~~Wanek Bronisław~~

~~Wyrobisz Tadeusz~~ ~~WB~~

~~Saglarz~~ ~~IV B.~~

Knapczyk Ludwik III B.

Dapa

Кто

$(-25)+(-25)$

$-25+25=0$

$+(-25)$

-25

1628/895

10000

9773

1628895

257780

2653298

1591978

1248

5324

12453 25

w Depo

Joseph

Szop

ARYTMETYKA

do użytku

c. k. niższego gimnazyum galicyjskiego.

Z piątego wydania Dra. Franciszka Moznika,

przełożył z niemieckiego

S. Krawczykiewicz,

Dyrektor galicyjskiej kasy oszczędności, członek c. k. galic. towarzystwa gospodarskiego.

Na III. i IV. klasę.

LWÓW,

1857.

SPIS PRZEDMIOTÓW.

ROZDZIAŁ PIERWSZY.

ROZDZIAŁ DRUGI.

ROZDZIAŁ TRZECI.

$m^n \cdot m^n = (m^n)^n$

ROZDZIAŁ CZWARTY.

ROZDZIAŁ PIĄTY.

ROZDZIAŁ SZÓSTY.

	R	T.	n.	gr.	jol	H.	M.	A.		
–	2	3	3	3	3	3	3	3	24	=23.
B.	2	3	3	2	4	3	3	3	21	
D.	2	3	3	3	3	3	3	2	21	
P.	1	3	3	3	3	3	2	2	20.	
Da	2	3	3	2	2	3	3	2	20.	
S.	1	2	3	2	2	3	2	2	17	
N.	1	2	2	2	1	3	2	2	14	

Liczba stosunek ilości do jedności.
1. Antoniewicz
2. Grochola
3. Dański
4. Piotrowski
5. Baran
6. Dunajewski

ROZDZIAŁ PIERWSZY.

O ilościach sobie przeciwnych.

§. 1.

Są pewne ilości, które gdy się z sobą zejdą, nawzajem się zmniejszają lub też jedna znosi zupełnie drugą. Takiemi ilościami są np. przychód i rozchód, czyli dochody i wydatki; kto ma 20 złr. dochodu a 8 złr. rozchodu, ma rzeczywiście 12 złr. dochodu; 8 złr. dochodu a 20 złr. rozchodu, jest tyle co 12 złr. rozchodu; mieć 20 złr. dochodu i zarazem 20 złr. rozchodu, wychodzi na to samo co nie mieć ani dochodu ani rozchodu. W pierwszym razie dochód 20 złr. zmniejszony został rozchodem 8 złr., w drugim razie rozchód 20 złr. zmniejszony został dochodem 8 złr.; w trzecim razie dochód i rozchód zniosły się nawzajem zupełnie.

W ten sam sposób jak dochód z rozchodem mają się też z sobą majątek i długi, zyski i straty, nadmiar czyli przewyżka i brak czyli niedobór, ruch naprzód i wstecz, ruch w górę i na dół, ciepło i zimno i t. d.

Takie więc ilości które sprowadzone z sobą, zmniejszają się wzajemnie lub całkiem znoszą, nazywamy *ilościami sobie przeciwnemi* (entgegengesetzte Größen).

Z dwóch sobie przeciwnych ilości, jedna oznaczać może coś rzeczywistego czyli *będącego*, a wtedy druga jako tamtej przeciwna oznacza już coś *brakującego*. Pierwszą ilość zowiemy wtedy *dodajną* (positiv), drugą zaś *ujemną* (negativ).

Wychodzi to na jedno, którą z dwóch sobie przeciwnych ilości weźmie się za dodajną; np. możemy majątek uważać jako dodajny a dług jako ujemny; ale też dług może być ilością dodajną a majątek ujemną. W rachunku zależy wybór ten od istoty zadania. Chcąc np. obrachować czyjś majątek, wtedy wszystko co stanowi ten majątek uważamy jako dodajne, a wszystko co stanowi dług jako ujemne; jeźli zaś idzie o to aby obrachować cały dług, w takim razie wszystko co stanowi ten dług uważamy jako dodajne, a wszysko co wchodzi w majątek jako ujemne.

§. 2.

Pojęcia ilości sobie przeciwnych nie trzeba, jakeśmy to dopiero uczynili, ograniczać li tylko do liczb mianowanych, jak np. do przychodu i rozchodu, majątku i długu; pojęcie to stosuje się także i do liczb niemianowanych.

Poczynając bowiem w naszym układzie liczb od zera, otrzymamy przez następne przydawanie jednostki rząd liczb:

$0 + 1, \quad 0 + 2, \quad 0 + 3, \quad 0 + 4, \quad 0 + 5, \quad 0 + 6, \ldots.$

lub, ponieważ zero może być wypuszczone:

$+ 1, \quad + 2, \quad + 3, \quad + 4, \quad + 5, \quad + 6, \ldots.$

Jak zaś przez dodawanie jednostki, liczby ciągle postępują, tak też przez odejmowanie jednostki schodzą one, np. 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0. Atoli nie potrzeba stawać na zerze, można iść i po za nie, a tak otrzymamy rząd liczb:

$0 - 1, \quad 0 - 2, \quad 0 - 3, \quad 0 - 4, \quad 0 - 5, \quad 0 - 6, \ldots.$

lub, wypuszczając zero, będziemy mieli:

$- 1, \quad - 2, \quad - 3, \quad - 4, \quad - 5, \quad - 6, \ldots.$

Zestawiając więc oba rzędy liczb po obu stronach ich wspólnego początku, to jest zera, będzie:

$\ldots. + 4, + 3, + 2, + 1, 0, - 1, - 2, - 3, - 4, \ldots.$

W tej stronie liczb, która idąc od zera wzrasta, uważać należy każdą liczbę jako mającą *dodać* się do zera, a zatem jako *nadwyżkę* nad zero; w tej zaś stronie liczb, która idąc od zera, spada, każda liczba ma być od zera *odjętą*, i oznacza ona ile jednostek *brakuje* aby módz dójść do zera. Zatem liczby po obu stronach zera są sobie przeciwne.

Ponieważ liczby z znakiem + wskazują nadwyżkę nad zero, a więc coś będącego, a owe ze znakiem — coś brakującego czyli niedostającego, pierwsze uważać należy jako *dodajne*, drugie zaś jako *ujemne*.

Można więc też powiedzieć:

Liczba, którą w rachunku wypada dod[illegible], zowie się dodajną; liczba zaś, którą w rachunku wypada odjąć czyli ująć, nazywa się ujemną.

Objaśnienie to da się też zastosować do liczb mianowanych, sobie przeciwnych. Jeźli np. idzie o obrachowanie jakiego majątku, w takim razie, jak się już wyżej powiedziało, wszystko co stanowi en majątek uważać trzeba jako dodajne, a wszystko co stanowi dług jako ujemne; bo też części składające majątek pomnażają go, a części składające dług uszczuplają majątek; w rzeczy więc samej, ilości dodajne uważać należy jako mające się dodać, a ilości ujemne jako mające się ująć. Chcąc wiedzieć, o ile ktoś zrobiwszy z pewnego miejsca kilka kroków naprzód a kilka w tył, o ile mówię z tegoż miejsca naprzód się posunął, w którymto razie ruch naprzód uważać potrzeba jako dodajny, a ruch w tył jako ujemny; rzecz pewna, że kroki naprzód przyczyniły się do pomnożenia, a kroki w tył do uszczuplenia drogi przebytej, że więc ilości dodajne uważać potrzeba jako mające się dodać, a ujemne jako mające się ująć.

Z danego tu objaśnienia o ilościach dodajnych i ujemnych wynika, że ilościom dodajnym należy się znak $+$, a ilościom ujemnym znak $-$. Na początku wyrażenia liczebnego tudzież po znaku równości nie kładzie się znaku $+$; co zaś do znaku $-$, tego nigdy opuszczać nie należy. Jeźli więc przed jaką liczbą nie masz żadnego znaku, liczbę tę uważamy jako dodajną; np. 4 znaczy to samo co $+4$.

Uważając liczby *bezwzględnie* (absolut), okazuje się, iż ta z nich jest większą, która w sobie więcej jednostek zawiera; inaczej się ma z liczbami sobie przeciwnemi. I tak, ponieważ w rzędzie liczb

$$+4, +3, +2, +1, 0, -1, -2, -3, -4$$

każda liczba mniejsza jest o 1 od liczby po lewej stronie będącej, wypada więc że

$$+4 > +3 > +2 > +1 > 0 > -1 > -2 > -3 > -4;$$

gdzie znak $>$ okazuje, iż liczba w jego rozwarciu będąca, większa jest od liczby u jego wierzchołka położonej.

A tak w liczbach dodajnych ta jest większą, która więcej ma w sobie jednostek, przeciwnie zaś w liczbach ujemnych ta istotnie jest większą, która mniej w sobie jednostek zawiera.

I. Zbieranie liczb sobie przeciwnych.

§. 3.

Dwie lub więcej liczb ze znakiem $+$ lub $-$ dadzą się zawsze zebrać czyli ściągnąć (reduziren) w jedną liczbę, a to według następującego prawidła:

1. *Liczby z jednym i tym samym znakiem zbiera się w jedną przez dodanie ich do siebie i położenie przed ich sumą znaku spólnego.*

$+3 + 5 = 8$. Bo dodać naprzód 3 a potem 5, jest to samo, co dodać od razu 8. Np. 3 złr. majątku i 5 złr. majątku, jestto 8 złr. majątku; 3 kroki naprzód i 5 kroków naprzód, jestto 8 kroków naprzód; 3 stopni ciepła i do tego jeszcze 5 stopni ciepła, czynią razem 8 stopni ciepła.

$+7 + 5 + 3 + 6 = 21.$

$+312 + 518 + 231 = ?$

$+5084 + 59 + 31857 + 21563 = ?$

$-4 - 7 = -11$. Bo chcieć odjąć 4 i 7 jest to samo co odjąć 11. Np. 4 złr. długu i 7 złr. długu czynią 11 złr. długu; kto schodząc po drabinie minął naprzód 4 szczeble a potem 7 szczebli, ten zeszedł w ogóle 11 szczebli.

$-1 - 13 - 7 - 10 = -31.$

$-73 - 85 - 47 - 91 = ?$

$-2468 - 3579 - 8154 - 37926 = ?$

2. *Dwie liczby równe z znakami przeciwnemi znoszą się nawzajem zupełnie.*

$+5 - 5 = 0$. Mając bowiem przydać 5 i ująć 5, wychodzi to na jedno jak gdyby się nic nie przydało i nic nie ujęło. Np. 5 złr. majątku i 5 złr. długu znoszą się nawzajem, bo na umorzenie długu trzeba cały majątek wydać; 5 złr. zysku i 5 złr. straty znoszą się nawzajem zupełnie.

3. *Dwie liczby nierówne, z których jedna jest dodajną, druga ujemną, zbiera się, odejmując mniejszą od większej, i kładąc przed pozostałą resztą taki znak, jaki miała liczba większa.*

$+10 - 6 = +4$. Idzie tu o to, aby dodać 10 a odjąć 6; rozłożywszy więc $+10$ na $+6$ i $+4$, liczba $+6$ zniesie się z liczbą -6, a zostanie rzeczywiście tylko $+4$. Np. kto 10 złr. zyskał a 6 złr. stracił, ma ostatecznie 4 złr. zysku; kto z pewnego miejsca posunie się o 10 kroków a o 6 kroków cofnie się, będzie o 4 kroki przed tem miejscem, z którego się ruszył.

$+6 - 10 = -4$. Mając dodać 6 a odjąć 10, trzeba naprzód odjąć to 6 które się dodało, przezco to co się dodało zniesie się, a wtedy zostanie tylko 4 do odjęcia. Np. 6 złr. dochodu i 10 złr. rozchodu, jestto w samej rzeczy 4 złr. rozchodu; kto ma 6 złr. majątku a 10 złr. długu, musi cały swój majątek to jest 6 złr. wydać, aby nim umorzył część swego długu, i zostanie mu jeszcze 4 złr. długu; jeźli jakie ciało o 6 stóp się podniesie a potem o 10 stóp spadnie, to właściwie jest o 4 stóp niżej swego pierwszego miejsca.

$$+ 85 - 32 = + 53.$$
$$- 66 + 51 = - 15.$$
$$- 1348 + 215 = ?$$
$$+ 7094 - 9213 = ?$$

4. Chcąc zebrać kilka takich liczb, z których jedne są dodajne, inne ujemne, trzeba zebrać osobno liczby dodajne, osobno ujemne, i otrzymane wypadki złączyć w jedno.

$$+ 5 + 8 - 3 = + 13 - 3 = + 10.$$
$$+ 2 - 5 + 8 - 7 = + 10 - 12 = - 2.$$
$$+ 4 + 12 - 20 + 8 - 25 = + 24 - 45 = - 21.$$
$$- 3 + 9 - 8 - 15 + 48 + 10 = + 67 - 26 = + 41.$$
$$+ 1533 - 49 + 16 = ?$$
$$- 208 + 749 - 337 + 214 = ?$$
$$+ 5106 - 2189 - 34 + 186 - 3715 = ?$$
$$+ 15 - 214 + 32011 - 1578 - 24568 + 30756 = ?$$
$$- 77908 + 25792 - 2 + 813 + 21957 = ?$$

II. Cztery działania liczbami sobie przeciwnemi.

1. Dodawanie.

§. 4.

Przy dodawaniu idzie o znalezienie takiej liczby, która dwom lub więcej danym liczbom razem wziętym równa się. Aby więc *dodać do siebie liczby sobie przeciwne*, dość jest liczby te z takiemi jakie mają znakami umieścić jedną obok drugiej, a potem zebrać je w jedną liczbę.

Liczbę ze znakiem $+$ lub $-$, którą się ma do innej dodać lub od niej odjąć, bierze się w nawias; tak np. $+ 3 + (- 4)$ oznacza sumę, a $+ 3 - (- 4)$ różnicę liczb $+ 3$ i $- 4$.

Przykłady.

$$+ 6 + (+ 2) = + 6 + 2 = + 8;$$
$$+ 6 + (- 2) = + 6 - 2 = + 4;$$
$$- 6 + (+ 2) = - 6 + 2 = - 4;$$
$$- 6 + (- 2) = - 6 - 2 = - 8;$$

któreto wyrażenia można przedstawić i w ten sposób:

$$\begin{array}{l} +6 \\ +2 \\ \hline +6+2=+8; \end{array} \qquad \begin{array}{l} +6 \\ -2 \\ \hline +6-2=+4; \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -6 \\ +2 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} -6 \\ -2 \\ \hline \end{array}$$

$$-6+2=-4; \qquad -6-2=-8.$$

Wyrażać

$+33+(-12)=?$
$-12345+(+13824)=?$
$+381345+(-479258)=?$
$-908642+(-91378)=?$

2. Odejmowanie.

§. 5.

Tu mogą co do znaków cztery zajść wypadki:

$$+8-(+3),$$
$$+8-(-3),$$
$$-8-(+3),$$
$$-8-(-3),$$

które po kolei przejdziemy.

a) $+3$ odjąć od $+8$, jestto znaleść taką liczbę, która dodana do $+3$ wyda $+8$; liczbą tą jest oczywiście $+5$, będzie zatem:

$$+8-(+3)=+5=8-3.$$

b) -3 odjąć od $+8$, jestto znaleść taką liczbę, która dodana do -3 wyda $+8$; otóż najpierw trzeba do -3 dodać $+3$ aby otrzymać 0, a do 0 dodać jeszcze $+8$ aby otrzymać $+8$; więc do -3 wypada dodać $+8+3$, aby z tego wypadło $+8$, zatem

$$+8-(-3)=+8+3=11.$$

c) Aby $+3$ odjąć od -8, szuka się liczby, która dodana do $+3$ wyda -8; otóż naprzód trzeba do $+3$ dodać -3 aby otrzymać 0, a do 0 dodać jeszcze -8 aby z tego wypadło -8; więc do $+3$ wypada dodać $-8-3$ aby otrzymać -8, będzie tedy:

$$-8-(+3)=-8-3=-11.$$

d) Aby nareszcie -3 odjąć od -8, trzeba taką znaleść liczbę, która dodana do -3 wyda -8; tą zaś liczbą jest -5, będzie więc:

$$-8-(-3)=-5=-8+3.$$

Zestawiwszy te wypadki:

$$+8-(+3)=+8-3=+5,$$
$$+8-(-3)=+8+3=+11,$$
$$-8-(+3)=-8-3=-11,$$
$$-8-(-3)=-8+3=-5;$$

alboteż i w następującym składzie:

od $+ 8$
odjąwszy $+ 3$
zostaje $+ 8 - 3 = + 5$;

od $+ 8$
odjąwszy $- 3$
zostaje $+ 8 + 3 = + 11$;

od $- 8$
odjąwszy $+ 3$
zostaje $- 8 - 3 = - 11$;

od $- 8$
odjąwszy $- 3$
zostaje $- 8 + 3 = - 5$;

wypada następujące prawidło:

Odejmowanie liczb sobie przeciwnych odbywa się w ten sposób, iż w liczbie mającej się odjąć, zamienia się znak na przeciwny, poczem liczbę tę dodaje się.

Tak więc liczba którą mamy odjąć zamienia się po uskutecznieniu odjęcia z dodajnej na ujemną, a z ujemnej na dodajną. Że odjęcie liczby dodajnej jest w istocie działaniem oderwania, rzecz przez się jasna i naturalna; ale to może zastanowi niejednego, że odjąć liczbę ujemną jest to samo co przydać taką samę liczbę dodajną. Atoli bliższe zastanowienie się nad istotą ilości sobie przeciwnych naprowadzi na drogę. I tak: aby komu ująć 10 złr. długu czyli uwolnić go od długu 10 złr., trzeba mu dać 10 złr. majątku do umorzenia tego długu; jeźli się komu 10 złr. wydatku ujmuje czyli oszczędza, jest to samo, jak gdyby mu się przysporzyło 10 złr. dochodu, aby miał czem zaspokoić ten wydatek; chcąc komuś ująć czyli ochronić go od straty 10 złr., trzeba mu dać 10 złr. zysku aby mógł zagładzić tę stratę; jeźli kto cofnąwszy się o 10 kroków, chce wrócić na swoje miejsce, musi 10 kroków naprzód postąpić. Z wszystkich tych przykładów widoczna, że ująć $- 10$ jest to samo co przydać $+ 10$.

Przykłady.

$- 343 - (+ 212) = ?$
$+ 1578 - (- 1374) = ?$
$+ 39072 - (+ 18902) = ?$
$- 395107 - (- 402864) = ?$

3. Mnożenie.

§. 6.

I przy mnożeniu są co do znaków obu czynników cztery przypadki do rozróżnienia:

$+ 5 . + 3,$
$+ 5 . - 3,$
$- 5 . + 3,$
$- 5 . - 3.$

a) Aby $+5$ pomnożyć przez $+3$, trzeba z liczbą $+5$ postąpić w taki sam sposób jak się postąpiło otrzymując $+3$ z jednostki; że zaś $+3$ powstało z jednostki przez 3krotne jej wzięcie, to jest $+3 = +1 + 1 + 1$, zatem i $+5$ trzeba wziąść trzykrotnie i dodać do siebie, będzie więc:

$$+5 \,.\, +3 = +5 + 5 + 5 = +15.$$

b) Aby $+5$ pomnożyć przez -3, trzeba z $+5$ utworzyć nową liczbę w taki sam sposób w jaki -3 z jednostki się wzięło; a że -3 powstało z jednostki, biorąc ją 3 razy ujemnie, bo $-3 = -1 - 1 - 1$; to też $+5$ wypada wziąść 3 razy ujemnie, a że $+5$ wzięte ujemnie staje się -5, będzie więc:

$$+5 \,.\, -3 = -5 - 5 - 5 = -15.$$

c) Aby otrzymać iloczyn z -5 przez $+3$, mówimy: -5 pomnożyć przez $+3$, jestto z liczbą -5 postąpić w taki sam sposób, w jaki $+3$ powstało z jednostki; że zaś $+3$ powstało z jednostki przez 3krotne jej wzięcie, wypada więc także i -5 wziąść 3krotnie z tym znakiem jaki ma przed sobą i dodać do siebie, a będzie:

$$-5 \,.\, +3 = -5 - 5 - 5 = -15.$$

d) Aby nareszcie -5 pomnożyć przez -3, trzeba z -5 utworzyć nową liczbę w ten sam sposób w jaki -3 z jednostki powstało; że zaś -3 wyszło z jednostki przez 3krotne wzięcie takowej ujemnie, wypada więc także i -5 wziąść 3krotnie ujemnie, a zatem z znakiem przeciwnym temu jaki ma, a będzie

$$-5 \,.\, -3 = +5 + 5 + 5 = +15.$$

Jest tedy:
$$\begin{aligned} +5 \,.\, +3 &= +15, \\ +5 \,.\, -3 &= -15, \\ -5 \,.\, +3 &= -15, \\ -5 \,.\, -3 &= +15, \end{aligned}$$

z czego wypada iż:

Dwa czynniki z jednakowemi znakami dają iloczyn dodajny, a dwa czynniki z odmiennemi znakami dają iloczyn ujemny.

Zarazem widoczna jest, iż mnożenie przez mnożnik dodajny jest powtórzonem dodawaniem, a mnożenie przez mnożnik ujemny powtórzonem odejmowaniem mnożnej.

Do objaśnienia tego cośmy tu powiedzieli, posłużą następujące przykłady:

Kto po 5 złr. zyskał 3 razy, ma w zysku 15 złr.; kto po 5 kroków 3 razy postąpił, ten posunął się o 15 kroków; a tak jest $+5 \,.\, +3 = +15$.

Jeźli komu zabrałem 3 razy po 5 złr. zysku, sprawiłem mu przez to stratę 15 złr.; jeźli 5 kroków po szczeblach drabiny w górę zrobionych, 3 razy odejmę czyli cofnę, to przez to spuściłem się o 15 kroków na dół; a tak jest $+ 5 . - 3 = - 15$.

Kto po 5 złr. wydał 3 razy, ma 15 złr. wydatku; kto zrobił po 5 kroków w tył 3krotnie, zrobił tem samem 15 kroków w tył; a tak $- 5 . + 3 = - 15$.

Jeźli kto komu po 5 złr. straty 3 razy zabierze, sprawi mu właściwie 15 złr. zysku; gdy kto 5 kroków w tył 3krotnie odjął, ten przez to posunął się naprzód o 15 kroków; a tak jest
$- 5 . - 3 = + 15$.

Jeźli jest do pomnożenia przez siebie więcej niż dwie liczb sobie przeciwnych uważać trzeba iż:

Gdy wszystkie czynniki są dodajne, iloczyn będzie także dodajny. Np.

$+ 2 . + 3 . + 4 = + 6 . + 4 = + 24$,
$+ 2 . + 3 . + 4 . + 5 = + 24 . + 5 = + 120$.

Gdy wszystkie czynniki są ujemne, iloczyn staje się dodajnym gdy ilość czynników jest parzysta, a ujemnym gdy ilość czynników nieparzysta. Np.

$- 2 . - 3 . - 4 = + 6 . - 4 = - 24$,
$- 2 . - 3 . - 4 . - 5 = - 24 . - 5 = + 120$,
$- 2 . - 3 . - 4 . - 5 . - 6 = + 120 . - 6 = - 720$,
$- 2 . - 3 . - 4 . - 5 . - 6 . - 7 = - 720 . - 7 = + 5040$.

Gdy nareszcie między czynnikami są jedne dodajne, inne ujemne, znak iloczynu stosuje się tylko do liczby czynników ujemnych, to jest: iloczyn staje się dodajnym gdy liczba czynników ujemnych jest parzysta, a ujemnym gdy liczba czynników ujemnych jest nieparzysta. Np.

$+ 2 . + 3 . - 4 = + 6 . - 4 = - 24$,
$+ 2 . + 3 . - 4 . - 5 = - 24 . - 5 = + 120$,
$+ 2 . + 3 . - 4 . - 5 . + 6 = + 120 . + 6 = + 720$,
$+ 2 . + 3 . - 4 . - 5 . + 6 . - 7 = + 720 . - 7 = - 5040$.

Przykłady.

$+ 315 . - 519 = ?$
$- 1356 . - 248 = ?$
$- 428 . - 376 . - 219 = ?$
$+ 783 . - 570 . - 138 = ?$
$- 2906 . + 2076 . - 149 . - 89 = ?$
$+ 137 . - 28 . - 119 . + 83 . - 75 . - 125 = ?$

4. Dzielenie.

§. 7.

Dzielenie daje się wyprowadzić z tej zasady, iż *iloraz pomnożony przez dzielnik*, musi *wydać dzielną* na iloczyn.

a) Z podzielenia $+ 12$ przez $+ 4$ musi wypaść na iloraz $+ 3$, gdyż tylko dodajna liczba $+ 3$ pomnożona przez dodajną $+ 4$, może wydać iloczyn dodajny $+ 12$, a tak jest:

$$+ 12 : + 4 = + 3.$$

b) Chcąc $+ 12$ podzielić przez $- 4$, uważmy że iloraz 3 musi taki mieć znak, aby rozmnożony przez $- 4$ wydał $+ 12$; że zaś tylko ujemna liczba pomnożona przez ujemną wydać może iloczyn dodajny, zatem iloraz musi być w tym razie ujemny, a tak jest:

$$+ 12 : - 4 = - 3.$$

c) Aby $- 12$ podzielić przez $+ 4$, znaleść trzeba taką liczbę, która pomnożona przez $+ 4$ wyda iloczyn $- 12$; liczbą tą może być tylko $- 3$, zatem

$$- 12 : + 4 = - 3.$$

d) Podobnież rozumując, wypada iż

$$- 12 : - 4 = + 3.$$

Zatem iloraz staje się dodajnym, gdy dzielnik i dzielna są z jednakowemi znakami; a ujemnym, gdy dzielnik i dzielna odmienne mają znaki.

Przykłady.

$$- 42435 : + 345 = ?$$
$$- 861971 : - 3407 = ?$$
$$+ 326393 : - 529 = ?$$
$$- 6709716 : - 729 = ?$$
$$- 123456789 : + 24679 = ?$$

12/9

ROZDZIAŁ DRUGI.

O ilościach algebraicznych.

wy...

§. 8.

Z liczb, których dotąd używaliśmy i które cyframi się wyrażają, każda w szczególności ma w sobie jakąś oznaczoną mnogość jednostek; *liczby* te nazywamy *szczególnemi* (besondere Zahlen) Tak liczba szczególna 7 wyraża mnogość jednostek dokładnie oznaczoną, bo ani mniej ani więcej jak 7 jednostek. Ale też własność ta liczb szczególnych sprawia, iż rachunki które za ich pomocą odbywamy, nie mogą przydać się jak tylko na każden raz szczególny, i ponawiaćby je potrzeba za każdą najmniejszą zmianą wielkości tej lub owej liczby szczególnej. Aby więc módz także odbywać ogólne rachunki, któreby raz uskutecznione we wszystkich podobnych zadaniach rachunkowych przydać się mogły, i całkiem były niezależne od szczególnych ważności liczebnych ilości w zadanie rachunkowe wchodzących, umyślono zamiast liczb takie wprowadzić znaki, ażeby niemi wyrażać można wszelką dowolną mnogość jednostek i ich części, i znaki te nazwano *liczbami ogólnemi* (allgemeine Zahlen). Do najstosowniejszego oznaczenia takich liczb ogólnych przydały się *głoski*, i to z małego abecadła łacińskiego. Tak np. głoska *a* oznacza liczbę ogólną, mogącą w sobie zawierać dowolną mnogość jednostek lub ich części, np. 1, 2, 10, — 20, $^3/_5$, lub każdą inną liczbę czy dodajną czy ujemną. Ale przystępując do rachunku, gdy się głosce nada pewną ważność liczebną, musi już ona mieć tę samę ważność w całym ciągu rachunku; tak, nadawszy w jakiem zadaniu rachunkowem głosce a ważność jakąś pewną, np. 5, to już w całem tem zadaniu głoska *a* wszędzie zatrzyma ważność 5.

Gdy w jaki rachunek rozmaite wchodzą głoski, rozumie się, iż każda z nich inną znaczy liczbę; w szczególnych jednak razach być może, iż duże głoski tęż samę mają ważność.

Że na ogólne znaki wybrano głoski, poszło to zapewne ztąd, że w początku używano do rachunków samych słów, a później tylko początkowe głoski tych słów zatrzymano. Tak np. w rachunkach procentowych dowiedliśmy, że dochód od kapitału na procent danego wynajduje się, mnożąc kapitał przez procent, i otrzymany iloczyn dzieląc przez 100. Prawidło to możnaby unaocznić w następujący sposób:

$$\text{dochód} = \frac{\text{kapitałowi} \times \text{procent}}{100},$$

lub zamiast słów biorąc tylko początkowe ich głoski,

$$d = \frac{k \times p}{100}.$$

Tu k może wyobrażać wszelki dowolny kapitał, bądź duży, bądź mały, p wszelki dowolny procent; a wtedy na wartość d wyjdzie z wykonania rachunku liczba wskazująca dochód odpowiedni temu kapitałowi i procentowi, który przez k i p jest wyobrażony. A tak przez wyrażenie $d = \frac{k \times p}{100}$ wysłowione jest przytoczone wyżej prawidło w całej swej ogólności, a przecie tak jasno, że każdy może je od razu wyczytać, byleby tylko wiedział co znaczą głoski d, k, p.

Nauka odbywania rachunków za pomocą głosek nazywa się *Arytmetyką ogólną* czyli *Algebrą*, dla różnicy od *Arytmetyki szczególnej*, w ktorej tylko szczególnych liczb się używa.

§. 9.

Częstokroć wypada w dodawaniu lub odejmowaniu powtórzyć jednę i tę samę liczbę; w takim razie pisze się liczbę ogólną tylko raz, a przed nią kładzie się liczbę oznaczającą, ile razy liczba ogólna ma być dodaną lub odjętą, ze znakiem dodawania lub odejmowania. Np.

zamiast $+ a + a + a + a + a$ pisze się $+ 5a$, lub tylko $5a$,
„ $- b - b - b - b$ „ „ $- 4b$.

Ta przed ogólną ilością położona liczba $+5$ lub -4 nazywa się *spółczynnikiem* (Koeffizient). A więc spółczynnik wskazuje, ile razy ilość ogólna którą on poprzedza, ma być do siebie dodana lub od siebie odjęta, a to według tego jak tenże jest dodajnym lub ujemnym.

Gdy głoska nie ma przed sobą spółczynnika, w takim razie domyślać się trzeba spółczynnika, który się nigdy nie pisze; tak więc a znaczy to samo co $1a$, zaś $-a$ to samo co $-1a$.

Spółczynnik można bardzo właściwie uważać jako liczbę, głoskę zaś jako jej miano, tak, iż w 5a spółczynnik 5 oznacza mnogość jednostek, zaś a gatunek takowych, jak np. w wyrażeniu 3 złote-reńskie cyfra 3 wskazuje liczbę, a złote-reńskie jej miano.

Gdy dwie lub więcej głosek mamy pomnożyć przez siebie, znak mnożenia wypuszcza się zwykle. Np.

zamiast $a \times b$ lub $a \,.\, b$ pisze się ab,
„ $a \times b \times c$ „ $a \,.\, b \,.\, c$ „ „ abc.

Wyrażenia abc nie trzeba brać za jedno z wyrażeniem $a + b + c$, tamto bowiem oznacza iloczyn, to zaś sumę. Bo jeźli np. zrobimy $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$, będzie

$$abc = 2 \,.\, 3 \,.\, 4 = 24,$$

$$\text{zaś } a + b + c = 2 + 3 + 4 = 9.$$

Spółczynnik ilości ogólnej może być zawsze uważany jako jej czynnik, bo np. jest

$$5a = a + a + a + a + a = a \,.\, 5 = 5 \,.\, a;$$

$$-4bc = -bc - bc - bc - bc = bc \,.\, -4 = -4 \,.\, bc.$$

§. 10.

Ilość złożoną z spółczynnika i głoski, lub też z kilku głosek żadnym znakiem z sobą niezłączonych, nazywamy *wyrażeniem algebraicznem pojedynczem* (einfacher algebraischer Ausdruck), np. a, $2ab$, $-3aax$, $5bccyy$.

Ilość zawierającą dwa lub więcej wyrazów znakiem $+$ lub $-$ połączonych nazywamy *wyrażeniem złożonem* (zusammengesetzter Ausdruck); oddzielne części takiego wyrażenia, połączone z sobą znakiem $+$ lub $-$ nazywamy jego *wyrazami* (Glieder). Wyrażenie złożone z dwóch wyrazów ma w szczególności nazwisko *dwumianu* (Binom), z trzech wyrazów *trójmianu* (Trinom), z większej zaś liczby wyrazów *wielomianu* (Polynom). I tak

$$a + b, \quad 2m - 3n, \quad axx - byy$$

są to dwumiany,

zaś $a - b + c$, $2ax + 3by + 4cz$, $3aaa - 2aab + abb$

są to trójmiany, a w ogólności mówiąc, wszystkie te ilości są wyrażeniami złożonemi.

Do odbywania działań rachunkowych ilościami złożonemi, trzeba każdą z nich brać oddzielnie w nawias. Aby np. wskazać że $a + b$ ma być pomnożone przez $c + d$, pisze się to tak: $(a + b) \,.\, (c + d)$; bo gdyby się nawiasów nie użyło i tylko wprost $a + b \,.\, c + d$ napisało, wyrażenie to nie oznaczałoby że $a + b$

ma być pomnożone przez $c + d$, lecz tylko to iż b trzeba pomnożyć przez c, i do otrzymanego iloczynu dodać a tudzież d. Robiąc np.

$a = 2,\quad b = 3,\quad c = 4,\quad d = 5,$ będzie

$$(a + b) \,.\, (c + d) = (2 + 3) \,.\, (4 + 5) = 5 \,.\, 9 = 45,$$

zaś $a + b \,.\, c + d = 2 + 3 \,.\, 4 + 5 = 2 + 12 + 5 = 19.$

§. 11.

Gdy w dwa wyrażenia algebraiczne wchodzą te same głoski, i głosek tych jest tyleż w jednem co i w drugiem, wyrażenia takie nazywają się *jednorodne* (homogen); spółczynniki zaś tych wyrażeń mogą być niejednakowe. Nazywamy zaś dwa wyrażenia algebraiczne *różnorodne* (heterogen), jeżli one albo z odmiennych składają się głosek, lub też z jednakich lecz nie w jednakowej liczbie. Np.

$$\left.\begin{array}{rr} 2a, & 5a \\ ab, & -\,3ab \\ 5mxx, & 8mxx \end{array}\right\} \text{ są jednorodne,}$$

$$\text{zaś}\quad \left.\begin{array}{rr} 3a, & 3b \\ 5mn, & 2mp \\ 3ax, & 3aax \end{array}\right\} \text{ są różnorodne ilości.}$$

Dwa lub więcej wyrażeń jednorodnych można zawsze sprowadzić czyli ściągnąć w jedno wyrażenie pojedyncze, a to w ten sposób, iż spółczynniki tych wyrażeń zbiera się w jeden według zasad podanych wyżej dla liczb sobie przeciwnych, a wyrażenie zawierające głoski przypisuje się raz obok tegoż spółczynnika.

Przykłady.

1) $a + 3a + 3a = (1 + 3 + 3)\,a = 7a.$
2) $-\,3bx - 2bx - 8bx = -\,13bx.$
3) $2abc - 2abc = 0.$
4) $5ab - 3ab = 2ab.$
5) $abx - 4abx = -\,3abx.$
6) $mp - 2mp + 3mp - 4mp = -\,2mp.$
7) $8bbyy + 2bbyy - 7bbyy = 3bbyy.$
8) $7ax - 4by - 3ax + 2by = 4ax - 2by.$
9) $5b + 3b - 4b + 3x = 4b + 3x.$
10) $aa + ab + ab + bb = aa + 2ab + bb.$
11) $5m + 6m - 15m + 3m = ?$
12) $3px - px - 2px + 4px - px = ?$
13) $7am - 4y - 2am + 8y - 2x + 3am = ?$

Gdy w wyrażenie złożone wchodzą wyrazy jednorodne i różnorodne, wtedy jednorodne ilości ściąga się razem, a różnorodne przypisuje się tak jak są. Np.

$$5b + 3b - 4b + 3x = 4b + 3x,$$
$$aa + ab + ab + bb = aa + 2ab + bb.$$

I. Cztery działania pojedynczemi wyrażeniami algebraicznemi.

1. Dodawanie.

§. 12.

Pojedyncze wyrażenia algebraiczne dodaje się, kładąc je obok siebie z znakami takiemi jakie mają; a jeżli są jednorodne, to wyrażenia takie zbiera się czyli ściąga.

Przykłady.

1) $+a+(+b) = +a+b$. 2) $+a+(-b) = +a-b$.
3) $-a+(+b) = -a+b$. 4) $-a+(-b) = -a-b$.

Dodawanie to możnaby przedstawić i w ten sposób:

$$\begin{array}{r}+a\\+b\\ \hline a+b.\end{array}\qquad\begin{array}{r}+a\\-b\\ \hline a-b.\end{array}\qquad\begin{array}{r}-a\\+b\\ \hline -a+b.\end{array}\qquad\begin{array}{r}-a\\-b\\ \hline -a-b.\end{array}$$

$$5)\ \begin{array}{r}3a\\5a\\ \hline 8a.\end{array}\qquad 6)\ \begin{array}{r}4a\\-8a\\ \hline -4a\end{array}\qquad 7)\ \begin{array}{r}-2a\\+3a\\ \hline a.\end{array}$$

$$8)\ \begin{array}{r}5ab\\-5ac\\ \hline 5ab-5ac.\end{array}\qquad 9)\ \begin{array}{r}8mx\\-2mx\\ \hline 6mx.\end{array}\qquad 10)\ \begin{array}{r}-aaxx\\-7aaxx\\ \hline -8aaxx.\end{array}$$

11) $7abc + (-5mx) = ?$
12) $120my + (-95my) = ?$
13) $-33abb + (-11abb) = ?$
14) $-75xy + (+20xxy) = ?$

2. Odejmowanie.

§. 13.

Do odejmowania pojedynczych wyrażeń algebraicznych służy to samo prawidło co i do odejmowania liczb sobie przeciwnych. Aby tego dowieść, rozważymy kolejno cztery przypadki, jakie co do znaków zajść mogą.

a) Od $+ a$ mamy odjąć ilość $+ b$. Ponieważ ilość $+ a$ nie zmieni swej ważności gdy do niej przydamy $+ b - b$, można więc zamiast $+ a$ wziąść $+ a + b - b$. Od tego wyrażenia odjąwszy $+ b$, wypada reszta $+ a - b$; mając więc

$$\left.\begin{array}{r} \text{od } + a \\ \text{odjąć } + b \end{array}\right\} \begin{array}{lr} \text{możemy zamiast } + a \text{ wziąść} & + a + b - b, \\ \text{od czego odjąwszy} & + b \\ \hline \text{zostaje reszta} & + a \quad - b. \end{array}$$

b) Mając od $+ a$ odjąć ilość $- b$, będzie:

$$\left.\begin{array}{r} \text{od } + a \\ \text{odjąć } - b \end{array}\right\} \begin{array}{lr} \text{albo} & + a + b - b \\ \text{od czego odjąwszy} & - b \\ \hline \text{zostaje reszta} & + a + b. \end{array}$$

c) Mając od $- a$ odjąć $+ b$, będzie:

$$\left.\begin{array}{r} \text{od } - a \\ \text{odjąć } + b \end{array}\right\} \begin{array}{lr} \text{albo} & - a + b - b \\ \text{od czego odjąwszy} & + b \\ \hline \text{zostaje reszta} & - a \quad - b. \end{array}$$

d) Mając od $- a$ odjąć ilość $- b$, będzie:

$$\left.\begin{array}{r} \text{od } - a \\ \text{odjąć } - b \end{array}\right\} \begin{array}{lr} \text{albo} & - a + b - b \\ \text{od czego odjąwszy} & - b \\ \hline \text{zostaje reszta} & - a + b. \end{array}$$

Jest więc:

$$\begin{aligned} + a - (+ b) &= + a - b; \\ + a - (- b) &= + a + b; \\ - a - (+ b) &= - a - b; \\ - a - (- b) &= - a + b; \end{aligned}$$

to jest: *odejmowanie pojedynczych wyrażeń algebraicznych odbywa się w ten sposób, że w ilości mającej być odjętą zamienia się znak na przeciwny, i przypisuje się tę ilość po prawej stronie drugiej ilości danej.*

Jeżli ilość mającą być odjętą, pisze się pod ilością daną, wtedy znak zamieniony na przeciwny kładzie się zwykle zaraz pod danym znakiem. Gdy obie ilości są jednorodne, w takim razie zbiera się je w jednę.

