mnożeniu, o którym wzmiankowaliśmy w us. 6-ym § 23-go, możemy tu mówić tylko w przypadku, kiedy mamy się zadowolić przybliżoną wartością dzielnéj, a dzielnikiem pozostaje dokładna wartość dzielnika danego dzielenia [1]). Jeżeli więc mamy np. liczbę 978,42567134 : 492 i chcemy otrzymać wartość ilorazu przybliżoną np. na 0,000001, to, zważywszy, że dzielnik jest liczbą większą od 100 a mniejszą od 1000, weźmiemy wartość dzielnéj przybliżoną na $0{,}000001 \times 100 = 0{,}0001$, gdyż wtedy opuszczamy w dzielnéj część jéj mniejszą od 0,0001, a więc w ilorazie część mniejszą od 0,0001 : 492, a przeto tymwięcéj (a fortiori) mniejszą (us. 8) od $0{,}0001 : 100 = 0{,}000001$. Wykonywając zatym dzielenie 978,4256 : 492, możemy je prowadzić aż do 6-éj cyfry dziesiętnéj, t. j. do części milijonowych ilorazu, do których, z uwagi, żeśmy wzięli wartość dzielnéj przybliżoną z niedomiarem, dodamy 1-nę.

10. W ścisłym związku ze sposobem Oughtred'a wykonywania skróconego mnożenia (§ 23, us. 7) jest sposób Guy wykonywania skróconego dzielenia przy danym stopniu przybliżenia ilorazu, który teraz wyłożymy.

Aby sobie zadanie uprościć, zauważmy, że zawsze *możemy dane dzielenie przy różnym od jedności stopniu przybliżenia ilorazu zastąpić takim dzieleniem, w którym szukamy ilorazu przybliżonego na jedność.* Tak np. gdy chcemy otrzymać wartość ilorazu przybliżoną na 100, to, zmniejszywszy daną dzielną 100 razy i wyznaczywszy wartość ilorazu przybliżoną na 1, powiększając następnie znaleziony iloraz 100 razy, miéć będziemy wartość ilorazu danego dzielenia przybliżoną na 100. Podobnie, gdy mamy znaléść wartość ilorazu przybliżoną na 0,01, zwiększymy daną dzielną 100 razy i wyznaczymy wartość ilorazu przybliżoną na 1, którą zmniejszając 100 razy, otrzymamy wartość ilorazu danego dzielenia przybliżoną na 0,01. Dlatego nadal miéć będziemy na uwadze tylko wyznaczanie ilorazu przybliżonego na 1.

---

[1]) Inne przypadki w *Teoryi przybliżeń liczebnych* (seryja III, tom III «Bibl.-mat.-fiz»).

Przypuśćmy, że mamy podzielić 271,9425069 przez 0,1451292929 i chcemy wyznaczyć wartość ilorazu przybliżoną na 1. Innymi słowy: chcemy wyznaczyć wszystkie cyfry całkowitéj części ilorazu. Trzeba się więc dowiedzieć, ilocyfrową będzie całkowita część ilorazu. Wiemy (us. 3), że

$$271{,}9425069 : 0{,}1451292929 = 2\,719\,425\,069\,000 : 1\,451\,292\,929\,;$$

a więc (§ 7, us. 23) cyfr w całkowitéj części ilorazu [1]) będzie $13 - 10 + 1 = 4$. Będziemy więc mieli do wykonania 4 dzielenia cząstkowe. W tych dzieleniach nie będziemy zważali na przecinki; dlatego pozostawiamy je w danych do podzielenia liczbach.

Wyznaczmy taką liczbę, przedstawioną przez początkowe cyfry dzielnika, aby ona (uważana jako całkowita) była już większą od sumy tylu jego cyfr, bespośrednio po tamtych następujących, ile mamy wykonać dzieleń cząstkowych, zwiększonéj o jedność, jeżeli są jeszcze inne cyfry w dzielniku. Widzimy, że tu $14 < 5 + 1 + 2 + (9+1)$, lecz już $145 > 1 + 2 + 9 + (2+1)$. Ta liczba 145 będzie w tym sposobie wykonywania dzielenia «ostatnim dzielnikiem». Przedostatnim będzie 1451, trzecim od końca 14 512, czwartym od końca, czyli, jak tu, «piérwszym dzielnikiem», będzie liczba 145 129. Pozostałymi cyframi dzielnika nie będziemy się posługiwali; podkréślamy je zwykle z dołu. Nad ostatnim dzielnikiem poprowadźmy kréskę poziomą. Będziemy więc w dzielniku mieli $0{,}\overline{145}129\underline{2929}$. Widzimy z tego, że z ostatniego dzielnika otrzymamy piérwszy, opuszczając w ostatnim o jednę mniéj cyfr końcowych, niż jest dzieleń cząstkowych do wykonania.

Ponieważ piérwszą cyfrę ilorazu wyznaczymy, dzieląc liczbę, przedstawioną przez początkowe cyfry dzielnéj, przez 145 129, a następnie dzielić będziemy przez liczby, które powstają z piérwszego dzielnika wskutek opuszczenia w nim stopniowo po jednéj (każdorazowéj ostatniéj) cyfrze, przeto nie będzie potrzeba przypisywać następujących cyfr dzielnéj do reszt, otrzymywanych w czasie wykonywania dzielenia, tak iż tylko tymi cyframi dzielnéj będziemy się tu posługiwali, które są potrzebne do wyznaczenia piérwszéj cyfry ilorazu. Podobnie więc, jakeśmy zrobili z zaniedbanymi cyframi dzielnika, podkréślmy z dołu owe zaniedbywane cyfry dzielnéj.

Tak przygotowawszy dzielnik i dzielną, przystąpmy do dzielenia. Dzielimy tedy 271 942 przez piérwszy dzielnik 145 129; otrzymujemy piérwszą cyfrę ilorazu 1 i resztę 126 813. Przekréślamy ostatnią cyfrę (9) piérwszego

---

[1]) Gdyby po przesunięciu przecinka o tyle miejsc, ile [2]) jest cyfr w dzielniku, pozostały cyfry dziesiętne w dzielnéj, toby należało przyjąć pod uwagę ilość cyfr dziesiętnych w całkowitéj części dzielnéj. Zresztą por. us. 2.

[2]) Wystarcza przesunięcie przecinka o tyle tylko miejsc, żeby tak w dzielnéj, jak i w dzielniku była część całkowita różna od zera. Przesunąwszy tu np. przecinek o jedno miejsce i zważywszy, że dość tyle wziąć początkowych cyfr w dzielnéj ile jest w dzielniku, aby otrzymać cyfrę piérwszą ilorazu, znajdziemy, że w jego części całkowitéj jest $4 - 1 + 1 = 4$ cyfry.

271,9425069	0,1451292929
—145129	1873
126813	
—116096	
10717	
—10157	
560	
—435	
125	

dzielnika i dzielimy 126 813 przez 14 512; otrzymujemy w ilorazie następującą cyfrę 8 i resztę 10 717. Przekréślamy ostatnią cyfrę (2) poprzedniego dzielnika i dzielimy 10 717 przez 1451; otrzymujemy następującą cyfrę ilorazu 7 i resztę 560. Przekréślamy ostatnią cyfrę (1) poprzedniego dzielnika i dzielimy 560 przez ostatni dzielnik 145; otrzymujemy w ilorazie ostatnią z żądanych cyfr 3 i resztę 125.

Winni jesteśmy dowód na to, że otrzymany w ten sposób iloraz 1873 jest wartością ilorazu, wynikającego z podzielenia przez siebie pierwotnie danych liczb, przybliżoną na jedności. — Zważmy, że częściowe iloczyny dzielnika przez cyfry ilorazu, które tu stopniowo odejmowaliśmy od dzielnéj, są utworzone według prawidła us. 7-go w § 23-im, jeżeli, mnożąc 0,1451292929 przez 1873 sposobem skróconym, podpiszemy cyfrę jedności mnożnika (3) pod piérwszą z prawéj strony cyfrą ostatniego dzielnika (t. j. pod cyfrą 5),

$$\begin{array}{r} 0{,}1451292929 \\ 3781 \\ \hline \end{array}$$

I rzeczywiście mnożyliśmy $145\,129 \times 1, 14\,512 \times 8$ i t. d. Liczba, od któréj jest mniejszy błąd sumy owych iloczynów częściowych, wyrachowana zapomocą cyfr dzielnika (to jest mnożnéj tego mnożenia; § 23, us. 7, e.), jest $1+2+9+(2+1)=15$ takich samych części liczby, w jakich są wyrażone tak iloczyny częściowe, jak i [1]) ostatni dzielnik 145, który wyznaczyliśmy z warunku [2]), aby był większy od owéj liczby 15. — Z tego wypada bespośrednio, że iloczyn dokładny danego dzielnika przez iloraz 1873, otrzymany powyżéj sposobem skróconym, będąc oczywiście większy od iloczynu wypadającego z powyższego skróconego mnożenia dzielnika przez iloraz, jest mniejszy od tegoż iloczynu, powiększonego o 0,015, a tymwięcéj mniejszy od tego iloczynu, powiększonego o ostatni dzielnik 0,145. Z drugiéj strony, po odjęciu od danéj dzielnéj wszystkich części iloczynu, wypadającego ze skróconego mnożenia dzielnika przez iloraz, pozostała nam liczba 0,1255069, mniejsza od ostatniego dzielnika 0,145; dzielna więc, będąc oczywiście większą od iloczy-

---

[1]) Gdy cyfra jedności (3) ilorazu (mnożnika) znajduje się właśnie pod ostatnią cyfrą (5) ostatniego dzielnika.

[2]) Widzimy z tego, że *dzielenie skrócone polega na tym, aby jako ostatni dzielnik wziąć liczbę większą od błędów sumy iloczynów częściowych mnożenia skróconego, odpowiadającego temu dzieleniu.*

nu, wypadłego z owego mnożenia skróconego [1]), jest mniejsza od tegoż iloczynu, powiększonego o 0,145. Obie więc liczby: dzielna i iloczyn dokładny dzielnika danego przez iloraz, otrzymany sposobem skróconym, są zawarte między dwiema liczbami, różniącymi się od siebie o 0,145. Różnica więc danéj dzielnéj i iloczynu dokładnego dzielnika danego przez iloraz 1873 otrzymany sposobem skróconym, jest tymwięcéj mniejsza od liczby 0,145, mniejszéj od dzielnika danego 0,1451292929. A więc 1873 jest wartością ilorazu, różniącą się od jego wartości dokładnéj mniéj niż o 1, czyli jest szukaną wartością ilorazu przybliżoną na jedność.

Ponieważ w naszym przykładzie iloczyn dokładny dzielnika danego przez 1873 jest mniejszy niż iloczyn wypadający ze skróconego mnożenia + 0,015, a dana dzielna równa się temuż iloczynowi (wypadającemu ze skróconego mnożenia) + 0,1255069, więc 1873 jest wartością ilorazu przybliżoną na 1 z niedomiarem [2]). — Gdybyśmy zaś wykonali np. dzielenie (szukając przybliżonéj na 1 wartości ilorazu):

$$\begin{array}{l|l}
271{,}827\underline{5069} & \underline{0{,}\overline{145}\cancel{1}\cancel{2}9\underline{2929}} \\
\underline{\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot} & 1873 \\
\qquad 10 &
\end{array}$$

to wtedy o iloczynie dokładnym dzielnika danego przez 1873 wypadłoby powiedzieć to samo, co poprzednio, lecz dana dzielna byłaby równa iloczynowi, wypadającemu ze skróconego mnożenia, + 0,0105069; nie moglibyśmy więc napewno wnieść, czy w tym przypadku wartość 1873 ilorazu, przybliżona na 1, przedstawia przybliżenie z niedomiarem, czyteż z nadmiarem.

Ażeby zapomocą dzielenia skróconego odnaleść wartość ilorazu przybliżoną na jedność, należy uprzednio oznaczyć ilość cyfr całkowitéj części ilorazu, która jednocześnie wyrażać będzie ilość dzieleń częściowych, mających być wykonanymi. To wiedząc, należy następnie oddzielić tyle początkowych cyfr dzielnika, aby one przedstawiały już liczbę, większą od sumy tylu następnych cyfr dzielnika, ile ma być wykonanych dzieleń częściowych; ta oddzielona liczba będzie ostatnim dzielnikiem. Z tego ostatniego dzielnika, dołączając doń o jednę mniéj następujących w danym dzielniku cyfr, niż jest dzieleń częściowych do wykonania, otrzymamy piérwszy dzielnik. Zauważywszy zaś, jakie części liczby przedstawia piérwsza z prawéj strony cyfra ostatniego dzielnika, opuszczamy w dzielnéj wszystkie te cyfry, które w niéj przedstawiają mniejsze od tamtych części liczby. Dzieląc liczbę, przedstawioną przez zatrzymane cyfry dzielnéj, przez piérwszy dzielnik, otrzymujemy piérwszą cyfrę w ilorazie; pozostałą resztę dzieląc przez dzielnik, powstały z poprzedniego wskutek opuszczenia w nim piérwszéj z prawéj strony cyfry,

---

[1]) Jest ona bowiem także większą od iloczynu dokładnego danego dzielnika przez iloraz 1873, otrzymany sposobem skróconym.

[2]) Wyraźniéj:

dzielnik $\times$ iloraz przyb. $=$ dzielnikowi przyb. $\times$ iloraz przyb. $+$ liczba mniejsza od 0,015
dzielna $=$ dzielnik $\times$ iloraz $=$ dzielnikowi przyb. $\times$ iloraz przyb. $+$ 0,1255069,
więc

dzielnik $\times$ iloraz przyb. $<$ dzielnika $\times$ iloraz (dokładny),

czyli 1873 jest wartością ilorazu przybliżoną z niedomiarem.

otrzymamy następną cyfrę w ilorazie, i t. d., póki nie wyznaczymy cyfry przy pomocy ostatniego dzielnika.

Niekiedy zdarza się, że któraś z reszt nie jest mniejsza od pomnożonego przez 10 dzielnika, przez który ona ma być podzielona. Np. gdy wykonywamy skrócone dzielenie 19 501 757 : 4535,475 (szukając zawsze przybliżonéj na 1 wartości ilorazu), to, po wyznaczeniu cyfry drugiéj w ilorazie, otrzymujemy resztę 4531, którą mamy dzielić przez trzeci dzielnik 453. Albo więc jako drugą cyfrę w ilorazie weźmiemy cyfrę 3 i jako cyfry trzecią i czwartą weźmiemy zera, albotéż, pozostawiając cyfrę 2 jako drugą, weźmiemy jako trzecią 9; w takim razie otrzymamy resztę 454, która znowu jest większa od odpowiedniego dzielnika 45 pomnożonego przez 10, i wypadnie jako ostatnią cyfrę wziąć 9.

```
 19501757 | 4535475
—181416   | 4299
   13601
   —9070
    4531
   —4077
     454
    —405
      49
```

Zauważymy, że jeżeli przyjmiemy jako iloraz 4299, to dokładny iloczyn dzielnika danego przez 4299 jest mniejszy niż iloczyn, wypadający ze skróconego mnożenia, $+ 3 + 5 + 4 + (7 + 1)$ takich części liczby, w jakich są wyrażone iloczyny częściowe, t. j. dokładny iloczyn dzielnika danego przez 4299 jest mniejszy niż iloczyn, wypadający ze skróconego mnożenia, $+ 2000$, gdy tymczasem dzielna równa się owemu iloczynowi $+ 4957$; liczba więc 4299 jest wartością ilorazu przybliżoną na 1 z niedomiarem. Zatym 4300 będzie wartością tego ilorazu przybliżoną na 1 z nadmiarem. Którakolwiek więc z tych wartości 4299 i 4300 może tu być uważana, jako przedstawiająca żądaną wartość. Zatym, *jeżeli w czasie wykonywania dzielenia skróconego otrzymamy resztę nie mniejszą od pomnożonego przez 10 dzielnika, przez który mamy ją podzielić, to należy wtedy w ilorazie jako każdą z cyfr, mających być wyznaczonymi, wziąć 9, albotéż ostatnią z otrzymanych cyfr powiększyć o 1, a jako dalsze wziąć zera.*

Zauważymy jeszcze, że gdybyśmy w ten sposób dzielili np. liczby 9 294 703 568 : 73 945, wyznaczając wartość ilorazu przybliżoną na 1, to, mając wyznaczyć 6 cyfr w ilorazie, wzięlibyśmy jako ostatni dzielnik 73, gdyż $73 > 9 + 4 + 5$, a pierwszym dzielnikiem byłaby liczba powstała z dopisania do 73 5-u następujących cyfr danego dzielnika, t. j. byłaby nim liczba 73 945,00 i wypadłoby dzielić 9 294 703 568 : 73945,00.

(Zadania arytmetyczne. § 25.)

ROZDZIAŁ VIII.

WYRAŻANIE UŁAMKÓW ZWYCZAJNYCH W POSTACI DZIESIĘTNYCH, I ODWROTNIE. UŁAMKI DZIESIĘTNE PERYJODYCZNE.

---

§ 25. O LICZBIE DZIESIĘTNEJ, PRZEDSTAWIAJĄCEJ ILORAZ Z PODZIELENIA DWU LICZB CAŁKOWITYCH PRZEZ SIEBIE. WYRAŻANIE UŁAMKÓW ZWYCZAJNYCH W POSTACI DZIESIĘTNYCH.

1. Widzieliśmy (§ 24, us. 4, 6), że

$$1089:72=15{,}125;\quad 3:4=0{,}75;\quad 29:1250=0{,}0232;$$
$$7077:11=643{,}3636\ldots;\ 3:35=0{,}0857142857142\ldots,$$

t. j. że, wyrażając iloraz jako liczbę dziesiętną, otrzymujemy w ilorazie niekiedy ułamek dziesiętny skończony, a niekiedy ułamek dziesiętny nieskończony. Owóż, należałoby zbadać, od czego to zależy, t. j. zbadać: kiedy, dzieląc dane dwie liczby całkowite *) przez siebie i wyznaczając iloraz jako liczbę dziesiętną, otrzymamy w ilorazie ułamek dziesiętny skończony, a kiedy nieskończony.

Wiemy, że dzielenie dwu liczb całkowitych przez siebie doprowadza nas do rezultatu, który możemy przedstawiać w postaci ułamka zwyczajnego, mającego dzielnik jako mianownik, a dzielną jako licznik (§ 17, us. 5), tak iż np. iloraz z podzielenia 1089 : 72, t. j. liczba 15,125, jest tą samą liczbą, którą przedstawia ułamek zwyczajny $\frac{1089}{72}$, albo — ponieważ to jest ułamek niewłaściwy (§ 17, us. 4) — całkowita z ułamkiem: $15\frac{9}{72}$, czyli (§ 17, us. 9) : $15\frac{1}{8}$. Stosując toż samo do każdego z powyższych dzieleń, mamy

$$\frac{1089}{72}=14\frac{1}{8}=15{,}125;\quad \frac{3}{4}=0{,}75;\quad \frac{29}{1250}=0{,}0232;$$
$$\frac{7077}{11}=643\frac{4}{11}=633{,}3636\ldots;\quad \frac{3}{35}=0{,}0857142857142\ldots.$$

---

*) W dzieleniu liczb dziesiętnych, jak widzieliśmy (§ 24, us. 2 — 6), wyznaczamy cyfry w ilorazie tak, jakgdyby przecinka nie było, czyli, jakgdybyśmy dzielili przez siebie liczby całkowite; jeżeli więc w ilorazie z dzielenia liczb całkowitych otrzymujemy ułamek dziesiętny nieskończony, to on wypadnie również wtedy, kiedy przecinek znajduje się czyto w dzielnej, czyto w dzielniku, czyteż w dzielnej i dzielniku jednocześnie.

Stąd widzimy, że ułamek zwyczajny (tak właściwy, jak i niewłaściwy) możemy wyrazić jako liczbę dziesiętną.

A nadto, zamiast rozważać: kiedy, dzieląc dane dwie liczby całkowite przez siebie i wyznaczając iloraz jako liczbę dziesiętną, otrzymamy w ilorazie ułamek dziesiętny skończony, a kiedy nieskończony — możemy zastanawiać się nad tym: kiedy, wyrażając ułamek zwyczajny jako liczbę dziesiętną, otrzymamy w tym wyrażeniu ułamek dziesiętny skończony, a kiedy nieskończony.

Aby jednak, mając ułamek zwyczajny, otrzymać jego wyrażenie w postaci liczby dziesiętnéj, korzystamy z tego, że na ułamek zwyczajny możemy patrzéć jako na wskazane dzielenie, w którym dzielną jest licznik, dzielnikiem mianownik, a ilorazem wartość ułamka (§ 17, us. 5). Dzielimy więc licznik (dzielną) przez mianownik (dzielnik), wyznaczając iloraz jako liczbę dziesiętną (§ 24, us. 4). Możemy więc powiedzieć (§ 24, us. 5):

Aby ułamek zwyczajny wyrazić jako liczbę dziesiętną, dzielimy licznik przez mianownik, postępując tak, jak wtedy, kiedy, mając podzielić przez siebie dwie liczby całkowite, wyznaczamy iloraz jako liczbę dziesiętną, t. j. przyjmując, że w czasie tego dzielenia w dzielnéj po cyfrze, zajmującéj miejsce piérwsze, znajduje się przecinek, po którym następują zera; czyli innymi słowy:

Aby ułamek zwyczajny wyrazić jako liczbę dziesiętną, dzielimy licznik przez mianownik; jeżeli licznik nie jest mniejszy od mianownika, to, wyznaczywszy iloraz niezupełny (§ 7, us. 11), *mieć zeń będziemy część całkowitą liczby dziesiętnéj, a jeżeli licznik jest mniejszy od mianownika, to piszemy zamiast części całkowitéj zero, a licznik uważamy daléj jako resztę dzielenia; do reszty dzielenia przypisujemy zero i, uważając tak powstałą liczbę jako nową dzielną, wyznaczamy piérwszą cyfrę dziesiętną; do reszty, jeżeli ona z tego dzielenia częściowego wypadnie, dopisujemy zero, wyznaczamy z téj liczby drugą cyfrę dziesiętną, i t. d.*

Jeżeli dany ułamek zwyczajny jest niewłaściwy, to, jak widzimy, taksamo postępujemy przy wyznaczaniu części całkowitéj liczby dziesiętnéj, jak przy wyciąganiu całkowitéj z ułamka danego (§ 17, us. 4), gdyż w obu razach jest toż samo zadanie; dalsze zaś postępowanie jest wyrażaniem ułamka zwyczajnego w postaci ułamka dziesiętnego, np.

$$\frac{7077}{11} = 643 + \frac{4}{11} = 643{,}3636\ldots = 643 + 0{,}3636\ldots$$

Dlatego tu nadal przypuścimy, że zawsze, ilekroć dany jest ułamek niewłaściwy, całkowita zostaje z niego wyciągnięta, tak iż pozostaje tylko rozważyć: kiedy, wyrażając ułamek zwyczajny właściwy jako dziesiętny, otrzymamy ułamek dziesiętny skończony, a kiedy nieskończony.

2. W us. 6-ym § 21-ego widzieliśmy, że np.

$$0{,}0900127 = \frac{900127}{10000000};$$

teraz dodamy, że to, cośmy tam mówili, odnosiło się oczywiście tylko do ułamków dziesiętnych skończonych. Powiemy więc: ułamek dziesiętny skończony możemy zastąpić przez ułamek zwyczajny, pisząc jako jego licznik liczbę, przedstawioną przez cyfry znajdujące się po przecinku, jakgdyby to ich zgrupowanie przedstawiało oddzielną liczbę całkowitą, a jako mianownik liczbę, przedstawioną przez 1 z tylu zerami, ile w danym ułamku jest wszystkich cyfr dziesiętnych.

Jeżeli więc dany ułamek zwyczajny może być wyrażony jako ułamek dziesiętny skończony, to z tego ułamka dziesiętnego moglibyśmy wprost otrzymać taką postać danego ułamka zwyczajnego (§ 17, us. 8), któréj mianownikiem jest liczba, przedstawiona przez 1 z zerami. A więc ułamek zwyczajny wtedy da się wyrazić jako ułamek dziesiętny skończony, kiedy pośród różnych (§ 17, us. 10) postaci danego ułamka zwyczajnego może się znaléść taka, w któréj mianowniku jest liczba, przedstawiona przez jedność z zerami.

Wiemy zaś, że wszystkie postaci ułamka zwyczajnego powstają z jego postaci nieskracalnéj, wskutek jednoczesnego pomnożenia jéj licznika i mianownika przez odpowiednią tę samę *) liczbę (§ 17, us. 10). Aby więc, mając pewien ułamek zwyczajny, móc zgóry powiedzieć, czy, wyrażając go (us. 1) jako dziesiętny, otrzymamy ułamek dziesiętny skończony, czyteż nieskończony, należy przedewszystkim dany ułamek zwyczajny przywiéść do postaci nieskracalnéj (§ 17, us. 9) wrazie, gdyby on nie był już dany w téj postaci. Jeżeli mianownik nieskracalnéj postaci danego ułamka jest taką liczbą, że, mnożąc ją przez odpowiednią liczbę całkowitą, możemy otrzymać liczbę, przedstawioną przez 1 z zerami **), to, mnożąc przez nią licznik i mianownik nieskracalnéj postaci, otrzymamy postać, mającą w mianowniku liczbę, przedstawioną przez 1 z zerami, czyli: ułamek dziesiętny, wyrażający dany ułamek zwyczajny, jest skończony. Jeżeli zaś mianownik nieskracalnéj postaci danego ułamka jest taką liczbą, że niéma żadnéj liczby całkowitéj, przez którąby mnożąc ów mianownik można było otrzymać liczbę, przedstawioną przez 1 z zerami, to pośród różnych postaci danego ułamka nie może się znaléść taka, któréjby mianownik był liczbą przedstawioną przez 1 z zerami, czyli: nie możemy ułamka danego wyrazić w postaci ułamka dziesiętnego skoń-

*) Całkowitą.

**) Innymi słowy: jeżeli pośród różnych wielokrotnych (§ 12, us. 3) mianownika nieskracalnéj postaci danego ułamka niéma liczby, przedstawionéj przez 1 z zerami.

czony, a tymsamym ułamek dziesiętny, wyrażający dany ułamek zwyczajny, jest nieskończony.

Zważmy, że wszelkie liczby przedstawione przez 1 z zerami, t. j. liczby 10, 100, 1000 i t. d., w roskładzie swoim na czynniki piérwsze (§ 15, us. 1, 4) mają tylko czynniki 2 i 5. Żeby więc, mnożąc mianownik nieskracalnéj postaci danego ułamka przez pewną liczbę całkowitą, móc otrzymać liczbę, przedstawioną przez 1 z zerami, trzeba, aby pośród czynników piérwszych, na które się ten mianownik roskłada, prócz czynników 2 lub 5, nie było innych. Jeżeli bowiém pośród czynników roskładu owego mianownika na czynniki piérwsze jest czynnik inny, niż 2 lub 5, to, gdy mnożyć będziemy ów mianownik przez jakąkolwiek liczbę całkowitą, zawsze ten czynnik wejdzie do roskładu otrzymanego iloczynu na czynniki piérwsze, a tymsamym tym iloczynem nie może być liczba przedstawiona przez 1 z zerami.

Tak np. gdy mamy dany ułamek $\frac{21}{120}$, to, ponieważ $\frac{21}{120} = \frac{7}{40}$, gdzie $\frac{7}{40}$ jest już postacią nieskracalną, zaś $40 = 2.2.2.5$, zatym możemy, mnożąc licznik i mianownik postaci $\frac{7}{40}$ przez liczbę 5.5, otrzymać $\frac{7 \times 5.5}{2.2.2.5 \times 5.5} = \frac{175}{1000}$ i $\frac{21}{120} = 0{,}175$, co otrzymalibyśmy także, dzieląc (us. 1) 21 przez 120. Jeżeli zaś mamy np. ułamek $\frac{5}{6}$, gdzie $6 = 2.3$, to niéma takiéj liczby całkowitéj, przez którą mnożąc liczbę 2.3, otrzymalibyśmy liczbę, przedstawioną przez 1 z zerami, a więc ułamek dziesiętny, wyrażający ułamek $\frac{5}{6}$, jest nieskończony; jakoż, dzieląc 5 przez 6, otrzymamy $\frac{5}{6} = 0{,}8333\ldots.$ Powiemy przeto:

Jeżeli w roskładzie mianownika postaci nieskracalnéj danego ułamka na czynniki piérwsze niéma czynnika, któryby był inną liczbą niż 2 lub 5, to ułamek dziesiętny, wyrażający dany ułamek zwyczajny, jest skończony.

Jeżeli w roskładzie mianownika postaci nieskracalnéj danego ułamka na czynniki piérwsze jest czynnik, inny niż 2 lub 5, to ułamek dziesiętny, wyrażający dany ułamek zwyczajny, jest nieskończony.

3. Jeżeli więc ułamek dziesiętny, wyrażający dany ułamek zwyczajny, ma być skończony, to w roskładzie mianownika postaci nieskracalnéj danego ułamka mogą być tylko czynniki 2 lub 5, t. j. mogą być albo same czynniki 2, albo same czynniki 5, albotéż i czynniki 2 i czynniki 5, ale nie inne.

Ułamek dziesiętny skończony, wyrażający ten dany ułamek zwyczajny, miéć będzie (us. 2) tyle cyfr dziesiętnych (bez końcowych zer), ile może być najmniéj zer przy 1 w mianowniku najprostszéj z tych *) postaci ułamka danego, które mają w mianowniku liczbę, przedstawioną przez 1 z zerami. Ponieważ zaś w roskładach liczb 10, 100, 1000 i t. d. na czynniki piérwsze mamy tyle czynników 2, ile **) czynników 5, zatym, jeżeli w roskładzie owego mianownika są same czynniki 2 lub same czynniki 5, to, mnożąc przez liczbę, będącą iloczynem tyluż czynników odpowiednio 5 lub 2, otrzymamy liczbę, przedstawioną przez 1 z tyluż zerami. Jeżeli zaś są czynniki 2 i 5 jednocześnie, i jednych, np. czynników 2, jest więcéj, to mnożąc przez iloczyn tylu czynników 5, o ile ich jest w roskładzie mniéj, otrzymamy liczbę, przedstawioną przez 1 z tylu zerami, ile było w roskładzie czynników 2. A więc:

Jeżeli w roskładzie mianownika postaci nieskracalnéj danego ułamka na czynniki piérwsze znajdują się same czynniki 2 lub same czynniki 5, to w ułamku dziesiętnym, wyrażającym dany ułamek zwyczajny, jest tyle cyfr dziesiętnych, ile tych czynników w roskładzie; jeżeli zaś w owym roskładzie są tylko czynnniki 2 i 5, to w ułamku dziesiętnym, wyrażającym dany ułamek zwyczajny, jest tyle cyfr dziesiętnych, ile razy w tym roskładzie znajduje się ten czynnik, który większą ilość razy doń wchodzi.

4. Widzieliśmy, że jeżeli w roskładzie mianownika postaci nieskracalnéj danego ułamka jest czynnik inny, niż 2 lub 5, to ułamek dziesiętny, przedstawiający dany ułamek zwyczajny, jest nieskończony. Dzieląc więc licznik przez mianownik (us. 1), nie dojdziemy do reszty 0, t. j. dzielenie będzie się ciągnąć do nieskończoności. Każda z nieskończenie wielu reszt w tym dzieleniu jest mniejsza od dzielnika (§ 7, us. 11); ilość więc różnych reszt jest ograniczona ***), t. j. też same liczby będą się powtarzać w dzieleniu jako reszty. Że zaś z tych reszt dla wyznaczenia następujących cyfr ilorazu tworzymy liczby w sposób jednostajny (mianowicie, dopisując 0), przeto gdy którakolwiek z reszt dzielenia się powtórzy, to powtórzy się również odpowiadająca cyfra w ilorazie. Tak np., odnajdując zapomocą dzielenia wyrażenie ułamka $\frac{3}{35}$ w postaci ułamka dziesiętnego (o którym zgóry wiemy, że będzie nieskończony, bo $35 = 5 . 7$), spostrzeżemy, że ósma reszta jest taż sama, co druga (30); dopisawszy więc do niéj zero wyznaczymy w ilorazie tę samę cyfrę 8, co z drugiéj reszty po dopisaniu do niéj zera. Z tego także wypada, że dziewiąta

*) Może być bowiém takich postaci nieskończenie wiele, np. $\frac{21}{120} = \frac{175}{1000} = \frac{1750}{10000}$ i t. d.

**) Bo $100 = 10 \times 10$; $1000 = 10 \times 10 \times 10$ i t. d., a każdy czynnik takiego (§ 15, us. 1, 4) iloczynu $= 2 . 5$.

***) Reszt różnych może być conajwięcej o jednę mniéj, niż jest jedności w dzielniku.

reszta będzie taż sama, co trzecia, i t. d., a więc i w ilorazie dziewiąta cyfra taż sama, co trzecia, i t. d.,

$$\frac{3}{35}=0{,}0857142857142\ldots.$$

Widzimy więc, że w tym ułamku dziesiętnym nieskończonym grupa cyfr 8, 5, 7, 1, 4, 2 wciąż się powtarza do nieskończoności. Taką grupę cyfr dziesiętnych ułamka dziesiętnego nieskończonego, wciąż w tymże samym porządku po sobie następujących, nazywamy *peryjodem* ułamka dziesiętnego nieskończonego, a taki zaś ułamek dziesiętny nieskończony nazywamy *ułamkiem dziesiętnym peryjodycznym* [1]).

Możemy więc, w uzupełnieniu tego, cośmy wyprowadzili w us. 2-im, powiedzieć:

Jeżeli w rozkładzie mianownika postaci nieskracalnéj danego ułamka na czynniki piérwsze jest czynnik inny, niż 2 lub 5, to ułamek dziesiętny, wyrażający dany ułamek zwyczajny, jest ułamkiem dziesiętnym peryjodycznym.

5. Widzieliśmy, że

$$\frac{4}{11}=0{,}\underline{36}36\ldots;\quad \frac{3}{35}=0{,}0\underline{857142}857142\ldots;$$

podobnie znajdziemy np.

$$\frac{65}{185}=\frac{13}{37}=0{,}\underline{342}342\ldots;\quad \frac{4339}{33300}=0{,}13\underline{030}030\ldots$$

Przyglądając się tym ułamkom dziesiętnym peryjodycznym i dla uwidocznienia podkréślając początkowe cyfry, tworzące peryjód, widzimy, że tu w ułamkach 0,3636... i 0,342342... piérwsza po przecinku cyfra, czyli piérwsza cyfra dziesiętna, już należy do peryjodu, gdy tymczasem w dwu pozostałych ułamkach są «cyfry dziesiętne, nie należące do peryjodu», mianowicie w jednym cyfra 0, a w drugim cyfry 1 i 3. Jeżeli w ułamku dziesiętnym peryjodycznym piérwsza cyfra dziesiętna już należy do peryjodu, to nazywamy ten ułamek *ułamkiem dziesiętnym peryjodycznym prostym*; jeżeli zaś w ułamku dziesiętnym peryjodycznym są cyfry dziesiętne nie należące do peryjodu, to nazywamy go *ułamkiem dziesiętnym peryjodycznym mieszanym*.

Moglibyśmy przyjąć, że np. w piérwszym z wypisanych wyżéj ułamków, t. j. w ułamku 0,342342342... grupę powtarzających się cyfr tworzą cyfry 4, 2 i 3, albo cyfry 2, 3 i 4, a wtedy moglibyśmy

---

[1]) Niedość jest mówić «ułamek peryjodyczny», bo są jeszcze ułamki ciągłe peryjodyczne. (Zob. *Algiebra*, t. III seryi III «Bibl.-mat.-fiz.»).

[Nb. Ilekroć nadal mówimy o algiebrze, to rozumieć przez to będziemy kurs części III «Bibl.-mat.-fiz.»]

ten ułamek dziesiętny peryjodyczny uważać za mieszany. Podobnie w ostatnim z wypisanych ułamków moglibyśmy przyjąć, iż grupy powtarzających się cyfr tworzą cyfry 3, 0 i 0, albo cyfry 0, 0 i 3, a wtedy przyjmowalibyśmy, że w tym ułamku są odpowiednio trzy lub cztéry cyfry dziesiętne nie należące do peryjodu. Zwykle jednak tak nie postępujemy. Owszem, chcąc rzecz przedstawić najprościéj, jeżeli np., mając ostatni ułamek, zdawałoby się nam, że jako peryjód przyjąć należy grupę cyfr 3, 0 i 0, to zważamy na ostatnią z cyfr téj grupy (0) w początkowych cyfrach (t. j. w piérwszéj po przecinku takiéj grupie) i porównywamy ją z cyfrą poprzedzającą tę grupę; znajdujemy, że jest nią także cyfra 0, a więc ta cyfra należy już do cyfr peryjodu, i dlatego jako peryjód przyjmiemy grupę cyfr 0, 3 i 0; przed nią jest cyfra 3, odmienna od ostatniéj cyfry peryjodu, a więc w tym ułamku dziesiętnym peryjodycznym są dwie cyfry dziesiętne nie należące do peryjodu.

Ułamka dziesiętnego peryjodycznego nie możemy tak czytać, jak czytamy ułamki dziesiętne skończone (§ 21, us. 5), t. j. tak, jakbyśmy mogli przeczytać jego wartość przybliżoną (§ 24, us. 7). Czytając ułamek dziesiętny peryjodyczny, np. wypisane wyżéj ułamki 0,342342... lub 0,13030030.... mówimy: «zero, przecinek», a następnie albo wypowiadamy pewną ilość cyfr dziesiętnych, nie opuszczając zer, robiąc pewne przerwy głosu dla oddzielenia peryjodów, t. j. powiemy: «zero, przecinek; trzy, cztéry, dwa; trzy, cztéry, dwa; i t. d.» i «zero, przecinek; jeden, trzy; zero, trzy, zero; zero, trzy, zero; i t. d.», albotéż, wprowadzając wyraźnie wyraz: peryjód, powiemy: «zero przecinek, i peryjód: trzy, cztéry, dwa» i «zero, przecinek; jeden, trzy, i peryjód: zero, trzy, zero». Gdybyśmy mieli np. 643,3636..., to oczywiście, czytając to, powiedzielibyśmy: «643 całkowite», a daléj tak, jak poprzednio, albo: «trzy, sześć; trzy, sześć, i t. d.», albotéż: «i peryjód: trzy, sześć».

