KAZIMIERZ FREJLICH

MATEMATYKA

DLA PIERWSZEJ KLASY LICEUM OGÓLNOKSZTAŁCĄCEGO WYDZIAŁU HUMANISTYCZNEGO PRZYRODNICZEGO I KLASYCZNEGO

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO KSIĄŻEK SZKOLNYCH
WE LWOWIE

KAZIMIERZ FREJLICH

MATEMATYKA

dla I kl. Liceum ogólnokształcącego
(wydziały: humanistyczny, przyrodniczy i klasyczny)

PWKS

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO KSIĄŻEK SZKOLNYCH WE LWOWIE

Cena wraz ze znaczkiem na budowę
Publicznych Szkół Powszechnych zł 2·90

Podręcznik zatwierdzony do użytku w szkołach pismem Ministerstwa W. R. i O. P. z dnia 6 lipca 1938 r. Nr II Pr. — 16079/38.

38211

ZWIĄZKOWE ZAKŁADY GRAFICZNE
SPÓŁDZIELNIA Z ODPOW. UDZIAŁ.
LWÓW, UL. PIEKARSKA L. 18.

UWAGA WSTĘPNA.

Podręcznik niniejszy przeznaczony jest dla klasy I wydziałów: przyrodniczego, humanistycznego i klasycznego liceum ogólnokształcącego. Tematy **nie objęte** programem wydziału klasycznego omówione są w §§ 39—42, 70, 71, 104, 105, 106, 107, 108 oraz w częściach IV, V i VI rozdziału IV.

Rozdział III oraz §§ 72, 73, 119, 120, 121 i 122 rozdziału IV omawiają tzw. **tematy do wyboru**, przewidziane w programie **liceum klasycznego.** Natomiast **tematy do wyboru**, przewidziane w programie liceum **przyrodniczego i humanistycznego,** stanowią treść §§ 39—42, 59, 60, 66 rozdziału III oraz części VI rozdziału IV.

Wreszcie, zagadnienia, omówione w §§ 34, 35, 36, 37, 38, 54, 55 i 61—63, jako zastosowanie i pogłębienie nauki o logarytmach i postępach i mające pewne znaczenie praktyczne, nie są obowiązujące.

ROZDZIAŁ I.

Nierówności.

§ 1. **Określenia.** Jeżeli dwa wyrażenia algebraiczne połączymy znakiem nierówności ($>$ lub $<$), wówczas otrzymamy **nierówność**. Wspomniane wyrażenia nazywamy **stronami** nierówności.

Nierównościami są np.:

$-5<2$; $-3>-5$; $3a-8>1$; $5x^2+3y<4+z$; itd.

Nierówności

$$A>B \text{ i } C>D$$

nazywać będziemy nierównościami o **jednakowych zwrotach**, a nierówności

$$x>y \text{ i } u<w$$

nazywać będziemy nierównościami o **przeciwnych zwrotach**.

§ 2. Niechaj dana będzie nierówność, w której co najmniej jedna ze stron zawiera literę (lub litery). Np.:

(1) $x^4+y^2+1>0$;

(2) $x^2+5>6x$;

(3) $z^2+4z+4<0$.

Litery, występujące w nierówności i nie oznaczające **danych** liczb, nazywają się **zmiennymi**.

a) Rozpatrzmy nierówność (1). Lewa jej strona jest sumą dodatnich liczb, zatem wyrażenie x^4+y^2+1 jest dodatnie bez względu na wartości liczbowe liter x i y (tzn. jest dodatnie dla wszystkich wartości liczbowych liter x i y). Nierówność więc

$$x^4+y^2+1>0$$

jest słuszna dla wszystkich wartości liczbowych liter x i y.

Nierówności, które są słuszne dla wszystkich wartości liczbowych zmiennej (lub zmiennych), nazywają się **nierównościami bezwarunkowymi**.

Np. nierówności

$$a^2+b^2>-5; \quad 4+x^2>2; \quad -2x^2-3y^2-1<0; \quad a-5<a+1$$

są nierównościami bezwarunkowymi.

b) Rozpatrzmy nierówność (2)

$$x^2+5>6x.$$

Łatwo jest sprawdzić, że nie dla każdej wartości liczbowej zmiennej x nierówność ta jest słuszna. Istotnie, np.

dla	$x=1$	wartość	lewej	strony	wynosi	6,	a	prawej	strony	6;
„	$x=2$	„	„	„	„	9,	„	„	„	12;
„	$x=3$	„	„	„	„	14,	„	„	„	18;
„	$x=5$	„	„	„	„	30,	„	„	„	30.

Natomiast dla jakiejkolwiek wartości liczbowej x, mniejszej od 1 albo większej od 5, nierówność dana jest słuszna. Np.

dla	$x=\frac{1}{2}$	wartość	lewej	strony	wynosi	$5\frac{1}{4}$,	a prawej	3;
„	$x=6$	„	„	„	„	41,	„ „	36 itd.

Nierówności, które są słuszne tylko dla pewnych wartości liczbowych zmiennej (lub zmiennych), nazywają się **nierównościami warunkowymi.**

Rozwiązać nierówność warunkową znaczy znaleźć wszystkie wartości liczbowe zmiennej (lub zmiennych), dla których nierówność jest słuszna.

O wartościach tych mówimy, że **spełniają** daną nierówność

Np. nierówności:

$$5x-3>8x+4; \quad 5x^2-1>0; \quad x^2-y^2>2+z$$

są nierównościami warunkowymi.

c) Rozpatrzmy nierówność (3)

$$z^2+4z+4<0.$$

Lewa jej strona jest kwadratem sumy liczb z i 2

$$z^2+4z+4=(z+2)^2.$$

A ponieważ $(z+2)^2$ jest liczbą nieujemną dla wszystkich wartości z, więc nierówność

$$z^2+4z+4<0$$

jest niemożliwa, tzn., że nie ma takich wartości liczbowych litery z, dla których nierówność (3) byłaby słuszna.

Widzimy zatem, że istnieją nierówności, które nie posiadają rozwiązań. Takie nierówności nazywać będziemy **sprzecznymi.**

Własności nierówności.

§ 3. Wiemy z nauki o równaniach, że 1° do obu stron równania wolno dodać, albo od obu stron równania wolno odjąć tę samą liczbę oraz 2⁰ obie strony równania wolno pomnożyć przez tę samą liczbę, albo podzielić przez tę samą liczbę różną od zera.

Zbadajmy, które z przytoczonych własności równań posiadają także i nierówności.

1^0. Niechaj A i B oznaczają dwie liczby nierówne. Z nauki o liczbach względnych wynika, że jeżeli $A > B$, to różnica $A - B$ jest dodatnia tzn., że $A - B > 0$. I odwrotnie: jeżeli $A - B > 0$, to $A > B$.

Rozpatrzmy nierówność

$$A > B$$

i wynikającą z niej nierówność

$$A - B > 0. \tag{4}$$

Wyrażenie $A - B$ nie zmieni swej wartości, jeżeli dodamy doń i odejmiemy tę samą dowolną liczbę względną C:

$$A - B = A + C - B - C.$$

Ale: $A + C - B - C = (A + C) - (B + C)$.

Zatem nierówność (4) przyjmie postać

$$(A + C) - (B + C) > 0, \text{ a stąd } A + C > B + C.$$

Jak widzimy, z nierówności

$$A > B$$

wynika nierówność:

$$A + C > B + C,$$

gdzie C oznacza dowolną liczbę, tzn., że

do obu stron nierówności wolno dodać tę samą liczbę.

Np. z nierówności

$$-3 > -8$$

wynika nierówność

$$-3 + 5 > -8 + 5$$

czyli

$$2 > -3.$$

Wniosek. Jeżeli do obu stron nierówności

$$A + B > C + D$$

dodamy tę samą liczbę $-D$, wówczas otrzymamy

$$A + B - D > C + D - D, \text{ a po redukcji}$$

$$A + B - D > C.$$

Jak widać, wyraz D, który w danej nierówności znajdował się po prawej stronie, w nowej nierówności znajduje się po stronie lewej, lecz ze znakiem przeciwnym. Tę własność nierówności wyrażamy, mówiąc, że **w nierówności wolno wyrazy jednej strony „przenosić“ na drugą stronę, lecz ze znakiem przeciwnym.**

Uwaga. Należy pamiętać, że „przenoszenie“ wyrazów z jednej strony nierówności na drugą polega na dodaniu do obu jej stron tej samej liczby i na redukcji.

2°. Dodajmy do obu stron nierówności

$$A > B$$

tę samą liczbę $-C$. Otrzymamy wówczas

$$A + (-C) > B + (-C),$$

albo

$$A - C > B - C.$$

Zatem z nierówności $\mathrm{A} > \mathrm{B}$ wynika nierówność

$$\mathrm{A} - \mathrm{C} > \mathrm{B} - \mathrm{C},$$

gdzie C oznacza dowolną liczbę, tzn.

od obu stron nierówności wolno odjąć tę samą liczbę.

Np. z nierówności

$$3 > -7$$

wynika nierówność

$$3 - 9 > -7 - 9, \text{ czyli}$$
$$-6 > -16.$$

3°. Rozpatrzmy nierówność

$$A > B$$

i wynikającą z niej nierówność

$$A - B > 0.$$

Jeżeli C oznacza dowolną liczbę **dodatnią**, to wyrażenie

$$(A - B)C$$

też jest dodatnie, gdyż $A - B > 0$, tzn. że,

$$(A - B)C > 0. \tag{5}$$

Ale

$$(A - B)\ C = AC - BC,$$

zatem nierówność (5) można napisać w postaci

$$AC - BC > 0, \text{ a stąd } \mathrm{AC} > \mathrm{BC}.$$

Jak widzimy, z nierówności

$$\mathrm{A} > \mathrm{B}$$

wynika nierówność

$$\mathrm{AC} > \mathrm{BC},$$

gdzie C oznacza dowolną liczbę **dodatnią**, tzn., że

obie strony nierówności wolno pomnożyć przez tę samą liczbę dodatnią.

Np. z nierówności

$$7 > -2$$

wynika nierówność

$$7 \cdot 3 > (-2) \cdot 3, \text{ czyli}$$
$$21 > -6.$$

4⁰. Jeżeli C oznacza dowolną liczbę dodatnią, to i odwrotność liczby C tj. $\frac{1}{C}$ też jest liczbą dodatnią. Jeżeli więc obie strony nierówności

$$A > B$$

pomnożymy przez liczbę dodatnią $\frac{1}{C}$, otrzymamy wówczas

$$A \cdot \frac{1}{C} > B \cdot \frac{1}{C}, \text{ czyli}$$
$$\frac{A}{C} > \frac{B}{C}.$$

Zatem z nierówności

$$A > B$$

wynika nierówność

$$\frac{A}{C} > \frac{B}{C},$$

gdzie C oznacza dowolną liczbę dodatnią, tzn., że
obie strony nierówności wolno podzielić przez tę samą liczbę dodatnią.

Np. z nierówności

$$9 > -5$$

wynika nierówność

$$\frac{9}{3} > -\frac{5}{3}, \text{ czyli}$$
$$3 > -1\tfrac{2}{3}.$$

5⁰. Rozpatrzmy nierówność

$$A > B$$

i wynikającą z niej nierówność

$$A - B > 0.$$

Jeżeli C oznacza dowolną liczbę **ujemną**, to wyrażenie

$$(A - B)\, C$$

też jest ujemne, gdyż $A - B > 0$, tzn., że

$$(A - B)\, C < 0. \tag{6}$$

Ale $(A - B)\, C = AC - BC$,
zatem nierówność (6) można napisać w postaci

$$AC - BC < 0, \text{ a stąd}$$
$$AC < BC.$$

Jak widzimy, z nierówności

$$A > B$$

wynika nierówność

$$AC < BC,$$

gdzie C oznacza dowolną liczbę **ujemną**, tzn., że

obie strony nierówności wolno pomnożyć przez tę samą liczbę u j e m n ą, zmieniając jednocześnie zwrot nierówności na przeciwny.

Np. z nierówności

$$8 > -12$$

wynika nierówność

$$8 \cdot (-2) < (-12) \cdot (-2), \text{ czyli}$$
$$-16 < +24.$$

6°. Jeżeli C oznacza dowolną liczbę **ujemną**, to i odwrotność liczby C, tj. $\frac{1}{C}$ też jest liczbą ujemną.

Jeżeli więc obie strony nierówności

$$A > B$$

pomnożymy przez liczbę **ujemną** $\frac{1}{C}$, otrzymamy wówczas

$$A \cdot \frac{1}{C} < B \cdot \frac{1}{C}, \text{ czyli}$$

$$\frac{A}{C} < \frac{B}{C}.$$

Zatem z nierówności

$$A > B$$

wynika nierówność

$$\frac{A}{C} < \frac{B}{C},$$

gdzie C oznacza dowolną liczbę **ujemną**, tzn., że

obie strony nierówności wolno podzielić przez tę samą liczbę u j e m n ą, zmieniając jednocześnie zwrot nierówności na przeciwny.

Np. z nierówności

$$-8 < -5$$

wynika nierówność

$$\frac{-8}{-2} > \frac{-5}{-2}, \text{ czyli}$$

$$4 > 2\tfrac{1}{2}.$$

§ 4. Rozpatrzmy nierówności o jednakowych zwrotach

$$A > B$$

i

$$C > D.$$

Z pierwszej nierówności wynika, że $A - B$ jest dodatnie, a z drugiej — że $C - D$ jest dodatnie. A że suma dodatnich liczb jest też dodatnia, zatem

$$(A - B) + (C - D) > 0, \text{ czyli}$$

$$A + C - B - D > 0, \text{ albo}$$

$$A + C - (B + D) > 0, \text{ więc}$$

$$A + C > B + D.$$

Jak widzimy, z nierówności o jednakowych zwrotach

$$A > B \text{ i } C > D$$

wynika nierówność

$$A + C > B + D, \text{ tzn., że}$$

wolno dodawać stronami nierówności o jednakowych zwrotach.

Np. jeżeli

$$-3 < 8$$

i

$$10 < 11, \text{ to}$$

$$-3 + 10 < 19, \text{ tj. } 7 < 19.$$

§ 5. Rozważmy nierówności o jednakowych zwrotach

$$A > B$$

i

$$C > D$$

gdzie A, B, C, D są dodatnie. Mnożąc obie strony nierówności pierwszej przez $C > O$, a obie strony drugiej nierówności przez $B > O$ otrzymamy

$$AC > BC \quad \text{i} \quad BC > BD,$$

a stąd

$$\mathrm{AC} > \mathrm{BD}, \text{ tzn., że}$$

jeżeli obie strony każdej z nierówności o jednakowych zwrotach są dodatnie, to nierówności takie wolno mnożyć stronami.

Wniosek. Jeżeli A_1, A_2, A_3, ... A_n oraz B_1, B_2, B_3, ... B_n oznaczają liczby dodatnie i $A_1 > B_1$; $A_2 > B_2$; ...; $A_n > B_n$, to, zgodnie z ostatnią własnością nierówności, otrzymamy

$$A_1 \, A_2 \, A_3 \ldots A_n > B_1 \, B_2 \, B_3 \ldots B_n. \tag{7}$$

W wypadku $A_1 = A_2 = A_3 \ldots = A_n$ oraz $B_1 = B_2 = B_3 \ldots = B_n$, nierówność (7) przyjmie postać

$$A_1^n > B_1^n,$$

gdzie n oznacza liczbę naturalną.

Rozwiązywanie nierówności.

§ 6. Zajmiemy się obecnie rozwiązywaniem nierówności warunkowych z jedną zmienną stopnia pierwszego, tzn. takich, w których stronami są wielomiany (lub jednomiany) stopnia pierwszego względem zmiennej.

Rozwiązywanie to opiera się na poznanych w §§ poprzednich własnościach nierówności.

Przykład I. Rozwiązać nierówność

$$x + 2 > 3.$$

Załóżmy, że nierówność ta nie jest sprzeczna, tzn. że istnieją wartości liczbowe zmiennej, dla których nierówność ta jest słuszna. Podstawiając jedną z tych wartości liczbowych na miejsce zmiennej, otrzymamy nierówność liczbową, która posiadać będzie poznane poprzednio własności. A więc, przenosząc 2 ze znakiem przeciwnym na prawą stronę nierówności, otrzymamy

$$x > 3 - 2, \text{ czyli}$$

$$x > 1.$$

Wynik ten oznacza, że nierówność dana będzie słuszna dla każdej wartości x, większej od 1.

Przykład II. Rozwiązać nierówność

$$3 + x < 2x + 5.$$

Rozumując, jak poprzednio, otrzymany

$$x - 2x < 5 - 3, \text{ a po redukcji}$$

$$-x < 2.$$

Mnożąc obie strony przez -1, otrzymamy

$$x > -2.$$

Wynik ten oznacza, że nierówność dana będzie słuszna dla każdej wartości x, większej od -2.

Przykład III. Rozwiązać nierówność

$$-5x + 1 > 2x + 8.$$

Przenosząc $2x$ ze znakiem przeciwnym na lewą stronę, a 1 ze znakiem przeciwnym na prawą stronę nierówności, otrzymamy

$$-5x - 2x > 8 - 1, \text{ a po redukcji}$$

$$-7x > 7.$$

Dzieląc obie strony przez liczbę ujemną -7, otrzymamy
$$x < -1.$$

Przykład IV. Rozwiązać nierówność
$$\frac{x}{3} + 2 < x - \frac{1}{2}.$$
Sprowadzamy obie strony nierówności do wspólnego mianownika. Otrzymamy
$$\frac{2x}{6} + \frac{12}{6} < \frac{6x}{6} - \frac{3}{6}.$$
Mnożąc obie strony nierówności przez liczbę dodatnią 6, mamy
$$2x + 12 < 6x - 3.$$
Postępując, jak w przykładzie III, otrzymamy
$$-4x < -15$$
i po podzieleniu obu stron nierówności przez liczbę ujemną -4
$$x > \frac{15}{4}.$$

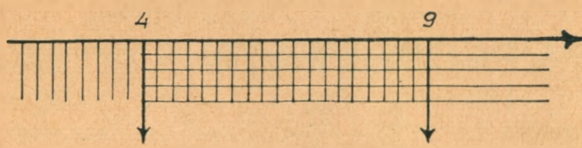
§ 7. Z przykładów powyższych wynika, że aby rozwiązać nierówność 1-go stopnia z jedną zmienną, należy nierówność daną doprowadzić do postaci
$$ax > b \quad \text{albo} \quad ax < b \qquad (a \neq 0)$$
i obie strony otrzymanej nierówności podzielić przez spółczynnik przy zmiennej. Wtedy
$$x > \frac{b}{a} \quad \text{albo} \quad x < \frac{b}{a}, \quad \text{jeżeli} \quad a > 0$$
i
$$x < \frac{b}{a} \quad \text{albo} \quad x > \frac{b}{a}, \quad \text{jeżeli} \quad a < 0.$$

Nierówności jednoczesne.

§ 8. Przykład I. Niechaj dane będą nierówności
$$2x - 3 > x + 1 \quad \text{i} \quad 3x - 8 < 2x + 1.$$
Rozwiązując nierówność pierwszą, otrzymamy
$$x > 4.$$
Rozwiązując nierówność drugą, otrzymamy
$$x < 9.$$
Zobaczmy, czy istnieją wartości x, dla których obie nierówności są **jednocześnie** słuszne.

Na rys. 1 obszar zakreskowany poziomo zawiera tę część osi liczbowej, której punkty są obrazami liczb, większych od 4, tj.

spełniających nierówność pierwszą, a obszar zakreskowany pionowo zawiera tę część osi liczbowej której punkty są obrazami liczb, mniejszych od 9, tj. spełniających nierówność drugą.



rys. 1.

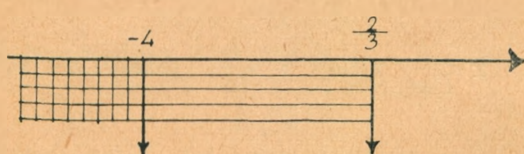
Zatem obszar zakreskowany **jednocześnie** poziomo i pionowo zawiera tę część osi liczbowej, której punkty są obrazami liczb, spełniających **jednocześnie** obie nierówności, tzn. że obie nierówności są słuszne jednocześnie, gdy wartości x są większe od 4 ale jednoczećnie mniejsze od 9, co zapisujemy

$$4 < x < 9.$$

Przykład II. Rozwiązać nierówności

$$\frac{x-1}{2}+\frac{1}{3}<\frac{x}{4} \quad \text{i} \quad \frac{x-2}{3}-2>x.$$

Rozwiązując nierówność pierwszą, otrzymamy $x<\frac{2}{3}$. Rozwiązując nierówność drugą, otrzymamy $x<-4$



rys. 2.

Z rys. 2 widzimy, że każda wartość x, mniejsza od -4 spełnia jednocześnie obie nierówności, zatem obie nierówności są słuszne jednocześnie, gdy

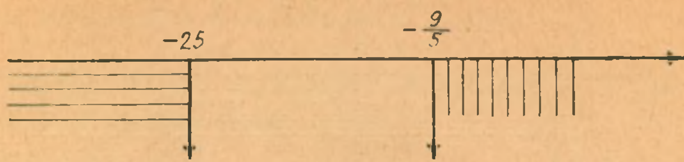
$$x < -4.$$

Przykład III. Rozwiązać nierówności

$$\frac{x+1}{4}+1<\frac{x}{5} \quad \text{i} \quad \frac{x-3}{2}-x<\frac{x}{3}.$$

Po rozwiązaniu każdej nierówności z osobna, otrzymamy

$$x < -25\,; \quad x > -\tfrac{9}{5}$$



rys. 3.

Z rys. 3 widzimy, że nie ma takich wartości x, dla których obie nierówności byłyby słuszne jednocześnie.