Przykłady.

1) $5x - (- 4x) = 5x + 4x = 9x.$

2) $- 3ab - (+ 5ab) = - 3ab - 5ab = - 8ab.$

3) $\begin{array}{r} 2mx \\ \underset{+}{-}\, 4mx \\ \hline 6mx. \end{array}$ 4) $\begin{array}{r} - 3cp \\ \underset{-}{+}\, 3cp \\ \hline - 6cp. \end{array}$ 5) $\begin{array}{r} 8ax \\ \underset{+}{-}\, 3ay \\ \hline 8ax + 3ay. \end{array}$

6) $\begin{array}{r} -\ abc \\ -\ 2abc \\ + \quad\ \\ \hline abc. \end{array}$ 7) $\begin{array}{r} 3abb \\ +\ 10abb \\ - \quad\ \\ \hline -\ 7abb. \end{array}$ 8) $\begin{array}{r} 15mmxx \\ -\ 7mmxx \\ + \quad\ \\ \hline 22mmxx. \end{array}$

9) $-7ay - (-3ay) = ?$
10) $-3mp - (+4mq) = ?$
11) $5aax - (-3aax) = ?$
12) $2abby - (+aby) = ?$

dotąd

3. Mnożenie.

§. 14.

Liczby szczególne można istotnie przez siebie pomnożyć, to jest na iloczyn otrzyma się nową liczbę, w której nie będzie już żadnego śladu czynników, np. $3 \times 6 = 18$. Z głoskami nie da się mnożenie w taki sposób wykonać; iloczyn ich może być tylko wskazany, a to kładąc jednę głoskę obok drugiej, a dla łatwiejszego przeglądu w porządku abecadłowym. Tak iloczyn ilości *a* i *b* oznacza się przez *ab*, iloczyn z ap i bq przez abpq.

Niech będą do pomnożenia przez siebie wyrażenia pojedyncze 5a i — 4b. Ponieważ spółczynniki mogą być uważane jako czynniki głosek, a czynniki w jakimbądź dowolnym porządku przez siebie pomnożone, tenże sam wydają iloczyn, będzie więc:

$$5a \times -4b = 5 \times -4 \times a \times b = -20 \times ab = -20ab.$$

Zatem *mnożenie pojedynczych wyrażeń algebraicznych odbywa się w ten sposób*, że spółczynniki mnożą się według tych samych zasad jak liczby sobie przeciwne, a otrzymany iloczyn kładzie się przed iloczynem z głosek.

Przykłady.

1) $+a \cdot +b = +ab.$ 2) $+a \cdot -b = -ab.$
3) $-a \cdot +b = -ab.$ 4) $-a \cdot -b = +ab.$
5) $7a \cdot 5b = 35ab.$ 6) $-3x \cdot 8m = -24mx.$
7) $3ax \cdot -4by = -12abxy.$
8) $-8cm \cdot -dn = 8cdmn.$
9) $6a \cdot -2a = -12aa.$
10) $-7ab \cdot 2ac = -14aabc.$
11) $8abb \cdot 3ac \cdot -4cc = -96aabbccc.$
12) $3ax \cdot -2am \cdot -4mx \cdot bb = ?$
13) $7ab \cdot -9mfl = ?$
14) $318a \cdot -51b \cdot -63c = ?$
15) $-97ax \cdot -53by \cdot 82cz \cdot -acy = ?$

4. Dzielenie.

§. 15.

Dzielenie głosek odbywa się, pisząc je w kształcie ułomka; np. $a : b = \frac{a}{b}$.

Gdy w liczniku i mianowniku są czynniki jednakowe, te wypuszcza się, np.

$abc : bc = \frac{\cancel{abc}}{\cancel{bc}} = a$, $\quad aabx : aby = \frac{aabx}{aby} = \frac{ax}{y}$.

Wypada ztąd iż:

aby mieć iloraz dwóch ilości algebraicznych, opuszcza się głoski spólne dzielnej i dzielnikowi, pozostałość będzie szukanym ilorazem. Gdy zaś w dzielniku są także i takie głoski jakich nie ma w dzielnej, wtedy dzielenie przez te głoski może być tylko wskazane, kładąc je w mianowniku ilorazu.

Mając tedy dwa pojedyncze wyrażenia algebraiczne podzielić przez siebie, trzeba naprzód podzielić przez siebie spółczynniki według tych samych zasad jak liczby sobie przeciwne, i otrzymany iloraz położyć przed ilorazem z głosek.

Przykłady.

1) $+ ab : + a = + b$. 2) $+ ab : - a = - b$.
3) $- ab : + a = - b$. 4) $- ab : - a = + b$.
5) $6mx : 2x = 3m$. 6) $12am : - 3m = - 4a$.
7) $- 20aab : - 5ab = 4a$.
8) $- 35abccd : 5bcd = - 7ac$.
9) $10ab : - 2bc = - \frac{5a}{c}$.
10) $- 8am : - mm = \frac{8a}{m}$.
11) $abx : 5aby = ?$
12) $- 3bmx : 4axx = ?$
13) $- 51abdxx : 3bdx = ?$
14) $225mmy : 25myy = ?$
15) $31amz : - 32any = ?$

Vrt Szyk Kluczy

II. Cztery działania złożonemi wyrażeniami algebraicznemi, czyli rozwiązywanie nawiasów (Auflösung der Klammern).

1. Dodawanie.

§. 16.

Dodawanie złożonych wyrażeń algebraicznych odbywa się, kładąc je obok siebie z takim znakiem jakie mają.

Jeźli w sumie są wyrażenia jednorodne, trzeba takowe zebrać czyli ściągnąć. W takich razach ilości mające się dodać do siebie, najlepiej jest napisać jedne pod drugiemi, i to tak aby ilości jednorodne przypadły wprost pod sobą.

Przykłady.

1) $a + (b + c) = a + b + c.$

2) $(3a - 2b) + (3c - 4d) = 3a - 2b + 3c - 4d.$

3) $5a + 2x + (3b - 2y) + (3c - 2d + z) =$
$= 5a + 2x + 3b - 2y + 3c - 2d + z.$

4) $8x - 5y + (5x + 2y) = 8x - 5y + 5x + 2y = 13x - 3y.$

$$\text{lub}\quad \begin{array}{r} 8x - 5y \\ 5x + 2y \\ \hline 13x - 3y. \end{array}$$

5) $$\begin{array}{rrr} aa & + ab & \\ & + ab & + bb \\ \hline aa & + 2ab & + bb. \end{array}$$

6) $$\begin{array}{rrr} aa & + ab & \\ & - ab & + bb \\ \hline aa & & + bb. \end{array}$$

7) $$\begin{array}{rrr} 6m & - 5n & + 2p \\ 5m & + 8n & - 5p \\ -4m & - n & + 3p \\ \hline 7m & + 2n. & \end{array}$$

8) $$\begin{array}{rrrr} 64mmm & - 96mmx & + 36mxx & \\ & - 48mmx & + 72mxx & - 27xxx \\ \hline 64mmm & - 144mmx & + 108mxx & - 27xxx. \end{array}$$

9) $3ab + (5ab - 4m) + (6m - 2ab) = \ldots$

10) $17xx - 25ax - 10aa + (3xx + 12ax - 5aa) = \ldots$

2. Odejmowanie.

§. 17.

Odejmowanie złożonych wyrażeń algebraicznych odbywa się w ten sposób, iż ilość od której się odejmuje zostaje nietkniętą, a w ilości mającej być odjętą przemienia się znaki wszystkich wyrazów na przeciwne, i tęż ilość obok tamtej przypisuje. Aby się o tem

Odejmowanie.

przekonać, dajmy że od $a + b - c$ trzeba odjąć $m - n + p$. Otóż zamiast $a + b - c$, możną wziąść $a + b - c + m - m + n - n + p - p$; od tej ilości odjąwszy powyższe $m - n + p$, zostaje reszta $a + b - c - m + n - p$; albowiem

$$\begin{array}{lrrr}
\text{od } a + b - c \text{ czyli od} & a + b - c + m & - m + n & - n + p - p \\
\text{odjąwszy} & + m & & - n + p \\
\hline
\text{zostaje reszta} & a + b - c & - m + n & - p;
\end{array}$$

jest więc:

$$a + b - c - (m - n + p) = a + b - c - m + n - p.$$

Widoczna jest także z tego, że gdy przed wyrażeniem zawartem w nawiasie jest znak —, można nawias opuścić, jeźli tylko znaki wszystkich wyrazów w nawiasie zamkniętych zamienimy na znaki przeciwne.

Jeźli w wyrażeniach mających się od siebie odjąć zachodzą wyrazy jednorodne, to dla ściągnięcia takowych najstosowniej jest wyrażenie jedno pod drugiem tak umieścić, aby ilości jednorodne przypadły wprost pod siebie, a potem w ilości mającej być odjętą pokłaść znaki przemienione tuż pod znakami danemi.

Przykłady.

1) $3a - (2b + 4c) = 3a - 2b - 4c.$

2) $9x - 2a - (2y - 3b) = 9x - 2a - 2y + 3b.$

3) $5ax + 6by - (3cx - 4ay + 5bz) =$
$$= 5ax + 6by - 3cx + 4ay - 5bz.$$

4) $3a + (4b - 5c) - (6d - 7e) = 3a + 4b - 5c - 6d + 7e.$

5) $8a - 4b + 3c - (6a + 2b - 3c) =$
$$= 8a - 4b + 3c - 6a - 2b + 3c = 2a - 6b + 6c,$$

lub
$$\begin{array}{r}
8a - 4b + 3c \\
6a + 2b - 3c \\
- \quad - \quad + \\
\hline
2a - 6b + 6c.
\end{array}$$

6)
$$\begin{array}{r}
3ax - 4by \\
2ax + 2by \\
- \quad + \\
\hline
ax - 2by.
\end{array}$$

7)
$$\begin{array}{r}
xx + 6ax + aa \\
xx - 4ax \\
- \quad + \\
\hline
10ax + aa.
\end{array}$$

8)
$$\begin{array}{r}
2aa - 3a + 4 \\
3aa + a - 5 \\
- \quad - \quad + \\
\hline
- aa - 4a + 9.
\end{array}$$

9)
$$\begin{array}{r}
5abx - 3bcy \\
- abx + 4bcy - 3cdz \\
+ \quad - \quad + \\
\hline
6abx - 7bcy + 3cdz.
\end{array}$$

$5x^2$ $5x^2$

10) $5xx + 7x - 5 - (3xx - 2x - 6) = \ldots$
11) $2ax - 3b - (5a + 2b) + (4a - b) = \ldots$
12) $8mmm - 7mmy - 3myy - (3mmy - 5myy + 8yy) = \ldots$

3. Mnożenie.

§. 18.

W mnożeniu wyrażeń złożonych mamy do rozróżnienia dwa przypadki: albo jeden z czynników jest wyrażeniem złożonem, a drugi pojedynczem, alboteż oba czynniki są wyrażeniami złożonemi.

1. Gdy jeden czynnik jest wyrażeniem złożonem a drugi pojedynczem.

Dajmy iż *a* ma być pomnożone przez $b + c - d$. Tu trzeba z ilości *a* utworzyć nową liczbę w ten sam sposób w jaki $b + c - d$ z jednostki powstało; otóż $b + c - d$ powstało w ten sposób z jednostki, że naprzód utworzyło się b, potem c, nareszcie — d, i otrzymane wypadki dodało się do siebie; trzeba więc także z ilości *a* otrzymać wypadek w taki sposób w jaki *b* z jednostki powstało, to jest *a* pomnożyć przez b; potem z *a* trzebać szukać wypadku w taki sposób w jaki c z jednostki powstało, to jest *a* pomnożyć przez c; nareszcie z *a* otrzymać wypadek w taki sposób w jaki — d z jednostki powstało, to jest *a* pomnożyć przez — d, i te trzy wypadki dodać do siebie. Będzie więc:

$$a \,.\, (b + c - d) = a \,.\, b + a \,.\, c + a \,.\, -d = ab + ac - ad.$$

Ponieważ iloczyn nie zmienia się czyli zostaje ten sam, choć w nim porządek czynników zmienimy, jest więc także

$$(b + c - d) \,.\, a = ab + ac - ad.$$

Wypływa ztąd iż:

Wyrażenie złożone mnoży się przez wyrażenie pojedyncze w ten sposób, iż każdy wyraz wyrażenia złożonego mnoży się przez wyrażenie pojedyncze, a otrzymane iloczyny cząstkowe dodaje się do siebie.

Przykłady.

1) $5a \,.\, (3b + 4c - d) = 15ab + 20ac - 5ad.$
2) $-3ax \,.\, (by - 2cz + 5) = -3abxy + 6acxz - 15ax.$
3) $(6a - 5b) \,.\, 3c = 18ac - 15bc.$
4) $(7m - 6n + 5p) \,.\, -3x = -21mx + 18nx - 15px.$
5) $(2 + 3a - 4aa - 5aaa) \,.\, 6aa = 12aa + 18aaa - 24aaaa - 30aaaaa.$
6) $(3ax - 5by - cz) \,.\, -2mp = \ldots$

7) $(5aa - 3a + 2) \cdot - 6ax = \ldots$
8) $8by \cdot (1 - 2x + 3xx) = \ldots$
9) $(7am + 6bn - 5cp + 4dq) \cdot 3fx = \ldots$

§. 19.

2. Gdy oba czynniki są wyrażeniami złożonemi.

Przypadek ten da się odnieść do poprzedzającego. Chcąc bowiem $a + b + c$ pomnożyć przez $n + p + q$, oznaczywszy mnożną $a + b + c$ tymczasowo przez m, będzie

$$m \cdot (n + p + q) = m \cdot n + m \cdot p + m \cdot q,$$

a kładąc zamiast m napowrót jego wartość,

$$\begin{aligned}(a + b + c) \cdot (n + p + q) = (a + b + c) \cdot n \\ + (a + b + c) \cdot p \\ + (a + b + c) \cdot q,\end{aligned}$$

lub

$$\begin{aligned}(a + b + c) \cdot (n + p + q) = an + bn + cn \\ + ap + bp + cp \\ + aq + bq + cq;\end{aligned}$$

to jest: aby dwa algebraiczne wyrażenia złożone pomnożyc przez siebie, trzeba całą mnożną pomnożyć przez każdy wyraz mnożnika, czyli co na jedno wychodzi, trzeba każdy wyraz jednego czynnika pomnożyć przez każdy wyraz drugiego czynnika, a potem otrzymane iloczyny cząstkowe dodać do siebie.

Przy wykonywaniu mnożenia pisze się zwykle czynniki złożone jeden pod drugim, a w iloczynach cząstkowych jeźli są jakie ilości jednorodne, te dla łatwiejszego ściągnięcia również pod sobą wprost się umieszcza.

Przykłady.

1) $(5a - 3b)(4c - 2d) = (5a - 3b) \cdot 4c + (5a - 3b) \cdot - 2d$
$= 20ac - 12bc - 10ad + 6bd.$

2) $(m + 2n - 3p)(2x + 3y) = (m + 2n - 3p) \cdot 2x + (m + 2n - 3p) \cdot 3y$
$= 2mx + 4nx - 6px + 3my + 6ny - 9py.$

3) $(5a - 6b)(3a - 4b) = 15aa - 18ab - 20ab + 24bb$
$= 15aa - 38ab + 24bb.$

lub

$$\begin{array}{l} 5a - 6b \\ \underline{3a - 4b} \\ 12aa - 18ab \\ \underline{\quad\quad - 20ab + 24bb} \\ 15aa - 38ab + 24bb. \end{array}$$

4) $(3 + 2a - b)(5mx - 7ny + 9pz) = 15mx + 10amx - 5bmx - 21ny - 14any + 7bny + 27pz + 18apz - 9bpz.$

5) $(3a + 4b)(2c - d)(5m - 6n) = (6ac + 8bc - 3ad - 4bd)(5m - 6n) = 30acm + 40bcm - 15adm - 20bdm - 36acn - 48bcn + 18adn + 24bdn.$

6)
$$\begin{array}{rrrr}
xx & -3x & +4 & \\
7x & -3 & & \\
\hline
7xxx & -21xx & +28x & \\
 & -3xx & +9x & -12 \\
\hline
7xxx & -24xx & +37x & -12.
\end{array}$$

7)
$$\begin{array}{rrrrr}
3xx & -5xy & +2yy & & \\
2xx & +xy & -3yy & & \\
\hline
6xxxx & -10xxxy & +4xxyy & & \\
 & +3xxxy & -5xxyy & +2xyyy & \\
 & & -9xxyy & +15xyyy & -6yyyy \\
\hline
6xxxx & -7xxxy & -10xxyy & +17xyyy & -6yyyy.
\end{array}$$

8) $(x - 2y - 3z)(3x + 2y - z) = \ldots$

9) $(4ab - 3cd + 2ef)(4ab + 3cd - 2ef) = \ldots$

10) $(a - 2b + c + 3d)(2a + b - 2c + 6d) = \ldots$

11) $(2mx - 3ny + 4pz)(3mx + 2ny - pz) = \ldots$

12) $(3x - 7y)(5x + 2y)(3ax - 4by) = \ldots$

4. Dzielenie.

§. 20.

W dzieleniu algebraicznych wyrażeń złożonych, mogą być trzy przypadki: albo dzielna jest wyrażeniem złożonem a dzielnik pojedynczem, albo dzielna jest wyrażeniem pojedynczem a dzielnik złożonem, albo nareszcie tak dzielna jak dzielnik są każde wyrażeniem złożonem.

1. Gdy dzielna jest wyrażeniem złożonem a dzielnik wyrażeniem pojedynczem.

Ponieważ jest

$$(a + b + c) \cdot p = ap + bp + cp,$$

gdy więc iloczyn dwóch czynników podzielimy przez jeden z tych czynników, musimy drugi czynnik otrzymać na iloraz; zatem musi być

$$(ap + bp + cp) : p = a + b + c;$$

lecz a, b, c, są to ilorazy, które się otrzymuje dzieląc kolejno ap, bp, cp przez p; zatem wynika ztąd prawidło:

mnożę z moc ...

Aby wyrażenie złożone podzielić przez wyrażenie pojedyncze, trzeba każdy wyraz wyrażenia złożonego podzielić przez wyrażenie pojedyncze.

P r z y k ł a d y.

1) $(8ab - 12ac) : 4a = 2b - 3c.$

2) $(15am - 10bm + 20cm) : - 5m = - 3a + 2b - 4c.$

3) $(18amy - 27bny + 36cpy) : - 9y = - 2am + 3bn - 4cp.$

4) $20abmn - 16acmp + 9adnq) : 4am = 5bn - 4cp + \frac{9dnq}{4m}.$

5) $(30mnp - 25mnq - 15mnr + 10mns) : - 5mn = \ldots$

6) $(21ax - 18bx + 15cx) : - 3x = \ldots$

7) $(30aazz - 24azzz - 5zzzz) : 6azzz = \ldots$

2. Gdy dzielna jest wyrażeniem pojedynczem, a dzielnik wyrażeniem złożonem.

W tym przypadku dzielenie może być tylko *wskazane*, wyrażając iloraz w postaci ułomka.

P r z y k ł a d y.

1) $a : (a + b) = \frac{a}{a + b}.$

2) $- 3x : (5a - 2b) = \frac{- 3x}{5a - 2b}.$

§. 21.

3. Gdy tak dzielna jak dzielnik są wyrażeniem algebraicznem złożonem.

Aby ten przypadek rozwiązać, najstosowniej będzie dwa wyrażenia złożone $a + b + c$ tudzież $n + p + q$ pomnożyć przez siebie, i z otrzymanego iloczynu wyczytać prawo, według którego wyrazy obu czynników powiązały się z sobą.

$$
\begin{array}{ll}
\text{Dzielnik} & a + b + c. \\
\text{Iloraz} & n + p + q. \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\text{Dzielna} \left\{ \begin{array}{r} an + bn + cn \\ + ap + bp + cp \\ + aq + bq + cq. \end{array} \right.
$$

Gdy więc iloczyn weźmiemy za dzielną, jeden czynnik $a + b + c$ za dzielnik, wtedy drugi czynnik $n + p + q$ musi być ilorazem.

Pierwszym wyrazem dzielnej jest *an*, to jest iloczyn z pierwszego wyrazu *a* dzielnika i pierwszego wyrazu *n* ilorazu; a zatem otrzymuje się pierwszy wyraz n ilorazu, dzieląc pierwszy wyraz an dzielnej przez pierwszy wyraz a dzielnika. — Wypada teraz ten pierwszy wyraz n ilorazu pomnożyć przez wszystkie wyrazy dzielnika, i otrzymany iloczyn cząstkowy odjąć od dzielnej; co gdy uskutecznimy, pierwszy wyraz ap reszty jest iloczynem z pierwszego wyrazu a dzielnika i z drugiego wyrazu p ilorazu; otrzymamy więc ten drugi wyraz ilorazu, jeżli pierwszy wyraz reszty podzielimy przez pierwszy wyraz dzielnika. — Pomnożywszy ten drugi wyraz p ilorazu przez wszystkie wyrazy dzielnika, i otrzymany iloczyn odjąwszy od poprzedzającej reszty, pierwszy wyraz aq nowej reszty jest iloczynem z pierwszego wyrazu a dzielnika i z trzeciego wyrazu q ilorazu; jeżli więc ten pierwszy wyraz reszty podzielimy przez pierwszy wyraz dzielnika, otrzymamy trzeci wyraz q ilorazu; i tak dalej.

Z powyższego wyprowadzić się daje następujące *prawidło dzielenia przez siebie dwóch algebraicznych wyrażeń złożonych.*

1. Dziel pierwszy wyraz dzielnej przez pierwszy wyraz dzielnika, a otrzymasz ztąd pierwszy wyraz ilorazu. Przez ten otrzymany pierwszy wyraz ilorazu pomnóż cały dzielnik, a wynikły iloczyn odejm od dzielnej.

2. Do otrzymanej reszty przypisz z dzielnej następujący wyraz lub kilka wyrazów, i pierwszy wyraz tej nowej dzielnej cząstkowej dziel przez pierwszy wyraz dzielnika, a otrzymasz drugi wyraz ilorazu; przez ten drugi wyraz pomnóż cały dzielnik, a iloczyn odejm od reszty dzielnej.

3. Do tej nowej reszty przypisz znowu jeden lub kilka następujących wyrazów dzielnej, i tak samo powtarzaj działanie dalej, dopóki wszystkie wyrazy dzielnej nie zostaną zużyte.

4. Jeżeli na sam koniec jaka reszta pozostanie, trzeba ją jeszcze przez dzielnik podzielić; atoli w tym razie iloraz może być tylko wskazany, i w postaci ułomka przypisać go trzeba do otrzymanego całego ilorazu.

Przykłady.

1) $(24abc - 15cxy - 48abd + 30dxy) : (3c - 6d) = 8ab - 5xy.$

$$\begin{array}{llll}
24abc & & -48abd & \\
- & & + & \\
\hline
 & -15cxy & & +30dxy \\
 & -15cxy & & +30dxy \\
 & + & & - \\
\hline
 & & 0 &
\end{array}$$

2) $(10aa - 11ab - 6bb) : (2a - 3b) = 5a + 2b.$

$$\begin{array}{l}
10aa - 15ab \\
- \quad + \\
\hline
\quad + 4ab - 6bb \\
\quad + 4ab - 6bb \\
\quad - \quad + \\
\hline
\quad 0
\end{array}$$

3) $(45mm - 4mn - 60nn) : (9m + 10n) = 5m - 6n.$

$$\begin{array}{l}
45mm + 50mn \\
- \quad - \\
\hline
\quad - 54mn - 60nn \\
\quad - 54mn - 60nn \\
\quad + \quad + \\
\hline
\quad 0
\end{array}$$

4) $(10aabb - 7abcd - 10ccdd) : (2ab - 3cd) = 5ab + 4cd + \frac{2ccdd}{2ab - 3cd}.$

$$\begin{array}{l}
10aabb - 15abcd \\
- \quad + \\
\hline
\quad + 8abcd - 10ccdd \\
\quad + 8abcd - 12ccdd \\
\quad - \quad + \\
\hline
\quad + 2ccdd
\end{array}$$

5) $(9yy - 4xx - 4x - 1) : (3y - 2x - 1) = 3y + 2x + 1.$

$$\begin{array}{l}
9yy - 6xy - 3y \\
- \quad + \quad + \\
\hline
\quad + 6xy + 3y - 4xx - 4x \\
\quad + 6xy \quad - 4xx - 2x \\
\quad - \quad + \quad + \\
\hline
\quad + 3y - 2x - 1 \\
\quad + 3y - 2x - 1 \\
\quad - \quad + \quad + \\
\hline
\quad 0
\end{array}$$

6) $(10abcxy - 15defxy + 2abcz - 3defz) : (2abc - 3def)$
$= 5xy + z.$

7) $(3aa + 4ab - 8ac - 4bb + 8bc - 3cc) : (3a - 2b + c)$
$= a + 2b - 3c.$

8) $(1 + 5m + 6mm - 8n - 19mn + 15nn) : (1 + 3m - 5n)$
$= 1 + 2m - 3n.$

9) $(6aa - 13ab + 4ax + 6bb - 11bx - 10xx) : (3a - 2b + 5x)$
$= 2a - 3b - 2x.$

10) $(24xx - 38ax + 15aa) : (4x - 3a) = \ldots$

11) $(8mmm - 1) : (2m - 1) = \ldots$

12) $(27yyy - 135yyz - 225yzz + 125zzz) : (3y - 5z) = \ldots$

III. Ułomki algebraiczne, czyli odbywanie rachunków wyrażeniami algebraicznemi ułomkowemi.

§. 22.

Ułomki algebraiczne tem się tylko różnią od liczebnych, że co w tych wyrażają liczby, to w tamtych wyraża się przez głoski; dość więc będzie tutaj działania arytmetyczne z ułomkami liczebnemi zastosować wprost do ułomków algebraicznych.

Jedną tylko musimy tu zrobić uwagę, i to co do *liczb wielorakich.* Oto w szczególnych liczbach wielorakich ułomek będący przy liczbie całkowitej uważany jest zawsze jako mający dodać się do niej, zatem jako dodajny, tak iż np. $5\frac{3}{4}$ jest to samo co $5 + \frac{3}{4}$, gdy tymczasem w ogólnej liczbie wielorakiej tak ułomek który jest przy niej, jakoteż i sama całkowita liczba mogą być dodajne lub ujemne, tak, iż ilość algebraiczna wieloraka może być w następującej postaci:

$$a + \frac{m}{n}, \quad a - \frac{m}{n}, \quad \frac{m}{n} + a, \quad - a - \frac{m}{n}.$$

Aby odbywać działania rachunkowe liczbami wielorakiemi, trzeba je wprzód zamienić na ułomki niewłaściwe. Do tego zaś, tak jak w liczbach szczególnych, mnoży się liczbę całkowitą przez mianownik ułomka do niej należącego, a do tego iloczynu dodaje się licznik lub odejmuje od niego, według tego jak ułomek jest dodajny lub ujemny.

§. 23.

Przykłady zamiany liczb wielorakich na ułomki.

1) $a + \frac{m}{n} = \frac{an + m}{n}$.

2) $a - \frac{m}{n} = \frac{an - m}{n}$.

3) $\frac{m}{n} - a = \frac{m - an}{n}$.

4) $2x - \frac{3y}{4z} = \frac{8xz - 3y}{4z}$.

5) $1 + \frac{x - y}{x + y} = \frac{x + y + x - y}{x + y} = \frac{2x}{x + y}$.

6) $1 - \frac{x - y}{x + y} = \frac{x + y - x + y}{x + y} = \frac{2y}{x + y}$.

7) $\frac{1 + 2xx}{x} - 3x = \frac{1 + 2xx - 3xx}{x} = \frac{1 - xx}{x}$.

8) $a + b - \frac{aa + bb}{a + b} = \frac{2ab}{a + b}$.

9) $2a + \frac{3b}{x} = \ldots$

10) $5a - 2b + \frac{3aa - 4bb}{5a - 6b} = \ldots$

11) $\frac{2 - 3a + 4aa}{5 - 6a} - 7a = \ldots$

§. 24.

Przykłady sprowadzenia kilku ułomków do najmniejszego spólnego mianownika.

1. Niech będą ułomki $\frac{a}{2}$, $\frac{2a}{3}$, $\frac{3a}{5}$, które sprowadzić trzeba do najmniejszego mianownika spólnego.

Najmniejszy mianownik spólny jest 2 . 3 . 5 = 30; jest więc

$$30 : 2 = 15,\ a \times 15 = 15a,\ \text{więc}\ \frac{a}{2} = \frac{15a}{30};$$

$$30 : 3 = 10,\ 2a \times 10 = 20a,\ „\ \frac{2a}{3} = \frac{20a}{30}$$

$$30 : 5 = 6,\ 3a \times 6 = 18a,\ „\ \frac{3a}{5} = \frac{18a}{30}.$$

2. Ułomki $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{bd}$ sprowadzić do najmniejszego mianownika spólnego.

Ponieważ mianownik b pierwszego ułamka i mianownik d drugiego ułomka są czynnikami mianownika bd trzeciego ułamka zatem bd jest najmniejszym mianownikiem spólnym, i będzie

$$\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd},\qquad \frac{c}{d} = \frac{bc}{bd},\qquad \frac{e}{bd} = \frac{e}{bd}.$$

3. Ułomki $\frac{1}{a}$, $\frac{2}{aa}$, $\frac{3}{aaa}$ sprowadzić do najmniejszego mianownika spólnego.

$$\begin{array}{l|l}
 & \text{aaa} \\
\hline
\frac{1}{a}\ \ aa & aa,\ \text{zatem}\ \frac{1}{a} = \frac{aa}{aaa}; \\
\frac{2}{aa}\ \ a & 2a,\ „\ \ \frac{2}{aa} = \frac{2a}{aaa}, \\
\frac{3}{aaa}\ \ 1 & 3,\ „\ \ \frac{3}{aaa} = \frac{3}{aaa}.
\end{array}$$

4. Ułomki $\frac{1}{3}$, $\frac{a}{b}$, $\frac{3x}{4cd}$, $\frac{5y}{6dd}$ sprowadzić do najmniejszego mianownika spólnego.

$$\begin{array}{r|lll}
3, & b, & 4cd, & 6dd, \\
\hline
2 & b, & 2cd, & 3dd, \\
d & b, & 2c, & 3d,
\end{array}$$

Najmniejszym spólnym mianownikiem jest więc $2 . d . b . 2c . 3d = 12bcdd$, zatem będzie

$$\begin{array}{ll|l}
\multicolumn{2}{c}{12bcdd} & \\
\hline
\frac{1}{3} & 4bcdd & 4bcdd, \text{ zatem } \frac{1}{3} = \frac{4bcdd}{12bcdd}; \\
\frac{a}{b} & 12cdd & 12acdd, \quad „ \quad \frac{a}{b} = \frac{12acdd}{12bcdd}; \\
\frac{3x}{4cd} & 3bd & 9bdx, \quad „ \quad \frac{3x}{4cd} = \frac{9bdx}{11bcdd}; \\
\frac{5y}{6dd} & 2bc & 10bcy, \quad „ \quad \frac{5y}{6dd} = \frac{10bcy}{12bcdd}.
\end{array}$$

§. 25.

Przykłady dodawania ułomków.

1) $\frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a + b}{m}$.

2) $\frac{x + y}{2p} + \frac{x - y}{2p} = \frac{x + y + x - y}{2p} = \frac{2x}{2p} = \frac{x}{p}$.

3) $\frac{n + p}{3} + \frac{n - p}{3} = \frac{n + q}{3} = \frac{3n}{3} = n$.

4) $\frac{a}{m} + \frac{b}{n} = \frac{an + bm}{mn}$.

5) $\frac{2x + 3y}{2} + \frac{x - 2y}{3} = \frac{6x + 9y}{6} + \frac{2x - 4y}{6} = \frac{8x + 5y}{6}$.

6) $\frac{a + b}{a - b} + \frac{a - b}{a + b} = \ldots$

7) $\frac{3x}{4} + \frac{2x}{3} + \frac{7x}{10} = \ldots$

8) $\frac{3m - 2n}{m + 2n} + \frac{m + 2n}{m - 2n} = \ldots$

§. 26.

Przykłady odejmowania ułomków.

1) $\frac{a}{m} - \frac{b}{m} = \frac{a - b}{m}$.

2) $\frac{x + y}{2m} - \frac{x - y}{2m} = \frac{x + y - x + y}{2m} = \frac{2y}{2m} = \frac{y}{m}$.

3) $\frac{5m - 3n}{4} - \frac{m + n}{4} = \frac{5m - 3n - m - n}{4} = \frac{4m - 4n}{4} = m - n$.

4) $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{bx}{ab} - \frac{ay}{ab} = \frac{bx - ay}{ab}.$

5) $\frac{5b}{6} - \frac{3b}{4} = \frac{10b}{12} - \frac{9b}{12} = \frac{b}{12}.$

6) $\frac{x + y}{x - y} - \frac{x - y}{x + y} = \frac{(x + y)(x + y) - (x - y)(x - y)}{(x - y)(x + y)}$

$$= \frac{4xy}{xx - yy}.$$

7) $\frac{5a}{3} - \frac{3a}{4} = \ldots$

8) $\frac{2b - 5x}{3b + 4x} - \frac{4b - 5x}{3b - 2x} = \ldots$

9) $\frac{3m}{2x} + \frac{5n}{3y} - \frac{4p}{5xy} = \ldots$

§. 27.

Przykłady mnożenia ułomków.

1) $\frac{a}{b} \cdot m = \frac{am}{b}.$

2) $\frac{3}{4ab} \cdot 2b = \frac{3}{2a}.$

3) $\frac{2abx}{3m} \cdot - 5c = - \frac{10abcx}{3m}.$

4) $\left(1 + \frac{b}{a}\right) \cdot 3a = \frac{a + b}{a} \cdot 3a = 3a + 3b.$

5) $\left(x - y + \frac{xx + yy}{x + y}\right) \cdot (x + y) = \frac{2xx}{x + y} \cdot (x + y) = 2xx.$

6) $\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{mp}{nq}.$

7) $\frac{2a}{3m} \cdot \frac{3b}{4n} \cdot - \frac{4c}{5p} = - \frac{2abc}{5mnp}.$

8) $\left(1 + \frac{x}{y}\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{y}\right) = \frac{y + x}{y} \cdot \frac{y - x}{y} = \frac{yy - xx}{yy}.$

9) $\left(2a + \frac{b}{3c}\right) \left(\frac{2b}{5c} - a\right) = \frac{6ac + b}{3c} \cdot \frac{2b - 5ac}{5c} =$

$$= \frac{2bb + 7abc - 30aacc}{15cc}.$$

10) $\left(1 + \frac{m}{n}\right) \left(1 - \frac{m}{n}\right) \cdot \frac{m}{m + n} \cdot \frac{n}{n - m} = \frac{n+m}{n} \left(\frac{n-m}{n}\right) \frac{nn-mm}{n}$

11) $\frac{5x}{3a} \cdot - \frac{3y}{4b} \cdot \frac{2a}{5c} \cdot - \frac{7z}{8d} = \ldots$

12) $\left(3x - \frac{4ax - 3}{2a}\right) \cdot - 5ab = \ldots$

Liczbę jaką wynieść do potęgi 2giej, 3ciej, . . . mtej, jestto wziąć tę liczbę 2 razy, 3 razy, . . . m razy za czynnika; np. wynieść 3 do potęgi 4tej jestto liczbę 3 wziąć 4 razy za czynnika, zatem $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$; a tak potęgą 4tą liczby 3 jest 81. Działanie to oznacza się w ten sposób, iż nad pierwiastkiem nieco z prawej jego strony kładzie się wykładnik, jest więc:

$$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3.$$

$$4^3 = 4 \times 4 \times 4.$$

$$a^5 = a \, . \, a \, . \, a \, . \, a \, . \, a.$$

Wykładnik 1 nie przypisuje się, tak iż a oznacza tyle co a^1, to jest każda ilość jest sama swoją pierwszą potęgą.

Spółczynnika trzeba dobrze rozróżnić od wykładnika potęgi, tak np. jest

$$4a = a + a + a + a,$$

zaś $a^4 = a \, . \, a \, . \, a \, . \, a$,

któreto wyrażenia w istocie swej całkiem są odmienne; zrobiwszy bowiem $a = 3$, będzie

$$4a = 3 + 3 + 3 + 3 = 12,$$

$$a^4 = 3 \, . \, 3 \, . \, 3 \, . \, 3 = 81.$$

Z liczby danej wyciągnąć pierwiastek stopnia 2go, 3go, . . . mgo, jestto znaleść taką liczbę, która wzięta za czynnika 2 razy, 3 razy, . . . m razy, wyda liczbę daną; np. z liczby 32 wyciągnąć pierwiastek stopnia 5go, jestto znaleść taką liczbę, która wzięta 5 razy za czynnika wyda 32; tą liczbą jest 2, bo $2.2.2.2.2 = 32$. Do oznaczenia iż z ilości jakiej ma być wyciągnięty pierwiastek, używamy znaku $\sqrt{}$, kładąc go po lewej stronie tej liczby, a w otworze tego znaku umieszcza się wykładnika; tak np. pierwiastek 5go stopnia z 32 znaczy się tak: $\sqrt[5]{32}$. Do oznaczenia pierwiastku stopnia 2go nie używa się wykładnik 2, tak iż np. $\sqrt{5}$ znaczy to samo co $\sqrt[2]{5}$; to opuszczanie wykładnika 2 nie może prowadzić do żadnego nieporozumienia, gdyż pierwiastek pierwszego stopnia każdej liczby równy jest tejże liczbie, i dlatego też gdy idzie o pierwiastek pierwszego stopnia, nie masz wcale potrzeby używać znaku pierwiastkowego.

I. Znaki potęg.

§. 30.

Zastanówmy się naprzód nad potęgami pierwiastku dodajnego $+ a$; i tak jest:

Jagłowz

$(+a)^2 = +a \,.\, +a = +aa = +a^2,$
$(+a)^3 = +a \,.\, +a \,.\, +a = +aaa = +a^3,$
$(+a)^4 = +a \,.\, +a \,.\, +a \,.\, +a = +aaaa = +a^4,$
i tak dalej, a tak:

Pierwiastek dodajny wyniesiony do potęgi czy parzystej czy nieparzystej, daje zawsze wypadek dodajny.

Inaczej się ma z pierwiastkiem ujemnym; wziąwszy np. $-a$, będzie

$(-a)^2 = -a \,.\, -a = +aa = +a^2,$
$(-a)^3 = -a \,.\, -a \,.\, -a = -aaa = -a^3,$
$(-a)^4 = -a \,.\, -a \,.\, -a \,.\, -a = +aaaa = +a^4,$
$(-a)^5 = -a \,.\, -a \,.\, -a \,.\, -a \,.\, -a = -aaaaa = -a^5.$
i tak dalej, z czego się okazuje iż:

Pierwiastek ujemny wyniesiony do potęgi parzystej, daje wypadek dodajny; a wyniesiony do potęgi nieparzystej, daje wypadek ujemny.