Jeżeli o ułamku dziesiętnym peryjodycznym wiemy, jakiego ułamka zwyczajnego jest on wyrażeniem, lub jeżeli mamy już wyraźnie zaznaczony peryjód, np. gdyby w ułamku dziesiętnym nieskończonym peryjodycznym, oddzielnie napisanym, cyfry tworzące peryjód były podkréślone, jak na początku tego ustępu, wówczas żadnéj wątpliwości być nie może. Gdybyśmy jednak mieli napisany ułamek dziesiętny:

0,342342342...,

a kropki oznaczałyby tylko, że w tym ułamku jest nieskończenie wiele cyfr dziesiętnych, to, choćbyśmy wiedzieli, że ten ułamek dziesiętny jest peryjodycznym, nie moglibyśmy napewno twierdzić, że cyfry 3, 4 i 2 przedstawiają już peryjód. Mogłoby bowiém być np.

0,3423423423477342342342 3477....

Dlatego, jeżeli, mając ułamek dziesiętny peryjodyczny, nie wiemy, jaki on przedstawia ułamek zwyczajny, jest rzeczą dogodną wyraźnie zaznaczyć peryjód. Robią to dwojako: albo podkreślając cyfry (zwykle początkowe), tworzące peryjód, albotéż ujmując je w klamry nawiasu. Gdy więc mamy napisane:

$$0,\underline{342}342\ldots, \text{ albo: } 0,(342)\ldots,$$

lub

$$19,13\underline{030}030\ldots., \text{ albo}: 19,13(030)\ldots,$$

to żadnéj już wątpliwości być nie może co do tego, które cyfry dziesiętne tworzą peryjód.

6. Widzieliśmy, że jeżeli do roskładu mianownika postaci nieskracalnéj danego ułamka zwyczajnego na czynniki piérwsze wchodzi czynnik inny, niż 2 lub 5, to ułamek dziesiętny, wyrażający dany ułamek zwyczajny, jest peryjodyczny, i mianowicie albo peryjodyczny prosty, albo peryjodyczny mieszany (us. 4, 5). W ustępach 5-ym i 9-ym § 26-ego otrzymamy a posteriori wskazówkę tego, po czym zgóry poznać, czy ułamek dziesiętny będzie peryjodycznym prostym, czytéż mieszanym. Tu zaś podamy inne wyprowadzenie owéj wskazówki.

a. Niech $\frac{l}{m}$ będzie nieskracalną postacią danego ułamka zwyczajnego i niech m będzie liczbą piérwszą względem 10-u (t. j. do roskładu liczby m na czynniki piérwsze nie wchodzą czynniki 2 lub 5; § 15, us. 5). Gdy dzielimy $l:m$, to kolejne reszty dzielenia odpowiadają (§ 24, us. 7) dzielnym

$$l,\ l.10,\ l.10^2,\ l.10^3,\ldots,\ l.10^a,\quad l.10^{a+1},\ldots,\ l.10^{a+b},\ldots.$$

Ponieważ (us. 4) też same liczby będą się powtarzać jako reszty, więc pewne dzielne odpowiadają téj saméj liczbie jako reszcie. Niech np. dwie dzielne

$$l.10^a \quad \text{i} \quad l.10^{a+b}$$

mają tę samę liczbę r jako reszty, im odpowiadające, a ich ilorazy niezupełne niech będą odpowiednio i_1 i i_2. Wtedy (§ 7, us. 11)

$$l.10^a = m.\,i_1 + r, \qquad l.10^{a+b} = m.\,i_2 + r,$$

a liczba

$$l.10^{a+b} - l.10^a = m.i_2 - m.i_1,$$

t. j. liczba (§ 6, us. 15)

$$10^a.\ (l.10^b - l) = m.\ (i_2 - i_1),$$

jest widocznie podzielna przez liczbę m. Ponieważ założyliśmy, że liczba m jest piérwsza względem 10, więc jest ona także piérwszą względem (§ 14, us. 15, b.) liczby 10^a. Gdy więc liczba $10^a.\ (l.10^b - l)$ jest podzielną przez m, przeto jéj czynnik $l.10^b - l$ jest podzielny (§ 14, us. 13) przez m. Wiemy, zaś, że liczba l nie jest podzielna przez m; aby więc różnica $l.10^b - l$ była podzielna przez m, trzeba, aby także dzielne

$$l \quad \text{i} \quad l.10^b$$

odpowiadały téj saméj reszcie dzielenia. Z tego wypada, że reszta, odpowiadająca dzielnéj l, t. j. piérwsza reszta, należy już do reszt powtarzających się, a tymsamym piérwsza cyfra dziesiętna należy już do peryjodu. Widzimy przeto, że *jeżeli mianownik nieskracalnéj postaci danego ułamka jest liczbą piérwszą względem 10-u, to ułamek dziesiętny, wyrażający dany ułamek zwyczajny, jest peryjodyczny prosty.*

b. Weźmy ułamek zwyczajny, którego postać nieskracalna ma jako mianownik taką liczbę, iż w roskładzie jéj na czynniki piérwsze znajduje się czynnik 2 lub 5 i jednocześnie czynnik inny, niż 2 lub 5. Np. do roskładu mianownika ułamka $\frac{51}{88}$ (który jest już w postaci nieskracalnéj) wchodzi czynnik 2 i jednocześnie wchodzi czynnik 11,

$$88 = 2.2.2.11.$$

Zważmy, że taki ułamek możemy wyrazić, wogóle mówiąc, jako sumę lub różnicę dwu ułamków, z których jeden będzie miał w mianowniku liczbę piérwszą względem 10-u, a drugi będzie miał w mianowniku iloczyn samych tylko czynników 2 lub 5. [Gdy bowiém napiszemy

$$\frac{51}{88} = \frac{x}{11} + \frac{y}{8},$$

to, znosząc mianowniki, otrzymujemy

$$51 = 8x + 11y,$$

równanie nieoznaczone stopnia 1-go z dwiema niewiadomymi x i y, dla których, z uwagi, że spółczynniki przy x i y są liczbami piérwszymi względem siebie, istnieją zawsze wartości całkowite (z których jedna może być ujemną), zadość czyniące temu równaniu—jak się tego dowodzi w algiebrze.] Jakoż,

$$\frac{51}{88} = \frac{5}{11} + \frac{1}{8}.$$

Piérwszy z tych ułamków zwyczajnych, t. j. $\frac{5}{11}$, wyraża się jako ułamek dziesiętny peryjodyczny prosty, drugi zaś, t. j. ułamek $\frac{1}{8}$ jako ułamek dziesiętny skończony. W ich więc sumie cyfry dziesiętne ułamka dziesiętnego skończonego zmienią początkowe cyfry po przecinku ułamka dziesiętnego peryjodycznego prostego, tak iż otrzymamy ułamek dziesiętny peryjodyczny mieszany, z tylu cyframi dziesiętnymi, nie należącymi do peryjodu, ile było cyfr dziesiętnych w ułamku dziesiętnym skończonym (por. us. 3),

$$\frac{5}{11} = 0{,}\underline{4\,5}\,4\,5\,4\,5\,4\,5\ldots$$

$$\frac{1}{8} = 0{,}1\,2\,5$$

$$\frac{51}{88} = 0{,}5\,7\,9\,\underline{5\,4}\,5\,4\,5\,4\ldots.$$

Podobnie np. $\frac{79}{3150}$; $3150 = 2.3.3.5.5.7 = 63.50$; $\frac{79}{3150} = \frac{23}{63} - \frac{17}{50}$;

$$\frac{23}{63} = 0{,}3\underline{650793}65079\ldots$$

$$\frac{17}{50} = 0{,}34$$

$$\frac{79}{3150} = 0{,}02\underline{507936}507936\ldots.$$

Widzimy więc [1]), że *jeżeli w roskładzie mianownika nieskracalnéj postaci danego ułamka zwyczajnego na czynniki piérwsze znajduje się czynnik 2 lub 5 i jednocześnie czynnik inny, niż 2 lub 5, to ułamek dziesiętny, przedstawiający dany ułamek zwyczajny, jest peryjodyczny mieszany i ma tyle cyfr dziesiętnych, nie należących do peryjodu, ile razy do jego roskładu wchodzi ten z czynników 2 lub 5, który większą ilość razy w nim się znajduje.*

7. Z tego, cośmy dotąd mówili, widoczna, że jeżeli iloraz z podzielenia dwu liczb całkowitych mamy przedstawić jako liczbę dziesiętną *), a chcemy wiedzieć, czy ułamek dziesiętny, który otrzymamy w ilorazie, będzie skończony, czytéż nieskończony (peryjodyczny), to trzeba dzieleniem dzielnéj i dzielnika przez ich spólne dzielniki doprowadzić je do tego, aby dzielna i dzielnik były liczbami piérwszymi względem siebie. Jeżeli wtedy już dzielnik jest podzielny tylko przez liczby piérwsze 2 lub 5, to w ilorazie otrzymamy ułamek dziesiętny skończony; jeżeli zaś jest on wtedy podzielny przez liczbę piérwszą, inną niż 2 lub 5, to w ilorazie otrzymamy ułamek dziesiętny peryjodyczny.

Oczywiście, że jeżeli dany dzielnik (choćby nie był liczbą piérwszą względem dzielnéj) jest podzielny tylko przez liczby piérwsze 2 lub 5, to w ilorazie może być tylko ułamek dziesiętny skończony, a wrazie, gdy dany dzielnik jest niepodzielny ani przez 2, ani przez 5 (t. j. jest liczbą piérwszą względem 10), to w ilorazie może być tylko ułamek dziesiętny peryjodyczny.

8. W stosunkach handlowych często małe ułamki zwyczajne, dla łatwiejszego ich ze sobą porównania (§ 17, us. 14), przedstawiają w postaciach, których licznikiem jest zawsze 1-ść; doprowadza to niekiedy do ułamka, którego licznikiem jest 1, a mianownikiem liczba dziesiętna. Np. drogi żelazne wożą zboże, pobiérając za pełny ładunek od wagonu, w który wchodzi 610 pudów zboża, 10 kopiéjek za werstę, czyli wożą zboże «w peł-

---

[1]) Niektórzy, dowodząc tego inaczéj, przyjmują, że jeżeli w liczbie dziesiętnéj, któréj ułamek jest peryjodyczny prosty, przesuwamy przecinek o odpowiednią ilość cyfr wlewo, to otrzymujemy ułamek dziesiętny peryjodyczny mieszany; to niezawsze jednak ma miejsce, np. gdy owa liczba dziesiętna wyraża $\frac{2300}{63}$.

*) Przyjmujemy więc, że dzielna nie jest podzielna przez dzielnik.

nych ładunkach po $\frac{1}{61}$ kop. od puda i wersty». Jeżeli np. z powodów konkurencyjnych pewna droga żelazna obniża owę opłatę z 10 kop. na 9 kop., to wypadnie $\frac{9}{610}$ kop. «od puda i wersty». Owoż, dzieląc licznik i mianownik przez licznik, a w mianowniku zatrzymując 2 cyfry dziesiętne (§ 21, us. 13), otrzymamy, iż owa droga wozi zboże po $\frac{1}{67,78}$ kopiéjki «od puda i wersty».

(Zadania arytmetyczne. § 26.)

---

§ 26. WYRAŻANIE UŁAMKÓW DZIESIĘTNYCH W POSTACI ZWYCZAJNYCH.

1. Należy teraz wziąć pod uwagę zadanie odwrotne temu, którym głównie zajmowaliśmy się w § poprzedzającym, t. j. rozważyć wyrażanie ułamków dziesiętnych w postaci zwyczajnych.

Jak już wiemy (§ 21, us. 6), *aby ułamek dziesiętny skończony wyrazić jako ułamek zwyczajny, należy jako licznik napisać liczbę, przedstawioną przez cyfry, znajdujące się po przecinku, jakgdyby to ich zgrupowanie przedstawiało oddzielną liczbę całkowitą, a jako mianownik 1 z tylu zerami, ile w danym ułamku jest wszystkich cyfr dziesiętnych.* Otrzymany ułamek zwyczajny należy następnie, jeżeli można, skrócić (§ 17, us. 9).

Należy więc tylko zbadać, jak wyrażać ułamki dziesiętne peryjodyczne w postaci ułamków zwyczajnych.

2. Weźmy naprzód ułamek dziesiętny peryjodyczny prosty, np. $0,\underline{342}342\ldots.$ Zauważmy, że

$$342 = 0,342 \times 1000,$$

lub, jeżeli zamiast 1000 napiszemy $999 + 1$ i zważymy, że: aby liczbę pomnożyć przez sumę dwu liczb, można liczbę daną pomnożyć przez każdy ze składników téj sumy i otrzymane iloczyny do siebie dodać (§ 6, us. 14; § 23, us. 5), możemy zamiast $0,342 \times 1000$ napisać: $0,342 \times 999 + 0,342$, tak iż

$$342 = 0,342 \times 999 + 0,342.$$

Do tegoż samego przyszlibyśmy, gdybyśmy 342 dzielili przez 999 i wyznaczyli w ilorazie piérwsze trzy cyfry dziesiętne; ilorazem niezupełnym jest 0,342, a resztą dzielenia 0,342 (§ 24, us. 7). Innymi słowy (§ 25, us. 1): wyrażając ułamek zwyczajny $\frac{342}{999}$ w postaci ułamka dziesiętnego, znajdziemy, iż piérwsze trzy cyfry dziesiętne są 3, 4, 2, a następne znajdziemy, dzieląc w dalszym ciągu resztę 342 przez 999 (t. j. dopisując do téj reszty 0, wyznaczając stąd czwartą cyfrę dziesiętną i t. d.); będziemy zatym teraz znowu w takim samym położeniu, w jakim byliśmy na początku; a więc w ilorazie te trzy cyfry 3, 4 i 2 będą się wciąż w tymże samym porządku powtarzały. A zatym [1]) ułamek zwyczajny $\frac{342}{999}$ jest tym właśnie, który, wyrażony jako dziesiętny, da nam ułamek $0{,}\underline{342}342\ldots$, t. j.

$$0{,}\underline{342}342\ldots=\frac{342}{999}=\frac{13}{37}.$$

Podobnie znajdziemy, że np. $0{,}\underline{0360}0360\ldots=\frac{360}{9999}=\frac{40}{1111}$.

Powiemy więc:

Aby ułamek dziesiętny peryjodyczny prosty wyrazić jako ułamek zwyczajny, należy jako licznik napisać liczbę, przedstawioną przez cyfry peryjodu, jakgdyby ich zgrupowanie przedstawiało liczbę całkowitą, a w mianowniku napisać liczbę, przedstawioną przez tyle cyfr 9, ile jest wszystkich cyfr w peryjodzie. Otrzymany ułamek zwyczajny należy następnie, jeżeli można, skrócić.

3. Zauważmy, że z równości

$$342=0{,}342\times 999+0{,}342$$

wypada, że

$$\frac{342}{999}=0{,}342+\frac{0{,}342}{999}$$

i następnie

$$\frac{342}{999}=0{,}342342+\frac{0{,}000342}{999};\ \frac{342}{999}=0{,}342342342+\frac{0{,}000000342}{999}\ \text{i t. d.,}$$

skąd wynika, że wmiarę tego, jak coraz więcéj uwzględniamy peryjodów, co-

---

[1]) Dowód ten (wzięty z przytoczonéj poprzednio arytmetyki J. A. Serret'go) opiera się właściwie na tym samym, co dowód, w którym naprzód rozważamy, iż ułamki $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{99}$, $\frac{1}{999}$ i t. d. są przedstawione przez ułamki dziesiętne peryjodyczne proste: $0{,}111\ldots$, $0{,}010101\ldots$, $0{,}001001001\ldots$, i t. d., a następnie dane ułamki np. $0{,}444\ldots$; $0{,}525252\ldots$ uważamy jako $4\times 0{,}111\ldots$; $52\times 0{,}010101\ldots$. [Zauważymy, że to ostatnie uzasadnienie sposobu wyrażania ułamków dziesiętnych peryjodycznych prostych w postaci ułamków zwyczajnych jest już wyłożone w *Arytmetyce* Konkowskiego z r. 1811; w późniejszych jednak arytmetykach przeważnie przytaczany jest dowód następujący.]

Najwięcéj u nas rospowszechniony jest dowód taki: od powiększonego 1000 razy ułamka danego $0{,}\underline{342}342342\ldots$ odejmijmy ułamek dany:

1000 ułamków danych	=	3 4 2, 3 4 2 3 4 2...
ułamek dany	=	0, 3 4 2 3 4 2...
999 ułamków danych	=	3 4 2
ułamek dany	=	$\frac{342}{999}$

Jest tu jednak niedogodne z różnych względów takie odejmowanie nieskończonych ciągów cyfr od siebie. Dlatego bardzo wielu autorów obcych wprowadza do tego zmianę, polegającą na tym, że się zadowala ograniczoną ilością peryjodów ułamka danego i w podobny temu sposób zaznacza, że wtedy ów ułamek różni się od ułamka $\frac{342}{999}$ o liczbę, która staje się tym mniejszą, im więcéj uwzględniamy peryjodów. Takie wprowadzenie rozważania granicy jest jednak zawczesne przy pierwszym wykładaniu uczniom o wyrażaniu ułamków dziesiętnych w postaci zwyczajnych.

raz więcéj zbliżamy się do liczby, którą przedstawia ułamek zwyczajny $\frac{342}{999}=\frac{13}{37}$.

Ułamek $0,\underline{342}342342\ldots$ możemy tak wyrazić:

$$0,\underline{342}342342\ldots=\frac{342}{1000}+\frac{342}{1000000}+\frac{342}{1000000000}+\ldots,$$

t. j., wyrażając się, jak w algiebrze, możemy dany ułamek uważać jako sumę wyrazów postępu gieometrycznego nieskończonego malejącego, którego wyrazem piérwszym jest $\frac{342}{1000}$, a wykładnikiem $\frac{1}{1000}$. Dowodzi się w algiebrze, że suma skończonéj ilości wyrazów początkowych takiego postępu, wmiarę uwzględniania coraz większéj ilości tych wyrazów, zdąża do liczby stałéj, zwanéj granicą, od któréj może się różnić mniéj niż o jakkolwiek małą oznaczoną liczbę, i że ta granica jest ilorazem z podzielenia wyrazu piérwszego przez różnicę 1-ści i wykładnika postępu. Będzie więc tu (§ 20, us. 5):

$$\frac{\frac{342}{1000}}{1-\frac{1}{1000}}=\frac{342}{999}=\frac{13}{37}.$$

Widzimy więc, że ułamek zwyczajny $\frac{342}{999}=\frac{13}{37}$ jest granicą, do któréj zdąża ułamek $0,342342\ldots342$ wmiarę uwzględniania coraz większéj ilości peryjodów [1]).

4. Ułamek dziesiętny peryjodyczny prosty

$$0,\underline{9}99\ldots$$

posiada tę własność, że gdy bierzemy jego wartości przybliżone z niedomiarem (§ 21, us. 13) na 0,1; 0,01; 0,001 i t. d., to ułamki dziesiętne skończone przedstawiające owe przybliżenia, są większe od wszelkich innych ułamków dziesiętnych skończonych, mających odpowiednio jednę, dwie, trzy i t. d. cyfry dziesiętne (§ 21, us. 12). Każda zaś z wartości przybliżonych z nadmiarem przedstawia tę samę liczbę 1.

Tęż liczbę (gdyż $\frac{9}{9}=1$) otrzymamy, gdy do ułamka $0,\underline{9}99\ldots$, największego ze wszystkich ułamków dziesiętnych peryjodycznych, zastosujemy prawidło ustępu 2-go [2]), czyli, wyrażając się, jak w drugiéj części ustępu 3-go: 1-ść jest granicą, do któréj zdąża ułamek $0,999\ldots9$ wmiarę uwzględniania coraz większéj ilości peryjodów.

---

[1]) Albo, oznaczając n-ty od początku peryjód zapomocą wskaźnika n, umieszczonego przy ostatniéj cyfrze peryjodu: ułamek zwyczajny $\frac{342}{999}$ jest granicą, do któréj zdąża ułamek

$$0,342342\ldots342_n$$

wmiarę ustawicznego powiększania się liczby n.

[2]) A więc wzmiankowane wyżéj przybliżenia z nadmiarem są tylko pozornie przybliżeniami—one przedstawiają wartość dokładną téj liczby.

Ten więc największy ze wszystkich ułamków dziesiętnych peryjodycznych, a zarazem największy ze wszelkich wogóle ułamków dziesiętnych możliwych, jest właściwie wyrażeniem jedności. Dlategoto tego krańcowego ułamka dziesiętnego nie można otrzymać jako ilorazu z podzielenia dwu liczb całkowitych przez siebie (§ 25, us. 1, 7), a wszczególności nie można tą drogą [1]) otrzymać owego ułamka, jako wyrażenia ułamka zwyczajnego.

Z tego zaś jeszcze wynika, że, wykonawszy jakikolwiek rachunek, nie otrzymamy w wypadku ułamka dziesiętnego peryjodycznego $0{,}99\underline{9}\ldots.$

5. Jak widzieliśmy (us. 2), ułamek zwyczajny, którego wyrażeniem jest ułamek dziesiętny peryjodyczny prosty, może być przedstawiony w postaci, któréj mianownik jest liczbą przedstawioną wyłącznie przez cyfry 9, a więc liczbą niepodzielną ani przez 2 ani przez 5 (§ 13, us. 5), czyli liczbą piérwszą względem 10-u (§ 15, us. 11). Jeżeli owę postać można skrócić, to mianownik nieskracalnéj postaci tego ułamka zwyczajnego jest również liczbą piérwszą względem 10-u. Uzupełniając więc to, cośmy powiedzieli w us. 4-ym § 25-go, dodamy teraz:

*Jeżeli mianownik nieskracalnéj postaci danego ułamka zwyczajnego jest liczbą piérwszą względem 10-u *), to ułamek dziesiętny, wyrażający dany ułamek zwyczajny, jest peryjodyczny prosty* [2]).

6. Weźmy teraz pod uwagę ułamek dziesiętny peryjodyczny mieszany, np. ułamek $0{,}13\underline{030}030\ldots.$ Zważmy, że

$$0{,}13\underline{030}030\ldots = 0{,}13 + 0{,}00\underline{030}030\ldots\ ^{3)}$$

$$= 0{,}13 + \frac{1}{100}\times 0{,}\underline{030}030\ldots\ ^{4)}$$

$$= \frac{13}{100} + \frac{1}{100}\times\frac{30}{999}$$

$$= \frac{13\times 999 + 30}{99000}.$$

---

[1]) Można go otrzymać przez stosowanie równości $9 = 0{,}9\times 9 + 0{,}9$.

*) Albo: jeżeli w rozkładzie mianownika nieskracalnéj postaci danego ułamka zwyczajnego na czynniki piérwsze niéma ani czynnika 2, ani czynnika 5, to i t. d.

[2]) W peryjodzie zaś jest tyle cyfr, ile najmniéj potrzeba cyfr 9, aby one, razem uważane, przedstawiły liczbę podzielną przez mianownik owéj postaci nieskracalnéj.

[3]) Gdybyśmy to tak napisali:

$$0{,}13\underline{030}030\ldots = 0{,}13 + 0{,}0\underline{003}003\ldots,$$

to otrzymalibyśmy $\frac{13}{100} + \frac{1}{10}\times\frac{3}{999} = \frac{13\times 999 + 3\times 10}{99900}$ i t. d.

[4]) Własność, iż przesuwając przecinek wprawo o 2 miejsca, powiększamy liczbę dziesiętną 100 razy, możemy tu zastosować do ułamków dziesiętnych peryjodycznych, gdyż sposób, w jaki to objaśniliśmy (§ 21, us. 9) stosuje się i do tego przypadku: każda cyfra, którekolwiek miejsce zajmująca, staje się o 2 miejsca bliższą przecinka, a więc oznacza części liczby 100 razy większe, niż oznaczała poprzednio.

W liczniku zamiast 999 możemy napisać $1000-1$; robiąc to i zważając (§ 6, ust. 15), że $13\times(1000-1)=13\times1000-13=13000-13$, mieć będziemy:

$$0{,}13\underline{030}030\ldots=\frac{13000-13+30}{99900}$$

$$=\frac{13030-13}{99900}=\frac{13017}{99900}=\frac{4339}{33300}.$$

Podobnie znajdziemy, że np.

$$0{,}072\underline{54}54\ldots=\frac{7254-72}{99000}=\frac{7182}{99000}=\frac{399}{5500}.$$

$$0{,}0\underline{857142}857142\ldots=\frac{857142}{9999990}=\frac{3}{35}.$$

Aby ułamek dziesiętny peryjodyczny mieszany wyrazić jako ułamek zwyczajny, należy w liczniku napisać liczbę, którą otrzymamy, gdy od liczby, przedstawionéj przez cyfry dziesiętne nie należące do peryjodu i wszystkie cyfry peryjodu, odejmiemy liczbę, przedstawioną przez cyfry dziesiętne nie należące do peryjodu, jakgdyby te dwa zgrupowania cyfr przedstawiały liczby całkowite, a w mianowniku napisać liczbę, przedstawioną przez tyle cyfr 9, ile jest wszystkich cyfr w peryjodzie, oraz tyle zer, ile jest wszystkich cyfr dziesiętnych nie należących do peryjodu. Otrzymany ułamek zwyczajny należy następnie, jeżeli można, skrócić.

7. Przedstawiwszy

$$0{,}13\underline{030}030=0{,}13+\frac{1}{100}\times0{,}\underline{030}030\ldots,$$

możemy do ułamka dziesiętnego peryjodycznego prostego $0{,}\underline{030}030\ldots$ zastosować to, cośmy mówili na początku ustępu 3-go, wskutek czego wyniknie, że dany ułamek peryjodyczny mieszany, wmiarę tego, jak coraz więcéj uwzględniamy peryjodów, coraz więcéj się zbliża do liczby, którą przedstawia suma $\frac{13}{100}+\frac{1}{100}\times\frac{30}{999}$, czyli ułamek zwyczajny $\frac{13030-13}{99900}=\frac{4339}{33300}$.

Stosując zaś do tegoż ułamka dziesiętnego peryjodycznego prostego to, cośmy powiedzieli w drugiéj części ustępu 3-go, będziemy mogli się wyrazić, że wypisany ułamek zwyczajny jest granicą, do któréj zdąża ułamek $0{,}13030030\ldots030$ wmiarę uwzględniania coraz większéj ilości peryjodów.

8. Ułamek dziesiętny peryjodyczny mieszany, którego peryjodem jest 9, np.

$$0{,}527\underline{9}99\ldots$$

może być tak wyrażony

$$0{,}527\underline{9}99\ldots=0{,}527+\frac{1}{1000}\times0{,}\underline{9}99\ldots.$$

Wszystko więc, cośmy w ustępie 4-ym mówili o największym ze wszelkich możliwych ułamków dziesiętnych, który tu wchodzi w wypisane wyrażenie, ma tu również swoje zastosowanie. Tak więc:

Ułamek dziesiętny peryjodyczny mieszany $0{,}527\bar{9}99\ldots$ jest największy z tych wszystkich ułamków dziesiętnych, których piérwsze trzy cyfry dziesiętne są pokolei: 5, 2 i 7.

Ten ułamek dziesiętny peryjodyczny mieszany jest właściwie innym wyrażeniem ułamka dziesiętnego skończonego: 0,528, czyli jest wyrażeniem ułamka zwyczajnego $\frac{5279-527}{9000}=\frac{4752}{900}=\frac{528}{1000}=\frac{66}{125}$.

Taki więc ułamek dziesiętny peryjodyczny mieszany, jak tu rozważany, nie może być otrzymany jako iloraz z podzielenia dwu liczb całkowitych przez siebie, a tymsamym nie można tą drogą otrzymać owego ułamka jako wyrażenia ułamka zwyczajnego.

Z tego jeszcze wynika, że, wykonawszy jakikolwiek rachunek, nie otrzymamy w wypadku ułamka dziesiętnego peryjodycznego mieszanego, któregoby peryjodem było 9.

9. Jak widzieliśmy (us. 6), ułamek zwyczajny, którego wyrażeniem jest ułamek dziesiętny peryjodyczny mieszany, może być przedstawiony w postaci, któréj mianownik jest liczbą, utworzoną przez tyle cyfr 9, ile jest wszystkich cyfr w peryjodzie, oraz tyle cyfr 0, ile jest wszystkich cyfr dziesiętnych nie należących do peryjodu. Jeżeli owę postać skrócimy, to mianownik postaci nieskracalnéj będzie liczbą podzielną przez 2 lub 5, gdyż w przeciwnym razie dany ułamek dziesiętny peryjodyczny byłby prostym (us. 5; § 25, us. 5). Zauważymy nadto, że licznik i mianownik owéj wzmiankowanéj wyżéj postaci, mającéj w mianowniku liczbę przedstawioną przez cyfry 9 i 0, nie mogą miéć spólnego dzielnika 10, gdyż wtedy (us. 6) ostatnia cyfra dziesiętna nie należąca do peryjodu byłaby takąż samą, jak ostatnia cyfra peryjodu, coby wskazywało, żeśmy niewłaściwą (§ 25, us. 5) grupę cyfr przyjęli jako peryjód. Skracając więc owę postać, jeżeli to będzie możliwe, przez 2, nie będziemy jéj mogli skrócić przez 5) a jeżeli będzie ją można skrócić przez 5, to nie będzie można jéj skrócić przez 2. Innymi słowy, większa z liczb, wskazujących, ile do roskładu na czynniki piérwsze mianownika nieskracalnéj postaci ułamka zwyczajnego, przedstawiającego ułamek peryjodyczny mieszany, wchodzi czynników 2 i ile czynników 5, przedstawi jednocześnie ilość zer w mianowniku wyżéj wzmiankowanéj postaci, a tymsamym ilość cyfr dziesiętnych w owym ułamku dziesiętnym peryjodycznym, nie należących do peryjodu. Z tego wynika, że to, cośmy powiedzieli w us. 4-ym § 25-go, możemy teraz uzupełnić (por. us. 5), dodając, iż:

Jeżeli w roskładzie mianownika nieskracalnéj postaci danego ułamka zwyczajnego na czynniki pierwsze znajduje się czynnik 2 lub 5 i jednocześnie czynnik inny, niż 2 lub 5, to ułamek dziesiętny, przedstawiający dany ułamek zwyczajny, jest peryjodyczny mieszany i ma tyle cyfr dziesiętnych, nie należących do peryjodu, ile razy do tego roskładu wchodzi ten z czynników 2 lub 5, który większą ilość razy w nim się znajduje [1].

10. Z tego wszystkiego, cośmy tu o ułamkach zwyczajnych i dziesiętnych mówili, wypada, że ułamki dziesiętne różnią się tylko postacią od ułamków zwyczajnych, tak, iż liczbę wyrażoną jako ułamek zwyczajny możemy przedstawić jako ułamek dziesiętny, i nawzajem. Dlatego określenia dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia, jak również wszystkie własności, niezwiązane z postacią ułamków, były w rozdziałach VI i VII też same.

Zauważymy tu jeszcze, że przy rospoczynaniu nauki o ułamkach zwyczajnych, możemy odrazu wszelkie takie ułamki miéć na myśli, gdy tymczasem przy rospoczynaniu nauki o ułamkach dziesiętnych, możemy z początku rozważać tylko ułamki dziesiętne skończone, odsuwając na późniéj rozważanie tak prostych liczb, jak: jedna-trzecia, pięć-szóstych, dwie-siódme i t. d.

11. Rozważaliśmy tu tylko wyrażanie ułamków dziesiętnych w postaci ułamków zwyczajnych. Gdybyśmy zaś mieli liczbę dziesiętną większą od jedności, to odpowiednie zadanie wykonamy najprościéj, gdy oddzielimy ułamek dziesiętny od części całkowitéj, ten ułamek dziesiętny przedstawimy według podanych powyżéj wskazówek w postaci ułamka zwyczajnego, a ten ułamek zwyczajny napiszemy obok części całkowitéj danéj liczby.

12. Jeżeli, wykonawszy pewien rachunek, otrzymaliśmy w wypadku ułamek dziesiętny peryjodyczny, to możemy tę postać zachować, jeżeli niéma wskazówki, że ów wypadek ostateczny powinien być przedstawiony inaczéj, np. z pewnym przybliżeniem.

Jeżeli jednak pośród liczb, które mamy dodać lub odjąć od siebie, albo pomnożyć lub podzielić przez siebie, jest ułamek dziesiętny peryjodyczny (albo, wogóle, liczba dziesiętna, któréj ułamek jest peryjodyczny), to nie wykonywamy tych działań na ułamkach dziesiętnych nieskończonych, lecz albo bierzemy wartość przybliżoną téj liczby, albotéż, jeżeli chcemy wykonać rachunek dokładnie, ułamek dziesiętny peryjodyczny wyrażamy w postaci ułamka zwyczajnego.

---

[1]) Ilość zaś cyfr peryjodu wyznaczy największy z dzielników mianownika nieskracalnéj postaci danego ułamka zwyczajnego, piérwszych względem 10-u. (Por. odsyłacz do ustępu 5-go.)

13. Chociaż ułamek dziesiętny peryjodyczny, jak widzieliśmy (us. 3, 7), jest sumą nieskończenie wielu wyrazów postępu gieometrycznego (do którój wrazie, gdy ten ułamek jest peryjodyczny mieszany, dodaje się pewien ułamek dziesiętny skończony), to jednak granica téj sumy przedstawia albo jednę, albo więcéj razem wziętych części, otrzymanych z rozłożenia jedności na części równe (§ 17, us. 1). Dlategoto ułamki dziesiętne peryjodyczne należą do liczb, z którymi mamy do czynienia w arytmetyce (§ 17, us. 2).

14. Jeżeli wystawimy sobie, że mamy liczbę, w któréj cyfr dziesiętnych jest nieskończenie wiele, ale one, jakkolwiek wiele ich weźmiemy, nie przedstawią peryjodu, to taka liczba, z uwagi, że jéj części mniejsze od jedności są napisane według téj saméj zasady, według któréj piszemy liczby całkowite (§ 21, us. 1), jest liczbą dziesiętną. Nadto powszechnie przyjęto w przypadku, gdy taka liczba jest mniejsza od jedności (a w przeciwnym razie, część jéj pozostającą po oddzieleniu części całkowitéj), nazywać ją także «ułamkiem» dziesiętnym [1]). Będzie to więc «ułamek dziesiętny nieskończony nieperyjodyczny». Ułamki dziesiętne nieskończone nieperyjodyczne wchodzą do liczb, które otrzymujemy w algiebrze elementarnéj, np. do wyliczanych przy pomocy cyfr dziesiętnych pierwiastków jakiegokolwiek stopnia z liczb całkowitych, które nie dadzą się dokładnie przedstawić jako liczby całkowite [2]), do logarytmów zwyczajnych tych liczb, które nie są potęgami całkowitymi 10-u i t. d.; wchodzą one do niektórych liczb, wynikających w gieometryi elementarnéj z wymierzenia pewnéj wielkości inną jednorodną, przyjętą za jednostkę, np. okręgu koła jego średnicą i t. d., jak również do pewnych liczb, wynikających z badań, przeprowadzanych w innych częściach matematyki. — Z tego, cośmy mówili o wyrażaniu ułamka zwyczajnego w postaci dziesiętnego, wynika bezpośrednio, że niéma przypadku, w którymby ułamek zwyczajny mógł być wyrażony, jako ułamek dziesiętny nieskończony nieperyjodyczny. Nawzajem, ułamek dziesiętny nieskończony nieperyjodyczny nie może być wyrażony w postaci ułamka zwyczajnego. Innymi słowy, liczba, którą wyraża ułamek dziesiętny nieskończony nieperyjodyczny, nie może być przedstawiona takim sposobem: rozłożyć jedność na pewne części równe i skupić pewną ilość takich części. Albo nieco inaczéj, nie można, zapomocą rozłożenia jedności na części równe, wyznaczyć takiéj części jedności, aby ta mieściła się dokładnie (bez reszty) w liczbie, przedstawionéj przez ułamek dziesiętny nieskończony niepe-

---

[1]) Dlatego podane w § 21 us. 3 określenie ułamków dziesiętnych obejmuje również te liczby.

[2]) Dowodzimy bowiem w algiebrze, że wtedy taki pierwiastek nie jest ułamkiem właściwym, a więc w liczbie dziesiętnéj, którą wyliczać możemy, przedstawiającéj pierwiastek, część jéj, pozostająca po oddzieleniu części całkowitéj, nie może być ani ułamkiem dziesiętnym skończonym, ani ułamkiem dziesiętnym peryjodycznym; jest ona przeto ułamkiem dziesiętnym nieskończonym nieperyjodycznym. — I t. d.

O uwzględnianiu w rachunkach ułamków dziesiętnych nieskończonych nieperyjodycznych zob. *Teoryją przybliżeń liczebnych* (t. III. s. III «Bibl.-mat.-fiz.»).

ryjodyczny. Zwykliśmy w takim przypadku mówić, że dla takiéj liczby i dla jedności «niéma spólnéj miary», czyli, że ta liczba jest «niespółmierną z jednością»; taką liczbę nazywamy «liczbą niewymierną». — Dlategoto ułamki dziesiętne nieskończone nieperyjodyczne, jako liczby niewymierne, nie należą już do liczb, z którymi mamy do czynienia w arytmetyce, chociaż i je, według przyjętego zwyczaju, nazywamy «ułamkami» dziesiętnymi.

(Zadania arytmetyczne. § 27.)

ROZDZIAŁ IX.

STOSUNKI. PROPORCYJE.

§ 27. STOSUNKI.

1. *Stosunkiem nazywamy wyrażenie liczby oderwanéj zapomocą dwu liczb, albo obu oderwanych, albotéż obu mianowanych jednorodnych, z których piérwszą należałoby podzielić przez drugą, jeżelibyśmy chcieli owę liczbę wyznaczyć.*

Gdy więc np. mówimy: stosunek 12-u do 3-ch, lub: stosunek 12-u metrów do 3-ch metrów, to mamy tu na myśli tę liczbę (oderwaną), która wypadnie, gdy odpowiednio 12 : 3, lub 12 m. : 3 m., lecz téj liczby (choćbyśmy ją wiedzieli) wyraźnie nie wypowiadamy, a w rachunkach niekiedy nie wyznaczamy, zadowalając się tym, że, gdyby nam o to szło, to moglibyśmy ją wyznaczyć.

Gdybyśmy tę liczbę wyznaczyli *), to: *a)* ona wskazywałaby, ile razy w piérwszéj z liczb, wchodzących do stosunku, mieści się liczba druga; czyli *b)* ona byłaby liczbą, otrzymaną z wymierzenia piérwszéj z tych liczb liczbą drugą, przyjętą za jednostkę; albo *c)* przez owę liczbę mnożąc drugą z liczb danych, otrzymalibyśmy piérwszą z nich [1]).