Uwaga. Nierówności, rozpatrzone w każdym z powyższych przykładów, nazywają się **nierównościami jednoczesnymi.**

Przykład IV. Rozwiązać nierówność podwójną

$$-3 < 2x + 5 < 2.$$

Tak zapisana nierówność oznacza, że $-3 < 2x + 5$ i jednocześnie $2x + 5 < 2$. Rozwiązanie więc takiej nierówności podwójnej sprowadza się do rozwiązania nierówności jednoczesnych

$$-3 < 2x + 5 \quad \text{i} \quad 2x + 5 < 2.$$

Otrzymamy, że nierówność pierwsza będzie słuszna dla $x > -4$ a nierówność druga będzie słuszna dla $x < -\tfrac{3}{2}$. Stąd, po uzgodnieniu

$$-4 < x < -\tfrac{3}{2}.$$

Nierówności, sprowadzające się do nierówności stopnia pierwszego.

§ 9. Przykład I. Dla jakich wartości x ułamek

$$\frac{x-3}{x+4}$$

będzie dodatni?

Rozwiązanie zadania polega na wyznaczeniu wartości x, dla których słuszna będzie nierówność

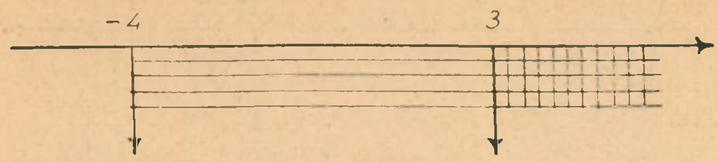
$$\frac{x-3}{x+4} > 0.$$

Otóż ułamek wtedy jest dodatni, gdy licznik i mianownik są tego samego znaku. Zatem nierówność wtedy będzie słuszna, gdy

$$\begin{array}{ccc} x - 3 > 0 & & x - 3 < 0 \\ \text{i} & \text{albo} & \text{i} \\ x + 4 > 0 & & x + 4 < 0. \end{array}$$

Rozwiązując pierwszą parę nierówności jednoczesnych. otrzymamy

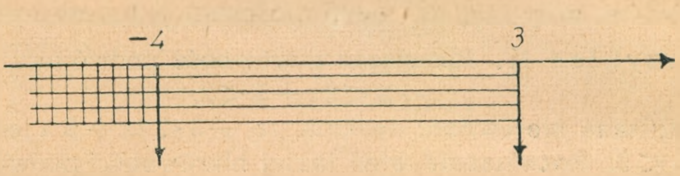
$$x > 3 \quad \text{i} \quad x > -4.$$



Zatem pierwsze dwie nierówności będą słuszne jednocześnie, gdy $x > 3$.

Rozwiązując drugą parę nierówności, otrzymamy

$$x < 3 \quad \text{i} \quad x < -4.$$



Zatem drugie dwie nierówności będą słuszne jednocześnie, gdy $x < -4$.

Dany ułamek będzie więc dodatni, jeżeli

$$x > 3 \quad \text{albo} \quad x < -4.$$

Przykład II. Rozwiązać nierówność

$$\frac{2x-5}{x-1} < 1.$$

Ponieważ obu stron nierówności nie wolno pomnożyć przez $x-1$, gdyż znak wyrażenia $x-1$ nie jest nam znany, przeto, aby rozwiązać daną nierówność, przenosimy 1 ze znakiem przeciwnym na lewą stronę nierówności:

$$\frac{2x-5}{x-1} - 1 < 0.$$

Po sprowadzeniu lewej strony do wspólnego mianownika i przeprowadzeniu redukcji, otrzymamy

$$\frac{x-4}{x-1} < 0.$$

Rozumując, jak w przykładzie poprzednim, przekonamy się, że nierówność dana będzie słuszna, gdy

$$1 < x < 4.$$

Przykład III. Rozwiązać nierówność

$$x^2 - 4 > 0.$$

Rozkładając lewą stronę nierówności na czynniki, otrzymamy

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2).$$

Daną nierówność można więc napisać w postaci

$$(x - 2)(x + 2) > 0.$$

Ponieważ iloczyn dwóch czynników wtedy jest > 0, gdy oba czynniki są tego samego znaku, zatem

$$\begin{array}{ccc} x - 2 > 0 & & x - 2 < 0 \\ \text{i} & \text{albo} & \text{i} \\ x + 2 > 0 & & x + 2 < 0. \end{array}$$

Rozumując, jak w przykładzie I, otrzymamy

$$x < -2 \text{ albo } x > 2.$$

Przykład IV. Rozwiązać nierówność

$$3x^2 - 10x + 3 > 0.$$

Wiemy, że jeżeli wyróżnik trójmianu kwadratowego $ax^2 + bx + c$ jest nieujemny, wówczas trójmian ten można rozłożyć na czynniki stopnia pierwszego:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

gdzie x_1 i x_2 oznaczają pierwiastki równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$.

Lewa strona naszej nierówności jest trójmianem kwadratowym, którego wyróżnik

$$D = 100 - 36 = 64 > 0.$$

Trójmian ten da się więc rozłożyć na czynniki stopnia pierwszego.

Rozwiązując równanie

$$3x^2 - 10x + 3 = 0,$$

otrzymamy

$$x_1 = \tfrac{1}{3}; \; x_2 = 3.$$

Zatem

$$3x^2 - 10x + 3 = 3(x - \tfrac{1}{3})(x - 3),$$

a dana nierówność przyjmie postać

$$3(x - \tfrac{1}{3})(x - 3) > 0.$$

Dzieląc obie strony nierówności przez liczbę dodatnią 3, otrzymamy

$$(x - \tfrac{1}{3})(x - 3) > 0.$$

Rozumując, jak w przykładzie III, otrzymamy

$$x < \tfrac{1}{3} \text{ albo } x > 3.$$

Przykład V. Rozwiązać nierówność

$$2x^2 - 4x + 5 > 0.$$

Lewa strona nierówności jest trójmianem, którego wyróżnik
$$D = 16 - 40 = -24$$
jest ujemny. W tym wypadku trójmian nie da się rozłożyć na czynniki stopnia pierwszego, gdyż równanie $2x^2 - 4x + 5 = 0$ pierwiastków nie posiada. Aby więc rozwiązać daną nierówność, podzielmy obie jej strony przez spółczynnik przy x^2, tj. przez liczbę dodatnią 2. Otrzymamy nierówność:
$$x^2 - 2x + \tfrac{5}{2} > 0.$$
Do lewej jej strony dodajmy 1 i -1; wówczas otrzymamy
$$x^2 - 2x + 1 + \tfrac{5}{2} - 1 > 0, \text{ czyli}$$
$$x^2 - 2x + 1 + \tfrac{3}{2} > 0.$$
Ponieważ $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$, zatem nasza nierówność przyjmie postać
$$(x-1)^2 + \tfrac{3}{2} > 0.$$
Ale $(x-1)^2 + \frac{3}{2}$ jest sumą nieujemnego składnika $(x-1)^2$ i dodatniego składnika $\frac{3}{2}$, zatem lewa strona nierówności jest dodatnia dla każdej wartości liczbowej x, tzn. że nierówność dana jest **bezwarunkowa.**

P r z y k ł a d VI. Rozwiązać nierówność
$$-3x^2 + 6x - 10 > 0.$$

I w tym wypadku wyróżnik trójmianu, znajdującego się po lewej stronie nierówności, jest ujemny:
$$D = 36 - 120 = -84,$$
zatem trójmian ten nie da się rozłożyć na czynniki stopnia pierwszego. Rozumując, jak w przykładzie V, otrzymamy, po podzieleniu obu stron nierówności przez liczbę ujemną -3
$$x^2 - 2x + \tfrac{10}{3} < 0, \text{ a stąd}$$
$$(x-1)^2 + \tfrac{7}{3} < 0.$$
Ponieważ wyrażenie $(x-1)^2 + \frac{7}{3}$ jest dodatnie dla wszystkich wartości liczbowych x, zatem nie ma takich wartości liczbowych x, dla których nierówność dana byłaby słuszna. tzn. że nierówność dana jest **sprzeczna.**

Uwaga. Rozumowania, przeprowadzone w przykładach V i VI, są ogólne, tzn. stosują się przy rozwiązywaniu nierówności
$$ax^2 + bx + c > 0,$$
w której lewa strona jest trójmianem o ujemnym wyróżniku: $b^2 - 4ac < 0$. Wykażemy, że nierówność taka

jest albo bezwarunkowa, albo sprzeczna. Podzielmy obie strony danej nierówności przez a. Otrzymamy

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}>0, \text{ jeżeli } a>0$$

albo

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}<0, \text{ jeżeli } a<0.$$

Lewą stronę każdej z otrzymanych nierówności można przekształcić w sposób następujący:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=$$

$$=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-b^2+4ac}{4a^2}=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-(b^2-4ac)}{4a^2}.$$

Ponieważ, zgodnie z założeniem, b^2-4ac jest <0, zatem $-(b^2-4ac)$ jest >0, tzn. że $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}$ jest sumą nieujemnego składnika $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ i dodatniego składnika $\frac{-(b^2-4ac)}{4a^2}$, gdyż $4a^2>0$. Lewa strona każdej z otrzymanych wyżej nierówności jest więc dodatnia dla każdej wartości x, tzn. że pierwsza z tych nierówności jest bezwarunkowa, a druga jest sprzeczna.

Ćwiczenia.

1. Rozwiązać nierówności:

a) $3x-5>2x+1$; b) $4x+1<2x-5$;
c) $2x-7<3x-9$; d) $3x+4>5x+8$;
e) $\frac{3}{4}x+2<-x+\frac{1}{2}$; f) $-\frac{5}{6}x-\frac{1}{3}>\frac{1}{2}x+2$;
g) $1{,}5x+5<-2{,}3x-2$; i) $-0{,}7x+3{,}2>-1{,}3x-2{,}8$.

2. Rozwiązać nierówności:

a) $\frac{2x-3}{2}+\frac{x}{3}>1$; b) $\frac{5-4x}{3}+x<-2x+\frac{1}{4}$;
c) $2x-\frac{3x+1}{3}>2+\frac{5-4x}{2}$; d) $\frac{5x-3}{2}-\frac{2-3x}{3}<\frac{x-2}{4}$;
e) $\frac{4x+3}{2}-\frac{5x+4}{6}>\frac{x-7}{2}+\frac{2x+5}{3}$;
f) $(x-2)^2+3x<(x+2)^2+2x-3$;
g) $(x-3)^3+9x^2-5x+2>x^3-8$;
h) $\frac{x^2-x+4}{3}+\frac{2x-1}{2}<\frac{x^2}{3}+3x-1$.

3. Rozwiązać nierówności jednoczesne:

a) $4x-5>3$ i $2x-6<3$;
b) $5x-7>3x+7$ i $6x+2<5x+10$;
c) $3x-10<2x-7$ i $7x+1<5x+9$;
d) $x+2>3x-6$ i $4x-7>x+8$;
e) $\frac{3x-5}{4}<x+6$ i $\frac{2x+3}{2}-1>\frac{x-1}{3}$;
f) $6x+\frac{5}{7}>4x+7$ i $\frac{8x+3}{2}<2x+25$;
g) $8x-15>\frac{5x-8}{2}$ i $2(2x+3)>5x+\frac{3}{4}$;
h) $\frac{4x-5}{7}<x+3$ i $\frac{3x+8}{4}+1>2x-4$.

4. Rozwiązać nierówności podwójne:

a) $2x<x-3<5$;
b) $2-x<x+3<4$;
c) $\frac{3}{4}+y<1-y<2y+\frac{1}{2}$;
d) $\frac{m-2}{3}-1<2m+1<\frac{m+1}{2}+3$;
e) $(k-1)^2-4<(k+1)^2+1<k^2+5$;
f) $\frac{2k^2-3}{2}+1<k^2+k+1<(k+1)^2+7$.

5. Rozwiązać nierówności:

a) $\frac{x-3}{x-2}>0$; b) $\frac{2x+4}{3x-6}<0$;
c) $\frac{3x-7}{2x+5}>0$; d) $\frac{4x-9}{5-x}>0$;
e) $\frac{7-3x}{2x-5}<0$; f) $\frac{2x+1}{3x-2}>2$;
g) $\frac{x-5}{2x-3}+1>\frac{2x}{2x-3}$; h) $\frac{z+5}{3z-1}-3<\frac{2z}{3z-1}$;
i) $\frac{y-5}{3}+\frac{2y+1}{2y-3}>\frac{y-3}{3}$; j) $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x^2-1}<\frac{1}{x-1}$.

6. Rozwiązać nierówności:

a) $x^2-9>0$; b) $2a^2-7<a^2+9$;
c) $(z+3)^2>6z+25$; d) $y^2-5y<0$;
e) $(x+1)^2<2x-10$; f) $2y^2-8y+5>(y-4)^2+14$;
g) $x^2-7x+12>0$; h) $x^2-7x+10<0$;
i) $x^2+8>9x$; k) $x^2+8<6x$;

l) $2x^2 - 5x + 2 > 0$; m) $3x^2 + 10x + 3 < 0$;
n) $2x^2 - 5x - 12 > 0$; p) $6x^2 - 13x + 6 < 0$;
r) $2x^2 + x - 21 < 0$; s) $3x^2 + 2x - 1 > 0$.

7. Dla jakich wartości liczby k równania:

a) $2x^2 - 3x + k - 1 = 0$; b) $3x^2 - 4x + 2 - k = 0$;
c) $kx^2 + 5x + 1 = 0$; d) $(k - 3)x^2 - 2x - 3 = 0$;
e) $(2k + 1)x^2 + 3x + 2 = 0$

posiadają po dwa różne pierwiastki?

8. Dla jakich wartości litery m równania:

a) $x^2 - 2mx + 4m - 3 = 0$; b) $x^2 - mx + 3m - 5 = 0$;
c) $x^2 + 2mx + m + 2 = 0$; d) $x^2 - 2(m - 7)x + 1 = 0$;
e) $10x^2 - 6mx + (m^2 - 10) = 0$; f) $(m - 3)x^2 + 2x - 4(m - 3) = 0$

posiadają po dwa różne pierwiastki?

9. Wykazać, że nierówności:

a) $x^2 - 4x + 12 > 0$; b) $4x^2 - 8x + 6 > 0$;
c) $-x^2 + 2x - 6 < 0$; d) $-2x^2 - 4x - 9 < 0$

są bezwarunkowe.

10. Wykazać, że nierówności:

a) $x^2 - 6x + 20 < 0$; b) $-x^2 + 10x - 30 > 0$;
c) $5x^2 + 20x + 21 < 0$; d) $-3x^2 + 12x - 25 > 0$

są sprzeczne.

11. Starszy brat posiada w P. K. O. 345 *zł* oszczędności, a młodszy — 225 *zł*. Starszy podejmuje co tydzień 7 *zł*, a młodszy podejmuje jednocześnie z nim 3 *zł*. Po ilu tygodniach młodszy brat posiadać będzie więcej oszczędności, niż starszy?

12. Dany jest kwadrat i prostokąt. Jeden z boków prostokąta jest o 3 *cm* mniejszy od boku kwadratu, a drugi bok prostokąta jest o 4 *cm* większy od boku tegoż kwadratu. Jaka winna być długość boku kwadratu, aby jego pole było większe od pola prostokąta?

13. Z dwóch miast A i B, odległych od siebie o 21 *km*, wyruszają jednocześnie w jednym kierunku (od B do A) dwaj cykliści. Cyklista, jadący z A, posuwa się z prędkością 15 *km/godz.*, a cyklista, jadący z B — z prędkością 18 *km/godz.* Po ilu godzinach cyklista B przegoni cyklistę A?

14. Dla jakich wartości k, oba rozwiązania układu równań

$$x - y = k - 1$$
$$2x - y = 3 - k$$

będą

a) jednocześnie dodatnie?
b) jednocześnie ujemne?
c) jedno dodatnie, a drugie ujemne?

15. Prosta, będąca wykresem funkcji $y = 2x + k - 5$, przecina prostą, będącą wykresem funkcji $y = 3x - 2k + 1$, w punkcie M. Dla jakich wartości k punkt M leżeć będzie wewnątrz kwadratu, którego wierzchołki mają spółrzędne: (0;0); (0;3); (3;0); (3;3).

ROZDZIAŁ II.

Uogólnienie pojęcia potęgi. Logarytmy.

Część I. Wykładniki zerowe, ujemne i ułamkowe.

§ 10. Nazwaliśmy **n**-tą potęgą liczby **a** iloczyn **n** czynników **a**. Takie określenie potęgi zawierało jednak założenie, że **n** jest liczbą naturalną, przy czym umówiliśmy się, że $a^1 = a$.

Uogólnimy obecnie pojęcie potęgi, tzn. określimy **n**-tą potęgę liczby **a** w założeniu, że **n** jest liczbą dowolną.

§ 11. Wiemy z algebry, że jeżeli a^m i a^n oznaczają dwie różne potęgi naturalne tej samej podstawy **a**, przy czym $m > n$, to, gdy $a \neq 0$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}. \qquad (1)$$

Gdybyśmy założyli, że wzór ten jest słuszny i w wypadku, gdy $m = n$, wówczas otrzymalibyśmy dla $a \neq 0$

z jednej strony: $\frac{a^m}{a^m} = 1$,

z drugiej strony: $\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0$, a stąd

$$a^0 = 1. \qquad (2)$$

Zerową potęgę dowolnej liczby $a \neq 0$ można więc określić jako potęgę, otrzymaną przy dzieleniu dwóch równych potęg naturalnych tej samej liczby a. A jak wskazuje wzór (2)

zerowa potęga dowolnej liczby różnej od zera jest równa 1.

Mamy więc: $5^0 = 1$; $(-5)^0 = 1$; $(-\frac{2}{3})^0 = 1$; $(0{,}13)^0 = 1$.

§ 12. Zakładając w dalszym ciągu, że wzór (1) jest słuszny i w wypadku, gdy $m < n$, to oznaczając: $n = m + p$ $(p > 0)$, otrzymalibyśmy

z jednej strony

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^{m+p}} = \frac{a^m}{a^m \cdot a^p} = \frac{1}{a^p},$$

z drugiej strony

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^{m+p}} = a^{m-m-p} = a^{-p},$$

stąd

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}. \tag{3}$$

Zatem potęgę o wykładniku ujemnym $(-p)$ można określić, jako odwrotność p-tej potęgi tej samej liczby.

Tak więc

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}; \quad (-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9};$$

$$(-0{,}5)^{-3} = \frac{1}{(-0{,}5)^3} = -\frac{1}{0{,}125}.$$

§ 13. Wiemy z nauki o pierwiastkach, że np.

$$\sqrt[4]{a^{12}} = \sqrt[4]{(a^3)^4} = a^3 = a^{\frac{12}{4}}; \quad \sqrt[3]{a^{15}} = \sqrt[3]{(a^5)^3} = a^5 = a^{\frac{15}{3}}$$

ogólnie

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, jeżeli m jest wielokrotnością n i $a \geq 0$.

Jeżeli m nie jest wielokrotnością n, wówczas określamy $\frac{m}{n}$-tą potęgę liczby nieujemnej a jako liczbę $\sqrt[n]{a^m}$, tzn. umawiamy się, że dla $a \geq 0$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}. \tag{4}$$

Tak np. $\sqrt[5]{a^3} = a^{\frac{3}{5}}$; $\sqrt[4]{a^7} = a^{\frac{7}{4}}$; $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$.

Uwaga. Określając potęgę liczby a o wykładniku zerowym i ujemnym, musieliśmy założyć, że $a \neq 0$. Określając zaś potęgę liczby a o wykładniku ułamkowym, musieliśmy założyć, że $a > 0$. Zatem, dowolna potęga liczby a tylko wówczas będzie określona, gdy $a > 0$.

§ 14. Aby przekonać się, że działania na potęgach o wykładnikach zerowych, ułamkowych i ujemnych podlegają tym samym prawom, co i działania na potęgach o wykładnikach naturalnych, należy udowodnić, że wzory

$$(a \cdot b)^k = a^k \cdot b^k \quad (5); \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^k = \frac{a^k}{b^k} \quad (6)$$

$$a^k \cdot a^l = a^{k+l} \quad (7); \qquad a^k : a^l = a^{k-l} \quad (8)$$

$$(a^k)^l = a^{kl} \quad (9)$$

gdzie $a > 0$, $b > 0$, są słuszne dla wykładników zerowych, ułamkowych i ujemnych.

Ponieważ dowody słuszności każdego z tych wzorów przebiegają jednakowo, gdyż oparte są one na określeniu wykładników zerowych, ułamkowych i ujemnych, przeto dla przykładu podamy dwa z nich:

1) Wykażemy, że wzór

$$a^k : a^l = a^{k-l}$$

jest słuszny dla wykładników ułamkowych.

Niechaj $k = \frac{m}{n}$ i $l = \frac{p}{r}$ (m, n, p, r — oznaczają liczby naturalne).

Zatem

$$a^k : a^l = a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{r}} = \sqrt[n]{a^m} : \sqrt[r]{a^p} = \sqrt[nr]{a^{mr}} : \sqrt[nr]{a^{np}} = \sqrt[nr]{a^{mr} : a^{np}} = \sqrt[nr]{a^{mr-np}} =$$

$$= a^{\frac{mr-np}{nr}} = a^{\frac{mr}{nr} - \frac{np}{nr}} = a^{\frac{m}{n} - \frac{p}{r}} = a^{k-l}$$

c. b. d. d.

2) Wykażemy, że wzór

$$(a^k)^l = a^{kl}$$

jest słuszny dla wykładników ujemnych.