II. Cztery działania rachunkowe potęgami.

1. Dodawanie i odejmowanie.

§. 31.

Dodawanie i odejmowanie potęg odbywa się według tych samych zasad jak dodawanie i odejmowanie wyrażeń algebraicznych w ogólności. Wypadek zaś, to jest otrzymaną sumę lub różnicę, można wtedy tylko ściągnąć, gdy potęgi są *jednorodne*, to jest gdy mają jednakie pierwiastki i jednakie wykładniki.

P r z y k ł a d y.

1) $3a^4 + (-4b^3) = 3a^4 - 4b^3.$
2) $3a^4 - (-4b^3) = 3a^4 + 4b^3.$
3) $2a^3 + (5a^2) - (3a) = 2a^3 + 5a^2 - 3a.$
4) $3a^2 + (-5a^2) - (4a^2) - (-7a^2) =$
$= 3a^2 - 5a^2 - 4a^2 + 7a^2 = a^2.$
5) $7a^2b^3 - 3a^3b^2 + 4a^3b^2 - 2a^2b^3 = 5a^2b^3 + a^3b^2.$

2. M n o ż e n i e.

§. 32.

Mnożenie potęg odbywa się według tej samej zasady jak mnożenie wyrażeń algebraicznych w ogólności; np.

$a^3x^2 \times by^2 = a^3bx^2y^2; \quad 3am^2 \,.\, -5b^2n^3 = -15ab^2m^2n^3.$

Iloczyn wtedy tylko może być ściągniony czyli sproszczony, gdy potęgi powstały z jednego i tego samego pierwiastku, albo także gdy jednakie mają wykładniki.

a) Gdy pierwiastki potęg są jednakowe.

$a^2 . a = aa . a = aaa = a^3,$

$a^3 . a^2 = aaa . aa = aaaaa = a^5.$

$a^5 . a^3 = aaaaa . aaa = aaaaaaaa = a^8,$

$a^3 . a^2 . a^4 = aaa . aa . aaaa = aaaaaaaaa = a^9.$

Widzimy w każdym z powyższych iloczynów, iż wykładnik iloczynu równy jest sumie wykładników wszystkich czynników, a tak: *Iloczyn potęg z tego samego pierwiastku powstałych otrzymuje się, gdy temuż pierwiastkowi da się za wykładnika sumę wszystkich wykładników.*

Przykłady.

1) $a^4 . -3a = -3a^5.$

2) $5m^2x . 2mx^2 = 10m^3x^3.$

3) $-3a^3x^2 . -a^2x^4 = 3a^5x^6.$

4) $6ab^2y^3 . -2b^3y^3 = -12ab^5y^6.$

5) $2a^2m^3x^4 . -3am^5x^2 . 4a^3mx^2 = . . .$

6) $5a^4b^2 . 3ac^3 . -2b^3d . -4ac^2d^5 = . . .$

7) $7a^2x . 3ax^2 . -2ax = . . .$

8) $8m^3p^5 . -7m^3n^4p . 3m^3n^2p^4 . n^5 = . . .$

b) Gdy wykładniki potęg są jednakowe.

Jest

$a^2 . b^2 = aa . bb = ab . ab = (ab)^2.$

$a^3 . b^3 = aaa . bbb = ab . ab . ab = (ab)^3.$

$a^4 . b^4 = aaaa . bbbb = ab . ab . ab . ab = (ab)^4.$

$a^3 . b^3 . c^3 = aaa . bbb . ccc = abc . abc . abc = (abc)^3.$

Zatem *mnożenie potęg o jednakowych wykładnikach odbywa się w ten sposób, iż pierwiastki mnoży się przez siebie, a iloczyn ich wynosi się do potęgi spólnej.*

Przykłady.

1) $2^3 . 5^3 = (2 . 5)^3 = 10^3.$

2) $4^4 . 5^4 . 5^4 = (4 . 5 . 5)^4 = 100^4.$

3) $2^5 . a^5 . b^5 = (2ab)^5.$

4) $(x + y)^2 (x - y)^2 = (x^2 - y^2)^2.$

5) $x^4 . y^4 . z^4 . 3^4 = . . .$

6) $\left(\frac{3x}{4a}\right)^3 . \left(-\frac{4y}{5b}\right)^3 . \left(-\frac{2ax}{3by}\right)^3 = . . .$

3. Dzielenie.

§. 33.

Dzielenie potęg odbywa się według tej samej zasady jak dzielenie ilości algebraicznych. Np.

$$24a^2b^3c^4 : 6a^2c^4 = 4b^3; \quad 15ab^2x^3 : -3b^2y^2 = -\frac{5ax^3}{y^2}.$$

Działanie to wtedy tylko może być skrócone lub sproszczone, gdy albo jednakowe pierwiastki, alboteż jednakowe wykładniki potęg wchodzą.

a) Gdy pierwiastki potęg są jednakowe.

Rozważmy najpierw ten przypadek, w którym wykładnik dzielnej większy jest od wykładnika dzielnika. I tak

$$a^5 : a^2 = aaaaa : aa = aaa = a^3,$$
$$a^6 : a^4 = aaaaaa : aaaa = aa = a^2,$$
$$a^4 : a = aaaa : a = aaa = a^3;$$

zatem wykładnik ilorazu jest zawsze równy wykładnikowi dzielnej zmniejszonemu wykładnikiem dzielnika.

Gdy wykładnik dzielnej mniejszy jest od wykładnika dzielnika, w takim razie iloraz ma postać ułomka; np.

$$a^2 : a^5 = aa : aaaaa = 1 : aaa = \frac{1}{a^3},$$
$$a^3 : a^5 = aaa : aaaaa = 1 : aa = \frac{1}{a^2},$$
$$a^4 : a^8 = aaaa : aaaaaaaa = 1 : aaaa = \frac{1}{a^4}.$$

A wyrażając ułomek $\frac{1}{a^m}$ przez a^{-m}, któreto wyrażenie nazywamy *potęgą z wykładnikiem ujemnym*, gdy tymczasem a^m nazywa się *potęgą z wykładnikiem dodajnym*, będzie

$$a^2 : a^5 = \frac{1}{a^3} = a^{-3},$$
$$a^3 : a^5 = \frac{1}{a^2} = a^{-2},$$
$$a^4 : a^8 = \frac{1}{a^4} = a^{-4};$$

z czego widoczna, że i w tym przypadku wykładnik potęgi dla ilorazu otrzymuje się, gdy od wykładnika dzielnej odejmiemy wykładnik dzielnika.

Jeźli nareszcie tak dzielna jak dzielnik mają tego samego wykładnika, np. gdy wykładnikiem tym jest 3, będzie

$$a^3 : a^3 = 1,$$

$a^3 : a^3 = 1$

W tym więc razie iloraz nie jest *żadną* potęgą ilości a, lecz iloraz ten jest jednostką. Jeźli więc 1 uważać będziemy także jako potęgę ilości a, a właściwie jąko potęgę stopnia 0, tak iż $a^0 = 1$, będzie
$$a^3 : a^3 = 1 = a^0,$$
i stosuje się tu także ta sama zasada, co i w dwóch poprzednich razach.

Można więc w ogólności powiedzieć, iż:

Z podzielenia potęg z spólnego pierwiastku powstałych, otrzymuje się na iloraz tenże spólny pierwiastek, z wykładnikiem wynikającym z odjęcia wykładnika dzielnika od wykładnika dzielnej.

Przykłady.

1) $12a^7 : 3a^3 = 4a^4$.

2) $-18a^3 : 6a^5 = -3a^{-2} = -\frac{3}{a^2}$.

3) $16a^5x^4 : -4a^4x^2 = -4ax^2$.

4) $30x^2y^3 : 5x^3y = 6x^{-1}y^2 = \frac{6y^2}{x}$.

5) $m^5p^2x^4 : mp^2x^3 = \dots$

6) $ab^2c^8 : -abc = \dots$

7) $35x^3y^2z^4 : 7xy^2z^3 = \dots$

8) $4a^3m^4x^5 : -5a^3m^3x = \dots$

b) Gdy wykładniki potęg są jednakowe.

Jest:

$$a^2 : b^2 = \frac{a^2}{b^2} = \frac{aa}{bb} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^2.$$

$$a^3 : b^3 = \frac{a^3}{b^3} = \frac{aaa}{bbb} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^3.$$

$$a^4 : b^4 = \frac{a^4}{b^4} = \frac{aaaa}{bbbb} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^4.$$

Ztąd wypada iż:

Dzielenie potęg o jednakowych wykładnikach odbywa się w ten sposób, iż pierwiastki dzieli się przez siebie, a otrzymany iloraz wynosi się do spólnej potęgi.

Przykłady.

1) $36^3 : 4^3 = \left(\frac{36}{4}\right)^3 = 9^3$.

2) $(5a^2bc^3)^4 : (5ac)^4 = \left(\frac{5a^2bc^3}{5ac}\right)^4 = (abc^2)^4$.

3) $(32m^3x^4)^5 : (8m^2xy)^5 = \left(\frac{32m^3x^4}{8m^2xy}\right)^5 = \left(\frac{4mx^3}{y}\right)^5$.

4) $(48a^2b^4x^3)^2 : (6ab^3x)^2 = \ldots$

5) $(3mn^2p^3)^3 : (4m^2n) = \ldots$

4. Działania rachunkowe wyrażeniami algebraicznemi uporządkowanemi.

§. 34.

Gdy w wyrażenie algebraiczne z kilku wyrazów złożone wchodzą potęgi tegoż samego pierwiastku, zwykło się dla łatwiejszego przeglądu układać wyrazy podług stopnia potęgi tegoż pierwiastku. Jeźli się przy tem zacznie od potęgi najwyższej i do coraz niższej kolejno schodzi, wielomian zowie się *uporządkowanym malejąco* (fallend geordnet); jeźli zaś to samo odbędzie się, poczynając od najniższej potęgi spólnego pierwiastku, a kończąc na najwyższej, wtedy wielomian jest *uporządkowany rosnąco* (steigend geordnet). Tak np. wyrażenie

$$5x^2 + 1 - 3x + x^5 - 4x^3 - 6x^4$$

uporządkowawszy malejąco, zamieni się na

$$x^5 - 6x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 3x + 1;$$

a uporządkowawszy rosnąco, na

$$1 - 3x + 5x^2 - 4x^3 - 6x^4 + x^5.$$

Działania rachunkowe wielomianami uporządkowanemi wykonywują się w taki sam sposób jak wyrażeniami algebraicznemi w ogólności. W dodawaniu i odejmowaniu umieszcza się wyrazy jednorodne pod sobą i ściąga się je. W mnożeniu zachowuje się toż samo co do iloczynów cząstkowych. W dzieleniu trzeba przy spuszczaniu każdej reszty ten sam zachować porządek jaki jest w dzielnej i dzielniku.

P r z y k ł a d y.

a) *Dodawanie.*

1) $x^3 - 5x^2 + 3x - 6$ = $\cancel{x^3 - 2x + 6}$

$$\begin{array}{r} 3x^3 + 2x^2 + 5x + 8 \\ \hline 4x^3 - 3x^2 + 8x + 2. \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{r} x^4 - 3x^3y + 5x^2y^2 + 7xy^3 \\ + x^3y - 3x^2y^2 - 3xy^3 - 8y^4 \\ \hline x^4 - 2x^3y + 2x^2y^2 + 4xy^3 - 8y^4. \end{array}$$

b) *Odejmowanie.*

1)
$$\begin{array}{r} 5a^4 - 4a^3 + 3a^2 - 2a + 1 \\ 3a^4 - 3a^3 - 5a^2 + 5a + 7 \\ - \quad + \quad + \quad - \quad - \\ \hline 2a^4 - a^3 + 8a^2 - 7a - 6. \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{l} 9 + 8m - 7m^2 - 6m^3 + 5m^4 \\ -5 + 4m - 3m^2 + 2m^3 - m^4 \\ + \quad - \quad + \quad - \quad + \\ \hline 14 + 4m - 4m^2 - 8m^3 + 6m^4. \end{array}$$

c) *Mnożenie.*

1)
$$\begin{array}{l} x^3 - 8x^2 + 5x - 7 \\ 3x - 2 \\ \hline 3x^4 - 24x^3 + 15x^2 - 21x \\ \qquad - 2x^3 + 16x^2 - 10x + 14 \\ \hline 3x^4 - 26x^3 + 31x^2 - 31x + 14. \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{l} 3 + 4x + 5x^2 - 6x^3 \\ 4 - 5x - 6x^2 \\ \hline 12 + 16x + 20x^2 - 24x^3 \\ \quad - 15x - 20x^2 - 25x^3 + 30x^4 \\ \qquad - 18x^2 - 24x^3 - 30x^4 + 36x^5 \\ \hline 12 + x - 18x^2 - 73x^3 + 36x^5. \end{array}$$

3)
$$\begin{array}{l} x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1 \\ x + 1 \\ \hline x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x \\ \quad + x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1 \\ \hline x^6 - 1. \end{array}$$

4) $(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)(a - 1) = a^5 - 1.$

5) $(m^2 + 2m - 3)(m^2 - 2m + 3) = m^4 - 4m^2 + 12m - 9.$

6) $(3a^3 - 5a^2b + 7ab^2 - 4b^3)(2a^2 - 5ab + 3b^2) = \ldots$

7) $(2p^3 - 3p^2 - 8p + 12)(3p^3 + 7p - 9) = \ldots$

8) $(x - 1)(x - 2)(x - 3 = \ldots$

9) $(2x - 3)(3x - 4)(4x - 5)(5x - 6) = \ldots$

10) $(3a^2 - 4a + 2)(5a^2 + 7a - 6)(a^2 - 2a + 5) = \ldots$

11) $(4x^2 - 3xy - y^2)(x^2 - 2xy + 2y^2)(2x^2 + 2xy + 3y^2) = \ldots$

d) *Dzielenie.*

1) $(6x^3 - 15x^2 + 12x - 3) : (x^2 - 2x + 1) = 6x - 3.$

$$\begin{array}{l} 6x^3 - 12x^2 + 6x \\ - \quad + \quad - \\ \hline \quad - 3x^2 + 6x - 3 \\ \quad - 3x^2 + 6x - 3 \\ \quad + \quad - \quad + \\ \hline \qquad 0 \end{array}$$

2) $(9x^4 - 16x^2 + 12x - 5) : (3x^2 - 2x + 1) = 3x^2 + 2x - 5$

$$\begin{array}{l}
9x^4 - 6x^3 + 3x^2 \\
- \quad + \quad - \\
\hline
\quad + 6x^3 - 19x^2 + 12x \\
\quad + 6x^3 - 4x^2 + 2x \\
\quad - \quad + \quad - \\
\hline
\qquad - 15x^2 + 10x - 5 \\
\qquad - 15x^2 + 10x - 5 \\
\qquad + \quad - \quad + \\
\hline
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

3) $(a^4 - 1) : (a + 1) = a^3 - a^2 + a - 1.$

$$\begin{array}{l}
a^4 + a^3 \\
- \quad - \\
\hline
\quad - a^3 - 1 \\
\quad - a^3 - a^2 \\
\quad + \quad + \\
\hline
\qquad + a^2 - 1 \\
\qquad + a^2 + a \\
\qquad - \quad - \\
\hline
\qquad\quad - a - 1 \\
\qquad\quad - a - 1 \\
\qquad\quad + \quad + \\
\hline
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

4) $(x^5 - 1) : (x - 1) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.$

domiar 5) $(16m^4 - 8m^2n^2 + n^4) : (4m^2 + 4mn + n^2) = \ldots$

6) $(y^6 - 2y^5 - 7y^4 + 20y^3 - 21y^2 - 18y + 27) : (y^2 - 2y - 3)$
$= \ldots$

7) $(7x^{10} - 25x^8y^2 + 48x^6y^4 - 23x^4y^6 + 5x^2y^8) : (7x^4 - 4x^2y^2 + y^4)$
$= x^6 - 3x^4y^2$

8) $(8p^3 + 27) : (4p^2 - 6p + 9) = \ldots$

9) $(m^8 - 1) : (m - 1) = \ldots$

10) $(m^7 - 1) : (m - 1) = \ldots$

11) $(a^4 + 4b^4) : (a^2 - 2ab + 2b^2) = \ldots$

12) $(2x^4 + 7bx^3 + b^2x^2 + 2b^3x + 24b^4) : (2x^2 - 3bx + 4b^2)$
$= \ldots$

III. Wynoszenie do potęg, czyli tworzenie potęg z rozmaitych pierwiastków.

1. Tworzenie potęg z sumy lub różnicy.

§. 35.

Do potrzeb niniejszej książki naukowej dość będzie okazać, jakim sposobem sumę lub różnicę dwóch liczb, to jest *dwumian* wynosi się do potęgi *drugiej i trzeciej.*

Aby otrzymać kwadrat z dwumianu $a + b$, dość jest pomnożyć go przez $a + b$, a będzie

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Również jest

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Zatem *kwadrat z dwumianu równa się kwadratowi z pierwszego wyrazu, więcej podwójnym iloczynem obu wyrazów, więcej kwadratem z drugiego wyrazu.*

Oba kwadraty są zawsze dodajne, a znak podwójnego iloczynu jest $+$, gdy wyrazy danego dwumianu mają te same znaki; jest zaś $-$, gdy te wyrazy mają znaki przeciwne.

Z pomnożenia kwadratu jakiej liczby przez tęż liczbę, otrzymuje się szescian tej liczby. Jest więc

$$(a + b)^3 = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b)$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$

zaś
$$(a - b)^3 = (a^2 - 2ab + b^2)(a - b)$$
$$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Zatem *szescian z dwumianu równa się szescianowi z pierwszego wyrazu, więcej potrójnym kwadratem z pierwszego wyrazu rozmnożonym przez drugi wyraz, więcej potrójnym wyrazem pierwszym rozmnożonym przez kwadrat z drugiego wyrazu, więcej szescianem z drugiego wyrazu.*

Gdy drugi wyraz dwumianu jest ujemny, wtedy drugi i czwarty wyraz szescianu z tegoż dwumianu są także ujemne.

P r z y k ł a d y.

1) $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1.$
2) $(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1.$
3) $(5 + a)^2 = 25 + 10a + a^2.$
4) $(3 - a)^2 = 9 - 6a + a^2.$
5) $(y + 2)^3 = y^3 + 6y^2 + 12y + 8.$
6) $(3 - b)^3 = 27 - 27b + 9b^2 - b^3.$

2. Tworzenie potęg z iloczynu.

Jest

$(ab)^2 = ab \cdot ab = aabb = a^2 b^2.$

$(ab)^3 = ab \cdot ab \cdot ab = aaabbb = a^3 b^3.$

$(ab)^4 = ab \cdot ab \cdot ab \cdot ab = aaaabbbb = a^4 b^4.$

Zatem *aby iloczyn wynieść do pewnej potęgi, trzeba każdy z jego czynników wynieść do tej potęgi, i rozmnożyć te potęgi przez siebie.*

P r z y k ł a d y.

1) $(xy)^5 = x^5y^5.$ 2) $(2x)^3 = 8x^3.$

3) $(5ax)^4 = 625\ (ax)^4 = 625\ a^4x^4.$

4) $(10abc)^5 = 100000\ a^5\ b^5\ c^5.$

5) $(abc)^{10} = \ldots$ 6) $(3amxy)^3 = \ldots$

7) $(3a + 4b)^2 = \ldots$ 8) $(2x - 3y)^3 = \ldots$

3. Tworzenie potęg z ilorazu (ułomka).

Jest

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{aa}{bb} = \frac{a^2}{b^2}.$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{aaa}{bbb} = \frac{a^3}{b^3}.$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^4 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{aaaa}{bbbb} = \frac{a^4}{b^4}.$$

$\frac{3^2}{4^2}$

Zatem *aby ułomek wynieść do pewnej potęgi, trzeba jego licznik i mianownik wynieść do tej potęgi, i potęgę licznika podzielić przez potęgę mianownika.*

P r z y k ł a d y.

1) $\left(\frac{x}{2}\right)^3 = \frac{x^3}{8}.$ 2) $\left(\frac{y}{10}\right)^4 = \frac{y^4}{10000}.$

3) $\left(\frac{3a}{4b}\right)^2 = \frac{9a^2}{16b^2}.$

4) $\left(\frac{m+n}{2p}\right)^2 = \frac{m^2 + 2mn + n^2}{4p^2}.$

5) $\left(\frac{mx}{ny}\right)^3 = \ldots$ 6) $\left(\frac{5am}{7bn}\right)^7 = \ldots$

7) $\left(\frac{4a - 2x}{3a + 2x}\right)^3 = \ldots$ 8) $\left(\frac{2a}{b} - \frac{3x}{y}\right)^2 = \ldots$

4. Tworzenie potęgi z potęgi.

Jest $(a^3)^2 = a^3 \cdot a^3 = a^6 = a^{3.2.}$

$(a^2)^4 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = a^8 = a^{2.4.}$

$$(a^m)^2 = a^m \cdot a^m = a^{2m}.$$
$$(a^m)^3 = a^m \cdot a^m \cdot a^m = a^{3m}.$$

Zatem *z potęgi otrzymuje się potęgę, gdy się pierwiastkowi da za wykładnika iloczyn wykładników.*

P r z y k ł a d y.

1) $(a^5)^3 = a^{15}$. 2) $(10a^2)^3 = 1000a^6$.

3) $(3m^2n^2)^2 = 9m^4n^4$. 4) $\left(\frac{2ax^2}{3by^2}\right)^2 = \frac{4a^2x^4}{9b^2y^4}$.

5) $\left(\frac{3a^4m^2x^2}{4b^2n^3x^5}\right)^4 = \ldots$ 6) $(5a^2 - 6y^3)^2 = \ldots$

7) $(2ax^2 + 3by^2)^3 = \ldots$ 8) $\left(\frac{4x^2}{3} - \frac{5z^3}{a}\right)^2 = \ldots$

9) $\left(\frac{3a^2x}{5m^3} - \frac{7by^2}{12n^3}\right)^3 = \ldots$ 10) $\left(\frac{a^3m^2}{3x} + \frac{6x^2}{a^2m^2}\right)^2 = \ldots$

IV. Wynoszenie liczb szczególnych do kwadratu i wyciąganie z nich pierwiastku kwadratowego.

§. 36.

Kwadrat danej liczby otrzymuje się, mnożąc tę liczbę samą przez się. Np.

$$305^2 = 305 \times 305 = 93025,$$
$$(2/3)^2 = 2/3 \times 2/3 = 4/9,$$
$$(1{\cdot}25)^2 = 1{\cdot}25 \times 1{\cdot}25 = 1{\cdot}5625.$$

Jasna jest sama z siebie, że kwadrat ułomka dziesiętnego zawiera w sobie miejsc dziesiętnych dwa razy tyle jak sam ułomek dziesiętny; z czego wynika że w kwadracie jest liczba miejsc dziesiętnych zawsze parzysta.

Kwadraty liczb jednocyfrowych są:

Pierwiastek kwadratowy	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9.
Kwadrat	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81.

Do uzasadnienia nauki o wyciąganiu pierwiastków kwadratowych, którego w dalszym ciągu potrzebować będziemy, wypada nam tu zastanowić się jeszcze nad tworzeniem kwadratu liczby złożonej z dwóch, trzech i t. d. cyfer, czyli rozpatrzyć się jakim sposobem cyfry te wchodzą w skład kwadratu.

Chcąc np. wynieść 47 do kwadratu, rozłóżmy tę liczbę na dwie części 40 + 7, i utwórzmy kwadrat według wzoru ogólnego $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Otrzymamy w ten sposób

$$47^2 = (40 + 7)^2 = 40^2 + 2 \times 40 \times 7 + 7^2.$$

Aby np. liczbę 368 z trzech cyfer złożoną wynieść do kwadratu, rozłóżmy ją również na dwa wyrazy czyli na dwie części $360 + 8$, a będzie

$$368^2 = (360 + 8)^2 = 360^2 + 2 \times 360 \times 8 + 8^2;$$

ale gdy według wzoru wyżej przytoczonego jest

$$360^2 = (300 + 60)^2 = 300^2 + 2 \times 300 \times 60 + 60^2,$$

zatem gdy zamiast 360^2 wstawimy tę jego wartość, będzie

$$368^2 = 300^2 + 2 \times 300 \times 60 + 60^2 + 2 \times 360 \times 8 + 8^2,$$

lub też wyrazy te ułożywszy pod sobą, będzie

$$\begin{array}{rrl r}
368^2 = & & 300^2 & \ldots \quad 90000 \\
 & + 2 \times 300 \times & 60 & \ldots \quad 36000 \\
 & + & 60^2 & \ldots \quad 3600 \\
 & + 2 \times 360 \times & 8 & \ldots \quad 5760 \\
 & + & 8^2 & \ldots \quad 64 \\
\hline
 & & & 135424.
\end{array}$$

W tenże sam sposób postępując, będzie

$$\begin{array}{rrl r}
2438^2 = & & 2000^2 & \ldots \quad 4000000 \\
 & + 2 \times 2000 \times & 400 & \ldots \quad 1600000 \\
 & + & 400^2 & \ldots \quad 160000 \\
 & + 2 \times 2400 \times & 30 & \ldots \quad 144000 \\
 & + & 30^2 & \ldots \quad 900 \\
 & + 2 \times 2430 \times & 8 & \ldots \quad 38880 \\
 & + & 8^2 & \ldots \quad 64 \\
\hline
 & & & 5943844.
\end{array}$$

Gdy uwzględnimy dokładnie te miejsca jakie w oddzielnych częściach składowych zajmują cyfry, przekonać się łatwo, iż zera można w pisaniu całkiem wypuszczać; dość bowiem rozważyć, że każda następująca część składowa ma o jedno zero mniej od poprzedzającej; a więc wypuszczając z niej zera, wypada pozostałość zawierającą same cyfry wysunąć o jednę cyfrę w prawo. Wypuściwszy więc zera w dwóch poprzedzających przykładach, będą one tak wyglądać:

$$\begin{array}{rl r}
\multicolumn{3}{l}{368^2} \\
\hline
 & 3^2 & \ldots \quad 9\cdot \\
2 \times 3 \times & 6 & \ldots \quad 36\cdot \\
 & 6^2 & \ldots \quad 36\cdot \\
2 \times 36 \times & 8 & \ldots \quad 576\cdot \\
 & 8^2 & \ldots \quad 64 \\
\hline
 & & 135424.
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl r}
\multicolumn{3}{l}{2438^2} \\
\hline
 & 2^2 & \ldots \quad 4\cdot \\
2 \times 2 \times & 4 & \ldots \quad 16\cdot \\
 & 4^2 & \ldots \quad 16\cdot \\
2 \times 24 \times & 3 & \ldots \quad 144\cdot \\
 & 3^2 & \ldots \quad 9\cdot \\
2 \times 243 \times & 8 & \ldots \quad 3888\cdot \\
 & 8^2 & \ldots \quad 64 \\
\hline
 & & 5943844.
\end{array}$$

41

Z tych i innych w podobny sposób przeprowadzonych przykładów, wypada następujące *prawidło tworzenia kwadratu z liczby kilkocyfrowej :*

1. Pierwsza cyfra pierwiastku daje kwadrat z siebie samej.

2. Każda następująca cyfra pierwiastku daje na kwadrat dwie części : dwukrotność liczby ją poprzedzającej pomnożoną przez tęż cyfrę, i kwadrat z siebie samej.

3. Gdy wszystkie te części składowe tak pod sobą napiszemy, że każda następująca wysunięta będzie o jednę cyfrę na prawo, a potem tak jak są pod sobą napisane dodamy do siebie, suma będzie kwadratem danego pierwiastku.

P r z y k ł a d y.

1) 1234^2

1^2	. .	1·
$2 \times 1 \times 2$	. .	4·
2^2	. .	4·
$2 \times 12 \times 3$	. .	72·
3^2	. .	9·
$2 \times 123 \times 4$	. .	984·
4^2	. .	16
		1522756.

2) $94{\cdot}907^2$

9^2	. .	81·
$2 \times 9 \times 4$	. .	72·
4^2	. .	16·
$2 \times 94 \times 9$	. .	1692·
9^2	. .	81...
$2 \times 9490 \times 7$	. .	132860·
7^2	. .	49
		9007·338649.

3) $724^2 = ?$ 4) $109{\cdot}2^2 = ?$ 5) $0{\cdot}34081^2 = ?$

6) Wynaleść powierzchnię kwadratu, którego każdy bok ma 3′ 5″ długości. (Trzeba długość jednego boku wynieść do kwadratu).

7) Co kosztuje plac kwadratowy pod kamienicę, gdy bok tegoż placu ma długości 9^0 3′, a każdy sążeń kwadratowy zgodzono po 35 złr. 20 kr. ?

§. 37.

Sposób wyciągania pierwiastku kwadratowego z liczby jakiej, daje się wyprowadzić z prawa, według którego cyfry pierwiastku kwadratowego wchodzą w skład kwadratu.

Wynosząc np. 7342 do kwadratu, będzie:

7342^2				
7^2 . . .	49	.		
$2 \times 7 \times 3$ . . .	4	2 .		
3^2 . . .		9	.	
$2 \times 73 \times 4$ . . .		58	4 .	
4^2 . . .			16	.
$2 \times 734 \times 2$ . . .		2	93	6 .
2^2 . . .				4
	53	90	49	64.

Ponieważ pierwsza cyfra pierwiastku daje w kwadracie jedno albo dwa miejsca, dla każdej zaś następnej cyfry pierwiastku zawsze dwa miejsca w kwadracie przybywają, zatem kwadrat liczby zawiera w sobie albo dwa razy tyle cyfer ile ich jest w pierwiastku, albo o jednę mniej. Podzieliwszy tedy kwadrat od prawej ku lewej na przedziały po dwie cyfer, przyczem pierwszy z lewej strony przedział może także tylko jednę mieć cyfrę, będzie w ogóle tyle przedziałów, ile jest cyfer w pierwiastku.

Aby następnie wynaleść cyfry, jakie w pierwiastku być powinny, musimy rozważyć iż:

Kwadrat pierwszej cyfry pierwiastku zawarty jest w pierwszym przedziale; pierwszą tedy cyfrą pierwiastku będzie ta cyfra najwyższa, której kwadrat mieści się w pierwszym przedziale; tą cyfrą jest 7.

Gdy więc pierwszą cyfrę pierwiastku 7 wyniesiemy do kwadratu, kwadrat ten odejmiemy od pierwszego przedziału, i do pozostałej reszty 4 przypiszemy drugi przedział 90, to w powstałej w ten sposób liczbie 490 zawarte są te części, które w kwadracie powstały z drugiej cyfry pierwiastku, to jest iloczyn z tej drugiej cyfry i z podwojonej pierwszej cyfry, tudzież kwadrat z drugiej cyfry; właściwie zaś iloczyn z drugiej cyfry i z podwojonej pierwszej cyfry pierwiastku rozciąga się tylko na pierwszą cyfrę drugiego przedziału, zatem zawarty jest w 49. A więc cyfrę, która powstała z poprzedzającej reszty i z przypisania do niej drugiego przedziału, z wyłączeniem ostatniej cyfry, to jest liczbę 49 podzieliwszy przez podwojoną pierwszą cyfrę pierwiastku, to jest przez 14, wypadnie 3 na drugą cyfrę pierwiastku.— Dalej, aby utworzyć części składowe kwadratu, które z tej drugiej cyfry pierwiastku powstają, można, — zamiast pomnożenia naprzód pierwszej podwojonej cyfry pierwiastku przez drugą, następnie tej drugiej cyfry samej przez się, potem umieszczenia tego drugiego iloczynu pod pierwszym, z wysunięciem go o jednę cyfrę na prawo, i nareszcie odbycia dodania, — można mówię króciej postąpić, a to, gdy do podwojonej pierwszej cyfry pierwiastku, to jest do dzielnika 14 przypisze się drugą cyfrę pierwiastku 3, i powstałą w ten sposób liczbę 143 przez drugą cyfrę pierwiastku 3 pomnoży. To jest można, zamiast że przez pomnożenie

$$2 \,.\, 7 \,.\, 3 = 14 \,.\, 3 = 42$$

i następne dodanie $3^2 = 3 \,.\, 3 = 9$

będzie się miało 429

otrzymać to samo króciej, bo $143 \,.\, 3 = 429$.

Gdy ten wypadek 429 z drugiej cyfry pierwiastku odejmiemy od reszty z dwóch pierwszych przedziałów, i do wynikłej ztąd dalszej reszty 61 trzeci przedział przypiszemy, to w powstałej w ten sposób liczbie 6149, z wyłączeniem ostatniej cyfry, zatem właściwie w 614 zawarte są te części, które w kwadracie powstały z trzeciej cyfry pierwiastku, to jest iloczyn z tej trzeciej cyfry i z podwojonej drugiej cyfry pierwiastku. Tę więc liczbę 614 podzieliwszy przez podwojony pierwiastek 146, iloraz da trzecią cyfrę pierwiastku. Utworzymy znowu części składowe kwadratu, które z tej nowej cyfry pierwiastku powstały, gdy do poprzedniego pierwiastku podwójnie wziętego to jest do dzielnika 146 przypiszemy nowo wynalezioną cyfrę 4, i otrzymaną tym sposobem liczbę 1464 przez tę nową cyfrę pierwiastku 4 pomnożymy.

Wypadający ztąd iloczyn 5856 odjąwszy od poprzedniej całej dzielnej 6149, do reszty 293 przypisawszy przedział następujący, i otrzymaną w ten sposób liczbę z wyłączeniem z niej ostatniej cyfry, zatem 2936 podzieliwszy przez cały dotąd otrzymany podwójnie wzięty pierwiastek to jest przez $2 \times 734 = 1468$, będziemy mieli na iloraz czwartą cyfrę pierwiastku 2.

Tak więc cały rachunek ułoży się w ten sposób:

$$\sqrt{53|90|49|64} = 7342.$$

49		$2 \times 7 = 14$
49,0	$: 143 \times 3$	
429		$2 \times 73 = 146$
614,9	$: 1464 \times 4$	
5856		$2 \times 734 = 1468$
2936,4	$: 14682 \times 2$	
29364		
0		

Iloczyn który się otrzymuje, gdy do każdego z kolei dzielnika przypiszemy nowo wynalezioną cyfrę pierwiastku, i całą tę liczbę pomnożymy przez tęż cyfrę pierwiastku, iloczyn ten można w czasie mnożenia odjąć od razu od dzielnej. Rachunek będzie wtedy tak wyglądał: $\sqrt{53|90|49|64} = 7342.$

49,0	:	143	×	3
614,9	:	1464	×	4
2936,4	:	14682	×	2

Z tych i innych przykładów, na których wskazane tu zasady rozwiniemy i sprawdzimy, wynika następujące *prawidło wyciągania pierwiastku kwadratowego:*

1. Daną liczbę, poczynając od jednostek, trzeba podzielić na przedziały po dwie cyfry; ostatni z lewej strony przedział może też mieć jednę tylko cyfrę. Gdy liczba ma przy sobie ułomki dziesiętne, podział na przedziały w tej części która zawiera całkowite poczyna się od kropki odgraniczającej dziesiętne ku stronie lewej, a w części zawierającej dziesiętne od tejże kropki ku stronie prawej; jeźli w dziesiętnych na ostatni z prawej strony przedział jedna tylko cyfra wypadnie, wtedy przypisuje się zero, aby dziesiętnych było parzysto.

2. Szuka się największej cyfry, której kwadrat zawarty jest w pierwszym z lewej strony przedziale, i pisze się ją na pierwszą cyfrę pierwiastku. Tę cyfrę wynosi się do kwadratu i kwadrat ten odejmuje się od pierwszego przedziału.

3. Następne cyfry pierwiastku wynajdują się przez dzielenie. I tak: do otrzymanej reszty przypisz przedział następujący; liczba ta gdy od niej odłączysz cyfrę ostatnią, jest dzielną. Dzielnika zaś będziesz miał, gdy znalezioną właśnie część pierwiastku pomnożysz przez 2. Wtedy wykonasz dzielenie, a otrzymany iloraz jako nową cyfrę przypisz tak do pierwiastku jak i do dzielnika.

4. Zmieniony w ten sposób dzielnik pomnożysz wtedy przez nowo wynalezioną cyfrę pierwiastku, a iloczyn odejmiesz od dzielnej wziętej razem z tą ostatnią cyfrą, którą od niej wprzód odłączyłeś. Jeźli ten iloczyn nie da się odjąć, cyfra którąś właśnie wziął na pierwiastek jest za wielka; trzeba więc zmniejszać tę cyfrę, tak aby odejmowanie dało się uskutecznić.

5. Do otrzymanej reszty spuszcza się znowu przedział następujący i powtarza działanie w taki sposób jak pierwej, dopóki wszystkie przedziały z kolei nie wyjdą. Jeźli na jaką cyfrę pierwiastku wypadnie 0, wtedy nie mnożąc i nie odejmując spuszcza się zaraz przedział następujący, ale wprzód trzeba to zero przypisać tak do pierwiastku jak i do dzielnika.

6. Jeżli w kwadracie są dziesiętne, trzeba wtedy gdy się przystępuje do spuszczenia pierwszego przedziału dziesiętnych, położyć w pierwiastku kropkę, na znak iż od niej idą już dziesiętne.

7. Jeżli na ukończenie działania żadna nie została reszta, znak to że pierwiastek znalazło się zupełnie, że więc dana liczba jest zupełnym kwadratem. Gdy zaś zostanie jaka reszta, znak to że pierwiastek nie jest zupełny; można go jednakże oznaczyć dalej w dziesiętnych z wszelkiem dowolnem przybliżeniem, a to przypisując do każdej reszty po dwa zera, i ciągnąc dalej działanie w sposób już wiadomy.

P r z y k ł a d y.

1) $\sqrt{3|7\,6|3\,6} = 194.$
2 7,6 : 29 $\times$ 9
1 5 3,6 : 384 $\times$ 4
= = =

2) $\sqrt{34|8\,6|7\,8|4\,4|0\,1} = 59049.$
9 8,6 : 109 $\times$ 9
5 7,8 4,4 : 11804 $\times$ 4
1 0 6 2 8 0 1 : 118089 $\times$ 9
= = = = = =

3) $\sqrt{3|1\,5} = 17{\cdot}7482\ldots$
2 1,5 : 27 $\times$ 7
2 60,0 : 347 $\times$ 7
1 710,0 : 3544 $\times$ 4
292 40,0 : 35488 $\times$ 8
8 49 60,0 : 354962 $\times$ 2
1 39 67,6

4) $\sqrt{17|76{\cdot}62|25} = 42{\cdot}15.$
17,6 : 82
1 26,2 : 841
42 12,5 : 8425
= = = =

5) $\sqrt{5|7\,4{\cdot}31|78|1_0} = 23{\cdot}9857\ldots$
1 7,4 : 43
4 5 3,1 : 469
4 1 0 7,8 : 4788
2 7 7 4 1,0 : 47965
3 7 5 8 50,0 : 479707
4 0 0 55,1

6) $\sqrt{7/8} = \sqrt{0{\cdot}87|5_0} = 0{\cdot}935414\ldots$
65,0 : 183
1 0 10,0 : 1865
77 50,0 : 18704
2 68 40,0 : 187081
81 31 90,0 : 1870824
6 48 60 4

Jeźli w pierwiastku ma być bardzo wiele dziesiętnych, można robotę znacznie skrócić. I tak: mając już zwyczajnem działaniem o jednę cyfrę w pierwiastku więcej niżeli połowa liczby wszystkich cyfer jakie w pierwiastku być mają, wtedy zamiast do reszty przyłączyć dwa zera, wypuszcza się w nowym dzielniku ostatnią cyfrę, i wynajduje dalsze cyfry pierwiastku za pomocą dzielenia skróconego. Naprzykład:

7) Aby z 7·3891 wyciągnąć pierwiastek kwadratowy o siedmiu dziesiętnych, będzie

dokładnie

$\sqrt{7{\cdot}38|91} = 2{\cdot}7182899\ldots$

3 3,8 : 47
99,1 : 541
45 00,0 : 5428
1 57 60,0 | : 54362
48 87,6 | 0,0 : 543648
5 38 4 | 1 60,0 : 5436569
49 1 | 2 47 90,0 : 54365789
1 | 9 55 79 9

skróceniem

$\sqrt{7{\cdot}38|91} = 2{\cdot}7182899\ldots$

3 38 : 47
99 1 : 541
45000 : 5428
157600 : 54362
48876 : 54,3,6,4
5385
492
3

8) $\sqrt{1{\cdot}5\,7|82|35|2_0} = 1{\cdot}2562783\ldots$

5'7 : 22
1 38,2 : 245
15 73,5 : 2506
69 92,0 : 25122
19 67,6 : 25,1,2,4
2 08 9
7 9
4

9) $\sqrt{582169} = ?$

10) $\sqrt{6849{\cdot}2176} = ?$

11) $\sqrt{0{\cdot}000256} = ?$

12) $\sqrt{0{\cdot}0144144036} = ?$

13) $\sqrt{321} = ?$

14) $\sqrt{235689} = ?$

15) $\sqrt{3{\cdot}52} = ?$

16) $\sqrt{0{\cdot}35821} = ?$

17) $\sqrt{1\frac{11}{25}} = ?$

18) $\sqrt{\frac{27}{56}} = ?$

19) Łąka kwadratowa ma powierzchni $1201\square^0\ 28\square'$; jakaż jest długość boku tej łąki ? 35° 35'

Aby z powierzchni kwadratu znaleść długość jednego boku, trzeba z tejże powierzchni wyciągnąć pierwiastek kwadratowy.