2. Możemy mieć np. stosunek 3-ch sążni do 2-u łokci, albo np. stosunek 3 sążni do 2-u łokci + 12-u cali; otrzymamy liczby, wyrażone przez te stosunki, gdy odpowiednio 3 s. : 2 ł., lub 3 s. : (2 ł. + 12 c.). Takie jednak dzielenia sprowadzamy (§ 7, us. 7; § 11, us. 6) do dzielenia dwu liczb mianowanych prostych, wyrażonych przy pomocy téj saméj jednostki. Dlatego w czasie wykonywania jakiegokolwiek ra-

---

*) Por. § 7, us. 6 — 8; § 16, us. 1 b.; § 17, us. 5; § 20 us. 9; § 1, us. 3.

[1]) Powszechnie przyjmują owę mogącą być wyznaczoną liczbę za określenie stosunku, korzystając z jednego z przytoczonych powyżéj trzech odcieni w jéj znaczeniu [np. *a*). Baltzer, *Die Elemente der Mathematik* (1868); *b*). Bertrand, *Traité d'arithmétique* (1867); *b*. i *c*). Serret, l. c.] — Określenie tu wprowadzone nie potrzebuje, zdaje się, szczegółowszego uzasadnienia; może jednak nie będzie zbytecznym zaznaczenie, że np. w gieometryi elementarnéj dowodzimy naprzód twierdzenia, że stosunek okręgu koła do jego średnicy jest stały, a późniéj dopiéro zajmujemy się wyznaczeniem liczby, wyrażonéj przez ten stosunek; podobnie np. mówimy, że stosunek obwodów dwu wielokątów podobnych jest równy stosunkowi ich boków odpowiednich, choć liczby, wyrażonéj przez te stosunki, nie wyznaczamy.

chunku zastępujemy takie stosunki przez stosunki dwu liczb mianowanych prostych, wyrażonych przy pomocy téj saméj jednostki. Możemy więc np. piérwszy z powyższych stosunków zastąpić przez stosunki 9 łokci do 2 łokci, albo 3 sążni do $\frac{2}{3}$ sążnia, a drugi stosunek przez stosunki 216 cali do 60 cali, albo 9 łokci do 2,5 łokcia, albo 3 sążni do $\frac{5}{6}$ sążnia.

3. Z powodu, że, aby wyznaczyć liczbę, wyrażoną przez jakikolwiek stosunek, należałoby piérwszą z liczb wchodzących do tego stosunku podzielić przez drugą, oznaczamy stosunek w ten sam sposób, co dzielenie dwu liczb przez siebie. A więc np. stosunek 12-u do 3-ch oznaczymy, pisząc albo $12:3$, albo (§ 17, us. 5) także $\frac{12}{3}$. Taksamo należałoby oznaczyć stosunek np. 12-u metrów do 3-ch metrów. Z uwagi jednak, że nam tu idzie tylko o liczbę oderwaną, mającą być wypadkiem dzielenia, która jest niezależną od tego, czy dzielna i dzielnik są wyrażone przy pomocy pewnéj (téj saméj w obu liczbach, us. 2) jednostki, czy przy pomocy innéj jednostki, czytéż obie te liczby są oderwane, w piśmiennym przedstawianiu stosunku nie zaznaczamy miana owéj jednostki. Dlatego, choć mówimy: stosunek 12-u metrów do 3-ch metrów, to jednak napiszemy $12:3$, albo $\frac{12}{3}$ a w dalszym rachunku postępujemy z tymi liczbami tak, jakgdyby one były oderwane.

Piérwszą z liczb, wchodzących do stosunku, nazywamy p o p r z e d n i k i e m, drugą z nich n a s t ę p n i k i e m, a liczbę, którą stosunek przedstawia, nazywamy w y k ł a d n i k i e m s t o s u n k u. Tak np. w stosunku

$$12:3, \text{ czyli } \frac{12}{3}$$

liczba 12 jest poprzednikiem, liczba 3 następnikiem, a liczba 4, którą wyraża ten stosunek, jest wykładnikiem stosunku.

Poprzednik i następnik stosunku nazywają się w y r a z a m i s t o s u n k u.

4. Gdy mamy dane dwie liczby, np. 10 i 14, to między nimi istniéć może albo stosunek $10:14$, albo stosunek $14:10$. Wykładniki tych stosunków, t. j. liczby $\frac{5}{7}$ i $\frac{7}{5}$, są każda odwrotnością drugiéj (§ 19, us. 10), czyli : *z dwu stosunków, które między dwiema liczbami istniéć mogą, jeden jest odwrotnym względem drugiego.* Oczywiście, że iloczyn liczb, które one wyrażają, jest jednością.

5. Ponieważ, według określenia stosunku, poprzednik odpowia-

da w dzieleniu dzielnéj, następnik dzielnikowi, a wykładnik stosunku ilorazowi, przeto

poprzednik : *następnik* = *wykładnikowi stosunku.*

A z tego, według określenia dzielenia (§ 7, us. 3; § 20, us. 1), wypada, że

poprzednik = *następnikowi* × *wykładnik stosunku,*

skąd nawzajem (§ 7, us. 5)

następnik = *poprzednikowi* : *wykładnik stosunku.*

6. Z tego, że poprzednik odpowiada dzielnéj, następnik dzielnikowi, a wykładnik stosunku ilorazowi, wypada jeszcze (§ 7, us. 15; § 17, us. 7; § 20, us. 6, 7):

a. *Jeżeli poprzednik stosunku pomnożymy lub podzielimy przez pewną liczbę, to wskutek tego wykładnik stosunku zostanie przez tęż liczbę odpowiednio pomnożony lub podzielony.*

b. *Jeżeli następnik stosunku pomnożymy lub podzielimy przez pewną liczbę, to wskutek tego wykładnik stosunku zostanie przez tęż liczbę odpowiednio podzielony lub pomnożony.*

c. *Jeżeli oba wyrazy stosunku albo jednocześnie pomnożymy, albo jednocześnie podzielimy przez pewną tę samę liczbę, to wykładnik stosunku się nie zmieni.*

7. Gdy mamy stosunek dwu liczb, to nam idzie (us. 1) o liczbę (oderwaną), którą ten stosunek wyraża, t. j. o wykładnik stosunku. Wskutek tego ze stosunków, mających ten sam wykładnik, jako wyrażających tę samę liczbę, każdy może być wzięty zamiast innego. Wszystko więc jest jedno, czy pewną liczbę wyrażamy zapomocą stosunku 4 : 8, czy 7 : 14 czyteż 0,5 : 1, gdyż te stosunki, jako mające ten sam wykładnik $\left(\frac{1}{2}\right)$, przedstawiają tę samę liczbę; one więc wszystkie są jednoznaczne. Dlatego stosunki, mające ten sam wykładnik, nazywamy s t o s u n k a m i r ó w n y m i.

8. Możemy więc ostatnią z własności, wypowiedzianych w ustępie 6-ym, tak wysłowić: stosunek, otrzymany z danego, czyto wskutek jednoczesnego pomnożenia obu jego wyrazów przez tę samę liczbę, czyteż wskutek jednoczesnego podzielenia obu jego wyrazów przez tę samę liczbę, jest równy danemu stosunkowi i może go zastąpić. Gdy więc mamy np. stosunek 0,5 : 1, to możemy go zastąpić stosunkiem liczb całkowitych, mnożąc oba jego wyrazy przez 10, t. j. stosunkiem 5 : 10, a dzieląc tu oba wyrazy przez 5, otrzymany stosunek zastąpimy prostszym 1 : 2. Podobnie możemy stosunek $\frac{7}{6} : \frac{3}{8}$, mnożąc oba jego wyrazy przez 24, zastąpić stosunkiem liczb całkowitych 28 : 9.

9. Jeżeli mamy dwa lub więcéj stosunków równych, np.

$$4:8;\quad 7:14,\quad 0{,}5:1;\quad 5:10,$$

a więc mających ten sam wykładnik $\left(\frac{1}{2}\right)$, to (us. 5)

$$4=8\times\frac{1}{2},\quad 7=14\times\frac{1}{2},\quad 0{,}5=1\times\frac{1}{2},\quad 5=10\times\frac{1}{2}.$$

Wskutek tego, suma $4+7+0{,}5+5$ przedstawia tęż samę liczbę, co suma $8\times\frac{1}{2}+14\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{2}+10\times\frac{1}{2}$, a więc

$$4+7+0{,}5+5=8\times\frac{1}{2}+14\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{2}+10\times\frac{1}{2},$$

albo (§ 6, us. 14; § 19, us. 6)

$$4+7+0{,}5+5=(8+14+1+10)\times\frac{1}{2}$$

a więc stosunek liczby $4+7+0{,}5+5$ do liczby $8+14+1+10$ wyraża liczbę $\frac{1}{2}$ (us. 1, 7), t. j. tę samę, co stosunki dane, jest im równy, tak iż możemy napisać

$$(4+7+0{,}5+5):(8+14+1+10)=4:8=7:14=0{,}5:1=5:10.$$

Możemy więc powiedzićć: *gdy mamy dwa lub więcéj stosunków równych, to stosunek sumy ich poprzedników do sumy ich następników jest równy każdemu z danych stosunków.*

Podobnie, gdy mamy dane dwa stosunki równe, np.

$$7:14,\quad 5:10,$$

to

$$7=14\times\frac{1}{2},\quad 5=10\times\frac{1}{2},$$

różnice $7-5$ i $14\frac{1}{2}-10\times\frac{1}{2}=(14-10)\times\frac{1}{2}$ przedstawiają tęż samę liczbę, a stosunek liczby $7-5$ do liczby $14-10$ wyraża tęż liczbę, co stosunki dane, jest im równy, a więc

$$(7-5):(14-10)=7:14=5:10,$$

t. j. *gdy mamy dwa równe stosunki, to stosunek różnicy ich poprzedników do różnicy ich następników jest równy każdemu z danych stosunków* [1]).

---

§ 28. PROPORCYJE.

1. Gdy wyraźnie zaznaczymy, że pewne dwa stosunki są równe, to mówimy, że mamy proporcyją. A więc

Proporcyja jestto zaznaczona równość dwu stosunków.

[1]) Por. § 17, us. 11.

Tak np. stosunki 5 : 10 i 7 : 14 są równe; gdy to zaznaczymy, t. j. gdy napiszemy [1])

$$5 : 10 = 7 : 14,$$

to tę równość dwu stosunków nazywamy proporcyją [2]).

W proporcyi mamy (§ 27, us. 3) cztéry wyrazy; poprzednik piérwszego stosunku i poprzednik drugiego tworzą dwa poprzedniki proporcyi; następnik piérwszego i następnik drugiego są dwoma następnikami proporcyi; poprzednik piérwszego stosunku i następnik drugiego, jako znajdujące się z kraju lewego i z kraju prawego, nazywają się wyrazami skrajnymi proporcyi; następnik piérwszego i poprzednik drugiego stosunku nazywają się wyrazami średnimi proporcyi. Ponieważ stosunki są równe, więc (§ 27, us. 7) liczba, która jest wykładnikiem jednego stosunku, jest także wykładnikiem drugiego; nazywamy ją wykładnikiem stosunków proporcyi.

2. Jeżeli mamy cztéry liczby i wiemy, że stosunek dwu z nich jest równy stosunkowi dwu pozostałych, to mówimy, że one tworzą proporcyją, albo że one są proporcyjonalne, wystawiając sobie przytym, że rozważamy je tak uporządkowane, iżby stosunek piérwszéj do drugiéj z nich był równy stosunkowi trzeciéj do czwartéj. Tak np. jeżeli, mając liczby: 5, 10, 14, 7, powiemy o nich, że to są cztéry liczby proporcyjonalne, to jednocześnie wystawiamy sobie, że one następują po sobie np. w porządku 5, 10, 7, 14.

3. Proporcyje np.

$$5 : 10 = 7 : 14, \quad 7 : 5 = 14 : 10$$

czytamy: «stosunek 5-u do 10-u równa się stosunkowi 7-u do 14-u», «stosunek 7-u do 5-u równa się stosunkowi 14-u do 10-u».

W drugiéj proporcyi wykładnik stosunków jest większy od jedności, gdyż w tych stosunkach poprzednik jest większy od swego następ-

---

[1]) Używają także, jako znaku wiążącego dwa stosunki, dwu dwukropków; więc:

$$5 : 10 :: 7 : 14.$$

[2]) Niektórzy taką proporcyją nazywają «proporcyją gieometryczną», a stosunki do niej wchodzące «stosunkami gieometrycznymi», rozważając t. z. stosunki i proporcyje «arytmetyczne», t. j. różnice dwu liczb i równość zachodzącą między dwiema takimi różnicami. Ściśle rzecz biorąc, rozwiązywanie zadań arytmetycznych (i, wogóle, żadnych zadań) do takich «proporcyj» nie doprowadza. Dlatego cała ich teoryja (dość kłopotliwa przy starannym wykładzie ze względu na potrzebę unikania różnic ujemnych), jako do niczego nie prowadząca, powinna być z tych programów szkolnych, w których się jeszcze tuła, stanowczo usunięta. [Powstała ona prawdopodobnie pod wpływem chęci wytworzenia już w nauce o proporcyjach czegoś, coby odpowiadało dwojakim postępom: arytmetycznym i gieometrycznym, których dawniéj, przed należytym uwzględnieniem w wychowaniu średnim ogólnym systematycznego wykładu algiebry elementarnéj, uczono przy arytmetyce.]

[Badaniu stosunków i proporcyj, więcéj szczegółowemu, niż teraz się je przeprowadza, poświęca Euklides w *Elementach* księgę V (zob. *Euklidesa początków jeometryi xiąg ośmioro, to jest sześć piérwszych, jedenasta i dwunasta*, tłomaczenie Józefa Czecha, Wilno, 1-sze wyd. r. 1807, 2-ie 1817), oraz częściowo ks. VII i IX].

nika. Możemy więc tu powiedziéć, że liczba, któréj wyrażeniem jest każdy z tych stosunków, przedstawia zarazem, ile razy jego poprzednik jest większy od następnika (§ 7, us. 8; § 16, us. 2). Dlatego drugą z danych proporcyj możemy przeczytać: «tyle razy 7 jest większe od 5-u, ile razy 14 jest większe od 10-u».

Piérwszéj zaś z danych proporcyj nie możemy czytać: «tyle razy 5 jest mniejsze od 10-u, ile razy 7 jest mniejsze od 14-u»; wtedy bowiém mielibyśmy na myśli liczbę 2, gdy tymczasem wykładnikiem stosunków téj proporcyi jest liczba $\frac{1}{2}$ i jąto właśnie wyrażają oba stosunki proporcyi; ją więc przy czytaniu miéć mamy na uwadze [1].

4. Widzieliśmy (§ 27, us. 6 c.), że wskutek jednoczesnego pomnożenia poprzednika i następnika stosunku przez tę samę liczbę wykładnik jego nie zmienia się. Gdy więc mamy np. proporcyją

$$7 : 5 = 14 : 10,$$

to jeżeli oba wyrazy piérwszego stosunku pomnożymy przez następnik drugiego, a oba wyrazy drugiego stosunku pomnożymy przez następnik piérwszego, to te stosunki:

$$(7 \times 10) : (5 \times 10) \quad \text{i} \quad (14 \times 5) : (10 \times 5)$$

mają też same wykładniki, co stosunki danéj proporcyi, t. j. wykładniki wypisanych stosunków są tąż samą liczbą. Następniki zaś tych stosunków, 5×10 i 10×5, są iloczynami tych samych czynników, wypisanych tylko w innym porządku; że zaś iloczyn nie zależy od porządku czynników (§ 6, us. 9; § 19, us. 5), przeto następniki tych stosunków są tą samą liczbą. Ponieważ następniki tych dwu stosunków są tą samą liczbą, ich wykładniki są tą samą liczbą, a poprzednik stosunku równa się następnikowi pomnożonemu przez wykładnik (§ 27, us. 5), przeto i poprzedniki tych stosunków, t. j. iloczyny

$$7 \times 10 \quad \text{i} \quad 14 \times 5,$$

są tą samą liczbą; a więc

$$7 \times 10 = 14 \times 5.$$

Czynniki piérwszego z wypisanych tu równych sobie iloczynów, 7 i 10, są wyrazami skrajnymi danéj proporcyi, a czynniki drugiego iloczynu, 14 i 5, są jéj wyrazami średnimi; a więc:

Iloczyn wyrazów skrajnych proporcyi jest równy iloczynowi jéj wyrazów średnich.

---

[1]) Dodać jeszcze można, że, aby się dowiedziéć, ile razy 5 mniejsze od 10, należałoby 10 : 5, gdy tymczasem mamy tu 5 : 10.

[Pod wpływem właśnie poczucia tego, że piérwszéj z danych proporcyj nie można czytać ani: «tyle razy 5 jest mniejsze od 10-u, ile razy 7 mniejsze od 14-u», ani: «tyle razy 5 jest większe od 10-u, ile razy 7 jest większe od 14-u» powstało rospowszechnione, że tak powiém, nijakie wyrażanie się: «tak się ma 5 do 10-u, jak 7 do 14-u», które niéma żadnéj racyi bytu.]

Ta własność proporcyi nazywa się **główną własnością** proporcyi, gdyż przy pomocy téj własności i odwrotnéj własności iloczynów równych (us. 5) można wyprowadzić wiele innych własności proporcyj.

5. Widzieliśmy, że proporcyja prowadzi za sobą równość dwu iloczynów, z których w każdym są dwa czynniki. Odwrotnie: *Z dwu równych dwuczynnikowych iloczynów można utworzyć proporcyją, biorąc czynniki jednego iloczynu za wyrazy skrajne, a czynniki drugiego iloczynu za wyrazy średnie.* Jakoż, mając np.

$$3 \times 8 = 4 \times 6,$$

zważmy naprzód, że gdy oba te iloczyny, przedstawiające tę samę liczbę, podzielimy przez pewną tę samę liczbę, mianowicie przez iloczyn jednego czynnika piérwszego iloczynu i jednego czynnika drugiego iloczynu, np. przez liczbę 3×6, to jako ilorazy otrzymamy również tę samę liczbę. Zatym

$$(3 \times 8) : (3 \times 6) = (4 \times 6) : (3 \times 6).$$

Możemy tu wyrażenia $(3 \times 8) : (3 \times 6)$ i $(4 \times 6) : (3 \times 6)$ uważać jako stosunki, które dlatego są połączone znakiem równości, że wyrażają tę samę liczbę (jednakowy iloraz tych dzieleń), t. j. mają ten sam wykładnik. Wykładnik zaś ich się nie zmieni, gdy oba wyrazy piérwszego stosunku podzielimy przez 3, a oba wyrazy drugiego przez 6 (§ 27, us. 6 c.). Stosunki zatym $8:6$ i $4:3$ mają także ten sam wykładnik, są przeto równe, t. j.

$$8 : 6 = 4 : 3,$$

a w téj proporcyi wyrazy skrajne, 8 i 3, są czynnikami jednego z danych iloczynów, a wyrazy średnie, 6 i 4, są czynnikami drugiego.

Gdybyśmy mieli np. $8 \times 7 \times 9 = 6 \times 3 \times 2 \times 14$, a chcieli utworzyć proporcyją, to *) moglibyśmy np. iloczyn 7×9 uważać jako przedstawienie pewnéj liczby, i podobnie np. iloczyny 6×3 i 2×14, tak iż, przedstawiając daną równość jako

$$8 \times (7 \times 9) = (6 \times 3) \times (2 \times 14),$$

z tych dwu równych dwuczynnikowych iloczynów możemy utworzyć proporcyją

$$8 : (6 \times 3) = (2 \times 14) : (7 \times 9).$$

Podobnie np. z równości $22 = 2 \times 11$ utworzymy $22 : 2 = 11 : 1$

6. Jeżeli w proporcyi jeden wyraz jest niewiadomy, to, opiérając się na głównéj własności, łatwo możemy go wyznaczyć. Np. jeżeli mamy proporcyją

$$8 : x = 4 : 3,$$

*) T. j. na mocy tego, że w iloczynie kilku czynników możemy dowolnie wybrane czynniki zastępować przez ich iloczyny (§ 6, us. 10; § 19, us. 6).

gdzie x oznacza liczbę niewiadomą, to według główněj własności

$$x \times 4 = 8 \times 3;$$

jeżeli zaś liczba x pomnożona przez 4, czyli, jeżeli 4 liczby $x = 8 \times 3$, to liczba x jest cztéry razy mniejszą, (§ 17, us. 5)

$$x = \frac{8 \times 3}{4} = 6,$$

t. j. *niewiadomy wyraz średni proporcyi równa się iloczynowi skrajnych, podzielonemu przez drugi średni.* Podobnie

$$8 : 6 = 4 : x; \quad x \times 8 = 6 \times 4; \quad x = \frac{6 \times 4}{8},$$

t. j. *niewiadomy wyraz skrajny proporcyi równa się iloczynowi średnich, podzielonemu przez drugi skrajny.*

7. Z tego wypada, że wogóle trzy wyrazy proporcyi, zajmujące oznaczone w niéj miejsca, wyznaczają czwarty jéj wyraz, czyli (us. 2), że *do trzech liczb, zajmujących w proporcyi oznaczone miejsca można znaléść czwartą liczbę proporcyjonalną.*

Gdy mamy dane trzy liczby, a nie wiemy, jakie one miejsca w proporcyi zająć mogą, to zadanie nie jest jeszcze dostatecznie oznaczone, gdyż mogą być trzy odpowiedzi. Np. gdy mamy liczby 8, 4, 2, to czwarta liczba, którab wraz z tymi trzema danymi tworzyła proporcyją, może być, zależnie od tego, jakie miejsca te trzy liczby dane zajmują w proporcyi, albo $\frac{8 \times 4}{2} = 16$, albo $\frac{8 \times 2}{4} = 4$, albotéż $\frac{4 \times 2}{8} = 1$, i rzeczywiście odpowiednio albo np. $2 : 4 = 8 : 16$, albo np. $4 : 2 = 8 : 4$, albotéż np. $8 : 4 = 2 : 1$.

8. Gdy mamy proporcyją, np.

$$8 : 6 = 4 : 3,$$

to, według główněj własności,

$$8 \times 3 = 6 \times 4.$$

Z tych zaś dwu równych dwuczynnikowych iloczynów (us. 5) możemy utworzyć osiem proporcyj. Gdyż możemy czynniki iloczynu 8×3 wziąć albo za wyrazy skrajne, albo za wyrazy średnie, a wtedy czynniki iloczynu 6×4 będą odpowiednio albo wyrazami średnimi, albo wyrazami skrajnymi. W każdym zaś z tych dwu przypadków możemy w proporcyi z czynników iloczynu 8×3 albo naprzód napisać czynnik 8, albo czynnik 3. A w każdym z tych cztérech przypadków możemy z czynników iloczynu 6×4 naprzód napisać albo czynnik 8, albo czynnik 4. Będziemy więc mieli osiem proporcyj:

$$8 : 6 = 4 : 3; \quad 3 : 6 = 4 : 8; \quad 8 : 4 = 6 : 3; \quad 3 : 4 = 6 : 8;$$
$$6 : 8 = 3 : 4; \quad 4 : 8 = 3 : 6; \quad 6 : 3 = 8 : 4; \quad 4 : 3 = 8 : 6;$$

Porównywając te proporcyje z jedną którąkolwiek z nich, np. z piérwszą (która tu jest taka, jak dana), widzimy, że inne powstają z niéj albo wskutek przestawienia wyrazów średnich między sobą, albo wskutek przestwienia średnich ze skrajnymi (czyli odwrócenia obu stosunków), albo wskutek przestawienia skrajnych między sobą, albo też wskutek jednoczesnego wykonania dwu z powyższych zmian.

Okażemy, że kolejno stosując do jakiéjkolwiek proporcyi piérwsze dwa z powyższych przestawień wyrazów, t. j. stosując kolejno to, iż

a. *W proporcyi można przestawić wyrazy średnie.*

b. *W proporcyi można odwrócić oba stosunki.*

wyprowadzimy *) z niéj wszystkie powyższe osiem proporcyj. Jakoż, niech będzie:

$8:6=4:3$; z niéj według a. $8:4=6:3$; z niéj według b.
$4:8=3:6$; „ „ $4:3=8:6$; „ „
$3:4=6:8$; „ „ $3:6=4:8$; „ „
$6:3=8:4$; „ „ $6:8=3:4$.

Do wszystkich tych proporcyj wchodzą też same liczby; z każdéj z nich możemy wyprowadzić wszystkie pozostałe; dlatego uważamy je jako jednoznaczne.

9. Gdy mamy cztéry liczby, to rozmaicie je ustawiając, możemy każdą z nich postawić na miejscu piérwszym. Obok każdéj z tych 4-ch liczb, zajmującéj miejsce piérwsze, możemy umieścić każdą z 3-ch każdorazowo pozostałych liczb; otrzymamy w ten sposób 12 par liczb różniących się albo liczbami albo porządkiem ich następstwa. Obok każdych dwu z tych 12-u par możemy postawić jednę z 2-u pozostałych liczb, a do każdéj z tych 24-ch trójek liczb dołączyć czwartą pozostałą. Widzimy więc, że cztéry dane liczby możemy 24-ema sposobami ustawić. W ośmiu tylko z tych 24 ustawień dane cztéry liczby tworzyć mogą proporcyją (us. 2). (Por. us. 7).

10. Wiemy (§ 27, us. 6 c.), że gdy oba wyrazy stosunku pomnożymy lub podzielimy przez tę samę liczbę, to wykładnik stosunku się nie zmieni. Gdy więc mamy np. proporcyją

$$8:6=4:3,$$

to możemy powiedzieć **), że *możemy przez tę samę liczbę jednocześnie pomnożyć lub jednocześnie podzielić albo oba wyrazy piérwszego stosunku, albo oba wyrazy drugiego stosunku proporcyi.*

Jeżeli przestawimy w téj proporcyi wyrazy średnie i do proporcyi tak powstałéj, t. j. do proporcyi $8:4=6:3$, zastosujemy powyższą własność, to miéć będziemy np.

---

*) Rozumie się, że to samoby było, gdybyśmy stosowali kolejno drugie i trzecie z wyliczonych przestawień wyrazów proporcyj.

**) Można tu powtórzyć to, co przy podobnéj sposobności jest powiedziane w us. 4-ym i 5-ym.

$(8 \times 5) : (4 \times 5) = 6 : 3$; $(8 : 5) : (4 : 5) = 6 : 3$;
$8 : 4 = (6 \times 5) : (3 \times 5)$; $8 : 4 = (6 : 5) : (3 : 5)$.

Gdy znowu w tych proporcyjach przestawimy wyrazy średnie i proporcyje

$(8 \times 5) : 6 = (4 \times 5) : 3$; $(8 : 5) : 6 = (4 : 5) : 3$;
$8 : (6 \times 5) = 4 : (3 \times 5)$; $8 : (6 : 5) = 4 : (3 : 5)$

porównamy z pierwotnie wypisaną proporcyją, t. j. z proporcyją $8 : 6 = 4 : 3$, to dostrzeżemy, że *możemy przez tę samę liczbę jednocześnie pomnożyć lub jednocześnie podzielić albo oba poprzedniki albo oba następniki proporcyi* *).

Zestawiając z sobą te dwie własności, t. j. zaznaczając dwa wyrazy proporcyi, które możemy albo jednocześnie mnożyć albo jednocześnie dzielić przez tę samę liczbę, znajdziemy, iż ogólnie:

Możemy przez te samę liczbę jednocześnie pomnożyć lub jednocześnie podzielić jeden z wyrazów skrajnych i jeden z wyrazów średnich proporcyi.

Z tych własności korzystamy np. wtedy, kiedy chcemy ułamkow wyrazy proporcyi zastąpić przez całkowite, lub liczby całkowite, wchodzące do proporcyi, zastąpić, jeżeli można, przez mniejsze. Np. jeżeli mamy proporcyją $0{,}04 : 0{,}006 = 5 : x$, to, mnożąc oba wyrazy pierwszego stosunku przez 1000, mieć będziemy $40 : 6 = 5 : x$, a tu, dzieląc oba poprzedniki przez 5, dojdziemy do proporcyi $8 : 6 = 1 : x$; dzieląc jeszcze oba wyrazy pierwszego stosunku téj proporcyi przez 3, mamy $4 : 3 = 1 : x$. (Tak zwykle postępujemy, gdy mamy wyznaczyć niewiadomy wyraz proporcyi, w któréj można uskutecznić podobne uproszczenia.) Ostatniéj proporcyi już uprościć nie można; wyznaczymy więc z niéj $x = 0{,}75$. Te uproszczenia proporcyj są też same, które uskutecznialibyśmy w wyrażeniu $x = \frac{0{,}006 \times 5}{0{,}04}$, gdybyśmy nie odrazu wykonywali wskazane tu działania, lecz uprzednio piérwszy z czynników licznika i mianownik pomnożyli przez 100, następnie drugi czynnik licznika i mianownik podzielili przez 5 i nakoniec piérwszy czynnik licznika i mianownik podzielili przez 2. (Por. § 20, us. 5; § 19, us. 4.)

11. Oczywiście, iż *jeżeli jeden stosunek jednéj proporcyi jest taki sam, jak jeden ze stosunków drugiéj proporcyi, to z pozostałych stosunków tych proporcyj można utworzyć proporcyją,* gdyż one mają tę samę liczbę jako wykładnik. Tak np. jeżeli mamy dane $2 : 5 = 10 : 25$ i $6 : 15 = 2 : 5$, to także $10 : 25 = 6 : 15$.

---

*) Wskutek pomnożenia tych wyrazów wykładnik stosunku będzie odpowiednio albo pomnożony albo podzielony, a wskutek podzielenia odpowiednio albo podzielony albo pomnożony przez tęż samę liczbę (§ 27, us. 5).

Jeżeli dwie proporcyje mają odpowiednie poprzedniki równe, np.

$$2:10=5:25 \quad \text{i} \quad 2:6=5:15,$$

to, przestawiając wyrazy średnie, otrzymamy

$$2:5=10:25 \quad \text{i} \quad 2:5=6:15, \text{ skąd}$$
$$10:25=6:15, \text{ albo } 10:6=25:15.$$

Podobnie, gdyby następniki były równe. A więc:

Jeżeli dwie proporcyje mają też same odpowiednie poprzedniki, to ich następniki tworzą proporcyją; jeżeli dwie proporcyje mają też same odpowiednie następniki, to ich poprzedniki tworzą proporcyją.

12. Gdy do dwu równych stosunków, tworzących proporcyją, np.,

$$8:4=6:3,$$

zastosujemy to, cośmy wyprowadzili w us. 9-ym § 27-go, to

$$(8+6):(4+3)=8:4 \qquad (8-6):(4-3)=8:4$$
$$=6:3; \qquad\qquad =6:3, \text{ t. j.}$$

Stosunek sumy albo różnicy poprzedników proporcyi odpowiednio do sumy albo różnicy jéj następników jest równy stosunkowi któregokolwiek poprzednika proporcyi do swego następnika.

Jeżeli w danéj proporcyi przestawimy wyrazy średnie i do proporcyi tak powstałéj, t. j. do proporcyi $8:6=4:3$, zastosujemy powyższą własność, to mieć będziemy

$$(8+4):(6+3)=8:6 \qquad (8-4):(6-3)=8:6$$
$$=4:3; \qquad\qquad =4:3.$$

A gdy te proporcyje odniesiemy do pierwotnie danéj proporcyi, t. j. do proporcyi $8:6=4:3$, to dostrzeżemy, że

Stosunek sumy albo różnicy wyrazów piérwszego stosunku proporcyi odpowiednio do sumy albo różnicy wyrazów drugiego jéj stosunku jest równy stosunkowi odpowiednich poprzedników proporcyi, lub stosunkowi odpowiednich jéj następników.

13. Z tych własności, przy pomocy piérwszéj z własności ustępu 11-go, wypada, że, gdy mamy proporcyją, np. $8:4=6:3$, to

$$(8+6):(4+3)=(8-6):(4-3) \quad \text{i} \quad (8+4):(6+3)=(8-4):(6-3),$$

albo, po przestawieniu wyrazów średnich

$$(8+6):(8-6)=(4+3):(4-3) \quad \text{i} \quad (8+4):(8-4)=(6+3):(6-3),$$

t. j. *stosunek sumy poprzedników proporcyi do ich różnicy jest równy stosunkowi sumy jéj następników do ich różnicy; stosunek sumy wyrazów piérwszego stosunku proporcyi do ich różnicy jest równy stosunkowi sumy wyrazów jéj drugiego stosunku do ich różnicy.*

14. Gdy dwie proporcyje mają ten sam wykładnik, np.

$$18:9=30:15 \quad \text{i} \quad 8:4=6:3,$$

to wszystkie cztéry stosunki, do tych proporcyj wchodzące, jako wyrażające tę samę liczbę, są równe sobie. A zatym (us. 12, lub § 27, us. 9)

gdy $18 : 9 = 8 : 4$, to $(18 + 8) : (9 + 4) = 8 : 4$ i
$(18 - 8) : (9 - 4) = 8 : 4$;
gdy $30 : 15 = 6 : 3$, to $(30 + 6) : (15 + 3) = 6 : 3$ i
$(30 - 6) : (15 - 3) = 6 : 3$.

Że zaś $8 : 4 = 6 : 3$, przeto także

$$(18 + 8) : (9 + 4) = (30 + 6) : (15 + 3) \quad \text{i}$$
$$(18 - 8) : (9 - 4) = (30 - 6) : (15 - 3),$$

t. j. gdy odpowiednie wyrazy dwu proporcyj, mających ten sam wykładnik, albo dodamy do siebie albo od siebie odejmiemy, to cztéry tak otrzymane liczby tworzą proporcyją (mającą również ten sam wykładnik, co poprzednie). Zwykle mówimy krócéj: *dwie proporcyje, mające ten sam wykładnik, można odpowiednimi wyrazami dodać do siebie albo je od siebie odjąć.* Również: *ilekolwiek proporcyi, mających ten sam wykładnik, możemy odpowiednimi wyrazami dodać do siebie.*

15. Weźmy dwie jakiekolwiek *) proporcyje, np.

$$5 : 10 = 7 : 14 \quad \text{i} \quad 8 : 6 = 4 : 3.$$

Według głównéj własności,

$$5 \times 14 = 10 \times 7 \quad \text{i} \quad 8 \times 3 = 6 \times 4.$$

Iloczyny 5×14 i 10×7, jako równe, przedstawiają tę samę liczbę, iloczyny 8×3 i 6×4 również przedstawiają tę samę liczbę; a więc i iloczyny $5 \times 14 \times 8 \times 3$ i $10 \times 7 \times 6 \times 4$ przedstawią tę samę liczbę, tak iż

$$5 \times 14 \times 8 \times 3 = 10 \times 7 \times 6 \times 4.$$

Ponieważ w iloczynie kilku czynników możemy dowolnie wybrane czynniki zastępować przez ich iloczyny (§ 6, us. 10; § 19, us. 6), przeto możemy napisać

$$(3 \times 8) \times (14 \times 5) = (10 \times 6) \times (7 \times 4)$$

Z tych zaś równych iloczynów dwuczynnikowych tworząc proporcyją (us. 5)

$$(3 \times 8) : (10 \times 6) = (7 \times 4) : (14 \times 5)$$

i porównywając ją z proporcyjami danymi, widzimy, że gdy odpowiednie wyrazy dwu proporcyj przez siebie pomnożymy, to 4 tak otrzymane liczby tworzą proporcyją. Zwykle krócéj mówimy: *możemy dwie proporcyje odpowiednimi wyrazami pomnożyć przez siebie.* Wykładnik téj nowéj proporcyi jest $\frac{3 \times 8}{10 \times 6} = \frac{2}{5}$; liczba zaś ta jest iloczynem (§ 19, us. 3) liczb $\frac{3}{10}$ i $\frac{4}{3}$, t. j. wykładników dwu danych proporcyj.

Gdybyśmy mieli trzecią proporcyją, np. $11 : 12 = 22 : 24$, to moglibyśmy własność powyższą zastosować do téj proporcyi i proporcyi, otrzymanéj już z pomnożenia przez siebie odpowiednimi wyrazami dwu danych proporcyj.—Toż samo, gdyby było więcéj proporcyj. A więc:

*) T. j. mogące mieć różne wykładniki.

Dwie lub więcéj proporcyj można odpowiednimi wyrazami przez siebie pomnożyć. Wykładnik proporcyi tak powstałéj jest iloczynem wykładników proporcyj danych.

16. Gdyby dane proporcyje były tąż samą jedną proporcyją, to wtedy, według powyższego, liczby, będące jednakowymi potęgami (§ 6, us. 39) wyrazów proporcyi, tworzą proporcyją, czyli, jak się często mówi, *można wszystkie wyrazy proporcyi podnieść do téj saméj potęgi.*

17. Weźmy jeszcze dwie jakiekolwiek proporcyje, np.

$$5:10=7:14 \quad \text{i} \quad 8:6=4:3.$$

Według głównej własności,

$$5\times 14=10\times 7 \quad \text{i} \quad 8\times 3=6\times 4.$$

Gdy iloczyny 5×14 i 10×7, przedstawiające tę samę liczbę, podzielimy odpowiednio przez iloczyny 8×3 i 6×4, przedstawiające również tę samę liczbę, to ilorazy $(5\times 14):(8\times 3)$ i $(10\times 7):(6\times 4)$ przedstawią również tę samę liczbę, co wyrazimy pisząc (§ 17, us. 5; § 27, us. 3)

$$\frac{5\times 14}{8\times 3}=\frac{10\times 7}{6\times 4}.$$

Pierwszą z tych liczb możemy napisać $\frac{5}{8}\times\frac{14}{3}$ (§ 19, us. 3), a drugą: $\frac{10}{6}\times\frac{7}{4}$; mamy więc

$$\frac{5}{8}\times\frac{14}{3}=\frac{10}{6}\times\frac{7}{4}.$$

Z tych zaś dwu równych dwuczynnikowych iloczynów tworząc proporcyją

$$\frac{5}{8}:\frac{10}{6}=\frac{7}{4}:\frac{14}{3},$$

którą możemy także tak pisać:

$$(5:8):(10:6)=(7:4):(14:3),$$

i porównywając ją z proporcyjami danymi, widzimy, że gdy odpowiednie wyrazy dwu proporcyj przez siebie podzielimy, to cztéry tak otrzymane liczby tworzą proporcyją. Zwykle krócéj mówimy:

Można dwie proporcyje odpowiednimi wyrazami przez siebie podzielić.