Niechaj $k = -p$; $l = -r$ (p i r oznaczają liczby naturalne). Zatem

$$(a^k)^l = (a^{-p})^{-r} = \frac{1}{(a^{-p})^r} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^p}\right)^r} = \frac{1}{\frac{1}{a^{pr}}} = a^{pr} = a^{(-p)(-r)} = a^{kl}$$

c. b. d. d.

P r z y k ł a d I. Obliczyć

$$a^{-3} \cdot a^{-2}.$$

Obliczenie wykonać można dwoma sposobami:

1) $a^{-3} \cdot a^{-2} = a^{-3-2} = a^{-5}$

2) $a^{-3} \cdot a^{-2} = \frac{1}{a^3} \cdot \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^5} = a^{-5}$.

Wyniki są jednakowe.

Przykład II. Obliczyć

$$a^{\frac{5}{3}} \cdot a^{-2}.$$

Obliczenie wykonać można dwoma sposobami:

1) $a^{\frac{5}{3}} \cdot a^{-2} = a^{\frac{5}{3}-2} = a^{\frac{5}{3}-\frac{6}{3}} = a^{-\frac{1}{3}}$

2) $a^{\frac{5}{3}} \cdot a^{-2} = \sqrt[3]{a^5} \cdot \frac{1}{a^2} = \frac{\sqrt[3]{a^5}}{a^2} = \sqrt[3]{\frac{a^5}{a^6}} = \sqrt[3]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{3}}} = a^{-\frac{1}{3}}.$

§ 15. W §§ poprzednich określiliśmy n-tą potęgę dodatniej liczby a w założeniu, że wykładnik n jest dowolną liczbą **wymierną**. Określimy obecnie na przykładzie n-tą potęgę dodatniej liczby a w założeniu, że wykładnik n jest liczbą **niewymierną**.

Rozpatrzmy liczbę niewymierną $\sqrt{5}$. Obliczając jej kolejne przybliżenia dziesiętne z niedomiarem otrzymamy ciąg liczb

$$2;\ 2{,}2;\ 2{,}23;\ 2{,}236;\ 2{,}2360;\ 2{,}23606;\ \ldots$$

Liczba 2 jest wartością przybliżoną $\sqrt{5}$ w pierwszym stopniu dokładności; liczba 2,2 — wartością przybliżoną $\sqrt{5}$ w drugim stopniu dokładności itd.

Utwórzmy ciąg liczb

$$10^{2};\ 10^{2,2};\ 10^{2,23};\ 10^{2,236};\ 10^{2,2360};\ 10^{2,23606};\ \ldots$$

Liczby tego ciągu są potęgami liczby 10, a wykładnikami tych potęg są kolejne przybliżenia dziesiętne liczby $\sqrt{5}$.

Przyjmujemy, że potęgi te są przybliżeniami (jakkolwiek nie dziesiętnymi) liczby, którą oznaczamy symbolem $10^{\sqrt{5}}$, tj. potęgi o wykładniku niewymiernym.

W podobny sposób określić można liczbę a^n, gdzie a oznacza dowolną liczbę dodatnią, n zaś dowolną liczbę niewymierną.

Pamiętając, że liczby względne wymierne i niewymierne tworzą zbiór liczb rzeczywistych, możemy powiedzieć obecnie, że symbol a^n, — gdzie a jest dowolną liczbą dodatnią, n zaś dowolną liczbą rzeczywistą, — oznacza potęgę o wykładniku rzeczywistym.

Przyjmiemy bez dowodu, że poznane poprzednio prawa działań na potęgach o wykładniku wymiernym stosują się i do potęg o wykładniku niewymiernym, tzn., że prawa te są ogólnymi prawami działań na potęgach o dodatniej podstawie i o dowolnym wykładniku rzeczywistym.

Funkcja wykładnicza.

§ 16. Niechaj a oznacza dowolną liczbę dodatnią. Rozważmy funkcję, określoną równaniem $y = a^x$.

Funkcja $y = a^x$, gdzie zmienna niezależna jest wykładnikiem potęgi, nazywa się funkcją wykładniczą.

Gdyby $a = 1$, wówczas funkcja wykładnicza miałaby stałą wartość 1 (gdyż $y = 1^x = 1$) dla wszystkich wartości x.

Dlatego też rozważać będziemy funkcję wykładniczą w założeniu, że $a \neq 1$.

§ 17. Własności funkcji wykładniczej.

1) Jeżeli m oznacza dowolną liczbę rzeczywistą, to dla $x = m$ funkcja wykładnicza przyjmuje jedną tylko wartość, równą a^m, przy czym wartość ta jest zawsze dodatnia, gdyż, według założenia, $a > 0$.

Np. gdy $a = 2$, to dla $x = \frac{1}{2}$, $y = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$, dla $x = -3$, $y = 2^{-3} = \frac{1}{8}$;

gdy $a = \frac{2}{5}$, to dla $x = \frac{3}{4}$, $y = (\frac{2}{5})^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{\frac{8}{125}}$; dla $x = -2$,

$$y = (\tfrac{2}{5})^{-2} = \frac{1}{\frac{4}{25}} = \frac{25}{4}.$$

2) Jeżeli $x = 0$, wówczas funkcja wykładnicza przyjmuje wartość 1, gdyż $a^0 = 1$.

3) Jeżeli $x = 1$, wówczas funkcja wykładnicza przyjmuje wartość $a^1 = a$.

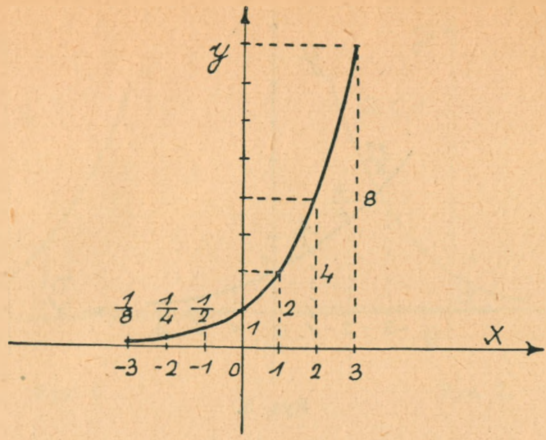
4) Rozpatrzmy jakąkolwiek funkcję wykładniczą w wypadku, gdy $a > 1$, np.

$$y = 2^x.$$

Utwórzmy tablicę funkcji $y = 2^x$ ($\nearrow$ oznacza: wzrasta).

x	$\ldots \nearrow -3 \nearrow -2 \nearrow -1 \nearrow 0 \nearrow \frac{1}{2} \nearrow 1 \nearrow 2 \nearrow 2\frac{1}{2} \nearrow 3 \nearrow \ldots$
y	$\ldots \nearrow \frac{1}{8} \nearrow \frac{1}{4} \nearrow \frac{1}{2} \nearrow 1 \nearrow \sqrt{2} \nearrow 2 \nearrow 4 \nearrow 4\sqrt{2} \nearrow 8 \nearrow \ldots$

Na podstawie tej tablicy wykres funkcji $y = 2^x$ przedstawia się następująco (rys. 4):



Rys. 4.

Z tablicy funkcji i z wykresu widzimy, że:

a) jeżeli wartości zmiennej niezależnej są ujemne i **maleją** nieograniczenie, to wartości funkcji $y = 2^x$ są dodatnie i **maleją** nieograniczenie, tzn. maleją do 0.

b) jeżeli wartości zmiennej niezależnej są dodatnie i **wzrastają** nieograniczenie, to wartości funkcji $y = 2^x$ są również dodatnie i **wzrastają** nieograniczenie.

Wyniki te potwierdzają słuszność twierdzenia, które przyjmiemy bez dowodu:

Jeżeli x, zmieniając się w zakresie nieograniczonym, przyjmuje wartości wzrastające, wówczas wartości funkcji wykładniczej $y = a^x$, gdzie $a > 1$, wzrastają od zera nieograniczenie.

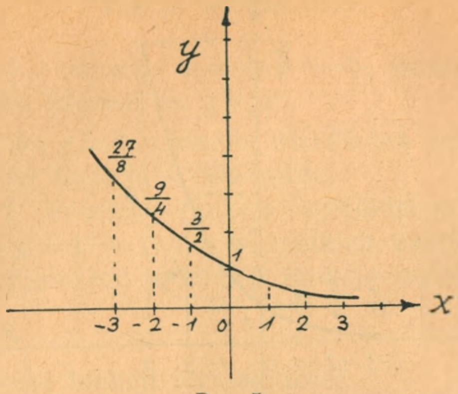
5) Rozpatrzmy jakąkolwiek funkcję wykładniczą w wypadku, gdy $0 < a < 1$, np.

$$y = (\tfrac{2}{3})^x.$$

Utwórzmy tablicę tej funkcji. ($\searrow$ oznacza: maleje).

x	$\ldots \nearrow -3 \nearrow -2 \nearrow -1 \nearrow 0 \nearrow \frac{1}{2} \nearrow 1 \nearrow 1\frac{1}{2} \nearrow 2 \nearrow 3 \nearrow \ldots$
y	$\ldots \searrow \frac{27}{8} \searrow \frac{9}{4} \searrow \frac{3}{2} \searrow 1 \searrow \sqrt{\frac{2}{3}} \searrow \frac{2}{3} \searrow \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} \searrow \frac{4}{9} \searrow \frac{8}{27} \searrow \ldots$

Na podstawie tej tablicy wykres funkcji $y = (\frac{2}{3})^x$ przedstawia się następująco (rys. 5).



Rys. 5.

Z tablicy funkcji i z wykresu widzimy, że

a) jeżeli wartości zmiennej niezależnej są ujemne i maleją nieograniczenie, to wartości funkcji wykładniczej są dodatnie i wzrastają nieograniczenie.

b) jeżeli wartości zmiennej niezależnej są dodatnie i wzrastają nieograniczenie, to wartości funkcji wykładniczej są dodatnie i maleją nieograniczenie, tzn. maleją do 0.

Wyniki te potwierdzają słuszność twierdzenia, które przyjmiemy bez dowodu:

Jeżeli x, zmieniając się w zakresie nieograniczonym, przyjmuje wartości wzrastające, wówczas wartości funkcji wykładniczej $y = a^x$, gdzie $0 < a < 1$, maleją od dowolnie wielkich wartości dodatnich do zera.

Poznane własności funkcji wykładniczej można zestawić w sposób następujący:

jeżeli x, zmieniając się w zakresie nieograniczonym, przyjmuje wartości wzrastające, to funkcja wykładnicza $y = a^x$

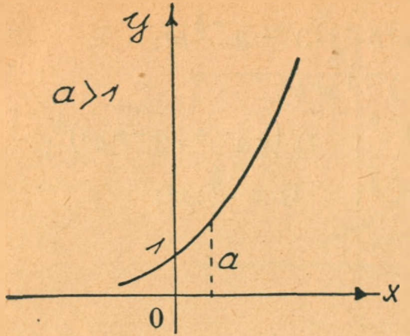
wzrasta od 0 do dowolnie wielkich wartości dodatnich, gdy $a > 1$,

maleje od dowolnie wielkich wartości dodatnich do 0, gdy $0 < a < 1$,

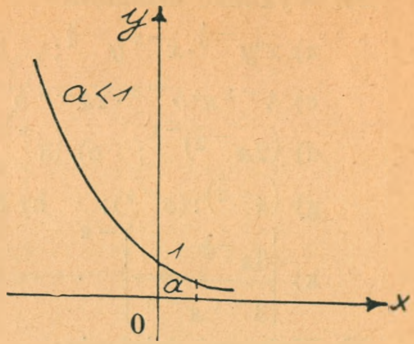
przy czym przyjmuje wartość 1 dla $x = 0$ i wartość a dla $x = 1$.

Mówimy, że funkcja wykładnicza $y = a^x$ jest **rosnąca**, gdy $a > 1$, i **malejąca**, gdy $0 < a < 1$.

Rys. 6. przedstawia wykres funkcji $y = a^x$, gdy $a > 1$, a rys. 7. wykres funkcji $y = a^x$, gdy $0 < a < 1$.



Rys. 6.



Rys. 7.

Ćwiczenia.

16. Obliczyć:

a) 2^{-4}; b) 5^{-2}; c) $(-\frac{3}{4})^{-3}$; d) $(0{,}2)^{-2}$; e) $(-0{,}5)^{-2}$;

f) $(-3\frac{1}{2})^{-1}$; g) $(\frac{2}{5})^{-1}$; h) $\frac{1}{3^{-2}}$; i) $\frac{5}{5^{-3}}$; k) $\frac{2^{-3}}{3^{-2}}$.

17. Wykonać działania:

a) $2^{-1}+2^{-2}+2^{-3}$; b) $3^0+3^{-2}-3^{-3}$; c) $2^{-4}+4^{-2}$;

d) $\frac{1}{4^{-1}}+\frac{3}{2^{-3}}$; e) $a^{-2}+a^{-5}$; f) $(x^0+x^{-1})\cdot x^{-2}$;

g) $(y^{-3}+y^{-2}-y^{-1}):y^{-2}$; h) $(z^{-1}+z^{-2})\,(z^{-1}-z^{-2})$.

18. Napisać następujące wyrażenia w postaci potęg o wykładniku ułamkowym:

a) $\sqrt[3]{x^2}$; b) $\sqrt[5]{a}$; c) $\sqrt[4]{a^3}+\sqrt[3]{b^4}$; d) $\sqrt[n-1]{y^{n^2-1}}$ $(n>1)$;

e) $\sqrt[x]{a^{2x-3}}$; f) $\sqrt[k-1]{x^{k+1}}$ $(k>1)$; g) $\sqrt{b^{-3}}$; h) $\sqrt[3]{k^{\frac{2}{5}}}$;

i) $\sqrt[n+2]{y^{-2}}$ $(n>-2)$.

19. Przekształcić następujące wyrażenia w ten sposób, aby nie zawierały potęg o wykładniku ujemnym i ułamkowym:

a) $x^{-5}\cdot b^{\frac{1}{2}}$; b) $a^{-\frac{1}{2}}\cdot y^{\frac{3}{2}}$; c) $a^{-2}\cdot b^{\frac{3}{5}}\cdot c^{-1}$; d) $\frac{2^{-1}\cdot a^{-3}}{3^{-2}\cdot b^{-4}}$;

e) $\frac{1}{3^{-3}\cdot a^{-5}\cdot b^{-7}}$; f) $a^{\frac{2}{3}}+a^{-\frac{2}{3}}$; g) $\frac{x^{-2}\cdot y^{-3}}{x^{\frac{1}{2}}\cdot y^{\frac{1}{3}}}$.

20. Obliczyć:

a) $8^{-\frac{2}{3}}$; b) $3^{-\frac{1}{4}}\cdot 27^{-\frac{1}{4}}$; c) $125^{-\frac{1}{3}}$;

d) $(\frac{25}{36})^{-\frac{1}{2}}$; e) $(0{,}5)^{-\frac{2}{3}}\cdot 16^{-\frac{2}{3}}$; f) $(\frac{8}{27})^{-\frac{2}{3}}$.

21. Wykonać działania:

a) $x^0 y^{-\frac{1}{3}} \cdot x^{-5} y^{-\frac{2}{3}}$; b) $2a^3 b^{-4} \cdot 3^{-1} a^{-\frac{1}{2}} b^2$;

c) $4^{-1} a^4 b^{-5} \cdot 2a^{-2} b^{-1} \cdot 3^{-\frac{1}{2}} a^0 b^3$.

d) $\left(2a^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}$; e) $\left(3^{-1} x^{\frac{1}{2}}\right)^{-2}$; f) $\left(\frac{2}{5} a^{-6} \cdot 2^{-3} a^3\right)^3$;

g) $\left(a^{-\frac{3}{2}}\right) : (a^{-4})$; h) $b^0 : b^{-\frac{5}{2}}$; i) $x^{-\frac{4}{3}} : x^2$;

k) $\left\{\frac{3a^{-\frac{1}{2}}}{3^{-1} a^{-3}}\right\}^{-2}$.

22. Wykonać działania:

a) $\left(4^{\frac{1}{2}} + 27^{\frac{1}{3}}\right)^2$; b) $\left(2^{-1} - 3^{\frac{1}{3}}\right)^2$;

c) $\left(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}\right) \left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}\right)$; d) $\left(a^0 - b^{-\frac{1}{2}}\right) \left(1 + b^{-\frac{1}{2}}\right)$;

e) $\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right) \cdot \left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)^{-1}$;

f) $\left(x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}} + x^0\right)^{-1} \cdot \left(x^{\frac{1}{3}} - 1\right)^{-1}$.

23. Wykreślić funkcje:

a) $y = (\frac{1}{2})^x$; b) $y = 3^x$; c) $y = (\frac{1}{3})^x$; d) $y = (1\frac{1}{2})^x$;

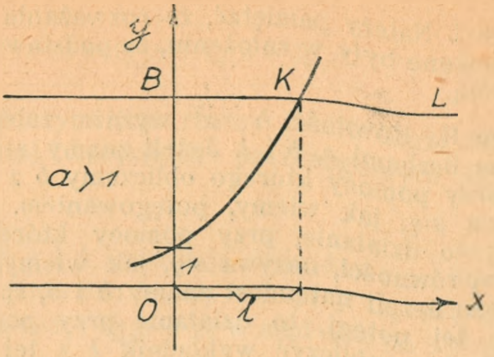
e) $y = 2\,(\frac{1}{4})^x$.

Część II. Logarytmy.

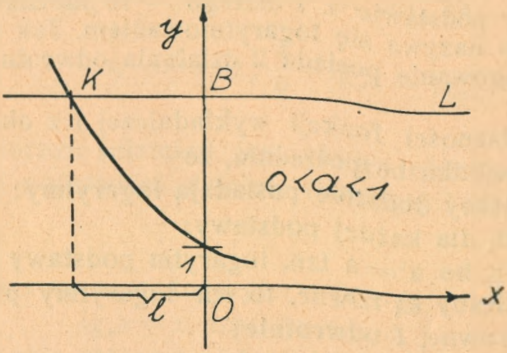
§ 18. Omawiając własności funkcji wykładniczej $y = a^x$, przekonaliśmy się, że dla każdej wartości zmiennej niezależnej x otrzymujemy jedną tylko i to dodatnią wartość funkcji (§ 17). Powstaje pytanie: czy dla każdej dodatniej wartości funkcji wykładniczej otrzymamy również jedną tylko wartość zmiennej niezależnej x?

Aby na pytanie to odpowiedzieć, rozpatrzmy wykres funkcji wykładniczej.

Niechaj b oznacza dowolną liczbę dodatnią. Na dodatnim kierunku osi y obierzmy punkt B tak, aby jego rzędna była równa b (rys. 8 i 9) i przez punkt B poprowadźmy prostą BL równoległą do osi x. Ponieważ funkcja wykładnicza jest rosnąca, jeżeli $a > 1$, a malejąca, jeżeli $0 < a < 1$, przeto prosta BL przetnie wykres funkcji wykładniczej tylko w jednym punkcie K, którego rzędna też równa jest b. Oznaczmy przez l odciętą punktu K. Ponieważ punkt K jest punktem wykresu funkcji wykładniczej, zatem jego spółrzędne muszą sprawdzać równanie $y = a^x$, tzn., że zachodzi równość $$b = a^l.$$



Rys. 8.



Rys. 9.

Zatem każdej dodatniej wartości funkcji wykładniczej odpowiada jedna tylko wartość zmiennej niezależnej. Inaczej mówiąc, każdej dodatniej liczbie b odpowiada jeden tylko wykładnik potęgi, do której należy podnieść podstawę a, aby otrzymać liczbę b.

Określenie: Wykładnik potęgi, do której należy podnieść daną podstawę, aby otrzymać daną liczbę, nazywa się logarytmem danej liczby przy danej podstawie.

Zatem równość $b = a^l$ oznacza, że l jest logarytmem liczby b przy podstawie a, co zapisujemy

$$l = \lg_a b.$$

Tak np. $\lg_5 25 = 2$, bo $5^2 = 25$; $\lg_3 81 = 4$, bo $3^4 = 81$; $\lg_{10} 1000 = 3$, bo $10^3 = 1000$; $\lg_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} = 3$, bo $(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$; $\lg_{\frac{1}{4}} 64 = -3$, bo $(\frac{1}{4})^{-3} = \frac{1}{(\frac{1}{4})^3} = 64$.

Uwaga I. Należy pamiętać, że rozważania podane przeprowadzone były w założeniu, że podstawa a jest liczbą dodatnią.

Uwaga II. Równość $b = a^l$ wyraża zależność między trzema liczbami a, b i l. Jeżeli znamy a i l, to działanie, przy pomocy którego obliczamy b z tej równości, nazywa się, jak wiemy, potęgowaniem. Jeżeli znamy b i l, to działanie, przy pomocy którego obliczamy a z tej równości, nazywa się, jak wiemy, pierwiastkowaniem. Jeżeli natomiast znamy b i a, tj. potęgę i podstawę tej potęgi, to działanie przy pomocy którego moglibyśmy obliczyć wykładnik l z tej równości, nie było dotąd określone. Jak obecnie wiemy, obliczanie tego wykładnika oznacza obliczanie logarytmu liczby b przy podstawie a. I dlatego — to nieznane dotąd działanie nazywa się **logarytmowaniem**. Jak więc widzimy, potęgowanie posiada 2 działania odwrotne.

§ 19. Z własności funkcji wykładniczej i z określenia logarytmu liczby wynika bezpośrednio, że

a) tylko liczby dodatnie posiadają logarytmy;

b) $\lg_a 1 = 0$, dla każdej podstawy;

c) $\lg_a a = 1$, bo $a^1 = a$ tzn. logarytm podstawy jest równy 1;

d) jeżeli liczby są równe, to ich logarytmy przy tej samej podstawie są równe, i odwrotnie;

e) jeżeli dwie liczby są nierówne, to — przy tej samej podstawie większej od 1 — liczbie większej odpowiada większy logarytm, a przy tej samej dodatniej podstawie mniejszej od 1 — liczbie większej odpowiada mniejszy logarytm (i odwrotnie).