$1201\square^0\ 28\square' = 43264\square'$, $\sqrt{43264} = 208' = 34^0\ 4'$.

20) Gdy kwadrat ma powierzchni $2\square^0\ 15\square'\ 16\square''$, jak wielki jest jego bok ? $1^0\ 3'\ 4''$.

21) Jaka jest długość boku kwadratu, którego powierzchnia równa się trzem kwadratom, z których jednego bok ma długości $1'\ 4''$, drugiego $2'\ 1''$, trzeciego zaś $2'\ 3''$?

22) Dom, którego podstawa ma kształt prostokąta, jest na $12^0\ 5'$ długi a na $8^0\ 4'$ szeroki; jakaż jest odległość dwóch naprzemianległych rogów tego domu ?

Długość i szerokość domu można uważać jako dwa boki czyli katety trójkąta prostokątnego, którego przeciwprostokątna jest więc odległością dwóch naprzemianległych rogów. Mając zaś w trójkącie prostokątnym daną długość obu jego katetów, znajdziemy przeciwprostokątną, gdy każden katet wyniesiemy do kwadratu, kwadraty te dodamy do siebie, i z ich sumy pierwiastek kwadratowy wyciągniemy.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Długość} = 12^0\,5' = 77'\\ \text{Szerokość} = 8^0\,4' = 52'\end{array}\right\}\ \text{katety}\quad \begin{array}{r}77^2 = 5929\\ 52^2 = 2704\\ \hline\end{array}$$

$$\text{Przeciwprostokątna} = \sqrt{8633} = 92{\cdot}91' = \\ = 15^0\,2'\,11''.$$

23) Jak długa musi być drabina, aby po niej dostać się na budynek mający $2^0\ 2'$ wysokości, jeźli się ją pochyło w ten sposób postawi, że spodem będzie o $1^0\ 2'$ od budynku odległą ?

24) Drzwi na $7{\cdot}2'$ wysokie a $4{\cdot}5'$ szerokie mają być opatrzone krzyżownicą; jakąż musi mieć długość ta krzyżownica ?

25) Podłoga pokoju ma długości $5^0\ 3'\ 4''$, a $4^0\ 1'\ 8''$ szerokości; w innym zaś pokoju podłoga ma tęż samę powierzchnię, ale kształt kwadratu; jakże długą jest jedna jej strona ?

26) Jak wielki jest promień koła, którego powierzchnia ma $10\square'\ 81\square''$? $1'\ 10''$.

Tu trzeba powierzchnię podzielić przez $3{\cdot}1416$ (przybliżony stosunek okręgu koła do średnicy), i z ilorazu wyciągnąć pierwiastek kwadratowy.

27) Chcąc zrobić tarczę okrągłą, któraby miała powierzchni $2\square'\ 39\square''$, jakąż da się długość promieniowi tej tarczy ?

V. Wynoszenie liczb szczególnych do szescianu, i wyciąganie z nich pierwiastku szesciennego.

§. 38.

Dla utworzenia szescianu z jakiej liczby, dość jest wziąść tę liczbę 3 razy za czynnika. Np.

$$738^3 = 738 \times 738 \times 738 = 401947272.$$

$$(^9/_{16})^3 = {}^9/_{16} \times {}^9/_{16} \times {}^9/_{16} = {}^{729}/_{4096}.$$

$$7{\cdot}02^3 = 7{\cdot}02 \times 7{\cdot}02 \times 7{\cdot}02 = 345{\cdot}948408.$$

Z trzeciego przykładu widoczna jest, że szescian z ułomka dziesiętnego musi zawierać w sobie trzy razy tyle dziesiętnych ile ich ma dany ułomek dziesiętny, że więc w zupełnym szescianie liczba dziesiętnych jest zawsze wielokrotnością liczby 3.

Trzecie potęgi liczb jednocyfrowych są:

Pierwiastek szescienny:	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9;
Szescian:	1,	8,	27,	64,	125,	216,	343,	512,	729.

Aby później módz naukę wyciągania pierwiastków szesciennych należycie uzasadnić, wyłożymy tu drugi sposób wynoszenia liczby do szescianu, biorąc do tego za podstawę wzór następujący:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Aby według tego wzoru wynieść np. liczbę 57 do szescianu, będzie

$$57^3 = (50 + 7)^3 = 50^3 + 3 \times 50^2 \times 7 + 3 \times 50 \times 7^2 + 7^3.$$

Chcąc liczbę trzycyfrową np. 429 wynieść do szescianu, trzeba ją naprzód rozłożyć na dwie części 420 i 9, a będzie według powyższego wzoru

$$429^3 = (420 + 9)^3 = 420^3 + 3 \times 420^2 \times 9 + 3 \times 420 \times 9^2 + 9^3;$$

gdy zaś podług tegoż wzoru jest

$$\begin{aligned} 420^3 = (400 + 20)^3 = 400^3 &+ 3 \times 400^2 \times 20 \\ &+ 3 \times 400 \times 20^2 + 20^3; \end{aligned}$$

zatem kładąc tę wartość wyżej zamiast 420^3, wypada

$$\begin{aligned} 429^3 = 400^3 &+ 3 \times 400^2 \times 20 + 3 \times 400 \times 20^2 + 20^3 \\ &+ 3 \times 420^2 \times 9 + 3 \times 420 \times 9^2 + 9^3; \end{aligned}$$

lub umieszczając pojedyncze części pod sobą i rzeczywiście je rozwijając,

$$\begin{array}{rrr} 429^3 = & 400^3 \;\ldots & 64000000 \\ & + 3 \times 400^2 \times 20 \;\ldots & 9600000 \\ & + 3 \times 400 \times 20^2 \;\ldots & 480000 \\ & + 20^3 \;\ldots & 8000 \\ & + 3 \times 420^2 \times 9 \;\ldots & 4762800 \\ & + 3 \times 420 \times 9^2 \;\ldots & 102060 \\ & + 9^3 \;\ldots & 729 \\ \hline & & 78953589. \end{array}$$

Podobnież otrzymuje się także

$$\begin{array}{rl}
1284^3 = & 1000^3 \; . \; . \; . \; 1000000000 \\
+\, 3 \times 1000^2 \times & 200 \; . \; . \; . \; 600000000 \\
+\, 3 \times 1000 \times & 200^2 \; . \; . \; . \; 120000000 \\
+ & 200^3 \; . \; . \; . \; 8000000 \\
+\, 3 \times 1200^2 \times & 80 \; . \; . \; . \; 345600000 \\
+\, 3 \times 1200 \times & 80^2 \; . \; . \; . \; 23040000 \\
+ & 80^3 \; . \; . \; . \; 512000 \\
+\, 3 \times 1280^2 \times & 4 \; . \; . \; . \; 19660800 \\
+\, 3 \times 1280 \times & 4^2 \; . \; . \; . \; 61440 \\
+ & 4^3 \; . \; . \; . \; 64 \\
\hline
 & 2116874304.
\end{array}$$

Zera można w przypisywaniu pojedynczych części składowych całkiem wypuścić, tylko każdą następującą część trzeba wysunąć o jednę cyfrę na prawo. Dwa więc ostatnie przykłady, gdy w nich zera wypuścimy, będą tak wyglądać:

$$\begin{array}{rl}
\underline{429^3} & \\
4^3 & . \; . \; . \; 64 \cdot \\
3 \times 4^2 \times 2 & . \; . \; . \; 96 \cdot \\
3 \times 4 \times 2^2 & . \; . \; . \; 48 \cdot \\
2^3 & . \; . \; . \; 8 \cdot \\
3 \times 42^2 \times 9 & . \; . \; . \; 47628 \cdot \\
3 \times 42 \times 9^2 & . \; . \; . \; 10206 \cdot \\
9^3 & . \; . \; . \; 729 \\
\hline
 & 78953589.
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\underline{1284^3} & \\
1^3 & . \; . \; . \; 1 \cdot \\
3 \times 1^2 \times 2 & . \; . \; . \; 6 \cdot \\
3 \times 1 \times 2^2 & . \; . \; . \; 12 \cdot \\
2^3 & . \; . \; . \; 8 \cdot \\
3 \times 12^2 \times 8 & . \; . \; . \; 3456 \cdot \\
3 \times 12 \times 8^2 & . \; . \; . \; 2304 \cdot \\
8^3 & . \; . \; . \; 512 \cdot \\
3 \times 128^2 \times 4 & . \; . \; . \; 196608 \cdot \\
3 \times 128 \times 4^2 & . \; . \; . \; 6144 \cdot \\
4^3 & . \; . \; . \; 64 \\
\hline
 & 2116874304.
\end{array}$$

Z tych przykładów wypada następujące *prawidło tworzenia szescianu z liczby kilkocyfrowej*:

1. Wziąść szescian pierwszej cyfry pierwiastku.

2. Z każdej następnej cyfry pierwiastku utworzyć trzy części, to jest: potrójny kwadrat tej liczby która ją poprzedza, pomnożony

przez tęż cyfrę; potrojoną liczbę która ją poprzedza, pomnożoną przez kwadrat z tejże cyfry; nareszcie szescian tej cyfry.

3. Części te napisać jednę pod drugą w takim porządku, aby każda następująca wysunięta była na prawo o jednę cyfrę, a potem dodać wszystko do siebie.

P r z y k ł a d y.

1) 3915^3

$$
\begin{array}{rrrrrl}
 & & & 3^3 & \ldots & 27\cdot \\
3 \times & 3^2 & \times & 9 & \ldots & 243\cdot \\
3 \times & 3 & \times & 9^2 & \ldots & 729\cdot \\
 & & & 9^3 & \ldots & 729\cdot \\
3 \times & 39^2 & \times & 1 & \ldots & 4563\cdot \\
3 \times & 39 & \times & 1^2 & \ldots & 117\cdot \\
 & & & 1^3 & \ldots & 1\cdot \\
3 \times & 391^2 & \times & 5 & \ldots & 2293215\cdot \\
3 \times & 391 & \times & 5^2 & \ldots & 29325\cdot \\
 & & & 5^3 & \ldots & 125 \\
\hline
 & & & & & 60006085875.
\end{array}
$$

2) $2 \cdot 1806^3$

$$
\begin{array}{rrrrrl}
 & & & 2^3 & \ldots & 8\cdot \\
3 \times & 2^2 & \times & 1 & \ldots & 12\cdot \\
3 \times & 2 & \times & 1^2 & \ldots & 6\cdot \\
 & & & 1^3 & \ldots & 1\cdot \\
3 \times & 21^2 & \times & 8 & \ldots & 10584\cdot \\
3 \times & 21 & \times & 8^2 & \ldots & 4032\cdot \\
 & & & 8^3 & \ldots & 512\ldots. \\
3 \times & 2180^2 & \times & 6 & \ldots & 85543200\cdot \\
3 \times & 2180 & \times & 6^2 & \ldots & 235440\cdot \\
 & & & 6^3 & \ldots & 216 \\
\hline
 & & & & & 10368788674616.
\end{array}
$$

3) $237^3 = ?$ 4) $17 \cdot 83^3 = ?$ 5) $0 \cdot 081052^3 = ?$

6) Jaka jest objętość szescianu, którego krawędź ma 2′ 8″ długości? (Trzeba długość krawędzi wynieść do potęgi 3ciej).

7) Krawędź kamienia w kostkę (to jest w szescian) ociosanego jest 1·74′; jaka jest objętość tego kamienia?

§. 39.

Chcąc wskazać drogę, którą w wyciąganiu pierwiastku szesciennego postępować należy, najstosowniej będzie zastanowić się, w jaki sposób w skład szescianu wchodzą części pierwiastku szesciennego, aby je przy wyciąganiu pierwiastku umieć należycie wydobyć.

Wynosząc np. 4567 do szescianu, będzie
4567^3

4^3	64	·		
$3 \times 4^2 \times 5$	24	0 ·		
$3 \times 4 \times 5^2$	3	00 .		
5^3		125	·	
$3 \times 45^2 \times 6$	3	645	0 ·	
$3 \times 45 \times 6^2$		48	60 .	
6^3			216	·
$3 \times 456^2 \times 7$		436	665	6 ·
$3 \times 456 \times 7^2$			670	32 .
7^3				343
	95	256	152	263

Ponieważ pierwsza cyfra pierwiastku daje w szescianie jedno, dwa albo trzy miejsca, a dla każdej następnej cyfry pierwiastku zawsze trzy miejsca w szescianie przybywają, zatem szescian liczby zawiera w sobie zawsze albo trzy razy tyle cyfer ile ich jest w pierwiastku, alboteż o jednę lub o dwie mniej. Podzieliwszy tedy szescian od prawej ku lewej na przedziały po trzy cyfer, przyczem pierwszy z lewej strony przedział może także mieć tylko jednę albo dwie cyfry, będzie w ogóle tyle przedziałów ile pierwiastek ma cyfer.

Aby cyfry pierwiastku jednę po drugiej wynaleść, musimy rozważyć iż:

Szescian pierwszej cyfry pierwiastku zawarty jest w pierwszym przedziale; znajdziemy więc pierwszą cyfrę pierwiastku, gdy weźmiemy najwyższą cyfrę której szescian mieści się w pierwszym przedziale; w 95 mieści się szescian liczby 4 to jest 64; zatem pierwszą cyfrą pierwiastku jest 4.

Gdy szescian pierwszej cyfry pierwiastku od pierwszego przedziału odejmiemy, i do reszty 31 drugi przedział przypiszemy, w liczbie tej 31256 zawarte są te trzy części, które w szescianie powstały z drugiej cyfry pierwiastku, to jest iloczyn z potrojonego kwadratu pierwszej cyfry przez drugą cyfrę, iloczyn z potrojonej pierwszej cyfry przez kwadrat drugiej cyfry, i szescian drugiej cyfry, każda z tych części o jednę cyfrę na prawo wysunięta; właściwie zaś iloczyn z potrojonego kwadratu pierwszej cyfry przez drugą cyfrę pierwiastku, rozciąga się tylko po pierwszą cyfrę drugiego przedziału. Zatem liczbę 31256 po wypuszczeniu z niej dwóch ostatnich cyfer, podzieliwszy przez potrójny kwadrat pierwszej cyfry pierwiastku to jest przez 48, wypadnie 5 na drugą cyfrę pierwiastku.

Rozwinąwszy te trzy części składowe, które w szescianie z tej nowej cyfry pierwiastku powstały, i każdą z nich wysunąwszy o jednę cyfrę na prawo, gdy sumę tych trzech części odejmiemy od reszty z dwóch pierwszych przedziałów otrzymanej, i do nowej reszty 4131 trzeci przedział przypiszemy, w powstałej ztąd liczbie 4131152 po wyłączeniu z niej ostatnich dwóch cyfer, zatem w liczbie 41311 muszą być zawarte te trzy części, które w szescianie powstały z trzeciej cyfry pierwiastku, to jest iloczyn z potrojonego kwadratu dwóch pierwszych cyfer (jako jedna liczba wziętych) przez trzecią cyfrę pierwiastku. Podzieliwszy więc 41311 przez potrójny kwadrat liczby z dwóch pierwszych cyfer pierwiastku złożonej, to jest przez 3×45^2 czyli przez 6075, otrzymamy 6 na trzecią cyfrę pierwiastku.

Utworzywszy dalej te trzy części składowe, które w szescianie z tej nowej cyfry pierwiastku powstały, i każdą z nich wysunąwszy o jednę cyfrę na prawo, gdy sumę tych trzech części odejmiemy od reszty z trzech pierwszych przedziałów otrzymanej, i do nowej reszty 437336 czwarty przedział przypiszemy, w powstałej ztąd liczbie 437336263 po wyłączeniu z niej ostatnich dwóch cyfer, zatem w liczbie 4373362 zawarty jest iloczyn z potrójnego kwadratu trzech pierwszych cyfer jako jedna liczba uważanych, przez czwartą cyfrę pierwiastku. Zatem 4373362 podzieliwszy przez potrójny kwadrat trzech pierwszych cyfer, to jest przez 3×456^2, czyli przez 623808, wypadnie 7 na czwartą cyfrę pierwiastku.

Cały rachunek tak wygląda:

		$\sqrt[3]{95\|256\|152\|263} = 4567.$		
		64		
		31 256	: 48	3×4^2
$3 \times 4^2 \times 5$	. .	24 0·		
$3 \times 4 \times 5^2$	. .	3 00·		
5^3	. .	125		
		4 131 152	: 6075	3×45^2
$3 \times 45^2 \times 6$	. .	3 645 0·		
$3 \times 45 \times 6^2$	. .	48 60·		
6^3	. .	216		
		437 336 263	: 623808	3×456^2
$3 \times 456^2 \times 7$	. .	436 665 6·		
$3 \times 456 \times 7^2$	. .	670 32·		
7^3	. .	343		
		= = = = = = = = = =		

Z powyższego wynika następujące *prawidło wyciągania pierwiastku szesciennego:*

1. Daną liczbę, poczynając od jednostek, trzeba podzielić od prawej ku lewej na przedziały po trzy cyfry; pierwszy z lewej strony przedział może też mieć tylko jednę lub dwie cyfer. Gdy dana liczba ma przy sobie ułomki dziesiętne, te, poczynając od kropki dzieli się ku prawej stronie na przedziały; jeźli na ostatni z prawej strony przedział zostaje mniej niż trzy cyfer, przedział ten uzupełnia się zerami.

2. Szuka się największej cyfry, której szescian zawarty jest w pierwszym z lewej strony przedziale, i pisze się ją na pierwszą cyfrę pierwiastku. Tę cyfrę wynosi się do szescianu i odejmuje się go od pierwszego przedziału.

3. Następne cyfry pierwiastku wynajdują się przez dzielenie. I tak: do otrzymanej reszty przypisawszy przedział następujący, liczba ta gdy się od niej odłączy dwie ostatnie cyfry z prawej strony, jest dzielną; dzielnikiem zaś będzie potrójny kwadrat z znalezionej właśnie cyfry pierwiastku. Otrzymany iloraz przypisuje się jako nową cyfrę do pierwiastku.

4. Teraz potrzeba utworzyć te części składowe, które w szescianie z tej nowej cyfry pierwiastku powstały, to jest potrójny kwadrat z liczby ją poprzedzającej pomnożony przez tęż cyfrę, potrojoną liczbę poprzedzającą pomnożoną przez kwadrat tej cyfry, i szescian z niej samej; pierwszą z tych trzech części składowych pisze się pod dzielną, a każdą z następujących pod tą pierwszą, wysuwając o jednę cyfrę na prawo; potem sumę tych części odejmuje się od dzielnej, wziętej razem z temi dwiema cyframi, które się od niej wprzód odłączyło. Jeźli ta suma nie da się odjąć, znak to, iż cyfra którą się właśnie wzięło na pierwiastek, jest za wielka; trzeba więc zmniejszać ją, tak aby odejmowanie dało się uskutecznić.

5. Do otrzymanej reszty spuszcza się znowu przedział następujący i powtarza działanie w taki sposób jak pierwej, dopóki wszystkie przedziały z kolei nie wyjdą. Jeźli na jaką cyfrę pierwiastku wypadnie 0, wtedy trzeba nierozwijając trzech części składowych i nie odejmując, spuścić zaraz przedział następujący, ale wprzód należy przypisać do pierwiastku jedno zero, a do dzielnika dwa zera.

6. Jeźli w danej liczbie to jest w danym szescianie są dziesiętne, wtedy przystępując w rachunku do spuszczenia pierwszego przedziału dziesiętnych, trzeba położyć w pierwiastku kropkę, na znak iż od niej idą już dziesiętne.

7. Gdy na ukończenie działania żadna nie zostanie reszta, znak

to że pierwiastek znalazło się zupełnie, że więc dana liczba jest sześcianem zupełnym. Jeźli zaś zostanie jaka reszta, znak to że pierwiastek nie jest zupełny; można go jednakże oznaczyć w dziesiętnych z wszelkiem dowolnem przybliżeniem, a to przypisując do każdej reszty po trzy zera, i ciągnąc dalej działanie w sposób już wiadomy.

P r z y k ł a d y.

1) $\sqrt[3]{140|608} = 52.$
125
15 6‚08 : 75
15 0
60
8
= = = = =

2) $\sqrt[3]{30|517|578|125} = 3125.$
27
3 5‚17 : 27
2 7
9
1
7 26 5‚78 : 2883
5 76 6
3 7 2
8
1 46 2 50 1‚25 : 292032
1 46 0 16 0
2 34 0 0
1 25
=

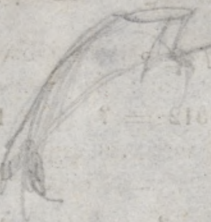
3) $\sqrt[3]{242{\cdot}970|624} = 6{\cdot}24.$
216
26 9‚70 : 108
21 6
7 2
8
4 6 4 26‚24 : 11532
4 6 1 28
2 9 76
64
=

4) $\sqrt[3]{7|824} = 19{\cdot}852\ .\ .\ .$

```
1
―――――
6 8,24   :  3
2 7
2 4 3
  7 29
――――――――――
  9 650,00   :  1083
  8 664
    364 8
      5 12
――――――――――――――
   616 08,00     :  117612
   588 060
       1 485 0
           1 25
―――――――――――――――――――
     26 533 750,00   :  11820675
     23 641 350
            2 382 0
                  8
―――――――――――――――――――
     2 890 017 92
```

5) $\sqrt[3]{5^3/_{16}} = \sqrt[3]{5{\cdot}187|5_{00}} = 1{\cdot}731\ .\ .\ .$

```
1
―――――
4 1,87      :  3
2 1
 1 4 7
   3 43
―――――――――――――
   2 74 5,00      :  867
   2 60 1
        4 5 9
          27
――――――――――――――――
        9 7 830,00   :  89787
        8 9 787
            51 9
               1
      ――――――――――――
        7 9 910 9
```



6) $\sqrt[3]{0{\cdot}000|07_0} = 0{\cdot}0412\ .\ .\ .$

```
64
――――
60,00      :  48
48
 1 2
    1
――――――――
107 90,00     :  5043
100 86
     49 2
        8
――――――――
   654 72
```

7) $\sqrt[3]{40353607} = ?$ 8) $\sqrt[3]{8108486729} = ?$

9) $\sqrt[3]{0\cdot017173512} = ?$ 10) $\sqrt[3]{1\cdot191016} = ?$

11) $\sqrt[3]{29} = ?$ 12) $\sqrt[3]{123456789} = ?$

13) $\sqrt[3]{13\cdot0835} = ?$ 14) $\sqrt[3]{0\cdot0000297} = ?$

15) $\sqrt[3]{5/9} = ?$ 16) $\sqrt[3]{2\,7/12} = ?$

17) Gdy objętość szescianu wynosi 438976 cali szesciennych, jakże długą jest jego krawędź? 76″.

Aby z objętości szescianu wynaleść długość jego krawędzi, wyciąga się z tejże objętości pierwiastek szescienny.

18) Objętość szescianu wynosi 4′ szescienne i 237″ szesciennych; ileż ma długości krawędź jego? 1′ 7″ 3‴.

19) Jaka jest długość krawędzi szescianu, w którego objętości mieści się objętość dwóch szescianów, z których jeden ma w krawędzi 2′ 5″ a drugi 1′ 8″ długości?

20) Kotlarz ma zrobić kocioł kształtu szescianu, mający trzymać 592 garncy; jakąż musi dać długość krawędzi tego kotła, wiedząc iż jeden garniec czyni 210″ szesciennych i 3‴ szescienne?

21) Jak wielka jest średnica kuli, której objętość wynosi 25′ szesciennych i 1402″ szesciennych?

Trzeba objętość pomnożyć przez $\frac{6}{\pi}$, to jest przez $\frac{6}{3\cdot1416}$ czyli przez 1·9099, i z otrzymanego iloczynu wyciągnąć pierwiastek szescienny.

22) Kula mosiężna waży 4 funty; jak wielka jest średnica tej kuli, gdy 1 cal szescienny mosiądzu waży $8\,1/5$ łuta.

ROZDZIAŁ CZWARTY.

Nauka o kombinacyach.

§. 40.

Przedmiotem *nauki o kombinacyach* (Kombinazionslehre) jest w ogólności układanie różnemi sposobami i zestawianie danych ilości, czy to głoskami czy liczbami szczególnemi wyrażonych. Każdą taką ilość daną zowiemy *wyrazem* (Element), a połączenie z sobą dwóch lub więcej wyrazów, według pewnych praw z nauki tej idących, zowiemy *gromadką* (Gruppe, Komplexion).

Mamy tu *dwa główne zadania* do rozważenia:

Albo idzie o to, aby dane wyrazy poukładać tak w gromadki, iżby wszystkie w każdą gromadkę wchodziły. Tak np. z trzech głosek a, b, c, można ułożyć sześć porządkiem głosek różniących się gromadek, jakoto: abc, acb, bac, bca, cab, cba. Takie ułożenie wyrazów nazywamy *przekładaniem* (Permutiren).

Albo też idzie o to, aby z danych wyrazów utworzyć wszystkie jakie być mogą połączenia po dwa, po trzy, po cztery . . . wyrazy, bez względu na porządek wyrazów w gromadkach. Takie łączenie danych wyrazów nazywamy *kombinowaniem* (Kombiniren). Połączenie dwóch wyrazów nazywa się *ambo* lub *kombinacyą drugiego rzędu*, połączenie trzech wyrazów *terno* lub *kombinacyą trzeciego rzędu*, czterech wyrazów *kwaterno* lub *kombinacyą czwartego rzędu*, i t. d. Cztery głoski a, b, c, d, dają sześć amb: ab, ac, ad, bc, bd, cd; cztery tern: abc, abd, acd, bcd, i jedno kwaterno abcd.

Tak w przekładaniu jak i kombinowaniu idzie o *dwie rzeczy*: o *istotne utworzenie* gromadek żądanych, i o *oznaczenie mnogości gromadek*.

Wyrazy oznacza się albo przez liczby w naturalnym porządku po sobie idące, w którym to razie każda liczba przybiera nazwisko *skazówki* (Zeiger), alboteż przez głoski.

Mówimy że gromadka jest *uporządkowaną* (gut geordnet), gdy w niej skazówka najniższa jest na pierwszem miejscu, a po niej z kolei coraz wyższe skazówki, tak iż najwyższa na ostatniem przypada miejscu, np. 123, 134; gdy przeciwnie gromadka 132 nie jest uporządkowaną. Z dwóch gromadek zawierających jedne i te same skazówki ta zowie się *wyższą*, która wzięta w znaczeniu swojem jako liczba, wyższą ma wartość; np. gromadka 132 wyższa jest niż 123; również 234 wyższa jest niż 124.

Z głosek zaś bierzemy te za wyższe, które w zwyczajnym porządku abecadła późniejsze mają miejsce; tak gromadka abcd jest uporządkowana, a acbd nie jest uporządkowana; zaś acbd jest gromadką wyższą niżeli abcd.

I. Przekładania (Permutazionen).

§. 41.

1. Aby *z kilku danych wyrazów otrzymać wszelkie jakie być mogą przekładania*, trzeba najpierw wyrazy te ułożyć w gromadkę uporządkowaną; z ułożonej w ten sposób gromadki najniższej tworzy się gromadkę z kolei wyższą, przemieniając miejsca tylko dwóch ostatnich wyrazów; dalej, aby mieć następną gromadkę, gdy już tym dwóm ostatnim wyrazom miejsca zmienić nie można, trzeba w miejsce trzeciego wyrazu tylnego wstawić wyraz z kolei wyższy, a po nim dwa pozostałe uporządkowane; następnie w otrzymanej gromadce mienia się miejsca dwóm ostatnim wyrazom. W ten sposób postępuje się aby z każdej gromadki mieć w kolei następującą wyższą, dopóki się nie dojdzie do najwyższej, którą się potem poznaje, że wyrazy w niej są w odwrotnym porządku z wyrazami gromadki pierwszej. Np.

Wyrazy 1, 2, 3.			Wyrazy a, b, c.		
123	213	312	abc	bac	cab
132	231	321	acb	bca	cba

Wyrazy a, b, c, d.

abcd	bacd	cabd	dabc
abdc	badc	cadb	dacb
acbd	bcad	cbad	dbac
acdb	bcda	cbda	dbca
adbc	bdac	cdab	dcab
adcb	bdca	cdba	dcba

W taki sam sposób postępuje się też gdy między wyrazami są niektóre sobie równe. Np.

Wyrazy a, b, b, b, c, c.

abbbcc	babbcc	bbabcc	bcabbc	cabbbc	cbabbc	ccabbb
abbcbc	babcbc	bbacbc	bcabcb	cabbcb	cbabcb	ccbabb
abbccb	babccb	bbaccb	bcacbb	cabcbb	cbacbb	ccbbab
abcbbc	bacbbc	bbbacc	bcbabc	cacbbb	cbbabc	ccbbba
abcbcb	bacbcb	bbbcac	bcbacb		cbbacb	
abccbb	baccbb	bbbcca	bcbbac		cbbbac	
acbbbc		bbcabc	bcbbca		cbbbca	
acbbcb		bbcacb	bcbcab		cbbcab	
acbcbb		bbcbac	bcbcba		cbbcba	
accbbb		bbcbca	bccabb		cbcabb	
		bbccab	bccbab		cbcbab	
		bbccba	bccbba		cbcbba	

§. 42.

2. Ze sposobu otrzymywania przekładań można też łatwo *mnogość* ich oznaczyć.

Rozważmy najpierw przypadek, w którym dane *wyrazy są wszystkie odmienne.*

Z jednego wyrazu *a* nie można mieć jak tylko tenże sam wyraz.

Dwa wyrazy *a* i *b* dają dwa zestawienia, jakoto *ab* i *ba.*

Z trzech wyrazów *a, b, c* każdy może być dwa razy na pierwszem miejscu, a dwa inne po nim, mieniając ich miejsce między sobą; zatem będzie $2 \times 3 = 6$ różnych zestawień.

Z czterech wyrazów *a*, *b*, *c*, *d* każdy może być tylekrotnie na pierwszem miejscu, ilekroć trzy inne między sobą miejsce mieniać mogą, zatem 6 razy; będzie więc 6 przekładań z głoską *a* na czele, tyleż z głoską *b*, tyleż z *c* i tyleż z *d* na czele; razem więc $6 \times 4 = 24$ różnych zestawień.

Podobnież przekonać się można, że 5 wyrazów daje $24 \times 5 = 120$ przekładań.

Oznaczając więc mnogość wszystkich przekładań z *n* rozmaitych wyrazów przez P_n (liczba przekładań z *n*), będzie według poprzedzającego

$$P_1 = 1;$$
$$P_2 = 2 = 1 . 2;$$
$$P_3 = P_2 . 3 = 1 . 2 . 3;$$
$$P_4 = P_3 . 4 = 1 . 2 . 3 . 4;$$
$$P_5 = P_4 . 5 = 1 . 2 . 3 . 4 . 5;$$

zatem w ogólności

$$P_n = 1 . 2 . 3 . 4 . \;.\;.\;.\; (n - 1) . n.$$

A tak: *liczba przekładań z danej mnogości wyrazów, jest równa iloczynowi z szeregu liczb naturalnych od 1 aż do tej liczby, która wskazuje mnogość wyrazów.*

Iloczyn $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, .\, .\, .\, (n - 1) \,.\, n$ zwykło się wyrażać symbolicznie przez $n!$; jest więc

$$P_2 = 2!, \quad P_3 = 3!, \quad P_4 = 4!, \ldots \ldots P_n = n!$$

§. 43.

Liczba przekładań wypada mniejszą, gdy *niektóre wyrazy* są *jednakowe*, czyli gdy między danemi wyrazami niektóre się powtarzają.

Mając np. znaleść liczbę przekładań z wyrazów a, b, b, b, c; w takim razie trzem jednakowym wyrazom b przydawszy skazówki, i uważając a, b_1, b_2, b_3, c jako całkiem odmienne wyrazy, liczba przekładań byłaby $5! = 120$. Wyobraziwszy sobie przekładania te jako rzeczywiście utworzone, ujrzelibyśmy że między gromadkami jest zawsze jakaś mnogość takich, w których *a* i *c* powtarzają się na tem samem miejscu, i że gromadki te różnią się tylko tem, iż w nich b_1, b_2, b_3, odmienne zajmują miejsca; a właściwie ponieważ b_1, b_2, b_3 według tego co się wyżej powiedziało, dopuszczają zestawień rozmaitych $3! = 6$, wypada więc na każde miejsce przez *a* i *c* zajęte zawsze 6 takich przekładań, które się między sobą różnią samem zestawieniem tych głosek które skazówkami są opatrzone; tak np. przekładania w których *a* jest na pierwszem, a *c* na drugiem miejscu są następujące:

$$ab_1cb_2b_3,\ ab_1cb_3b_2,\ ab_2cb_1b_3,\ ab_2cb_3b_1,\ ab_3cb_1b_2,\ ab_3cb_2b_1.$$

Wypuściwszy tu skazówki, to jest uważając wszystkie trzy *b* jako jeden i ten sam wyraz, wtedy wszystkie te 6 przekładań spłyną się tylko w jedno abcbb. Tym sposobem w 120 przekładaniach gdy wypuścimy skazówki, będzie zawsze po 6 jednakich, to jest z każdych 6 przekładań będzie tytko jedno. Trzeba więc liczbę przekładań z wszystkich wyrazów podzielić przez liczbę przekładań z wyrazów jednakowych; zatem liczba wszystkich odmiennych przekładań z głosek a, b, b, b, c jest $\frac{5!}{3!} = \frac{120}{6} = 20$.

W tenże sposób przekonać się można że wyrazy a, b, b, b, b, c dają $\frac{6!}{4!} = \frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} = 30$ różnych przekładań.

Gdyby w danych 10 wyrazach, prócz 4 jednakowych wyrazów było też jeszcze i 3 innych jednakowych wyrazów, trzebaby z takichże powodów liczbę przekładań $\frac{10!}{4!}$ przez wzgląd na te 3 jednakie wyrazy jeszcze i przez 3! podzielić; a tak liczba wszystkich przekładań odmiennych byłaby $\frac{10!}{4!\,3!} = \frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}{1.2.3.4.1.2.3} = 25200.$

§. 44.

P r z y k ł a d y.

1) Ile razy mogą 6 osób u stołu siedzących zmieniać między sobą miejsca, aby wszystkie jakie mogą być szyki w kolei zabrały?
$6! = 1.2.3.4.5.6 = 720$ razy.

2) Ile razy można zmienić kolej 24 głosek abecadła?
$24! = 620448401733239439360000$ razy.

3) Ile razy można jednę gałkę białą, dwie niebieskie i trzy czerwone rozmaicie z sobą poprzekładać?
$$\frac{6!}{2!\,3!} = \frac{1.2.3.4.5.6}{1.2.1.2.3} = 60 \text{ razy.}$$

4) W iloraki sposób można pięć przegródek obsadzać trzema różnemi gałkami, białą, żółtą i czerwoną?
Za każdym razem trzy tylko przegródek może być gałkami obsadzonych, a dwie będą próżne; wystawiwszy więc sobie, że dwie próżne przegródki obsadzone są przez 0, będziemy mieli 5 gałek, między któremi 0 zachodzi dwa razy; będzie więc
$$\frac{5!}{2!} = \frac{1.2.3.4.5}{1.2} = 60 \text{ sposobów obsadzenia.}$$

5) Ilekrotnie dadzą się poprzekładać czynniki każdego z następujących iloczynów: $abcdef$, $a^2bc = aabc$, a^3b^2cd, $x^3y^2z^4$, $a^{m-n}b^n$?

II. K o m b i n a c y e.

§. 45.

Rozróżniamy kombinacye *bez powtarzania* i *z powtarzaniem* (ohne und mit Wiederholungen), a to według tego, jak jeden i ten sam wyraz wchodzi raz lub więcej razy w gromadkę.

1. W *składaniu* (Bildung) *kombinacyi* postępuje się tak jak w przekładaniu, zawsze od gromadki niższej do wyższej

Aby z kilku danych wyrazów złożyć wszelkie amba bez powtarzania, łączy się każdy wyraz po kolei z następującym.

Naprzykład:

Wyrazy 1, 2, 3, 4. Wyrazy a, b, c, d, e.
12, 13, 14; ab, ac, ad, ae;
23, 24; bc, bd, be;
34. cd, ce;
de.

Aby otrzymać terna bez powtarzania, łączy się każde z kolei ambo z każdym następnym wyrazem. Np.

123, 124, 134; abc, abd, abe; acd, ace, ade;
234. bcd, bce; bde;
cde.

W podobny sposób składa się kwaterna, kwinterna . . . . bez powtarzania.

Chcąc zaś z kilku danych wyrazów złożyć wszystkie amba z powtarzaniem, trzeba każdy z kolei wyraz połączyć z samym sobą, i nadto ze wszystkiemi następnemi wyrazami. Np.

Wyrazy 1, 2, 3, 4. Wyrazy a, b, c, d, e.
11, 12, 13, 14; aa, ab, ac, ad, ae;
22, 23, 24; bb, bc, bd, be;
33, 34; cc, cd, ce;
44. dd, de;
ee.

Terna zaś z powtarzaniem otrzymuje się, gdy każde z kolei ambo z powtarzaniem złączymy naprzód z wyrazem wyższym w nie wchodzącym, a potem z każdym z następnych wyrazów. Np.

111, 112, 113, 114; 122, 123, 124; 133, 134; 144;
222, 223, 224; 233, 234; 244;
333, 334; 344;
444.

Według takiej samej zasady składa się kwaterna, kwinterna, ... z powtarzaniem.

§. 46.

2. *Mnogości* różnych *kombinacyj* z kilku danych wyrazów, dojdziemy z następującego rozbioru.

Mając np. danych pięć wyrazów a, b, c, d, e, otrzymamy na pewno wszystkie amba bez powtarzania, gdy naprzód wyraz *a* połączymy z każdym z kolei innym wyrazem, a potem toż samo uczynimy z wyrazem *b* i z każdym następnym. Gdy amba któreśmy z każdego wyrazu otrzymali ułożymy w jeden rząd oddzielny, okaże się iż

z a jest ab, ac, ad, ae;
„ b „ ab, bc, bd, be;
„ c „ ac, bc, cd, ce;
„ d „ ad, bd, cd, de;
„ e „ ae, be, ce, de.