Wykładnik otrzymanéj proporcyi $\frac{3}{8}$ jest wypadkiem dzielenia $\frac{5}{8}:\frac{10}{6}$; lecz (§ 20, us. 4)

$$\frac{5}{8}:\frac{10}{6}=\frac{5\times 6}{8\times 10}=\frac{5\times 6}{10\times 8}=\frac{5}{10}:\frac{8}{6}=\frac{1}{2}:\frac{4}{3};$$

a więc wykładnik proporcyi otrzymanéj jest ilorazem wykładników danych proporcyj.

18. Jeżeli w proporcyi czyto oba wyrazy skrajne, czyteż oba wyrazy średnie są tą samą liczbą, np.

$$2:6=6:18, \qquad 15:3=75:15,$$

to ta liczba nazywa się średnią gieometryczną dwu pozostałych liczb; jest więc 6 średnią gieometryczną liczb 2 i 18, a 15 średnią gieometryczną liczb 3 i 75.

Proporcyją, któréj wyrazy średnie są tą samą liczbą, nazywają proporcyją ciągłą. Piérwsza więc z wypisanych dwu proporcyj jest proporcyją ciągłą.

Z tych proporcyj, według głównéj własności, mamy

$$6\times 6=2\times 8, \qquad 15\times 15=3\times 75.$$

Jeżeli w iloczynie dwu czynników oba te czynniki są tą samą liczbą, to taki iloczyn nazywamy kwadratem liczby owéj; jest więc 6×6 kwadratem liczby 6, a 15×15 kwadratem liczby 15. Takie iloczyny zwykle tak piszemy: liczbę piszemy raz i przy niéj z prawéj strony u góry piszemy mniejszą cyfrę 2. Zamiast więc 6×6 możemy napisać 6^2, a zamiast 15×15 napisać 15^2. To więc, cośmy powyżéj napisali, możemy tak przedstawić:

$$6^2=2\times 18, \qquad 15^2=3\times 75$$

i powiemy:

Kwadrat średniéj gieometrycznéj dwu liczb jest równy iloczynowi tych liczb.

W algiebrze będzie mowa o wynajdywaniu średniéj gieometrycznéj dwu jakichkolwiek liczb. W gieometryi ma ona ważne zastosowania.

19. Jeżeli za określenie średniéj gieometrycznéj dwu liczb przyjmiemy własność powyższą, t. j. przyjmiemy, że «średnia gieometryczna dwu liczb jestto liczba, któréj kwadrat równa się iloczynowi dwu danych liczb», to takie określenie będziemy mogli uogólnić, a mianowicie powiedzieć: *liczbę, którą biorąc zamiast każdéj z danych liczb, otrzymujemy ten sam iloczyn, co z pomnożenia liczb danych, nazywamy średnią gieometryczną liczb danych*, co odpowiada określeniu średniéj arytmetycznéj dwu lub więcéj liczb (§ 7, us. 25). Średnia więc gieometryczna pewnych n liczb jestto liczba, któréj n-ta potęga równa się iloczynowi liczb danych. Np. średnia gieometryczna cztérech liczb: 6, 30, 200 i 360 jest 60, bo $60^4=6.30.200.360$.

W algiebrze dowodzi się wogóle, że średnia gieometryczna kilku liczb, z których nie wszystkie są sobie równe, jest mniejsza od ich średniéj arytmetycznéj.

20. W gieometryi (zob. t. V seryi III «Bibl. mat. fiz.») występuje jeszcze średnia harmoniczna dwu liczb. Jako jéj określenie możemy przyjąć albo własność: «stosunek różnicy większéj z danych liczb i średniéj harmonicznéj do owéj większéj z danych liczb jest równy stosunkowi różnicy średniéj harmonicznéj i mniejszéj z danych liczb do téj ostatniej», albotéż własność: «podwójna odwrotność średniéj harmonicznéj dwu danych liczb jest sumą odwrotności każdéj z danych liczb», t. j. jeżeli dane liczby są a i b i $a > b$, a średnia ich harmoniczna jest h, to

$$\frac{a-h}{a}=\frac{h-b}{b}, \text{ albo } \frac{2}{h}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}.$$

Przyjmując jednę którąkolwiek z tych własności za określenie średniéj harmonicznéj dwu liczb, łatwo z niéj można wyprowadzić drugą. [Na mocy czyto jednéj, czytéż drugiéj, $h=\frac{2ab}{a+b}$.]

W algiebrze dowodzi się, że średnia harmoniczna dwu liczb nierównych jest mniejsza od ich średniéj gieometrycznéj.

Np. dla liczb 10 i 40 średnia arytmetyczna jest 25, średnia gieometryczna 20, średnia harmoniczna 16; dla liczb 4 i 16 średnia arytmetyczna jest 10, średnia gieometryczna 8, średnia harmoniczna 6,4; dla liczb $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{8}$ średnia arytmetyczna jest $\frac{5}{16}=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}$, średnia gieometryczna $\frac{1}{4}$, średnia harmoniczna $\frac{1}{5}$.

(Zadania arytmetyczne. § 28.)

ROZDZIAŁ X.

REGUŁA TRZECH.

§ 29. O WIELKOŚCIACH PROPORCYJONALNYCH.

1. Wszystko [1]), co może ulegać powiększeniu lub zmniejszeniu, nazywamy wielkością.

Mierzyć wielkość jakąś jestto poszukiwać, ile razy w niéj się mieści pewna dowolnie wybrana wielkość, z tamtą jednorodna, a dobrze znana, którą przyjmujemy za jednostkę.

Wypadek takiego mierzenia wielkości przedstawia, jak wiemy (§ 1, us. 1—4), liczbę.

2. Jeżeli dwie wielkości zmieniają się jednocześnie w ten sposób, że stosunek dwu jakichkolwiek wartości jednéj z tych wielkości jest równy stosunkowi dwu wartości odpowiadających wielkości pozostałéj, to mówimy, że takie dwie wielkości są względem siebie proporcyjonalne, albo że one zmieniają się w tymże samym stosunku.

Tak np. zapłata robotnika jest proporcyjonalna względem czasu pracy; droga przebieżona przez ciało, poruszające się ze stałą prędkością, jest proporcyjonalna względem czasu, w ciągu którego ten ruch się odbywał.

Tak w tych przykładach, jak i w innych, któreby można przytoczyć, przyjmujemy proporcyjonalność wielkości uważanych względem siebie jako rzecz znaną lub umówioną. Okazanie, że owe wielkości są względem siebie proporcyjonalne, nie należy do założeń arytmetyki; wchodzi ono w zakres tych nauk, w których owe wielkości są badane.

3. Można jednak często przekonać się o proporcyjonalności pewnych dwu wielkości względem siebie zapomocą własności, którą tu przedstawimy.

Niech będą dwie wielkości A i B (jednorodne lub niejednorodne), które przyjmujemy jako proporcyjonalne względem siebie. Jakiekolwiek dwa stany, czyli dwie wartości piérwszéj wielkości, t. j. wielko-

[1]) Ten § przedstawia w znacznéj części tłomaczenie odpowiednich ustępów z arytmetyki J. A. Serret'go (powyżéj przytoczonéj).

ści A, nazwijmy A_1 i A_2, a wartości im odpowiadające drugiéj wielkości, t. j. wielkości B, nazwijmy odpowiednio B_1 i B_2. Ponieważ przyjęliśmy, że te wielkości A i B są względem siebie proporcyjonalne, przeto (us. 2)

$$A_2 : A_1 = B_2 : B_1.$$

Wykładnik tych stosunków nazwiemy np. w; wtedy (§ 27, us. 5)

$$A_2 = A_1 . w, \quad B_2 = B_1 . w.$$

A więc, jeżeli dwie wielkości są względem siebie proporcyjonalne, to, mnożąc odpowiadające sobie wartości tych wielkości przez tę samę jakąkolwiek liczbę, otrzymamy nowe ich wartości również sobie odpowiadające.

Nawzajem, jeżeli dwie wielkości są takie, że, mnożąc jakiekolwiek dwie ich wartości sobie odpowiadające przez tę samę liczbę, otrzymujemy również wartości sobie odpowiadające, to te wielkości są proporcyjonalne względem siebie; gdyż, jeżeli $A_2 = A_1 . w$ i $B_2 = B_1 . w$, to $A_2 : A_1 = B_2 : B_1$.

Z tego wypada, że

Dwie wielkości są względem siebie proporcyjonalne, jeżeli tak są z sobą związane, iż gdy jakąkolwiek wartość jednéj z tych wielkości pomnożymy przez pewną liczbę, to wskutek tego wartość odpowiadająca drugiéj wielkości jest również przez tę samę liczbę pomnożona.

4. A nadto, *dostatecznie, żeby wypowiedziany warunek miał miejsce, gdy jako mnożnik bierzemy liczbę całkowitą, aby stało się jemu zadość również wtedy, kiedy tym mnożnikiem jest liczba ułamkowa albo niewymierna* — co znakomicie upraszcza zastosowanie powyższéj własności.

Jakoż, niech A_1 i B_1 będą dwiema wartościami sobie odpowiadającymi rozważanych wielkości A i B. Gdy wartość A_1 pomnożymy przez ułamek $\frac{1}{n}$, to otrzymamy wartość $\frac{A_1}{n}$, którą mnożąc przez n (§ 7, us. 9), otrzymamy znowu wartość A_1. Trzeba więc, według zrobionego tu przypuszczenia, żeby wartość wielkości B, odpowiadająca wartości $\frac{A_1}{n}$, była taką, iżby, mnożąc ją przez n, móc otrzymać wartość B_1, odpowiadającą wartości A_1; tą więc wartością, odpowiadającą wartości $\frac{A_1}{n}$, jest wartość $\frac{B_1}{n}$.

Weźmy teraz jako mnożnik liczbę ułamkową $\frac{m}{n}$. Wypadnie zacząć od mnożenia dwu wartości odpowiadających A_1 i B_1 przez $\frac{1}{n}$; otrzymamy (na mocy poprzedniego) dwie wartości sobie odpowiadające $\frac{A_1}{n}$ i $\frac{B_1}{n}$, które znowu mnożąc przez liczbę całkowitą m, mieć będziemy (według założenia) wartości sobie odpowiadające $\frac{A_1 . m}{n}$ i $\frac{B_1 . m}{n}$.

Przyjmijmy nakoniec, że mnożnikiem jest liczba niewymierna (§ 26, us. 14) r. Ta liczba znajdzie się między dwiema liczbami ułamkowymi $\frac{k}{n}$ i $\frac{k+1}{n}$, t. j. będzie większa od piérwszéj, mniejsza od drugiéj. Powiększając nadto odpowiednio liczbę n (a wraz z nią liczbę k) można to sprawić, że różnica tych ułamków, t. j. liczba $\frac{1}{n}$, będzie mniejsza od jakkolwiek małéj oznaczonéj liczby; a fortiori więc mniejsza wtedy będzie różnica między liczbą r i każdą z tych liczb ułamkowych [1]. — Gdy więc dwie wartości A_1 i B_1 sobie odpowiadają, to na mocy poprzedniego wartości $A_1 . \frac{k}{n}$ i $A_1 . \frac{k+1}{n}$ odpowiadają wartościom $B_1 . \frac{k}{n}$ i $B_1 . \frac{k+1}{n}$. Wskutek tego, wartość $A_1 . r$, zawarta między dwiema piérwszymi, odpowié wartości $B_1 . r$, zawartéj między dwiema drugimi; gdyż, przy n dostatecznie wielkim, tak owe piérwsze wartości, między którymi przypada wciąż wartość $A_1 . r$, jak i drugie, między którymi znajduje się wciąż wartość $B_1 . r$ (a odpowiadające wciąż tamtym), mogą się od siebie różnić mniéj niż o jakkolwiek małą oznaczoną liczbę [2].

5. Wymierzmy każdą z dwu wielkości proporcyjonalnych A i B odpowiednimi im jednostkami (us. 1) i oznaczmy przez a_1, a_2, b_1, b_2 liczby oderwane, odpowiadające tym wartościom, któreśmy nazywali odpowiednio A_1, A_2, B_1, B_2. Wtedy

$$a_2 : a_1 = b_2 : b_1 ,$$

skąd (por. § 27, us. 3), przestawiając wyrazy średnie, mamy

$$a_2 : b_2 = a_1 : b_1 .$$

Ponieważ odpowiadające sobie wartości A_1 i B_1, A_2 i B_2 były jakiekolwiek, przeto możemy powiedzieć: *gdy dwie wielkości są względem siebie proporcyjonalne, to stosunek liczb oderwanych, wyrażających ich wartości sobie odpowiadające, jest stały.* Tak, iż *gdy przez a i b nazwiemy liczby oderwane, wyrażające jakiekolwiek sobie odpowiadające wartości dwu wielkości proporcyjonalnych względem siebie, to stosunek* [3]).

---

[1]) Tak właśnie rozumiéć należy stosunek o niewymiernym wykładniku. Np. liczba niewymierna, wyrażająca stosunek okręgu koła do średnicy (3,1415926535...), jest zawarta między liczbami $\frac{21}{7}$ i $\frac{22}{7}$, między liczbami $\frac{354}{113}$ i $\frac{355}{113}$, między liczbami 3,1415926 i 3,1415927 i t. d., a owa liczba różni się od każdéj z liczb piérwszéj pary mniéj niż o $\frac{1}{7}$ (od drugiéj z nich mniéj niż o $\frac{1}{100}$), od każdéj z liczb drugiéj pary mniéj niż o $\frac{1}{113}$ (od drugiéj z nich mniéj niż o $\frac{1}{1\,000\,000}$), od każdéj z liczb trzeciéj pary mniéj niż o $\frac{1}{10\,000\,000}$ i t. d.

[2]) Gdy np. p jest liczbą nie mniejszą od większéj z liczb wyrażających wartości A_1 i B_1, a chcemy, aby obie te różnice były mniejsze od $\frac{1}{q}$, natenczas będzie to miało miejsce przy każdym n większym od $p . q$.

[3]) Jeżeli doświadczenie doprowadza do wyznaczenia wartości szczególnych sobie odpowiadających dwu wielkości proporcyjonalnych względem siebie, to ich iloraz wyznaczy owę liczbę stałą. Należy zauważyć, że *ta stała jest wartością liczebną a, gdy b staje się jednością.*

$$\frac{a}{b} = \textit{liczbie stałéj.}$$

6. Jeżeli dwie wielkości zmieniają się jednocześnie w ten sposób, że stosunek dwu jakichkolwiek wartości jednéj z tych dwu wielkości jest równy stosunkowi odwrotnemu (§ 27, us. 4) wartości odpowiadających wielkości pozostałéj, to mówimy, że takie dwie wielkości są jedna względem drugiéj odwrotnie proporcyjonalne, albo że one zmieniają się w stosunku odwrotnym.

Tak np. czas potrzebny na wykonanie pewnéj roboty jest odwrotnie proporcyjonalny względem liczby pracujących robotników; przeciąg czasu, w ciągu którego ciało poruszające się ruchem jednostajnym przebiega pewną drogę, jest odwrotnie proporcyjonalny względem prędkości takiego ruchu; siła, z jaką ziemia i inne planety poruszają się około słońca po swych drogach, jest odwrotnie proporcyjonalna względem kwadratu ich odległości od słońca.

Gdy, czyto w zadaniu, czytéż wogóle kiedykolwiek, obok wielkości odwrotnie proporcyjonalnych występują (lub mogłyby występować) wielkości, któreśmy w us. 2-im nazwali proporcyjonalnymi, to zwykle te ostatnie mianujemy wtedy wprost proporcyjonalnymi, w przeciwstawieniu wielkościom odwrotnie proporcyjonalnym. (Jeżeli zaś jest mowa o wielkościach i zaznaczono tylko, że one są «proporcyjonalne», to wtedy zawsze rozumiéć należy wielkości wprost proporcyjonalne, tak jak powyżéj w us. 2—5-go.)

7. Odpowiednio do tego, cośmy mówili w us. 3-im o wielkościach wprost proporcyjonalnych, powiemy teraz, że gdy mamy dwie wielkości odwrotnie proporcyjonalne A i B, i jakiekolwiek dwa stany, czyli dwie wartości wielkości A, nazwiemy A_1 i A_2, wartości zaś im odpowiadające wielkości B nazwiemy B_1 i B_2, to

$$A_2 : A_1 = B_1 : B_2;$$

a gdy przez w nazwiemy wykładnik tych stosunków, to jeszcze

$$A_2 = A_1 . w, \quad B_2 = B_1 . \frac{1}{w}.$$

A więc, jeżeli dwie wielkości są odwrotnie proporcyjonalne, to mnożąc wartość jednéj z tych wielkości przez pewną jakąkolwiek liczbę, a odpowiadającą jéj wartość drugiéj wielkości dzieląc przez tę samę liczbę, otrzymujemy nowe ich wartości sobie odpowiadające.

Nawzajem, jeżeli dwie wielkości są takie, że mnożąc jakąkolwiek wartość jednéj z nich przez pewną liczbę, a odpowiadającą wartość drugiéj wielkości dzieląc przez tę samę liczbę, otrzymujemy również wartości sobie odpowiadające, to te wielkości są odwrotnie proporcyjonalne; gdyż, jeżeli $A_2 = A_1 . w$, a $B_2 = B_1 . \frac{1}{w}$, to natenczas $A_2 : A_1 = B_1 : B_2$.

Z tego wypada, że

Dwie wielkości są względem siebie odwrotnie proporcyjonalne, jeżeli tak są z sobą związane, iż gdy jakąkolwiek wartość jednéj z tych wielkości mnożymy przez pewną liczbę, to wskutek tego wartość odpowiadająca drugiéj wielkości jest przez tę samę liczbę podzielona [1]).

8. A nadto, *dostatecznie, żeby wypowiedziany warunek miał miejsce, gdy jako mnożnik i dzielnik bierzemy liczbę całkowitą, aby stało się jemu zadość również wtedy, kiedy zamiast liczby całkowitéj bierzemy liczbę ułamkową lub niewymierną* — co znakomicie upraszcza zastosowanie powyższéj własności.

Jakoż, niech A_1 i B_1 będą dwiema wartościami sobie odpowiadającymi rozważanych wielkości A i B. Gdy wartość A_1 pomnożymy przez ułamek $\frac{1}{n}$, to otrzymamy wartość $\frac{A_1}{n}$, którą mnożąc przez n otrzymamy znowu wartość A_1. Trzeba więc, według zrobionego tu przypuszczenia, żeby wartość wielkości B_1, odpowiadająca wartości $\frac{A_1}{n}$, była taką, iżby, dzieląc ją przez n, móc otrzymać wartość B_1, odpowiadającą wartości A_1; tą więc wartością, odpowiadającą wartości $\frac{A_1}{n}$, jest wartość $B_1 . n$.

Weźmy teraz liczbę ułamkową $\frac{m}{n}$. Gdy dzielimy wartość A_1 przez n, to jednocześnie (na mocy poprzedzającego) wartość B_1 zostaje pomnożona przez n i otrzymujemy dwie wartości sobie odpowiadające $\frac{A_1}{n}$ i $B_1 . n$. Gdy zaś następnie piérwszą z tych wartości mnożymy przez liczbę całkowitą m, wypadnie (według założenia) drugą podzielić przez m, tak iż miéć będziemy wartości odpowiadające sobie $\frac{A_1 . m}{n}$ i $\frac{B_1 . n}{m}$.

Przyjmijmy nakoniec, że mnożymy wartość A_1 przez liczbę niewymierną r. Ta liczba znajdzie się między dwiema liczbami ułamkowymi $\frac{k}{n}$ i $\frac{k+1}{n}$. Według poprzedzającego, wartości $A_1 . \frac{k}{n}$ i $A_1 . \frac{k+1}{n}$ odpowiadają wartościom $B_1 . \frac{n}{k}$ i $B_1 . \frac{n}{k+1}$. Wskutek tego, wartość $A_1 . r$, zawarta między dwiema piérwszymi, odpowie wartości $B_1 . \frac{1}{r}$, zawartéj między dwiema drugimi; gdyż, przy n dostatecznie wielkim, tak owe piérwsze wartości, między którymi

[1]) Gdyby tak ogólne przeprowadzenie tego i podanego w us. 3-cim rozumowania wydało się trudnym dla uczniów, to nauczyciel może się tu zadowolić przeprowadzeniem według tego wzoru takiego rozumowania na wielkościach nazwanych, np. na ilości kupionego towaru i jego pieniężnéj wartości, na ilości dni pracy i ilości godzin codziennéj pracy, potrzebnych dla wykonania pewnéj roboty, odrazu dając liczebne wartości. Wyłożenie zaś tego ogólne, jak również wyłożenie us. 5-go i 9-go, można dokonać np. po przerobieniu już pewnéj ilości zadań na regułę trzech.

przypada wciąż wartość $A_1 . r$, jak i drugie, między którymi znajduje się wciąż wartości $B_1 . \frac{1}{r}$ (a odpowiadające wciąż tamtym), mogą się od siebie różnić mniéj niż o jakkolwiek małą oznaczoną liczbę [1]).

9. Wymierzmy każdą z dwu wielkości odwrotnie proporcyjonalnych A i B odpowiednimi im jednostkami i oznaczmy przez a_1, a_2, b_1, b_2 liczby oderwane, odpowiadające tym wartościom, któreśmy nazywali odpowiednio A_1, A_2, B_1, B_2. Wtedy

$$a_2 : a_1 = b_1 : b_2,$$

skąd, według głównéj własności proporcyi,

$$a_2 . b_2 = a_1 . b_1 .$$

Ponieważ odpowiadające sobie wartości A_1 i B_1, A_2 i B_2 były jakiekolwiek, przeto możemy powiedzieć: *gdy dwie wielkości są względem siebie odwrotnie proporcyjonalne, to iloczyn liczb oderwanych, wyrażających ich wartości sobie odpowiadające, jest stały.* Tak, iż *gdy przez a i b nazwiemy liczby oderwane, wyrażające jakiekolwiek sobie odpowiadające wartości dwu wielkości odwrotnie proporcyjonalnych względem siebie, to iloczyn* [2])

$$a . b = \textit{liczbie stałéj}.$$

10. Rzadko się zdarza, aby pewna wielkość zależała wyłącznie od jednéj wielkości. Najczęściéj wartości pewnéj wielkości zależą naraz od wartości kilku innych wielkości; np. ciężar sztab metalicznych zależy jednocześnie od ich długości, szerokości, grubości, jakotéż od gęstości metalu.

Gdy pewna wielkość jest w ten sposób zależną od kilku innych wielkości, a mimo tego mówimy, że owa wielkość jest wprost proporcyjonalną lub odwrotnie proporcyjonalną względem jednéj z tych wielkości, od których zależy, to tymsamym przyjmujemy, że pozostałe wielkości, które mogą wpływać na jéj wartość, uważamy wtedy jako nie zmieniające się. Tak np. gdy mówimy, że ciężar sztab metalicznych jest proporcyjonalny względem ich gęstości, to tymsamym przyjmujemy, że objętość tych sztab, zależna od ich długości, szerokości

---

[1]) Jeżeli np. p jest liczbą nie mniejszą od większéj z liczb wyrażających wartości A_1 i B_1, a chcemy, aby obie te różnice były mniejsze od liczby $\frac{1}{q}$, natenczas będzie to miało miejsce dla wartości n, przy których wartość k jest taką, iż jednocześnie

$$n > p . q \quad \text{i} \quad \frac{p}{\frac{k}{n} . (k+1)} < \frac{1}{q}.$$

[2]) Jeżeli doświadczenie doprowadza do wartości szczególnych sobie odpowiadających dwu wielkości odwrotnie proporcyjonalnych względem siebie, to ich iloczyn wyznaczy owę liczbę stałą. Należy zauważyć, że *ta stała jest wartością liczebną a, gdy b staje się jednością.*

i grubości, jest wtedy taż sama, a więc możemy powiedzićć, że rozważamy wtedy sztaby metaliczne jednakowéj długości, szerokości i grubości [1]).

---

§ 30. REGUŁA TRZECH.

1. Jeżeli mamy daną jednę parę odpowiadających sobie wartości dwu wielkości, wprost lub odwrotnie względem siebie proporcyjonalnych, to dla każdéj innéj wartości jednéj z tych wielkości możemy znaléść odpowiadającą jéj wartość drugiéj wielkości. Dla objaśnienia tego weźmy następujące zadania.

a. Jeżeli za 16 łokci sukna zapłacono 27 rubli, to ile wypadnie zapłacić za 35 łokci tego sukna? — Jeżeli niewiadomą ilość rubli, które wypadnie zapłacić za 35 łokci sukna, nazwiemy x, to zadanie możemy tak wypisać:

16 łok. —— 27 rub.
35 „ —— x „

W tym zadaniu mamy dwie wielkości: długość sukna i wartość wszystkiego kupionego każdym razem sukna. Zważmy, że wogóle, jeżeli kupujemy więcéj sukna, to tyleż razy więcéj wypadnie za nie zapłacić. Powiemy więc: jeżeli długość sukna pomnożymy przez pewną jakąkolwiek liczbę, to wskutek tego wartość jego przez tę samę liczbę zostanie pomnożona, a więc (§ 29, us. 3) te dwie wielkości są względem siebie wprost proporcyjonalne. Tych wielkości wprost proporcyjonalnych mamy dane: jednę parę odpowiadających sobie wartości, t. j. 16 łok. i 27 rub., oraz drugą wartość jednéj z tych wielkości (długości sukna), t. j. 35 łok., a szukamy odpowiadającéj jéj wartości drugiéj wielkości (wartości sukna), t. j. szukamy, jaką jest ilość rubli, odpowiadająca 35-u łokciom. — Te wielkości są wprost proporcyjonalne; przeto (§ 29, us. 2) stosunek dwu jakichkolwiek wartości

---

[1]) Dobrze jest wskazać tu uczniom kilka przykładów wielkości, które choć są zależne od siebie, jednak mogą być nieproporcyjonalne względem siebie ani wprost, ani odwrotnie. Np. cena masła w dwa dnie targowe, przy jednakowym zapotrzebowaniu, a znacznie większym lub znacznie mniejszym dowozie, jest zależną od ilości dowiezionego masła, jest większa, gdy dowóz jest mniejszy, ale nie jest względem niego odwrotnie proporcyjonalna; koszt wydania książki nie jest proporcyjonalny do ilości odbijanych egzemplarzy; aby punkt taksamo oświecić niedość na odległości 2, 3, 4, . . . razy większéj umieścić światło odpowiednio 2, 3, 4, . . . razy silniejsze niż początkowo, a więc siła oświecenia punktu przez źródło światła, choć zależna od odległości, nie jest względem niéj odwrotnie proporcyjonalna (na to potrzeba światła odpowiednio 4, 9, 16, . . . razy silniejszego niż początkowo, a więc owa wielkość jest odwrotnie proporcyjonalna względem kwadratu odległości); wysokość barometru zależy od wyniesienia nad poziom morza, szerokości gieograficznéj, temperatury, ale nie jest ani wprost ani odwrotnie proporcyjonalną względem żadnéj z tych wielkości, i t. d.

jednéj z tych wielkości, a więc stosunek 35 łokci do 16 łokci, jest równy stosunkowi wartości im odpowiadających drugiéj wielkości, t. j. ów stosunek jest równy stosunkowi x rubli do 27 rubli. Możemy więc napisać (por. § 27, us. 3):

$$x : 27 = 35 : 16,$$

skąd (§ 28, us. 6)

$$x = \frac{27 \times 35}{16} = 59{,}0625.$$

Odp. Za 35 łokci sukna zapłacono 59 rubli i 6 kopiejek (por. § 20, us. 13).

b. Pewną robotę można wykonać, pracując w ciągu 5 dni po 4 godziny dziennie; po ile godzin codziennie trzebaby pracować, aby tę robotę wykonać w ciągu 3 dni? — Niewiadomą ilość godzin codziennéj pracy, potrzebnych dla wykonania téj roboty w ciągu 3 dni, nazwiemy x; wtedy zadanie możemy tak wypisać:

5 dni —— 4 godz.
3 „ —— x „

Do tego zadania wchodzą dwie wielkości: ilość dni pracy i ilość godzin codziennéj pracy, potrzebnych dla wykonania pewnéj roboty. Zważmy, że wogóle, jeżeli na więcéj *) dni rozłożymy tę robotę, to codziennie możemy tyleż razy mniéj godzin pracować, ile razy więcéj mamy dni na wykonanie téj roboty. Powiemy więc: jeżeli ilość dni pracy pomnożymy przez pewną jakąkolwiek liczbę, to ilość godzin codziennéj pracy będzie wskutek tego przez tęż samę liczbę podzielona; przeto (§ 29, us. 7) te dwie wielkości są względem siebie odwrotnie proporcyjonalne. Tych wielkości odwrotnie proporcyjonalnych mamy dane: jednę parę wartości sobie odpowiadających, t. j. 5 dni i 4 godziny, oraz drugą wartość jednéj z tych wielkości (ilości dni), t. j. 3 dnie, a szukamy odpowiadającéj jéj wartości drugiéj wielkości (ilości godzin), t. j. szukamy, jaką jest ilość godzin codziennéj pracy, odpowiadająca 3 dniom pracy. — Te wielkości są odwrotnie proporcyjonalne; przeto (§ 29, us. 6) stosunek dwu jakichkolwiek wartości jednéj z tych wielkości, a więc stosunek 5 dni do 3 dni, jest równy odwrotnemu stosunkowi wartości im odpowiadających drugiéj wielkości, t. j. ów stosunek jest równy odwrotnemu stosunkowi 4 godzin do x godzin, czyli (§ 27, us. 4) jest równy stosunkowi x godzin do 4 godzin. Możemy więc napisać (por. § 27, us. 3):

*) Niema co zważać na to, że niekiedy ta wartość jednéj wielkości, dla któréj szukamy odpowiadającéj wartości drugiéj wielkości, jest mniejsza od téj wartości owéj pierwszéj wielkości, dla któréj mamy daną odpowiadającą wartość drugiéj wielkości, gdyż mamy na myśli *jakiekolwiek* (§ 29, us. 2, 6) odpowiadające sobie wartości.

$$x : 4 = 5 : 3,$$

skąd

$$x = \frac{4 \times 5}{3} = 6\frac{2}{3}.$$

Odp. Aby owę robotę wykonać w ciągu 3 dni, należałoby codziennie pracować po 6 godzin i 40 minut.

Takiego rodzaju zadania oddawna nazywają się zadaniami na regułę trzech. Zatym przez «regułę trzech» [1]) rozumiéć należy zbiór objaśnień i wskazówek rozwiązywania takich zadań.

Powiemy więc:

Zadanie na regułę trzech jestto zadanie, w którym, mając dane: jednę parę odpowiadających sobie wartości dwu wielkości, wprost lub odwrotnie względem siebie proporcyjonalnych, oraz drugą wartość jednéj z tych wielkości, mamy znaléść odpowiadającą jéj wartość drugiéj wielkości.

2. Zestawmy z sobą powyższe zadania i ich rozwiązania:

$$\begin{array}{l} 16 \text{ łok.} \text{ ——— } 27 \text{ rub.} \\ 35 \ \ „ \ \text{ ——— } x \ \ „ \\ \hline x = \dfrac{27 \times 35}{16}; \end{array} \qquad \begin{array}{l} 5 \text{ dni} \text{ ——— } 4 \text{ godz.} \\ 3 \ \ „ \ \text{ ——— } x \ \ „ \\ \hline x = \dfrac{4 \times 5}{3}. \end{array}$$

Z tego widzimy, że:

*Jeżeli zadanie na regułę trzech wypiszemy w dwu wiérszach tak, żeby każde dwie wartości téj saméj wielkości były w tym samym rzędzie pionowym, a odpowiadające sobie wartości różnych wielkości znalazły się w tym samym rzędzie poziomym *), to wrazie gdy wielkości, wchodzące do zadania, są względem siebie wprost proporcyjonalne, otrzymamy liczbę szukaną, mnożąc liczbę, znajdującą się w tym samym, co szukana, rzędzie pionowym, przez liczbę, znajdującą się w tym samym, co szukana, rzędzie poziomym, i dzieląc ten iloczyn przez pozostałą liczbę; wrazie zaś gdy wielkości, wchodzące do zadania, są względem siebie odwrotnie proporcyjonalne, otrzymamy liczbę szukaną, mnożąc liczbę, znajdującą się w tym samym, co szukana, rzędzie pionowym, przez liczbę drugiego rzędu pionowego, lecz znajdującą się w innym, niż szukana, rzędzie poziomym, i dzieląc ten iloczyn przez pozostałą liczbę.*

[1]) Niektórzy dotąd jeszcze rozróżniają regułę trzech w tym przypadku, kiedy wielkości, wchodzące do zadania, są wprost proporcyjonalne, od reguły trzech w przypadku, kiedy wielkości, wchodzące do zadania, są odwrotnie proporcyjonalne względem siebie, jak to robiono zawsze dawniéj («Regula Detri» i «Regula Detri conversa», albo «inversa»).

*) Wrazie, gdyby w zadaniu dane wartości któréjkolwiek wielkości były wyrażone jako liczby wielorakie, wypisując tu zadanie, należy te wartości wyrazić jako liczby mianowane proste, bacząc jeszcze na to, aby obie wartości téj saméj wielkości były liczbami mianowanymi prostymi, wyrażonymi przy pomocy téj saméj jednostki (por. § 27, us. 2).

Widzimy z powyższego, jak ważnym jest staranne wyznaczenie tego, czy wielkości, wchodzące do zadania, są wprost, czytéż odwrotnie proporcyjonalne względem siebie. Wyznaczywszy to uważnie, możemy odrazu, według powyższéj wskazówki, utworzyć wyrażenie liczby szukanéj przez liczby, dane w zadaniu, a następnie ją obliczyć.

3. Metoda sprowadzania do jedności. Mając np. zadanie a. ustępu 1-go i zaznaczywszy tak, jak w us. 1-ym, że dwie wielkości,

16 łok. —— 27 rub.
35 „ —— x „

16 łok. —— 27 rub.
1 „ —— $\frac{27}{16}$ „
35 „ —— $\frac{27 \times 35}{16}$ rub. $=$ 59,0625 rub.

wchodzące do tego zadania, są względem siebie wprost proporcyjonalne, możemy je rozwiązać, przeprowadzając dalsze rozumowanie w ten sposób. Ponieważ za 16 łokci zapłacono 27 rubli, więc za 1 łokieć wypadnie zapłacić *) 27 rub. : 16, t. j. (§ 17, us. 5) $\frac{27}{16}$ rub. Ponieważ za 1 łokieć zapłacono $\frac{27}{16}$ rub., to za 35 łokci wypadnie zapłacić **) $\frac{27}{16}$ rub. $\times$ 35, t. j. (§ 19, us. 3, 12) $\frac{27 \times 35}{16}$ rub., czyli 59,0625 rub., t. j. 59 rub. + 6 kop.

Podobnie, mając zadanie b. ustępu 1-go i zaznaczywszy tak,

5 dni —— 4 godz.
3 „ —— x „

5 dni —— 4 godz.
1 „ —— 4$\times$5 „
3 „ —— $\frac{4 \times 5}{3}$ godz. $= 6\frac{2}{3}$ godz.

jak w us. 1-ym, że dwie wielkości, wchodzące do tego zadania, są względem siebie wprost proporcyjonalne, możemy następnie tak rozumować. Ponieważ, aby tę robotę wykonać, należało w ciągu 5 dni pracować po 4 godziny dziennie, przeto w ciągu jednego dnia (z uwagi, że te wielkości są odwrotnie proporcyjonalne i że 1 dzień jestto 5 dni : 5), należy pracować 4 godz. $\times$ 5, t. j. (§ 6, us. 6) 4 $\times$ 5 godz. ***); ponieważ, aby

---

*) Wielkości są wprost proporcyjonalne; gdy więc wartość: 1 łok. powstaje z wartości: 16 łok. wskutek podzielenia jéj przez 16 (albo: pomnożenia przez $\frac{1}{16}$), to wartość ilości rubli, odpowiadająca 1 łokciowi, powstanie również z wartości 27 rub., odpowiadającéj 16 łokciom, wskutek podzielenia jéj przez 16.

**) Podobnie. [Tak uzasadniając, nie potrzebujemy wprowadzać osobnych ad hoc sposobów wyrażania się, jakto trzebaby było zrobić np. wrazie, gdybyśmy chcieli wyrażenie: «za 35 łokci wypadnie zapłacić 35 razy więcéj» odnieść do przypadku, kiedy w tym zadaniu zamiast 35 łokci byłoby np. $\frac{5}{9}$ łokcia.]

***) Rozumiejąc to tak, jakgdyby było napisane (4 $\times$ 5) godz.

[Gdyby w zadaniu zamiast 4 godz. było np. 6 godz., to (6 $\times$ 5) godz. $=$ 30 godzinom, więcéj niż ich jest w dobie; w takim razie ta liczba wskazuje, ileby trzeba godzin pracować, nie przerywając pracy.]

tę robotę wykonać w ciągu jednego dnia, należałoby pracować 4×5 godzin, więc aby ją wykonać w ciągu 3 dni, należałoby pracować codziennie (co trzeba objaśnić podobnie, jak wyżéj) 4 × 5 godzin : 3, t. j. $\frac{4\times5}{3}$ godz. $= 6\frac{2}{3}$ godz. = 6 godz. + 40 minut.

Taki sposób rozwiązywania zadań na regułę trzech (w nim więc, jak z powyższego widoczna, przechodzimy przez wartość jednostki téj wielkości, któréj w zadaniu dane są dwie wartości), nazywa się [1] metodą sprowadzania do jedności.

Oczywiście, że z otrzymanych wypadków wypada toż samo, cośmy wypowiedzieli w ustępie 2-gim.

4. Metoda roskładowa, czyli tak zwana praktyka włoska. Niektóre zadania na regułę trzech można dogodnie rozwiązywać w następujący sposób.

Weźmy np. zadanie a. ustępu 1-go. Zamiast odrazu wyszukiwać, jaka jest ilość rubli, odpowiadająca 35 łokciom, możemy z tego, iż wiemy, że za 16 łok. należy się 27 rub., znaléść oddzielnie, ile wypadnie zapłacić za 32 łok. (mnożąc 27 rub. przez 2), i oddzielnie, ile wypadnie zapłacić za 2 łok. (dzieląc 27 rub. przez 8), a następnie, z tego, ile wypada zapłacić za 2 łokcie, znajdziemy (dzieląc przez 2), ile wypadnie zapłacić za 1 łokieć. Dodawszy zaś do siebie to, co trzeba zapłacić za 32 łok., za 2 łok. i za 1 łok., otrzymamy, iż za 37 łokci wypadnie (§ 21, us. 13) zapłacić 59 rub. + 6 kop.

16 łok.	——	27 rub.	
35 „	——	x „	
32 łok.	——	27 rub. × 2 =	54 rub.
2 „	——	27 rub. : 8 =	3,375 „
1 „	——	3,75 rub. : 2 =	1,6875 „
35 łok.	——		59,0625 rub.