Tak np. $\lg_5 25 = 2$, a $\lg_5 125 = 3$.

Natomiast $\lg_{\frac{1}{5}} 25 = -2$, a $\lg_{\frac{1}{5}} 125 = -3$.

Logarytm iloczynu, ilorazu, potęgi i pierwiastka.

§ 20. Niech $a, b, c, \ldots, n$ oznaczają dowolne liczby dodatnie, zaś $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ — odpowiednio ich logarytmy przy tej samej podstawie p.

Mamy więc: $\lg_p a = x_1$; $\lg_p b = x_2$; $\ldots$; $\lg_p n = x_n$ czyli $a = p^{x_1}$; $b = p^{x_2}$; $\ldots$; $n = p^{x_n}$.

Mnożąc stronami te równości, otrzymamy

$a \cdot b \cdot c \cdot \ldots n = p^{x_1} \cdot p^{x_2} \cdot p^{x_3} \ldots p^{x_n}$, czyli

$a \cdot b \cdot c \cdot \ldots n = p^{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots x_n}$, a stąd, zgodnie z określeniem logarytmu,

$\lg_p (a \cdot b \cdot c \ldots n) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, albo

$\lg_p (a \cdot b \cdot c \ldots n) = \lg_p a + \lg_p b + \lg_p c + \ldots + \lg_p n.$ (10)

Zatem

logarytm iloczynu jest równy sumie logarytmów (przy tej samej podstawie) wszystkich poszczególnych czynników tego iloczynu.

§ 21. Niech a i b oznaczają dwie dowolne liczby dodatnie, x_1 i x_2 — odpowiednio ich logarytmy przy tej samej podstawie p.

Mamy: $\lg_p a = x_1$; $\lg_p b = x_2$ a stąd $a = p^{x_1}$; $b = p^{x_2}$.

Dzieląc stronami te równości, otrzymamy

$$\frac{a}{b} = \frac{p^{x_1}}{p^{x_2}} \text{ czyli } \frac{a}{b} = p^{x_1 - x_2}, \text{ tzn., że}$$

$$\lg_p \frac{a}{b} = x_1 - x_2 \text{ albo } \lg_p \frac{a}{b} = \lg_p a - \lg_p b. \quad (11)$$

Zatem

logarytm ilorazu (ułamka) jest równy różnicy logarytmów (przy tej samej podstawie) dzielnej (licznika) i dzielnika (mianownika).

§ 22. Niech x oznacza logarytm a $(a > 0)$ przy podstawie p:

$$\lg_p a = x, \text{ tzn., że } a = p^x.$$

Podnieśmy obie strony tej równości do potęgi k. Otrzymamy

$$a^k = (p^x)^k \text{ tj. } a^k = p^{kx}, \text{ co oznacza, że}$$

$$\lg_p a^k = kx \text{ albo } \lg_p a^k = k \lg_p a. \quad (12)$$

Zatem

logarytm potęgi jest równy iloczynowi wykładnika tej potęgi przez logarytm (przy tej samej podstawie) liczby potęgowanej.

§ 23. Niech x oznacza logarytm liczby a $(a > 0)$ przy podstawie p:

$$\lg_p a = x, \text{ tzn., że } p^x = a.$$

Wyciągając pierwiastek k-tego stopnia z obu stron tej równości otrzymamy:

$$\sqrt[k]{a} = \sqrt[k]{p^x}, \text{ albo}$$

$$\sqrt[k]{a} = p^{\frac{x}{k}}, \text{ co oznacza, że } \lg_p \sqrt[k]{a} = \frac{x}{k}, \text{ albo, że}$$

$$\lg_p \sqrt[k]{a} = \frac{\lg_p a}{k}. \quad (13)$$

Zatem
logarytm pierwiastka jest równy ilorazowi logarytmu (przy tej samej podstawie) liczby podpierwiastkowej przez wykładnik pierwiastka.

Uwaga. Wyrażeń

$$\lg_p(a+b); \qquad \lg_p(a-b)$$

nie można prościej przedstawić. W szczególności wzory

$$\lg_p(a+b)=\lg_p a+\lg_p b$$

albo

$$\lg_p(a-b)=\lg_p a-\lg_p b$$

są błędne, gdyż, jak wiemy (§§ 20 i 21)

$$\lg_p a+\lg_p b=\lg_p ab$$

i

$$\lg_p a-\lg_p b=\lg_p \frac{a}{b}.$$

Przykłady. 1) Przy jakiej podstawie logarytm liczby 125 jest równy -3?

Rozwiązanie sprowadza się do rozwiązania równania
$x^{-3}=125$, gdzie x oznacza szukaną podstawę.

Stąd $\frac{1}{x^3}=125$ czyli $x^3=\frac{1}{125}$. Zatem $x=\sqrt[3]{\frac{1}{125}}$;

$$x=\tfrac{1}{5}.$$

2) Przekształcić wyrażenie

$$\lg_p\frac{3ab}{c}.$$

Stosując wzór (11) otrzymamy

$\lg_p\frac{3ab}{c}=\lg_p 3ab-\lg_p c$. A ponieważ według wzoru (10)

$$\lg_p 3ab=\lg_p 3+\lg_p a+\lg_p b, \text{ zatem}$$

$$\lg_p\frac{3ab}{c}=\lg_p 3+\lg_p a+\lg_p b-\lg_p c.$$

3) Przedstawić wyrażenie

$$3\lg_p a+\lg_p b-\lg_p c$$

w postaci logarytmu jednomianu.

Ponieważ według wzoru (12) $3\lg_p a=\lg_p a^3$, zatem $3\lg_p a+\lg_p b-\lg_p c=\lg_p a^3+\lg_p b-\lg_p c$. Stosując następnie wzory (10) i (11), otrzymamy

$$\lg_p a^3+\lg_p b-\lg_p c=\lg_p(a^3\cdot b)-\lg_p c=\lg_p\frac{a^3b}{c}. \text{ Stąd}$$

$$3\lg_p a+\lg_p b-\lg_p c=\lg_p\frac{a^3b}{c}.$$

4) Obliczyć wartość wyrażenia $5\lg_4 2+\frac{1}{3}\lg_4 8$.

Postępując, jak w przykładzie 3, otrzymamy

$$5\lg_4 2+\frac{1}{3}\lg_4 8=\lg_4 2^5+\lg_4\sqrt[3]{8}=\lg_4 32+\lg_4 2=\lg_4 32\cdot 2=\lg_4 64=3.$$

Ćwiczenia.

24. Obliczyć

a) $\lg_2 16$; b) $\lg_7 1$; c) $\lg_{10} 100$; d) $\lg_3 27$; e) $\lg_5 625$; f) $\lg_{100} 10$; g) $\lg_{36} 6$; h) $\lg_2 \frac{1}{4}$; i) $\lg_2 \frac{1}{2}$; k) $\lg_{\frac{1}{2}} 8$.

25. Przy jakiej podstawie

a) logarytm liczby 81 jest równy 2?
b) „ „ 1000 „ „ 3?
c) „ „ 625 „ „ 2?
d) „ „ 4 „ „ $\frac{1}{3}$?
e) „ „ 8 „ „ -3?
f) „ „ 25 „ „ $-\frac{1}{2}$?

26. Jaka liczba ma

a) logarytm równy 4 przy podstawie 3
b) „ „ 3 „ „ 4
c) „ „ 5 „ „ 2
d) „ „ 1 „ „ 9
e) „ „ $\frac{1}{2}$ „ „ 5
f) „ „ -5 „ „ $\frac{1}{2}$

27. Przekształcić wyrażenia

a) $\lg_p\frac{a^2}{bc}$; b) $\lg_p 5a^3\sqrt{b}$; c) $\lg_p a^2\sqrt{bc}$;

d) $\lg_p\sqrt[3]{a^2b}$; e) $\lg_p\frac{3x^2}{\sqrt{y}}$; f) $\lg_p\frac{7a\sqrt{b}}{\sqrt[3]{x}}$;

g) $\lg_p\frac{2x(y+z)}{3(a-b)}$; h) $\lg_p\frac{9\sqrt{ab}}{5x^3}$; i) $\lg_p\frac{(a+2)^3\sqrt{a-b}}{5(b+3)}$;

28. Następujące wyrażenia przedstawić w postaci logarytmu jednomianu:

a) $3\lg_p a+2\lg_p b$; b) $4\lg_p x-5\lg_p y$;
c) $\frac{1}{2}\lg_p x+2\lg_p y$; d) $\frac{1}{3}\lg_p k-3\lg_p y$;
e) $4\lg_p a+\lg_p b+5\lg_p c$; f) $3\lg_p a-2\lg_p x+\frac{1}{2}\lg_p z$;
g) $2\lg_p(a+b)+\lg_p(x-y)$; h) $\frac{1}{2}\lg_p x+\frac{1}{2}\lg_p y-\frac{1}{3}\lg_p z$;

29. Obliczyć:

a) $2\lg_{10}5+\lg_{10}4$; b) $2\lg_3 9-\lg_3 3$;
c) $2\lg_6 12-2\lg_6 2$; d) $3\lg_5 10-\lg_5 40$.

Logarytmy dziesiętne.

§ 24. **Określenie.** Logarytmem dziesiętnym liczby nazywamy logarytm tej liczby przy podstawie 10.

Umówimy się, że wyrażenie

$$\lg a \qquad (a > 0)$$

oznaczać będzie logarytm dziesiętny liczby a (zamiast $\lg_{10} a$).

Z własności logarytmów wynika bezpośrednio, że

$\lg 1 = 0$; $\lg 10 = 1$; $\lg 100 = 2$; $\lg 1000 = 3$; ....

$$\text{ogólnie } \lg 10^n = n.$$

Podobnie

$$\lg \tfrac{1}{10} = -1 \qquad \text{bo } \lg \tfrac{1}{10} = \lg 10^{-1} = -1$$
$$\lg \tfrac{1}{100} = -2 \qquad \text{bo } \lg \tfrac{1}{100} = \lg 10^{-2} = -2$$

$$\text{ogólnie } \lg \frac{1}{10^n} = -n.$$

§ 25. Rozważmy dwa ciągi następujących po sobie liczb:

$$1,\ 10,\ 100,\ 1000,\ .....,\ 10^n,\ .....$$
$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ .....,\ n,\ .....$$

Liczbami pierwszego ciągu są potęgi liczby 10 o wykładnikach całkowitych i dodatnich, a liczbami drugiego — logarytmy dziesiętne tych potęg.

Każda liczba dziesiętna, większa od 1, nie będąca liczbą pierwszego ciągu, może być zawsze zawarta między dwiema kolejnymi liczbami tego ciągu. Weźmy, jako przykład, liczbę 38,74. Jest ona większa od 10, ale mniejsza od 100, tzn.

$$10^1 < 38{,}74 < 10^2.$$

Zatem jej logarytmem dziesiętnym jest liczba większa od 1, ale mniejsza od 2:

$$1 < \lg 38{,}74 < 2.$$

Możemy więc powiedzieć, że wartością przybliżoną logarytmu dziesiętnego liczby 38,74 z dokładnością do 1 z niedomiarem jest 1, a z nadmiarem 2.

Podobnie, wartość przybliżona logarytmu dziesiętnego liczby 2,1 z dokładnością do 1 z niedomiarem wynosi 0, a z nadmiarem 1, gdyż $1 < 2{,}1 < 10$ tj. $10^0 < 2{,}1 < 10^1$.

§ 26. Rozważmy dwa ciągi następujących po sobie liczb:

$$1,\ 10^{-1},\ 10^{-2},\ 10^{-3},\ .....,\ 10^{-n},\ .....$$
$$0,\ -1,\ -2,\ -3,\ .....,\ -n,\ .....$$

Liczbami pierwszego ciągu są potęgi liczby 10 o wykładnikach całkowitych i ujemnych, a liczbami drugiego — logarytmy dziesiętne tych potęg.

Każdy dodatni właściwy ułamek dziesiętny, nie będący liczbą pierwszego ciągu, może być zawarty między dwiema liczbami pierwszego ciągu. Np. ułamek 0,053 jest większy od $\frac{1}{100}=10^{-2}$, ale mniejszy od $\frac{1}{10}=10^{-1}$, czyli

$$10^{-2}<0{,}053<10^{-1}.$$

Zatem logarytmem dziesiętnym liczby 0,053 jest liczba większa od -2, ale mniejsza od -1, tzn. że wartość przybliżona lg 0,053 z dokładnością do 1 z niedomiarem wynosi -2, a z nadmiarem -1.

Podobnie, wartością przybliżoną lg 0,9 z dokładnością do 1 z niedomiarem jest -1, a z nadmiarem 0, gdyż $10^{-1}<0{,}9<10^{0}$.

§ 27. Z rozważonych przykładów wnosimy, że wartość przybliżoną — z dokładnością do 1 — logarytmu dziesiętnego każdej dodatniej liczby dziesiętnej, nie będącej potęgą liczby 10 o wykładniku całkowitym, możemy łatwo obliczyć, umieszczając daną liczbę między dwiema kolejnymi potęgami liczby 10 o wykładniku całkowitym.

Określenie. Przybliżona wartość logarytmu z dokładnością do 1 z niedomiarem nazywa się cechą logarytmu.

Różnica między wartością logarytmu a jego cechą nazywa się mantysą logarytmu.

Jeżeli oznaczymy przez **c** cechę logarytmu liczby dziesiętnej: a przez **m** jego mantysę, to

$$\lg a - c = m, \text{ a stąd}$$
$$\lg a = c + m.$$

Uwaga. Z określenia cechy i mantysy logarytmu wynika, że

1) cecha jest zawsze liczbą całkowitą (dodatnią lub ujemną), albo zerem,
2) mantysa jest zawsze liczbą nieujemną, mniejszą od 1.

Wyznaczanie cechy logarytmu dziesiętnego dowolnej liczby dziesiętnej dodatniej.

§ 28. **Wypadek 1.** Niechaj a oznacza dowolną liczbę dziesiętną, większą od 1. Liczba taka jest zawsze sumą dwóch składników, całkowitego i ułamkowego, który w wypadku szczególnym może być zerem. Niechaj składnik całkowity będzie liczbą n-cyfrową. W takim razie

$$10^{n-1} < a < 10^n, \text{ czyli}$$
$$n - 1 < \lg a < n, \text{ co oznacza}$$

że cechą $\lg a$ jest $n - 1$. Stąd

Twierdzenie: cecha logarytmu liczby dziesiętnej, większej od 1, zawiera tyle dodatnich jedności, ile cyfr mniej 1 zawiera całkowity składnik danej liczby.

Tak np. cecha lg 5 wynosi 0; cecha lg 7593,5 wynosi 3.

> **Uwaga.** Jak widać z powyższego, składnik ułamkowy nie wpływa zupełnie na wartość cechy. Np. cechy logarytmów dziesiętnych liczb: 435; 435,71; 435,0008 są sobie równe i każda z nich wynosi 2.

Wypadek 2. Rozważmy jakąkolwiek liczbę dziesiętną dodatnią mniejszą od 1, np. 0,0072. Ułamek ten jest większy od $\frac{1}{1000} = 10^{-3}$, ale mniejszy od $\frac{1}{100} = 10^{-2}$, czyli

$$10^{-3} < 0{,}0072 < 10^{-2}, \text{ tzn. że}$$
$$-3 < \lg 0{,}0072 < -2.$$

A więc cechą lg 0,0072 jest -3. Zwróćmy uwagę na to, że przed pierwszą znaczącą cyfrą tego ułamka znajdują się 3 zera wraz z zerem całości.

Podobnie, ponieważ

$$\frac{1}{10} < 0{,}985 < 1, \text{ tj. } \quad 10^{-1} < 0{,}985 < 10^0$$

czyli

$$-1 < \lg 0{,}985 < 0$$

więc cecha lg 0,985 jest równa -1. Zauważmy i tutaj, że przed pierwszą znaczącą cyfrą tego ułamka znajduje się 1 zero wraz z zerem całości.

Przykłady te stwierdzają słuszność twierdzenia, które przyjmiemy bez dowodu:

Twierdzenie: cecha logarytmu dodatniego ułamka dziesiętnego właściwego zawiera tyle ujemnych jedności, ile zer wraz z zerem całości znajduje się przed pierwszą znaczącą cyfrą tego ułamka.

Tak np. cecha logarytmu dziesiętnego liczby 0,00006 jest równa -5; cecha lg 0,07321 jest równa -2.

Wyznaczanie mantysy logarytmu dziesiętnego dowolnej liczby dziesiętnej dodatniej.

§ 29. Obliczanie mantysy logarytmu dziesiętnego jest niezwykle uciążliwe, jakkolwiek istnieją metody, pozwalające na dość szybkie jej obliczanie. Dlatego też przy wyznaczaniu logarytmów dziesiętnych posługiwać się będziemy specjalnymi tablicami, w których mantysy podane są w postaci ułamków dziesiętnych przeważnie w czwartym stopniu dokładności (stąd nazwa: czterocyfrowe tablice logarytmów).

Przy obliczaniu mantysy logarytmu liczby dziesiętnej ma zastosowanie następujące

Twierdzenie: Jeżeli dowolną liczbę dodatnią pomnożyć przez 10^n (gdzie n oznacza liczbę całkowitą, dodatnią lub ujemną), to mantysa logarytmu dziesiętnego otrzymanego iloczynu będzie równa mantysie logarytmu dziesiętnego liczby danej.

Niech a oznacza dowolną liczbę dziesiętną dodatnią i niech $\lg a = c + m$. Pomnóżmy a przez 10^n (n — całkowite, dodatnie lub ujemne). Wtedy

$$\lg (a \cdot 10^n) = \lg a + \lg 10^n = \lg a + n \lg 10 = \lg a + n = c + m + n =$$
$$= (c + n) + m. \qquad c.\ b.\ d.\ d.$$

Zatem $\lg 23$; $\lg 2300$; $\lg 0{,}23$; $\lg 2{,}3$ mają mantysy równe, przy czym każda z nich jest równa np. mantysie $\lg 2300$, lub mantysie $\lg 230$, gdyż

$$0{,}23 = 2300 \cdot 10^{-4}; \quad 2{,}3 = 2300 \cdot 10^{-3}; \quad 23 = 2300 \cdot 10^{-2}$$

albo

$$0{,}23 = 230 \cdot 10^{-3}; \quad 2{,}3 = 230 \cdot 10^{-2}; \quad 23 = 230 \cdot 10^{-1}; \quad 2300 = 230 . 10^{1}.$$

Wnosimy stąd, że **mantysa logarytmu liczby dziesiętnej jest równa mantysie logarytmu liczby c a ł k o w i t e j, otrzymanej przez odrzucenie przecinka dziesiętnego danej liczby dziesiętnej.**

> **Uwaga.** W §§ poprzednich omówiliśmy logarytmy tylko liczb dziesiętnych. Gdyby liczba dana przedstawiona była w postaci iloczynu, ilorazu, ułamka, potęgi lub pierwiastka, wówczas obliczanie jej logarytmu sprowadzi się, zgodnie ze wzorami (10), (11), (12), (13) §§ 20—23, do obliczania logarytmów liczb dziesiętnych.

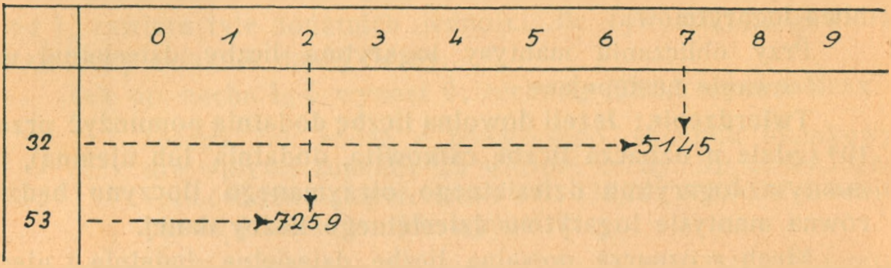
Sposób użycia tablic logarytmów dziesiętnych.

§ 30. Sposób korzystania z tablic logarytmów dziesiętnych wyjaśnimy na przykładach.

a) Aby obliczyć logarytm dziesiętny liczby trzycyfrowej, np. 327, postępujemy w sposób następujący:

1^0 obliczamy przede wszystkim cechę lg 327. Cecha ta jest równa 2, gdyż liczba dana jest całkowita i trzycyfrowa.

2^0 aby znaleźć mantysę lg 327, odnajdujemy w pierwszej rubryce **pionowej** tablicy logarytmów liczbę, utworzoną z dwóch początkowych cyfr liczby danej, tj. liczbę 32, a w pierwszej rubryce **poziomej** (od góry lub od dołu), pozostałą cyfrę liczby danej, tj. 7 (p. rys. 10).



Rys. 10.

Na skrzyżowaniu wiersza poziomego, w którym znajduje się 32 i wiersza pionowego, w którym znajduje się 7, odczytujemy liczbę 5145, oznaczającą, że mantysa lg 327 wynosi 0,5145. Zatem lg 327 $\approx$ 2,5145 ($\approx$ oznacza równość przybliżoną). Podobnie postąpimy przy obliczaniu lg 5,32, pamiętając, że mantysa lg 5,32 jest równa mantysie lg 532. Znajdziemy, że lg 5,32 $\approx$ 0,7259.

b) Aby obliczyć logarytm liczby czterocyfrowej, np. 602,8, postępujemy w sposób następujący:

1^0 cecha lg 602,8 jest równa 2, gdyż składnik całkowity liczby danej jest liczbą dwucyfrową;

2^0 aby obliczyć mantysę lg 602,8 zauważmy, że

$$602 < 602{,}8 < 603.$$

Zatem, zgodnie z § 19,

$$\lg 602 < \lg 602{,}8 < \lg 603.$$

Przy pomocy tablic znajdziemy, że

$$2{,}7796 < \lg 602{,}8 < 2{,}7803.$$

Zatem przyrost liczby wynosi 1 (od 602 do 603), a przyrost logarytmu wynosi 2,7803 — 2,7796 = 0,0007, tj. 7 dziesięciotysięcznych. Załóżmy, że w przedziale od 602 do 603 przyrosty logarytmów są wprost proporcjonalne do przyrostów liczb. Jeżeli zatem przyrost liczby wynosi 0,8 (od 602 do 602,8), to przyrost logarytmu wyniesie 7.0,8 dziesięciotysięcznych, tj. 5,6 dziesięciotysięcznych, a po zaokrągleniu przyrost ten wyniesie 6 dziesięciotysięcznych. Stąd lg 602,8 $\approx$ 2,7796 + 0,0006 = 2,7802.