Widoczna, iż tyle otrzymaliśmy rzędów ile jest wyrazów, t. j. 5; a w każdym rzędzie o jedno ambo mniej niż jest danych wyrazów, t. j. 4; zatem wszystkich amb jest 5×4. Ale że każde ambo powtarza się dwa razy, np. ambo *bc*, bośmy połączyli *b* z *c* tudzież *c* z *b*; przeto amb odmiennych jest tylko $\frac{5 \times 4}{2} = 10$. Gdyby było danych wyrazów n, mielibyśmy n rzędów, a w każdym rzędzie $n - 1$ amb, razem więc $n (n - 1)$; ale że w tem jest zawsze amb jednakowych dwa po dwa, przeto wszystkich amb odmiennych jest $\frac{n (n - 1)}{1 . 2}$. $\frac{10 \times 10-1}{2} = 45$

Dalej i to jest pewna, że otrzymamy wszystkie terna bez powtarzania, gdy każde ambo złączymy z każdym z kolei wyrazem, prócz tych dwóch, które w to ambo już wchodzą. A tak:

ambo ab daje abc, abd, abe; ambo bd daje abd, bcd, bde;
„ ac „ abc, acd, ade; „ be „ abe, bce, bde;
„ ad „ abd, acd, ade; „ cd „ acd, bcd, cde;
„ ae „ abe, ace, ade; „ ce „ ace, bce, cde;
„ bc „ abc, bcd, bce; „ de „ ade, bde, cde.

Tu jest tyle rzędów ile przedtem było amb, więc $\frac{5 . 4}{1 . 2} = 10$, a w każdym rzędzie o dwa terna mniej niżeli wyrazów do kombinowania danych, to jest 3; razem więc $\frac{5 \times 4 \times 3}{1 . 2}$ tern. Ale że każde terno wchodzi 3 razy, przeto ostatnią liczbę trzeba jeszcze podzielić przez 3, a wypada iż jest $\frac{5 \times 4 \times 3}{1 \times 2 \times 3} = 10$ tern odmiennych. Gdyby było danych n wyrazów, otrzymalibyśmy $\frac{n (n - 1) (n - 2)}{1 . 2 . 3}$ tern.

Również przekonać się można że z *n* wyrazów jest

wszystkich kwatern $\frac{n (n - 1) (n - 2) (n - 3)}{1 . 2 . 3 . 4}$,

a „ kwintern $\frac{n (n - 1) (n - 2) (n - 3) (n - 4)}{1 . 2 . 3 . 4 . 5}$

tak dalej.

Łatwo jest z powyższych liczb wyczytać prawo. Oto mnogość kombinacyj jakiegobądź rzędu bez powtarzania, daje się oznaczyć przez ułomek, którego tak licznik jak mianownik tyle ma czynników ile jest wyrazów w jednej kombinacyi; pierwszy czynnik w liczniku równy jest mnogości wszystkich wyrazów, a każdy następny jest coraz o 1 mniejszy; mianownik zaś jestto szereg naturalny czynników począwszy od 1 aż do takiej liczby, która wyraża mnogość wyrazów w jednę kombinacyę wchodzących.

§. 47.

Podobneż uwagi doprowadzą nas do oznaczenia mnogości kombinacyj z powtarzaniem.

Mając np. tak jak wyżej pięć wyrazów a, b, c, d, e, otrzymamy z nich na pewno wszystkie amba z powtarzaniem, gdy każdy wyraz połączymy sam z sobą i nadto jeszcze z każdym z kolei innym wyrazem, nie wyłączając przy tem i siebie samego.

Napisawszy tedy w oddzielnych rzędach amba powstające z takiego połączenia każdego wyrazu, okaże się iż

a	daje	aa,	aa,	ab,	ac,	ad,	ae;
b	„	bb,	ab,	bb,	bc,	bd,	be;
c	„	cc,	ac,	bc,	cc,	cd,	ce;
d	„	dd,	ad,	bd,	cd,	dd,	de;
e	„	ee,	ae,	be,	ce,	de,	ee.

Otrzymuje się więc tyle rzędów ile jest danych wyrazów, a w każdym rzędzie o jedno ambo więcej, zatem 5 rzędów każdy o 6 ambach, razem 5×6 amb. Ponieważ zaś każde ambo wchodzi 2 razy, więc wszystkich amb odmiennych jest $\frac{5 \times 6}{2} = 15$. Gdyby było danych wyrazów n, mielibyśmy n rzędów, a w każdym z nich amb $n + 1$, czyli razem $n(n + 1)$; przeto wszystkich amb odmiennych byłoby $\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$.

Aby na pewno otrzymać wszystkie terna z powtarzaniem, trzeba każde ambo połączyć najpierw z temi dwoma wyrazami które w to ambo wchodzą, a potem jeszcze z każdym z kolei innym wyrazem. Tak więc

ambo	aa	daje	aaa,	aaa,	aaa,	aab,	aac,	aad,	aae;
„	ab	„	aab,	abb,	aab,	abb,	abc,	abd,	abe;
„	ac	„	aac,	acc,	aac,	abc,	acc,	acd,	ace;
„	ad	„	aad,	add,	aad,	abd,	acd,	add,	ade;
„	ae	„	aae,	aee,	aae,	abe,	ace,	ade,	aee;
„	bb	„	bbb,	bbb,	abb,	bbb,	bbc,	bbd,	bbe;
„	bc	„	bbc,	bcc,	abc,	bbc,	bcc,	bcd,	bce;

itak dalej.

Otrzymaliśmy tu tyle rzędów, ile było amb z powtarzaniem, więc $\frac{5 . 6}{1 . 2}$, a w każdym rzędzie o 2 terna więcej aniżeli danych jest wyrazów, to jest 7 tern, razem więc $\frac{5 . 6 . 7}{1 . 2}$. Ale że każde terno wchodzi 3 razy, przeto wszystkich tern odmiennych jest $\frac{5 . 6 . 7}{1 . 2 . 3}$.

Gdyby było danych wyrazów n, mielibyśmy rzędów $\frac{n(n+1)}{1 . 2}$, a w każdym z nich byłoby tern $n + 2$, a więc razem $\frac{n(n+1)(n+2)}{1 . 2}$ tern, między któremi atoli jest trzy po trzy jednakowych; zatem mnogość tern odmiennych z powtarzaniem byłaby

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{1 . 2 . 3}.$$

Podobnież znajdziemy, iż

kwatern z powtarzaniem jest $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1 . 2 . 3 . 4}$,

kwintern „ „ $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1 . 2 . 3 . 4 . 5}$

i tak dalej.

Widzimy z tego zarazem, iż mnogość kombinacyj jakiegobądź rzędu z powtarzaniem, tem się tylko różni od mnogości kombinacyj tegoż rzędu bez powtarzania, że w pierwszych czynniki licznika powiększają się następnie o 1, gdy w tych ostatnich o 1 następnie się zmniejszają.

§. 48.

Przykłady.

1) Ile jest amb, tern, kwatern, kwintern w 90 numerach ces. król. austryackiej loteryi liczbowej?

Amb jest $\frac{90 . 89}{1 . 2} = 4005$,

tern „ $\frac{90 . 89 . 88}{1 . 2 . 3} = 117480$,

kwatern „ $\frac{90 . 89 . 88 . 87}{1 . 2 . 3 . 4} = 2555190$,

kwintern „ $\frac{90 . 89 . 88 . 87 . 86}{1 . 2 . 3 . 4 . 5} = 43949268$.

2) Ile jest amb, tern, kwatern, kwintern w 5 numerach w jednem ciągnieniu loteryi liczbowej wychodzących ?

Amb jest $\frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10,$

tern „ $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10,$

kwatern „ $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 5,$

kwintern „ $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 1.$

3) Ile razy można w grze w kostki wyrzucić odmiennie dwiema kostkami ?

Szukaną liczbę znajdzie się, zważywszy, iż ta liczba równa się mnogości amb z powtarzaniem z 6 wyrazów, zatem

$$\frac{6 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 21.$$

Można więc wyrzucić odmiennie 21 razy.

4) Ile można z 7 wyrazów otrzymać kombinacyj 1go, 2go, 3go,..... rzędu z powtarzaniem i bez powtarzania ?

5) Z cyfer 3, 4, 5, 6 ile się da ułożyć liczb jednocyfrowych, dwucyfrowych, trzycyfrowych i czterocyfrowych ? (Tu z kombinowaniem połączyć zarazem trzeba i przekładanie).

ROZDZIAŁ PIĄTY.

Rachunki stosunkami złożonemi.

I. O stosunkach i proporcyach składanych.

§. 49.

Gdy w kilku danych stosunkach pomnożymy wszystkie poprzedniki przez siebie i również wszystkie następniki, otrzymane dwa iloczyny są z sobą w nowym stosunku, który ze względu na dane stosunki *pojedyncze* (einfache Verhältniße), nazywa się stosunkiem *złożonym*, (zusammengesetztes Verhältniß); np.

$$\text{Stosunki proste} \begin{cases} 1 : 2, \\ 3 : 4, \\ 5 : 7; \end{cases} \qquad \begin{matrix} a : b, \\ c : d, \\ e : f; \end{matrix}$$

$$\text{Stosunek złożony} \quad 15 : 56. \qquad ace : bdf.$$

Wykładnik stosunku złożonego równy jest iloczynowi z wykładników stosunków pojedynczych.

Stosunki złożone zachodzą wszędzie gdzie tylko porównywa się z sobą takie ilości, które zawisłe są od kilku innych ilości. Tak np. powierzchnia prostokąta zależy od jego długości i szerokości. Chcąc więc oznaczyć stosunek powierzchni dwóch prostokątów, z których pierwszy ma długości 5^0 a szerokości 3^0, drugi zaś długości 7^0 a szerokości 4^0, jest naprzód:

stosunek długości 5 : 7,

„ szerokości 3 : 4.

Widoczna jest, że powierzchnia pierwszego prostokąta zostanie ta sama, gdy przypuścimy iż tenże zamiast 3^0 ma tylko 1^0 szerokości, ale że zato jest 3 razy dłuższym, a więc na 15^0 długi; również i w drugim prostokącie możemy nie zmieniając jego powierzchni zamiast 4^0 przyjąć tylko 1^0 szerokości, a za to 4 razy dłuższym go uważać, zatem na 28^0. Tym więc sposobem nie zmienią się obie te opwierzchnie, ani też wzajemny ich stosunek, gdy przypuścimy że oba prostokąty mają tęż samę szerokość 1°, a długość 15° i 28°; w tym zaś razie wielkość powierzchni przy tej samej szerokości zawisła tylko od długości 15° i 28°, zatem stosunek tych dwóch powierzchni jest 15 : 28, lub 5 × 3 : 7 × 4. A tak stosunek powierzchni dwóch prostokątów jest stosunkiem złożonym z pojedynczych stosunków długości i szerokości. Zwykło się to króciej tak wyrażać: Powierzchnia prostokąta jest w stosunku złożonym z jego długości i szerokości.

W podobny sposób są z sobą w stosunku złożonym: długość odbytej drogi z czasem do jej odbycia potrzebnym i z prędkością; wielkość zapłaty z liczbą robotników, dni i godzin roboty; zapłata za przewóz towaru z długością drogi i ciężarem towaru; prowizya z kapitałem, procentem i czasem; zysk z wyłożonym kapitałem i z czasem.

§. 50.

W dwóch lub kilku proporcyach odpowiadające sobie wyrazy pomnożywszy porządkiem przez siebie, otrzymane ztąd iloczyny, gdy im się ten sam porządek zostawi, są z sobą znowu w proporcyi.

Gdy jest

$$\begin{array}{c}
a : b = c : d, \\
m : n = p : q, \\
w : x = y : z, \\
\hline
\end{array}$$

musi też być $amw : bnx = cpy : dqz$.

O prawdziwości tego łatwo się przekonać.

Stosunki bowiem $a : b$, $m : n$, $w : x$, są z kolei równe stosunkom $c : d$, $p : q$, $y : z$; zatem i powstałe z nich stosunki złożone $amw : bnx$ i $cpy : dqz$ muszą być między sobą równe, czyli musi być proporcya $amw : bnx = cpy : dqz$.

Ta ostatnia proporcya ze względu na dane *pojedyncze* proporcye, nazywa się proporcyą *złożoną*.

Tak

$$\begin{array}{l}
\text{z proporcyj pojedynczych wynika}\left\{\begin{array}{r}
3 : 4 = 6 : 8, \\
1 : 2 = 3 : 6, \\
5 : 3 = 15 : 9,
\end{array}\right. \qquad
\begin{array}{r}
x : y = 7 : 8, \\
y : z = 10 : 3, \\
z : 2 = 5 : 11,
\end{array} \\
\hline
\text{proporcya złożona } 15 : 24 = 270 : 432; \qquad xyz : 2yz = 350 : 264, \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\text{lub } x : 2 = 350 : 264.
\end{array}$$

II. Reguła trzech złożona.

§. 51.

Gdy pewien gatunek liczb zestawiony z dwoma lub więcej innych gatunków liczb, jest z niemi w stosunku prostym lub odwrotnym, a przytem jeden szereg należących do siebie liczb wszystkich tych gatunków jest wiadomy, z drugiego zaś szeregu liczb do siebie należących jedna liczba nie jest wiadomą i mamy ją wynaleść, rachunek, za pomocą którego znajdujemy tę liczbę niewiadomą nazywa się *regułą trzech złożoną* (zusammengesetzte Regelbetri).

Np. gdy dostawa 18 cetnarów o mil 20 kosztuje 24 złr., ileż złotych-reńskich wypadnie zapłacić za dostawę 16 cetnarów o mil 30 ? Odpowiedź: 32 złr. — Tu mamy trzy gatunki liczb; liczba cetnarów, liczba mil i liczba złotych-reńskich; koszt dostawy jest w stosunku prostym z wagą towaru i z długością drogi; z tych trzech gatunków jest szereg należących do siebie liczb wiadomy, to jest: dostawa 18 cetnarów o mil 20 kosztuje 24 złr.; z drugiego zaś szeregu liczb do siebie należących, to jest: za dostawę 16 cetnarów o mil 30 zapłacić trzeba złotych-reńskich 32, są dwie tylko liczby wiadome, jedna zaś (32 złr.) jest niewiadoma i mamy ją wynaleść. To więc zadanie jest zadaniem reguły trzech złożonej.

§. 52.

Każde zadanie reguły trzech złożonej można rozłożyć na kilka zadań reguły trzech pojedynczej, i rozwiązać w ten sposób jak to w następującym tu przykładzie wskażemy.

Gdy z 20 funtów przędzy jest 3 sztuk materyi, każda sztuka po 40 łokci długości a 6 ćwierci szerokości; ileż sztuk takiejże materyi będzie z 175 funtów przędzy, jeźli każda z tych sztuk ma mieć 36 łokci długości a 5 ćwierci szerokości ?

To zadanie reguły trzech złożonej, można rozłożyć na trzy następujące zadania reguły trzech prostej, biorąc za każdą razą do zmiany tylko jeden gatunek liczb, i tak:

a) Z 20 funtów przędzy jest 3 sztuk materyi, każda sztuka po 40 łokci długości a 6 ćwierci łokcia szerokości; ileż sztuk takiejże materyi będzie z 175 funtów, jeźli każda z tych sztuk ma mieć 40 łokci długości a 6 ćwierci szerokości? — Albo: z 20 funtów przędzy jest 3 sztuk materyi; ileż sztuk takiejże materyi będzie z 175 funtów, gdy wszystkie inne warunki są jednakowe ? Rozwiązuje się tak:

20 funtów	3 sztuk,	$y : 3 = 175 : 20$
175 „	y „	zatem $y = 26\frac{1}{4}$ sztuk.

b) Z 175 funtów przędzy otrzymuje się $26\frac{1}{4}$ sztuk materyi, każda sztuka po 40 łokci długości a 6 ćwierci szerokości; ileż sztuk otrzyma się z 175 funtów, gdy długość materyi w każdej sztuce ma być 36 łokci, a szerokość 6 ćwierci? — Albo: Gdy jedna sztuka ma długości 40 łokci, otrzymuje się $26\frac{1}{4}$ sztuk; ileż sztuk, gdy wszystkie inne warunki są jednakowe, otrzyma się, gdy długość jednej sztuki ma być tylko 36 łokci? — Rozwiązuje się tak:

40 łokci długości $26\frac{1}{4}$ sztuk,	$z : 26\frac{1}{4} = 40 : 36$
36 „ „ z „	zkąd $z = 29\frac{1}{6}$ sztuk.

c) Z 175 funtów przędzy otrzymuje się $29\frac{1}{6}$ sztuk materyi, każda sztuka po 36 łokci długości a 6 ćwierci szerokości; ileż sztuk będzie z 175 funtów, jeźli każda z tych sztuk ma mieć 36 łokci długości a 5 ćwierci szerokości? — Czyli króciej: Gdy jedna sztuka ma 6 ćwierci szerokości, otrzymujemy z pewnej ilości przędzy $29\frac{1}{6}$ sztuk; ileż otrzymamy sztuk, gdy szerokość będzie tylko 5 ćwierci, a wszystkie inne warunki zostają te same? — Rozwiązanie będzie takie:

6 ćwierci szerokości $29\frac{1}{6}$ sztuk,	$x : 29\frac{1}{6} = 6 : 5$
5 „ „ x „	więc $x = 35$ sztuk.

Z tych wszystkich trzech zadań wypada:

Gdy z 20 funtów przędzy jest 3 sztuk materyi, każda sztuka po 40 łokci długości a 6 ćwierci szerokości, z 175 funtów przędzy będzie takiejże materyi sztuk 35, każda po 36 łokci długości a 5 ćwierci szerokości.

Metoda którejśmy tu użyli, aby rozwiązać zadanie reguły trzech złożonej, jest zbyt rozwlekła, aby ją w każdym razie zastosowywać; atoli prowadzi ona za pomocą bardzo prostych wniosków do rozwiązywania zadań krótszą drogą. Dość bowiem otrzymane proporcye zestawić, pisząc jedne pod drugą, a znalezione za pomocą tych proporcyj liczby zastąpić tymczasem głoskami *y* i *z*; a będzie

$$\left.\begin{array}{l} y : 3 = 175 : 20 \\ z : y = 40 : 36 \\ x : z = 6 : 5 \end{array}\right\}$$ Przez pomnożenie z sobą wyrazów odpowiadających wypada znowu

$yzx : 3yz = 175 . 40 . 6 : 20 . 36 . 5$ proporcya.

W tej ostatniej proporcyi skróciwszy stosunek pierwszy przez *y* i *z*, wypada

$$x : 3 = 175 . 40 . 6 : 20 . 36 . 5,$$

co dla łatwiejszego objęcia także i tak napisać można

$$\begin{array}{rl} x : 3 = 175 & : 20 \\ 40 & : 36 \\ 6 & : 5 \end{array}$$

przy czem to na myśli mieć trzeba, iż liczby pod sobą napisane mają być przez siebie rozmnożone.

Jest więc stosunek x : 3 równy stosunkowi złożonemu ze stosunków 175 : 20, 40 : 36 i 6 : 5.

Gdy porządek liczb w tych stosunkach porównamy z koleją w jakiej w zadaniu idą liczby po sobie, mianowicie

x sztuk	175 funtów	36 łokci	długości	5	ćwierci	szerokości
3 „	20 „	40 „	„	6	„	„

znajdziemy, iż liczby funtów należące do x sztuk i do 3 sztuk, będące z liczbą sztuk w stosunku prostym, wchodzą z sobą w stosunek w tymże samym porządku; odpowiednie zaś liczby oznaczające długość i szerokość, i będące z liczbą sztuk w stosunku odwrotnym, wchodzą też z sobą w stosunek w porządku odwrotnym.

Ztąd wynika następujące prawidło:

Gdy liczby pewnego gatunku są w takiej zawisłości od liczb kilku innych gatunków, iż zestawione z niemi pojedynczo dają stosunki to proste to odwrotne, wtedy stosunek pomiędzy każdemi dwiema liczbami pierwszego gatunku, równa się stosunkowi złożonemu z stosunków pojedynczych, zachodzących między odpowiedniemi liczbami każdego innego gatunku, wziętemi w tym samym porządku lub też w odwrotnym, a to według tego, jak między liczbami tego a liczbami pierwszego gatunku zachodzi stosunek prosty lub odwrotny.

§. 53.

Prawidło to prowadzi więc do bardzo prostej metody rozwiązywania zadań *reguły trzech złożonej*. Postępuje się przytem według następujących *zasad:*

1. Liczbę niewiadomą i liczbę tego samego gatunku co niewiadoma, układa się w stosunek pierwszy.

2. Drugi stosunek proporcyi jest złożony z stosunków pojedynczych, które znajdziemy, gdy gatunek oznaczony przez x porównywać będziemy kolejno z każdym innym gatunkiem, aby się dowiedzieć czy między tym gatunkiem a innemi gatunkami zachodzi stosunek prosty czy też odwrotny; według tego więc bierze się w porządku prostym lub odwrotnym po dwie liczby każdego z kolei gatunku i stosunek ten z pierwszym już gotowym stosunkiem układa się w proporcyą. Stosunki te pisze się kolejno jeden pod drugim.

3. Rozwiązuje się proporcyą, gdy iloczyn ze wszystkich czynników będących w wyrazach średnich, podzielimy przez iloczyn ze

wszystkich czynników wchodzących w wyrazy skrajne. Przy tem korzystnie jest używać metody przekreślania.

P r z y k ł a d y.

1) Gdy dostawa $12\frac{1}{2}$ cetnarów o mil 32 kosztuje $28\frac{3}{4}$ złr., ileż cetnarów można dostawić za zapłatę $43\frac{3}{4}$ złr. o mil 28 ?

$$\begin{array}{llllll|r|l}
12\frac{1}{2} \text{ cetn.} & 28\frac{3}{4} \text{ złr.} & 32 \text{ mil} & & & & \cancel{28\frac{3}{4}} & \cancel{12\frac{1}{2}} \\
x \quad " & 43\frac{3}{4} \quad " & 28 \quad " & & & & \cancel{7}\ \cancel{28} & \cancel{43\frac{3}{4}} \\
x : 12\frac{1}{2} & = 43\frac{3}{4} & : 28\frac{3}{4} & & & & 23\ \cancel{115} & \cancel{32}\ \cancel{16}\ 4 \\
 & = 32 & : 28 & & & & \cancel{2} & \cancel{4} \\
 & & & & & & \cancel{4} & \cancel{25}\ 5 \\
 & & & & & & & \cancel{175}\ 25 \\
\hline
 & & & & & & 23 & 500 \quad |21\frac{17}{23} \text{ cetn.} \\
 & & & & & & & 40 \\
 & & & & & & & 17
\end{array}$$

$x = \frac{28\frac{3}{4} \cdot 43\frac{3}{4} \cdot 32}{12\frac{1}{2} \cdot 28}$

Tu porównywa się najpierw cetnary i złote-reńskie; za 2, 3, 4 razy więcej cetnarów trzeba też zapłacić od dostawy 2, 3, 4 razy więcej; te więc gatunki liczb są z sobą w stosunku prostym, dlatego też liczby złotych-reńskich odnoszące się do x cetnarów i $12\frac{1}{2}$ cetnarów kładzie się w stosunek w tym samym porządku, jakoto: $43\frac{3}{4} : 28\frac{3}{4}$. Następnie porównywa się cetnary i mile, mówiąc: 2, 3, 4 razy więcej cetnarów mogą być za tę samę zapłatę tylko o 2, 3, 4 razy mniej mil dostawione; zatem między temi dwoma gatunkami liczb zachodzi stosunek odwrotny, dlatego też liczby mil odnoszące się do x cetnarów i $12\frac{1}{2}$ cetnarów kładzie się w stosunek w porządku odwrotnym, to jest 32 : 28. Proporcyą rozwiązaliśmy używając metody przekreślania.

2) Gdy 12 robotnikom zapłacono za 3 dni roboty 28 złr., ileż wypadnie zapłacić 15 robotnikom za 5 dni ?

$$\begin{array}{llll}
12 \text{ robotników} & 3 \text{ dni} & 28 \text{ złr.,} & x : 28 = 15 : 12 \\
15 \quad " & 5 \quad " & x \quad " & \qquad\qquad\ \ 5 : 3 \\
 & & & \text{zkąd } x = 58\frac{1}{3} \text{ złr.}
\end{array}$$

3) Gdy kapitał 3600 złr. daje za $4\frac{1}{2}$ lat 972 złr. dochodu, ileż dochodu będzie od kapitału 5650 złr. za $2\frac{1}{2}$ lat ?

$$\begin{array}{lllll}
3600 \text{ złr. kap.} & 4\frac{1}{2} \text{ lat} & 972 \text{ złr. doch.,} & & x : 972 = 5650 : 3600 \\
5650 \quad " \quad " & 2\frac{1}{2} \quad " & x \quad " \quad " & & \qquad\qquad\quad 2\frac{1}{2} : 4\frac{1}{2} \\
 & & & & \text{zatem } x = 847\frac{1}{2} \text{ złr. dochodu.}
\end{array}$$

4) Gdy od 100 złr. kapitału jest na rok $5\frac{1}{2}$ złr. dochodu; jakiż trzeba mieć kapitał, aby w $2\frac{1}{4}$ latach dał dochodu 300 złr. ?

$$\begin{array}{lllll}
100 \text{ złr. kap.} & 1 \text{ rok} & 5\frac{1}{2} \text{ złr. doch.,} & & x : 100 = 1 : 2\frac{1}{4} \\
x \quad " \quad " & 2\frac{1}{4} \text{ lat} & 300 \quad " \quad " & & \qquad\qquad 300 : 5\frac{1}{2} \\
 & & & & \text{a więc } x = 2424\frac{8}{33} \text{ złr. kapitału.}
\end{array}$$

5) Na sztukę materyi $54\frac{1}{2}$ łokci długiej a $1\frac{3}{4}$ łokcia szerokiej wychodzi 36 funtów przędzy; ileż przędzy potrzeba będzie na sztukę, któraby miała 30 łokci długości a $1\frac{1}{2}$ łokcia szerokości?

$54\frac{1}{2}$ łok. dług. $1\frac{3}{4}$ szer. 36 funt., $x : 36 = 30 : 54\frac{1}{2}$
30 „ „ $1\frac{1}{2}$ „ x „ $300 : 5\frac{1}{2}$
zatem $x = 16\frac{752}{763}$ funtów przędzy.

6) Ugodzono furmana iż 28 cetnarów zawiezie o 25 mil za zapłatę 46 złr. Gdy tenże z tym ciężarem 8 mil ujechał, stanęła ugoda aby inną drogą dalej ciężar ten poprowadził z doładowaniem jeszcze 10 cetnarów, i z nadłożeniem 12 mil nad umówioną pierwotną odległość. Ileż zapłaty będzie mu się należało?

Tutaj trzeba najpierw obrachować zapłatę od 28 cetnarów o mil 8, potem zapłatę od $28 + 10 = 38$ cetnarów o mil $25 - 8 + 12 = 29$, i oba otrzymane wypadki dodać do siebie.

25 mil 46 złr.,
8 „ x „
$x : 46 = 8 : 25$
więc $x = 14$ złr. 43 kr.

28 cetn. 25 mil 46 złr.
38 „ 29 „ y „
$$y : 46 = \begin{cases} 38 : 28 \\ 29 : 25 \end{cases}$$
więc $y = 72$ złr. 25 kr.

Zatem do $x = 14$ złr. 43 kr.
dodawszy $y = 72$ „ 25 „
wypada cała zapłata 87 złr. 8 kr.

7) Gdy 20 robotników pracując dziennie godzin 12, wykopią w 5 tygodniach rów na 375′ długi; w iluż tygodniach 12 robotników pracujących dziennie godzin 10 wykopie rowu takiego 600′ długości?

20 robotników 12 godzin dziennie 5 tygodni 375′ długości
12 „ 10 „ „ x „ 600′ „
$$x : 5 = \left.\begin{matrix} 20 : 12 \\ 12 : 10 \\ 600 : 375 \end{matrix}\right\} \text{ zkąd } x = 16 \text{ tygodni.}$$

8) Gdy 12 tkaczy pracując 25 dni na miesiąc a 12 godzin dziennie wyrobią w 3 miesiącach 28 sztuk płótna, każdą sztukę po 30 łokci długości a 5 ćwierci szerokości; jest pytanie: w ilu miesiącach 22 tkaczy pracując 24 dni na miesiąc a 10 godzin dziennie, wyrobią 66 sztuk płótna, każdą sztukę po 35 łokci długości a 6 ćwierci szerokości? — W $6\frac{3}{4}$ miesiącach.

9) Gdy 6 ludzi zarobi w 5 dniach $28\frac{1}{2}$ złr.; w iluż dniach, gdy wszystkie inne okoliczności są te same, 16 ludzi zarobi 532 złotych-reńskich? — W 35 dniach.

10) Z 16 funtów lnu jest 100 łokci płótna na łokieć szerokiego; ileż będzie łokci takiegoż płótna z 36 funtów lnu, chcąc aby to płótno miało 6 ćwierci szerokości? — 150 łokci.

11) Za odstawienie $28\frac{3}{4}$ cetnarów o mil $45\frac{1}{2}$ zapłacono furmanowi $68\frac{1}{2}$ złr.; ileż mu trzeba zapłacić aby $35\frac{1}{3}$ cetnarów odstawił na mil 40?

12) Spotrzebowano na podłogę 28 desek na 10′ 8″ długich a na 9″ szerokich; ileż desek wyjdzie na tę samę podłogę, gdy każda ma 9′ 4″ długości a 1′ szerokości?

13) 20 robotników pracując dziennie po 12 godzin, wykopali w 15 dniach rów na 30° długi; ileż godzin muszą 18 robotników na dzień pracować, aby w 16 dniach wykopać rów na 24° długi?

14) Do utrzymania światła w 35 latarniach przez 108 godzin, wychodzi $4\frac{1}{2}$ cetnarów oleju; ileż potrzeba będzie tego oleju aby w 50 takichże latarniach wystarczył na 245 godzin.

15) Z łąki na 256 sążni długiej a 36 sążni szerokiej sprzątnięto 20 wozów siana, ładując na każdy wóz po $13\frac{1}{2}$ cetnarów; ileż wozów potrzeba będzie do sprzątnienia siana z łąki 192 sążni długiej a 96 sążni szerokiej, ładując na wóz po 15 cetnarów?

16) Gdy 100 złotych-reń. kapitału przynosi w 1 roku 5 złr. prowizyi, *a)* ileż prowizyi będzie od 3748 złr. za $2\frac{3}{4}$ lat; *b)* za jaki czas kapitał $7835\frac{1}{2}$ złr. przyniesie $633\frac{1}{4}$ złr. prowizyi; *c)* jaki to jest kapitał, który za $2\frac{5}{6}$ lat przynosi 720 złr. 13 kr. prowizyi?

17) Gdy z 72 funtów przędzy wyrobiono 4 sztuk płótna na 42 łokci długiego a $\frac{5}{4}$ łokcia szerokiego, jest pytanie: *a)* ile otrzyma się sztuk płótna na 48 łokci długiego a $\frac{6}{4}$ łokcia szerokiego z $123\frac{1}{2}$ funtów przędzy; *b)* ile łokci trzymać będzie sztuka płótna, gdy z 155 funtów przędzy wyrobi się 7 sztuk szerokości 1 łokcia; *c)* jaka będzie szerokość płótna, gdy z $8\frac{1}{2}$ funtów przędzy wyrobi się 4 sztuk po 45 łokci długości; *d)* ile potrzeba funtów przędzy, aby wyrobić 10 sztuk płótna, sztuka po 48 łokci długości a $\frac{9}{8}$ łokcia szerokości?

Reguła procentu prostego.

§. 54.

Wszelkie mienie czyli majątek, z którego ciągniemy dla siebie korzyści, czy to obracając go na jakie przedsiębierstwo, czy też wypuszczając komu w tym zamiarze, aby przez to majątek ten powiększyć, nazywa się *w obszerniejszem znaczeniu kapitałem* (Kapital im weitern Sinne).

W ściślejszem znaczeniu (im engern Sinne) rozumiemy przez *kapitał* sumę pieniężną, którą komu pożyczamy pod tym warunkiem, ażeby za to że tej sumy na swoją korzyść używa, pewną kwotę pieniężną nam płacił, z obowiązkiem wszakże zwrócenia w końcu tejże sumy w całości.

Pieniądze które się płaci za używanie czyjegoś kapitału zowią się *prowizyą* (dochodem) (Zins, Interesse); wielkość prowizyi oznacza się według *procentu* *) (odsetka) (Prozenten), który zwykle na jeden rok się rachuje, jeźli wyraźnie inaczej się nie ugodzono; mówiąc np. że kapitał umieszczony jest na 5%, rozumi się, że od każdych 100 złr. kapitału pobiera się za jeden rok 5 złr. prowizyi.

Obrachowywanie prowizyi jest więc także obrachowywaniem procentu, tylko że zarazem trzeba jeszcze mieć wzgląd na *czas*, na jaki kapitał został pożyczony. Przy tem miesiąc liczy się zwykle po dni 30, zatem przyjmuje się iż rok ma dni 360.

W rachunkach procentowych zachodzą cztery ilości: *kapitał*, *czas*, *procent* i *prowizya*. Każda z tych ilości zależy od trzech innych i może być z nich obrachowaną.

Wszelkie zadania rachunków procentowych można rozwiązać przez regułę trzech złożoną, uważając wszakże na to, aby wyrażenie procentu należycie rozłożyć. Tak np. chcąc wyrazić procent 5 od sta, nie można tego w rozbiorze rachunku napisać tak: 5%, lecz w następujący sposób:

100 złr. kapitału dają na rok 5 złr. procentu.

Również jeźli jest pytanie: na jaki procent? czyli: na ile procentu?, i przytem liczbę wyrażającą procent przez x oznaczymy, nie można tego wyrazić przez $x\%$, lecz w następujący sposób:

(ile) x złr. procentu daje kapitał 100 złr. w 1 roku?,

przy któremto oznaczeniu idzie o to, aby nie zatracać stałej liczby 100 (oznaczającej kapitał), tudzież stałej liczby 1 (oznaczającej czas).

---

*) W zwyczajnej mowie nie rozróżniamy tak ściśle wyrazu *prowizya* i *procent*, i bierzemy je często w jednem i tem samem znaczeniu. Należyte wszakże rozróżnienie znaczenia tych dwóch wyrazów w wyłożonej tu nauce ustrzeże od wszelkiej dwuznaczności.

Przypisek tłumacza.

Aby zresztą każde zadanie rachunku procentowego nie rozwiązywać koniecznie przez regułę trzech złożoną, weźmiemy tu po jednym przykładzie do każdego z czterech zadań procentowych w istocie odmiennych, i rozwiążemy każdy z tych przykładów przez regułę trzech. Z wypadku zaś da się wyczytać ogólne prawidło, jak rozwiązywać zadania do każdego z tych razów odnoszące się.

1. Obliczenie prowizyi.

§. 55.

Niech będzie kapitał 3000 złr. dany na 5%; jakaż wypada prowizya od tego kapitału za lat 4? — Rozwiązując to zadanie przez regułę trzech złożoną, będzie:

$$\begin{array}{llll} x \text{ złr. prow.} & 3000 \text{ złr. kap.} & 4 \text{ lata}, & x : 5 = 3000 : 100 \\ 5 \;\;" \;\;" & 100 \;\;" \;\;" & 1 \text{ rok}, & \qquad\qquad 4 : 1 \end{array}$$

$$\text{zatem } x = \frac{3000 \times 5 \times 4}{100} = 600 \text{ złr.}$$

Okazuje się tedy iż:

Aby wynaleść prowizyę, trzeba iloczyn z kapitału, procentu i lat podzielić przez 100.

Przy wykonywaniu rachunku używać można najczęściej z korzyścią metody przekreślania.

P r z y k ł a d y.

1) Ile jest prowizyi od 2350 złr. po 4% za 2 lata?

$$\frac{2350 \times 4 \times 2}{100} = 188 \text{ złr. prowizyi.}$$

2) Ile jest prowizyi od 785 złr. 45 kr. po $4\frac{1}{2}\%$ za lat $3\frac{1}{4}$?

$$\begin{array}{r|l} 100 & 785\frac{3}{4} \\ & 4\frac{1}{2} \\ & 3\frac{1}{4} \end{array}$$

Odpowiedź: 114 złr. 55 kr.

3) Ile jest prowizyi od 3215 złr. 18 kr. po $5\frac{3}{4}\%$ za 2 lata i 7 miesięcy?

$$\begin{array}{r|l} 100 & 3215\frac{3}{10} \\ & 5\frac{3}{4} \\ & 2\frac{7}{12} \end{array}$$

Odpowiedź: 485 złr. 56 kr.

4) Kapitał 5844 złr. umieszczony przez $3\frac{1}{2}$ lat po $4\frac{1}{3}\%$, ile przyniesie prowizyi? — 886 złr. 20 kr.

5) Ile jest prowizyi od 3105 złr. 54 kr. po 5% za 2 lata i 1 miesiąc?

6) Obliczyć prowizyę od 2777 złr. po $4\frac{3}{4}\%$ za $1\frac{5}{6}$ roku.

7) Dano na procent dwa kapitały: jeden 3580 złr. po $5\frac{1}{4}\%$ na 1 rok i 9 miesięcy; drugi $2895\frac{1}{2}$ złr. po 6% na 2 lata i 4 miesiące. Który z tych kapitałów przyniósł więcej prowizyi i o ile więcej od drugiego?

§. 56.

Prościej jeszcze aniżeli za pomocą metody przekreślania, wynajduje się prowizyę według następujących zasad, których prawdziwość sama z siebie wypływa:

1. Prowizyę *za rok jeden* wynajduje się według rachunku procentowego, mnożąc kapitał przez procent, a iloczyn dzieląc przez 100.

2. Prowizyę za *więcej niż rok jeden* wynajduje się, mnożąc prowizyę za jeden rok przez liczbę lat.

3. Gdy w zadanie wchodzą *miesiące i dnie*, rachuje się wtedy za pomocą części wielokrotnych *(wälsche Praktik)*; w takim razie rozkłada się miesiące na części wielokrotne roku, i bierze się takie same części wielokrotne z prowizyi rocznej; dnie zaś rozkłada się na części wielokrotne miesiąca, i bierze się takie same części wielokrotne z prowizyi miesięcznej. Wszystkie te kwoty dodaje się potem do prowizyi za całe lata obrachowanej.

P r z y k ł a d y.

1) Obliczyć prowizyę roczną

od 3124 złr. po 5%.
156·20 = 156 złr. 12 kr.

od 3578 złr. 15 kr. po 6%.
3578·25
214·6950 = 214 złr. 42 kr.

od 3800 złr. po 4%.
152 złr.

od 9·57 złr. po $4\frac{1}{3}\%$.
38·28
3·19
41·47 = 41 złr. 28 kr.

2) Ile jest prowizyi od

2183 złr. po 4% za 3 lata?
87·32 złr. za 1 rok
261·96 złr. za 3 lata
Odpowiedź: 261 złr. 58 kr.

14788 złr. po $5\frac{1}{4}\%$ za 4 lata?
739·40
36·97
776·37 złr. za 1 rok
3105·48 złr. za 4 lata
Odpowiedź: 3105 złr. 29 kr.

3) Kapitał 2848 złr. dany na 5% na lat 3 i miesięcy 4, ile przyniesie prowizyi?

2848 złr. po 5% na lat 3 i miesięcy 4

142·40 złr. za 1 rok

427·2 złr. za 3 lata

47·467 złr. za 4 miesiące = $^1/_3$ roku

474·667 złr. = 474 złr. 40 kr.

4) Ile jest prowizyi od 5244 złr. 33 kr. po $5^1/_4$% za 3 lata 5 miesięcy i 20 dni?