Robiąc takim sposobem, nieodrazu znaleźliśmy wartość ilości rubli, odpowiadającą 35 łokciom, lecz znajdowaliśmy kolejno wartości ilości rubli, odpowiadające oddzielnym częściom 35 łokci, na które je rozłożyliśmy tak, jak nam się wydało najdogodniéj. Taki sposób rozwiązywania zadań przedstawia metodę roskładową, nazywaną także praktyką włoską. Używa się téj metody przeważnie przy wyliczaniu wartości przedmiotów. Przerobimy tu jeszcze według téj metody następujące zadania.

---

[1]) Niektórzy nazywają go «metodą wnioskowania» — niesłusznie, gdyż kurs arytmetyki, gdy jest należycie prowadzony, jest cały metodą wnioskowania.

a. Ile kosztuje $3\frac{1}{8}$ funta towaru, jeżeli za 7,5 funta tego towaru zapłacono 30,96 rubla? — Tu najdogodniéj będzie rozłożyć $3\frac{1}{8}$ funta na jednę-trzecią $7\frac{1}{2}$ fun., t. j. na $2\frac{1}{2}$ fun., na jednę-piątą $2\frac{1}{2}$ fun, t. j. na $\frac{1}{2}$ fun., oraz na jednę-czwartą $\frac{1}{2}$ funta, t. j. na $\frac{1}{8}$ f., gdyż $2\frac{1}{2}$ f. + $\frac{1}{2}$ f. + $\frac{1}{8}$ f. = $= 3\frac{1}{8}$ f. Odpowiednio więc do tego wypadnie kolejno 30,96 rub. : 3; 10,32 rub. : 5 i 2,064 rub. : 4.

$7\frac{1}{2}$ fun.	——	30,96	rub.
$3\frac{1}{8}$ „	——	x	„
$2\frac{1}{2}$ fun.	——	10,32	rub.
$\frac{1}{2}$ „	——	2,064	„
$\frac{1}{8}$ „	——	0,516	„
$3\frac{}{8}$ fun.	——	12,9	rub.

Odp. $3\frac{1}{8}$ funta tego towaru kosztuje 12 rub. + 90 kop.

b. Za jeden sążeń kwadratowy placu w mieście chcą 11 rub. + 96 kop.; ile wypadnie zapłacić za 684 sąż. kw.? —

1 s kw.	——	11,56	rub.
684 „	——	x	„
100 s. kw.	——	1156	rub.
500 „	——	5780	„
50 „	——	578	„
10 „	——	115,6	„
20 „	——	231,2	„
4 „	——	46,24	„
684 s. kw.	——	7907,04	rub.

Odp. Za 684 sążni kw. wypadnie zapłacić 7907 rub. + 4 kop.

W przypadku, gdy, jak w ostatnim zadaniu, jest dana cena jednostki, często tę właśnie cenę roskładają na części. Tak np. to samo zadanie b. moglibyśmy tak zrobić:

1 sąż. kw.			11,56	rub.		
684 „			x	„		
684 sąż. kw.	po	10	rub.	——	6840	rub.
„ „	„	1	„	——	684	„
„ „	„	0,5	„	——	342	„
„ „	„	0,05	„	——	34,2	„
„ „	„	0,01	„	——	6,84	„
684 sąż. kw.	po	11,56	rub.	——	7907,84	rub.

Niekiedy w takich zadaniach roskładają na części tak cenę jednostki, jak i liczbę, wyrażającą ilość kupowanego towaru. Np.

c. Ile kosztuje 39 funtów i 22 łuty towaru, którego funt kosztuje 5 złp. i $27\frac{1}{2}$ grosza? —

39 fun. po 5 zł.	——	195 zł.	
„ „ „ 15 gr. (5 zł. : 10)	——	19 „	15 gr.
„ „ „ 5 „ (15 gr. : 3)	——	6 „	15 „
„ „ „ 5 „	——	6 „	15 „
„ „ „ $2\frac{1}{2}$ gr.	——	3 „	8 „
16 łut. (1 f. : 2)	——	2 „	29 „
4 „	——	— „	22 „
2 „	——	— „	11 „
39 fun. + 22 łuty	——	234 zł.	25 gr.

(Zadania arytmetyczne. § 29.)

§ 31. REGUŁA TRZECH ZŁOŻONA.

1. Jeżeli zadanie dane może być rozłożone na dwa lub więcéj zadań na regułę trzech, tak iż, rozwiązując kolejno owe zadania, wyznaczymy nakoniec liczbę, o którą nam idzie w zadaniu danym, to takie zadanie nazywamy *zadaniem na regułę trzech złożoną* *). Np.

15 tkaczów, pracując po 9 godzin dziennie, w ciągu 32 dni utkało 2400 metrów płótna mającego 1,5 metra szerokości; w ciągu ilu dni 24 tkaczów, pracujących po 8 godzin dziennie, utkać może 3600 metrów płótna tegoż gatunku, lecz mającego szerokości 1,8 metra. — Oznaczywszy literą x liczbę oderwaną, wyrażającą ilość dni, odpowiadającą wartościom: 24 tk., 8 g. dziennéj pracy, 3600 m. długości i 1,8 m. szerokości płótna, zadanie to tak wypiszemy:

15 tk. ——	9 g. ——	2400 m. ——	15 dm. ——	32 d.
24 „ ——	8 „ ——	3600 „ ——	18 „ ——	x „

Jeżeli przypuścimy, że tylko ilość tkaczów uległa zmianie, t. j., że zamiast wartości 15 tk. mamy wartość 24 tk., a inne wielkości (t. j. ilość godzin dziennéj pracy, długość i szerokość płótna) zmianie nie uległy (§ 29, us. 10), to wtedy iść nam będzie o taką wartość ilości dni, która odpowie wartościom: 24 tk., 9 g. dziennéj pracy, 2400 m. długości i 15 dm. szerokości. Ta więc liczba odpowiada innym wartościom wchodzących do zadania wielkości, niż owa liczba, którąśmy

*) Zatym przez «*regułę trzech złożoną*» rozumieć należy zbiór objaśnień i wskazówek rozwiązywania takich zadań.

oznaczyli literą x; dlatego oznaczymy ją inną literą, np. literą y. Tak iż mamy teraz zadanie:

I) 15 tk. —— 9 g. —— 2400 m. —— 15 dm. —— 32 d.
24 „ —— 9 „ —— 2400 „ —— 15 „ —— y „

Tu ilość dni pracy jest niezależna od niezmieniających się wielkości: godzin dziennéj pracy, długości i szerokości płótna, a jest zależną tylko od ilości tkaczów. Aby zbadać, jakimi względem siebie są te dwie wielkości: ilość tkaczów i ilość dni pracy, zważmy, że wogóle *) «aby, pracując tę samę ilość godzin codziennie, utkać tę samę ilość metrów płótna téjże saméj szerokości, większa ilość tkaczów potrzebuje tyle razy mniejszéj ilości dni, ile razy tkaczów jest więcéj». Powiemy więc: jeżeli ilość tkaczów pomnożymy przez pewną jakąkolwiek liczbę, to ilość dni pracy będzie wskutek tego przez tęż samę liczbę podzielona; przeto (§ 29, us. 7) te dwie wielkości są odwrotnie proporcyjonalne. Tych dwu wielkości mamy parę wartości sobie odpowiadających, t. j. 15 tk. i 32 d., oraz drugą wartość ilości tkaczów, t. j. 24 tk., dla któréj mamy znaléść odpowiadającą wartość ilości dni. Jest to więc zadanie na regułę trzech. Moglibyśmy więc je rozwiązać t. j. znaléść liczbę y (§ 30, us. 2). Dlatego tę liczbę y, choć jéj nie wyliczymy (por. niżéj piérwszy odsyłacz na str. 328), możemy nadal przyjmować za liczbę już wiadomą.

Mamy liczbę y d., odpowiadającą wartościom: 24 tk., 9 g., 2400 m. i 15 dm. Zmieńmy tylko wartość 9 g. na wartość 8 g. Wtedy liczba, która odpowie wartościom: 24 tk., 8 g., 2400 m. i 15 dm., jest inną od liczb, któreśmy oznaczyli literami x i y; oznaczmy ją literą np. z. Miéć będziemy teraz zadanie:

II) 24 tk. —— 9 g. —— 2400 m. —— 15 dm. —— y d.
24 „ —— 8 „ —— 2400 „ —— 15 „ —— z „

Objaśniając znowu to zadanie tak szczegółowo, jak poprzednio, wypadnie nam tu zauważyć wogóle, że «taż sama ilość tkaczów, aby utkać tę samę ilość płótna téjże saméj szerokości, pracując więcéj **) godzin codziennie, będzie potrzebowała tyle razy mniéj dni, ile razy więcéj godzin codziennie pracuje», i powiemy: jeżeli ilość godzin dziennéj pracy pomnożymy przez jakąkolwiek liczbę, to ilość dni pracy będzie wskutek tego przez tęż samę liczbę podzielona; przeto te dwie wielkości są odwrotnie proporcyjonalne. I t. d. Jest to więc zada-

*) Podobne wypowiedzenie bywa najzręczniejsze i najjaśniejsze, gdy się naprzód mówi o wielkościach nie zmieniających się.

**) Por. odsyłacz na str. 320.

nie na regułę trzech. Liczbę y, choć jéj nie obliczyliśmy, wyznacza zadanie I; dlatego ostatnie zadanie II w zupełności wyznacza liczbę z i możemy ją nadal przyjmować za liczbę już wiadomą.

Liczba z odpowiada wartościom: 24 tk., 8 g., 2400 i 12 dm. Zmieńmy tylko wartość 2400 m. na 3600 m., a liczbę, odpowiadającą wartościom: 24 tk., 8 g., 3600 m. i 15 dm., oznaczmy np. literą w. Przy objaśnianiu zadania:

III)	24 tk. —	8 g. —	2400 m. —	15 dm. —	z d.
	24 „ —	8 „ —	3600 „ —	15 „ —	w „

zauważymy ogólnie, że «ta sama ilość tkaczów, pracując tę samę ilość godzin codziennie, aby utkać płótna téj saméj szerokości więcéj łokci, potrzebuje dni tyle razy więcéj, ile razy więcéj należy utkać płótna», i powiemy: jeżeli długość płótna pomnożymy przez pewną jakąkolwiek liczbę, to ilość dni pracy będzie wskutek tego przez tęż liczbę pomnożona; przeto (§ 29, us. 3) te dwie wielkości są wprost proporcyjonalne. I t. d. Jest to więc zadanie na regułę trzech. I t. d.

Liczba w d. odpowiada wartościom: 24 tk., 8 g., 3600 m. i 15 dm. Zmieńmy nakoniec wartość 15 dm. na wartość 18 dm. Liczba, odpowiadająca wartościom: 24 tk., 8 g., 3600 m. i 18 dm., jest tą liczbą, którąśmy oznaczyli już literą x. Mieć więc będziemy zadanie:

IV)	24 tk. —	8 g. —	3600 m. —	15 dm. —	w d.
	24 „ —	8 „ —	3600 „ —	18 „ —	x „

które objaśniając podobnie jak poprzednie, znajdziemy, że ono jest również zadaniem na regułę trzech.

Widzimy więc, że zadanie dane rozłożyliśmy na cztéry zadania na regułę trzech. Gdybyśmy je kolejno rozwiązywali, to wyznaczywszy z zadania I liczbę y, wyznaczylibyśmy następnie z zadania II liczbę z, późniéj z zadania III liczbę w i nakoniec z zadania IV liczbę x, t. j. tę, o którą nam idzie w zadaniu pierwotnie danym. Dlategoto takie zadania, jak pierwotnie tu dane, które można rozwiązać przy pomocy dwu lub więcéj zadań na regułę trzech, nazywa się zadaniem na regułę trzech złożoną.

2. Rozwiązując kolejno powyższe zadania na regułę trzech (§ 30, us. 2), otrzymujemy:

z I $y = \frac{32 \times 15}{24}$;

z II $z = y \times \frac{9}{8}$, t. j. $z = \frac{32 \times 15}{24} \times \frac{9}{8} = \frac{32 \times 15 \times 9}{24 \times 8}$;

z III $w = z \times \frac{3600}{2400}$, t. j. $w = \frac{32 \times 15 \times 9 \times 3600}{24 \times 8 \times 2400}$;

z IV $x = w \times \frac{18}{15}$, t. j. $x = \frac{32 \times 15 \times 9 \times 3600 \times 18}{24 \times 8 \times 2400 \times 15}$,

skąd, po wykonaniu skróceń *), otrzymamy 40,5 dnia, co wskazuje, że owych 24 tkaczów powinno pracować po 8 godzin dziennie w ciągu 40-u dni, a nadto 41-ego dnia pracy jeszcze 4 godziny.

Jeżeli otrzymane wyrażenie liczby x przez liczby pierwotnie danego zadania zestawimy z tym zadaniem,

odw.	odw.	wpr.	wpr.	
15 tk.	9 g.	2400 m.	15 dm.	32 d.
24 „	8 „	3600 „	18 „	x „

i uważnie przyjrzymy się temu, jak ta liczba x wyrażoną została przez liczby, dane w zadaniu, to dostrzeżemy, że liczba x równa się **) iloczynowi, którego czynnikami są: liczba znajdująca się nad x-em, liczby, wyrażające wartości wielkości odwrotnie proporcyjonalnych, znajdujące się w piérwszym wierszu poziomym, i liczby, wyrażające wartości wielkości wprost proporcyjonalnych, znajdujące się w wiérszu drugim, podzielonemu przez iloczyn liczb pozostałych. Moglibyśmy jednak tak wypisać to zadanie, żeby wszystkie liczby, które są w wiérszu drugim, znalazły się w wiérszu piérwszym, i nawzajem. Dlatego powiemy ogólnie:

Jeżeli zadanie na regułę trzech złożoną wypiszemy w dwu wiérszach tak, żeby każde dwie wartości téj saméj wielkości były w tym samym rzędzie pionowym, a odpowiadające sobie wartości różnych wielkości znalazły się w tym samym rzędzie poziomym, i wyznaczymy, które wielkości są wprost, a które odwrotnie proporcyjonalne względem téj wielkości, któréj jednéj wartości szukamy, to liczbę szukaną otrzymamy, mnożąc liczbę, znajdującą się w tym samym, co szukana, rzędzie pionowym, przez liczby wyrażające wartości wielkości wprost proporcyjonalnych, znajdujące się w tym samym, co szukana, rzędzie poziomym, i przez liczby wyrażające wartości wielkości odwrotnie proporcyjonalnych, znajdujące się w innym, niż szukana, wiérszu poziomym, a ten iloczyn dzieląc przez iloczyn liczb pozostałych.

---

*) Zwykle mniéj bywa roboty, gdy, po wykonaniu skróceń dopiéro w tym ostatecznym wypadku rozumowania, wyliczamy z niego liczbę x, niż gdybyśmy kolejno wyliczali liczby y, z, w i x, choćby wykonywając przed każdym z tych wyliczeń skrócenia możliwe.

**) Por. odsyłacz drugi na str. 321.

Widzimy z tego, jak ważnym jest staranne wyznaczenie: które z wielkości, wchodzących do zadania, są wprost, a które odwrotnie proporcyjonalne względem wielkości, któréj jednéj wartości szukamy. Wyznaczywszy to uważnie, możemy odrazu, według powyższéj wskazówki, utworzyć wyrażenie liczby szukanéj przez liczby dane w zadaniu, a następnie ją obliczyć.

3. Z każdego z powyższych cztérech zadań na regułę trzech, na które rozłożyliśmy dane zadanie, tworząc tak, jak w us. 1-ym § 30-go, proporcyje, mieć będziemy kolejno:

$$
\begin{array}{lll}
\text{z I} & y : 32 = & 15 : 24, \\
\text{z II} & z : y = & 9 : 8, \\
\text{z III} & w : z = & 3600 : 2400, \\
\text{z IV} & x : w = & 18 : 15.
\end{array}
$$

Mnożąc te proporcyje przez siebie odpowiednimi wyrazami (§ 28, us. 15), otrzymujemy

$$(y.z.w.x) : (32.y.z.w) = (15.9.3600.18) : (24.8.2400.15).$$

Albo, po podzieleniu obu wyrazów stosunku piérwszego przez liczby y, z i w,

$$x : 32 = (15.9.3600.18) : (24.8.2400.15).$$

Gdybyśmy z téj proporcyi wyrazili wyraz x przez iloczyn wyrazów skrajnych, podzielony przez pozostały wyraz skrajny, to otrzymalibyśmy to wyrażenie liczby x, któreśmy mieli w us. 2-im. Dzieląc jednak jednocześnie przez też same liczby jeden wyraz średni i jeden skrajny, zastąpimy tę proporcyją przez prostszą,

$$x : 1 = 81 : 2,$$

z któréj znajdziemy $x = 40{,}5$. Taki sposób rozwiązywania zadań na regułę trzech złożoną nazywają rozwiązywaniem zapomocą proporcyj.

4. Zadanie na regułę trzech złożoną można rozwiązać metodą sprowadzania do jedności. Postępowanie to składa się z kolejnego rozwiązywania tą metodą oddzielnych zadań na regułę trzech (§ 30, us. 3), na które dane zadanie się roskłada. Tych częściowych zadań na regułę trzech nie wypisujemy *), lecz przeprowadzamy odpowiednie rozumowanie, mając przed oczyma dane zadanie na regułę trzech złożoną. Cała robota przedstawi się piśmiennie tak:

---

*) Jak i przy wynajdywaniu niewiadoméj postępowaniem takim, jak w us. 2-im, albo jak w us. 3-im—gdy już nabędziemy dostatecznéj wprawy w wypowiadaniu wprost z wypisanego zadania na regułę trzech złożoną oddzielnych zadań na regułę trzech, na które dane zadanie może być rozłożone.

odw.	odw.	wpr.	wpr.	
15 tk.	9 g.	2400 m.	15 dm.	32 d.
24 „	8 „	3600 „	18 dm.	x „

15 tk.	9 g.	2400 m.	15 dm.	32 d.
1 „	1 „	1 „	1 „	$\frac{32\times15\times9}{2400\times15}$d.
24 „	8 „	3600 „	18 „	$\frac{32\times15\times9\times3600\times18}{2400\times15\times24\times8}$d.

$$x \text{ dni} = \frac{32\times15\times9\times3600\times8}{2400\times15\times24\times8} \text{ d.} = 40{,}5 \text{ dnia.}$$

Wyznaczywszy tu, tak jak w ustępie 1-ym, które wielkości są wprost, a które odwrotnie proporcyjonalne względem ilości dni, dalsze rozumowanie przeprowadzimy w ten sposób. Ponieważ 15 tk., pracując po 9 g. codziennie, może utkać 2400 m. płótna, szerokiego na 15 dm., w ciągu 32 d., to, jeżeli ma pracować 1 tk. (zamiast 15 tk.), wypadnie ilość dni (32 d.) pomnożyć przez 15 *); jeżeli on ma pracować 1-nę godzinę codziennie (zam. 9-u g.), to wypadnie ilość dni pomnożyć przez 9; jeżeli ma utkać 1 m. (zam. 2400-u m.), to wypadnie ilość dni podzielić przez 2400, a jeżeli to płótno ma być szerokie na 1 dm. (zam. 15 dm.), to wypadnie ilość dni podzielić przez 15. Wiemy więc, że 1 tk., pracując codziennie 1 g., aby utkać 1 m. płótna, szerokiego na 1 dm., potrzebuje $\frac{32\times15\times9}{2400\times15}$ d. **). Wskutek tego, jeżeli ma pracować 24 tk. (zamiast 1-go tk.), to wypadnie ilość dni podzielić przez 24; jeżeli oni mają pracować po 8 g. (zam. po 1-néj g.) dziennie, to wypadnie i t. d.

Oczywiście, że w wypadku, który tu otrzymujemy, dochodzimy do tegoż samego, cośmy wypowiedzieli w us. 2-im.

5. W zadaniu naszym (por. us. 1) druga partyja tkaczów (24 tk.) tkała płótno tego samego gatunku, co piérwsza partyja (15 tk.). Gdyby jednak było jeszcze dodane np. «płótna, które ma wyrobić druga partyja, można utkać 2 m. w ciągu takiego czasu, jaki jest potrzebny dla utkania 3 m. płótna, wyrabianego przez piérwszą partyją tkaczów», to z tego warunku wypada, że dla utkania każdego metra płótna druga partyja potrzebuje $\frac{3}{2}$ tego czasu, co piérwsza. Dlatego, gdyby do naszego zadania ten warunek był dodany, to najdogodniéj ***), znalazszy ilość dni w przypuszczeniu, że obie partyje

---

*) Por. str. 322.

**) Ułamek dnia mniejszy od jedności będzie w tym razie jednoznaczny z takimże ułamkiem godziny.

***) Możnaby go wprowadzić do zadania, jako dwie wartości wielkości: prędkość w robocie, ale w takich razach rozumowanie często jest bałamutne dla uczniów.

tkają płótno jednakowego gatunku, pomnożyć ją następnie przez tę liczbę $\frac{3}{2}$.

6. Ponieważ zadanie na regułę trzech złożoną jest złożone z zadań na regułę trzech, przeto ogólnie wypowiedziane wyrażenie: «reguła trzech» rozumieć nadal będziemy, jako obejmujące w sobie regułę trzech złożoną.

Wszystkie [1]) zadania arytmetyczne, oile nie sprowadzają się wyłącznie do dodawania lub odejmowania [2]), są zadaniami na regułę trzech. Dlategoteż sposoby postępowania, któreśmy tu wyłożyli, są nam już znane z poprzedniéj nauki i z przerabianych zadań. Tu tylko z tych sposobów zdaliśmy sobie należytą sprawę.

Zauważymy przy téj sposobności, że, przerabiając rachunki w celu rozwiązania różnych zadań arytmetycznych, wykonywamy na liczbach całkowitych lub ułamkowych (§ 17, us. 2) takie działania: dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie. Dlatego te działania nazywają się cztérema działaniami arytmetycznymi.

7. Pośród najrozmaitszych możliwych zadań na regułę trzech są takie, które, ze względu na szczególne swe właściwości, zasługują na oddzielne ich rozważanie. Dlatego z zadań na regułę trzech wydzielimy pewne grupy zadań i rozważymy je oddzielnie. Zbiór objaśnień i wskazówek rozwiązywania takich grup zadań tworzy odpowiednie «reguły» (§ 32—37). Oczywiście, że prócz tych, które tu rozważymy, możnaby wydzielić z zadań na regułę trzech inne grupy, a tymsamym objaśnienia i wskazówki rozwiązywania zadań owych grup utworzyćby mogły inne «reguły». Mówiąc to, chcemy zaznaczyć, że te grupy zadań, które tu rozważymy, lub którebyśmy nadto mogli rozważyć, nie wyczerpią różnych możliwych typów zadań na regułę trzech.

(Zadania arytmetyczne. § 30.)

---

§ 32. REGUŁA PROCENTU.

1. W niektórych zadaniach na regułę trzech jedna z wartości danych (albotéż wartość wprowadzana podczas rachunku dla przedstawienia odpowiedzi) jest zwykle taż sama, mianowicie, według zwyczaju powszechnego, jest ona wyrażana jako 100 jednostek. Owóż, takie zadania, w których, według przyjętego zwyczaju, jedna z wartości, albo dana w zadaniu, albo wprowadzana podczas rachunku,

---

1) Oczywiście nie mamy tu na myśli zadań na mechaniczne wyliczenia, np. sumę dwu liczb podzielić przez trzecią, od iloczynu odjąć czwartą i t. d., i innych podobnych.

2) Jako działań, sprowadzających się bespośrednio do liczenia (§ 4, us. 2; § 5, us. 2).

jest wyrażona jako 100 jednostek, nazywamy *zadaniami na regułę procentu* *).

Tak np., jeżeli obliczamy, ile trzeba papiéru drukowego na książkę, mającą 20 arkuszy druku, a odbijaną w 1600 egzemplarzach, to musimy wziąć pod uwagę, że podczas druku pewna ilość arkuszy papiéru zepsuje się; gdy pod tym względem umawiamy się z zarządem drukarni, to powiedzą nam, że trzeba na to liczyć np. 5 «*od sta*», czyli 5 «*procent*», t. j. że nad każde 100 arkuszy papiéru trzeba jeszcze na zepsucie liczyć 5 arkuszy. Jeżeli więc nad 100 arkuszy trzeba liczyć 5, to ile arkuszy trzeba liczyć nad 32000 ark? Rozwiązawszy to zadanie na regułę procentu,

$$\begin{array}{l} 100 \text{ ark.} \text{———} 5 \text{ ark.} \\ 32000 \text{ „ ———} x \text{ „} \\ \hline x = \frac{5 \cdot 32000}{100} = 1600, \end{array}$$

powiemy, że: 5 procent od 32000 ark. jest 1600 ark. Zamiast pisać «procent», albo «od sta», piszemy znak %; owóż, tę odpowiédź napiszemy: 5% od 32000 ark. jest 1600 ark.

Podobnie np. jeżeli chcemy się dowiedziéć, czy w Warszawie umiejętność czytania i pisania jest więcéj rospowszechniona pośród mężczyzn, czytéż pośród kobiet, i w jakim stosunku, a chcemy to wyrachowanie oprzéć na liczbach, otrzymanych podczas spisu jednodniowego ludności Warszawy, dokonanego w d. 9 lutego r. 1882, mianowicie na tym, że pośród ludności **) zamieszkałéj w Warszawie (t. j. nie licząc osób czasowo przyjezdnych i wojska) okazało się, iż na 181362 osoby płci męskiéj umiało czytać i pisać 94868 mężczyzn, a na 201602 osoby płci żeńskiéj umiało czytać i pisać 80664 kobiety, to należy naprzód wyznaczyć, ile na pewną tę samę liczbę osób, czyto płci żeńskiéj, czytéż męskiéj, przypada umiejących czytać i pisać. I w takim wyrachowaniu, jako owę stałą liczbę przyjmujemy zwykle liczbę 100. Znajdziemy więc (§ 21, us. 13), rozwiązując następujące zadania na regułę procentu:

$$\begin{array}{l} 181362 \text{ m.} \text{ ——— } 94868 \text{ m.} \\ 100 \text{ „ ——— } x \text{ „} \\ \hline x = \frac{94868 \times 100}{181362} = 52, \end{array} \qquad \begin{array}{l} 201602 \text{ k.} \text{ ——— } 80664 \text{ k.} \\ 100 \text{ „ ——— } x \text{ „} \\ \hline x = \frac{80664 \times 100}{201602} = 40, \end{array}$$

że w Warszawie pośród mężczyzn jest 52%, a pośród kobiét jest 40% umiejących czytać i pisać, tak iż stosunek rospowszechnienia

---

*) Złacińska: «pro cento», od sta.
**) Wraz z dziećmi.

umiejętności czytania i pisania pośród mężczyzn i pośród kobiét w Warszawie [1]) jest 52 : 40, czyli 13 : 10.

2. Najczęściéj z zadaniami na regułę procentu spotykamy się przy różnych obrotach pieniężnych, dokonywanych przez przemysłowców, kapitalistów i handlujących tak między sobą, jak i z innymi osobami.

Weźmiemy naprzód pod uwagę zadania, w których nie ma się względu na przeciąg czasu, w jakim ów obrót się dokonywa. Wtedy do zadania wchodzą:

kapitał pewien,

100 jednostek kapitału,

procent (t. j. zarobek, strata, wynagrodzenie i t. p. od 100 jednostek kapitału) i

kwota pieniężna, któréj stosunek do procentu jest równy stosunkowi owego kapitału do 100 jego jednostek. Nazywają ją zwykle również «procentem» (rozumiejąc przez to: procent od całego kapitału), rzadziéj zaś «procentami». Od niejakiego jednak czasu dość często mówią także «odsetki» *); tego wyrazu będziemy tu używali. Odsetki więc dane lub szukane są jedną wartością téjże wielkości, któréj drugą wartością jest procent, t. j. procent jest szczególną wartością odsetek, odpowiadającą 100 jednostkom kapitału.

Ponieważ odsetki od jakiegokolwiek kapitału przedstawiają kwotę, która powstaje, gdy procent pomnożymy przez tę samę liczbę, przez którą trzeba pomnożyć 100 jednostek kapitału, aby otrzymać wartość kapitału, od którego owe odsetki liczymy, przeto (§ 29, us. 2): *kapitał i odsetki są wielkościami wprost proporcyjonalnymi względem siebie.*

Z powyższych czterech liczb jedna (t. j. 100 jednostek kapitału) jest stałą; w odpowiednich więc zadaniach może być niewiadomą jedna z trzech liczb pozostałych, t. j. mogą być niewiadome albo odsetki, albo procent, albo kapitał.

Jeżeli powiemy wogóle, że w kapitale jest k jednostek (takich samych jak w stałéj liczbie 100 jednostek), że liczby wyrażające procent

---

[1]) Wyznaczywszy jeszcze np. dwie cyfry dziesiętne, otrzymamy dokładniéj 52,31% i 40,01%; t. j. (por. odsyłacz na str. 195), iż na 10000 osób płci męskiéj umié czytać i pisać 5231, a na 10000 osób płci żeńskiej umié czytać i pisać 4001.

Inne byłoby zadanie: jaki jest w Warszawie stosunek ilości mężczyzn, umiejących czytać i pisać, do ilości kobiét, umiejących czytać i pisać (94868 : 80664).

*) Używać więc tu będziemy: procent jako odpowiadający 100 jednostkom kapitału, a odsetki jako odpowiadające jakiéjkolwiek ilości jednostek kapitału.

[Nie używamy tego wyrazu w liczbie pojedyńczéj «odsetka», mającego wtedy zastępować: procent. Mimo bowiem czynionych usiłowań, nie przyjęło się to, jako niezręczne w użyciu. Trudno wyraz procent zastąpić wyrazem odsetka, choćby w tak prostych wyrażeniach: oddał swój kapitał na 5 procent, zarobił na sprzedaży towaru 15 procent.]

i odsetki, są odpowiednio p i o jednostek (takich samych jak poprzednie), to te trzy zadania możemy ogólnie tak przedstawić:

A). 100 —— p B). k —— o C). p —— 100
k —— x 100 —— x o —— x

Odsetki i kapitał są wielkościami wprost proporcyjonalnymi. Z tych więc zadań wypada (§ 30, us. 2), że odpowiednio

A). x, t. j. $o = \frac{k.p}{100}$; B). x, t. j. $p = \frac{100.o}{k}$; C). x, t. j. $k = \frac{100.o}{p}$.

Z jednéj któréjkolwiek z tych odpowiedzi można wyprowadzić pozostałe dwie. Tak np. z piérwszéj, według któréj: *odsetki równają się setnéj części iloczynu kapitału i procentu* *), wypada, iż 100 razy powiększone odsetki przedstawiają iloczyn dwu czynników, z których jednym jest kapitał, innym zaś procent, a więc (§ 7, us. 5): *procent równa się 100 razy powiększonym odsetkom, podzielonym przez kapitał; kapitał równa się 100 razy powiększonym odsetkom, podzielonym przez procent* **). Np.

1). a. Kupiec kupił towaru za 280 rub., a sprzedając, miał zarobku 15%; ile na tym towarze zarobił?

100 rub. —— 15 rub.
280 „ —— x „

$$x = \frac{15 \cdot 280}{100} = 42.$$

Odp. Zarobił na tym towarze 42 rub.

b. Kupiec na towarze, za który zapłacił 280 rub., zarobił 42 rub.; jaki ten zarobek przedstawia procent od kapitału wyłożonego na kupno owego towaru?

c. Kupiec na sprzedaży pewnego towaru zarobił 42 rub., które przedstawiają zarobku 15%; ile on za ten towar zapłacił?

2). Podobnie rozwiązalibyśmy np. zadania.

aa. Kupiec kupił towaru za 280 rub., a sprzedając, poniósł straty 15%; ile na tym towarze stracił?

bb. Kupiec na towarze, za który zapłacił 280 rub., stracił 42 rub.; jaki ta strata przedstawia procent od kapitału, wyłożonego na kupno owego towaru.

cc. Kupiec na sprzedaży pewnego towaru stracił 42 rub., które przedstawiają straty 15%; ile on za ten towar zapłacił?

---

*) T. j. liczba oderwana, wchodząca w wyrażenie odsetek, równa się setnéj części iloczynu liczb oderwanych, wchodzących w wyrażenia danéj wartości kapitału i danego procentu. I t. d.

**) Niéma co tych wysłowień zapamiętywać: i bez tego bardzo łatwo każde takie zadanie rozwiązać.

3. Niekiedy w takich zadaniach, zamiast kapitału, od którego się liczą odsetki, występuje suma pieniężna, przedstawiająca albo *kapitał wraz z odsetkami*, albotéż *kapitał po potrąceniu z niego odsetek*.

1) Weźmy naprzód pod uwagę piérwszy z tych przypadków, t. j. kiedy w zadaniu jest dana suma pieniężna, przedstawiająca kapitał wraz z odsetkami. Np.

a. Kupiec, sprzedając towar za 322 rub., miał zarobku 15%; ile on na tym towarze zarobił?—Tu summa 322 rub. przedstawia kapitał, wyłożony na kupno towaru, wraz z zarobkiem, osiągniętym przy sprzedaży; a więc téj sumy drugą wartością nie będzie 100 rub., lecz 115 rub. Mamy więc tu zadanie:

115 rub. —— 15 rub.
322 „ —— x „

$$x = \frac{15 \cdot 322}{115} = 42.$$

Tu 115 rub. i 322 rub. są wartościami sumy pieniężnéj, złożonéj z kapitału, proporcyjonalnego względem odsetek, i odsetek. Jeżeli więc tę sumę pieniężną (§ 6, us. 14) pomnożymy przez jakąkolwiek liczbę, to wskutek tego przez tęż samę liczbę zostaną pomnożone odsetki; a zatym (§ 29, us. 3), ta *suma pieniężna, przedstawiająca kapitał wraz z odsetkami, i odsetki są wielkościami wprost proporcyjonalnymi względem siebie.*—Odp. Zarobek wynosi 42 rub.

Z liczb tego zadania możemy utworzyć jeszcze zadania następujące:

b. Kupiec na towarze, który sprzedał za 322 rub., zarobił 42 rub.; jaki ten zarobek przedstawia procent od kapitału, wyłożonego na kupno owego towaru?

c. Kupiec na sprzedaży pewnego towaru zarobił 42 rub., które przedstawiają zarobek 15%; za ile on ten towar sprzedał?

Może tu być nadto *) zadanie:

d. Kupiec na towarze, który sprzedał za 322 rub., zarobił 15%; za ile on ten towar kupił?—Rozumując taksamo, jak przy zadaniu a., doszlibyśmy do wniosku że *suma pieniężna, przedstawiająca kapitał wraz z odsetkami, i kapitał są wielkościami wprost proporcyjonalnymi względem siebie.* Zamiast więc rozwiązywać zadanie a. i następnie znaleziony zarobek (42 rub.) odejmować od sumy danéj w zadaniu, możemy wprost, ułożywszy zadanie obok wypisane **), rozwiązać je.

115 rub. —— 100 rub.
322 „ —— x „

$$x = \frac{100 \cdot 322}{115} = 230.$$

---

*) Zadanie: Kupiec za towar zapłacił 280 rub., a sprzedał go za 322 rub.; jaki procent od wyłożonego kapitału przedstawia zarobek, na sprzedaży towaru osiągnięty?, należy sprowadzić do zadania b., odejmując 280 rub. od 322 rub.

**) Taksamo moglibyśmy rozwiązać także zadanie odwrotne: Kupiec na towarze który kupił za 280 rub., zarobił 15%; za ile on ten towar sprzedał?

Widzimy więc, że rozwiązywanie powyższych zadań nie przedstawia trudności [1]).

2). Weźmy teraz pod uwagę drugi ze wzmiankowanych przypadków, kiedy w zadaniu jest dana suma pieniężna, przedstawiająca *kapitał po potrąceniu z niego odsetek.*

aa. Kupiec, sprzedając towar za 238 rub, poniósł straty 15%; ile on na tym towarze stracił?—Ta suma 238 rub., przedstawia kapitał, wyłożony na kupno towaru, po potrąceniu z niego straty, poniesionéj przy sprzedaży; a więc téj sumy drugą wartością nie będzie 100 rub., ale 85 rub. Mamy więc tu zadanie:

$$\begin{array}{l} 85 \text{ rub.} \text{ ——— } 15 \text{ rub.} \\ 238 \text{ ,, ——— } x \text{ ,,} \\ \hline x = \frac{15 \cdot 85}{238} = 42. \end{array}$$

Tu 85 rub, i 238 rub. są wartościami sumy pieniężnéj powstałéj z kapitału, proporcyjonalnego względem odsetek, po potrąceniu z niego tych odsetek. Jeżeli więc tę sumę pieniężną (§ 6, us. 15) pomnożymy przez jakąkolwiek liczbę, to wskutek tego przez tęż samę liczbę zostaną pomnożone odsetki; a zatym (§ 29, us. 3) ta *suma pieniężna, przedstawiająca kapitał po potrąceniu odsetek, i odsetki są wielkościami wprost proporcyjonalnymi względem siebie.*— Odp. Zarobek wynosi 42 rub.

Z liczb tego zadania możemy utworzyć jeszcze zadania następujące:

bb. Kupiec na towarze, który sprzedał za 238 rub., stracił 42 rub.; jaki ta strata przedstawia procent od kapitału, wyłożonego na kupno owego towaru?

cc. Kupiec na sprzedaży pewnego towaru stracił 42 rub., które przedstawiają straty 15%; za ile on ten towar sprzedał?

Może tu być nadto *) zadanie:

dd. Kupiec na towarze, który sprzedał za 238 rub., stracił 15%; za ile on ten towar kupił?—Rozumując taksamo, jak przy zadaniu aa., doszlibyśmy do wniosku, że *suma pieniężna, przedstawiająca kapitał po potrąceniu z niego odsetek, i kapitał są wielkościami wprost proporcyo-*

---

[1]) Procent w tego rodzaju zadaniach niektórzy od dość już dawna nazywają procentem «na sto» (zniemiecka: auf hundert), co rodzi w uczących się myśl, jakgdyby to było coś innego, niż procent od sta. Tymczasem różnica tych zadań od zadań w us. 2 polega nie na różnicy w pojmowaniu procentu, lecz na tym, czy do zadania wchodzi kapitał, czytéż kapitał wraz z odsetkami. Dlatego, jeżeli idzie o rozróżnianie tych zadań, to lepiej je scharakteryzujemy, gdy je rozróżnimy według tego, czy w nich mamy rozumieć sam *kapitał*, czytéż *kapitał z odsetkami* (odsetki zaś tak w jednym jak w drugim zadaniu przedstawiają zawsze kwotę, powstałą z obliczenia procentu *od sta* każdego).