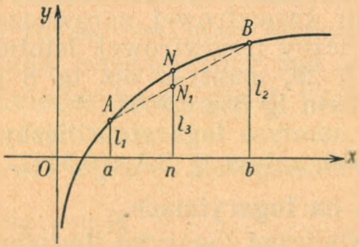
Liczbę 6 dziesięciotysięcznych, którą dodaliśmy do lg 602, aby otrzymać lg 602,8, nazywamy **poprawką** logarytmu, a metoda tu zastosowana nosi nazwę **interpolacji**.

Przeprowadzone obliczenia zapisujemy w sposób następujący:

$$\begin{array}{l}\left.\begin{array}{rr}\lg 602{,}0 \approx & 2{,}7796\\ P\quad 8\approx & 6\end{array}\right\}+\\ \hline \lg 602{,}8\approx 2{,}7802.\end{array}$$

Uwaga. Poprawki logarytmów dla czwartej cyfry danej liczby są przeważnie w tablicach logarytmów obliczone. Poprawki te umieszczone są w specjalnych rubrykach, noszących nazwę „Poprawki" (albo „Partes proportionales").

Aby wyjaśnić ogólniej zasadę interpolacji, rozpatrzmy wykres pewnej funkcji $y = f(x)$. Rzędna l_1 oznacza wartość funkcji w punkcie $x = a$, rzędna l_2 — wartość funkcji w punkcie $x = b$, $(a < b)$. Wartość funkcji w dowolnym



punkcie $x = n$, zawartym między a i b $(a < n < b)$ wyrażać będzie rzędna l_3 punktu N krzywej. Jeżeli jednak założymy, że w przedziale od a do b przyrosty zmiennej są wprost proporcjonalne do przyrostów funkcji, tzn. że w tym przedziale wykresem danej funkcji jest nie łuk AB krzywej, lecz odcinek AB prostej, wówczas wartość funkcji w punkcie n wyrażać będzie nie rzędna l_3 punktu N krzywej AB, lecz rzędna punktu N_1 odcinka AB prostej. Postępując w ten sposób, popełniamy błąd, który tym jest mniejszy, im mniejszy jest przedział od a do b i im bardziej łuk AB krzywej zbliżony jest do odcinka AB prostej, co zachodzi istotnie przy interpolacji logarytmów, gdzie, jak obliczono, popełniony błąd jest mniejszy od 0,0001.

Obliczmy lg 8035. Cechą lg 8035 jest 3.

Aby obliczyć mantysę, zauważmy, że mantysa ta jest równa mantysie lg 803,5 (§ 29). Postępując więc, jak w poprzednim przykładzie, otrzymamy

$$\begin{array}{l}\left.\begin{array}{rr}\lg 8030 \approx & 3{,}9047\\ P\quad 5\approx & 3\end{array}\right\}+\\ \hline \lg 8035\approx 3{,}9050.\end{array}$$

Podobnie, zapis obliczenia lg 71,34 jest następujący:

$$\left.\begin{array}{l} \lg\ 71{,}30 \approx 1{,}8531 \\ P\quad 4 \approx \quad 2 \end{array}\right\} +$$

$$\lg\ 71{,}34 \approx 1{,}8533$$

gdyż mantysa lg 71,34 jest równa mantysie lg 713,4 (§ 29).

c) Obliczmy lg 0,1748. Ponieważ liczba dana jest właściwym ułamkiem dziesiętnym, więc cecha lg 0,1748 jest równa — 1. Postępując, jak w wypadku b), znajdziemy, że mantysa lg 0,1748 jest równa 0,2425. Zatem lg 0,1748 $\approx -1 + 0{,}2425$. Aby zachować jednolity sposób zapisywania logarytmu liczby, piszemy

$$\lg\ 0{,}1748 = \bar{1}{,}2425$$

tzn. logarytm ten piszemy w postaci liczby dziesiętnej, stawiając znak — **nad** cechą, bo tylko cecha jest ujemna.

Otrzymamy podobnie

$$\lg\ 0{,}01689 \approx \bar{2}{,}2276.$$

Uwaga. Obliczanie mantysy logarytmu liczby jednocyfrowej lub dwucyfrowej sprowadza się do obliczania mantysy liczby trzycyfrowej. Istotnie, zgodnie z twierdzeniem § 29, mantysa np. lg 8 jest równa mantysie lg 800, zatem lg 8 $\approx$ 0,9031.
Podobnie mantysa logarytmu liczby 3,5 jest równa mantysie lg 350, zatem lg 3,5 $\approx$ 0,5441.

§ 31. Działania na logarytmach.

P r z y k ł a d I. Obliczyć logarytm iloczynu liczb 3,594 i 0,628.
Oznaczmy przez x iloczyn liczb danych: $x = 3{,}594 . 0{,}628$.
Stosując twierdzenie o logarytmie iloczynu (§ 20), mamy

$$\lg x = \lg\ 3{,}594 + \lg\ 0{,}628.$$

Obliczamy lg 3,594:

$$\left.\begin{array}{l} \lg\ 3{,}590 \approx 0{,}5551 \\ \quad P\quad 4 \approx \quad\ \ 5 \end{array}\right\} +$$

$$\lg\ 3{,}594 \approx 0{,}5556 .$$

Obliczamy lg 0,628:

$$\lg\ 0{,}628 \approx \bar{1}{,}7980.$$

Obliczamy sumę dwóch liczb dziesiętnych: 0,5556 i $\bar{1}$,7980.
Dodajemy najpierw mantysy:

$$\begin{array}{r} 0{,}5556 \\ +\ 0{,}7980 \\ \hline 1{,}3536 \end{array}$$

Dodajemy cechy: $0 + (-1) = -1$. Zatem

$$\lg x \approx -1 + 1{,}3536 = 0{,}3536.$$

Obliczenia te zapisujemy w sposób następujący:

Obliczenia główne	Obliczenia pomocnicze
lg 3,534 $\approx$ 0,5556	lg 3,590 $\approx$ 0,5551
lg 0,628 $\approx \bar{1},7980$	P 4 $\approx$ 5 +
lg$x$ $\approx$ 0,3536	lg 3,594 $\approx$ 0,5556.

P r z y k ł a d II. Obliczyć logarytm ilorazu (ułamka)

$$\frac{0,5981}{22,34}.$$

Oznaczmy przez y ten iloraz:

$$y = \frac{0,5981}{22,34}.$$

Stosując twierdzenie o logarytmie ilorazu (ułamka) mamy (§ 21)

$$\lg y = \lg 0,5981 - \lg 22,34.$$

Dalsze obliczenia moglibyśmy przeprowadzić w ten sam sposób, jak w przykładzie I. Odejmowanie jednak liczb dziesiętnych, których składniki ułamkowe są dodatnie, a składniki całkowite mogą mieć znaki różne, jest dość kłopotliwe. Dlatego też, dla ułatwienia rachunków, wprowadzimy tzw. kologarytm.

Określenie. Kologarytmem danej liczby a nazywamy logarytm odwrotności tej liczby.

Oznaczając przez clg a — kologarytm liczby a, mamy według określenia: $\operatorname{clg} a = \lg \frac{1}{a}$,

a stosując twierdzenie o logarytmie ilorazu, otrzymamy

$$\lg \frac{1}{a} = \lg 1 - \lg a = -\lg a, \text{ a stąd}$$

$$\operatorname{clg} a = -\lg a \qquad (14)$$

Jeżeli **c** i **m** oznaczają odpowiednio cechę i mantysę logarytmu liczby a, to

$$\operatorname{clg} a = -c - m.$$

Wynik ten przekształcamy, dodając do prawej strony równości $+1$ i -1 przez co jej wartości liczbowej nie zmienimy.

Otrzymamy:

$$\operatorname{clg} a = -c - 1 + 1 - m, \qquad \text{albo}$$

$$\operatorname{clg} a = -(c+1) + (1-m) \qquad (14')$$

tzn. **Kologarytm liczby a obliczamy, dodając + 1 do cechy logarytmu liczby a i zmieniając znak otrzymanej sumy na przeciwny, a mantysę lg a odejmujemy od 1.**

Np. jeżeli $\lg a \approx 3,5248$, to

$$\operatorname{clg} a \approx -(3+1) + (1 - 0,5248) = -4 + 0,4752 = \bar{4},4752$$

Uwaga. Mantysę odejmujemy od 1 w ten sposób, że ostatnią cyfrę **znaczącą** odejmujemy od 10, a pozostałe jej cyfry od 9.

Podobnie, jeżeli $\lg a \approx \bar{5},3370$, to

$$\text{clg}\, a \approx 4,6630.$$

Wracając zatem do obliczenia logarytmu ilorazu

$$y = \frac{0,5981}{22,34} \quad \text{otrzymamy:}$$

$\lg y = \lg\, 0,5981 - \lg\, 22,34$, a ponieważ według wzoru (14)

$$-\lg\, 22,34 = \text{clg}\, 22,34, \text{ więc}$$

$$\lg y = \lg\, 0,5981 + \text{clg}\, 22,34.$$

Dalsze obliczenia przeprowadzamy, jak w przykładzie I.

Obliczenia główne

$$\begin{array}{lrl} \lg & 0,5981 & \approx \bar{1},7768 \\ \text{clg} & 22,34 & \approx \bar{2},6509 \\ \hline \lg y & & \approx \bar{2},4277 \end{array}$$

Obliczenia pomocnicze

$$\left.\begin{array}{lrl} \lg & 0,5980 & \approx \bar{1},7767 \\ & P \quad 1 & \approx \qquad 1 \end{array}\right\} +$$

$$\begin{array}{lrl} \lg & 0,5981 & \approx \bar{1},7768 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{lrl} \lg & 22,30 & \approx 1,3483 \\ & P \quad 4 & \approx \qquad 8 \end{array}\right\} +$$

$$\begin{array}{lrl} \lg & 22,34 & \approx 1,3491 \\ \text{clg} & 22,34 & \approx \bar{2},6509 \end{array}$$

P r z y k ł a d III. Obliczyć $\lg(0,439)^3$.

Stosując twierdzenie o logarytmie potęgi (§ 22), mamy

$$\lg(0,439)^3 = 3 \lg\, 0,439\,;$$

$$\lg 0,439 \approx \bar{1},6425.$$

Mnożymy $\bar{1},6425$ przez 3. Mnożąc cechę $\bar{1}$ przez 3 otrzymujemy -3. Mnożąc mantysę 0,6425 przez 3, otrzymujemy 1,9275.

Zatem $3 \lg\, 0,439 \approx -3 + 1,9275 = \bar{2},9275$.

Obliczenia zapisujemy w sposób następujący:

$$\begin{array}{rr} & \bar{1},6425 \\ \times & 3 \\ \hline & \bar{2},9275 \end{array}$$

P r z y k ł a d IV.

a) Obliczyć $\lg \sqrt[4]{56,38}$.

Stosując twierdzenie o logarytmie pierwiastka (§ 23), mamy

$$\lg \sqrt[4]{56,38} = \tfrac{1}{4} \lg\, 56,38$$

$$\left.\begin{array}{lrl} \lg & 56,30 & \approx 1,7505 \\ & P \quad 8 & \approx \qquad 6 \end{array}\right\} +$$

$$\begin{array}{lrl} \lg & 56,38 & \approx 1,7511 \end{array}$$

Dzieląc 1,7511 przez 4 otrzymamy: $1{,}7511:4 = 0{,}43777\ldots$, a po zaokrągleniu do czterech miejsc dziesiętnych, otrzymamy

$$\lg \sqrt[4]{56{,}38} \approx 0{,}4378$$

b) Obliczyć $\lg \sqrt[3]{0{,}928}$.

Mamy: $\lg \sqrt[3]{0{,}928} = \frac{1}{3} \lg 0{,}928 \approx \dfrac{\overline{1}{,}9675}{3}$.

Ponieważ cecha $\overline{1}$ nie jest podzielna przez 3, przeto liczbę $\overline{1}{,}9675$ przekształcamy, dodając do cechy -2, a do mantysy $+2$.

Zatem $\dfrac{\overline{1}{,}9675}{3} = \dfrac{\overline{3} + 2{,}9675}{3} = -1 + 0{,}98916 \approx \overline{1}{,}9892$.

Ogólnie jeżeli ujemna cecha logarytmu nie jest podzielna przez daną liczbę całkowitą n, wówczas do cechy dodajemy tyle ujemnych jedności, aby otrzymać największą liczbę ujemną podzielną przez n, a do mantysy — tyleż dodatnich jedności.

Np. $\dfrac{\overline{2}{,}3583}{5} = \dfrac{\overline{5} + 3{,}3583}{5} = \overline{1} + 0{,}6717 = \overline{1}{,}6717$.

Przykład V. Obliczyć logarytm ułamka

$$x = \frac{(3{,}54)^2 \sqrt{0{,}5784}}{1{,}928}.$$

Stosując twierdzenia §§ 20—23, otrzymujemy:

$$\lg x = 2 \lg 3{,}54 + \tfrac{1}{2} \lg 0{,}5784 + \operatorname{clg} 1{,}928.$$

obliczenia główne

$$\begin{array}{ll}
2 \lg 3{,}54 & \approx 1{,}0980 \\
\frac{1}{2} \lg 0{,}5784 & \approx \overline{1}{,}8811 \\
\operatorname{clg} 1{,}928 & \approx \overline{1}{,}7149 \\
\hline
\lg x & \approx 0{,}6940
\end{array}$$

obliczenia pomocnicze

$$\begin{array}{l}
\lg 3{,}54 \approx 0{,}5490 \\
2\lg 3{,}54 \approx 0{,}5490 \\
\times \quad 2 \\
\hline
1{,}0980
\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}
\lg 0{,}5780 \approx \overline{1}{,}7619 \\
P \quad 4 \approx \quad 3
\end{array}\right\} +$$

$$\lg 0{,}5784 \approx \overline{1}{,}7622$$

$$\tfrac{1}{2} \lg 0{,}5784 \approx \frac{\overline{1}{,}7622}{2} = \frac{\overline{2} + 1{,}7622}{2} = \overline{1}{,}8811$$

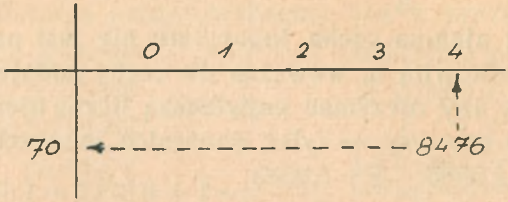
$$\lg 1{,}928 \approx 0{,}2851$$

$$\operatorname{clg} 1{,}928 \approx \overline{1}{,}7149$$

Obliczanie liczby według jej logarytmu dziesiętnego.

§ 32. Poznaliśmy praktyczne sposoby obliczania logarytmu dziesiętnego liczby dodatniej. Zajmiemy się obecnie zagadnieniem odwrotnym: obliczaniem liczby, mając jej logarytm dziesiętny. Zagadnienie to, znane pod nazwą obliczania „numerus logarithmi" (Nlg), rozwiązujemy również przy pomocy tablic logarytmów.

P r z y k ł a d I. Obliczyć x, wiedząc, że $\lg x \approx 2{,}8476$.
W tablicach logarytmów szukamy mantysy 0,8476.
Znajdujemy, że mantysa ta odpowiada liczbie 704 (rys. 11).



Rys. 11

A ponieważ cecha $\lg x$ jest równa 2, to — zgodnie z § 28 — składnik całkowity szukanej liczby x musi być liczbą trzycyfrową. Zatem
$$x \approx 704.$$

P r z y k ł a d II. Obliczyć x, wiedząc, że $\lg x = \bar{2},9325$. W tablicach logarytmów znajdziemy mantysę 0,9325. Odpowiada ona liczbie 856. A ponieważ cecha $\lg x$ jest równa — 2, zatem liczba x jest ułamkiem dziesiętnym właściwym, w którym — zgodnie z § 28 — przed pierwszą znaczącą cyfrą znajdują się 2 zera wraz z zerem całości. Zatem
$$x \approx 0{,}0856.$$

P r z y k ł a d III. Obliczyć x, wiedząc, że $\lg x \approx 1{,}7829$.
W tablicach logarytmów mantysy 0,7829 nie znajdziemy.

Natomiast zauważymy, że najbliższa danej mantysie, lecz **mniejsza** od niej mantysa wynosi 0,7825 i odpowiada liczbie 606, a najbliższa danej mantysie, lecz **większa** od niej mantysa wynosi 0,7832 i odpowiada liczbie 607. Przyrost więc mantysy wynosi $0{,}7832 - 0{,}7825 = 0{,}0007$ tj. 7 dziesięciotysiącznych, a przyrost liczby wynosi 1. Załóżmy, że i tu przyrosty liczb są wprost proporcjonalne do przyrostów logarytmów. Ponieważ, jak już obliczyliśmy, przyrostowi mantysy o 7 dziesięciotysięcznych odpowiada przyrost liczby o 1, to przyrostowi mantysy o 4 dziesięciotysięczne (tzn. 0,7829 — 0,7825) odpowiada przyrost o $\frac{4}{7}$ tj. 0,57..., a po zaokrągleniu 0,6. Zatem mantysa 0,7829 odpowiada liczbie 606,6. A ponieważ cecha $\lg x$ wynosi 1, to składnik całkowity liczby x jest liczbą dwucyfrową. Stąd

$$x \approx 60{,}66.$$

Obliczenie liczby x zapisujemy w sposób następujący:

$$\begin{array}{l} \lg x \approx 1{,}7829 \\ \underline{\quad 7825 - 6060} \\ \qquad\;\; 4 - \quad 6 \\ \\ \mathrm{Nlg}\, 1{,}7829 \approx 60{,}66 \\ \qquad\qquad x \approx 60{,}66. \end{array}$$

Uwaga I. Symbol Nlg 1,7829 czytamy: liczba, której logarytm jest równy 1,7829.

Uwaga II. Obliczanie poprawki Nlg, tj. obliczanie czwartej cyfry liczby szukanej x, jest zbyteczne w tym wypadku, gdy tablice logarytmów zawierają rubrykę poprawek. Z rubryki tej bowiem odczytamy bezpośrednio poprawkę Nlg.

Podobnie, jeżeli $\lg x \approx \bar{1}{,}8368$, to zapis obliczenia x jest następujący:

$$\begin{array}{l} \lg x \approx \bar{1}{,}8368 \\ \underline{\quad 8363 \;-\; 6860} \\ \qquad\;\; 5 \;-\quad 8 \\ \\ \mathrm{Nlg}\, \bar{1}{,}8368 \approx 0{,}6868 \\ \qquad\qquad x \approx 0{,}6868. \end{array}$$

§ 33. Aby obliczyć wartość liczbową dowolnego jednomianu, musimy wykonać wszystkie wskazane w nim działania zgodnie z prawami kolejności tych działań. Często działania te są bardzo uciążliwe i dlatego wartość liczbową takiego jednomianu obliczamy przy pomocy logarytmów. Mianowicie obliczamy najpierw logarytm tego jednomianu, a następnie liczbę według otrzymanego logarytmu. Poniższy przykład zilustruje taki sposób obliczania.

P r z y k ł a d. Obliczyć wartość wyrażenia:

$$z = \frac{0{,}385 \cdot (5{,}523)^3}{\sqrt[3]{0{,}923}}$$

$$\lg z = \lg 0{,}385 + 3 \lg 5{,}523 - \tfrac{1}{3} \lg 0{,}923 =$$
$$= \lg 0{,}385 + 3 \lg 5{,}523 + \tfrac{1}{3} \operatorname{clg} 0{,}923.$$

Obliczenia główne	Obliczenia pomocnicze
$\lg 0{,}385 \approx \bar{1}{,}5855$	$\lg 5{,}520 \approx 0{,}7419$
$3\lg 5{,}523 \approx 2{,}2263$	$P\ 3 \approx 2$ (+)
$\frac{1}{3}\mathrm{clg}\ 0{,}923 \approx 0{,}0116$	$\lg 5{,}523 \approx 0{,}7421$
$\lg z \approx 1{,}8234$	$3\lg 5{,}523 \approx 0{,}7421$
$8228 — 6650$	$\times\ 3$
$6 — 9$	$2{,}2263$
$\mathrm{Nlg}\ 1{,}8234 \approx 66{,}59$	
$z \approx 66{,}59.$	$\lg 0{,}923 \approx \bar{1}{,}96\ 2$
	$\mathrm{clg}\ 0{,}923 \approx 0{,}0348$
	$\frac{1}{3}\mathrm{clg}\ 0{,}923 \approx \frac{0{,}0348}{3} = 0{,}0116$

Ćwiczenia.

30. Wyznaczyć cechy logarytmów dziesiętnych liczb następujących:

a) 53,8; b) 53,003; c) 53,39; d) 548,1; e) 7,001; f) 1285,7; g) 0,003; h) 0,658; i) 0,0904; k) 0,00001.