5244·55 po $5^1/_4$% za 3 lat 5 miesięcy i 20 dni

26222·75

1311·14

275·3389 za 1 rok

826·0167 za 3 lata
91·7796 „ 4 miesiące = $^1/_3$ roku
22·9449 „ 1 miesiąc = $^1/_4$ czterech miesięcy
7·6483 „ 10 dni = $^1/_3$ miesiąca
7·6483 „ 10 dni

956·0378 = 956 złr. 2 kr.

5) Kapitał 8425 złr. 18 kr. leżąc przez 4 lat i 11 miesięcy na $4^1/_2$% ile uczyni prowizyi? — 1864 złr. 5 kr.

6) Ile prowizyi jest od 2514 złr. 57 kr. po 5% za 5 lat 8 miesięcy i 26 dni? — 721 złr. 39 kr.

7) Kapitał 3457 złr. dany na $4^1/_2$% na 2 lata 7 miesięcy i 18 dni, ile przyniesie prowizyi? — 409 złr. 39 kr.

8) Jak wiele jest prowizyi od 724 złr. po $4^3/_4$% za 4 lat 11 miesięcy i 27 dni? — 171 złr. 40 kr.

Obliczyć także prowizyę:

9) Od 9007 złr. 40 kr. po 5% za 10 miesięcy.

10) Od 1133 złr. 20 kr. po $4^5/_8$% za 3 lata i 1 miesiąc.

11) Od 950·235 złr. po $4^1/_2$% za 2 lata 11 miesięcy i 17 dni?

12) Od 7185 złr. 49 kr. po $4^3/_4$% za 3 lata 7 miesięcy i 12 dni.

13) Od 1019·38 złr. po $5^1/_8$% za 9 miesięcy i 21 dni.

14) Od 3407 złr. 5 kr. po 6% za 1 rok 2 miesiące i 7 dni.

§. 57.

Jeźli prowizya, jak to często się trafia, *tylko za pewną liczbę dni* ma być obrachowana, w takim razie zwykło się oznaczyć naprzód prowizyę po 6%, i z otrzymanego wypadku wykryć prowizyę do jakiegobądź innego procentu odnoszącą się, robiąc obrachunek za pomocą części wielokrotnych.

Aby wskazać jak się postępuje w obliczaniu prowizyi po $6\%_0$, rozwiążmy następujący przykład:

Dano Kapitał 2345 złr. na $6\%_0$, jakaż będzie prowizya od tego kapitału za dni 137?

Według reguły trzech złożonej jest:

x złr. prow. 2345 złr. kap. 137 dni, $\quad x : 6 = 2345 : 100$
6 „ „ 100 „ „ 360 „ $\quad\quad 137 : 360$

$$\text{zatem } x = \frac{2345 \times 137 \times 6}{36000} = \frac{2345 \times 137}{6000}.$$

A tak:

Prowizyę po $6\%_0$ na dni wynajduje się, mnożąc kapitał przez liczbę dni, a iloczyn dzieląc przez 6000; to zaś dzielenie odbywa się naprzód przez 1000, potem przez 6.

Krajcary należące do kapitału wypuszcza się zwykle z rachunku, jednak gdy jest 30 kr. lub więcej niż 30 kr., wtedy liczbę złotych-reńskich w kapitale bierze się o 1 większą; albo też chcąc większą zachować dokładność, zamienia się krajcary na dziesiętne złotego-reńskiego.

P r z y k ł a d y.

1) Ile prowizyi po $6\%_0$ jest od 2790 złr. za 85 dni?

2790 × 85
22320
237·150 : 6000
: 6
39·525 = 39 złr. 32 kr.

2) Jak wiele jest prowizyi po $6\%_0$ od 2349 złr. 15 kr. za 182 dni?

Wypuszczając krajcary,	Dokładnie.
2349 × 182	2349·25 × 182
18792	1879·400
427·518	427·55350
71·253 = 71 złr. 15 kr.	71·2589 = 71 złr. 16 kr.

3) Ile jest prowizyi po $6\%_0$ od 758 złr. od 13. Kwietnia do ostatniego Grudnia?

Od 13. Kwiet. do 13. Grud. jest 8 miesięcy = 240 dni
„ 13. Grud. „ 30. „ „ 17 „
razem 257 dni.

758 × 257
1516
3790
194·806
32·468 = 32 złr. 28 kr.

4) Jak wielka jest prowizya od kapitału 3572 złr. danego na 6% na dni 217? — 129 złr. 11 kr.

5) Ile jest prowizyi od 2350 złr. 47 kr. po 6% za dni 17? — 6 złr. 40 kr.

6) Obliczyć prowizyę od 1265 złr. po 4% za dni 231.

1265 × 231
3795
202·215 KTO
48·702 po 6% K KTO
mniej 16·234 po 2% = $\frac{1}{3}$ z 6%.
32·468 po 4%. Odpowiedź: 32 złr. 28 kr.

7) Jaka jest prowizya od 3402 złr. 9 kr. po 7¼% za dni 125?

3402 × 125
425·250
70·875 po 6%
11·812 „ 1%
2.953 „ ¼%
85·640 = 85 złr. 38 kr.

8) Ile jest prowizyi po 5% od 9110 złr. od 2. Maja do 15. Października?

od 2. Maja do 2. Paźd. 150 dni
„ 2. Paźd. „ 15. „ 13 „
163 dni.

9110 × 163
54660
1484·930
247·488 po 6%
— 41·248 „ 1%
206·240 = 206 złr. 14 kr.

9) Ile jest prowizyi od 9217 złr. po 3% za dni 174? — 133 złr. 39 kr.

10) Ile wypada prowizyi od 8635 złr. 25 kr. po 4½% za dni 223? — 240 złr. 43 kr.

11) Ile prowizyi daje kapitał 12425 złr. 18 kr. po 4% od 1. Sierpnia do 5. Kwietnia?

12) Jaka wypada prowizya od 4286 złr. 42 kr. po 5% od 18. Grudnia do 15. Kwietnia?

13) Ktoś ma dostać:
prowizyę od 3045 złr. po 6% za dni 233,
„ „ 2813 „ „ 5% od 17. Kwiet. do 22. Wrześ.,
„ „ 4008 „ „ 4¾% od 24. Maja do 7. Sierp.;
ileż tedy wszystkiej prowizyi dostanie?

14) Osoba A ma płacić osobie B:

dnia	13.	Kwietnia	387 złr.	17 kr.
„	25.	Maja	1245 „	38 „
„	2.	Czerwca	2008 „	48 „

Nawzajem zaś osoba B ma płacić osobie A:

dnia	20.	Kwietnia	1533 złr.	33 kr.
„	15.	Maja	2112 „	8 „
„	20.	„	972 „	15 „

Po rozrachunku na dniu 30. Czerwca odbytym, ileż osoba B pozostaje winna osobie A, licząc prowizyę po 5%?

2. Obliczenie kapitału.

§. 58.

Mamy np. dojść: jak wielki jest kapitał, który dany na 5% przyniesie w 3 latach 519 złr. prowizyi? — Rozwiązując to przez regułę trzech złożoną, będzie:

x złr. kap. 3 lat 519 złr. prow., x : 100 = 1 : 3
100 „ „ 1 rok 5 „ „ 519 : 5

$$\text{zatem } x = \frac{519 \times 100}{5 \times 3} = 3460 \text{ złr.}$$

A tak:

Aby wynaleść kapitał, trzeba prowizyę stokrotnie wziętą podzielić przez iloczyn z procentu i lat.

P r z y k ł a d y.

1) Jakito jest kapitał, który dany na 4% przyniesie w 4 latach 448 złr. prowizyi?

$$\frac{448 \times 100}{4 \times 4} = 2800 \text{ złr.}$$

2) Ktoś dawszy swój kapitał na 6%, dostał od niego za $5\frac{1}{4}$ lat 948 złr. prowizyi. Jakiż jest ten kapitał?

$$\begin{array}{r|l} 6 & 948 \\ 5\frac{1}{4} & 100. \end{array}$$

Odpowiedź: 3009 złr. 31 kr.

3) Jaki to jest kapitał, który po $5\frac{1}{2}$% rocznie, daje prowizyi 202 złr. 24 kr.?

$$\begin{array}{r|l} 5\frac{1}{2} & 202\frac{2}{5} \\ & 100. \end{array}$$

Odpowiedź: 3680 złr.

4) Właściciel kamienicy, który ma z niej rocznie (średnio) czystego dochodu 586 złr., chce ją sprzedać po 5%, to jest tak, aby

za każdych 5 złr. czystego dochodu wziął w cenie sprzedaży 100 złr. Jaki kapitał musi dostać za swoją kamienicę?

5) Jakito jest kapitał, który po $4\frac{1}{2}\%$ przynosi w 1 roku i 4 miesiącach 324 złr. prowizyi?

6) Jak wielki ma być kapitał, aby po $5\frac{1}{4}\%$ dał w $2\frac{3}{5}$ latach $738\frac{3}{4}$ złr. prowizyi?

7) Jaki kapitał pożyczyć trzeba na $5\frac{1}{2}\%$, aby za 1 rok i 9 miesięcy przyniósł prowizyi 248 złr. 35 kr.?

3. Obliczenie czasu.

§. 59.

Mamy oznaczyć czas przez który np. kapitał 1925 złr. ma być wypożyczony na 5%, aby przyniósł 385 złr. prowizyi. — Według reguły trzech złożonej, jest:

x lat 1925 złr. kap. 385 złr. prow., x : 1 = 100 : 1925
1 rok 100 „ „ 5 „ „ 385 : 5

$$\text{zatem } x = \frac{385 \times 100}{1925 \times 5} = 4 \text{ lat.}$$

A tak:

Aby wynaleść liczbę lat, trzeba prowizyę 100krotnie wziętą podzielić przez iloczyn z kapitału i procentu.

P r z y k ł a d y.

1) Jak długo musi kapitał 2480 złr. leżyć na 6%, aby przyniósł 744 złr. prowizyi.

$$\frac{744 \times 100}{2480 \times 6} = 5 \text{ lat.}$$

2) Ile trzeba na to czasu, aby od kapitału 5737 złr. 33 kr. na $5\frac{1}{2}\%$ pożyczonego, mieć 1814 złr. 30 kr. prowizyi?

$$\begin{array}{r|l} 5737\frac{11}{20} & 1814\frac{1}{2} \\ 5\frac{1}{2} & 100. \end{array}$$ Odpowiedź: $5{\cdot}75 = 5\frac{3}{4}$ lat.

3) Jak długo mają być na procencie $9824\frac{1}{3}$ złr., aby po $5\frac{1}{8}\%$ przyniosły 1132 złr. 49 kr. prowizyi?

$$\begin{array}{r|l} 9824\frac{1}{8} & 1132\frac{49}{60} \\ 5\frac{1}{8} & 100. \end{array}$$ Przez $2{\cdot}2499$ lat = 2 lat 2 mies. 29 dni.

4) Kapitał 5212 złr. 40 kr. dany na $5\frac{1}{4}\%$ przyniósł prowizyi 712 złr. 48 kr. Przez jakiż czas leżał ten kapitał na procencie? — Przez 2 lata 7 miesięcy i 8 dni.

5) Od kapitału 9421 złr. 17 kr. umieszczonego na $4\frac{1}{2}\%$ w jakim czasie mieć można prowizyi 269 złr. 45 kr.?

6) W jakim czasie od 3855 złr. 40 kr. pożyczonych na $5\frac{1}{2}\%$ można mieć 721 złr. prowizyi?

7) Jak długo kapitał 1237 złr. 30 kr. musi leżyć na 6%, aby dał prowizyi 84 złr. 9 kr.?

4. Obliczenie procentu.

§. 60.

Mając np. wyrachować na ile % musi być dany kapitał 8000 złr., aby w 3 latach przyniósł prowizyi 960 złr., postępuje się według reguły trzech złożonej tak:

x złr. prow.	100 złr. kap.	1 rok		$x : 960 = 100 : 8000$
960 „ „	8000 „ „	3 lat		$1 : 3$

$$\text{więc } x = \frac{960 \times 100}{8000 \times 3} = 4.$$

A tak:

Aby wynaleść procent, trzeba prowizyę 100krotnie wziętą podzielić przez iloczyn z kapitału i lat.

P r z y k ł a d y.

1) Na ile % trzeba umieścić kapitał 3445 złr., aby za lat 4 mieć od niego 689 złr. prowizyi?

$$\text{Na } \frac{689 \times 100}{3445 \times 4} = 5\%.$$

2) Kapitał 5500 złr. daje prowizyi 330 złr. rocznie; ileż to czyni %?

$$\frac{330 \times 100}{5500} = 6\%.$$

3) Ile % przynosi kapitał 4755 złr. 15 kr., jeżeli za 3 lata i 3 miesiące jest od niego 850 złr. prowizyi?

$$\begin{array}{r|l} 4755\frac{1}{4} & 850 \\ 3\frac{1}{4} & 100. \end{array}$$ Odpowiedź: $5\frac{1}{2}\%$.

4) Na ile % umieszczony jest kapitał 4585 złr. 31 kr., jeźli od niego jest za $3\frac{1}{4}$ lat $844\frac{1}{2}$ złr. prowizyi? — Na $5\frac{2}{3}\%$.

5) Ktoś płaci od dukata (cesarskiego) miesięcznie 3 kr. prowizyi; ileż % uczyni to? — $13\frac{1}{3}\%$.

6) Na ile % umieszczony był kapitał 6800 złr., jeżeli za 2 lata 4 miesiące i 12 dni dał prowizyi 844 złr. 54 kr.?

7) Kapitał 3150 złr. przyniósł za 8 miesięcy $73\frac{1}{2}$ złr. prowizyi; na ileż % był umieszczony?

Rachunek terminu.

§. 61.

Z warunków ugody między dłużnikiem a wierzycielem wypada nieraz, iż dług nie od razu lecz częściowo, w pewnych umówionych odstępach czasu czyli *terminach* ma być spłacony. Trafia się wszakże czy na żądanie dłużnika czy wierzyciela, czy też za wspólnem porozumieniem się, iż wbrew pierwotnej umowie cały dług naraz zwrócić wypada, przyczem wszakże idzie o to, aby jedna strona nie miała korzyści ze szkodą drugiej. Czas ten, w którym suma od razu ma być zapłaconą bez żadnej tak dla dłużnika jak i dla wierzyciela straty, zowie się *terminem średnim* (mittlere Termin), a rachunek za pomocą którego termin ten wynajduje się *rachunkiem terminu* (Terminrechnung).

Następujący przykład doprowadzi do wskazania prawidła w rachunkach tego rodzaju:

Dług 6000 złr. obowiązał się ktoś zwrócić w trzech spłatach częściowych, jakoto: 2000 złr. za 2 miesiące, 2500 złr. za 4 miesiące, a 1500 złr. za 10 miesięcy; chce jednakże cały ten dług naraz spłacić; idzie o to, kiedy to ma uskutecznić?

Według umowy ma dłużnik przy spłacie częściowej tę korzyść, iż używa prowizyę od 2000 złr. przez 2 miesiące, od 2500 złr. przez 4 miesiące, a od 1500 złr. przez 10 miesięcy. Aby więc płacąc cały dług naraz, żadnej nie poniósł szkody, musi sobie całą tę prowizyę potrącić. Zadanie więc wychodzi właściwie na to: W ilu (x) miesiącach kapitał 6000 złr. jako suma wszystkich częściowych spłat da tyle prowizyi, ile jej dają wszystkie oddzielne częściowe spłaty na swoich terminach?

Że zaś

$$\left.\begin{array}{l}\underline{6000}\text{ złr. kap. w } x \text{ mies.}\\ 2000 \text{ „ „ „ } 2 \text{ „}\\ 2500 \text{ „ „ „ } 4 \text{ „}\\ 1500 \text{ „ „ „ } 10 \text{ „}\end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{dają tyle}\\ \text{prowizyi}\\ \text{ile}\end{array} \left\{\begin{array}{l}\underline{6000} \times x \text{ kap. w 1 mies.}\\ 2000 \times 2 \text{ „ „ 1 „}\\ 2500 \times 4 \text{ „ „ 1 „}\\ 1500 \times 10 \text{ „ „ 1 „}\end{array}\right.$$

przeto prowizya od kapitału $6000 \times x$ za 1 miesiąc musi tyle wynosić, ile w ogóle czyni prowizya od kapitału $2000 \times 2 = 4000$, $2500 \times 4 = 10000$, $1500 \times 10 = 15000$ także za 1 miesiąc; że zaś w obu razach czas jest tenże sam, a procent także jednakowy przypuszczać należy, zatem pierwszy kapitał musi być równy sumie trzech ostatnich kapitałów, to jest

$$6000 \times x = 29000.$$

Gdy zaś wiadomy nam jest iloczyn z dwóch czynników i prócz tego jeden z tych czynników, wynajdziemy drugi czynnik, dzieląc iloczyn przez wiadomy czynnik. Otrzymamy więc średni termin x, gdy 29000 t. j. sumę iloczynów z wszystkich spłat częściowych przez odpowiedne czasy, podzielimy przez 6000 t. j. przez sumę wszystkich spłat częściowych; jest bowiem $x = \frac{29000}{6000} = 4^5/_6$ miesięcy.

Wypływa ztąd dla *rachunku terminu* następujące *prawidło:*

1. Pomnożyć każdą częściową spłatę przez czas w którym ma być uskutecznioną;

2. Otrzymane ztąd iloczyny dodać do siebie, i sumę tę podzielić przez sumę spłat częściowych; na iloraz wypadnie termin średni.

P r z y k ł a d y.

1) Suma 10000 złr. ma być spłacona w 4 ratach, jakoto: 3000 złr. za 4 miesiące, 2500 złr. za 6 miesięcy, 2000 złr. za 8 miesięcy, a reszta 2500 złr. po 1 roku; chcąc całą tę sumę naraz złożyć, kiedyż to ma nastąpić?

3000	złr.	za	4	mies.	=	12000
2500	„	„	6	„	=	15000
2000	„	„	8	„	=	16000
2500	„	„	12	„	=	30000
10000						7·3000 = 7 miesięcy 9 dni.

Wypada więc całą naraz sumę zapłacić za 7 miesięcy i 9 dni

Aby się o prawdziwości tego przekonać, zastanówmy się czy dłużnik płacąc całą sumę naraz, ma tę samą korzyść, jakąby miał gdyby ratami spłacał. Do tego celu przyjmijmy jakąbądź prowizyę np. 5%, a okazuje się iż

dłużnik płacąc ratami ma w korzyści

prowizyę	od	3000	złr.	przez	4	mies.	=	50	złr.	—	kr.	50
„	„	2500	„	„	6	„	=	62	„	30	„	66
„	„	2000	„	„	8	„	=	66	„	40	„	416
„	„	2500	„	„	12	„	=	125	„	—	„	
						razem		304	złr.	10	kr.	

Przy spłaceniu zaś naraz całej sumy 10000 złr. po 7 miesiącach i 9 dniach dłużnik ma także w korzyści prowizyę 304 złr. 10 kr. Gdy więc przy tym sposobie spłacenia dłużnik nie ma ani korzyści ani szkody, jasna rzecz iż także i wierzyciel nic przy tem nie zyskuje ani traci.

2) Ktoś zobowiązał się zapłacić 12000 złr. natychmiast, 9000 złr. za 4 miesiące, 9000 złr. za 8 miesięcy, 9000 złr. za 12 miesięcy, a 9000 złr. za 16 miesięcy. Chcąc całą tę sumę naraz zapłacić, kiedyżby to uczynić musiał?

$$\begin{array}{r@{\;\times\;}r|r@{\;\times\;}r@{\;=\;}r}
12\cancel{000} & 0 & 4 & 0 & 0 \\
9\cancel{000} & 4 & 3 & 4 & 12 \\
9\cancel{000} & 8 & 3 & 8 & 24 \\
9\cancel{000} & 12 & 3 & 12 & 36 \\
9\cancel{000} & 16 & 3 & 16 & 48 \\
\hline
\multicolumn{2}{r|}{} & 16 & \multicolumn{1}{r}{} & 120
\end{array}$$

$120 : 16 = 7^1/_2$. — Odpowiedź: za $7^1/_2$ miesięcy.

Ponieważ dane ilości pieniężne mają spólną miarę, można je skrócić, dzieląc naprzód przez 1000 a następnie przez 3.

3) Ktoś winien jest spłacić dług 20000 złr. w ten sposób, aby wierzycielowi złożył 4000 złr. zaraz, 4000 złr. za 3 miesiące, 5000 złr. za 6 miesięcy, a resztę za 10 miesięcy. Wierzyciel przystaje na to aby cały dług naraz został zapłacony; w jakimże czasie musi to nastąpić?

$$\begin{array}{rr@{\;\times\;}r@{\;=\;}l}
 & 4\cancel{000} & 0 & 0 \\
 & 4\cancel{000} & 3 & 12 \\
 & 5\cancel{000} & 6 & 30 \\
\text{reszta} & \underline{7\cancel{000}} & 10 & \underline{70} \\
 & 20 & & 112 : 20 = 5{\cdot}6.
\end{array}$$

Za 5 miesięcy i 18 dni.

4) Ktoś kupuje rolę za 6000 złr., z którejto sumy ma zapłacić 1500 złr. za 4 miesiące, 1000 złr. za 6 miesięcy, 2000 złr. za 9 miesięcy, a resztę za rok. W jakimże czasie może całą sumę naraz złożyć, aby przytem tak kupujący jak sprzedający nie mieli ani zysku ani straty? — Za 8 miesięcy.

5) Za jaki czas wypadnie zapłacić naraz 1800 złr., mając obowiązek spłacenia 300 złr. za rok, 400 złr. za $1^1/_4$ roku, 500 złr. za $2^1/_2$ lat, a resztę za $3^1/_3$ lat, bez żadnej prowizyi?

6) Ktoś ma zapłacić 1000 złr. natychmiast, 1050 złr. za 2 miesiące, 1100 złr. za 4 miesiące, 1150 złr. za 6 miesięcy, 1200 złr. za 8 miesięcy, 1250 złr. za 19 miesięcy. Chcąc zamiast uiszczenia się na tych terminach cały dług naraz spłacić, kiedyżby to uczynić musiał?

III. Reguła spółki.

§. 62.

Reguła spółki (Gesellschaftsrechnung) służy do rozwiązywania takich zadań, w których idzie o rozdzielenie jakiej liczby na kilka części w ten sposób, aby te części miały się do siebie w pewnym oznaczonym stosunku. Liczby wyrażające ten stosunek nazywamy *liczbami stosunkowemi* (Verhältnisszahlen).

Np. do prowadzenia pewnego handlu składa się trzy osób; A daje na ten cel 8500 złr., B 9800 złr., C 10000 złr. Gdy zysk z tego handlu przyniósł 3400 złr., ileż z tego przypadnie na każdą osobę? — Tutaj trzeba zysk rozdzielić w stosunku do wkładek; przeto zadanie to należy do reguły spółki, a wkładki 8500, 9800, 10000 stanowią liczby stosunkowe.

Gdy w zadaniu jest tylko *jeden rząd* (Reihe) liczb stosunkowych, wtedy regułę spółki nazywamy *pojedynczą* (einfache); jeźli zaś w zadanie wchodzi *więcej rzędów* liczb stosunkowych, dajemy tej regule nazwisko *złożonej* (zusammengesetzte).

Reguła spółki ma swoje zastosowanie w stowarzyszeniach han dlowych do rozdzielenia zysku, w bankructwach, w spadkach majątkowych, przy rozdzielaniu podatków, przy robieniu mieszanin, i w rozmaitych innych potrzebach.

§. 63.

Dla rozwinięcia zasad pojedynczej reguły spółki, rozwiążemy następujące zadanie:

Trzy osoby wchodzą w spółkę handlową, i tak: A daje 2800 złr., B 3600 złr., a C 4000 złr. Zyskują razem 1300 złr.; ileż należy się każdej z tego zysku?

Tutaj zysk powinien być rozdzielony w stosunku do wkładek; zatem liczbami stosunkowemi są 2800, 3600, 4000. Że zaś stosunek wzajemny kilku liczb nie zmienia się, gdy każdą z nich pomnożymy lub podzielimy przez jednę i tę samę liczbę; zatem skróciwszy powyższe liczby przez 100, będziemy mieli 28, 36, 40; te zaś liczby skróciwszy jeszcze przez 4, otrzymamy 7, 9, 10, jako najprostsze już liczby stosunkowe. Cały więc zysk 1300 złr. musi być tak rozdzielony, aby z niego na osobę A przypadło 7, na B 9, a na C 10, czyli na wszystkie razem 26 równych części; zatem cały ten zysk 1300 złr. podzieliwszy przez 26 jako sumę wszystkich liczb stosunkowych, iloraz 50 złr. da jednę taką część; ale że A ma dostać części takich 7, B 9, C 10, wypada jeszcze te 50 złr. pomnożyć przez każdą liczbę stosunkową; a tak

$50 \times 7 = 350$ złr. zyskuje A,
$50 \times 9 = 450$ „ „ B,
$50 \times 10 = 500$ „ „ C;
1300 złr. zysk cały.

Zatem

W pojedynczej regule spółki następujących trzymać się trzeba *prawideł:*

1. Liczby stosunkowe napisać jednę pod drugą. Jeżeli te liczby są ułomkami, pomnożyć je wszystkie przez najmniejszy mianownik spólny; gdy zaś wszystkie liczby stosunkowe mają jaką spólną miarę, wtedy skrócić je przez nią.

2. Uprościwszy liczby stosunkowe ile być może, dodać je do siebie.

3. Liczbę do rozdzielenia daną podzielić przez sumę liczb stosunkowych, a otrzymany iloraz pomnożyć przez każdą z kolei liczbę stosunkową; iloczyny jakie z tego wypadną, są to części szukane.

Przykłady i zadania.

1) Proch strzelniczy składa się: z 75 części saletry, 13 części węgla i 12 części siarki; ileż trzeba wziąć każdego z tych materyałów, aby mieć 800 funtów prochu?

Saletry 75;	$8 \times 75 = 600$	funtów
Węgla 13;	$8 \times 13 = 104$	„
Siarki 12;	$8 \times 12 = 96$	„
$800 : 100 = 8$	800	funtów.

2) Pomiędzy osoby A, B, C, D rozdzielić 5610 złr. w stosunku liczb $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$.

		12		
A	$\frac{1}{2}$	6	$170 \times 6 = 1020$	złr. dostanie A
B	$\frac{2}{3}$	8	$170 \times 8 = 1360$	„ „ B
C	$\frac{3}{4}$	9	$170 \times 9 = 1630$	„ „ C
D	$\frac{5}{6}$	10	$170 \times 10 = 1700$	„ „ D
$5610 : 33 = 170$			5610	złr. razem.

231
00

3) Cztery osoby składają się na pewne przedsiębiorstwo, tak, iż A daje 4500 złr., B 5400 złr., C 6000 złr., D 9600 złr. Zyskał przytem w ogóle 4248 złr.; jakżeż się tym zyskiem podzielą

A 4500	15 × 49·9765	=	749·647	złr.	=	749	złr.	39 kr.
B 5400	18 × 49·9765	=	899·577	„	=	899	„	34 „
C 6000	20 × 49·9765	=	999·530	„	=	999	„	32 „
D 9600	32 × 49·9765	=	1599·248	„	=	1599	„	15 „
4248 :	8·5	= 49·9765	4248·002	złr.		4348	złr.	— kr.

848
830
650
550
40

4) Trzy gminy mają kosztem spólnym zbudować most za 5241 złr. 21 kr. Odległość tego mostu od gminy A jest 1 mila, od gminy B 2 mil, od gminy C 3 mil. Sumy od tych gmin złożyć się mające, mają być w stosunku odwrotnym ich oddalenia od mostu, zatem według liczb stosunkowych 1, $^1/_2$, $^1/_3$. Ileż więc przypada na każdą gminę

	6							
A 1	6 × 476·486	=	2858·916	złr.	=	2858	złr.	55 kr.
B $^1/_2$	3 × 476·486	=	1429·458	„	=	1429	„	28 „
C $^1/_3$	2 × 476·486	=	952·972	„	=	952	„	58 „
5241·35 :	11	= 476·4863				5241	złr.	21 kr.

5) Pewien powiat ma cztery gminy, z których gmina A płaci podatku 2845 złr. 28 kr., B 1748 złr. 37 kr., C 2109 złr. 29 kr., D 3019 złr. 53 kr. Gdy na ten powiat nałożoną została prócz tego suma 845 złr. i to w stosunku do podatku jaki płacą gminy, ileż przyczyni się każda gmina do tej sumy?

A 2845	złr.	28	kr.	=	2845·467 złr.
B 1748	„	37	„	=	1748·617 „
C 2106	„	29	„	=	2106·483 „
D 3019	„	53	„	=	3019·883 „

845 : 9720·450 = 0·0869301.

Przypada więc do zapłacenia:

na A	0·0869301 × 2845·467	=	247·357	złr.	=	247	złr.	22 kr.
B	0·0869301 × 1748·617	=	152·007	„	=	152	„	— „
C	0·0869301 × 2106.483	=	183·117	„	=	183	„	7 „
D	0·0869301 × 3019·883	=	262·519	„	=	262	„	31 „
						845	złr.	— kr.

6) Kupiec, który jest winien osobie A 7845 złr., B 10824 złr., C 8305 złr., D 15234 złr., E 4211 złr., zbankrutował. W ja-

kiej mierze podzielą się ci wierzyciele pozostałością majątkową, wynoszącą 21428 złr. 37 kr.? — A weźmie 3621 złr. 31 kr., B 4996 złr. 44 kr., C 3833 złr. 52 kr., D 7032 złr. 33 kr., E 1943 złr. 57 kr.

7) Ktoś zostawia po sobie 15845 złr. majątku dla trzech spadkobierców, z warunkiem aby A wziął 2 razy tyle co B., a B 3 razy tyle co C. Ileż dostanie każdy? — Na każdy 1 złotyreński przypadający na spadkobiercę C, ma dostać B 3 złr., zaś A 6 złr.; zatem działy A, B, C są z sobą w stosunku 6 : 3 : 1, tak iż A dostanie 9507 złr., B 4753 złr. 30 kr., C 1584 złr. 30 kr.

8) Za dostawę 2133 funtów kawy, 1735 funtów cukru i 923 funtów pieprzu należy się w ogóle 65 złr. 18 kr.; ileż z tego przypada oddzielnie na każdy z tych artykułów?

9) Do zrobienia dobrego atramentu czerwonego rachuje się na 1 kwartę octu winnego, $1\frac{1}{4}$ łuta ałunu, $10\frac{1}{2}$ łutów fernambuku, $1\frac{3}{4}$ łuta gumy arabskiej. Chcąc zrobić atrament czerwony z 2 funtów i 17 łutów tej suchej mieszaniny, ileż potrzeba będzie wziąć każdej z trzech ostatnich ingredyencyj, a ile octu winnego przydać do tego?

10) Z przedsiębiorstwa na które osoba A dała 3240 złr., osoba B 1827 złr., C 2380 złr., D 3185 złr., wypadł zysk $581\frac{1}{2}$ złr.; ileż z tego zysku przypada na każdą z tych czterech osób?

11) Liczbę 3555 podzielić w stosunku liczb $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{7}$, 1.

12) Do robienia porcelany bierze się 25 części glinki, 2 części krzemionki i jedna część gipsu; ileż wypada wziąć każdej z tych części składowych na masę porcelany 105 funtów.

13) Na pewne przedsiębiorstwo daje osoba A 1250 złr., B 2000 złr., C 2750 złr., D 3000 złr. Gdy z tego wypadło 1260 złr. zysku, a osoba A prócz swego stosownego udziału dostaje za szczególną w tem przedsiębiorstwie gorliwość jeszcze 5% zysku, — ileż przypada na każdą?

§. 64.

W złożonej regule spółki, w którą wchodzi kilka rzędów liczb stosunkowych, części pojedyncze zależą od iloczynów liczb stosunkowych odnośnych; przezco każde zadanie złożonej reguły spółki zamienić się daje na zadanie pojedynczej reguły spółki.

Tak np. jeźli do spółki handlowej daje osoba A 13000 złr. na 4 miesiące, a B 10000 złr. na 6 miesięcy, zysk zaś **wypadł 5000 złr.**, trzeba go rozdzielić w stosunku wkładek i zarazem w stosunku czasu. Że zaś na jedno wychodzi czy

A zostawia 13000 złr. przez 4 miesięcy,
B „ 10000 „ „ 6 miesięcy;

czyli też gdy

A zostawia 13000 $\times$ 4 = 52000 złr. przez 1 miesiąc,
B „ 10000 $\times$ 6 = 60000 „ „ 1 miesiąc;

zatem w obu razach osoby A i B podzielą się zyskiem w tej samej mierze. Ponieważ zaś w drugim razie czas przez który pieniądze każdej leżały w handlu jest ten sam, wypada więc aby się podzieliły zyskiem w stosunku wkładek (do tego samego czasu przywiedzionych), to jest w stosunku iloczynów 52000 i 60000; te zaś liczby są to liczby stosunkowe pojedynczej reguły spółki.

A tak

w *złożonej regule spółki* następujących trzymać się należy *prawideł:*

1. Liczby stosunkowe do tej samej części odnoszące się, napisać obok siebie.

2. Liczby stosunkowe stojące obok siebie rozmnożyć jedne przez drugie.

3. Otrzymane iloczyny uważać tak samo jak liczby stosunkowe pojedynczej reguły spółki, według czego więc dalsze rozwiązanie zadania nastąpi.

P r z y k ł a d y i z a d a n i a.

1) Ugodzono się z furmanem zapłacić mu 112 złr. za odstawę trzech pakunków, mianowicie: 24 cetnarów o mil 15, 30 cetnarów o mil 20, i 26 cetnarów o mil 25. Ileż mu się należy za każdy z osobna ładunek?

24 $\times$ 15	360;	0·69565 $\times$ 36 = 25·043 złr.	= 25 złr.	3 kr.
30 $\times$ 20	600;	0·69565 $\times$ 60 = 41·739 „	= 41 „	44 „
26 $\times$ 25	650;	0·69565 $\times$ 65 = 45·217 „	= 45 „	13 „
112 :	161 = 0·69565		112 złr.	— kr.

2) Trzy osoby zawiązują spółkę do pewnego przedsiębiorstwa; A daje 8200 złr. na 5 miesięcy, B 10500 złr. na 4 miesiące, C 12000 złr. na 3 miesiące. Przedsiębiorstwo przyniosło zysku 4520 złr.; jakżeż podzielą się spólnicy tym zyskiem? — A weźmie 1557 złr. 18 kr., B 1595 złr. 18 kr., C 1367 złr. 24 kr.

3) Do budowy mostu użyte były 3 gminy. Z gminy A pracowało 22 ludzi przez 10 dni po 9 godzin dziennie; z gminy B 18

ludzi przez 9 dni po 10 godzin dziennie; z gminy C 15 ludzi przez 5 dni po 12 godzin dziennie. Za całą robotę zapłacono 400 złr.; ileż z tego przypada na każdą gminę?

4) A zaczął z dniem 1 Stycznia pewne przedsiębiorstwo z kapitałem 8000 złr.; do tegoż przedsiębiorstwa przystąpił B na dniu 1 Maja z 5000 złr., a C na dniu 1 Lipca z 6000 złr. — Z końcem Grudnia okazał się zysk 1180 złr. 20 kr.; ileż z niego weźmie każdy z trzech spólników?

IV. Reguła połączenia czyli mięszaniny.

§. 65.

Reguły połączenia (Allegazionsrechnung) także *regułą mięszaniny* zwanej używa się wtedy, gdy idzie o wynalezienie stosunku, w jakim wziąć trzeba dwie lub więcej rzeczy jednego rodzaju a odmiennego gatunku, aby z nich zrobić mięszaninę pewnego gatunku średniego (Mittelgattung).

Np. Złotnik potrzebuje śrebra 13tej próby, a ma tylko śrebro czyste (t. j. 16tej próby) i śrebro 11tej próby; w jakim stosunku musi wziąć te dwa gatunki, aby otrzymał śrebro 13tej próby? Takie zadania rozwiązują się przez regułę połączenia.

Gatunek, który z przymieszania chce się otrzymać, musi być zawsze lepszym od najpośledniejszego, a pośledniejszym od najlepszego z gatunków do zmieszania z sobą branych. Woda używana do rozpuszczania wina, i miedź brana do przymieszki w metalach drogich, nie biorą się w żadnej wartości, czyli wartość ich kładzie się równą zero, i tylko ilość ich uwzględnia się.

W największej liczbie zadań wychodzi na to, iż przez regułę połączenia wynajduje się stosunek w jakim dane rzeczy zmieszać potrzeba, a dalsze rozwiązanie odbywa się przez regułę spółki.

§. 66.

Chcąc przez zmieszanie dwóch danych gatunków otrzymać gatunek średni, trzeba nadmiarem gatunku lepszego nad gatunek średni uzupełnić to, czego gatunkowi pośledniejszemu nie dostaje do gatunku średniego; im bardziej tedy gatunek pośledniejszy różni się od gatunku średniego, tem też więcej przybrać potrzeba do mieszaniny gatunku lepszego; zatem ilość gatunku lepszego czyli liczbę stosunkową mieszaniny odnoszącą się do gatunku lepszego stanowi różnica pomiędzy gatunkiem średnim a pośledniejszym. Również to, o ile gatunek lepszy więcej jest wart od gatunku średniego, musi być zrównane przez przydanie pośledniejszego; przeto tem więcej trzeba będzie tego gatunku pośledniejszego przybrać do mieszaniny, im bardziej gatunek lepszy różni się od średniego; ta więc różnica stanowi liczbę stosunkową mieszaniny, odnoszącą się do gatunku pośledniejszego.

Gdy więc idzie o zrobienie mieszaniny *z dwóch tylko gatunków*, aby z nich otrzymać pewien gatunek średni, trzeba następujące zachować *prawidło:*

1. Oba gatunki mające się z sobą zmieszać, napisać pod sobą, a po lewej stronie naprzeciw odstępu między napisanemi liczbami, umieścić gatunek średni.

2. Odjąć gatunek pośledniejszy od średniego, a wypadającą różnicę napisać po prawej stronie gatunku lepszego; potem odjąć gatunek średni od lepszego, i tę różnicę napisać po prawej stronie gatunku pośledniejszego. Te różnice są to liczby stosunkowe mieszaniny dla umieszczonych obok gatunków.

P r z y k ł a d y.

1) Chcąc dwa gatunki wina, jedno, którego kwarta na 20 kr., drugie na 48 kr. w ten sposób zmieszać, aby kwarta mieszaniny warta była 40 kr., w jakim stosunku trzeba wziąć te dwa wina z sobą?

$$40\ \begin{array}{c|c|l} 20 & 8 & 2. \\ \hline 48 & 20 & 5. \end{array}$$

Różnica między gatunkiem średnim 40 a pośledniejszym 20 jest 20, piszę więc te 20 obok gatunku lepszego 48; różnica między gatunkiem średnim 40 a lepszym 48 jest 8; te więc 8 piszę obok gatunku pośledniejszego 20. Zatem liczbami stosunkowemi mieszaniny są 8 i 20, lub króciej 2 i 5, to jest z gatunku pośledniejszego trzeba wziąć do mieszaniny 2 części, z lepszego zaś 5 takichże części. Gdyby się np. wzięło 10 kwart wina po 20 kr., to wina po 48 kr. należałoby wziąć kwart 25, gdyż z $x : 10 = 5 : 2$ wypada $x = 25$. Że kwarta tej mieszaniny jest w istocie warta 40 kr., przekonać się można z następującego rachunku:

10	kwart	po 20 kr.	=	200	kr.
25	„	„ 48 „	=	1200	„
35	kwart	mieszaniny		1400	kr.
zatem 1	kwarta	„		40	kr.