*) Zadanie: Kupiec za towar zapłacił 280 rub., a sprzedał go za 238 rub.; jaki procent od wyłożonego kapitału przedstawia strata, przy sprzedaży tego towaru poniesiona?, należy sprowadzić do zadania bb., odejmując 238 rub. od 280 rub.

85 rub. —— 100 rub.
238 „ —— x „

$$x = \frac{100 \cdot 238}{85} = 280.$$

zadanie obok wypisane *), *nalnymi względem siebie.* Zamiast więc rozwiązywać zadanie aa. i następnie znalezioną stratę (42 rub.) dodawać do sumy danéj w zadaniu, możemy wprost, ułożywszy rozwiązać je.

Widzimy więc, że i rozwiązywanie powyższych zadań nie przedstawia trudności [1]).—

Rozwiążmy jeszcze następujące zadanie złożone:

Jaką cenę powinien naznaczyć kupiec hurtowy za funt towaru, który go kosztuje 2 rub., aby zarobił na nim 20% od ceny kosztu i mógł kupcom detalicznym dać ustępstwa (rabatu) 20% od ceny osiąganéj przy sprzedaży. Rozwiązując tu kolejno zadania **):

100 kop. —— 120 kop. 80 kop. —— 100 kop.
200 „ —— x „ 240 „ —— x „

$x = 240$, $x = 300$,

znajdujemy naprzód, że cena funta, w któréjby się mieściło zarobku 20% rachowanego od ceny kosztu, a więc cena, po któréj kupiec hurtowy oddaje detalicznemu funt tego towaru, wynosi 2 rub. i 40 kop., a następnie, że cena, osiągana przy sprzedaży przez kupca detalicznego, z któréj po ustępstwie 20% pozostawałoby 2 rub. i 40 kop., wynosi 3 rub. Należy więc funt tego towaru sprzedawać w handlu detalicznym po 3 ruble.

---

*) Taksamo moglibyśmy rozwiązać także zadanie odwrotne: Kupiec na towarze, który kupił za 280 rs., stracił 15%; za ile on ten towar sprzedał?

[1]) Procent w tego rodzaju zadaniach niektórzy odniedawna nazywają procentem «w stu», lub «w sto» (również zniemiecka: in hundert), o czym można zrobić podobną uwagę, jak na str. 336 o t. z. procencie «na sto». Chcąc wyróżnić te zadania, lepiéj je scharakteryzujemy, mówiąc, że w nich mamy *kapitał po potrąceniu odsetek* (odsetki zaś przedstawiają zawsze kwotę, która powstaje z procentu *od sta*, t. j. od wszystkich setek całego kapitału).

[Sądzę, że nic nie stracimy, obywając się, podobnie, jak np. Francuzi, bez dziwacznych wyrażeń: procent na sto, procent w stu, obliczam procent w stu i t. d. (dziwacznych dlatego, że sam wyraz procent znaczy: od sta), tymwięcéj, że rzecz daleko jaśniéj się przedstawi, gdy zamiast tego zaznaczać będziemy wyraźnie, iż owę sumę uważamy nie jako kapitał, lecz odpowiednio jako kapitał z odsetkami, lub kapitał po potrąceniu odsetek. Będzie to nadto zgodne z tym, że w rzeczywistości procent jest tylko od sta; używanie zaś wyrażeń bałamutnych: procent na sto, procent w stu może wyjść niekiedy na szkodę interesanta, nie rozumiejącego, że tu idzie nie o inne pojmowanie procentu, lecz właściwie o inne uważanie owéj sumy pieniężnéj, do czego przyczynia się jeszcze i to, że używający owych nazw dziwnych, kapitałem także niekiedy nazywają kapitał z odsetkami, lub kapitał po potrąceniu odsetek].

**) Możnaby także, rozwiązawszy zadanie (A.):

100 kop. —— 20 kop.
200 „ —— x „

$x = 40$, znalezione 40 kop. dodać do 200 kop., a następnie, rozwiązawszy zadanie (takie jak wyżéj aa.):

80 kop. —— 20 kop.
240 „ —— x „

$x = 60$, znalezione 60 kop. dodać do 240 kop. Otrzymamy więc 3 ruble.

4. Z tego, cośmy tu (us. 1—3) mówili, wypada, że, mając zadanie na obliczanie odsetek, należy się przedewszystkim nad tym zastanowić, czy suma dana w zadaniu przedstawia kapitał, czy kapitał z odsetkami, czytéż kapitał po potrąceniu odsetek.

Aby wykazać, jaka pod tym względem zachodzi różnica, przypuśćmy, że od 100 jednostek kapitału otrzymujemy jako odsetki 8 jednostek; wtedy mówimy, że mamy 8% od kapitału. Jeżelibyśmy te 100 jednostek uważali jako kapitał wraz z odsetkami, któreto odsetki wynoszą 8 takichże jednostek, to ta suma 100 jednostek składałaby się z 92 jednostek kapitału i 8 jednostek odsetek. Chcąc się tu dowiedzieć: jaki procent przedstawia 8 jednostek odsetek od 92 jednostek kapitału, mielibyśmy zadanie B. us. 2-go, które rozwiązując, znaleźlibyśmy, że: 8 jednostek odsetek od 92 jednostek kapitału przedstawia $8\frac{16}{23}$% od kapitału.

$$\begin{array}{l} 92 \text{ —— } 8 \\ 100 \text{ —— } x \\ \hline x=\frac{8\cdot 100}{92}=8\frac{16}{23}. \end{array}$$

—Jeżelibyśmy zaś owe 100 jednostek uważali jako kapitał, pozostały po odtrąceniu odsetek, któreto odsetki wynoszą 8 takichże jednostek, to ta suma 100 jednostek byłaby różnicą między kapitałem 108 jednostek i 8 jednostkami odsetek. Chcąc się tu dowiedzieć: jaki procent przedstawia 8 jednostek odsetek od 108 jednostek kapitału, mielibyśmy również zadanie B. us. 2-go i znaleźlibyśmy, że: 8 jednostek odsetek od 108 jednostek kapitału przedstawia $7\frac{11}{27}$% od kapitału.

$$\begin{array}{l} 108 \text{ —— } 8 \\ 100 \text{ —— } x \\ \hline x=\frac{8\cdot 100}{108}=7\frac{11}{27}. \end{array}$$

W ostatnim np. zadaniu ustępu poprzedzającego 20% od ceny, osiąganéj przy sprzedaży przez kupca detalicznego, przedstawia jednocześnie dla niego 25% zarobku od ceny kosztu (t. j. od kapitału, wyłożonego przezeń na kupno funta owego towaru).

5. Jeżeli w zadaniu, w którym odsetki zależą już wprawdzie od przeciągu czasu, za jaki są liczone, przeciąg czasu pozostaje ten sam, nie zmienia się, to zadanie takie sprowadza się oczywiście do zadań poprzednio rozważanych.

Np. Jaki procent rocznie będzie miał ten, kto kupi pięcioprocentowe papiéry publiczne według kursu 84 za 100? [Tu wyraz «pięcioprocentowe» oznacza, że owe papiéry zawsze przynoszą rocznie 5 jednostek «gotówką» od 100 jednostek nominalnéj (t. j. wypisanéj na nich) wartości; «kurs za 100» oznacza, po jakiéj cenie (gotówką) można nabyć każde 100 jednostek nominalnéj wartości.]—Wyłożone tu na ich kupno każde

$$84 \text{ ——— } 5$$
$$100 \text{ ——— } x$$
$$x = \frac{5 \cdot 100}{84} = 5\frac{20}{21}.$$

84 jednostki przyniosą rocznie odsetki 5 jednostek. Mamy więc tu zadanie B. us. 2-go. Rozwiązawszy je, znajdziemy, że nabywca tych papierów będzie miał $5\frac{20}{21}$ % od kapitału, wyłożonego na ich kupno.

6. Zadania na regułę procentu, w których się bierze pod uwagę przeciąg czasu, w ciągu którego dokonywa się pewnego obrotu sumą pieniężną, odnoszą się albo do kapitałów, umieszczonych na czas dłuższy w pewnym przedsiębierstwie, albotéż do wynagrodzenia, które pobiéra osoba, udzielająca swego kapitału (wierzyciel), od osoby, biorącéj ów kapitał (dłużnika) na pewien czas, za korzystanie przez ten czas z owego kapitału.

Przy obrachunkach tego rodzaju przyjmuje się za podstawę wysokość dochodu od 100 jednostek kapitału zwykle za przeciąg 1 roku*), co się nazywa «stopą procentu». Zatym stopa procentu jest to samo, co procent (us. 2) za przeciąg jednego roku.—Na oznaczenie stopy procentu używa się również znaku %, tak iż np. 5% oznaczać będzie w takich zadaniach toż samo, co «5 jednostek dochodu od 100 jednostek kapitału za 1 rok».

Całkowity dochód od pewnego kapitału za pewien przeciąg czasu nazywają «procentem», «procentami», albo «odsetkami». Używać tu będziemy tego ostatniego wyrazu. (Stopa procentu jest wartością szczególną odsetek, odpowiadającą 100 jednostkom kapitału umieszczonym na 1 rok.)

Jeżeli mamy np. zadanie: Jakie odsetki przyniesie w ciągu 3 lat kapitał 3000 zł. umieszczony po 5%?, to, moglibyśmy naprzód obliczyć (us. 5, 2) odsetki za jeden rok (150 zł.), a następnie, mnożąc znalezioną liczbę przez 3, otrzymalibyśmy, jako odsetki od owego kapitału za 3 lata, 450 zł.

Widzimy więc, że do tego rodzaju zadań wchodzą trzy wielkości: kapitał, ilość lat i odsetki. Tak w powyższym zadaniu dwiema wartościami kapitału były: 3000 zł. i 100 zł.; dwiema wartościami ilości lat: 3 lata i 1 rok; dwiema wartościami odsetek: 450 zł. i 5 zł. Jedne odpowiadające sobie wartości tych trzech wielkości były tu: 100 zł., 1 rok i 5 zł. a drugie: 3000 zł., 3 lata i 450 zł.

Zważmy, że wogóle (por. § 31. us. 1) wciągu tego samego czasu od większego kapitału otrzymamy tyle razy więcéj odsetek, ile razy kapitał jest większy, tak iż możemy powiedzieć, że jeżeli wtedy (t. j.

*) Niekiedy, przy rachunkach szczególnych (np. kary administracyjne za opóźnienie opłaty podatków, rachunki lichwiarskie i t. d.), za przeciąg 1 miesiąca.

kiedy przeciąg czasu pozostaje ten sam) pomnożymy kapitał przez pewną jakąkolwiek liczbę, to odpowiadające mu odsetki zostaną wskutek tego przez tęż samę liczbę pomnożone, a więc (§ 29, us. 3): *kapitał i odsetki są wielkościami wprost proporcyjonalnymi względem siebie.* — Podobnie, od tego samego kapitału za większą ilość lat otrzymamy tyle razy więcéj odsetek, ile razy liczba lat jest większa. Możemy powiedziéć, że jeżeli ilość lat pomnożymy przez pewną jakąkolwiek liczbę, to odsetki (od niezmienionego kapitału) zostaną wskutek tego przez tęż samę liczbę pomnożone, a więc: *ilość lat i odsetki są wielkościami wprost proporcyjonalnymi względem siebie.* — Nakoniec, też same odsetki od większego kapitału otrzymujemy za tyle razy mniejszą ilość lat, ile razy kapitał jest większy. Możemy powiedziéć, że jeżeli kapitał zostanie przez pewną jakąkolwiek liczbę pomnożony, to ilość lat (w ciągu których mają być otrzymane też same odsetki) zostanie wskutek tego przez tęż samę liczbę podzielona, a więc: *kapitał i ilość lat są wielkościami odwrotnie proporcyjonalnymi względem siebie.*

Z sześciu liczb, które, jak widzieliśmy, wchodzą do takiego zadania, dwie (t. j. 100 jednostek kapitału i 1 rok) są stałe; w odpowiednich więc zadaniach może być niewiadoma jedna z cztérech liczb pozostałych, t. j. mogą być niewiadome albo odsetki, albo stopa procentu, albo kapitał, albotéż ilość lat.

Jeżeli powiemy wogóle, że w kapitale jest k jednostek (takich samych jak w stałéj liczbie 100 jednostek), że liczby, wyrażające stopę procentu i odsetki, są odpowiednio s i o jednostek (takich samych jak poprzednie), i że jest l lat, to te cztéry zadania możemy ogólnie tak przedstawić:

$$\text{A}).\quad \begin{array}{ccccc} \text{wpr.} & & \text{wpr.} & & \\ 100 & — & 1 & — & s \\ k & — & l & — & x \\ \hline \end{array} \qquad\qquad \text{B}).\quad \begin{array}{ccccc} \text{wpr.} & & \text{wpr.} & & \\ k & — & l & — & o \\ 100 & — & 1 & — & x \\ \hline \end{array}$$

$$\text{C}).\quad \begin{array}{ccccc} \text{odw.} & & \text{wpr.} & & \\ 1 & — & s & — & 100 \\ l & — & o & — & x \\ \hline \end{array} \qquad\qquad \text{D}).\quad \begin{array}{ccccc} \text{odw.} & & \text{wpr.} & & \\ 100 & — & s & — & 1 \\ k & — & o & — & x \\ \hline \end{array}$$

Wyznaczywszy na mocy tego, cośmy tu wyżéj powiedzieli, które wielkości są wprost, a które odwrotnie proporcyjonalne względem téj wielkości, któréj jednéj wartości szukamy, otrzymujemy *) odpowiednio (§ 31, us. 2):

$$\text{A). } x, \text{ t.j. } o=\frac{k.l.s}{100}; \qquad \text{B). } x, \text{ t. j. } s=\frac{100.o}{k.l};$$

$$\text{C). } x, \text{ t.j. } k=\frac{100.o}{s.l}; \qquad \text{D). } x, \text{ t.j. } l=\frac{100.o}{k.s}.$$

Z jednéj któréjkolwiek z tych odpowiedzi **) można wyprowadzić pozostałe trzy. Tak np. z piérwszéj, według któréj: *odsetki równają się setnéj części iloczynu kapitału, ilości lat i stopy procentu* ***), wypada, iż 100 razy powiększone odsetki przedstawiają iloczyn trzech czynników, z których jednym jest kapitał, innym ilość lat, pozostałym zaś stopa procentu. Uważając w tym iloczynie trzech czynników iloczyn dwu z nich jako wyrażenie jednéj liczby, otrzymamy stąd (§ 7, us. 5): *stopa procentu równa się 100 razy powiększonym odsetkom, podzielonym przez iloczyn kapitału i ilości lat; kapitał równa się 100 razy powiększonym odsetkom, podzielonym przez iloczyn stopy procentu i ilości lat; ilość lat równa się sto razy powiększonym odsetkom, podzielonym przez iloczyn kapitału i stopy procentu* ****). Np.

Ile przyniosą w ciągu 3 lat 3000 zł., umieszczone po 5%?

$$\begin{array}{ccccc} \text{wpr.} & & \text{odwr.} & & \\ 100 \text{ zł.} & — & 1 \text{ r.} & — & 5 \text{ zł.} \\ 3000 \text{ „} & — & 3 \text{ l.} & — & x \text{ „} \end{array}$$

$$x=\frac{5\times3000\times3}{100}=450.$$

W ciągu tego samego czasu od większego kapitału i t. d. (jak wyżéj), a więc kapitał i odsetki są wielkościami wprost proporcyjonalnymi; od tego samego kapitału i t. d., a więc ilość lat i odsetki są wielkościami wprost proporcyjonalnymi. A zatem (§ 31, us. 2) $x=450$, t. j. odsetki wyniosą 450 zł.

---

*) Możnaby te rozwiązania wyprowadzić wprost zapomocą sprowadzenia do jedności (§ 31, us. 4):

$$\begin{array}{lccccc} \text{A). } & 100 \text{ j.} & — & 1 \text{ r.} & — & s \\ & 1 & — & 1 & — & \frac{s}{100} \\ & k & — & l & — & \frac{s.l.k.}{100}=o; \end{array} \qquad \begin{array}{lccccc} \text{B). } & k & — & l & — & o \\ & 1 & — & 1 & — & \frac{o}{k.l.} \\ & 100 & — & 1 & — & \frac{o.100}{k.l}=s; \end{array}$$

$$\begin{array}{lccccc} \text{C). } & s & — & 1 \text{ r.} & — & 100 \\ & 1 & — & 1 & — & \frac{100}{s} \\ & o & — & l & — & \frac{100.o}{s.l}=k, \end{array} \qquad \begin{array}{lccccc} \text{D). } & 100 & — & s & — & 1 \text{ r.} \\ & 1 & — & 1 & — & \frac{100}{s} \\ & k & — & o & — & \frac{100.o}{s.k}=l. \end{array}$$

**) Gdy w piérwszych trzech opuścimy czynnik l, to one staną się takimi samymi, jak otrzymane w us. 2-im, gdyż wtedy s oznacza to samo, co tam p.

***) T. j. liczba oderwana, wchodząca w wyrażenie odsetek i t. d. (por. str. 334).

****) Dobrze jest umieć przeczytać powyższe ogólnie wypisane rozwiązania, ale niéma co tych wysłowień zapamiętywać: lepiej, aby uczniowie na każdym tego rodzaju zadaniu przeprowadzali odpowiednie rozumowanie.

wpr. wpr.
3000 zł. —— 3 l. —— 450 zł.
100 „ —— 1 r. —— x „

$$x=\frac{450\times 100}{3000\times 3}=5.$$

b. Według jakiej stopy umieszczono 3000 zł., które w ciągu 3 lat przyniosły 450 zł?

Odp. Umieszczono po 5%.

odw. wpr.
1 r. —— 5 zł. —— 100 zł.
3 l. —— 450 „ —— x „

$$x=\frac{100\times 450}{3\times 5}=3000.$$

c. Jaki kapitał, umieszczony po 5%, przynosi w ciągu 3 lat 450 zł?

Odp. 3000 zł.

odw. wpr.
100 zł. —— 5 zł. —— 1 r.
3000 „ —— 450 „ —— x l.

$$x=\frac{100\times 450}{3000\times 5}=3.$$

d. W ciągu ilu lat 3000 zł., umieszczone po 5%, przynoszą 450 zł.?

Odp. w ciągu 3 lat.

7. Jak widzieliśmy (us. 6), odsetki od tegoż samego kapitału są wprost proporcyjonalne względem ilości lat, kapitał zaś, przynoszący też same odsetki, jest odwrotnie proporcyjonalny względem ilości lat. Rozważmy, czy będzie można zaznaczyć podobną zależność między sumą pieniężną, przedstawiającą czyto kapitał wraz z odsetkami, czytéż kapitał po potrąceniu z niego odsetek, a ilością lat, za które te odsetki są liczone.

Weźmy najprostszy przykład, kiedy mamy ten sam kapitał; np. 200 zł. umieszczone po 5% przedstawią wraz z odsetkami po roku 210 zł., a po 3 latach 230 zł. Przy zmieniającéj się ilości lat odsetki od pewnego kapitału się zmieniają w tymże samym stosunku, a więc drugi składnik sumy 200 zł. + 10 zł. wskutek tego, że ilość lat została pomnożoną przez 3, został również przez 3 pomnożony (200 zł. + 30 zł.), piérwszy zaś składnik nie uległ zmianie. Zatym (por. § 6, us. 14) suma 200 zł. + 10 zł. nie została jednocześnie pomnożoną przez 3, nie jest więc ona proporcyjonalną do ilości lat. Jeżeli zaś mamy sumy pieniężne, powstające z różnych kapitałów przez dołączenie odsetek, rachowanych według téj saméj stopy za niejednakową ilość lat, np.

1 r. —— 210 zł.
3 l. —— 230 „

100 zł. —— 1 r. —— 105 zł.
200 „ —— 3 l. —— 230 „

to tu nie możemy powiedzieć, aby z tego samego kapitału (§ 29, us. 10; § 31, us. 1) w przeciągu czasu np. 2 razy większego miała powstać wskutek dołączenia do niego odsetek suma pieniężna 2 razy większa, jakeśmy to tylkoco widzieli (nie powstanie téż suma 2 razy mniejsza; § 29, us. 7). Nadto kapitał ulega tu zmianie niezależnie od ilości lat, a drugie składniki w sumach: 100 zł. + 5 zł. i 200 zł. + 30 zł. zależą nietylko od ilości lat, ale także od kapitałów (100 zł. i 200 zł.). W żadnym więc razie, w skutek pomnożenia ilości lat przez pewną liczbę, suma pieniężna, przedstawiająca kapitał wraz z odsetkami, niezostaje w skutek tego przez tęż liczbę pomnożona (ani, oczywiście, podzielona; § 29, us. 7).—Toż samo można powiedziéć o sumie pieniężnéj, przedstawiającéj kapitał po potrąceniu odsetek.— Zatym: *suma pieniężna, przedstawiająca czyto kapitał wraz z odsetkami, czyto kapitał po potrąceniu odsetek, nie jest ani wprost, anitéż odwrotnie proporcyjonalną względem ilości lat.* Wskutek tego (zob. us. 3 a., d., aa., dd.) *suma pieniężna, przedstawiająca czyto kapitał wraz z odsetkami, czytéż kapitał po potrąceniu z niego odsetek, jest wtedy tylko (wprost) proporcyjonalna względem kapitału, albo względem odsetek, kiedy odsetki są liczone za tenże sam przeciąg czasu.*

Dlatego, jeżeli mamy np. zadanie [1]:

Jaki kapitał, umieszczony po 5%, przedstawi po 3 latach wraz z odsetkami 3450 zł.?

wpr.
105 zł. —— 1 r. —— 100 zł.
3450 „ —— 3 l. —— x „

to nie możemy go wprost rozłożyć na dwa zadania na regułę trzech (§ 31, us. 1; § 29, us. 10), gdyż wprawdzie w ciągu téj saméj ilości lat kapitał wraz odsetkami jest wprost proporcyjonalny do samego kapitału, lecz taż sama suma pieniężna, powstała z dołączenia odsetek do kapitału, nie powstanie w ciągu np. 2 razy większéj ilości lat ani z 2 razy większego, anitéż z 2 razy mniejszego kapitału. Z tego właśnie powodu, że tu wchodzą w rozważanie odsetki za różną ilość lat dołączane do kapitału, również *ilość lat nie jest w takim zadaniu ani wprost, ani odwrotnie proporcyjonalną względem kapitału.* Tak więc, jak powyżéj, wypisane zadanie nie jest bespośrednio zadaniem na regułę trzech złożoną (§ 31).

Aby to zadanie rozwiązać, przekształcimy je na takie, w którym odsetki byłyby liczone za ten sam przeciąg czasu, mianowicie uprzednio wyliczymy, jaką sumę przedstawi 100 zł., umieszczone po 5%, po 3 latach.

wpr.
1 r. —— 5 zł.
3 l. —— x „
$x = 15.$

Odsetek od 100 zł. po 5% w ciągu 3 lat zbierze się 15 zł.; a więc 100 zł. wraz z odsetkami po 5% za 3 lata przedstawi sumę 115 zł.

Teraz możemy już rozwiązać zadanie przekształcone:

[1] Z możliwych takich zadań podane tu jest to, w którym rozumowanie zdaje się przedstawiać najwięcéj trudności dla uczącego się.

$$\begin{array}{l} 115 \text{ zł.} \text{ --- } 100 \text{ zł.} \\ 3450 \text{ ,, --- } x \text{ ,,} \\ \hline x = \frac{100 \times 3450}{115} = 3000. \end{array}$$

Odp. Ów kapitał jest 3000.

W taki sam sposób postępować należy z innymi zadaniami podobnymi.

8. Mówiliśmy dotąd (us. 6, 7) o przeciągu czasu wyrażonym jako pewna ilość lat, t j. tymsamym przyjmowaliśmy, że jeżeli w wyrażenie owego czasu, w przeciągu którego kapitał przynosi odsetki, wchodzą albo miesiące, albo tygodnie, albo dnie, to przedstawiamy je w ułamku roku. Zauważyć przytym należy, że, przy obliczaniu odsetek od kapitałów umieszczanych w przedsiębierstwach lub pożyczanych, prawie wszędzie na kontynencie Europy przyjmuje się miesiące wszystkie jako mające tę samę ilość dni, a więc przedstawiające tę samę część roku, tak iż każdy miesiąc jest 12-tą częścią roku; podobnie przyjmuje się każdy tydzień jako 52-gą część roku, każdy dzień jako 30-tą część miesiąca, czyli 360-ą część roku *).

Jeżeli więc mamy np. zadanie: Jakie odsetki przyniesie kapitał 3000 zł., umieszczony po 5%, w ciągu 3 lat i 2 miesięcy?, to wyrazimy 2 m. jako $\frac{1}{6}$ roku, wskutek czego 3 l. + + 2 m. $= 3\frac{1}{6}$ r., albo $\frac{19}{6}$ roku, i znajdziemy (§ 20, us. 5), iż szukane odsetki

$$\begin{array}{l} \quad\text{wpr.} \qquad\qquad \text{wpr.} \\ 100 \text{ zł.} \text{ --- } 1 \text{ r.} \text{ --- } 5 \text{ zł.} \\ 3000 \text{ ,, --- } 3\frac{1}{6}\text{r.} \text{ --- } x \text{ ,,} \\ \hline x = \frac{5 \times 3000 \times 19}{6 \times 100} = 475. \end{array}$$

wyniosą 475 zł.—Moglibyśmy jednak nieco inaczéj tu postąpić. Zamiast mówić, że 5 zł. jest odsetkami od 100 zł. za 1 rok, możemy powiedzieć: 5 zł. jest odsetkami za 12 miesięcy. Wtedy wypadnie wyrazić (§ 28, us. 2) również 3 l. + 2 m. jako 38 m.

$$\begin{array}{l} \quad\text{wpr.} \qquad\qquad \text{wpr.} \\ 100 \text{ zł.} \text{ --- } 12 \text{ m.} \text{ --- } 5 \text{ zł.} \\ 3000 \text{ ,, --- } 38 \text{ ,, --- } x \text{ ,,} \\ \hline x = \frac{5 \times 3000 \times 33}{100 \times 12} = 475. \end{array}$$

Podobnie, gdybyśmy mieli np. zadanie: Ile należy się odsetek od 3000 zł. po 5% za 4 miesiące i 5 dni?, to moglibyśmy rozwiązać to zadanie, wykonywając wyliczenie:

$$\begin{array}{l} \quad\text{wpr.} \qquad\qquad \text{wpr.} \\ 100 \text{ zł.} \text{ --- } 1 \text{ r.} \text{ --- } 5 \text{ zł.} \\ 3000 \text{ ,, --- } \frac{25}{72}\text{r.} \text{ --- } x \text{ ,,} \\ \hline x = \frac{5 \times 3000 \times 25}{72 \times 100} = 52\frac{1}{12}. \end{array}$$

Odp. Należy się $52\frac{1}{12}$ złotego., lubtéż, wyrażając przeciąg czasu albo w miesiącach, albotéż w dniach, jedno z dwu wyliczeń:

*) Zatym 1 miesiąc + 6 dni = 0,1 roku; 2 m. + 12 dni = 0,2 roku i t. d.

wpr.	wpr.	
100 zł. ——	12 m. ——	5 zł.
3000 „ ——	$4\frac{1}{6}$ „ ——	x „

$$x=\frac{5\times3000\times25}{6\times100\times12}=52\frac{1}{2}.$$

wpr.	wpr.	
100 zł. ——	360 d. ——	5 zł.
3000 „ ——	125 „ ——	x „

$$x=\frac{5\times3000\times125}{100\times360}=52\frac{1}{2}.$$

Taksamo postępowalibyśmy przy innych (us. 6 B., C., D.; us. 7) zadaniach podobnych.

9. Gdy idzie o wyliczenie odsetek za pewną ilość dni, to często używają dogodniejszego sposobu, który tu wyłożymy.

Jeżeli ilość dni, za które mamy obliczyć odsetki o po $s\%$ od kapitału k, oznaczymy literą d, to we wzorze A us. 6-go, zamiast ilości lat l możemy napisać $\frac{d}{360}$ i mieć będziemy

$$o=\frac{k.d.s.}{360\cdot100},\ \text{czyli}\ o=\frac{k.d}{\left(\frac{36000}{s}\right)}.$$

Aby więc wyznaczyć owe odsetki, należy ilość jednostek kapitału pomnożyć przez ilość dni, a ten iloczyn podzielić przez iloraz z podzielenia liczby 36 000 przez stopę procentu. Iloczyn ilości jednostek kapitału przez ilość dni, za które mamy obliczyć odsetki, jest niezależny od stopy procentu; nazwiemy go liczbą procentującą [1]. Liczba zaś, przez którą należy podzielić liczbę procentującą, aby otrzymać szukane odsetki, t. j. liczba 36 000:s, zależna tylko od stopy procentu, a tymsamym stała dla oznaczonéj stopy procentu, nazywa się dzielnikiem odpowiadającym stopie procentu.

Z tego wypada, że dzielnik, odpowiadający stopie s, winien przedstawiać kapitał, który po $s\%$ w ciągu 1 dnia przynosi 1 odsetek [2]. Rzeczywiście, jeżeli w wypisanym tu wzorze przyjmiemy $o=1$ i $d=1$, to otrzymamy

$$1=\frac{k.s}{36000},\ \text{skąd}\ k=\frac{36000}{s}.$$

Ponieważ liczba 36 000 jest podzielna przez czynniki piérwsze 2, 3 i 5, więc dla wielu wartości s dzielnik jest liczbą całkowitą; dla niektórych on oczywiście pozostanie ułamkowym. Tak np.

$s=$	1,	1,5,	2,	2,5,	3,	3,5,	4,	4,5,
dziel.	36000,	24000,	18000,	14400,	12000,	(72000:7),	9000,	8000,

$s=$	5,	5,5,	6,	6,5,	7,	7,5,	8,
dziel.	7200,	(72000:11),	6000,	(72000:13),	(36000:7),	4800,	4500.

---

[1]) Francuzi nazywają go wprost: liczbą (nombre).

[2]) Odwrotność dzielnika, odpowiadającego stopie s, przedstawia odsetki od jednostki kapitału za jeden dzień.

Weźmy np. zadanie: obliczyć odsetki od kapitału 4200 rub. za przeciąg czasu od 18-go października do 6-go marca roku następnego po 5% i $5{,}5\%$. — Miesiące: listopad do lutego włącznie wyrazimy jako 30 dni $\times 4 = 120$ d.; dni zaś w październiku i marcu (jednéj z dwu dat, według słusznego zwyczaju, nie włączamy) jest 18; razem 138 dni. Iloczyn $4200 \times 138 = 579600$ jest «liczbą procentującą», którą należy podzielić przez 7200, jeżeli chcemy obliczyć odsetki po 5%, podzielić zaś przez $\frac{72\,000}{11}$, czyli pomnożyć przez $\frac{11}{72\,000}$, jeżeli chcemy obliczyć odsetki po $5{,}5\%$. Wykonawszy więc

$$579600 : 7200 \quad \text{i} \quad (579600 \times 11) : 72000,$$

znajdziemy, że w piérwszym razie odsetki wyniosą 80 rub. i 50 kop.; w drugim zaś razie 88 rub. i 55 kop. (ostatnią liczbę można było otrzymać w ten sposób: wyliczyć odsetki po 5% i do nich dodać dziesiątą ich część).

10. Procent składany. Jeżeli pewien kapitał jest tak umieszczony, że odsetki przypadające we właściwych terminach są do kapitału dołączane, a po każdym dołączeniu odsetki obliczają się od kapitału powiększonego o wszystkie poprzednio dołączone odsetki, to mówimy, że kapitał jest umieszczony na «procent składany» *), albo że odsetki są «kapitalizowane».

W takich warunkach umieszczone kapitały wzrastają o odsetki zwykle albo corocznie, albo copółrocznie. Różne zadania, odnoszące się do kapitałów, umieszczonych na procent składany, rozwiązują się bardzo dogodnie przy pomocy pewnych sposobów postępowania, których dostarcza algiebra; przy nauce więc algiebry szczegółowiéj zajmiemy się tymi zadaniami. Tu zaś przedstawimy tylko wyliczenie sumy pieniężnéj, jaka się utworzy wskutek umieszczenia kapitału na procent składany w ciągu niedługiego przeciągu czasu. Np.

Jaka się utworzy suma z kapitału 20 000 rub., umieszczonego na procent składany po 6% w ciągu 4 lat, 4 miesięcy i 24 dni, jeżeli odsetki są dokładane corocznie?

Zważmy, że od 100 rub. w ciągu 1-go roku narośnie odsetek 6 rubli, tak że w ciągu roku 1-go ze 100 rubli utworzy się 106 rub. Ponieważ zaś kapitał wraz z odsetkami za ten sam przeciąg czasu jest wprost proporcyjonalny do kapitału (us. 7), przeto łatwo wyliczymy kolejno, jaki się utworzy kapitał w ciągu 1-go, 2-go, 3-go i 4-go roku (§ 21, us. 13):

Jeżeli idzie o to, żeby wyraźnie zaznaczyć, że kapitał jest umieszczony nie na procent składany, to mówimy, że jest umieszczony na «procent zwykły».

*) Mówią, że wtedy liczy się «procent od procentu».

1) 100 rub. —— 106 rub.
2000 „ —— x „

$x = \frac{106 \times 2000}{100} = 2120$;

2) 100 rub. —— 106 rub.
2120 „ —— x „

$x = 2247,2$;

3) 100 rub. —— 106 rub.
2247,2 „ —— x „

$x = 2382,03$;

4) 100 rub. —— 106 rub.
2382,03 „ —— x „

$x = 2524,95$.

Następnie wypadnie obliczyć odsetki (zwykłe) od 2524,95 rub. za 4 miesiące i 24 dni i dodać je do powyższéj sumy; można także (us. 7), obliczywszy, ile się utworzy ze 100 rub. oddanych na 6% w ciągu 4 miesięcy i 24 dni, następnie oznaczyć odrazu szukaną sumę:

360 dni —— 6
144 „ —— x

$x = 2,4$;

100 —— 102,4 rub.
2524,95 —— x „

$x = 2585,55$.

Odp. Utworzy się 2585 rub. i 55 kop. — [Jeżeli mamy pod ręką tablicę *), obejmującą wartości jednostki kapitału, umieszczonéj na procent składany przy różnych stopach procentu a corocznym dokładaniu odsetek, to moglibyśmy tu łatwo znaléść sumę, jaka się utworzy po upływie 4 lat, mnożąc 2000 rub. przez liczbę, która w tych tablicach odpowiada stopie 6% i 4 latom.]

Gdyby w powyższym zadaniu odsetki były dokładane nie corocznie, lecz co pół roku, to naprzód wypadłoby wykonać rachunek, podobny powyższemu, kolejno za 8 półroczy, przyjmując, że w każdym półroczu ze 100 rub. tworzy się 103 rub., a następnie uwzględnić owe 4 miesiące i 24 dnie.

(Zadania arytmetyczne. § 31, 32.)

§ 33. REGUŁA ODTRĄCANIA PROCENTU (DYSKONTA).

1. Jeżeli chcemy przyspieszyć zrealizowanie sumy pieniężnéj płatnéj nie w chwili obecnéj, lecz po pewnym dopiéro przeciągu czasu, to, przekazując ją nabywcy, na rzecz jego ustępujemy z téj sumy pewną kwotę, która przedstawia odsetki według umówionéj stopy procentu za cały przeciąg czasu, mający upłynąć do chwili wypłaty. Owe «odtrącanie procentu» z realizowanéj sumy pieniężnéj nazywa się «eskontem», albo «dyskontem» [1]) téj sumy pieniężnéj.

Realizowanie sumy pieniężnéj przed datą, w któréj ta suma jest płatną, dokonywa się zwykle wtedy, kiedy do terminu niewiele brak (mniéj

*) Zob. «Zadania arytmetyczne» (§ 32).

[1]) Dawniéj mówiono u nas «eskont» (escompte); od pewnego jednak czasu stanowczo przemaga wyraz «dyskont» (disconto), skąd: dyskontować, dyskontowy i t. d.

od roku). Dlatego zazwyczaj oblicza się ilość dni, mających upłynąć od *daty* realizowania takiéj sumy do *daty*, w któréj ma być uiszczoną całkowicie, t. j. do «terminu». Jedna z tych dwu dat (dni bieżących), według słusznego zwyczaju powszechnego, nie przyjmuje się w rachubę, a drugą datę uważa się jako dzień całkowity, wliczany do ogólnéj ilości dni. Co się zaś tyczy wyliczenia ilości dni, pośrednich między tymi dwiema datami, to w rozmaitych krajach różne panują zwyczaje, które przepisy prawne uświęciły. U nas przyjmuje się, że przy tych wyliczeniach rok ma 360 dni, a każdy miesiąc *) roku ma dni 30. We Francyi np. przyjmuje się, że rok ma dni 360, a dnie oddzielnych miesięcy wylicza się według rzeczywistéj ilości dni w każdym z owych miesięcy; w Anglii zaś przyjmuje się, że rok ma 365 lub (przestępny) 366 dni, a miesiące tyle dni, ile one ich rzeczywiście mają. — Jeżeli jednak u nas na zobowiązaniu piśmiennym, za okazaniem którego we właściwym terminie suma ma być płatną, ów termin jest oznaczony w ten sposób: «za tyleto dni» (od daty wystawienia owego zobowiązania), to, chcąc oznaczyć ów termin jako datę, w któréj ma nastąpić wypłata, należy przyjmować w każdym miesiącu rzeczywistą ilość jego dni. Taksamo postępować należy wrazie, gdy zobowiązanie zaciągnięte było na pewną ilość tygodni. —

Zadanie na obliczenie, ile trzeba potrącić z sumy pieniężnéj, płatnéj w pewnym terminie, przy realizowaniu jéj według oznaczonéj stopy procentu przed owym terminem, jest zadaniem na regułę potrącania procentu, czyli zadaniem na regułę dyskonta. Oczywiście, że możemy tu wyliczać, albo ile potrącić należy z owéj sumy realizowanéj przed terminem, albotéż wprost, jaka jest wartość téj sumy w dniu jéj realizowania.

2. Weźmy np. zadanie:

Ile należy zapłacić za weksel, wystawiony na 5 miesięcy w dniu 7-ym kwietnia r. 1884-ego na sumę 840-u rubli, dyskontując go po 6% w dniu 22-im maja r. 1884-ego?