31. Które z niżej podanych liczb mają równe mantysy logarytmów dziesiętnych:

a) 7,328; 73,2; 732,8; 0,732; 732; 0,07328;
b) 1,001; 1,0012; 10,012; 10,01; 100,1; 0,010012.

32. Wiedząc, że $\lg 3 \approx 0{,}4771$, obliczyć logarytmy dziesiętne liczb: 300; 0,3; 30; 3000; 0,0003.

33. Wiedząc, że $\lg 2 \approx 0{,}3010$, obliczyć logarytmy dziesiętne liczb: 4; 8; 16; 32; 64; 0,128; 3,2; 0,064.

34. Wiedząc, że $\lg 2 \approx 0{,}3010$, a $\lg 3 \approx 0{,}4771$, obliczyć logarytmy dziesiętne liczb: 6; 12; 18; 24; 36; 2,4; 0,18.

35. Obliczyć przy pomocy tablic:

a) lg 13,09; b) lg 0,1527; c) lg 0,0231;
d) lg 0,01562; e) lg 3,94; f) lg 71,9; g) lg 8,5;
h) lg 7; i) lg 52,37; k) lg 61,43; l) lg 520,6;
m) lg 0,3999; n) lg 0,005391; p) lg 0,06328.

36. Obliczyć przy pomocy tablic logarytmy dziesiętne następujących wyrażeń:

a) $42{,}9 \cdot 328$; b) $0{,}3592 \cdot 0{,}07986$;
c) $(0{,}5738)^3$; d) $(2{,}38)^4$; e) $(7{,}031)^2$; f) $\sqrt[3]{4{,}051}$;
g) $13{,}5 \cdot \sqrt{23{,}8}$; h) $3{,}14 \cdot 5{,}02 \cdot \sqrt{5{,}381}$; i) $\sqrt{39{,}81} \cdot \sqrt[3]{2{,}8}$.

37. Obliczyć kologarytmy liczb:

a) 8,05; b) 71,32; c) 123,2; d) 0,436;
e) 5,41; f) 0,001; g) 0,05; h) 71,09.

38. Obliczyć przy pomocy tablic logarytmy dziesiętne następujących wyrażeń:

a) $\frac{5}{328}$; b) $\frac{0,385}{247}$; c) $\frac{2,887}{6,3}$;

d) $\frac{2 \cdot 385 \cdot 0,1397}{4,09}$; e) $\sqrt[3]{\frac{25,11}{3,8}}$; f) $5,1 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$;

g) $\frac{7,03}{\sqrt{29}}$; h) $\frac{2,019 \cdot 0,785}{4,5 \cdot \sqrt{6,891}}$; i) $\frac{\sqrt[3]{481,7}}{3,14 \cdot \sqrt{39,02}}$.

39. Obliczyć liczbę, wiedząc, że jej logarytm dziesiętny wynosi:

a) 1,2317; b) 2,2693; c) $\overline{1},1572$;
d) 0,1163; e) $\overline{3},0892$; f) 0,2891;
g) 2,5933; h) $\overline{1},6085$; i) 1,4472;
k) 3,6232; l) 0,8797; m) 0,9333;
n) $\overline{2},8499$; p) 1,4074; r) 2,7408;
s) $\overline{1},8996$; t) 3,9222; u) $\overline{3},9978$.

40. Przy pomocy tablic logarytmów obliczyć wartość liczbową następujących wyrażeń:

a) $38,21 \cdot 0,05973$; b) $3 \cdot \sqrt[3]{5,28}$;

c) $\frac{3,274}{0,971}$; d) $(1,032)^3 \cdot 0,574$;

e) $\frac{3,571 \cdot 6,37}{5,001}$; f) $\frac{(71,42)^2}{23,07}$; g) $\frac{2,41 \cdot 0,305}{5,3 \cdot 1,381}$;

h) $\frac{(0,6634)^2 \cdot 5,92}{4,3 \cdot (0,71)^3}$; i) $\frac{3,14 \cdot (4,5)^2}{\sqrt{2,571}}$; k) $\frac{71,85 \cdot \sqrt[3]{0,8452}}{\sqrt{0,6666}}$;

l) $\frac{\sqrt[3]{0,9207} \cdot \sqrt[4]{0,07285}}{\sqrt{3,579}}$.

41. Obliczyć przy pomocy logarytmów pole koła o promieniu $R = 3,594$ *m*.

Uwaga. lg π podany jest w tablicy III w tablicach Wojtowicza, a w tablicy I w tablicach Łomnickiego.

42. Obliczyć przy pomocy logarytmów pole trójkąta, którego jeden z boków ma długość 20,3 *dcm* a wysokość, odpowiadająca temu bokowi, ma długość 8,7 *dcm*.

43. Obliczyć przy pomocy logarytmów pole trójkąta, którego boki mają długość: 5,29 *m*; 7,905 *m*; 9,43 *m*.

44. Obliczyć przy pomocy logarytmów promień koła opisanego i wpisanego trójkąta, którego boki mają długość: 6,08 *m*; 8,14 *m*; 13 *m*.

45. Obliczyć przy pomocy logarytmów pole rombu, którego przekątne mają długość: 32,8 *dcm*; i 27,9 *dcm*.

46. Obliczyć przy pomocy logarytmów krawędź sześcianu, którego objętość wynosi 36,83 dcm^3.

47. Obliczyć objętość prostopadłościanu, którego krawędzie mają długość: 9,37 *dcm*; $3\sqrt{2}\,dcm$; $5\sqrt{3}\ dcm$.

48. Obliczyć przy pomocy logarytmów promień kuli, której a) powierzchnia jest równa 239 dcm^2; b) objętość jest równa 863 dcm^3.

49. Obliczyć przy pomocy logarytmów bok trójkąta równobocznego, którego pole jest równe 82,59 dcm^2.

50. Dany jest trójkąt o bokach: 8,9 *dcm*; 12,3 *dcm*; 14,7 *dcm*. Obliczyć przy pomocy logarytmów wysokość tego trójkąta względem najmniejszego boku.

Procenty składane.

§ 34. Załóżmy, że pewien kapitał został pożyczony na n lat na p%. Jeżeli po każdym roku dochód od kapitału zostanie doliczony do kapitału, wówczas mówimy, że kapitał jest pożyczony **na procent składany**, doliczanie zaś dochodu do kapitału nazywa się **kapitalizacją** dochodu. Np. kapitał 1000 *zł*, złożony w banku na 4%, przyniesie po roku 40 *zł* dochodu. Dodając ten dochód do kapitału, otrzymamy nowy kapitał 1040 *zł*, który w drugim roku przyniesie nie 40 *zł* dochodu, jak w roku pierwszym, lecz 41,60 *zł*. Dodając ten dochód do kapitału, otrzymamy nowy kapitał 1081,60 *zł*, który w trzecim roku przyniesie nie 41,60 *zł* dochodu, lecz 43,26 *zł* itd. W przeciwieństwie do procentów prostych, gdzie dochód od kapitału jest stały, przy procencie składanym dochody te rosną, zwiększając tym samym i kapitał.

Wartość kapitału pożyczonego (lub złożonego) nazywa się **kapitałem początkowym.** Wartość zaś kapitału wraz z dochodami za n lat nazywa się **kapitałem końcowym po n latach.**

§ **35. Zadanie.** Kapitał K *zł* został pożyczony (lub złożony) na procent składany $p\%$. Obliczyć kapitał końcowy po n latach.

Jeżeli dochód od 100 *zł* za 1 rok wynosi p *zł*, to dochód od 1 *zł* za 1 rok wyniesie $\frac{p}{100}$ *zł*. Oznaczmy

$$\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{100}} = \mathbf{r}.$$

Zatem:

gdyby kapitał początkowy wynosił 1 *zł*, to kapitał końcowy po pierwszym roku wynosiłby $(1+r)$ *zł*, a że kapitał początkowy wynosi nie 1 *zł*, lecz K *zł*, czyli jest K razy większy, zatem i kapitał końcowy po 1 roku będzie K razy większy, tj. $K_1 = K(1+r)$, gdzie K_1 oznacza kapitał końcowy po pierwszym roku.

W drugim roku dochód obliczamy nie od K *zł*, lecz od K_1 *zł*. Rozumując, jak poprzednio, otrzymamy, że kapitał końcowy K_2 po drugim roku wyniesie $K_2 = K_1(1+r)$. Ale $K_1 = K(1+r)$ czyli $K_2 = K(1+r)\,(1+r)$ tj. $K_2 = K(1+r)^2$.

Rozumując podobnie w dalszym ciągu, otrzymamy ogólnie, że kapitał końcowy K_n po n latach wyniesie

$$\mathbf{K_n = K(1+r)^n} \qquad (15).$$

§ **36.** Wzór (15)

$$K_n = K(1+r)^n$$

ustala związek między czterema wielkościami: kapitałem początkowym (K), kapitałem końcowym (K_n), liczbą lat (n) i stopą procentową ($p = 100\,r$). Mając zatem trzy z tych wielkości, możemy przy pomocy wzoru (15) znaleźć czwartą wielkość. Inaczej mówiąc, przy pomocy wzoru (15) możemy rozwiązać cztery następujące zagadnienia:

I. Kapitał K złotych pożyczono na n lat. Obliczyć kapitał końcowy, jeżeli stopa procentu składanego wynosi p.

Obliczając logarytmy dziesiętne obu stron równości (15) otrzymamy

$\lg K_n = \lg K + n \lg(1+r)$, a stąd przez obliczanie „numerus logarithmi“ obliczymy K_n.

Np. $K = 3540$; $n = 15$; $p = 4$.

Mamy

$$\lg K_n = \lg 3540 + 15 \lg 1{,}04$$

obliczenia główne

$$\begin{aligned} \lg 3540 &\approx 3{,}5490 \\ 15 \lg 1{,}04 &\approx 0{,}2550 \\ \hline \lg K_n &\approx 3{,}8040 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 8035 - 6360 \\ \hline 5 - \quad 8 \end{array}$$

obliczenia pomocnicze

$$\begin{aligned} \lg 1{,}04 &\approx 0{,}0170 \\ 15 \lg 1{,}04 &\approx 0{,}0170 \\ &\times\ 15 \\ \hline &\quad 0{,}2550 \end{aligned}$$

$N \lg 3{,}8040 \approx 6368$; $\quad \mathbf{K_n \approx 6368}$ **(zł).**

II. Jaki kapitał należy pożyczyć na n lat, aby przy stopie procentu składanego p otrzymać kapitał końcowy K_n *zł*?

Ze wzoru (15) otrzymujemy

$$K = \frac{K_n}{(1+r)^n},$$

stąd

$$\lg K = \lg K_n + n \operatorname{clg}(1+r).$$

Np.: $K_n = 8542$; $p = 5$; $n = 10$.

Mamy

$$\lg K = \lg 8542 + 10 \operatorname{clg} 1{,}05.$$

Po wykonaniu obliczeń otrzymamy $K \approx 5243$ *zł*.

III. Na ile lat należy pożyczyć kapitał K *zł* na $p\%$ składany, aby otrzymać kapitał końcowy K_n *zł*?

Ze wzoru (15) otrzymujemy

$$(1+r)^n = \frac{K_n}{K}, \text{ stąd}$$

$$n \lg(1+r) = \lg K_n + \operatorname{clg} K, \text{ więc}$$

$$n = \frac{\lg K_n + \operatorname{clg} K}{\lg(1+r)}.$$

Np.: $K = 1770$; $K_n = 3184$; $p = 4$.

Mamy

$$n = \frac{\lg 3184 + \operatorname{clg} 1770}{\lg 1{,}04}.$$

Obliczenie 1)

$$\left.\begin{aligned} \lg 3184 &\approx 3{,}5030 \\ \operatorname{clg} 1770 &\approx \bar{4}{,}7520 \end{aligned}\right\} + \\ \hline 0{,}2550$$

Obliczenie 2)

$$\lg 1{,}04 \approx 0{,}0170.$$

Obliczenie 3)

$$n \approx \frac{0{,}2550}{0{,}0170} = \frac{2550}{170} = 15$$

$$n \approx 15 \text{ (lat)}$$

IV. Kapitał początkowy wynosi K *zł*, a kapitał końcowy po n latach wynosi K_n *zł*. Obliczyć stopę procentu składanego.

Ze wzoru (15) mamy

$$(1+r)^n=\frac{K_n}{K}, \text{ stąd}$$

$n\lg(1+r)^n=\lg K_n+\operatorname{clg} K$. Z tej równości znajdziemy $\lg(1+r)^n=\frac{\lg K_n+\operatorname{clg} K}{n}$, a przez obliczenie „numerus logarithmi" znajdziemy $1+r$. Odejmując 1 od $1+r$ otrzymamy r, a ze wzoru $r=\frac{p}{100}$ znajdziemy $p=100\,r$.

Np. $K_n=6844;\ A=5000;\ n=8.$

Mamy $8\lg(1+r)=\lg 6844+\operatorname{clg} 5000$

$$\lg(1+r)=\frac{\lg 6844+\operatorname{clg} 5000}{8}$$

Obliczenie 1)

$$\left.\begin{array}{l}\lg\ 6844\approx 3{,}8354\\ \operatorname{clg}\ 5000\approx 4{,}3010\end{array}\right\}+$$
$$\overline{\quad\quad\quad\quad 0{,}1364}$$

Obliczenie 2) $0{,}1363:8\approx 0{,}0170$

Zatem $\lg(1+r)\approx 0{,}0170$

$0170 - 104$

$N\lg(1+r)\approx 1{,}04$

$1+r\approx 1{,}04;\ r\approx 0{,}04$, więc $p\approx 4(\%)$.

Uwaga. Gdybyśmy z oszczędności, złożonych w P. K. O., nie podejmowali w ciągu n lat żadnej kwoty, wówczas oszczędności te utworzyłyby kapitał według wzoru (15), gdyż odsetki od tych oszczędności są dodawane do oszczędności.

Równania wykładnicze.

§ 37. Równaniem wykładniczym nazywamy równanie, w którym niewiadoma występuje w wykładniku potęgi.

Przykład I. Rozwiązać równanie

$$5^{x^2-4x+\frac{7}{2}}=\sqrt{5}$$

Ponieważ $\sqrt{5}=5^{\frac{1}{2}}$, zatem dane równanie można napisać w postaci

$$5^{x^2-4x+\frac{7}{2}}=5^{\frac{1}{2}}$$

Jeżeli równanie to posiada pierwiastek, to, podstawiając wartość tego pierwiastka na miejsce x, otrzymamy równość dwóch liczb. A z równości tych dwóch liczb wynikać będzie równość ich logarytmów przy tej samej podstawie. Zatem

$$(x^2 - 4x + \tfrac{7}{2}) \lg 5 = \tfrac{1}{2} \lg 5.$$

Dzieląc obie strony równania przez $\lg 5 \neq 0$, otrzymamy $x^2 - 4x + \frac{7}{2} = \frac{1}{2}$ i po rozwiązaniu otrzymanego równania kwadratowego: $x_1 = 1$; $x_2 = 3$.

Przykład II. Rozwiązać równanie

$$2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0.$$

Ponieważ $2^{2x} = (2^x)^2$, zatem równanie dane można napisać w postaci

$$(2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 4 = 0.$$

Oznaczając $2^x = y$ (metoda niewiadomej pomocniczej) mamy

$$y^2 - 5y + 4 = 0,$$

a stąd $y_1 = 1$; $y_2 = 4$.

Zatem $2^x = 1$, więc $x \lg 2 = 0$, czyli $x_1 = 0$

albo $2^x = 4$, więc $x \lg 2 = 2 \lg 2$ (bo $4 = 2^2$)

stąd $x_2 = 2$.

Równania logarytmiczne.

§ 38. Równaniem logarytmicznym nazywamy równanie, w którym niewiadoma występuje pod znakiem logarytmu.

Przykład I. Rozwiązać równanie

$$\lg (x + 3) = 1.$$

Ponieważ $1 = \lg 10$, zatem równanie dane można napisać w postaci

$$\lg (x + 3) = \lg 10.$$

Jeżeli równanie to posiada pierwiastek, to, podstawiając jego wartość na miejsce x, otrzymamy równość logarytmów dwóch liczb przy tej samej podstawie. Z równości tej wynikać będzie i równość liczb, czyli

$$x + 3 = 10 \text{ i stąd } x = 7.$$

Przykład II. Rozwiązać równanie

$$\lg (x + 3) - \lg (x - 1) = \lg 5.$$

Z własności logarytmów (§ 20) wiemy, że $\lg (x + 3) - \lg (x - 1) = \lg \frac{x + 3}{x - 1}$, zatem

$$\lg \frac{x + 3}{x - 1} = \lg 5.$$

Jeżeli równanie to posiada pierwiastek, to, podstawiając jego wartość na miejsce x, otrzymamy równość logarytmów dwóch liczb przy tej samej podstawie, a stąd i równość tych liczb. Zatem $\frac{x+3}{x-1}=5$ i po rozwiązaniu otrzymanego równania $x=2$.

Ćwiczenia.

51. Kapitał 3855 *zł* pożyczono na 8 lat na $5\frac{1}{2}\%$ składany. Obliczyć kapitał końcowy.

52. Kapitał 7500 *zł* pożyczono na 6 lat na 7% składany. Obliczyć kapitał końcowy.

53. Jaki kapitał należy ulokować w banku na $3\frac{1}{2}\%$ składany, aby po 12 latach otrzymać 10000 *zł*?

54. Jaki kapitał należy ulokować w banku na $4\frac{3}{4}\%$ składany, aby po 15 latach otrzymać 18000 *zł*?

55. Na ile lat należy ulokować kapitał na 5% składany, aby kapitał końcowy był dwa razy większy od początkowego?

56. **Zadanie fikcyjne.** Na początku pierwszego roku ery chrześcijańskiej ulokowano 1 grosz na 4% składany. Jaki kapitał odebranoby w końcu obecnego roku?

57. Kapitał 3000 *zł* pożyczono na 12 lat. Kapitał końcowy wynosił 6035 *zł*. Obliczyć stopę procentu składanego.

58. Miasto zaciągnęło pożyczkę w wysokości 1000000 *zł* na 3% składany. Ile *zł* musi zwrócić po 25 latach?

59. Ktoś ulokował w banku 35000 *zł* na 6% składany na 10 lat, a bank pożyczył tę kwotę innemu klientowi na 7% składany na taki sam okres czasu. Ile *zł* zarobił bank?

60. Kapitał 120000 *zł* pożyczony na 3 lata przyniósł 30000 *zł* dochodu. Obliczyć stopę procentu składanego.

61. Miasto liczy 126000 mieszkańców. Zakładając, że przyrost naturalny wynosi $15‰$ (promil) rocznie, obliczyć liczbę mieszkańców tego miasta po upływie 12 lat.

62. Według obliczeń, ogłoszonych przez Ligę Narodów, kulę ziemską zamieszkiwało w r. 1934 2100 milionów ludzi. Zakładając, że przyrost naturalny na kuli ziemskiej wynosi $10‰$ (promil) rocznie, obliczyć a) w którym roku kulę ziemską zamieszkiwało 1 miliard osób; b) w którym roku ludność kuli ziemskiej wynosić będzie 3 miliardy osób?

63. Rozwiązać równania:

a) $3^{x^2-5x+9}=27$; b) $5^{x^2-9x+16}=25$; c) $10^{2x^2-5x+4}=100$;

d) $2^{(x-2)(x-3)}=4$; e) $3^{\frac{x+5}{x-2}}=9$; $\sqrt[x]{2^{x^2+6}}=32$;

g) $\sqrt[x-1]{3^{2x+4}}=81$; h) $2^x+2^{2x}=80$; i) $2^x+4^x=272$;

k) $2^{x+3}+4\cdot4^x=32$; l) $5\cdot2^{x+1}-3\cdot2^x=28$.

64. Rozwiązać równania

a) $\lg x+\lg 2=2\lg x-\lg 5$; b) $\lg(x+3)+\lg 3=\lg(2x+1)$;

c) $\lg(2x-1)-\lg(x-2)=0$;

d) $\lg(x+7)+\lg(2x+4)=\lg(3x+1)+\lg(4x-2)$;

e) $2\lg(x+1)-\lg(x+7)=\lg(x-2)$;

f) $\lg\left(\frac{x+4}{x-5}\right)^2+\lg\frac{x-5}{x+4}=1$; g) $\lg\sqrt{x^2+5}-\lg\sqrt{x+2}=\lg\frac{3}{2}$.

ROZDZIAŁ III.

Postępy.

Część I. Ciągi liczbowe.

§ **39.** Znamy z arytmetyki tzw. **naturalny ciąg liczb**:

(1) 1, 2, 3, 4, 5, itd.

Gdybyśmy chcieli zapisać wszystkie liczby tego ciągu, to okazałoby się, że zapisywania tego nigdy nie skończymy, gdyż w ciągu tym nie ma liczby ostatniej.

Podobnie, gdybyśmy chcieli zapisać kolejno, jedna za drugą wszystkie liczby parzyste ciągu (1) albo wszystkie liczby nieparzyste ciągu (1), to i w tym wypadku okazałoby się, że zapisywanie to nigdy się nie skończy. W otrzymanym bowiem **ciągu liczb parzystych**

(2) 2, 4, 6, 8, itd,

i w **ciągu liczb nieparzystych**

(3) 1, 3, 5, 7, itd,

również nie ma liczby ostatniej.

Rozważmy ułamek $\frac{n}{n+1}$. Gdybyśmy na miejsce n poczęli podstawiać kolejno liczby naturalnego ciągu liczb, tj. 1, 2, 3, itd.

a otrzymane w ten sposób wartości liczbowe poczęli zapisywać kolejno, jedna za drugą, otrzymalibyśmy **ciąg liczbowy**

(4) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$, itd,

w którym znowu nie byłoby liczby ostatniej.