2) Kupiec chce dwa gatunki kawy, jeden na 40 złr. cetnar, drugi na 30 złr. cetnar, tak z sobą zmieszać, aby otrzymał 28 cetnarów, cetnar po 32 złr. Ileż cetnarów weźmie z każdego gatunku?

$$32\ \frac{40}{30}\left|\begin{matrix}2\\8\end{matrix}\right|\begin{matrix}1.\\4.\end{matrix}$$

Wypada więc 28 cetnarów rozdzielić w stosunku 1 : 4; jest zaś według reguły spółki:

$1;\quad 1 \times 5^3/_5 = 5^3/_5$ cetn. gatunku na 40 złr.
$4;\quad 4 \times 5^3/_5 = 22^2/_5$ „ „ „ 30 „

$28 : 5 = 5^3/_5$.

O prawdziwości tego przekona następujący rachunek:

$5^3/_5$ cetn. po 40 złr. $=$ 224 złr.
$22^2/_5$ „ „ 30 „ $=$ 672 „
28 cetn. 896 złr.
więc 1 cetn. 32 złr.

3) Winiarz ma dwojakie wino, jednego wiadro na 15 złr., drugiego na 24 złr.; chce zaś z zmieszania tych dwóch gatunków otrzymać 10 wiader po 21 złr. Ileż weźmie do tego z każdego gatunku?

$$21\ \frac{24}{15}\left|\begin{matrix}6\\3\end{matrix}\right|\begin{matrix}2 \times 3^1/_3 = 6^2/_3 \\ 1 \times 3^1/_3 = 3^1/_3\end{matrix}$$

wiader po 24 złr. / „ „ 15 „

$10 : 3 = 3^1/_3$.

Próba. $6^2/_3$ wiader po 24 złr. $=$ 160 złr.
$3^1/_3$ „ „ 15 „ $=$ 50 „
10 wiader mieszaniny 210 złr.
zatem 1 wiadro 21 złr.

4) Z śrebra czystego (16tej próby) i z śrebra 10tej próby chce ktoś mieć 16 grzywien śrebra $13^2/_3$ próby. Ileż weźmie z każdego gatunku?

$$13^2/_3\ \frac{16}{10}\left|\begin{matrix}3^2/_3\\2^1/_3\end{matrix}\right|\overset{3}{\begin{matrix}11 \times {}^8/_9 = 9^7/_9\\7 \times {}^8/_9 = 6^2/_9\end{matrix}}$$

grzyw. śreb. czystego / „ „ 10 próby

$16 : 18 = {}^{16}/_{18} = {}^8/_9$.

Próba. W $9^7/_9$ grzyw. śreb. czystego jest $156^4/_9$ łutów śreb. czyst.
„ $6^2/_9$ „ „ 10tej próby „ $62^2/_9$ „ „ „
W 16 grzywnach mieszaniny $218^2/_3$ łutów śreb. czyst.
Zatem wypada na 1 grzywnę $13^2/_3$ łutów śreb. czyst.

5) Złotnik ma 6 grzywien śrebra czystego; ileż musi do tego dodać miedzi, aby otrzymał śrebro 13tej próby?

$13\ \frac{16}{0}\Big|\begin{matrix}13,\\ 3,\end{matrix}$ więc $x : 6 = 3 : 13$, zkąd $x = 1\frac{5}{13}$ grzywien miedzi.

Próba. 6 grzyw. śreb. 16tej próby = 96 łutów śreb. czyst.
$1\frac{5}{13}$ „ „ „ „ = 0 „ „ „
$7\frac{5}{13}$ grzyw. . . . . 96 łutów śreb. czyst.
1 grzywna . . . . . . 13 łutów śreb. czyst.

6) Złotnik chce ze złota 17 i 23karatowego mieć $2\frac{1}{2}$ grzywien złota 21karatowego. Ileż ma z każdego gatunku wziąć do tego? — Złota 17karatowego $\frac{5}{6}$ grzywny, a 23karatowego $1\frac{2}{3}$ grzywny.

7) Dwa gatunki kawy, jednej funt na 18 kr. a drugiej na 28 kr. zmieszać tak z sobą, aby otrzymać cetnar po cenie 24 kr. za funt. Ileż wypadnie wziąć z każdego gatunku?

8) Occiarz chce swój ocet zbyt tęgi wodą rozpuścić; gdyby go zostawił tak jak jest, sprzedawałby kwartę po 11 kr., chcąc zaś mieć 5 beczek czyli 180 garncy octu rozpuszczonego, i kwartę takiego po 9 kr. sprzedawać; ileż musi do tego wziąć octu, a ile wody?

9) Ze złota 16 i 22karatowego chce ktoś otrzymać 4 grzywien złota 18karatowego; ileż weźmie każdego z tych dwóch gatunków?

10) Ile trzeba wziąć śrebra czystego a ile miedzi, chcąc otrzymać $7\frac{3}{4}$ grzywien śrebra próby $11\frac{5}{8}$?

§. 67.

Częstokroć wypada robić mieszaninę z więcej niż dwóch gatunków, i tym końcem oznaczyć stosunek w jakim gatunki te mają wchodzić w mieszaninę. Zadania tego rodzaju są najczęściej wprost niewyznaczone, czyli mają więcej niż jedno rozwiązanie; można bowiem dane gatunki rozmaicie z sobą mieszać, to jest znaleść rozmaity stosunek tych gatunków, i tem samem na dane pytanie otrzymać wieloraką liczbę odpowiedzi, z których każda prowadzi do znalezienia żądanego gatunku średniego.

Mając *więcej niż dwa gatunki* mieszać z sobą, aby z nich otrzymać gatunek średni, wychodzi się przytem z tej zasady: iż zawsze po dwa gatunki, jeden lepszy a jeden pośledniejszy od średniego tak się z sobą zbiera, aby otrzymać żądany gatunek średni; przeszedłszy tak wszystkie gatunki po parze, wypadnie z tego na koniec ten sam gatunek średni. Zatem do wynalezienia stosunku mieszaniny, następujące służy *prawidło*:

1. Dane do zmieszania gatunki napisać w kolei od najlepszego do najpośledniejszego, lub na odwrót od najpośledniejszego do najlepszego; gatunek zaś średni umieścić po lewej stronie.

2. Brać z kolei jeden gatunek lepszy i jeden pośledniejszy i porównywać je z gatunkiem średnim: różnicę między gatunkiem średnim a pośledniejszym napisać z prawej strony gatunku lepszego, a różnicę między gatunkiem średnim a lepszym napisać z prawej strony gatunku pośledniejszego. Tak postępować dalej, biorąc zawsze po parze gatunek lepszy i pośledniejszy do porównania z gatunkiem średnim, dopóki się tym sposobem wszystkich gatunków nie wybierze. Częstokroć wypadnie także jeden i ten sam gatunek brać z kilku innemi, i to wtedy, gdy liczba gatunków lepszych nie jest równa liczbie gatunków pośledniejszych, lub też gdy chcemy aby ten lub ów gatunek w większej ilości w mieszaninę wchodził; w takich razach będzie obok takiego gatunku więcej różnic przypisanych. Różnica umieszczona przy każdym gatunku, lub też suma różnic, gdy takowych jest kilka, stanowi liczbę stosunkową mieszaniny tegoż gatunku.

P r z y k ł a d y   i   z a d a n i a.

1) Złotnik potrzebuje śrebra 13tej próby, a ma tylko śrebro czyste i śrebro 15tej próby, zatem musi przymieszać miedzi; w jakimże stosunku weźmie z sobą te dwa gatunki śrebra i miedź?

$$13\left|\begin{array}{r|l|l} 16 & 13 & 13 \\ 15 & 13 & 13 \\ 0 & 3+2 & 5. \end{array}\right.$$

Tu miesza się naprzód śrebro 16tej próby z miedzią (śrebrem próby 0), potem śrebro 15tej próby z miedzią (śrebrem próby 0), i w ten sposób otrzyma się liczby stosunkowe 13, 13 i 5.

Bo wziąwszy 13 grzywien śrebra czystego i 13 grzywien śrebra 15tej próby, trzeba do tego przymieszać 5 grzywien miedzi, aby otrzymać śrebro próby 13tej; gdyż

13	grzyw. śreb.	16tej	próby	=	208 łutów śreb. czystego
13	„ „	15tej	„	=	195 „ „ „
5	„ „	0	„	=	0
31	grzywien mieszaniny				403 łutów śrebr. czystego;

zatem na 1 grzywnę przypada 13 łutów śrebra czystego.

2) Z śrebra 8ej próby, 10tej próby, tudzież z czystego śrebra ma się otrzymać 15 grzywien śrebra 13tej próby; ileż grzywien wypada wziąć z każdego z tych gatunków?

13	8	3	$3 \times 1^{1}/_{14} = 3^{3}/_{14}$ grzywien
	10	3	$3 \times 1^{1}/_{14} = 3^{3}/_{14}$ „
	16	$5 + 3$	$8 \times 1^{1}/_{14} = 8^{8}/_{14}$ „
		$15 : 14 = 1^{1}/_{14}$.	

Próba. $3^{3}/_{14}$ grzywien śreb. 8ej próby $= 25^{5}/_{7}$ łut. śreb. czyst.
$3^{3}/_{14}$ „ „ 10ej „ $= 32^{1}/_{7}$ „ „ „
$8^{4}/_{7}$ „ „ 16ej „ $= 137^{1}/_{7}$ łut. śreb. czyst.
15 grzywien mieszaniny . . . 195 łut. śreb. czyst.
więc 1 grzywna . . . . 13 łut. śreb. czyst.

3) Winiarz mając wino w czterech gatunkach, t. j. wiadro na 15 złr., na 18 złr., na 24 złr. i na 28 złr., chce je tak z sobą zmieszać, aby otrzymał 38 wiader po 20 złr.; ileż wiader z każdego gatunku weźmie do tego?

Zadanie to ma rozmaitą liczbę rozwiązań.

a. Zmieszać gatunek najlepszy i najpośledniejszy, a potem oba gatunki średnie.

20	A 15	$8 \times 2 = 16$	wiader po 15 złr. = 240 złr.
	B 18	$4 \times 2 = 8$	„ „ 18 „ = 144 „
	C 24	$2 \times 2 = 4$	„ „ 24 „ = 96 „
	D 28	$5 \times 2 = 10$	„ „ 28 „ = 280 „
		$38 : 19 = 2$	38 wiader . . . . . 760 złr.

1 wiadro kosztuje istotnie 20 złr.

b. Zmieszać A z C, B z D.

20	A 15	$4 \times 2 = 8$	wiader po 15 złr. = 120 złr.
	B 18	$8 \times 2 = 16$	„ „ 18 „ = 288 „
	C 24	$5 \times 2 = 10$	„ „ 24 „ = 240 „
	D 28	$2 \times 2 = 4$	„ „ 28 „ = 112 „
		$38 : 19 = 2$	38 wiader . . . . . 760 złr.

1 wiadro kosztuje tedy 20 złr.

c. Zmieszać A z C, A z D, B z C.

20	A 15	$4 + 8$	$12 \times 1^{5}/_{14} = 16^{4}/_{14}$	wiad. po 15 złr. $= 244^{4}/_{14}$ złr.
	B 18	4	$4 \times 1^{5}/_{14} = 5^{6}/_{14}$	„ „ 18 „ $= 97^{10}/_{14}$ „
	C 24	$5 + 2$	$7 \times 1^{5}/_{14} = 9^{7}/_{14}$	„ „ 24 „ = 228 „
	D 28	5	$5 \times 1^{5}/_{14} = 6^{11}/_{14}$	„ „ 28 „ = 190 „
		$38 : 28 = 1^{5}/_{14}$	38	760 „

zatem 1 wiadro kosztuje 20 złr.

Jakie mieszaniny prócz powyższych dadzą się tu jeszcze zrobić, i w jakim razie dać można pierwszeństwo tej lub owej mieszaninie?

4) Z zmieszania śrebra próby 10tej, 11tej i 15tej, tudzież z miedzi, ma się otrzymać 10 grzywien śrebra próby 13tej; ileż grzywien wypada wziąć z każdego z tych gatunków?

5) Kupiec ma pięć gatunków kawy, na 30 złr., 38 złr., 42 złr., 45 złr. i 50 złr.; ilekrotnie i w jaki sposób można z sobą mieszać te gatunki, aby z nich otrzymać taki gatunek, któregoby cetnar był na 40 złr.?

V. Reguła łańcuchowa.

§. 68.

Są zadania, których rozwiązanie zależy od przybrania pewnych pośrednich stosunków, a każdy z tych stosunków składa się z dwóch ilości niejednakich co do gatunku, a równych sobie co do wewnętrznej wartości; każda zaś z ilości w stosunek wchodzących ma jednę spólną z sobą co do gatunku ilość albo w którymkolwiek innym stosunku, albo też w ilości w samemże zadaniu danej. Rachunek przez który zadania takie rozwiązują się, zowiemy *regułą łańcuchową* (Kettenrechnung), a to ztąd, że stosunki weń wchodzące składają niejako ogniwa; stosunek bowiem między dwiema ilościami wynajduje się tu ze stosunku w jakim jedna z nich jest z jakąś inną; ta inna z trzecią, trzecia z czwartą, i t. d. aż do stosunku między jedną z wiadomych a ostatnią niewiadomą.

Np. Ileż złotych reńskich mon. kon. wypada zapłacić za 128 funtów wiedeńskich pewnego towaru, wiedząc, iż 65 funtów hamburskich tegoż towaru kosztuje 524 mark bankowych? — Aby zadanie to rozwiązać, trzeba mieć wiadomy stosunek między funtem hamburskim i wiedeńskim, tudzież między marką bankową i złotymreńskim mon. kon.; stosunek ten jest taki:

100 funt. hamb. czynią $86^1/_2$ funt. wied.,
200 mark banko. wynoszą 146 złr. m. k.

Teraz możemy znaleść ilość niewiadomą za pomocą tych stosunków pośrednich, z których każdy zawiera dwie ilości gatunku niejednakiego lecz równe sobie, a każda z tych ilości ma jednę spólną z sobą co do gatunku pomiędzy ilościami zadanie stanowiącemi. Otóż takie zadanie rozwiązuje się przez regułę łańcuchową.

Każde zadanie reguły łańcuchowej może być rozwiązane przez regułę trzech pojedynczą kilkokrotnie przystosowaną. Tak np. zadanie które mamy przed sobą, da się rozłożyć na następujące trzy zadania:

a) Ile funtów wied. czynią 65 funtów hamb., jeżli 100 funtów hamb. idzie na $86\frac{1}{2}$ funtów wied.?

y funt wied. 65 funt. hamb.,	$y : 86\frac{1}{2} = 65 : 100$
$86\frac{1}{2}$ „ „ 100 „ „	więc $y = 56{\cdot}225$ funt. wied.

b) Ile złotych-reńskich m. k. czynią 524 mark bank., jeżli na 200 mark bank. idzie 146 złr. m. k.?

z złr. m. k. 524 mark bank.,	$z : 146 = 524 : 200$
146 „ „ „ 200 „ „	więc $z = 382{\cdot}52$ złr. m. k.

c) Ile złotych-reńskich m. k. kosztuje 128 funt. wied., jeżli 56·225 funt. wied. kosztuje 382·52 złr. m. k.?

x złr. m. k. 128 funt. wied.,	$x : 382{\cdot}52 = 128 : 56{\cdot}225$
382·52 „ „ 56·225 „ „	więc $x = 870{\cdot}779$ złr. m. k.
	$= 870$ złr. 47 kr. m. k.

Takie kilka razy powtórzone przystosowanie reguły trzech pojedynczej doprowadza wprawdzie do wypadku żądanego, jest jednakże zbyt rozwlekłe; podamy więc tutaj sposób rozwiązywania zadań reguły łańcuchowej, a to za pomocą ułożenia od razu warunków zadania.

Jeźli otrzymane wyżej trzy proporcye napiszemy jednę pod drugą, a wprzód w pierwszej z nich przemienimy miejsce stosunkom, a w trzeciej zamiast wynalezionych liczb 56·225 i 382·52 zatrzymamy głoski y, z, będzie:

$$\left.\begin{array}{r} 65 : 100 = y : 86\frac{1}{2} \\ z : 146 = 524 : 200 \\ x : z = 128 : y \end{array}\right\}$$ przez rozmnożenie przez siebie wyrazów odpowiadających otrzymamy znowu proporcyą

$$x \times z \times 65 : z \times 100 \times 146 = y \times 524 \times 128 : y \times 86\tfrac{1}{2} \times 200.$$

Skróciwszy dwa pierwsze stosunki przez z, a dwa drugie przez y, będzie

$$x \times 65 : 100 \times 146 = 524 \times 128 : 86\tfrac{1}{2} \times 200.$$

Ponieważ iloczyn wyrazów skrajnych równy jest iloczynowi wyrazów średnich, zatem

$$x \times 86\tfrac{1}{2} \times 65 \times 200 = 128 \times 100 \times 524 \times 146,$$

zkąd

$$x = \frac{128 \times 100 \times 524 \times 146}{86\frac{1}{2} \times 65 \times 200}.$$

Aby unaocznić związek zachodzący między tem wyrażeniem a liczbami w zadaniu danemi, trzeba zadanie w taką ułożyć postać, w jakiej połączenie łańcuchowe najwyraźniej w oko wpada. Otóż zacząć trzeba od pytania, kładąc najpierw x z tą nazwą jaką ma, a obok niego tę ilość, która z temże x równą ma wartość, a której mnogość jest niewiadoma; pod temi dwiema ilościami umieszcza się pojedyncze stosunki jeden pod drugim, i to tak, aby w każdym stosunku ilość pierwsza była tego samego gatunku, jakiego jest ilość druga w stosunku nad nim położonym. W takim układzie ilość druga w stosunku ostatnim będzie z ilością x tego samego gatunku. Zadanie nasze w taką ułożone postać, tak będzie wyglądało:

złr. m. k. x kosztują 128 funt. wied.,
jeżeli funt. wied. $86\frac{1}{2}$ czynią 100 funt. hamb.,
jeżeli funt. hamb. 65 kosztują 524 mark bank.,
i jeżeli mark bank. 200 czynią 146 złr. m. k.

Porównywając ten układ z owem wyrażeniem, któreśmy wyżej dla x znaleźli, widzimy od razu, iż x równe jest iloczynowi wszystkich liczb będących w układzie po prawej stronie, podzielonemu przez iloczyn wszystkich liczb wiadomych po lewej stronie położonych. Gdybyśmy pomiędzy temi dwoma rzędami liczb pociągnęli linią z góry na dół, możnaby wartość x wynaleść, używając metody przekreślania.

§. 69.

Z tego wszystkiego wypływa dla *reguły łańcuchowej* następujące *prawidło:*

1. Pociągnąć linią z góry na dół i po lewej stronie tej linii napisać x z oznaczeniem gatunku tej ilości, po prawej zaś stronie linii położyć ilość wiadomą, której mnogości szukamy, i która tem samem z tem x równą ma wartość.

2. Pod tem pisać wszystkie pośrednie stosunki jeden pod drugim, tak, aby z dwóch ilości w każdy stosunek wchodzących, po lewej stronie przypadła ilość tego samego gatunku i rodzaju jaka jest z prawej strony stosunku nad nim położonego, a po prawej stronie ilość równa co do wartości owej po lewej. Gdyby która z ilości składała się z dwóch lub więcej wyrazów, trzeba ją zamienić na jednowyrazową czyli na jednomienną. — Gdy wszystkie stosunki pośrednie czyli ogniwa wzięte zostały w łańcuch, co się ztąd poznaje iż ostatnia z prawej strony ilość jest tego samego gatunku i rodzaju co ilość niewiadoma x, znak to, iż układ jest już zupełny.

3. Rozwiązanie odbywa się, używając metody przekreślania.

Przykłady i zadania.

1) Ile kosztują 3 cetnary towaru, za którego 5 łutów płaci się 18 kr.?

złr. x	3 cetn.
1	100 funt.
1	32 łut.
5	18 kr.
60	1 złr.;

zkąd x = 576 złr.

Kładzie się x z swojem nazwiskiem złote-reńskie po lewej stronie, a po prawej ilość 3 cetn., której wartości (w złotych-reńskich wyrazić się mającej) szukamy. Ponieważ pierwszy wiersz kończy się cetnarami, zatem drugi wiersz poczynać się musi od cetnarów; to zaś nastąpi, pisząc: jeźli 1 cetn.... 100 funtów zawiera. Wiersz ten skończył się funtami, przeto następny musi począć się od funtów, co nastąpi, gdy napiszemy: jeźli 1 funt... 32 łutów zawiera. Teraz przechodzi się od towaru do ceny, mówiąc: jeźli 5 łutów... 18 kr. kosztują. Tu skończyliśmy krajcarami, a że x oznacza złote-reńskie, trzeba więc jeszcze przybrać jeden stosunek pośredni: jeźli 60 kr.... 1 złr. czynią. Ponieważ ostatnia ilość z prawej strony ma to samo nazwisko co x, zatem układ cały jest już gotowy. Rozwiąże go się metodą przekreślania.

2) Wieśniak sprzedaje winiarzowi $4^1/_2$ korcy pszenicy po $6^2/_3$ złr.; ileż za to dostanie od niego wina, licząc garniec po $1^3/_5$ złr.?

garncy x	$4^1/_2$ korcy
1	$6^2/_3$ złr.
$1^3/_5$	1 garniec;

zatem x = $18^3/_4$ garncy.

3) W Odesie kosztuje czetwert pszenicy 22 rubli asygnacyjnych, ileż kosztować będzie mac wiedeński, gdy 2 czetwerty czynią 5 Star, gdy na 10 Star idzie 12 mac wiedeńskich, i gdy 100 rubli asygn. czynią $45^1/_2$ złr. m. k.?

złr. x	1 mac wied.
12	10 star
5	2 czetw.
1	22 rub. ass.
100	$45^1/_2$ złr.

x = 3·337 złr.
= 3 złr. 20 kr.

4) Ile cetnarów londyńskich idzie na 253 cetnarów wiedeńskich, gdy 100 funtów londyńskich = 81 funt. wied., i gdy 1 cetn. lond. trzyma 112 funt. londyńskich?

cetn. lond. x	253 cet. wied.
1	100 funt. wied.
81	100 funt. lond.
112	1 cetn. lond.

x = 278·88 cetn. lond.

5) W Hamburgu kosztuje hamburski funt kawy $5\frac{1}{2}$ szylingów, ileż złotych-reńskich m. k. wypadnie zapłacić za $5\frac{1}{3}$ cetn. wied., gdy 100 funt. hamb. czyni $86\frac{1}{2}$ funt. wied., a 200 mark $= 146\frac{1}{4}$ złr. m. k., gdy nareszcie 1 marka zawiera 16 szylingów?

złr. x	$5\frac{1}{3}$ ctn. w.
1	100 funt. „
$86\frac{1}{2}$	100 funt. h.
1	$5\frac{1}{2}$ szyl.
16	1 mark.
200	$146\frac{1}{4}$ złr.

x = 154·985 złr.
= 154 złr. 59 kr.

6) Ktoś kupił towaru 3 cetnarów 54 funtów za 118 złr. Poczemuż będzie przy sprzedaży żądał za 1 funt, jeżeli za 100 złr. na towar wydanych chce mieć 120 złr.?

kr. sprzedaż x	1 funt.
354	118 złr. kupno
100	120 złr. sprzed.
1	60 kr. sprzedaż

x = 24 kr.

7) Sztaba srebra waży $14\frac{1}{2}$ grzywien, a każda z tych grzywien ma w sobie 13 łutów srebra czystego; jakaż jest wartość tej sztaby, gdy za 16 łutów czystego srebra płacą $20\frac{1}{5}$ złr.?

złr. x	$14\frac{1}{2}$ grzyw.
1	13 łut. śr. czyst.
16	$20\frac{1}{5}$ złr.

x = 237·981 złr.
= 237 złr. 59 kr.

8) W Londynie kosztuje 10 penc bochenek najprzedniejszego chleba ważący 4 funty avoir; ileż według tego stosunku łutów wiedeńskich ważyćby musiała bułka krajcarowa? 1 funt szterling ma 20 szylingów, 1 szyling 12 penc, $2\frac{1}{8}$ funt. szterl. czynią 20 złr. m. k., a 100 funtów avoir = 81 funtów wiedeńskich.

łutów x	1 kr.
60	1 złr.
20	$2\frac{1}{8}$ funt. szt.
1	20 szyl.
1	12 penc.
10	4 funt. avoir
100	81 funt wied.
1	32 łutów.

x = $4\frac{2}{5}$ łutów.

9) Zakupiwszy 923 funtów towaru za 295 złr. 20 kr., gdy się przy sprzedaży tego towaru wzięło za cetnar po 29 złr.; jest pytanie czy się zarobiło, czy straciło, i to ile %?

Aby zysk lub stratę wykazać w procencie, trzeba począć łańcuch od pytania: (ile) x złr. przychodu ze sprzedaży dają 100 złr. wydatku przy zakupnie? Jeźli wypadek ułożonej reguły łańcuchowej większy jest niż 100, znak to że jest zysk, a liczba o którą znaleziony przychód przewyższa 100, wskazuje zysk w %; gdy zaś wypadek mniejszy jest od 100, znak to że jest strata, a liczba o którą znaleziony przychód niedochodzi 100, wskazuje stratę w %;

jeźli na wypadek otrzymamy 100, znak to iż nie ma ani zysku, ani straty.

x złr. przychodu	100 złr. wydatku	
$295\,^1/_8$	923 funtów	100
100	29 złr. przychodu	90·63

x = 90·63 złr. przychodu, zatem 9·37% straty.

10) Ktoś zakupił 36 garncy wina, płacąc garniec po 3 złr., a sprzedał to wino biorąc za kwartę po 51 kr.; ileż przytem % zyskał lub stracił?

x złr. przych.	100 złr. wydat.
3	4 kwart
1	51 kr. przych.
60	1 złr. przych.

x = $113\,^1/_3$ złr. przychodu; zatem $13\,^1/_3$ złr. zysku.

11) Ktoś kupił cetnar oleju za 30 złr., a musiał sprzedać ten olej, biorąc za funt po 18 kr. Ileż w % miał przytem zysku lub straty?

x złr. przychodu	100 złr. wydatku
30	100 funtów
1	18 kr.
60	1 złr. przychodu

x = 100 złr. przychodu.

Zatem przy tej sprzedaży nie było ani zysku ani straty.

12) W Austryi idzie 20 złr. na grzywnę czystego śrebra, a 67 dukatów po $4\,^1/_2$ złr. na grzywnę złota $23\,^2/_3$karatowego; jakiż tedy jest w Austryi stosunek złota do śrebra?

x grzyw. śreb. czyst.	1 grz. złota czyst.
1	24 kar. złota czyst.
$23\,^2/_3$	67 dukatów
1	$4\,^1/_2$ złr.
20	1 grz. śreb. czyst.

x = 15·2873 grzyw. śreb. czyst.

Zatem w Austryi grzywna złota czystego jest 15·2873 razy tyle warta co grzywna czystego śrebra, czyli złoto ma się do śrebra jak 15·2873 : 1.

13) Lira austryacka ma 3·897828 Denari śrebra czystego; ileż takich lir idzie na grzywnę kolońską czystego śrebra, jeźli 29 funtów metrycznych czyni 124 grzywien kolońskich, a 1000 Denari czynią 1 funt metryczny? — 60 lir.

14) Morg wiedeński zawiera 57·557, morg pruski 25·532 Arów francuzkich; ileż morgów wiedeńskich trzyma pewien grunt, którego powierzchnia ma $137\,^3/_4$ morgów pruskich?

15) Ile metrów francuzkich idzie na milę austryacką o 4000 sążniach wiedeńskich, jeźli stopa wiedeńska czyni 0·31611 metra francuzkiego?

16) Cetnar hamburski ma 112 funtów hamburskich, funt zaś hamburski = 0·4846 kilogramu, a funt wiedeński = 0·56 kilogramu; ileż złotych-reńskich m. k. kosztuje cetnar wiedeński towaru, którego 3 cetnary hamburskie kosztują $208\frac{1}{2}$ markbanko, rachując $163\frac{1}{4}$ złr. m. k. na 200 mark-banko?

17) Ktoś kupił 4 postawy sukna po 32 łokci w postawie, i zapłacił za to 430 złr.; — po czemu musi sprzedawać łokieć aby miał zarobku 10%?

18) Cetnar pruski o 112 funtach ile ma w sobie funtów wiedeńskich?, wiedząc że funt wiedeński równy jest 0·56 kilogramu, a funt pruski = 0·4677 kilogramu.

19) Zamienić 100 frydrychsdorów pruskich według ich wewnętrznej wartości pieniężnej na dukaty cesarskie, — wiedząc, iż z jednej grzywny kolońskiej czystego złota trzymającej 260 gran biją 35 frydrychsdorów, i że na jednę kolońską grzywnę czystego złota $23\frac{2}{3}$karatowego idzie 67 dukatów cesarskich.

20) Wywóz roczny wina z Oporto w Portugalii wynosi średnio 34280 Pip; ile to jest na wiadra niższo-austryackie?, wiedząc iż 1 Pipa = 26 Almud po 12 Canhad, a 1 Canhada = 1·3867 litrów, a 1 Mass wiedeńska = 1·4151 litrów.

VI. Reguła procentu złożonego.

§. 70.

Przy kapitałach na procencie leżących zdarza się często, że prowizyę z końcem każdego roku lub półrocza przypadającą, do kapitału się dodaje i wraz z nim dalej procentuje; w takim razie mówimy, że kapitał dany jest na *procent składany* (zusammengesetzte Interessen), albo na *procent od procentu* (auf Zinseszinsen).

Aby znaleść ile jaka suma dana w taki sposób na procent *po* pewnym czasie wynosi, możnaby obliczać prowizyę za każdy z kolei okres czasu w którym suma procent przynosi, i dodawać tę prowizyę do stanu kapitału jaki był w początku okresu.

Np. O ile powiększy się kapitał 2000 złr. za lat 4, gdy prowizyę 5% z końcem każdego roku dołożymy do kapitału, i znowu go dalej na procencie umieścimy?

	Kapitał pierwotny	2000 złr.
	Prowizya za rok 1szy	100 „
Kapitał z końcem 1go roku		2100 złr.
	Prowizya za rok 2gi	105 „
Kapitał z końcem 2go roku		2205 złr.
	Prowizya za rok 3ci	110·25 „
Kapitał z końcem 3go roku		2315·25 złr.
	Prowizya za rok 4ty	115·7625 „
Kapitał z końcem 4go roku		2431·0125 złr. = 2431 złr. 1 kr.

Gdyby szło tylko o prowizyę z prostego procentu wypadającą, prowizya ta za rok jeden byłaby 100 złr., zatem za 4 lata 400 złr., gdy tymczasem prowizya z procentu składanego czyni 431 złr. 1 kr.; zatem różnica 31 złr. 1 kr. pochodzi z procentu od procentu.

Ponieważ rachunek poprzedzający jest bardzo rozwlekły, podajemy tu inny krótszy sposób dochodzenia przyrostku z procentu od procentu:

100 złr. danych z początkiem każdego roku na 5% zamieniają się z końcem tegoż roku na 105 złr., więc 1 złr. jako $^1/_{100}$ część 100 złr. zamienia się na $^1/_{100}$ część 105 złr., to jest na 1·05. Zatem przykład któryśmy dopieroco rozwiązali, możemy także rozwiązać za pomocą reguły łańcuchowej jak następuje:

x złr. wartość z końcem 4go roku	2000 złr. kapitał pierwotny
1	1·05 „ z końcem 1go roku
1	1·05 „ „ „ 2go „
1	1·05 „ „ „ 3go „
1	1·05 „ „ „ 4go „

$$x = 2000 \times 1{\cdot}05 \times 1{\cdot}05 \times 1{\cdot}05 \times 1{\cdot}05$$

lub $x = 2000 \times (1{\cdot}05)^4$.

Trzeba więc 1·05, to jest tę liczbę którą się otrzymuje gdy do 100 dodamy procent 5 i tę sumę 105 podzielimy przez 100 wziąć za czynnik 4 razy, to jest tyle razy ile jest lat, a potem pomnożyć przez to kapitał pierwotny.

$(1{\cdot}05)^4$ daje 1·215506, a

$2000 \times 1{\cdot}215506 = 2431{\cdot}012 = 2431$ złr. 1 kr., jak wyżej.

Gdyby się prowizyę dokładało do kapitału nie z końcem każdego roku lecz z końcem każdego półrocza, wtedy ponieważ 100 złr. zamieniają się za pół roku na 102·5 złr., a więc i 1 złr. na 1·025 złr., wypada łańcuch następujący:

x złr. wartość z końcem 8go półrocza	2000	złr. kapitał pierwotny
1	1·025	„ z końcem 1go półrocza
1	1·025	„ „ „ 2go „
1	1·025	„ „ „ 3go „
1	1·025	„ „ „ 4go „
1	1·025	„ „ „ 5go „
1	1·025	„ „ „ 6go „
1	1·025	„ „ „ 7go „
1	1·025	„ „ „ 8go „

$$x = 2000 \times (1{\cdot}025)^8.$$

Tu więc 1·025, to jest tę liczbę, która się wynajduje gdy do 100 dodamy procent 2·5 za pół roku, i sumę 102·5 przez 100 podzielimy, trzeba wynieść do potęgi 8ej, to jest do takiej potęgi ile jest półroczów, i przez tak otrzymaną liczbę pomnożyć kapitał pierwotny.

Liczby $(1{\cdot}05)^4$ i $(1{\cdot}025)^8$ nazwać można *czynnikami przyrostku prowizyi* (Aufzinsungsfaktoren).

Aby więc wynaleść wartość jaką ma po pewnym czasie kapitał dany na procent składany, trzeba dany kapitał rozmnożyć przez odpowiedni czynnik przyrostku prowizyi. Ten zaś odpowiedni czynnik przyrostku prowizyi otrzymuje się, gdy do 100 doda się procent za jeden okres czasu, tę sumę przez 100 podzieli, a' iloraz wyniesie do potęgi takiej, ile jest okresów czasu.

Tak np. aby obliczyć czynnik przyrostku prowizyi za 6 okresów czasu, na stopę procentową 4%, uskutecznia się to w następujący sposób:

	1·04 × 1·04	1·1 2 4 8 6 4 × 1·124864
	416	4.6.8.4.2.1.1
(2)	1·0816 × 1·04	1·1 2 4 8 6 4
	43264	1 1 2 4 8 6
(3)	1·124864	2 2 4 9 7
		4 4 9 9
		9 0 0
		6 8
		5
	$(1{\cdot}04)^6 =$	1·2 6 5 3 1 9

Następujący wykaz zawiera czynniki przyrostku prowizyi, obliczone na 2, 3, 4, 5 procentu, i na 1, 2, 3,... 29, 30 okresów czasu.

Okresy czasu	2%	3%	4%	5%
1	1·02	1·03	1·04	1·05
2	1·0404	1·0609	1·0816	1·1025
3	1·061208	1·092727	1·124864	1·157625
4	1·082432	1·125509	1·169859	1·215506
5	1·104081	1·159274	1·216653	1·276282
6	1·126162	1·194052	1·265319	1·340096
7	1·148686	1·229874	1·315932	1·407100
8	1·171659	1·266770	1·368569	1·477455
9	1·195093	1·304773	1·423312	1·551328
10	1·218994	1·343916	1·480244	1·628895
11	1·243374	1·384234	1·539454	1·710339
12	1·268242	1·425761	1·601032	1·795856
13	1·293607	1·468534	1·665074	1·885649
14	1·319479	1·512590	1·731676	1·979932
15	1·345869	1·557967	1·800944	2·078928
16	1·372786	1·604706	1·872981	2·182875
17	1·400241	1·652848	1·947900	2·292018
18	1·428246	1·702433	2·025817	2·406619
19	1·456811	1·753506	2·106849	2·526950
20	1·485947	1·806111	2·191123	2·653298
21	1·515666	1·860295	2·278768	2·785963
22	1·545980	1·916103	2·369919	2·925261
23	1·576899	1·973587	2·464716	3·071524
24	1·608437	2·032794	2·563304	3·225100
25	1·640606	2·093778	2·665836	3·386355
26	1·673418	2·156591	2·772470	3·555673
27	1·706886	2·221289	2·883369	3·733456
28	1·741024	2·287928	2·998703	3·920129
29	1·775845	2·356566	3·118651	4·116136
30	1·811362	2·427262	3·243398	4·321942

§. 71.

P r z y k ł a d y.

1) Kapitał 5000 złr. dany na procent składany 5%, z rocznem kapitalizowaniem, jak wielki będzie po 6 latach?

Czynnik przyrostku prowizyi za 6 okresów czasu i 5% jest 1·340096; będzie więc

5000 × 1·340096 = 6700·480 = 6700 złr. 29 kr.

2) Kapitał 1234 złr. dany na procent składany 4%, z półrocznem kapitalizowaniem, ile wyniesie po 7 latach?

Tu jest do wzięcia w rachunek 14 półroczów i procent półroczny, to jest 2%; odpowiedni czynnik przyrostku prowizyi jest 1·319479, będzie więc

```
1234 × 1·319479
          4321
     ---------
       1319479
        263896
         39584
          5278
     ---------
      1628.237 = 1628 złr. 14 kr.
```

3) Ile będzie warta po 20 latach suma 5800 złr. dana na procent składany 3% z całorocznem kapitalizowaniem?

5800 × 1·806111 = 10475·444 = 10475 złr. 27 kr.

4) Ojciec składa dla swego 13letniego syna 2300 złr. do kasy oszczędności, która kapitały u niej umieszczone procentuje po 4%, a prowizyę co pół roku do kapitału dolicza czyli kapitalizuje. Jakąż sumę wypłaci taż kasa synowi, gdy tenże skończy lat 24?

Tutaj jest 11 lat czyli 22 półroczów i 2% półrocznie, zatem

2300 × 1·545980 = 3555·754 = 3555 złr. 45 kr.

5) Ktoś ma obowiązek zapłacenia 3000 złr. za rok, 2000 złr. za 2 lata, 1000 złr. za 3 lata, a 4000 złr. za 4 lata; ileż będą warte wszystkie te sumy za lat 4, licząc 5% procentu składanego, z rocznem kapitalizowaniem?

3000	złr. płatnych za	1 rok,	warte są za 4 lat	3472·875	złr.
2000	„ „ „	2 lata,	„ „ „ „ „	2205·000	„
1000	„ „ „	3 „	„ „ „ „ „	1050·000	„
4000	„ „ „	4 „	„ „ „ „ „	4000·000	„
			Wartość ogólna za 4 lat	10727·875	złr.
			=	10727 złr. 52	kr.

6) Ktoś daje przez 6 lat po sobie z początkiem każdego roku 325 złr. na procent składany 4%, z rocznem kapitalizowaniem. Jakąż będzie miał z tego sumę po upływie tego czasu?

Ponieważ pierwsza suma jest na prowizyi przez lat 6, druga przez lat 5,... szósta przez 1 rok, będzie więc

1sza suma po 6 latach	325 × 1·265319				
2ga „ „ 5 „	325 × 1·216653				
3cia „ „ 4 „	325 × 1·169859				
4ta „ „ 3 „	325 × 1·124864				
5ta „ „ 2 „	325 × 1·081600				
6ta „ „ 1 roku	325 × 1·040000				
Całkowita wartość po 5 latach	325 × 6.898295	= 2241·949 złr.			
		= 2241 złr. 57 kr.			

7) Kapitał 3758 złr. 24 kr. dany na procent składany 5% jaką będzie miał wartość po 18 latach?

8) Ojciec chce synowi swemu zaraz po jego narodzeniu zapewnić kapitał, aby mu tenże wypłacony został gdy dojdzie lat 24. Na ten cel daje zaraz 1250 złr. do zakładu zabezpieczającego, który liczy prowizyę 4%. Jakąż sumę zakład ten wypłaci synowi, doliczając prowizyę corocznie do kapitału?

9) Do galicyjskiej kasy oszczędności, która od kapitału dolicza półrocznie prowizyi 2%, wkłada ktoś przez lat 12 z końcem każdego półrocza (to jest z końcem Czerwca i Grudnia) po 40 złr Jakąż sumę odbierze po upływie tych lat?