Od 22-go maja do 7-go września tegoż roku jest 105 dni (t. j. $8+30+30+30+7$, albo $9+30+30+30+6$). Z sumy więc, napisanéj na wekslu, mamy potrącić odsetki za 105 dni. Zatym w dniu dyskonta téj sumy odsetki są w nią włączone. Należy więc uprzednio (por. § 32, us. 7) obliczyć odsetki od 100 rub. za owe 105 dni:

$$\begin{array}{l} 360 \text{ dni} \text{ —— } 6 \text{ rub.} \\ 105 \text{ ,, } \text{ —— } x \text{ ,,} \\ \hline x = \frac{6 \times 105}{360} = 1{,}75. \end{array}$$

*) Połowa więc każdego miesiąca ma 15 dni. — [Por. § 32, us, 8, 9.]

Kupujący przeto weksel od każdych 100 rub., które płaci za weksel, powinien za przeciąg czasu do dnia wypłaty wekslu *), otrzymać odsetek 1,75 rub., tak iż za każde 100 rub., które płaci za weksel, powinien w dniu wypłaty otrzymać wyłożone 100 rub. i odsetek od nich 1,75 rub., t. j. razem 101,75 rub. Jeżeli więc za 101,75 rubla, płatne w terminie wekslu, czyli za 101,75 rubla napisane na wekslu, płaci (w dniu dyskonta) 100 rub., to ile ma zapłacić za 860 rubli napisane na wekslu? (§ 32, us. 7).

$$\begin{array}{l} 101{,}75 \text{ rub.} \text{ —— } 100 \text{ rub.} \\ \underline{860 \quad „ \quad \text{——} \quad x \quad „} \end{array}$$

$$x = \frac{100 \times 860}{101{,}75} = 845{,}21.$$

Odp. Za weksel należy zapłacić 845 rub. i 21 kop., czyli z napisanéj na nim sumy należy potrącić 14 rub. i 79 kop.

3. W rzeczywistości nie wykonywa się dyskonta takim sposobem, jakiegośmy powyżéj użyli.

Owe 1,75 rubla, przedstawiające odsetki od 100 rubli za 105 dni do terminu, potrąca się z każdych 100 rubli, napisanych na wekslu. Kupujący przeto weksel za każde 100 rub., napisane na wekslu, zapłaci 98,25 rub. Jeżeli więc za 100 rub., napisane na wekslu zapłaci 98,25 rub., to ile ma zapłacić za 860 rub.? (§ 32, us. 7)

$$\begin{array}{l} 100 \text{ rub.} \text{ —— } 98{,}25 \text{ rub.} \\ \underline{860 \quad „ \quad \text{——} \quad x \quad „} \end{array}$$

$$x = \frac{98{,}25 \times 860}{100} = 844{,}95.$$

Odp. Za weksel należy zapłacić 844 rub. i 95 kop., czyli należy z sumy, napisanéj na wekslu, potrącić 15 rub. i 5 kop.

4. Sposób dyskontowania, wyłożony w us. 3-im, jest «sposobem handlowym», w przeciwstawieniu sposobowi, wyłożonemu w us. 2-im, który można nazwać »sposobem teoretycznym».

W sposobie handlowym potrąca się odsetki obliczone nie od sumy, wypłacanéj w dniu dyskonta, lecz odsetki, które, *nie zważając na wypłacaną sumę*, oblicza się od sumy wypisanéj na wekslu. Dlatego takie potrącanie procentu, jak również kwota tak potrącona nazywa się «dyskontem zewnątrz». W przeciwstawieniu temu, potrą-

---

*) Dyskontując ten weksel tegoż dnia we Francyi, należałoby tu wyliczyć

$$\begin{array}{l} 360 \text{ dni} \text{ —— } 6 \text{ rub.} \\ \underline{108 \quad „ \quad \text{——} \quad x \quad „} \end{array}$$

Dyskontując zaś go w Anglii, należałoby tu wyliczyć (r. 1884-y jest przestępny)

$$\begin{array}{l} 366 \text{ dni} \text{ —— } 6 \text{ rub.} \\ \underline{108 \quad „ \quad \text{——} \quad x \quad „} \end{array}$$

canie procentu, które ma miejsce przy dyskontowaniu sposobem teoretycznym, jak również kwota tak potrącona nazywa się «dyskontem wewnątrz» [1]).

Aby zdać sobie sprawę z różnicy, jaka zachodzi między tymi dwoma sposobami dyskonta, zważmy, że, dyskontując powyższy weksel (us. 2, 3) sposobami:

teoretycznym, płacimy 100 = 101,75—1,75 za 101,75 napisane na wekslu,
handlowym, „ 98,25 = 100 —1,75 „ 100 „ „ „ ,
gdzie 1,75 przedstawiają odsetki od 100. A więc sposobem teoretycznym potrącamy odsetki za przeciąg czasu, jaki ma upłynąć do terminu, obliczone według umówionéj stopy procentu od téj sumy pieniędzy, którą nabywca odstępowanéj sumy pieniężnéj za nią płaci. Sposobem zaś handlowym potrącamy odsetki za przeciąg czasu, jaki ma upłynąć do terminu, obliczone według umówionéj stopy procentu od większéj sumy pieniędzy, mianowicie od téj, która jest napisana na wekslu, t. j. którą nabywca późniéj otrzyma w terminie, oznaczonym na tym wekslu.

Dyskontując ów weksel sposobem handlowym, nabywca za przeciąg czasu, jaki ma upłynąć do terminu, otrzymuje 1,75 rub. odsetek od 98,25 rub., co jest więcéj (§ 32, us. 4) niż 6%.

Różnica dyskonta owego wekslu dwoma sposobami wyniosła 0,26 rub. Co ta kwota przedstawia?—Wartość wekslu, powyżéj wyznaczona sposobem teoretycznym, jest przybliżoną na 0,01 rub. (§ 21, us. 13). Aby należycie wyraźnie przedstawiło się nam znaczenie téj różnicy, wyznaczmy dokładniejsze przybliżenie owéj wartości, mianowicie weźmy wartość 845,208845 rub. Wtedy różnica dyskonta przedstawi się jako 0,258845 rub. Oczywiście ta różnica przedstawia odsetki od pewnéj sumy za owe 105 dni; znajdziemy tę sumę:

1,75 rub. —— 100 rub.
0,258845 „ —— x „

$$x = \frac{2588,45}{175} = 14,79.$$

Otrzymane 14,79 rub. przedstawia to, co potrącono z sumy, napisanéj na wekslu, dyskontując go sposobem teoretycznym (us. 2). A więc owa różnica przedstawia odsetki po 6% od dyskonta wewnątrz za przeciąg czasu, jaki ma upłynąć do terminu. O te więc odsetki od odsetek nabywca wekslu płaci mniéj, dyskontując go zewnątrz, niżby zapłacił, dyskontując wewnątrz.

Zwykle, jako przyczyną tego, że dyskontowanie weksli uskutecznia się zawsze sposobem handlowym, a nie teoretycznym, podają to, że piérwszym

[1]) «Escompte en dehors», «escompte en dedans».

z tych sposobów rachunek łatwiéj się wykonywa, niż drugim. Przy wekslach jednak na większe sumy różnica opłaciłaby wykonywanie nieco drobiazgowszego dzielenia, tymwięcéj, iż wszyscy, wykonywający w praktyce podobne obliczenia, dobrze rachować umieją. Możnaby to słuszniéj już usprawiedliwić tym, że instytucyja kredytowa, dyskontując weksle np. po 6%, nie osiągałoby w rzeczywistości 6%, gdyż z zatrzymanego dyskonta należałoby potrącić pewną część na utrzymanie téj instytucyi (co się téż uwzględnia przy wekslach na mniejsze sumy przez ściąganie przy ich dyskontowaniu opłaty dodatkowéj, gdyż wtedy różnica dwu sposobów dyskonta, z któréj swoją drogą owa instytucyja korzysta, jest bardzo nieznaczna). Prawdziwą jednak przyczyną jest to, że kupujący weksle znajdują się w położeniu wygodniejszym, niż ci, którzy je sprzedają, i dlatego ci ostatni musieli początkowo przystawać na warunki, jakie piérwsi im stawiali. Następnie zaś powszechny zwyczaj takie postępowanie uprawnił.

(Zadania arytmetyczne. § 33.)

---

§ 34. REGUŁA PODZIAŁU PROPORCYJONALNEGO. REGUŁA SPÓŁKI.

1. *Pewne liczby *) nazywamy wtedy **liczbami proporcyjonalnymi względem liczb danych**, kiedy stosunek dwu którychkolwiek z nich jest równy stosunkowi dwu odpowiednich im spośród liczb danych.* Tak np. jeżeli mamy dane liczby

$$2, \quad 5, \quad 7, \quad 10,$$

to np. liczby

$$5, \quad 12{,}5, \quad 17{,}5, \quad 25$$

są liczbami względem danych proporcyjonalnymi, gdyż

$$5 : 12{,}5 = 2 : 5; \quad 12{,}5 : 17{,}5 = 5 : 7; \quad 5 : 17{,}5 = 2 : 7, \quad \text{i t. d.}$$ [1]).

Względem tych samych liczb danych proporcyjonalnymi byłyby również np. liczby 6, 15, 21, 30, liczby 10, 25, 35, 50, i t. d., t. j. względem jakichkolwiek liczb danych może być nieskończenie wiele grup liczb proporcyjonalnych **).

Nawzajem, pewne liczby mogą być proporcyjonalne względem wielu grup liczb; we wszystkich jednak takich grupach stosunki liczb odpowiednich są też same. Np. liczby 5, 12,5, 17,5, 25 są proporcyjonalne względem liczb 2, 5, 7, 10, względem liczb 6, 15, 21,

---

*) Albo wszystkie oderwane, albotéż wszystkie mianowane (jednorodne).

[1]) Z tego wypada, że

$$5 : 2 = 12, \; 5 : 5 = 17, \; 5 : 7 = 25 : 10$$

t. j. stosunki każdéj z liczb (oderwanych), proporcyjonalnych względem liczb danych, do odpowiedniéj z tych liczb danych są sobie równe. (Tę własność zwykle przyjmują jako określenie liczb proporcyjonalnych względem danych).

**) Gdyż, mnożąc wszystkie liczby jednéj takiéj grupy przez jakąkolwiek liczbę, otrzymujemy liczby proporcyjonalne względem liczb danych (§ 27, us. 6 e).

30, względem liczb 0,2, 0,5, 0,7, 1, i t. d.; zawsze jednak np. 5 : 10 = 15 : 30 = 0,5 : 1 = i t. d.

Ze względu właśnie na to, że nam tu idzie tylko o stosunki zachodzące między liczbami danymi, względem których mamy mieć liczby proporcyjonalne, wypiszemy np. początkowo dane liczby tak:

$$2 : 5 : 7 : 10.$$

Na takie więc wyrażenie liczebne patrzyć będziemy, jako na krótszy sposób oznaczenia, jak tu, stosunków np.

$$2 : 5,\ \ 5 : 7,\ \ 7 : 10,\ \text{jakotéż}\ 2 : 7,\ \ 2 : 10\ \text{i}\ 5 : 10$$

Gdy więc powiemy: liczby mają być proporcyjonalne względem liczb 2:5:7:10, to przez to rozumieć będziemy, że np. stosunek piérwszéj z wyznaczyć się mających liczb do drugiéj z nich ma być równy stosunkowi 2 : 5, stosunek drugiéj do trzeciéj ma być równy stosunkowi 5 : 7, a stosunek trzeciéj do czwartéj ma być równy stosunkowi 7 : 10; z tych zaś stosunków wypada (§ 28, us. 11), że stosunek piérwszéj z wyznaczyć się mających liczb do trzeciéj z nich jest równy stosunkowi 2 : 7, i t. d.

2. Z tego wypada, że (§ 27, us. 6 e.) *wszystkie liczby dane, względem których mamy mieć liczby proporcyjonalne, możemy jednocześnie pomnożyć lub jednocześnie podzielić przez tę samę liczbę.* Dlatego zwykle, jeżeli pośród liczb danych są ułamkowe, zastępujemy je liczbami całkowitymi, a jeżeli wszystkie liczby dane mają spólny dzielnik, to przezeń je dzielimy. Tak np. gdy mamy wyznaczyć liczby proporcyjonalne względem liczb

$$0{,}2 : 0{,}05 : 0{,}6,$$

to zastąpimy je liczbami całkowitymi 20 : 5 : 60, a te prostszymi

$$4 : 1 : 12.$$

3. Niekiedy nie mamy tak wprost, jak powyżéj, danych liczb, względem których mają być wyznaczone liczby proporcyjonalne; lecz mamy dane tylko oddzielne stosunki między nimi. Tak np. jeżeli mają być wyznaczone cztéry liczby takie, iżby stosunek piérwszéj do drugiéj był równy stosunkowi 5 : 8, stosunek drugiéj do trzeciéj był równy stosunkowi 6 : 7, a stosunek drugiéj do czwartéj równy stosunkowi 36 : 35, to wtedy zastępujemy te stosunki takimi, iżby je można było w powyżéj wskazany sposób krócéj oznaczyć. W tym celu weźmy naprzód dwa piérwsze stosunki, t. j. 5 : 8 i 6 : 7. Wyraz 8 w piérwszym stosunku i wyraz 6 w drugim odpowiadają téj saméj, a mianowicie drugiéj z mających się wyznaczyć liczb; aby więc te dwa stosunki móc krócéj oznaczyć, trzeba je zastąpić takimi, w którychby zamiast owych liczb 8 i 6 zjawiła się pewna taż sama liczba. Najmniejsza spólna wielokrotna liczb 8 i 6 jest 24; pomnożymy więc oba wyrazy piérwszego stosunku przez 3, a drugiego przez 4; otrzymamy:

$$15 : 24 \quad \text{i} \quad 24 : 21, \quad \text{czyli } 15 : 24 : 21.$$

Następnie zaś zauważymy, że w tych stosunkach wyraz 24 i w trzecim z danych stosunków, t. j. w stosunku 36 : 35, wyraz 36 odpowiadają téj saméj, a mianowicie drugiéj z mających się wyznaczyć liczb. Podobnie więc, aby zamiast owych liczb 24 i 36 zjawiła się taż sama liczba, pomnożymy wszystkie wyrazy powyższych dwu stosunków przez 3, a oba wyrazy stosunku 36 : 35 przez 2, i miéć będziemy:

$$45 : 72 : 63 \quad \text{i} \quad 72 : 70, \quad \text{czyli } 45 : 72 : 63 : 70.$$

4. Gdybyśmy mieli zadanie: wyznaczyć liczby proporcyjonalne względem pewnych liczb danych, to z uwagi, że grup takich liczb może być nieskończenie wiele (us. 1), mielibyśmy nieskończenie wiele odpowiedzi, t. j. zadanie byłoby «nieoznaczone». W każdéj grupie liczb proporcyjonalnych względem liczb danych, wszystkie liczby albo są większe, albotéż są mniejsze od odpowiednich liczb innéj takiéj grupy *). Dlatego suma liczb któréjkolwiek grupy, proporcyjonalnych względem liczb danych, jest różną od sumy liczb innéj takiéj grupy. Nawzajem więc, jeżeli dana jest suma owych wyznaczyć się mających liczb, proporcyjonalnych względem liczb danych, to wtedy jest możliwa jedna tylko odpowiédź i zadanie możemy tak wysłowić: rozłożyć liczbę daną na części proporcyjonalne względem liczb danych. Takie zadanie nazywa się z a d a n i e m n a r e g u ł ę p o d z i a ł u p r o p o r c y j o n a l n e g o.

Weźmy np. zadanie: 15 960 złotych rozdzielić między trzech braci, mających 36, 24 i 16 lat, odwrotnie proporcyjonalnie względem ilości ich lat. — Mamy więc tu liczbę 15 960 zł. rozłożyć na trzy części, proporcyjonalne względem liczb

$$\frac{1}{36} : \frac{1}{24} : \frac{1}{16}, \text{ czyli (us. 2) } 4 : 6 : 9.$$

Ponieważ piérwsza część liczby 15 960 zł., czyli piérwsza liczba szukana, odpowiada liczbie 4, druga liczbie 6, a trzecia liczbie 9, zatym cała liczba dana 15 960 zł. odpowiada tu liczbie $4 + 6 + 9 = 19$. Skoro zaś cała liczba 15 960 zł. odpowiada liczbie 19, a piérwsza jéj część, t. j. piérwsza liczba szukana liczbie 4, przeto **) w całéj liczbie 15 960 zł. jest 19 takich równych sobie cząstek, jakichto cząstek 4 przedstawi owę piérwszą szukaną część téj liczby 15 960 zł., a więc (§ 19, us. 8) tą szukaną piérwszą częścią jest $\frac{4}{19}$ liczby 15 960

*) Wypada to z określenia liczb proporcyjonalnych względem liczb danych (us. 1).

**) Albo: przeto, jeżeli owę piérwszą część liczby 15 960 nazwiemy x, to

$$x : 15960 = 4 : 19,$$

skąd i t. d. Taksamo co do drugiéj i trzeciéj z owych części. (Znalazszy dwie z tych trzech części liczby 15 960, możemy, odejmując od téj liczby sumę owych dwu jéj części, wyznaczyć pozostałą.)

zł., czyli 15960 zł. $\times \frac{4}{19}$. Taksamo znajdziemy szukane drugą i trzecią części liczby 15960 zł. Otrzymujemy więc jako części liczby 15960 zł., proporcyjonalne względem liczb 4:6:9, odpowiednio

$$15960 \text{ zł.} \times \frac{4}{4+6+9};\quad 15960 \text{ zł.} \times \frac{6}{4+6+9};\quad 15960 \text{ zł.} \times \frac{6}{4+6+9}.$$

Z tych wyrażeń znajdziemy odpowiednio: 3360 zł., 5040 zł. i 7560 zł. Odp. Najstarszy brat otrzyma 3360 zł., średni 5040 zł., a najmłodszy 7560 zł.

Z tego widzimy, że *aby liczbę daną rozłożyć na dwie lub więcéj części, proporcyjonalnych względem tyluż liczb danych, należy ją oddzielnie pomnożyć przez każdy z ułamków, w którego liczniku jest jedna z owych liczb danych, a w mianowniku suma tych liczb.*

5. Zadanie, w którym mamy pewną liczbę rozłożyć na części proporcyjonalne względem liczb, które mamy dopiéro wyznaczyć z dwu lub więcéj warunków, a te warunki są wyrażone jako proporcyjonalne względem liczb danych, łatwo sprowadza się do zwyczajnego zadania takiego rodzaju, jak poprzednie. Np.

Za przewiezienie koleją żelazną partyi zboża, a mianowicie 240 korcy pszenicy, 160 korcy żyta, 320 korcy jęczmienia i 400 korcy owsa zapłacono razem (t. j. za ciężar wszystkiego zboża) 218 rub. 13 kop.; ile zapłacono oddzielnie za przewiezienie pszenicy, żyta, jęczmienia i owsa, jeżeli wiadomo, że korzec pszenicy waży 250 funtów, żyta 225 f., jęczmienia 195 f., a owsa 140 f.? Należy więc tu liczbę 218,13 rub. rozłożyć na cztéry części, proporcyjonalne względem liczb, które wyznaczymy z danych ilości korcy tych cztérech gatunków zboża i z danych ciężarów jednego korca tych gatunków zboża. Ilości korcy (wogóle: tych samych jednostek objętości) tych gatunków zboża są proporcyjonalne względem liczb

$$240 : 160 : 320 : 400, \text{ czyli } 6 : 4 : 8 : 10,$$

a odpowiednie ciężary jednego korca (wogóle: téj saméj jednostki objętości) tychże gatunków zboża są proporcyjonalne względem liczb

$$250 : 225 : 195 : 140, \text{ czyli } 50 : 45 : 39 : 28.$$

Ciężar zaś pewnéj ilości, np. korcy, jakiegoś zboża jest iloczynem ciężaru jednego korca przez liczbę oderwaną, odpowiadającą owéj ilości korcy; a więc ciężary wszystkiéj przewiezionéj pszenicy, żyta, jęczmienia i owsa, a tymsamym i opłaty za ich przewiezienie, są proporcyjonalne względem liczb:

$$(6 \times 50) : (4 \times 45) : (8 \times 39) : (10 \times 28), \text{ czyli } 75:45:78:70.$$

Sprowadziliśmy więc zadanie do takiego, jak poprzednie; rozwiązując je, znajdziemy, że za przewiezienie pszenicy zapłacono (§ 21, us. 13) 61,04 rub., żyta 36,63 rub., jęczmienia 63,48 rub., owsa 56,97 rub.

Gdyby w tym zadaniu był jeszcze warunek, że pszenica ma być przewieziona do stacyi 6 razy, a żyto do stacyi 4 razy daléj położonéj, niż stacyja, do któréj ma być przewieziony owies, a stosunek dróg, które mają odbyć żyto i jęczmień, jest 6 : 7, to przybyłby nam warunek do wyznaczenia opłat za te gatunki zboża, mianowicie proporcyjonalność dróg przewozu względem liczb (us. 3)

$$18 : 12 : 14 : 3.$$

Wtedy liczby, względem których są proporcyjonalne opłaty za przewóz oddzielnych gatunków zboża, należałoby wyznaczyć z warunków, iż ich ciężary i odległości, na jakie mają być przewiezione, są proporcyjonalne względem liczb

$$75 : 45 : 78 : 70 \quad \text{i} \quad 18 : 12 : 14 : 3.$$

Moglibyśmy tu albo rozumować podobnie jak poprzednio *), albotéż w taki sposób. Opłata od każdych 75 jednostek ciężaru zboża za każde 18 jednostek odległości jest taż sama, co za przewiezienie na jednostkę odległości 75×18 jednostek ciężaru, i t. d., tak iż wypadłoby liczbę 218,13 rub. rozłożyć na części proporcyjonalne względem liczb **)

$$(75 \times 18) : (45 \times 12) : (78 \times 14) : (70 \times 3).$$

A daléj, jak poprzednio.

6. Zadanie na regułę podziału proporcyjonalnego w tym przypadku, kiedy mamy daną ilość pieniędzy, przypadającą na rzecz dwu lub więcéj spólników, rozłożyć na części proporcyjonalne względem liczb, które należy wyznaczyć z danych warunków, określających udziały owych spólników, nazywa się z a d a n i e m n a r e g u ł ę s p ó ł k i.

Np. Na rzecz cztérech spólników przypada do podzielenia suma 10 800 zł. Suma ta jest zyskiem osiągniętym na przedsiębierstwie, do którego piérwszy spólnik włożył 2360 zł. na czas 2 lat i 3 miesięcy, drugi 4200 zł. na 1 rok i 8 miesięcy, trzeci 4500 zł. na 2 lata, 3 miesiące i 20 dni, a czwarty 3200 zł. na 2 lata i 10 miesięcy. Ostatni z tych spólników, jako inicyjator i kierownik tego przedsiębierstwa, ma zapewnione, iż zysk od jego wniosku względem zysku od wniosków innych spólników ma być liczony w stosunku 9 : 5. Po ile

---

*) Opłata za przewóz pewnej ilości jednostek ciężaru na pewną ilość jednostek odległości jest iloczynem opłaty za owę ilość jednostek ciężaru na jednostkę odległości przez liczbę oderwaną, odpowiadającą ilości owych jednostek odległości.

**) Odpowiadających ciężarom, rachowanym na jednostkę odległości, czyli wogóle, rachowanym na tę samę odległość.

przypada z owéj sumy na rzecz każdego ze spólników? Mamy tu liczbę 10800 rozłożyć na cztéry części proporcyjonalne względe liczb, które mamy wyznaczyć z warunków, iż: ich wnioski pieniężne są proporcyjonalne względem liczb

$$2360 : 4200 : 4500 : 3200, \quad \text{czyli} \quad 118 : 210 : 225 : 160,$$

czasy obrotu tych wniosków proporcyjonalne względem liczb (przyjmując rok = 360 dniom; § 32, us. 8)

$$810 : 600 : 830 : 1020, \quad \text{czyli} \quad 81 : 60 : 83 : 102,$$

a stosunkowa wielkość udziałów przy obliczaniu zysków proporcyjonalna względem liczb

$$5 : 5 : 5 : 9.$$

Weźmy naprzód pod uwagę tylko dwa piérwsze warunki. Ten sam udział w ogólnym zysku, który przypada piérwszemu spólnikowi za 118 jednostek kapitału, będących w obrocie w ciągu 81 jednostek czasu, przypadłby od kapitału, będącego w obrocie w ciągu jednostki czasu, w takim razie, kiedyby jednostek kapitału było 81 razy więcéj I t. d. A więc udziały tych spólników będą takie, jakie wyznaczymy z warunku, iż kapitały, będące w obrocie w ciągu tego samego przeciągu czasu, są proporcyjonalne względem liczb

$$(118 \times 81) : (210 \times 60) : (225 \times 83) : (160 \times 102).$$

Wskutek zaś trzeciego z danych warunków, każda jednostka kapitału czwartego spólnika jest przy obliczeniu udziałów zysku 1,8 raza więcéj warta od każdéj jednostki każdego z pozostałych spólników. A więc ostatecznie udziały tych spólników w osiągniętym zysku są proporcyjonalne względem liczb

$$(118 \times 81) : (210 \times 60) : (225 \times 83) : (160 \times 102 \times 1{,}8).$$

A daléj jak poprzednio.

(Zadania arytmetyczne. § 34.)

---

§ 35. REGUŁA MIESZANINY.

1. Jeżeli zadanie, w którym jest mowa o mieszaninie dwu lub więcéj czyto różnorodnych ciał *), czyteż różnych tylko gatunków pewnego ciała **), sprowadza się albo do wyliczenia własności ***) mieszaniny, albotéż do wyznaczenia stosunków, w jakich do téj mie-

---

*) Np. o stopie cynku i miedzi, zwanym mosiądzem, o mieszaninie alkoholu i wody, zwanéj wódką, i t. d.

**) Np. o mieszaninie różnych gatunków nasion trawiastych, różnych gatunków tytoniu, i t. d.

***) Niekiedy, wszczególności, ceny.

szaniny mają być wzięte ilości owych składających ją części, to nazywa się ono zadaniem na regułę mieszaniny.

Tu należą zadania, do których wchodzi t. z. próba złota lub srebra. Próbą złota lub srebra nazywamy stosunek wagi czystego metalu szlachetnego w pewnym przedmiocie metalowym do wagi całkowitéj tego przedmiotu. Stosunek ten wyraża się w cząstkach wagi menniczéj; wyrażenie więc tego stosunku zależy od owéj wagi, prawnie w pewnym kraju używanéj, a któréj się dorozumiéwa przy wypowiadaniu próby.

U nas dawniéj (a od r. 1815 prawnie) wagą menniczą dla wyrobów srebrnych była «grzywna kolońska», dzieląca się na 16 łutów (po 18 granów menniczych); dlatego próba np. 12-sta srebra oznacza, że w przedmiocie, tą próbą ocechowanym, stosunek wagi czystego srebra do wagi całkowitéj przedmiotu jest 12 : 16. Dla wyrobów złotych przyjmowano 24 karaty (po 12 granów karatowych), jako oznaczające czyste złoto, tak iż w wyrobie złotym np. 18-stokaratowym stosunek wagi czystego złota do całkowitéj wagi przedmiotu jest 18 : 24.

Od r. 1842 wprowadzono jako wagę menniczą dla wyrobów złotych i srebrnych funt rosyjski z podziałem na 96 zołotników. Zatym np. 72-ga próba wyrobu z metalu szlachetnego oznacza, iż stosunek wagi tego metalu do całkowitéj wagi przedmiotu jest 72 : 96.

W krajach, w których systemat metryczny jest w powszechnym użyciu, wyraża się próba srebra i złota w tysiącznych częściach jednostki wagi całkowitéj przedmiotu; gdy więc np. mówią: srebro próby 0,950, to oznacza, że stosunek wagi czystego srebra do całkowitéj wagi przedmiotu jest 0,950 : 1. —

Dla niektórych mieszanin cieczy istnieją również umówione sposoby oznaczania stosunku, w jakim ciecze z sobą zmieszane zostały. Zwykle jednak odnoszą się one do stosunku objętości. Tak np. wyrażenie: «wódka 65 stopni» oznacza wódkę takiéj saméj «mocy» jaką, posiada mieszanina 65-u jednostek objętości alkoholu z 35-u (t. j. 100 — 65) jednostkami objętości wody.

2. Weźmiemy naprzód pod uwagę zadania, w których, mając dane własność i ilość każdego z przedmiotów mieszanych, szukamy własności mieszaniny.

Np. Stopiono razem 5 funtów srebra 72-éj, 5 fun. 84-éj, 3 fun. 90-éj próby oraz 1 funt miedzi; jakiéj próby jest stop? — Ten stop zawiéra srebra

$$72 \times 5 + 84 \times 5 + 90 \times 3$$

zołotników, a waży $5 + 5 + 3 + 1 = 14$ funtów. W jednym więc funcie stopu jest

$$\frac{72\times5+84\times5+90\times3}{5+5+3+1}=\frac{1050}{14}=75$$

zołotników srebra. Zatym stosunek wagi czystego srebra do wagi całkowitéj stopu jest 75 : 96, czyli ten stop jest 75-éj próby. — Gdyby w zadaniu zamiast funtów były np. dane łuty, t. j. piérwszego gatunku srebra było 5 łutów, drugiego 5 ł., trzeciego 3 ł., a miedzi 1 ł., to rachunek byłby ten sam; niecoby się tylko zmienił sposób jego objaśnienia. Mianowicie, moglibyśmy powiedziéć tak: w każdéj jednostce wagi (łucie) piérwszego gatunku srebra na 96 cząstek jest 72-ie czystego srebra, w każdéj drugiego gatunku 84 cząstek, a w każdéj trzeciego 90 cząstek; we wszystkich więc $5+5+3+1$ jednostkach wagi stopu na 96×14 cząstek jest czystego srebra $72\times5+84\times5+90\times3$ takichże cząstek, a przeto w jednostce wagi stopu na 96 cząstek czystego srebra jest $\frac{72\times5+\dots}{5+\dots}=75$ cząstek. Zatym stosunek wagi i t. d. (jak poprzednio).

Łatwo spostrzéc, że takie zadanie [1]) jest właściwie zadaniem na wyznaczenie średniéj arytmetycznéj (§ 7, us. 25). —

Jeżelibyśmy mieli np. zadanie: Kupiec zmieszał 10 fun. herbaty po 2 rub., 12 fun. po 2 rub. 50 kop. i 15 fun. po 1 rub. 75 kop.; po czemu ma sprzedawać funt téj mieszaniny, jeżeli chce jeszcze na niéj zarobić 8 rub.?, to, rozumując podobnie i zważając, że do sumy pieniężnéj, którą on ma otrzymać ze sprzedaży $10+12+15$ funtów téj mieszaniny wejdą owe 8 rub., znajdziemy, że ma sprzedawać funt po kopiéjek

$$\frac{200\times10+250\times12+175\times15+800}{10+12+15}.$$

3. Zadanie odwrotne powyższemu, t. j. zadanie, w którym, mając dane własność każdego z przedmiotów mieszanych i własność mieszaniny, chcemy wyznaczyć stosunki, w jakich mają być wzięte ilości mieszanych przedmiotów, rozważymy naprzód w przypadku, gdy mieszamy dwa tylko przedmioty.

Np. W jakim stosunku należy brać srebro 90-éj i srebro 72-éj próby, aby otrzymać stop 84-éj próby? — Każda jednostka wagi srebra piérwszego gatunku ma zawiele 6 cząstek, a każda jednostka

---

[1]) Do tego rodzaju zadań sprowadzają się zadania na oznaczenie «średniego terminu» kilku weksli Np. Ktoś chce zamiast 3-ch weksli: jednego na 250 rub. płatnego za 40 dni, drugiego na 300 rub płatnego za 50 dni i trzeciego na 500 rub. płatnego za 70 dni, wystawić jeden weksel za sumę $250+300+500=1050$ rub.; jaki powinien być termin owego wekslu? — Dyskont od piérwszego wekslu jest dziś ten sam, co od sumy (250×40) r. za jeden dzień i t. d.; termin więc owego wekslu na sumę 1050 rub. nastąpi po upływie dni

$$\frac{250\times40+300\times50+500\times70}{250+300+500}.$$

drugiego gatunku ma zamało 12 cząstek czystego srebra *). Jeżeli na każde 12 jednostek wagi piérwszego gatunku weźmiemy 6 jednostek wagi drugiego, to w tych 12 jednostkach piérwszego gatunku miéć będziemy zawiele 6×12 cząstek, gdy w 6 jednostkach drugiego miéć będziemy zamało 12×6 cząstek, a więc stop 12 jednostek wagi piérwszego gatunku i 6 jednostek wagi gatunku drugiego będzie żądanéj próby. Widzimy więc, że stosunek, w jakim mają być wzięte ilości (na wagę) tych dwu gatunków srebra, jest 12 : 6, czyli 2 : 1, a zatym jest odwrotny względem stosunku różnic między liczbą, wyrażającą własność mieszaniny, a liczbami, wyrażającymi własności dwu mieszanych przedmiotów **). Ślad tego rozumowania zwykle tak zaznaczamy:

90		6 cz.	12 jed.	2 jed.
	84			
72		12 cz.	6 jed.	1 jed.

Gdybyśmy, zamiast powyższego, mieli zadanie: Ile trzeba wziąć srebra 90-éj i srebra 72-éj próby, aby utworzyć stop 18 funtów srebra 84-éj próby?, to, znalazszy, jak powyżéj, że stosunek, w jakim mają być wzięte ilości tych dwu gatunków jest 2 : 1, należałoby następnie rozwiązać dodatkowo zadanie na regułę podziału proporcyjonalnego (§ 34, us. 4): rozłożyć 18 funtów na dwie części w stosunku 2 : 1, i znaleźlibyśmy, że należy wziąć gatunku

$$\text{1-ego } 18 \text{ f.} \times \frac{2}{2+1}, \text{ a 2-go } 18 \text{ f.} \times \frac{1}{2+1}.$$

4. Weźmy teraz przypadek, kiedy w zadaniu tego rodzaju, co poprzednie, mieszamy więcéj niż dwa przedmioty.

Np. Mając trzy gatunki tytoniu: na 420, 400 i 300 kopiejek funt, w jakim stosunku powinniśmy je mieszać, aby wartość funta mieszaniny wynosiła 380 kop.? — Wartość funta piérwszego gatunku i funta drugiego jest za wielką odpowiednio o 40 kop. i o 20 kop., wartość zaś funta trzeciego gatunku jest za małą o 80 kop. Na każdy więc funt trzeciego gatunku powinniśmy tyle wziąć piérwszego i drugiego, aby razem wziąć zawiele o 80 kop. Tyle zatym mamy wziąć jednostek piérwszego gatunku i tyle drugiego, aby mnożąc 40 kop. przez liczbę oderwaną, odpowiadającą ilości jednostek piérwszego gatunku, i mnożąc 20 kop. przez liczbę oderwaną, odpowiadającą ilości jednostek gatunku drugiego, otrzymać, jako sumę

*) Gdybyśmy podobnie mieszali np. srebro 90-éj próby z miedzią (moglibyśmy o niéj powiedzieć, że jest próby 0), pragnąc otrzymać stop 84-éj próby, to odpowiednio byłoby zawiele 6 cząstek i zamało 84 cząstki.

**) T. j. względem stosunku (90 — 84) : (84 — 72).

tych dwu iloczynów, 80 kop. Czyli mamy tu zadanie: wyznaczyć dwie liczby takie, aby suma iloczynu 40 przez jednę z nich i iloczynu 20-u przez drugą była 80 [1]). Jednéj z tych liczb szukanych możemy nadawać różne wartości; gdy bowiém, jako wartości np. piérwszéj z nich, przyjmiemy pokolei: 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ i t. d., to, gdy

$$40 \times 1 + 20 \times \text{drugą} = 80, \quad 40 \times 0{,}5 + 20 \times \text{drugą} = 80, \text{ i t. d.},$$

mieć będziemy (§ 5, us. 7) odpowiednio: $20 \times \text{drugą} = 80 - 40 \times 1$ i t. d., skąd (§ 7, us. 5; § 17, us. 5)

$$\text{druga} = \frac{80 - 40 \times 1}{20} = 2; \text{ albo} = \frac{80 - 40 \times 0{,}5}{20} = 3;$$

$$\text{albo} = \frac{80 - 40 \times 0{,}25}{20} = 3{,}5, \text{ i t. d.}$$

Wypada więc, że te trzy gatunki możemy mieszać z sobą proporcyjonalnie względem liczb (§ 34, us. 4, 2)

$$1 : 2 : 1,$$

$$\text{albo } \tfrac{1}{2} : 3 : 1, \quad \text{czyli } 1 : 6 : 2,$$

$$\text{„} \quad \tfrac{1}{4} : 3\tfrac{1}{2} : 1, \quad \text{„} \quad 1 : 14 : 4,$$

$$\text{„} \quad \tfrac{1}{5} : 3\tfrac{3}{5} : 1, \quad \text{„} \quad 1 : 18 : 5,$$

$$\text{„} \quad \tfrac{2}{5} : 3\tfrac{1}{5} : 1, \quad \text{„} \quad 2 : 16 : 5,$$

i t. d.

Zadanie więc to może mieć nieskończenie wiele odpowiedzi i dlatego nazywamy je zadaniem nieoznaczonym.

Jeżelibyśmy, zamiast powyższego, mieli np. zadanie: Ile trzeba wziąć tytoniu z gatunków na 420, 400 i 300 kop. funt., aby utworzyć 15 funtów mieszaniny, któréjby funt był wart 280 kop.?, to i ono byłoby nieoznaczone, gdyż miałoby nieskończenie wiele rozwiązań, odpowiadających rozłożeniu 15-u funtów na trzy części, proporcyjonalne (§ 34, us. 4) albo względem liczb 1 : 2 : 1, albo względem liczb 1 : 6 : 2, albo względem liczb 2 : 16 : 5 i t. d.

Zadania takie byłyby również nieoznaczone wrazie, gdyby, zamiast trzech przedmiotów mieszanych, było ich więcéj. —

Widzimy więc, że zadanie, w którym, mając dane własności każdego z przedmiotów mieszanych i własność mieszaniny, chcemy

---

[1]) Wyrażając się, jak w algiebrze, gdy piérwszą z liczb szukanych nazwiemy x, a drugą y, mamy rozwiązać w liczbach dodatnych (choćby ułamkowych) równanie nieoznaczone

$$40 . x + 20 . y = 80.$$

wyznaczyć stosunki, w jakich mają być wzięte ilości mieszanych przedmiotów, jest nieoznaczone (t. j. posiada nieskończenie wiele odpowiedzi) w przypadku, gdy mieszamy z sobą więcéj niż 2 przedmioty.