O ciągach takich, jak (1); (2); (3); (4) mówimy, że są **ciągami nieskończonymi.**

Aby zaznaczyć, że dany ciąg liczbowy jest nieskończony, stawiamy kropki po pewnej liczbie tego ciągu.

Np. ciągi

(5) 1, 3, 9, 27, 81,....

(6) 2, 4, 8, 16, 32,....

są ciągami nieskończonymi.

§ 40. Obierzmy 15 początkowych liczb ciągu (1), 8 początkowych liczb ciągu (2), 11 początkowych liczb ciągu (3) itd. Jeżeli tak obrane liczby napiszemy kolejno, jedna za drugą, otrzymamy **ciągi liczbowe:**

(7) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15.

(8) 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16.

(9) 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21,

w których ilość liczb jest skończona.

O ciagach takich, jak (7); (8); (9) mówimy, że są ciągami **skończonymi.**

§ 41. Liczby, które ciąg tworzą, nazywają się jego **wyrazami.** Wyrazy ciągu oznaczamy często przy pomocy jednej litery, opatrzonej u dołu (albo u góry) kolejnymi numerami, np.

$$a_1, \; a_2, \; a_3, \ldots, \; a_n.$$

Numery: 1, 2, 3,...n, które wskazują miejsce wyrazów w danym ciągu, nazywają się **wskaźnikami** tych wyrazów.

Mamy zatem:

w ciągu (1): $a_1 = 1$; $a_2 = 2$;.... $a_{10} = 10$

w ciągu (2): $a_1 = 2$; $a_2 = 4$;.... $a_4 = 8$

w ciągu (4): $a_1 = \frac{1}{2}$; $a_2 = \frac{2}{3}$;.... $a_4 = \frac{4}{5}$.

Uwaga. Z określenia wynika, że wskaźnik wyrazu jest zawsze liczbą całkowitą i dodatnią.

Ciąg liczbowy nazywa się **rosnącym,** jeżeli każdy następny wyraz jest większy od poprzedniego.

Ciąg liczbowy nazywa się **malejącym,** jeżeli każdy następny wyraz jest mniejszy od poprzedniego.

§ 42. Przypatrując się bliżej ciągom (1); (2); (3); (4); (5); (6), możemy stwierdzić, że wyrazy każdego z nich następują po sobie w pewien określony sposób, według pewnego prawa. Możemy mianowicie powiedzieć, że np.

w ciągu (1) pierwszym wyrazem jest 1, a każdy następny jest o 1 większy od poprzedniego;

w ciągu (3) pierwszym wyrazem jest 1, a każdy następny jest o 2 większy od poprzedniego;

w ciągu (4) pierwszym wyrazem jest $\frac{1}{2}$, a każdy następny wyraz powstaje przez powiększenie o 1 licznika i mianownika poprzedniego wyrazu;

w ciągu (6) pierwszym wyrazem jest 2, a każdy następny jest 2 razy większy od poprzedniego.

Jest rzeczą zrozumiałą, że mając sformułowane słownie prawo tworzenia wyrazów ciągu, możemy podać kolejne jego wyrazy.

Jeżeli jednak mamy wzór, według którego możemy obliczyć n-ty wyraz ciągu (czyli a_n), to i wtedy możemy obliczyć wszystkie żądane wyrazy ciągu. Rzeczywiście, podstawiając na miejsce n — jak to uczyniliśmy w § 39 — wartości 1; 2; 3; itd. otrzymamy wartości wyrazów, zajmujących miejsca 1; 2; 3; itd. w danym ciągu. Jeżeli np.

$$a_n = 2n - 1,$$

wówczas: $a_1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$; $a_2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$; $a_3 = 2 \cdot 3 - 1 = 5$; itd.

Otrzymany ciąg jest ciągiem (3) omówionym w § 39. Prawo tworzenia wyrazów tego ciągu sformułowaliśmy poprzednio słownie. Obecnie obliczyliśmy te wyrazy, korzystając ze wzoru $a_n = 2n - 1$. Zatem wzór ten wyraża to właśnie prawo, według którego wyrazy ciągu następują po sobie. Dlatego też a_n nazywamy **wyrazem ogólnym** ciągu, a podane wyżej przykłady stwierdzają, że, aby ciąg był wyznaczony (tzn. aby było można podać wartości jego wyrazów), wystarczy znać wzór, wyrażający jego wyraz ogólny.

Ćwiczenia.

65. Napisać wzór, wyrażający wyraz ogólny (a_n) w następujących ciągach:

a) $2, 4, 6, 8, 10, \ldots \; a_n$ b) $2, 4, 8, 16, 32, \ldots \; a_n$

c) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \ldots \; a_n$ d) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots \; a_n$

e) $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots \; a_n$ f) $\frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \frac{2}{81}, \ldots \; a_n$

66. Napisać 6 pierwszych wyrazów ciągu, wiedząc, że

a) $a_n = 1 + 2n$ b) $a_n = -3 + n$ c) $a_n = 2 \cdot 2^n$

d) $a_n = \frac{5}{3^n}$ e) $a_n = \frac{2n-1}{2n}$ f) $a_n = \frac{2n-1}{2n+1}$

g) $a_n = 2 + \frac{1}{n+1}$ h) $a_n = 1 - \frac{n}{n+1}$ i) $a_n = -2 + n^2$

Część II. Postęp arytmetyczny (różnicowy).

§ 43. **Określenie.** Ciąg, w którym różnica między wyrazem następnym i poprzednim jest liczbą stałą dla danego ciągu, nazywa się **postępem arytmetycznym** (różnicowym).

Oznaczmy przez r tę stałą liczbę. Nazywa się ona **różnicą** postępu arytmetycznego.

Jeżeli zatem ciąg

$$a_1, \ a_2, \ a_3, \ \ldots\ldots \ a_{n-1}, \ a_n$$

jest postępem różnicowym o różnicy **r**, to

$a_2 - a_1 = r$; $a_3 - a_2 = r$; ....; $a_n - a_{n-1} = r$ stąd

$a_2 = a_1 + r$; $a_3 = a_2 + r$; ....; $a_n = a_{n-1} + r$, czyli

każdy wyraz postępu arytmetycznego, oprócz pierwszego, jest sumą wyrazu poprzedniego i różnicy tego postępu.

Jeżeli różnica postępu jest dodatnia, tj. gdy $r > 0$, to postęp jest **rosnący**. Jeżeli $r < 0$, to postęp jest **malejący**. Jeżeli $r = 0$, wówczas wszystkie wyrazy postępu sa sobie równe.

Uwaga. Jeżeli ciąg

$$a_1, \ a_2, \ a_3, \ \ldots \ a_{n-2}, \ a_{n-1}, \ a_n$$

jest postępem arytmetycznym o różnicy r, to ciąg

$$a_n, \ a_{n-1}, \ a_{n-2}, \ \ldots \ a_3, \ a_2, \ a_1$$

jest również postępem arytmetycznym o różnicy $(-r)$. Istotnie: z pierwszego ciągu mamy:

$a_2 - a_1 = r$; $a_3 - a_2 = r$; .... $a_n - a_{n-1} = r$, stąd

$a_{n-1} - a_n = -r$; .... $a_2 - a_3 = -r$; $a_1 - a_2 = -r$, tzn., że drugi ciąg jest postępem arytmetycznym o różnicy $(-r)$.

Własności postępu arytmetycznego.

§ 44. Wiemy z § poprzedniego, że każdy wyraz postępu arytmetycznego, oprócz pierwszego, jest sumą wyrazu poprzedniego i różnicy tego postępu. Zatem

$$a_2 = a_1 + r;$$

$a_3 = a_2 + r$, ponieważ jednak $a_2 = a_1 + r$, więc

$a_3 = a_1 + r + r = a_1 + 2r = a_1 + (3-1)r$

Podobnie: $a_4 = a_3 + r = a_1 + 2r + r = a_1 + 3r = a_1 + (4-1)r$ itd.

Stąd

(I) $$a_n = a_1 + (n-1)r$$

czyli

n-ty wyraz postępu arytmetycznego jest sumą wyrazu pierwszego i (n — 1)-szej wielokrotności różnicy postępu.

§ **45.** Poznany poprzednio wzór

(I) $$a_n = a_1 + r(n-1)$$

wyraża zależność między pierwszym wyrazem postępu arytmetycznego (a_1), różnicą postępu (r), n-tym wyrazem (a_n) i wskaźnikiem tego wyrazu (n). Znając trzy z tych czterech liczb, możemy przy pomocy wzoru (I) obliczyć czwartą liczbę.

Jeżeli np. $a_n = 20$; $r = 2$; $n = 8$,
to z równania

$$20 = a_1 + 2(8-1)$$

znajdziemy, po rozwiązaniu, $a_1 = 6$.

Jeżeli np. $a_n = 14$; $a_1 = 3$; $n = 12$; to z równania
$14 = 3 + r(12-1)$ znajdziemy $r = 1$.

Jednocześnie wzór (I) pozwala na napisanie dowolnej liczby wyrazów postępu, gdy znamy tylko wyraz pierwszy (a_1) i różnicę postępu (r).

Jeżeli np. $a_1 = 2$, $r = 3$, wtedy

$a_2 = 2 + 3 = 5$; $a_3 = 2 + 3(3-1) = 8$; ... $a_{20} = 2 + 3(20-1) = 59$ itd.

Inaczej mówiąc:

wyraz pierwszy i różnica wystarczają do wyznaczenia postępu arytmetycznego.

§ **46.** Rozpatrzmy trzy wyrazy kolejne postępu arytmetycznego:

$$a_1,\ a_2,\ a_3;\quad a_2,\ a_3,\ a_4;\ \ldots;\quad a_{k-1},\quad a_k,\quad a_{k+1}.$$

Zgodnie z określeniem postępu mamy

(1) $a_k = a_{k-1} + r$; (2) $a_{k+1} = a_k + r$ czyli

(3) $a_k = a_{k+1} - r$.

Dodając stronami równości (1) i (3), otrzymamy po redukcji

$$2a_k = a_{k-1} + a_{k+1}, \qquad \text{stąd}$$

(II) $$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2} \quad \text{tj.}$$

każdy wyraz postępu arytmetycznego (oprócz pierwszego i ostatniego) jest średnią arytmetyczną wyrazów poprzedniego i następnego.

§ **47.** W postępie arytmetycznym

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$$

wyraz a_2 zajmuje drugie miejsce, licząc od pierwszego wyrazu, wyraz zaś a_{n-1} zajmuje drugie miejsce, licząc od ostatniego wyrazu. Podobnie a_3 i a_{n-2} zajmują trzecie miejsca, licząc odpowiednio od pierwszego i ostatniego wyrazu postępu; a_4 i a_{n-3} zajmują czwarte miejsca itd.

O takich wyrazach mówimy, że są **jednakowo odległe od początku i końca postępu.**

Rozpatrzmy dwa takie wyrazy, zajmujące miejsca k od początku i od końca postępu. Wyrazem, zajmującym miejsce k od początku, jest a_k. Wyrazem, zajmującym miejsce k od końca jest a_{n-k+1}. Istotnie, **drugi** wyraz od końca ma wskaźnik $n-1 = n-\mathbf{2}+1$; **trzeci** wyraz od końca ma wskaźnik $n-2=n-\mathbf{3}+1$, itd. A więc k-ty wyraz od końca ma wskaźnik $n-\mathbf{k}+1$.

Ze wzoru (I) wynika, że

(4) $$a_k = a_1 + r(k-1),$$

a zgodnie z uwagą § 43

(5) $$a_{n-k+1} = a_n + (-r)(k-1) \text{ czyli}$$

(6) $$a_{n-k+1} = a_n - r(k-1).$$

Dodając stronami równości (4) i (6), otrzymamy po redukcji

(III) $$\mathbf{a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n},$$ tzn., że

suma dwóch wyrazów postępu arytmetycznego, jednakowo odległych od początku i końca postępu, jest w danym postępie stała i równa sumie wyrazów pierwszego i ostatniego.

§ **48.** Otrzymana własność pozwoli nam obliczyć sumę n pierwszych kolejnych wyrazów postępu arytmetycznego. Oznaczmy przez S_n sumę tych wyrazów. Mamy więc:

(7) $$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

(8) $$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1.$$

Dodając stronami obie równości (7) i (8), otrzymamy

(9) $$2S_n = (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n) + (a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1).$$

Stosując prawo przemienności i łączności w sumie, znajdującej się po prawej stronie równości (9), otrzymamy

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots + (a_n + a_1).$$

Ale każda ze sum cząstkowych jest przecież sumą dwóch wyrazów jednakowo odległych od początku i końca postępu, zatem każda z nich — według wzoru (III) — jest równa sumie wyrazów pierwszego i ostatniego. Stąd

$$2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \;\ldots\; + (a_1 + a_n)}_{n \text{ składników}}$$

czyli $2S_n = n(a_1 + a_n)$, a stąd

(IV) $$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2},$$ tzn. że

suma n pierwszych kolejnych wyrazów postępu arytmetycznego jest równa połowie iloczynu liczby wyrazów przez sumę wyrazów pierwszego i n-tego.

Wniosek. Jeżeli we wzorze

(IV) $$S_n = \frac{n\,(a_1 + a_n)}{2}$$

podstawimy na miejsce a_n jego wartość

(I) $a_n = a_1 + r(n - 1)$, otrzymamy wówczas

$$S_n = \frac{n\,[a_1 + a_1 + r(n - 1)]}{2},$$ a po redukcji

(V) $$S_n = \frac{n\,[2a_1 + r(n - 1)]}{2}.$$

Wzór (V) stosujemy wówczas, gdy, obliczając sumę n wyrazów, znamy wyraz pierwszy (a_1) i różnicę (r) postępu arytmetycznego.

§ 49. Zadanie. Pomiędzy 2 liczby dane **a** i **b** wstawić **k** liczb średnich arytmetycznych, tzn. znaleźć **k** liczb, które by z liczbami danymi tworzyły postęp arytmetyczny o pierwszym wyrazie **a** i ostatnim wyrazie **b**.

Rozwiązanie zadania sprowadza się zatem do wyznaczenia postępu arytmetycznego. Wiemy już, że postęp taki jest wyznaczony, gdy znamy jego wyraz pierwszy i różnicę. Ale wyraz pierwszy jest dany

$$a_1 = a.$$

Liczbę wyrazów znamy również

$$n = k + 2 \quad (k \text{ liczb szukanych } + 2 \text{ liczby dane}).$$

Wzór (I)

$a_n = a_1 + r(n - 1)$, w którym podstawimy

$a_n = b; \quad a_1 = a; \quad n = k + 2$

przyjmie postać

$$b = a + r(k + 2 - 1), \qquad \text{czyli}$$

$$b = a + r(k + 1) \qquad \text{stąd}$$

$$\text{(VI)} \qquad r = \frac{b - a}{k + 1}.$$

Przykład. Pomiędzy 2 i 20 wstawić 5 liczb średnich arytmetycznych.

Rozumując, jak wyżej, otrzymamy

$$r = \frac{20 - 2}{6}; \quad r = \frac{18}{6}; \quad r = 3.$$

Szukanymi liczbami będą liczby

5, 8, 11, 14, 17, które z liczbami 2 i 20 utworzą postęp arytmetyczny

2, 5, 8, 11, 14, 17, 20.

Ćwiczenia.

67. Napisać 4 początkowe wyrazy postępu arytmetycznego, w którym

a) $a_1 = 3, \quad r = 4$ d) $a_1 = -2, \quad r = \frac{1}{3}$

b) $a_1 = -5, \quad r = 2$ e) $a_1 = \frac{1}{5}, \quad r = -\frac{3}{10}$

c) $a_1 = 5, \quad r = -2$ f) $a_1 = -1, \quad r = \frac{1}{5}$

68. Obliczyć siódmy wyraz postępu arytmetycznego, którego pierwszym wyrazem jest 4, a różnicą -3.

69. Dwudziesty czwarty wyraz postępu arytmetycznego jest równy 24, a różnica wynosi $\frac{2}{3}$. Obliczyć wyraz pierwszy.

70. W postępie arytmetycznym pierwszy wyraz jest równy 42, a osiemnasty wyraz jest równy -45. Znaleźć różnicę postępu.

71. Trzeci wyraz postępu arytmetycznego wynosi 8, a siódmy wyraz tegoż postępu wynosi 20. Wyznaczyć postęp.

72. Drugi wyraz postępu arytmetycznego wynosi 6, a różnica między wyrazami siódmym i czwartym wynosi 12. Wyznaczyć postęp.

73. W postępie arytmetycznym suma wyrazów pierwszego i drugiego wynosi 0, a różnica między wyrazem trzecim i szóstym wynosi 12. Wyznaczyć postęp.

74. Suma trzech liczb, tworzących postęp arytmetyczny, wynosi 15, a różnica między liczbami trzecią i pierwszą wynosi 8. Znaleźć te liczby.

75. W postępie arytmetycznym suma wyrazów drugiego i czwartego wynosi 20, a stosunek wyrazu piątego do trzeciego wynosi $\frac{11}{5}$. Wyznaczyć postęp.

76. Suma trzech liczb, tworzących postęp arytmetyczny, wynosi 15, a iloczyn liczb pierwszej i trzeciej wynosi 21. Znaleźć te liczby.

77. Drugi wyraz postępu arytmetycznego wynosi 5, a wyraz szósty wynosi 21. Obliczyć sumę 10 początkowych wyrazów tego postępu.

78. Postęp arytmetyczny składa się z n wyrazów, których suma wynosi 80. Pierwszy wyraz jest równy 3, a różnica postępu wynosi 2. Obliczyć liczbę wyrazów.

79. Suma 12 wyrazów postępu arytmetycznego wynosi 276. Różnica postępu wynosi 4. Znaleźć wyraz pierwszy.

80. Suma 9 wyrazów postępu arytmetycznego wynosi 162. Wyraz pierwszy wynosi 2. Znaleźć różnicę postępu.

81. Uczeń składał swe oszczędności w P. K. O. w ten sposób, że w styczniu złożył 2 *zł,* a w każdym następnym miesiącu o $1\frac{1}{2}$ *zł* więcej, niż w poprzednim. Ile *zł* wniósł w grudniu i ile *zł* zaoszczędził w ciągu całego roku?

82. Liczby, wyrażające w stopniach miary kątów trójkąta, tworzą postęp arytmetyczny. Stosunek najmniejszego kąta do największego kąta wynosi $\frac{1}{3}$. Obliczyć kąty tego trójkąta.

83. Obwód trójkąta prostokątnego, którego boki tworzą postęp arytmetyczny, jest równy 12 *dcm*. Obliczyć te boki.

84. Obwód trójkąta, którego boki tworzą postęp arytmetyczny, jest równy 18 *dcm*. Pole prostokąta, zbudowanego z najmniejszego i największego boku danego trójkąta, jest równe 20 dcm^2. Obliczyć boki danego trójkąta.

85. Za pierwszą przepracowaną godzinę nadliczbową zapłacono pracownikowi 2 *zł*, a za każdą następną o $\frac{3}{4}$ *zł* więcej, niż za poprzednią. Ile godzin nadliczbowych przepracował pracownik, jeżeli zapłacono mu za te godziny $12\frac{1}{2}$ *zł*?

86. Pracownica domowa otrzymywała w pierwszym roku swej pracy pensję w wysokości 480 *zł* rocznie, a w każdym następnym roku o 60 *zł* więcej, niż w poprzednim. Ile lat przepracowała, jeżeli za cały czas swej służby otrzymała 4620 *zł*?

87. Pomiędzy liczby 3 i 31 wstawić 3 liczby średnie arytmetyczne.

88. Pomiędzy liczby -10 i 5 wstawić 4 liczby średnie arytmetyczne.

Część III. Postęp geometryczny (ilorazowy).

§ 50. Określenie. Ciąg, w którym stosunek wyrazu następnego do poprzedniego jest liczbą stałą dla danego ciągu, nazywa się **postępem geometrycznym** (ilorazowym).

Oznaczmy przez q tę liczbę stałą. Nazywa się ona **ilorazem** postępu geometrycznego.

Jeżeli zatem

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_{n-1},\ a_n$$

jest postępem geometrycznym o ilorazie q, to

$$\frac{a_2}{a_1}=q;\quad \frac{a_3}{a_2}=q;\quad \ldots;\quad \frac{a_n}{a_{n-1}}=q.\quad \text{Stąd}$$

$$a_2=a_1\cdot q;\quad a_3=a_2\cdot q;\quad \ldots;\quad a_n=a_{n-1}\cdot q,\ \text{czyli}$$

każdy wyraz postępu geometrycznego, oprócz pierwszego, jest iloczynem wyrazu poprzedniego przez iloraz postępu.

Jeżeli pierwszy wyraz postępu geometrycznego jest dodatni ($a_1>0$), a iloraz jest większy od 1 ($q>1$), to postęp geometryczny jest **rosnący.** Jeżeli pierwszy wyraz jest dodatni, a iloraz jest liczbą dodatnią, mniejszą od 1 ($0<q<1$), to postęp geometryczny jest **malejący.** Jeżeli $q=1$, wtedy wszystkie wyrazy postępu geometrycznego są sobie równe. Jeżeli natomiast iloraz postępu jest ujemny ($q<0$), wówczas wyrazy postępu geometrycznego są na przemian dodatnie i ujemne, a bezwzględne wartości tych wyrazów tworzą postęp geometryczny rosnący lub malejący, zależnie od tego, czy wartość bezwzględna ilorazu jest większa czy mniejsza od 1, albo też tworzą postęp geometryczny o równych wyrazach, jeżeli wartość bezwzględna ilorazu jest równa 1.

Tak więc postęp

2, 6, 18, 54, 162, jest postępem geometrycznym rosnącym ($q=3$),

a postęp

3, $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{16}$, jest postępem geometrycznym malejącym ($q=\frac{1}{2}$).