10) Kupującemu dom dają do wyboru dwa warunki: albo złożyć 6000 złr. zaraz, takąż sumę za rok, i znowu takąż sumę za rok dalszy; — albo też po upływie dwóch lat zapłacić naraz 19000 złr. Ponieważ kupujący może mieć po 5% od swoich pieniędzy, chciałby wiedzieć, który z tych dwóch warunków kupna jest dla niego korzystniejszy?

§. 72.

Chcąc rozwiązać zadanie odwrotne, to jest, gdy dana jest suma wraz z narosłym za pewien czas procentem składanym, aby wynaleść z jakiej ona sumy powstała, czyli wykazać kapitał pierwotny oddzielnie od narosłej za tenże czas prowizyi, używa się do tego najlepiej reguły łańcuchowej.

Tak np. gdy w lat 3 odebrano sumę 2000 złr., w którą wliczony już jest procent składany 4%, rocznie kapitalizowany; idzie o to, aby dojść jaki był kapitał pierwotny? — Otóż 100 złr. zamieniają się za rok na 104 złr., zatem 1 złr. jako $^1/_{100}$ część 100 złr. zamieni się na 1·04 złr.; więc i na odwrót każde 1·04 złr. były przed rokiem tylko 1 złr. Będzie więc łańcuch

x złr. wartość przed 3 laty	2000 złr. wartość teraźniejsza
1·04	1 złr. wartość przed rokiem
1·04	1 „ „ „ 2 laty
1·04	1 „ „ „ 3 „

$$\text{zkąd } x = \frac{2000}{(1{\cdot}04)^3} = 2000 \cdot \frac{1}{(1{\cdot}04)^3}.$$

Trzeba więc 1 podzielić przez czynnik przyrostku prowizyi $(1{\cdot}04)^3$, i przez otrzymaną ztąd liczbę rozmnożyć daną sumę pieniężną 2000.

Ponieważ $(1{\cdot}04)^3 = 1{\cdot}124864$, zatem $\frac{1}{(1{\cdot}04)^3} = 0{\cdot}888996$, będzie więc $x = 2000 \times 0{\cdot}888996 = 1777{\cdot}992 = 1778$ złr.

Gdybyśmy w tem zadaniu wzięli kapitalizowanie półroczne, w takim razie wypada wziąć tylko połowę procentu, to jest 2; a że jest 6 półroczów, zatem należy 1 podzielić przez $(1{\cdot}02)^6$, tak więc trzeba 2000 rozmnożyć przez $\frac{1}{(1{\cdot}02)^6}$.

Liczby $\frac{1}{(1{\cdot}04)^3}$ i $\frac{1}{(1{\cdot}02)^6}$ nazwiemy *czynnikami odtrącenia prowizyi* (Abzinsungsfaktoren).

Aby więc *mając daną sumę pieniężną, wynaleść przez odtrącenie procentu składanego wartość jaką ta suma miała przed upływem pewnego czasu, trzeba daną sumę rozmnożyć przez odpowiedni czynnik odtrącenia prowizyi.* Ten zaś czynnik odtrącenia prowizyi otrzymuje się, dzieląc 1 przez odpowiedni czynnik przyrostku prowizyi.

W następującym wykazie podajemy czynniki odtrącenia prowizyi, obliczone na 2, 3, 4, 5 procentu, i na 1, 2, 3 . . . 29, 30 okresów czasu.

Okresy czasu	2%	3%	4%	5%
1	0·980392	0·970874	0·961539	0·952381
2	0·961169	0·942596	0·924556	0·907030
3	0·942322	0·915142	0·888996	0·863838
4	0·923845	0·888487	0·854804	0·822703
5	0·905731	0·862609	0·821927	0·783526
6	0·887971	0·837484	0·790315	0·746215
7	0·870560	0·813092	0·759918	0·710681
8	0·853491	0·789409	0·730690	0·676839
9	0·836755	0·766417	0·702587	0·644609
10	0·820349	0·744094	0·675564	0·613913
11	0·804263	0·722421	0·649581	0·584679
12	0·788493	0·701380	0·624597	0·556837
13	0·773033	0·680951	0·600574	0·530321
14	0·757875	9·661118	0·577475	0·505068
15	0·743015	0·641862	0·555265	0·481017
16	0·728446	0·623167	0·533908	0·458112
17	0·714163	0·605016	0·513373	0·436297
18	0·700159	0·587395	0·493628	0·415521
19	0·686431	0·570286	0·474642	0·395734
20	0·672971	0·553676	0·456387	0·376890
21	0·659776	0·537549	0·438834	0·358942
22	0·646839	0·521893	0·421955	0·341850
23	0·634156	0·506692	0·405726	0·325571
24	0·621722	0·491934	0·390122	0·310068
25	0·609531	0·477606	0·375117	0·295303
26	0·597579	0·463695	0·360689	0·281241
27	0·585862	0·450189	0·346817	0·267848
28	0·574375	0·437077	0·333478	0·255094
29	0·563112	0·424346	0·320651	0·242946
30	0·552071	0·411987	0·308319	0·231377

§. 73.

P r z y k ł a d y.

1) Suma 4000 złr. ma być z procentem składanym 4% i z rocznem kapitalizowaniem za 5 lat zapłacona. Jakaż jest dzisiejsza wartość tej sumy?

Czynnikiem odtrącenia prowizyi za 5 okresów czasu i 4% jest 0·821927, zatem

$$4000 \times 0{\cdot}821927 = 3287 \text{ złr. } 42 \text{ kr.}$$

2) Suma z procentem składanym 5% i rocznem kapitalizowaniem 7310 złr. 45 kr. dziś wynosząca, jakąż miała wartość przed laty 15?

$$7310{\cdot}75 \times 0{\cdot}481017 = 3516{\cdot}595 = 3516 \text{ złr. } 36 \text{ kr.}$$

3) Jaki kapitał trzeba dać na procent składany 4%, aby z półrocznem kapitalizowaniem wzrósł w 12 latach na 5200 złr.?

Czynnikiem odtrącenia prowizyi za 24 okresów czasu i 2 procentu jest 0·621722, będzie więc

$$5200 \times 0{\cdot}621722 = 3232{\cdot}954 = 3232 \text{ złr. } 57 \text{ kr.}$$

4) Męszczyzna 60letni chce swemu wiernemu słudze zapewnić sumę 800 złr. po swojej śmierci. Jakąż ma teraz włożyć sumę do zakładu zaopatrzenia, gdy tenże zakład liczy procentu 4% z rocznem kapitalizowaniem?

Ponieważ średnia trwałość życia człowieka 60letniego jest lat 12, zadanie nasze wychodzi na następujące: Jakiż kapitał trzeba dać na procent składany 4% z rocznem kapitalizowaniem, aby za lat 12 wzrósł na 800 złr.; lub: suma z procentem składanym 4% i rocznem kapitalizowaniem dziś 800 złr. wynosząca, jakąż miała wartość przed laty 12?

Jest więc Virginie Müller

$$800 \times 0{\cdot}624597 = 499{\cdot}678 \text{ złr.} = 499 \text{ złr. } 41 \text{ kr. wkładce.}$$

5) Trzy osoby ubiegają się o kupno pewnej wsi. Osoba A chce złożyć gotowizną 18000 złr.; B ofiaruje 20000 złr., ale tak, iż 10000 złr. chce złożyć zaraz, a drugą połowę dopiero za 5 lat; C ofiaruje także 20000 złr., na co 5000 złr. zaraz chce złożyć, 8000 złr. za 3 lat, a resztę za 4 lat. Któraż z tych trzech osób najkorzystniejszy podaje warunek, licząc procent składany 5% z kapitalizowaniem rocznem?

Tu trzeba wszystkie zapłaty częściowe przywieść do jednego czasu; w tym celu poszukajmy co wart jest dzisiaj warunek przez każdę z tych trzech osób podany; i tak

A ofiaruje gotowizną . . . . zaraz 18000 złr.
B ofiaruje „ . . . . zaraz 10000 złr.
i 10000 złr. za 5 lat, co czyni zaraz 7835 „ 16 kr.
razem zaraz . 17835 „ 16 kr.

C ofiaruje	zaraz	5000 złr.
8000 złr. za 3 lat, co czyni .	zaraz	6910 „ 42 kr.
7000 złr. za 4 lat, co czyni .	zaraz	5758 „ 55 „
	razem zaraz .	17669 złr. 37 kr.,

zatem osoba A najkorzystniejszy podała warunek.

6) Osoba A chce dać sumę pieniężną osobie B, tak, aby jej ta przez 5 lat z końcem każdego roku 586 złr. wypłaciła. Jakiejże sumy ma żądać osoba B zaraz, licząc procent składany 4% z rocznem kapitalizowaniem?

Tu trzeba obliczyć co jest warta suma 586 złr., gdy się takową płaci wcześniej o rok, o 2 lata, o 3 lata, o 4 lata i o 5 lat; i tak

586 złr. o rok wcześniej $= 586 \times 0{\cdot}961539$
„ „ „ 2 lata „ $= 586 \times 0{\cdot}924556$
„ „ „ 3 „ „ $= 586 \times 0{\cdot}888996$
„ „ „ 4 „ „ $= 586 \times 0{\cdot}854804$
„ „ „ 5 lat „ $= 586 \times 0{\cdot}821927$

Dzisiejsza wartość w ogóle $= 586 \times 4{\cdot}451822 = 2608{\cdot}768$ złr.
$=$ 2608 złr. 46 kr.

7) Jakito jest kapitał, który dany na procent składany 4% wzrósł po 14 latach do sumy 3580 złr.?

8) Ojciec chce córce swojej gdy ta dojdzie lat 20 zapewnić posagu 3000 złr. tym sposobem, iż przy narodzeniu się jej składa naraz pewną sumę do jednego z zakładów zabezpieczających. Jakaż musi być ta suma, jeźli zakład kapitalizuje po 4%?

9) Ktoś bierze dom na swoją własność, a za to obowiązuje się płacić dotychczasowemu jego właścicielowi przez lat 15 po sobie rentę roczną z dołu po 600 złr. — Jest pytanie: w jakiej cenie przyjął nabywca ten dom, jeźli procent składany liczy się po 5%?

ROZDZIAŁ SZÓSTY.

Równania stopnia pierwszego o jednej niewiadomej.

§. 74.

Gdy równość dwóch ilości wyrazimy w ten sposób, iż je znakiem $=$ między niemi położonym oddzielimy, wyrażenie takie zowie się *równaniem* (Gleichung); albo innem słowem: równanie jestto dwojakie wyrażenie jednej i tejże samej ilości; np.

$$a = a; \quad (a + b)(a - b) = a^2 - b^2; \quad 3x - 5 = 2x + 3.$$

Wyrażenia po obu stronach znaku równości zowią się *stronami* (Theile) równania, i mogą się składać z kilku lub więcej *wyrazów* (Glieder). Tak w równaniu $3x - 5 = 2x + 3$, jest $3x - 5$ pierwszą a $2x + 3$ drugą stroną; każda zaś z tych stron składa się z dwóch wyrazów.

Rozróżniamy dwa gatunki równań: *identyczne* czyli sprawdzone, i *warunkowe*. Równanie *identyczne* (identische Gleichung) sprawdza się, jakąbądź wartość nadamy wchodzącym w nie, przez głoski wyrażonym ilościom; własność tę mają powyższe równania $a = a$ i $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, które sprawdzą się nadając dla a i b jakiebądź wartości. Równania zaś *warunkowe* (Bestimmungsgleichung) są to takie, które nie na wszelką jakąbądź wartość lecz tylko na pewną oznaczoną wartość ilości niewiadomych w nie wchodzących są prawdziwemi; w takich więc równaniach równość stron jest w pewnym względzie warunkową. Tak np. $3x - 5 = 2x + 3$ jest równaniem warunkowem, gdyż pod tym tylko warunkiem jest prawdziwe, jeźli zamiast ilości niewiadomej x wstawimy 8.

Wynaleść wartości równania warunkowego, któreby je sprawdziły, jestto *rozwiązać* (auflösen) równanie.

Według ***mnogości niewiadomych*** rozróżniamy równania ***o jednej niewiadomej, o dwóch lub więcej niewiadomych***, a to według tego jak w nie wchodzi jedna, dwie lub więcej niewiadomych. Np. $7x - 3 = 4x$ jestto równanie o jednej niewiadomej, $5x - 3y = 8$ równanie o dwóch, $7x = 3y - 5z + 4$ równanie o trzech niewiadomych.

Według *najwyższego stopnia potęgi ilości niewiadomej* dzielą się znowu równania na równania *stopnia pierwszego, drugiego, trzeciego* . . . . i t. d. Tak np.

$$\left.\begin{aligned} 3x &= 20 \\ 2x - 8y &= 7 \end{aligned}\right\} \text{ są to równania stopnia pierwszego,}$$

$$\left.\begin{aligned} x^2 - 5x &= 9 \\ x^2 + y^2 &= 2xy \end{aligned}\right\} \text{ są to równania stopnia drugiego.}$$

Tutaj podamy tylko naukę o równaniach warunkowych stopnia pierwszego o jednej niewiadomej.

I. Rozwiązanie równań stopnia pierwszego o jednej niewiadomej.

Seak Duval

§. 75.

Rozwiązać równanie stopnia pierwszego o jednej niewiadomej, jestto przyprowadzić je do takiego kształtu, aby po jednej jego stronie była sama tylko niewiadoma, a po drugiej stronie same wiadome liczby. Gdy np. z równania $6x + 4x = 780 - 3x$ otrzymamy na wypadek $x = 60$, równanie to rozwiązaliśmy.

Rozwiązanie równania stopnia pierwszego polega na tej zasadzie:

Gdy z wyrażeniami między sobą równemi odbędziemy równe czyli jednakowe zmiany, wyrażenia które z tego wypadną, muszą także być między sobą równe.

Z tej głównej zasady wynikają następujące szczegółowe prawdy:

1. *Gdy równe dodamy do równych, otrzymane sumy będą między sobą równe.*

   Jeźli $a = b$, $c = d$, musi też być $a + c = b + d$.

2. *Gdy od równych odejmiemy równe, otrzymane różnice będą między sobą równe.*

   Jeźli $a = b$, $c = d$, musi też być $a - c = b - d$.

Stosownie do tych dwóch prawd można z jednej strony równania wypuścić każdy wyraz i przenieść go z znakiem przeciwnym na

 $2+3=5$ $2=5-3$

drugą stronę. Tak np. jeźli $x+a=b$, to będzie też $x=b-a$; bo nie zaszła tu inna zmiana, jak tylko że $+a$ odjęto od obu stron równania. Z równania $5x=16-3x$ wynika równanie $5x+3x=16$; w tym razie dodano $3x$ po obu stronach równania, czyli co na jedno wychodzi odjęto $-3x$.

3. *Gdy równe pomnożymy przez równe, otrzymane iloczyny będą między sobą równe.*

Jeźli $a=b$, $c=d$, musi też być $ac=bd$.

Za pomocą tej prawdy można pozbyć się ułomków z równania, bo dość będzie obie strony równania pomnożyć przez spólną wielokrotność mianowników. Np. równanie $\frac{x}{a}-b=c$ pomnożywszy przez a, zamieni się ono na $x-ab=ac$. Podobnie równanie $\frac{x}{2}-2=\frac{x}{3}$, gdy w niem obie strony pomnożymy przez $2\times3=6$, zamieni się na $3x-12=2x$.

2

4. *Gdy równe podzielimy przez równe, otrzymane ilorazy będą między sobą równe.*

Jeźli $a=b$, $c=d$, musi też być $a:c=b:d$.

Można więc obie strony równania podzielić przez tę samą liczbę, przezco równaniu często prostszą nadaje się postać. Tak np. w równaniu $6x=24$ obie strony podzieliwszy przez 6, otrzymujemy równanie prostsze $x=4$.

§. 76.

Aby z przybraniem według potrzeby prawd powyższych *rozwiązać równanie stopnia pierwszego o jednej niewiadomej*, postępuje się w następujący sposób:

1. Gdy w równanie wchodzą ułomki, uwolni się je od nich, mnożąc obie strony równania przez najmniejszą spólną wielokrotność wszystkich mianowników.

2. Gdy w równanie wchodzą wyrażenia złożone, nawiasami z sobą połączone, wykonywa się owe przez nawiasy wskazane działania.

3. Wszystkie wyrazy w które wchodzi niewiadoma przenosi się na pierwszą stronę równania i ściąga je w jeden wyraz; wszystkie zaś wyrazy wiadome przenosi się na drugą stronę, i także ściąga w jeden wyraz.

4. Uwalnia się niewiadomą od jej spółczynnika, a to dzieląc obie strony równania przez tegoż spółczynnika.

Dla przekonania się, czy równanie zostało jak należy rozwiązane, dość jest wartość która dla niewiadomej wypadła, wstawić w toż równanie w miejsce tejże niewiadomej, i wyrażenia po obu stronach przyprowadzić do najprostszej postaci. Gdy się jednakowy po obu stronach otrzyma wypadek, znak to że rozwiązanie równania jest prawdziwe; w przeciwnym razie byłoby nieprawdziwe.

Przykłady.

§. 77.

1) $3x - 8 = 13.$

Rozwiązanie. $3x = 13 + 8.$ $3x = 21.$ $x = 7.$

Próba. $3 \times 7 - 8 = 13.$ $21 - 8 = 13.$ $13 = 13.$

2) $12(x-1) = 3x + 24.$

Rozw. $12x - 12 = 3x + 24.$ $12x - 3x = 24 + 12.$ $9x = 36.$ $x = 4.$

Próba. $12(4-1) = 3 \times 4 + 24$ $12 \times 3 = 12 + 24.$ $36 = 36.$

3) $\frac{x}{2} = x - 5.$

Rozw. $x = 2x - 10.$ $x - 2x = -10.$ $-x = -10.$ $x = 10.$

Próba. $^{10}/_{2} = 10 - 5.$ $5 = 5.$

4) $\frac{x+3}{5} - \frac{x-3}{9} = 2.$

Rozw. $9(x+3) - 5(x-3) = 90.$ $9x + 27 - 5x + 15 = 90.$ $9x - 5x = 90 - 27 - 15.$ $4x = 48.$ $x = 12.$

Próba. $\frac{12+3}{5} - \frac{12-3}{9} = 2.$ $^{15}/_{5} - {^9}/_{9} = 2.$ $3 - 1 = 2.$ $2 = 2.$

5) $6(x-2) - 2(3x+1) = 1 - 4(2x+3).$

Rozw. $6x - 12 - 6x - 2 = 1 - 8x - 12.$

$6x - 6x + 8x = 1 - 12 + 12 + 2.$

$8x = 3.$

$x = {^3}/_{8}.$

6) $7x - \frac{4x}{7} + 2(x - 1) = 8x + 1.$

$$49x - 4x + 14x - 14 = 56x + 7.$$
$$49x - 4x + 14x - 56x = 7 + 14.$$
$$3x = 21.$$
$$x = 7.$$

7) $\frac{x}{2} + \frac{x+1}{3} + \frac{x-2}{4} = \frac{2x}{11} - \frac{2-3x}{4} - 3.$

$$66x + 44(x+1) + 33(x-2) = 24x - 33(2-3x) - 396.$$
$$66x + 44x + 44 + 33x - 66 = 24x - 66 + 99x - 396.$$
$$66x + 44x + 33x - 24x - 99x = -66 - 396 - 44 + 66.$$
$$20x = -440.$$
$$x = -22.$$

Rozwiązać także następujące równania:

8) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} = x + 17.$

9) $3(x+1) - 4(x-1) = 8(2x-15).$

10) $\frac{2x+1}{3} - \frac{x-3}{5} = \frac{3x+7}{10}.$

11) $\frac{9-x}{14} - 1 = \frac{x+7}{5} - 2.$

12) $\frac{8+x}{9} - \frac{x-6}{7} - 3 = 10 - \frac{x+4}{5}.$

II. Użycie równań do rozwiązywania zadań.

§. 78.

Każde zadanie zawiera w sobie pewne warunki, którym liczby wynaleść się mające zadość uczynić muszą. Chcąc więc zadanie algebraicznie rozwiązać, najpierwszą jest rzeczą dane warunki napisać znakami algebraicznemi w ten sposób, aby wszelkie stosunki podług warunków zadania między ilością niewiadomą a ilościami wiadomemi zachodzące były wyrażone, i aby też była oznaczona równość, która podług tychże warunków zachodzi między ilością niewiadomą a ilościami wiadomemi. Tę sprawę nazywamy *ułożeniem* (Ansetzen) równania. Nie masz na to żadnego prawidła stałego; należyta rozwaga i wprawa przez rozwiązywanie wielu zadań nabyta, doprowadzą w każdym szczególnym razie do poznania, w jaki sposób obejść się z niewiadomą stosownie do warunków zadania i wprowadzić ją w równnanie. *)

Skoro równanie już ułożone, rozwiązawszy je, otrzymamy szukaną wartość niewiadomej.

Początkowi uczniowie zrobią najlepiej, gdy rozmaite zadania, także i bez układania takowych w równanie, starać się będą rozwiązywać bez pióra i papieru samym namysłem, idąc rozumowaniem od wniosku do wniosku. Aby wskazać drogę do tego, umieszczamy w następującym tu paragrafie zadania początkowe, z rozwiązaniem ich tak algebraicznie jak i namysłem. Rozwiązywanie namysłem zadań umieszczonych w dalszych paragrafach, zostawiamy samymże uczniom.

Aby mieć pewność, że rozwiązanie zadania jest prawdziwe, trzeba przekonać się czy wartość dla niewiadomej znaleziona, czyni istotnie zadość warunkom zadania.

1. Zadania z ułożeniem ich w równanie.

§. 79.

1. Znaleść taką liczbę, która wzięta 5krotnie i 7krotnie daje razem 96.

Namysłem. Wziąć liczbę jaką 5krotnie i 7krotnie jest to samo co wziąć ją 12krotnie; więc 96 zawiera w sobie liczbę szukaną 12 razy, czyli liczba ta jest 12tą częścią 96, zatem 8.

Algebraicznie. Oznaczywszy liczbę szukaną przez x, będzie 5x pięciokrotnością tej liczby, a 7x jej siedmiokrotnością. Zatem według warunku zadania musi być:

$$5x + 7x = 96;$$

rozwiązawszy to równanie, wypada $x = 8$.

Próba. $5 \cdot 8 + 7 \cdot 8 = 40 + 56 = 96$.

2) Jakato jest liczba do której 5krotności dodawszy 42, wypadnie jej 8krotność?

---

*) Chociaż do *ułożenia równania z warunków zadania* nie masz prawidła stałego, podajemy tu przecie jedno (z dzieła Lacroix), którego zastosowanie bardzo rozciągłe prowadzi łatwiej do celu. Oto wysłowienie tego prawidła: *Uważać zadanie jakby już było rozwiązane, i wskazać za pomocą znaków algebraicznych na ilościach wiadomych i na ilości niewiadomej te same rozumowania i działania, któreby należało uskutecznić, chcąc sprawdzić wartość ilości niewiadomej, gdyby wartość ta była dana.*

Przyp. tłum.

Namysłem. Aby z 5krotności mieć 8krotność, trzeba do 5krotności dodać 3krotność. Gdy zaś w danym tu razie z 5krotności otrzymuje się 8krotność przez przydanie 42, więc to 42 musi być równe 3krotności; przeto liczba szukana musi być trzecią częścią 42, to jest 14.

Algebraicznie. Oznaczywszy liczbę szukaną przez x, będzie 5x jej 5krotnością, a 8x jej 8krotnością. Gdy zaś to pierwsze musi być powiększone o 42 aby wydało drugie, wypada iż

$$5x + 42 = 8x,$$

$5x - 8x = -42$

a ztąd $x = 14$.

$-3x = -42$

Próba. $5 \times 14 + 42 = 70 + 42 = 112,$ $x = 14$

$$8 \times 14 = 112.$$

3) Jakaż to jest liczba od której 9krotności odjąwszy 72, wypadnie jej 5krotność?

Namysłem. Aby z 9krotności otrzymać 5krotność, trzeba odjąć 4krotność. Jeźli więc 9krotność ma przez odjęcie od niej 72 zamienić się na 5krotność, więc 72 musi być 4krotnością liczby szukanej; zatem ta liczba musi być 4tą częścią 72, czyli 18.

Algebraicznie. Oznaczywszy liczbę szukaną przez x, będzie 9x jej 9krotnością, a 5x jej 5krotnością, i według warunku zadania musi być

$$9x - 72 = 5x,$$

zkąd $x = 18$.

Próba. $9 \times 18 - 72 = 162 - 72 = 90,$

$$5 \times 18 = 90.$$

4) Połowa pewnej liczby wraz z jej trzecią częścią czynią 25; jakaż to liczba?

Namysłem. $^1/_2$ i $^1/_3$ czynią razem $^5/_6$; gdy więc $^5/_6$ liczby szukanej czyni 25, to $^1/_6$ uczyni tylko piątą część 25, to jest 5; zatem znajdziemy samą liczbę, biorąc 6krotnie owe 5, to jest liczbą tą jest 30.

Algebraicznie. Oznaczywszy liczbę szukaną przez x, będzie $\frac{x}{2}$ jej połową a $\frac{x}{3}$ jej trzecią częścią; zatem według warunku zadania jest

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 25,$$

zkąd $x = 30$.

Próba. $\frac{30}{2} + \frac{30}{3} = 15 + 10 = 25.$

5) Liczba pewna wzięta 5 razy jest większa o 86 od swej połowy powiększonej 5tą częścią; jakaż to liczba?

Namysłem. $^1/_2$ i $^1/_5$ czynią razem $^7/_{10}$. Chcieć aby liczba szukana 5 razy wzięta była o 86 większą od swej części 10tej wziętej razy 7, jest to samo co chcieć aby liczba szukana 50 razy wzięta, była o 860 większa od swej 7krotności; że zaś 50krotność większa jest od 7krotności o 43krotność, zatem 860 musi być 43krotnością liczby szukanej, czyli ta liczba musi być 43cią częścią 860, zatem 20.

Algebraicznie. Oznaczywszy liczbę szukaną przez x, będzie 5x jej 5krotnością, $\frac{x}{2}$ jej połową, a $\frac{x}{5}$ jej 5tą częścią; jest więc

$$5x - 86 = \frac{x}{2} + \frac{x}{5},$$

zkąd wypada $x = 20$.

Próba. $5 \times 20 - 86 = \frac{20}{2} + \frac{20}{5}.$

$$100 - 86 = 10 + 4.$$
$$14 = 14.$$

6) Ktoś zapytany, ile ma przy sobie pieniędzy, odpowiada: gdybym miał półtora razy tyle ile mam teraz, i z tego wydał 2 złr., zostałoby mi 16 złr. Ileż złotych-reńskich ma teraz przy sobie?

Namysłem. Liczbę jaką wziąć półtora razy jest to samo co połowę jej wziąć 3 razy; że zaś 3 razy wzięta połowa zmniejszona o 2 musi dać 16, zatem tą 3 razy wziętą połową nie może być jak tylko liczba 18, a tego 3cia część to jest 6 będzie połową szukanej liczby; więc samą liczbą jest 12.

Algebraicznie. Oznaczywszy przez x liczbę złr. którą osoba zapytana ma przy sobie, jest $\frac{x}{2}$ połową tego; a według warunku zadania ma być

4x + 2x − 8 = 16 + 8

$$x + \frac{x}{2} - 2 = 16,$$

2x + x − 4 = 16
2x + x = 16 + 4
3x = 20

zkąd $x = 12$.

Próba. $12 + {^{12}/_2} - 2 = 12 + 6 - 2 = 16.$

§. 80.

7) Podróżny zapytany, ile mil ujechał, odpowiada: gdybym był o 48 mil dalej pojechał, byłbym 3 razy większą drogę zrobił niż tę, którą tą razą odbyłem. Ileż tedy mil ujechał?

Oznaczmy liczbę mil odbytych przez x. Gdyby podróżny był o 48 mil dalej pojechał, cała jego droga wyrażona w milach byłaby $x + 48$; a że w tym razie byłby zajechał 3 razy dalej, czyli byłby odbył 3 razy więcej mil, jest więc

$$x + 48 = 3x.$$

$$\text{zatem } x = 24.$$

Próba. $24 + 48 = 72, \quad 3 \times 24 = 72.$

8) Kupiec kupił sztukę płótna, płacąc łokieć po $4^3/_4$ złr., sprzedał ją zaś biorąc za łokieć po $4^1/_3$ złr., i miał przytem całego zysku 21 złr. Ileż łokci było w tej sztuce?

W tem zadaniu trzeba się domyślić tego warunku, że zysk jestto różnica pomiędzy tą sumą, którą kupiec wydał na kupno płótna, a sumą którą wziął przy sprzedaży.

Oznaczywszy liczbę łokci przez x, jest

suma wzięta za sprzedanych x łokci $= 4^1/_3 \cdot x = \frac{13\,x}{3}$,

suma wydana na zakupienie x łokci $= 3^3/_4 \cdot x = \frac{15\,x}{4}$;

zatem

$$\frac{13\,x}{3} - \frac{15\,x}{4} = 21,$$

zkąd $x = 36$.

Próba. Za 36 łokci po $4^1/_3$ złr. jest 156 złr. przy sprzedaży,
„ 36 „ „ $3^3/_4$ „ „ 135 „ „ zakupnie,
21 złr. zysku.

9) Ktoś zapytany, ile ma lat, odpowiedział: Za 10 lat będę dwa razy starszy niżelim był przed 4 laty. Ileż ma lat?

Oznaczywszy liczbę tych lat przez x, będzie

wiek tej osoby za 10 lat $= x + 10$,
wiek tej osoby przed 4 laty $= x - 4$.

Że zaś według warunku zadania pierwszy z tych wieków musi być 2 razy większy od drugiego, zatem aby otrzymać równanie, trzeba wiek drugi rozmnożyć przez 2; będzie więc

$$x + 10 = 2\,(x - 4),$$

zkąd $x = 18$.

Próba. Wiek za 10 lat $= 28$ lat,
Wiek przed 4 laty $= 14$ lat,
a jest też $28 = 2 \times 14$.

10) Ojciec ma lat 32 a syn 2 lata; za ileż lat będzie ojciec 3 razy starszy od syna?

Szukaną liczbę lat oznaczywszy przez x, będzie po upływie tych lat wiek ojca $= 32 + x$, wiek syna $= 2 + x$; a gdy według warunku zadania wiek pierwszy musi być 3 razy większy od drugiego, aby je więc zrównać, trzeba wiek drugi rozmnożyć przez 3, a będzie równanie

$$32 + x = 3\ (2 + x),$$

które wartość $x = 13$ sprawdza.

Próba. Za lat 13 ojciec będzie miał 45 lat a syn 15 lat, zatem ojciec będzie istotnie 3 razy starszy od syna.

11) Pewien chce wszystkie pieniądze jakie ma przy sobie rozdać między 10 ubogich, każdemu po 20 kr., ale nie wystarcza mu po tyle; daje więc po 18 kr., a zostało mu się tyle ile pierwej nie dostawało. Ileż tedy krajcarów miał przy sobie?

Oznaczmy szukaną liczbę krajcarów przez x. Chcąc dać każdemu z ubogich po 20 kr., nie dostawało $200 - x$ krajcarów; gdy zaś każdy dostał po 18 kr., zostało się $x - 180$ kr. Ponieważ obie te liczby muszą być sobie równe, będzie więc

$$200 - x = x - 180,$$

zkąd $x = 190$.

12) Pan przyjmując sługę ugodził się z nim, iż mu za roczne zasługi zapłaci 60 złr. i prócz tego da suknię. Po dwóch miesiącach sługa odprawił się i dostał tylko suknię. W jakiejże cenie była mu ta suknia policzona?

Niech będzie wartość sukni $= x$ złr., za całoroczne więc zasługi należało się $x + 60$ złr., a zatem za 2 miesiące $\frac{x + 60}{6}$; ponieważ zaś sługa dostał za ten czas suknię czyli x złr., musi więc być

$$x = \frac{x + 60}{6},$$

przeto $x = 12$.

13) Goniec wysłany do miasta A, ujeżdża dziennie mil 12; w dzień później puszcza się za nim drugi goniec, i ma tamtego dogonić za dni 4; ileż tedy drugi ten goniec musi mil na dzień odbywać?

Jeżli przez x oznaczymy liczbę mil, które drugi goniec dziennie ujechać musi, w 4 dniach ujedzie on 4x mil; pierwszy zaś goniec który jest w drodze o dzień dłużej, zrobi w tych 5 dniach mil $12 \times 5 = 60$. Że zaś drogi przez obu gońców odbyte muszą w miejscu ich zjechania się być sobie równe, jest więc

$$4x = 60,$$

$$\text{zatem } x = 15.$$

§. 81.

Można też często zadania w których idzie o wynalezienie więcej niż jednej niewiadomej, rozwiązać bardzo łatwo za pomocą jednego równania o jednej tylko niewiadomej, jak to w następujących przykładach pokażemy.

14) Z dwóch liczb jest pierwsza o 3 mniejsza od drugiej; gdy zaś pierwszą rozmnożę przez 4 i od iloczynu odejmę 18, otrzymam drugą. Jakieżto są te liczby?

Oznaczywszy pierwszą liczbę przez x, to druga będzie $x + 3$; i jest podług warunków zadania

$$4x - 18 = x + 3,$$

zkąd wypada $x = 7$, zatem $x + 3 = 10$.

Próba. Druga liczba 10 jest istotnie o 3 większa od pierwszej liczby 7; także rozmnożywszy 7 przez 4, i od iloczynu odjąwszy 18, wypada druga liczba, to jest 10.

15) Liczbę 50 podzielić na dwie takie części, aby jedna z nich była o 6 mniejszą od drugiej.

Oznaczywszy część większą przez x, będzie część mniejsza $50 - x$; a że według warunków zadania aby otrzymać część większą x, trzeba do mniejszej części $50 - x$ dodać 6, będzie więc

$$x = 50 - x + 6,$$

zkąd wypada $x = 28$, i $x - 6 = 28 - 6 = 22$.

16) Ojciec jest teraz 2 razy starszy od syna, a przed 15 laty był od niego 5 razy starszy. Ileż ma lat ojciec, ile syn?

Oznaczywszy wiek syna przez x lat, będzie wiek ojca 2x lat; więc przed 15 laty miał ojciec $2x - 15$ lat, a syn $x - 15$ lat. Będzie tedy równanie

$$2x - 15 = 5(x - 15),$$

zkąd wypada $x = 20$, a tem samem $2x = 40$. A tak ojciec ma lat 40, a syn 20.

17) Ojciec i syn mają razem lat 60, a syn jest przytem 4 razy młodszy od ojca. Ileż ma lat ojciec, a ile syn?

Oznaczywszy wiek ojca przez x, będzie wiek syna $\frac{x}{4}$ lat, i jest

$$x + \frac{x}{4} = 60,$$

zkąd wypada $x = 48$, a $\frac{x}{4} = 12$. A tak ojciec ma lat 48, syn 12.

18) Pomiędzy trzy osób rozdzielono 100 złr. w ten sposób, że druga dostała dwa razy tyle co pierwsza, a trzecia o 10 złr. więcej niżeli czyni połowa tego co dwie pierwsze osoby razem dostały. Ileż złr. wzięła każda z tych trzech osób?

Oznaczywszy przez x liczbę złr. jaka przypada na osobę A,
będzie 2x liczba „ „ „ „ „ B,
$\frac{x + 2x}{2} + 10$ „ „ „ „ „ „ C,

zatem

$$x + 2x + \frac{3x}{2} + 10 = 100,$$

z któregoto równania wypada $x = 20$.

A tak A dostaje . $x = 20$ złr.
„ „ B „ $2x = 40$ „
„ „ C „ $\frac{3x}{2} + 10 = 40$ „

19) Z pięciu braci najmłodszy miał pewną ilość orzechów; dał z tego najstarszemu połowę mniej 8, drugiemu dał połowę tego co mu zostało mniej 8, trzeciemu znowu połowę tego co mu jeszcze zostało mniej 8, i nareszcie czwartemu połowę zostającej mu jeszcze reszty mniej 8. Po takiem obdzieleniu zostało jeszcze jemu samemu 20 orzechów. Ileż tedy miał z początku wszystkich orzechów, i po ile dał każdemu z braci?

Oznaczywszy początkową liczbę orzechów przez x, to pierwszy brat dostał $\frac{x}{2} - 8$, i zostało jeszcze $x - \frac{x}{2} + 8 = \frac{x}{2} + 8$; drugi brat dostał $\frac{x}{4} + 4 - 8 = \frac{x}{4} - 4$, i zostało jeszcze $\frac{x}{2} + 8 - \left(\frac{x}{4} - 4\right) = \frac{x}{4} + 12$; trzeci brat dostał $\frac{x}{8} + 6 - 8 = \frac{x}{8} - 2$, i zostało jeszcze $\frac{x}{4} + 12 - \left(\frac{x}{8} - 2\right) = \frac{x}{8} + 14$; z tego dostał czwarty brat $\frac{x}{16} + 7 - 8 = \frac{x}{16} - 1$, tak iż jeszcze zostało $\frac{x}{8} + 14 - \left(\frac{x}{16} - 1\right) = \frac{x}{16} + 15$. Ta zaś reszta ma wynosić 20; jest więc

$$\frac{x}{16} + 15 = 20$$

zkąd wypada $x = 80$.

A tak chłopiec miał wszystkich orzechów 80, i dał

pierwszemu bratu $\frac{x}{2} - 8 = 32$,

drugiemu „ $\frac{x}{4} - 4 = 16$,

trzeciemu „ $\frac{x}{8} - 2 = 8$,

czwartemu „ $\frac{x}{16} - 1 = 4$.

2. Zadania do wprawy w układaniu równań.

§. 82.

1) Jakato liczba jest większa o 23 od sumy z swojej 4tej, 5tej i 6tej części? — Liczba 60.

2) Znaleść taką liczbę, aby z podzielenia jej przez 3 wyszło tyle na iloraz, ile wypada z odjęcia od niej 32. — Liczba ta jest 48.

3) Mam w myśli taką liczbę, że gdy ją pomnożę przez 3, do tego dodam 8, otrzymaną sumę podzielę przez 8, i od ilorazu odejmę 4, wypadnie 0. Jakążto liczbę pomyślałem sobie? — Liczbę 8.

4) Nauczyciel zapytany, ile ma uczniów, taką dał odpowiedź: Połowa moich uczniów jest o 16 większą od 6tej i 9tej ich części razem wziętych. Ileż tedy miał uczniów? — 72 uczniów.

5) Ktoś miał przed 8 laty 4 razy tyle lat, ile ich czyni 5ta część jego dzisiejszego wieku. Ileż ma lat dzisiaj? — 40 lat.

6) Ktoś zapytany, ile ma lat, odpowiedział: za 12 lat będę 4 razy starszy, niżeli byłem przed 12 laty. Ileż ma lat? — 20 lat.

7) Ojciec mówi: Mam teraz lat 40, mój starszy syn ma 16, młodszy 3 lat; za ileż lat będą moi synowie razem tyle mieć lat co ja? — Za 21 lat.

8) Kobietę niosącą jaja w koszu, zapytał ktoś, ile ich tam ma?, a ona mu na to: Układałam te jaja na kupki równe, naprzód wszystkie w 4 kupek a potem wszystkie w 8 kupek; otóż wtedy gdy było 4 kupek policzyłam jaja w trzech kupkach, a gdy

Mnożyc znaczy iloczum z jednej liczby tak utworzyć jak dru- ga z jedności powstała. Dzie- lić znaczy z iloczynu z czyn- ników jednych tylko szukać drugi

$6^3 = 6 \times 6 \times 6$

Liczba która ma być tyle razy za czynnikiem wzięta nazywa się pierwiastkiem

Potęgowac znaczy z pierwiast- jakiegoś utworzyć przez wszystkie działanie wypadek takim sposobem jak wykład- z jedności powstał.