Oczywiście, że to zadanie, tak w przypadku, kiedy mieszamy dwa przedmioty, jak i wogóle, kiedy mieszamy ich więcéj, jest możliwe tylko wtedy, kiedy własność mieszaniny wyraża się liczbą pośrednią między najmniejszą i największą z liczb, wyrażających własność przedmiotów mieszanych.

(Zadania arytmetyczne. § 35.)

---

§ 36. REGUŁA ŁAŃCUCHOWA.

1. Jak widzieliśmy (§ 30, us. 1), w zadaniu na regułę trzech, mając daną jednę parę odpowiadających sobie wartości dwu wielkości proporcyjonalnych względem siebie, szukamy innéj wartości jednéj z tych wielkości, odpowiadającéj danéj (drugiéj) wartości drugiéj z tych wielkości. Może być jednak, że w zadaniu, w którym mamy znaléść wartość pewnéj wielkości, odpowiadającą danéj wartości drugiéj wielkości, nie mamy danéj pary bespośrednio sobie odpowiadających innych wartości tychże wielkości [1]). Np.

Ile rubli zapłacono za 3 włóki ziemi, jeżeli za 125 diesiatyn zapłacono 13 020 rubli i jeżeli przy tym wyliczeniu przyjmujemy, że 1000 diesiatyn = 1092,5 hektara (str. 138; § 21, us. 13), a 100 morgów = 56 hektarom (§ 21, us. 11 e.)?

Mamy w tym zadaniu znaléść pewną ilość rubli, odpowiadającą 3 włókom, ale nie mamy danych bespośrednio odpowiadających sobie pary innych wartości tych dwu wielkości: ilości rubli i ilości włók. Jeżeli tu dodamy jeszcze to, co w tym zadaniu jest uważane jako wiadome, a mianowicie, że włóka ma 30 morgów, to owych dwu wielkości: ilości rubli i ilości włók mamy w tym zadaniu dane dwie oddzielne wartości, 13 020 rubli i 1 włókę, z których piérwsza odpowiada 125 diesiatynom, a druga 30 morgom. Tych zaś dwu wielkości: ilości diesiatyn i ilości morgów nie mamy tu pary odpowiadających sobie wartości, lecz tylko mamy dane dwie ich oddzielne wartości: 1000 diesiatyn i 100 morgów, z których piérwsza odpowiada 1092,5 hektara, a druga 56 hektarom; te więc dane dwie wartości dwu wielkości: ilości diesiatyn i ilości morgów (1000 dies. i 100 mor.) odpowiadają dwu danym wartościom téj saméj wielkości: ilości hektarów. [Gdyby w tym zadaniu np. zamiast 56 hektarów było 5600 arów, to

---

[1]) W podobnych zadaniach jest mowa zawsze o wielkościach wprost proporcyjonalnych względem siebie (por. str. 364, odsyłacz).

1092,5 hektara i 5600 arów byłyby dwiema oddzielnymi wartościami dwu wielkości: ilości hektarów i ilości arów, którychto wielkości dwie inne wartości: 1 hektar i 100 arów przedstawiałyby parę odpowiadających sobie wartości.] — Do danego więc zadania wchodzą wielkości: ilość rubli, ilość włók, ilość diesiatyn, ilość morgów i ilość hektarów. Dwie wartości każdéj z tych wielkości odpowiadają wartościom dwu różnych wielkości, tak iż w tym zadaniu mamy jakby szereg «ogniw», łączących z sobą różne wielkości, wchodzące do zadania.

W zadaniach takich mamy znaléść wartość pewnéj wielkości, odpowiadającą danéj wartości drugiéj wielkości, gdy drugie dane wartości tych wielkości nie przedstawiają pary odpowiadających sobie wartości, lecz są dwiema oddzielnymi ich wartościami, odpowiadającymi dwu danym wartościom innéj wielkości, lubtéż dwu danym wartościom oddzielnym dwu różnych wielkości; w tym ostatnim razie mamy jeszcze dane albo parę odpowiadających sobie wartości tych dwu ostatnich wielkości, albotéż dwie ich oddzielne wartości, odpowiadające dwu danym wartościom pewnéj innéj jeszcze wielkości, lubtéż dwu danym wartościom oddzielnym dwu jeszcze innych wielkości; w tym ostatnim razie i t. d.; ostatecznie zaś, albo dane dwie wartości pewnych dwu wielkości sobie odpowiadają, albotéż odpowiadają dwu danym wartościom pewnéj téj saméj wielkości.

Takie zadanie nazywamy **zadaniem na regułę łańcuchową**. W zadaniu na regułę łańcuchową należy znaléść wartość pewnéj wielkości, odpowiadającą danéj wartości drugiéj wielkości, gdy inne dane wartości tych dwu wielkości sobie nie odpowiadają, wszystkie zaś dane wartości (jednéj lub więcéj) innych wielkości są takie, że dwie wartości każdéj z wielkości, wchodzących do zadania, odpowiadają wartościom dwu różnych z tych wielkości.

2. Chcąc rozwiązać powyższe zadanie, wypiszemy je uprzednio tak, jak zwykle robiliśmy, t. j. tak, aby dwie wartości téj saméj wielkości znalazły się pod sobą. Szukamy niewiadoméj ilości rubli; zacznijmy (najdogodniéj) od danéj wartości ilości rubli, t. j. od 13 020 rubli

13020 rub. —— 125 dies.
1000 dies. —— 1092,5 Hara
56 Harów —— 100 mr.
30 mr. —— 1 wł.
x rub. —————————— 3 wł.

Zwykle, oszczędzając miejsca, wypisujemy to zadanie w ten sposób:

13 020 rub.	——	125 dies.
1 000 dies.	——	1092,5 Hara
56 Harów	——	100 mor.
30 mor.	——	1 włóce
3 włóki	——	x rub.

I tu, jak poprzednio, dwie wartości téj saméj wielkości wchodzą do dwu następujących po sobie wiérszy, tak iż wiérsz jeden kończy się, a następujący zaczyna od wartości téj saméj wielkości, a ostatni wiérsz kończy się wartością téj wielkości, od któréj wartości zaczyna się wiérsz piérwszy (te więc dwie wartości «zamykają łańcuch»). — Ponieważ mamy znaléść wartość ilości rubli, odpowiadającą 3 włókom, więc, wychodząc z tego, że 125 diesiatynom odpowiada 13 020 rub., będziemy kolejno, przechodząc przez hektary i morgi, dążyć do znalezienia szukanéj liczby. Wypadnie więc *) w ten sposób rozumować:

jeżeli za 125 dies. zapłacono 13020 r., to za 1 dies. zapł. $\frac{13020}{125}$ r.

„ 1 dies. „ $\frac{13020}{125}$ r., „ 1000 dies. **) zapłacono $\frac{13020\times1000}{125}$ r.

„ 1092,5 Hara „ $\frac{13020\times1000}{125}$ r., „ 1 Har zapłacono $\frac{13020\times1000}{125\times1092{,}5}$ r.

„ 1 Har „ $\frac{13020\times1000}{125\times1092{,}5}$ r., to za 56 Harów ***) zapłacono $\frac{13020\times1000\times56}{125\times1092{,}5}$ r.

„ 100 mor. „ $\frac{13020\times1000\times56}{125\times1092{,}5}$ r., to za 1 mórg zapł. $\frac{13020\times1000\times56}{125\times1092{,}5\times100}$ r.

„ 1 mórg „ $\frac{13020\times1000\times56}{125\times1092{,}5\times100}$ r., to za 30 morgów zapł. $\frac{13020\times1000\times56\times30}{125\times1092{,}5\times100}$ r.

„ 1 włókę „ $\frac{13020\times1000\times56}{125\times1092{,}5\times100}$ r., to za 3 włóki zapł. $\frac{13020\times1000\times56\times30\times3}{125\times1092{,}5\times100}$ r.

Znaleźliśmy, ile zapłacono rubli za 3 włóki; że zaś tę ilość rubli nazwaliśmy x, zatym:

$$x=\frac{13020\times1000\times56\times30\times3}{125\times1092{,}5\times100}.$$

*) Nie wykonywamy tu żadnych skróceń w otrzymywanych ułamkach, aby móc wnieść z odpowiedzi, jak ona powstaje z liczb, danych w zadaniu.

**) Czyli, według zadania, 1092,5 Hara.

***) Czyli 100 morgów.

Porównywając ten wypadek z powyższym wypisaniem zadania w dwu kolumnach, możemy [1]) powiedzieć: *jeżeli zadanie na regułę łańcuchową, wypiszemy w dwu kolumnach tak, żeby drugi i następne wiérsze zaczynały się od wartości téj saméj wielkości, któréj wartością *) poprzedni wiérsz się kończy, i gdy ostatni wiérsz kończy się wartością téj wielkości, od któréj wiérsz piérwszy się zaczyna **), to liczba szukana równa się iloczynowi wszystkich liczb, znajdujących się w innéj, niż liczba szukana, kolumnie, podzielonemu przez iloczyn wszystkich liczb, znajdujących się w téj saméj, co liczba szukana, kolumnie.*

W tak ułożonym zadaniu którekolwiek dwie liczby, wchodzące do różnych kolumn, są czynnikami jedna dzielnéj, a druga dzielnika (albo: jedna licznika, a druga mianownika). Dlatego, po takim ułożeniu zadania, albo wypiszemy wprost według powyższéj wskazówki wyrażenie szukanéj liczby (por. § 20, us. 5) i dzielić będziemy, jeżeli można, czynnik licznika i czynnik mianownika przez ich spólny dzielnik (§ 19, us. 4), albotéż wykonamy toż samo uprzednio, t. j. w wypisanym zadaniu zniesiemy ułamki, mnożąc dwie liczby różnych kolumn przez odpowiednią tę samę liczbę, i następnie dzieląc dwie liczby różnych kolumn przez ich spólny dzielnik.

3. Oczywiście, że moglibyśmy tu każde takie zadanie rozłożyć na odpowiednie zadania na regułę trzech (§ 31). Tak np. powyższe zadanie rozłożone być może na następujące:

125 dies. —— 13 020 rub.
1000 „ —— *y* „

1092,5 Hara —— *y* rub.
56 „ —— *z* „

100 mor. —— *z* rub.
30 „ —— *u* „

1 wł. —— *u* rub.
3 „ —— *x* „

gdzie *y*, *z*, *u* są liczbami wyrażającymi odpowiednie wartości ilości rubli, które kolejno (por. § 31, us. 1) z tych zadań wyznaczone być mogą. Jeżeli chcemy postąpić tak, jak w us. 3-im § 31-ego, to możemy utworzyć proporcyje

$$\begin{aligned} y : 13020 &= 1000 : 125, \\ z : y &= 56 : 1092{,}5, \\ u : z &= 30 : 100, \\ x : u &= 3 : 1. \end{aligned}$$

[1]) Gdyby dwie z wchodzących do zadania wielkości były odwrotnie proporcyjonalne względem siebie, to wypowiedziane prawidło nie miałoby zastosowania.

Zrobimy tu uwagę, że można je zastosować do rozwiązania zadania na regułę trzech (§ 30) w przypadku, kiedy wielkości są wprost proporcyjonalne względem siebie.

*) Wyrażoną przy pomocy téj saméj jednostki.

**) Można, układając tak zadanie, zacząć je od którejkolwiek z liczb, do niego wchodzących: niema to żadnego wpływu na wypadek. Rozumowanie tylko jest najzręczniejsze, gdy zadanie jest tak ułożone, jak powyżéj.

Mnożąc zaś, jak tam, te proporcyje przez siebie i oba wyrazy piérwszego stosunku dzieląc przez liczby y, z i u, otrzymamy proporcyją

$$x : 13020 = (1000 \times 56 \times 30 \times 3) : (125 \times 1092{,}5\,100),$$

z któréj wypada

$$x = \frac{13020 \times 1000 \times 56 \times 30 \times 3}{125 \times 1092{,}5 \times 100},$$

t. j. wyrażenie liczby szukanéj, utworzone według wskazówki, podanéj w ustępie poprzedzającym.

(Zadania arytmetyczne. § 36.)

---

§ 37. REGUŁA FAŁSZYWEGO ZAŁOŻENIA.

Zadanie, w którym należy wyznaczyć liczbę z warunku, że pewne dwie liczby, od tamtéj zależne, mają być równe sobie, może być rozwiązane zapomocą dwu dowolnie zrobionych przypuszczeń co do liczby szukanéj, oraz odpowiadających (oddzielnie każdemu z tych przypuszczeń) wartości różnicy owych dwu liczb, które powinnyby, według zadania, być równe sobie. Taka metoda rozwiązywania tego rodzaju zadań (dawniéj wielce rospowszechniona) nazywa się **regułą fałszywego założenia** (właściwiéjby: fałszywego przypuszczenia).

Np. Za 36 łokci sukna dwu gatunków, jednego po 12 złp. łokieć, a drugiego po 10 złp. łokieć, zapłacono 390 złp.; ile kupiono łokci każdego gatunku? — Jeżeli wyznaczymy np. ilość łokci piérwszego gatunku, to, odejmując tę liczbę od 36 łokci, mieć będziemy liczbę łokci gatunku drugiego. Ta zaś mająca się wyznaczyć ilość łokci piérwszego gatunku ma być taką, aby wartość wszystkich 36-u łokci była równa liczbie 390 złp,

Przypuśćmy, popiérwsze, że ilość łokci sukna gatunku piérwszego jest np. 10; w takim razie drugiego gatunku byłoby 26 łokci, i

(12 złp. $\times$ 10) + (10 złp. $\times$ 26) = 380 złp.; 390 złp. — 380 złp. = 10 złp.

Przypuśćmy, powtóre, że ilość łokci sukna piérwszego gatunku jest np. 12; w takim razie drugiego gatunku byłoby 24 łokcie, i

(12 złp. $\times$ 12) + (10 złp. $\times$ 24) = 384 złp.; 390 złp. — 384 złp. = 6 złp.

Zauważmy, że różnica w ilości kupionych łokci sukna gatunku piérwszego jest proporcyjonalną względem różnicy między odpowiednimi ilościami rubli, należnymi za wszystkie 36 łokci (jak to łatwo sprawdzić, robiąc jakiekolwiek inne: trzecie, czwarte i t. d. przypuszczenia). Wychodząc więc z któregokolwiek z tych przypuszczeń, np. z drugiego (12 łokci), przy którym osiągamy o 6 złp. mniéj, niżby należało, możemy skorzystać z tego, że stosunek różnicy między szukaną ilością łokci sukna gatunku piérwszego i 12 jego łokciami, którąto różnicę nazwijmy: r łokci, do różnicy między dwoma zrobionymi przypuszczeniami, t. j. do 2 łokci, jest równy stosunkowi różnicy między wartościami odpowiednimi wszystkich 36 łokci, t. j. stosunkowi

(390 złp. — 384 złp.) : (384 złp. — 380 złp.),

czyli stosunkowi 6 : 4. Mamy więc

$$r : 2 = 6 : 4, \quad \text{skąd } r = 3.$$

Szukana więc liczba jest o 3 łokcie większą od ilości łokci w drugim przypuszczeniu (12 łok.); a więc jest nią 15 łok. Znaleźliśmy więc, że piérwszego gatunku sukna kupiono 15 łokci, a drugiego 21 łokci. —

Z powyższego widzimy, że tę metodę rozwiązywania można stosować tylko do takich zadań, w których *zmiana wartości liczby szukanéj jest proporcyjonalną względem różnicy owych dwu liczb, które powinnyby, według zadania, być sobie równe.* W każdym przeto danym przypadku należy uprzednio sprawdzić, czy to istotnie ma miejsce.

PRZYPISEK I.

(Zob str. 170.)

WARUNKI PODZIELNOŚCI PRZEZ LICZBY PIÉRWSZE WZGLĘDEM 10-U.

NAPISAŁ

Dr. ANTONI ŻBIKOWSKI,

NAUCZYCIEL ZASŁUŻONY GIMNAZYJUM 1-GO W KAZANIU [1]).

1. Jeżeli dziesiątki jakiéjkolwiek liczby danéj L nazwiemy a, jedności jéj zaś nazwiemy b, to możemy ją przedstawić:

(1) $$L = 10a + b.$$

Gdy mamy nadto jakąkolwiek liczbę zakończoną na cyfrę 1 i nazwiemy ją d, a jéj dziesiątki n, to ta liczba będzie «postaci»

$$d = 10n + 1.$$

Utwórzmy wyrażenie:

$$a - bn.$$

Ponieważ z (1) wypada $a = \frac{L - b}{10}$, zatym

$$a - bn = \frac{L - b}{10} - bn = \frac{L - (10n + 1)b}{10} = \frac{L - bd}{10},$$

skąd otrzymujemy

(2) $$L = 10(a - bn) + bd.$$

Rozłożyliśmy L na sumę dwu składników. Jeden z nich, bd, jest oczywiście podzielny przez d; aby więc liczba L była podzielna przez d, trzeba, aby jéj składnik $10(a - bn)$ był podzielny przez d. Ten zaś składnik jest iloczynem dwu czynników, z których piérwszy, 10, jest liczbą piérwszą względem liczby

---

[1]) Autor, w zwięźlejszéj niż tu formie, w tomie III *Bulletin*'u akademii nauk w Petersburgu (r. 1860), jakotéż w artykule *Ułatwione sposoby rozpoznawania podzielności liczb* (*Dziennik polytechniczny*, wydawany przez B. i M. Marczewskich; r. 1861, poszyt II, Warszawa), ogłosił te twierdzenia dla obu rospatrywanych przypadków, a dowiódszy ich, podał, jako szczególne przypadki, cechy podzielności dla wszystkich odpowiednich liczb mniejszych od 100. — W r. 1871 w roczniku II *Zeitschrift*'u *für math. und naturw. Unterricht* Hoffmann'a p. Zerlang ogłosił bez dowodu, uzasadnioną już przez dra Żbikowskiego, cechę podzielności przez 7, którą Niemcy niesłusznie nazywają: cechą Zerlanga. — W roczniku IV tegoż *Zeitschrift*'u (r. 1873) są podane przez innego autora, również bez dowodu, cechy podzielności przez inne liczby, które także były ogłoszone (wraz z ich udowodnieniem) w przytoczonych artykułach dra Żbikowskiego.

Red.

$d = 10n + 1$. Może więc przez d być podzielnym tylko czynnik $a - bn$. I jeżeli wyrażenie $a - bn$ przedstawia liczbę podzielną przez $d = 10n + 1$, to i dana liczba $L = 10a + b$ jest podzielna przez d.

Gdy więc idzie nam o podzielność liczby $L = 10a + b$ przez takie liczby, jak

$$11 = 10.1 + 1,$$
$$21 = 10.2 + 1,$$
$$31 = 10.3 + 1,$$
$$41 = 10.4 + 1,$$

i t. d.,

to warunki podzielności będą odpowiednio:

$$a - bn = a - b,$$
$$= a - 2b,$$
$$= a - 3b,$$
$$= a - 4b,$$

i t. d.

2. To wszystko, cośmy, rozważając wyrażenie (2) liczby danéj L, wyprowadzili o podzielności téj liczby przez liczbę $10n + 1$, stosuje się również i do dzielników téj liczby, gdyż dzielnik dzielnika liczby danéj jest dzielnikiem liczby danéj.

Jeżeli więc liczba, którą nazwijmy także d, jest różnym od 1 dzielnikiem liczby $10n + 1$, to również warunkiem podzielności liczby $L = 10a + b$ przez d jest podzielność liczby przedstawionéj przez wyrażenie $a - bn$ przez tę liczbę d.

Gdy więc, mając daną liczbę d, która nie jest postaci $10n + 1$, chcemy wyprowadzić warunek podzielności liczby danéj $10a + b$ przez tę liczbę d, to zadanie nasze polega teraz na tym, aby wyznaczyć taką liczbę postaci $10n + 1$, którąby była podzielną przez tę liczbę d. Znalazszy bowiém taką liczbę $10n + 1$, odrazu miéć będziemy żądany warunek podzielności: $a - bn$. Ten zaś warunek będzie wyrażony najprościéj, jeżeli z różnych możliwych wartości na n [gdyż z jednéj liczby postaci $10n + 1$ podzielnéj przez d możemy takich liczb otrzymać nieskończenie wiele [1])] weźmiemy najmniejszą liczebnie, bez względu na to, czy ona jest dodatną, czyteż ujemną.

Ponieważ liczba d jest dzielnikiem liczby $10n + 1$, która jest oczywiście liczbą piérwszą względem 10, więc i liczba d jest téż piérwszą względem 10. A gdy liczba n ma być taką, żeby liczba $10n + 1$ była podzielną przez d, przeto idzie nam tu o znalezienie takiéj najmniejszéj liczebnie wartości dla n, przy któréj, w założeniu, że d jest liczbą piérwszą względem 10, wyrażenie

---

[1]) Mnożąc ją np. przez 11, 21, 31, 111 i t. d.

$$\frac{10n+1}{d}$$

przedstawiałoby liczbę całkowitą. Jeżeli tę wartość całkowitą, która może być zresztą jakąkolwiek, oznaczymy przez r,

$$\frac{10n+1}{d}=r,$$

to możemy powiedzieć, że idzie nam o to, aby mając równanie nieoznaczone

$$10n-dr=1,$$

z dwiema niewiadomymi n i r, z rozwiązań w liczbach całkowitych wziąć najmniejszą liczebnie wartość na n. Ponieważ spółczynniki tych niewiadomych, 10 i d, są liczbami piérwszymi względem siebie, zatym istnieją rozwiązania całkowite tego równania, i otrzymamy żądaną wartość na n, nadając w wyrażeniu téj liczby

$$n=\frac{dr-1}{10}$$

na r taką wartość całkowitą, iżby przy niéj n miało wartość całkowitą liczebnie najmniejszą. Wyznaczywszy taką liczbę n, miéć będziemy, jako warunek podzielności liczby $10a+b$ przez d, podzielność liczby, przedstawionéj przez wyrażenie [1])

$$a-bn.$$

Tak np. jeżeli $d=7$, to

$$n=\frac{7r-1}{10},$$

i otrzymujemy najmniejszą liczebnie wartość na n, przyjmując $r=3$. Wtedy $n=2$ i warunek podzielności liczby $10a+b$ przez 7 jest

$$a-bn=a-2b.$$

Jeżeli $d=13$, to

$$n=\frac{13r-1}{10};$$

gdy tu na r nadamy wartość $r=9$, to otrzymamy najmniejszą dodatną wartość $n=9$, ale biorąc $r=-3$, otrzymujemy liczebnie mniejszą wartość ujemną $n=-4$. Biorąc więc tę ostatnią, mamy jako warunek podzielności liczby $10a+b$ przez 13,

$$a-bn=a+4b.$$

---

1) Dla czytelnika, który posiada znajomość tego, co się zwykle wykłada na początku kursu teoryi liczb, dałaby się cała ta część tego ustępu tak krótko przedstawić:

Liczba d, dzielnik liczby $10n+1$, jest piérwszą względem 10. Porównanie (kongruencyja) więc stopnia 1-go

$$10n+1\equiv(\text{mod. } d)$$

ma zawsze rozwiązanie. Rozumiejąc więc przez n najmniejszy liczebnie pierwiastek tego porównania, miéć będziemy, jako warunek podzielności i t. d.

Podobnie np. przy $d=3$ jest

$$n=\frac{3r-1}{10};$$

gdy $r=7$, to $n=+2$, ale przy $r=-3$ otrzymujemy $n=-1$. Zatym przyjmiemy, że warunek podzielności liczby $10a+b$ przez 3 jest

$$a-bn=a+b.$$

Taksamo przy $d=9$.

I t. d.

Wskazówki, jak te cechy stosować, są wyłożone w téj książce w § 13, us. 15.

3. Łącząc tu razem rozbiérane wyżéj dwa przypadki, możemy powiedziéć ogólnie:

Liczba $10a+b$ jest podzielna przez jakąkolwiek liczbę d, piérwszą względem 10-u, pod warunkiem, aby przez d była podzielna liczba, przedstawiona przez wyrażenie

$$a-bn,$$

gdzie n jest taką liczbą całkowitą, iż liczba $10n+1$ jest podzielna przez d. Warunek ten będzie najdogodniejszy w zastosowaniu, gdy na n nadamy liczebnie najmniejszą z wartości możebnych.

Kazań, dnia $\frac{\text{22 września}}{\text{4 października}}$ r. 1883.

PRZYPISEK II.

(Zob. str. 186.)

JAN BROŻEK O LICZBACH DOSKONAŁYCH I O LICZBACH ZAPRZYJAŹNIONYCH.

NAPISAŁ

JAN NEP. FRANKE,

PROFESOR SZKOŁY POLITECHNICZNÉJ WE LWOWIE [1]).

Jan Brożek (podpisywał się Ioannes Broscius Curzeloviensis) urodził się w dniu 1 listopada r. 1585 w miasteczku Kurzelowie, w dawnym województwie sieradzkim. W akademii krakowskiéj pobierał nauki od r. 1604—1610, w którym został doktorem filozofii i nauk wyzwolonych. W styczniu r. 1614 powołano go do Collegium minus, jako prof. astronomii z tytułem astrologus ordinarius. W r. 1618 odbył podróż do Prus i Warmii, skąd przywiózł wiele pamiątek po Koperniku, z których kilka tylko ogłosił (reszta zaginęła). Od r. 1620—1624 chodził na medycynę w Padwie; po uzyskaniu tamże stopnia doktora medycyny wrócił w r. 1624 do Krakowa. W r. 1626 został dodatkowo profesorem wymowy, a w r. 1629 złożył urząd prof. astronomii, natomiast zaś zaczął wykładać teologiję. Doktorem teologii został w r. 1650. W r. 1652 obrano go rektorem akademii krakowskiéj. Tegoż roku umarł podczas zarazy morowéj. — Z jego prac matematycznych najważniejsze są: 1) *Arithmetica integrorum*... Cracoviae, 1620 (małe 8-vo, str. szesnaście, 252 i cztéry); 2) *De numeris perfectis disceptatio*..., Cracoviae, 1637 (małe 4-to, str. dwanaście), rzecz powtórnie wydana w Amsterdamie w r. 1638 i przedrukowana, również bez zmiany, w dziele (str. 111—120) następującym: 3) *Apologia pro Aristotele et Euclide contra Petrum Ramum et alios*... Dantisci, 1652 (4-to, str. dziesięć, 3—174), wydawanym powtórnie w Amsterdamie w r. 1699.

1. W pracy przytoczonéj pod N. 2-im Brożek wykazuje, że między liczbami 10 000 i 10 000 000 niéma żadnéj liczby doskonałéj; że zatym po

[1]) Prof. Franke z polecenia akademii umiejętności w Krakowie wygotował obszerną monografiją o Brożku i w kwietniu r. 1883 złożył ją akademii, która tę pracę ogłosi ku uczczeniu 300-letniéj rocznicy urodzin Brożka, przypadającéj w r. 1885. Rzecz ta, drukująca się obecnie, wyjdzie pod tytułem: *Jan Brożek (I. Broscius), akademik krakowski. 1585 — 1652. Jego życie i dzieła, ze szczególnym uwzględnieniem prac matematycznych. Ze źródeł rękopiśmiennych opracował*... (z portretem Brożka). — Z pracy téj streszczone są tu tylko te ustępy, które bespośrednio się odnoszą do badań naszego matematyka wieku XVII nad liczbami doskonałymi i nad liczbami zaprzyjaźnionymi.

Red.

śród liczb mniejszych od 10 000 000 są tylko cztery liczby doskonałe, podpadające pod znaną regułę Euklidesa (księga IX, podanie 36), a następnie okazuje indukcyjnie, że liczby 130 816 i 2 096 128, z których pierwszą Michał Stifel, a drugą Piotr Bongus ogłosił jako liczby doskonałe, nimi nie są. Donioślejszego znaczenia jest druga część tej pracy Brożka. W niej bez dowodzenia podaje on 10 twierdzeń o podzielności liczb, mających postać $2^m - 1$, a mianowicie, że owe liczby są podzielne (n liczba dowolna całkowita)

przy	$m = 2.n$,	$4.n$,	$3.n$,	$10.n$,	$12.n$,	$8.n$,	$18.n$,	$11.n$,	$28.n$,	$5.n$
przez	3,	5,	7,	11,	13,	17,	19,	23.	29,	31.

Co do tego, zdaje się, wystarczy, gdy tu tylko zaznaczymy, że sławne twierdzenie Fermat'a o podzielności liczb [1]) drukiem zostało ogłoszone dopiéro w r. 1674, jakkolwiek Fermat je znał w r. 1640 (t. j. w parę lat po ogłoszeniu téj pracy Brożka).

Dzieło przytoczone pod N. 3-im kończy się oddzielną pracą: *De numeris perfectis disceptatio altera* (121—174). Tu Brożek zadaje sobie naprzód pytanie: czy liczby doskonałe utworzone być mogą wyłącznie tylko sposobem wynikającym z twierdzenia Euklidesa?, któryto sposób przedstawia wiele niedogodności przy poszukiwaniu większych liczb doskonałych ponad znane cztery, głównie ze względu na to, że nie wiadomo, na któréj z odpowiedniego szeregu liczb zatrzymywać się należy. — Następnie, przytoczywszy 20 liczb doskonałych (aż do 24-cyfrowéj), znajdujących się w *Petri B ngi Bergomatis numerorum mysteria* (według wydania z r. 1618; piérwsze jest z r. 1585), usiłuje wynaléść nieomylny a prosty sposób przekonania się, czy pewna liczba jest doskonałą. W tym celu podaje przedewszystkim tabelarycznie zestawione, a mozolnie wyznaczone, dzielniki piérwsze wszystkich liczb [2]) postaci $2^m - 1$ od $m = 1$ aż do $m = 100$. Dla niektórych liczb tak wielkie przytacza dzielniki (np. 131 071 dla $m = 34$; 524 287 dla $m = 38$), że wnosić należy, iż posiadał metodę ogólną ich wyznaczenia, jakkolwiek o tym nie wspomina. — Potym, zaznaczywszy, że każdy wyraz postępu gieometrycznego podwójnego (t. j. postępu 1, 2, 2^2, 2^3,...) zmiejszony o 1 przedstawia sumę wyrazów poprzedzających, i opisawszy powstawanie liczb doskonałych według twierdzenia Euklidesa, objaśnia, że zapomocą działań, które przedstawimy wzorem $2^{(2m+1)+2m} - 2^{2m}$, można otrzymywać liczby doskonałe bez mnożenia, używając tylko tabliczki wyrazów postępu podwójnego. [Podług Euklidesa liczba

---

[1]) Jeżeli a jest liczbą niepodzielną przez liczbę piérwszą p, to różnica $a^{p-1} - 1$ jest podzielna przez p.

[2]) W wielu książkach jeszcze powtarzają, że największa z liczb piérwszych, dotąd znanych, jest liczba $2^{31} - 1 = 2\,147\,483\,647$, podana przez Euler'a (1707 — 1783), gdy tymczasem w téj tablicy Brożek zaznacza już jako liczby piérwsze te, które odpowiadają jeszcze większym wartościom m, mianowicie $m = 31$, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

$(2^{2m+1}-1).2^m$ jest doskonałą, jeżeli $2^{2m+1}-1$ jest liczbą pierwszą; możemy przeto, używając tabliczki Brożka, liczby doskonałe otrzymywać w postaci $2^{(2m+1)+2m}-2^{2m}$.] — Po takim przygotowaniu, Brożek przystępuje do zbadania wzmiankowanych powyżéj 20-u liczb Bongus'a. Nie wykonywając żadnych dzieleń i nie szukając dzielników liczb badanych, Brożek, zapomocą prostego zastosowania twierdzenia Euklidesa, należycie przezeń wyzyskanego, tudzież tabliczki wyrazów postępu $1, 2, 2^2, \ldots, 2^{100}$, okazuje, że spośród owych 20-u liczb, przez Bongus'a za doskonałe podanych, tylko 10 jest doskonałych, a pozostałe nimi nie są. — Widoczny tu postęp w porównaniu z poprzednią pracą Brożka. Gdy tam uciekał się do wykonywania dzieleń dla zbadania rozważanych wtedy dwu liczb, tu obmyślił metodę postępowania, na ogólnéj zasadzie opartą.

2. Przejdziemy do badań Brożka nad liczbami zaprzyjaźnionymi.

O liczbach zaprzyjaźnionych Brożek pisał we wzmiankowanéj w ustępie poprzedzającym rosprawie *De numeris perfectis disceptatio altera* w drugiéj jéj części. Przytoczywszy jedyną doówczas znaną, a znaną już starożytnym, parę liczb zaprzyjaźnionych, 220 i 284, Brożek wypowiada, że niéma dotąd żadnéj reguły tworzenia takich liczb [1]), i podaje własną ku temu metodę, któréj nie dowodzi ogólnie, lecz tylko ją objaśnia na przykładach. — Weźmy dwie liczby nieparzyste, piérwsze względem siebie, mianowicie 55 i 71. Suma wszystkich dzielników każdéj z tych liczb, od niéj mniejszych, jest odpowiednio 17 i 1. Tu $71-55=16=17-1$, t. j. różnica wziętych liczb jest równa różnicy sum ich dzielników, jeżeli te sumy odejmujemy od siebie w odwrotnym porządku, niż liczby im odpowiadające. Utwórzmy z liczb danych postępy gieometryczne:

$$55,\ 110,\ 220 \quad \text{i} \quad 71,\ 142,\ 284$$

i utwórzmy sumy dzielników tych liczb:

$$17,\ 106,\ \mathit{284} \quad \text{i} \quad 1,\ 74,\ \mathit{220}.$$

Liczby zatym $2^2.55$ i $2^2.71$ są zaprzyjaźnione. — Inny przykład. Bierz liczby 1081 i 1151 i postąp z nimi taksamo; otrzymasz liczby:

---

1) Właściwie istniała odpowiednia reguła, nieznana uczonym europejskim (dopiéro w r. 1852 ogłosił o niéj wiadomość Woepke, w *Journal asiatique*), którą podał arabski matematyk w Bagdadzie Tâbit ibn Kurra (836—901 po Chr.). Reguła ta jest następująca:

Jeżeli trzy liczby:

$$p=3.2^m-1, \qquad q=3.2^{m-1}-1, \qquad r=9.2^{2m-1}-1$$

są piérwsze, to liczby

$$A=2^m.p.q \quad \text{i} \quad B=2^m.r$$

tworzą parę liczb zaprzyjaźnionych.

Tak np. przy $m=2$ mamy $p=11$, $q=5$, $r=71$, wskutek czego $A=2^2.11.5=220$ $B=2^2.71=284$.

$$2^4 . 1081 = 17296 \quad \text{i} \quad 2^4 . 1151 = 18416,$$

będące parą liczb zaprzyjaźnionych. (Tę parę podał Brożek piérwszy.)

Że metoda Brożka jest ogólną, można tego tak dowiéść. Niech n będzie daną liczbą; rozłóżmy ją na czynniki piérwsze $(a, b, c, \dots)$,

$$n = a^\alpha . b^\beta . c^\gamma \dots .$$

Suma dzielników liczby n, od niéj mniejszych, jeżeli ją oznaczymy literą s, a literą S sumę jéj wszystkich dzielników, jest

$$s = \mathrm{S} - n = \frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1} . \frac{b^{\beta+1} - 1}{b - 1} \dots - a^\alpha . b^\beta \dots .$$

Inną liczbą niech będzie n', a s' niech oznacza sumę jéj dzielników, od niéj mniejszych, zaś S$'$ sumę jéj wszystkich dzielników. Utwórzmy postępy

$$n,\ 2.n,\ 2^2.n, \dots,\ 2^k.n, \dots \quad \text{i} \quad n',\ 2.n',\ 2^2.n', \dots,\ 2^k.n', \dots,$$

a odpowiadające tym liczbom sumy ich dzielników, od tych liczb mniejszych, nazwijmy odpowiednio

$$s, \quad s_1, \quad s_2, \dots, \quad s_k, \dots \quad \text{i} \quad s', \quad s'_1, \quad s'_2, \dots, \quad s'_k, \dots .$$

Zważmy, że $s = \mathrm{S} - n$, $s' = \mathrm{S}' - n'$. Jeżeli przeto przyjmiemy, że n i n są takimi liczbami, iż $s - s' = n' - n$, to $\mathrm{S} = \mathrm{S}'$. Gdy nadto dodamy warunek, aby obie liczby n i n' były nieparzyste, to

$$s_k = (1 + 2 + \dots + 2^k) . \mathrm{S} - 2^k . n = (2^{k+1} - 1) . \mathrm{S} - 2^k . n;$$

$$s'_k = (2^{k+1} - 1) . \mathrm{S}' - 2^k . n' . = (2^{k+1} - 1) . \mathrm{S} - 2^k . n'.$$

Jeżeli przypuścimy, że

$$s_k = 2^k . n', \quad \text{czyli} \quad (2^{k+1} - 1) . \mathrm{S} - 2^k . n = 2^k . n',$$

to otrzymamy równanie warunkowe

$$2^k = \frac{\mathrm{S}}{2\mathrm{S} - (n + n')} .$$

Jeżeli to równanie przestępne względem k może miéć miejsce przy wartościach całkowitych dla k, wtedy równanie

$$(2^{k+1} - 1) . \mathrm{S} - 2^k . n = 2^k . n' \quad (\text{czyli } s_k = 2^k . n'),$$

które można także tak pisać $(\mathrm{S} = \mathrm{S}')$:

$$(2^{k+1} - 1) . \mathrm{S}' - 2^k . n' = 2^k . n \quad (\text{czyli } s'_k = 2^k . n),$$

ma wogóle miejsce przy całkowitych wartościach liczb n, n' i k, a wtedy, jak widoczna z ostatnich związków, dwie liczby: $2^k . n$ i $2^k . n'$ tworzą parę liczb zaprzyjaźnionych. Możemy więc wypowiedziéć twierdzenie: *«jeżeli obierzemy dwie liczby nieparzyste n i n' takie, że $n' - n = s - s'$, i jeżeli istnieje wartość całkowita k, przy któréj*

$$\frac{S}{2S-(n+n')}=2^k,$$

to liczby

$$2^k . n \quad \text{i} \quad 2^k . n'$$

przedstawiają parę liczb zaprzyjaźnionych».

Po Brożku Franciszek Schooten w dziele *Exercitationum mathematicarum libri quinque* . . . Lugduni Batavorum, 1656, według innéj reguły, udzielonéj mu przez Descartes'a, różnéj od reguły Brożka, obliczył (liber V, sectio IX) tak parę liczb Brożka, jak i inną jeszcze parę liczb zaprzyjaźnionych, mianowicie 9 363 584 i 9 437 056.

Lwów, 1 października r. 1883.

KONIEC.

Redaktor i wydawca czasopisma «Bibl. mat.-fiz.»,
Dr. Maryjan A. Baraniecki.