Uwaga Jeżeli ciąg

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_{n-2},\ a_{n-1},\ a_n$$

jest postępem geometrycznym o ilorazie q, to ciąg

$$a_n,\ a_{n-1},\ a_{n-2},\ \ldots,\ a_3,\ a_2,\ a_1$$

jest postępem geometrycznym o ilorazie $\frac{1}{q}$. Istotnie z pierwszego ciągu mamy:

$$\frac{a_2}{a_1} = q; \quad \frac{a_3}{a_2} = q; \quad \ldots; \quad \frac{a_n}{a_{n-1}} = q. \text{ Stąd}$$

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{1}{q}; \quad \ldots; \quad \frac{a_2}{a_3} = \frac{1}{q}; \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{q},$$ co dowodzi, że drugi ciąg jest postępem geometrycznym, ale o ilorazie $\frac{1}{q}$.

Własności postępu geometrycznego.

§ 51. Wiemy z § poprzedniego, że każdy wyraz postępu geometrycznego, oprócz pierwszego, jest iloczynem wyrazu poprzedniego przez iloraz postępu. Zatem:

$a_2 = a_1 \cdot q$

$a_3 = a_2 \cdot q$. Ponieważ jednak $a_2 = a_1 \cdot q$, więc

$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q \cdot q = a_1 \cdot q^2 = a_1 q^{3-1}$.

Podobnie:

$a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^2 \cdot q = a_1 q^3 = a_1 \cdot q^{4-1}$, itd. Stąd

(VII) $$\mathbf{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$$

czyli:

n-ty wyraz postępu geometrycznego jest iloczynem wyrazu pierwszego przez (n—1)-szą potęgę ilorazu tego postępu.

§ 52. Poznany wzór

(VII) $$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

ustala zależność między pierwszym wyrazem (a_1), ilorazem (q), wyrazem zajmującym miejsce n (a_n) i wskaźnikiem (n) tego wyrazu postępu geometrycznego. Każdą z tych czterech liczb możemy obliczyć przy pomocy wzoru (VII), gdy znamy trzy liczby pozostałe.

Przykład I. Obliczyć a_6, wiedząc, że $a_1 = 4$ i $q = 2$.

Ze wzoru (VII) otrzymamy

$$a_6 = 4 \cdot 2^5 = 128.$$

Przykład II. Obliczyć a_1, jeżeli $a_5 = 162$ i $q = 3$.

Ze wzoru (VII) otrzymamy

$$162 = a_1 \cdot 3^4, \text{ stąd}$$

$$a_1 = \frac{162}{3^4} = 2.$$

P r z y k ł a d III. Obliczyć n, wiedząc, że $a_1=3$, $q=2$ i $a_n=384$.
Stosując wzór (VII), otrzymamy:

$$384=3\cdot 2^{n-1}$$

Dzieląc obie strony równania przez 3, mamy

$$128=2^{n-1}.$$

Ponieważ $128=2^7$, więc z równości $2^7=2^{n-1}$ otrzymujemy $n-1=7$.

Zatem $n=8$.

P r z y k ł a d IV. Obliczyć q, jeżeli $a_1=2$ i $a_7=8192$.
Stosując wzór (VII), otrzymujemy

$$8192=2\cdot q^6. \quad \text{Stąd}$$

$$q^6=4096$$

więc $$q=\sqrt[6]{4096}.$$

Ponieważ $4096=4^6$ więc

$$q=\sqrt[6]{4^6}, \text{ czyli } q=4.$$

§ 53. Ten sam wzór (VII) pozwala na napisanie dowolnej liczby wyrazów postępu geometrycznego, gdy znamy tylko wyraz pierwszy (a_1) i iloraz postępu (q).

Jeżeli np.

$$a_1=5, \quad q=\tfrac{1}{3},$$

to

$$a_2=5\cdot\tfrac{1}{3}=\tfrac{5}{3},$$

$$a_3=5\cdot(\tfrac{1}{3})^2=5\cdot\tfrac{1}{9}=\tfrac{5}{9},$$

$$a_8=5\cdot(\tfrac{1}{3})^7=5\cdot\frac{1}{2187}=\frac{5}{2187} \text{ itd.}$$

Inaczej mówiąc:

wyraz pierwszy (a_1) i iloraz (q) wystarczają do wyznaczenia postępu geometrycznego.

§ 54. Rozpatrzmy trzy wyrazy kolejne postępu geometrycznego:

$$a_1,\ a_2,\ a_3;\ \ a_2,\ a_3,\ a_4;\ \ \ldots;\ \ a_{k-1},\ a_k,\ a_{k+1}.$$

Z określenia postępu geometrycznego wynika, że

(10) $$a_k=a_{k-1}\cdot q; \quad a_{k+1}=a_k\cdot q, \text{ czyli}$$

(11) $$a_k=\frac{a_{k+1}}{q}$$

Mnożąc stronami równości (10) i (11), otrzymamy

$$a_k^2 = \frac{a_{k-1} \cdot q \cdot a_{k+1}}{q}, \text{ a po skróceniu przez } q$$

(VIII) $a_k^2 = a_{k-1} \cdot a_{k+1}$, albo (IX) $a_k = \sqrt{a_{k-1} \cdot a_{k+1}}$

tj.

każdy wyraz postępu geometrycznego (oprócz pierwszego i ostatniego) jest średnią geometryczną (albo średnią proporcjonalną) wyrazów poprzedniego i następnego.

§ 55. Obierzmy dwa wyrazy postępu geometrycznego jednakowo odległe od początku i końca postępu (p. § 47). Wyrazem, zajmującym miejsce k od początku jest a_k. Wyrazem, zajmującym miejsce k od końca jest, jak wiemy już, a_{n-k+1} (p. § 47).

Ze wzoru (VII) wynika, że

(12) $$a_k = a_1 q^{k-1}$$

a, zgodnie z uwagą § 50,

(13) $$a_{n-k+1} = a_n \cdot \frac{1}{q^{k-1}}$$

Mnożąc stronami równości (12) i (13), otrzymamy po skróceniu przez q^{k-1}

(X) $$a_k \cdot a_{n-k+1} = a_1 \cdot a_n$$

tj. **iloczyn dwóch wyrazów postępu geometrycznego, jednakowo odległych od początku i końca postępu, jest w tym postępie stały i równy iloczynowi wyrazów pierwszego i ostatniego.**

§ 56. Oznaczmy przez S_n sumę n pierwszych kolejnych wyrazów postępu geometrycznego. Mamy więc:

(14) $$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n.$$

Pomnóżmy obie strony równości (14) przez iloraz q postępu. Otrzymamy:

(15) $$q \cdot S_n = a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + a_3 \cdot q + \ldots + a_{n-1} \cdot q + a_n \cdot q.$$

Ale jak wiemy z § 50:

$$a_1 q = a_2;\; a_2 q = a_3; \ldots;\; a_{n-1} q = a_n,$$

zatem równość (15) przyjmie postać:

(16) $$q \cdot S_n = a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n + a_n \cdot q,$$

a ponieważ, jak wynika z równości (14)

$$a_2 + a_3 + \ldots + a_n = S_n - a_1,$$

więc równość (16) można napisać w postaci:

(17) $$q \cdot S_n = S_n - a_1 + a_n \cdot q.$$

Przenosząc wyraz S_n ze znakiem przeciwnym na lewą stronę równości (17), otrzymamy:

$$q \cdot S_n - S_n = a_n \cdot q - a_1, \text{ czyli}$$

(18) $$(q-1) \cdot S_n = a_n \cdot q - a_1.$$

Jeżeli $q \neq 1$, wówczas dzieląc obie strony równości (18) przez $q-1$ otrzymamy:

$$S_n = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q-1}.$$

A ponieważ $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, więc $a_n \cdot q = a_1 \cdot q^n$, zatem

$$S_n = \frac{a_1 \cdot q^n - a_1}{q-1}, \text{ czyli}$$

(XI) $$\mathbf{S_n = \frac{a_1 (q^n - 1)}{q-1}}.$$

Uwaga I. Mnożąc we wzorze (XI) licznik i mianownik ułamka przez -1, otrzymamy inną postać wzoru na sumę n pierwszych kolejnych wyrazów postępu geometrycznego:

(XII) $$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}.$$

Uwaga II. Wzór (XI) wygodnie jest stosować w wypadku postępów rosnących, wzór zaś (XII) — w wypadku postępów malejących.

Jeżeli $q=1$, wtedy wszystkie wyrazy postępu są sobie równe i wówczas $S_n = \underbrace{a_1 + a_1 + \ldots . a_1}_{n \text{ składników}}$, czyli $S_n = n \cdot a_1$.

§ **57. Zadanie.** Pomiędzy dwie liczby dane **a** i **b** wstawić **k** liczb średnich geometrycznych, tzn. znaleźć **k** liczb, które by z liczbami danymi tworzyły postęp geometryczny o pierwszym wyrazie **a** i ostatnim wyrazie **b**.

Rozwiązanie zadania sprowadza się do wyznaczenia postępu geometrycznego. Wiemy, że postęp jest wyznaczony, gdy znamy jego wyraz pierwszy i iloraz. Ale wyraz pierwszy jest dany: $a_1 = a$. Wystarczy więc tylko znaleźć iloraz (q). Ponieważ liczbę wyrazów również znamy

$$n = k + 2 \text{ (} k \text{ liczb szukanych} + 2 \text{ liczby dane),}$$

więc wzór (VII) $a_n = a_1 q^{n-1}$, w którym: $a_n = b$; $a_1 = a$; $n = k + 2$ przyjmie postać

$$b = aq^{k+2-1} \text{ czyli}$$
$$b = aq^{k+1}. \text{ Stąd}$$
$$q^{k+1} = \frac{b}{a}$$

(XIII) $$q = \sqrt[k+1]{\frac{b}{a}}.$$

Przykład. Pomiędzy liczby $\frac{1}{2}$ i 32 wstawić 5 liczb średnich geometrycznych.

Rozumując, jak wyżej, otrzymamy:

$$q = \sqrt[5+1]{\frac{32}{\frac{1}{2}}} \text{ czyli}$$

$$q = \mp \sqrt[6]{64}, \text{ a że } 64 = 2^6, \text{ więc}$$

$$q = \mp \sqrt[6]{2^6},\ q = \mp 2.$$

Szukanymi liczbami będą zatem

$-1,\ 2,\ -4,\ +8,\ -16$, gdy $q = -2$

albo

$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16$, gdy $q = +2$.

Liczby te z liczbami $\frac{1}{2}$ i 32 utworzą postęp

$\frac{1}{2},\ -1,\ +2,\ -4,\ +8,\ -16,\ 32$

albo

$\frac{1}{2},\ 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32.$

§ 58. Zestawmy wzory, wyrażające własności postępów arytmetycznego i geometrycznego.

Postęp arytmetyczny (r-stałe)	Postęp geometryczny (q-stałe)
(I) $a_n = a_1 + r(n-1)$	(VII) $a_n = a_1 q^{n-1}$
(II) $a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$	(IX) $a_k = \sqrt{a_{k-1} \cdot a_{k+1}}$
(III) $a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n$	(X) $a_k \cdot a_{n-k+1} = a_1 \cdot a_n$

Jeżeli dodawanie i odejmowanie nazwiemy działaniami pierwszego rzędu, mnożenie i dzielenie — działaniami drugiego rzędu, a potęgowanie i pierwiastkowanie — działaniami trzeciego rzędu, wówczas powiemy, że

jeżeli we wzorach wyrażających własności postępu arytmetycznego, zastąpimy wskazane w nich działania działaniami o jeden rząd wyższymi, wówczas otrzymamy wzory, wyrażające własności postępu geometrycznego.

Ćwiczenia.

89. Napisać 4 początkowe wyrazy postępu geometrycznego, w którym

a) $a_1 = 3, \quad q = 2$
b) $a_1 = 1, \quad q = -2$
c) $a_1 = 5, \quad q = \frac{1}{2}$
d) $a_1 = -3, \quad q = \frac{1}{3}$
e) $a_1 = -4, \quad q = -\frac{1}{2}$
f) $a_1 = \frac{1}{4}, \quad q = 4$
g) $a_1 = \frac{1}{2}, \quad q = \frac{1}{4}$
h) $a_1 = -\frac{1}{5}, \quad q = -\frac{1}{3}$.

90. Obliczyć piąty wyraz postępu geometrycznego, którego wyraz pierwszy jest równy 5, a iloraz jest równy -3.

91. Trzeci wyraz postępu geometrycznego jest równy 16, a piąty wyraz tegoż postępu jest równy 256. Znaleźć iloraz postępu.

92. Czwarty wyraz postępu geometrycznego jest równy 54, a iloraz postępu jest równy 3. Obliczyć wyraz pierwszy.

93. Drugi wyraz postępu geometrycznego wynosi 6, a piąty wyraz tegoż postępu jest równy 48. Wyznaczyć postęp.

94. Obliczyć sumę 5 pierwszych wyrazów postępu geometrycznego, w którym wyraz pierwszy jest równy 2, a iloraz jest równy 3.

95. Dziewiąty wyraz postępu geometrycznego wynosi 1280, pierwszy wyraz tegoż postępu wynosi 5. Obliczyć sumę 9 pierwszych wyrazów.

96. Ósmy wyraz postępu geometrycznego wynosi 384, a iloraz tegoż postępu wynosi 2. Obliczyć sumę 8 pierwszych wyrazów.

97. Pierwszy wyraz postępu geometrycznego jest równy $\frac{1}{2}$, iloraz tego postępu jest równy 6, a ostatni wyraz jest równy 3888. Obliczyć liczbę wyrazów.

98. Suma n wyrazów postępu geometrycznego wynosi 381. Pierwszy wyraz postępu jest równy 3, a iloraz jest równy 2. Znaleźć n.

99. Jedenasty wyraz postępu geometrycznego jest równy 1536, a wyraz pierwszy jest równy $1\frac{1}{2}$. Znaleźć iloraz postępu.

100. Suma 8 wyrazów postępu geometrycznego wynosi 6560. Pierwszy wyraz jest równy 2. Znaleźć iloraz postępu.

101. Pomiędzy liczby 3 i 243 wstawić 3 liczby średnie geometryczne.

102. Pomiędzy liczby -2 i 64 wstawić 4 liczby średnie geometryczne.

103. Trzy liczby tworzą postęp geometryczny. Suma liczb pierwszej i drugiej wynosi 8, a różnica między liczbami trzecią i pierwszą wynosi 16. Znaleźć te iczby.

W s k a z ó w k a: ułożyć dwa równania opierając się na warunkach zadania, następnie jedno z nich podzielić stronami przez drugie.

104. Suma trzech liczb, tworzących postęp geometryczny, jest równa 248, a różnica wyrazów skrajnych wynosi 192. Znaleźć te liczby.

105. Liczbę 221 rozłożyć na trzy składniki, tworzące postęp geometryczny, wiedząc, że trzeci składnik jest o 136 większy od pierwszego.

106. Cztery liczby tworzą postęp geometryczny. Suma liczb pierwszej i drugiej wynosi 28, a suma dwóch liczb pozostałych wynosi 175. Znaleźć te liczby.

107. Suma trzech liczb, tworzących postęp arytmetyczny, wynosi 15. Gdyby od liczby drugiej odjąć 1, a pozostałe liczby pozostawić bez zmiany, otrzymalibyśmy postęp geometryczny. Znaleźć te liczby.

108. Suma trzech liczb, tworzących postęp geometryczny, wynosi 13. Gdyby do liczby drugiej dodać 2, a pozostałe liczby pozostawić bez zmiany, otrzymalibyśmy postęp arytmetyczny. Znaleźć te liczby.

109. Wykazać, że jeżeli wartości zmiennej niezależnej tworzą postęp arytmetyczny, to odpowiednie wartości funkcji wykładniczej $y = a^x$ tworzą postęp geometryczny.

110. Objętość prostopadłościanu wynosi 64 dcm^3. Liczby wymiarowe krawędzi tworzą postęp geometryczny, a ich suma wynosi 21 dcm. Obliczyć te krawędzie.

111. Wieśniak kupił na jarmarku konia. Kazał go podkuć i poprowadził do domu. Spotkani po drodze sąsiedzi orzekli po obejrzeniu, że koń jest chory. Wieśniak zażądał zwrotu pieniędzy, a gdy sprzedawca odmówił, powiedział: „Nie chcę zwrotu. Weź konia z powrotem, ale zapłać mi za nowe gwoździe przy podkowach. Tanio policzę: za pierwszy gwóźdź tylko 1 grosz, a za każdy następny 2 razy więcej, niż za poprzedni“. Sprzedawca, sądząc, że zapłaci najwyżej parę złotych za 24 gwoździe, zgodził się na propozycję. Ile *zł* musiał zapłacić?

Indukcja zupełna.

§ 59. Omawiając własności postępów arytmetycznego i geometrycznego, udowodniliśmy szereg twierdzeń, wyrażających te własności. W każdym z tych twierdzeń występuje liczba n. Jak wiemy liczba ta jest całkowita i dodatnia.

Przypomnijmy sobie twierdzenie, udowodnione w § 44: każdy wyraz postępu arytmetycznego, oprócz pierwszego, jest sumą wyrazu pierwszego i $(n-1)$-szej wielokrotności różnicy postępu tzn., że (I) $a_n = a_1 + (n-1)r$.

Przeprowadźmy dowód tego twierdzenia w sposób następujący:

Sprawdźmy, czy wzór (I) jest słuszny dla któregokolwiek wyrazu, np. dla drugiego, tj. dla $n=2$. W tym celu na miejsce n podstawmy 2. Otrzymamy: $a_2 = a_1 + r$.

Twierdzenie więc jest słuszne, gdy $n=2$.

Załóżmy następnie, że twierdzenie jest słuszne dla wyrazu, zajmującego miejsce np. k $(k \geq 2)$, tzn. załóżmy, że

$$a_k = a_1 + r(k-1)$$

i udowodnijmy, że twierdzenie jest słuszne dla wyrazu następnego, tj. zajmującego miejsce $k+1$. Zatem udowodnijmy, że

$$a_{k+1} = a_1 + r(k+1-1) = a_1 + rk.$$

Otóż, jeżeli $a_k = a_1 + r(k-1)$, to wyraz następny, czyli a_{k+1} jest sumą wyrazu poprzedniego (a_k) i różnicy postępu, czyli

$$a_{k+1} = a_1 + r(k-1) + r = a_1 + rk - r + r = a_1 + rk.$$

Stąd twierdzenie jest słuszne i dla $n = k+1$.

Ponieważ twierdzenie było słuszne dla drugiego wyrazu postępu, jest zatem słuszne i dla trzeciego wyrazu. Ponieważ twierdzenie jest słuszne dla trzeciego wyrazu, jest zatem słuszne i dla czwartego wyrazu postępu, itd. Twierdzenie jest więc słuszne dla wszystkich wyrazów postępu.

Zastosowana wyżej metoda dowodzenia nosi nazwę **indukcji zupełnej**. Podstawą tej metody jest następująca

Zasada indukcji zupełnej (albo matematycznej): **Jeżeli twierdzenie, w którym występuje liczba naturalna** n, **spełnia następujące warunki:**

1° jest słuszne, gdy n **jest równe pewnej naturalnej liczbie** a;

2° jeżeli z założenia, że twierdzenie to jest słuszne, gdy n **jest równe jakiejkolwiek liczbie naturalnej** k, **niemniejszej od** a, **wynika słuszność twierdzenia i dla wartości następnej n, tj. dla** $n=k+1$,

wówczas twierdzenie jest słuszne dla każdej wartości n, **niemniejszej od** a.

§ 60. Zastosujmy indukcję zupełną przy dowodzie twierdzenia o sumie n pierwszych kolejnych wyrazów postępu geometrycznego (§ 56). Mamy udowodnić, że

$$S_n=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1} \qquad (q\neq 1). \tag{XI}$$

Sprawdzimy, czy wzór ten jest słuszny, gdy $n=2$ (gdyż suma winna mieć co najmniej dwa składniki), tzn. sprawdzimy, czy po podstawieniu 2 na miejsce n otrzymamy a_1+a_2:

$$S_2=\frac{a_1(q^2-1)}{q-1}=\frac{a_1(q+1)(q-1)}{q-1}=a_1(q+1)=a_1q+a_1=a_2+a_1.$$

Zatem twierdzenie jest słuszne, gdy $n=2$.

Załóżmy dalej, że wzór jest słuszny dla sumy np. k pierwszych kolejnych wyrazów postępu ($k\geq 2$), tzn.

że
$$S_k=\frac{a_1(q^k-1)}{q-1}$$

i udowodnijmy, że wzór (XI) jest słuszny dla sumy $(k+1)$ pierwszych wyrazów kolejnych postępu, tzn. gdy na miejsce n podstawimy $k+1$. Zatem udowodnijmy, że słuszny jest wzór

$$S_{k+1}=\frac{a_1(q^{k+1}-1)}{q-1}.$$

Otóż, jeżeli suma k pierwszych kolejnych wyrazów postępu wynosi $S_k=\frac{a_1(q^k-1)}{q-1}$, to sumę $(k+1)$ pierwszych kolejnych wyrazów otrzymamy, dodając do S_k wyraz $a_{k+1} = a_1 \cdot q^k$. Zatem

$$S_{k+1} = S_k + a_1 q^k = \frac{a_1 (q^k - 1)}{q - 1} + a_1 q^k = \frac{a_1 q^k - a_1 + a_1 q^{k+1} - a_1 q^k}{q - 1} =$$

$$= \frac{a_1 q^{k+1} - a_1}{q - 1} = \frac{a_1 (q^{k+1} - 1)}{q - 1}.$$

Zatem twierdzenie jest słuszne i dla $n = k + 1$.

Ponieważ twierdzenie było słuszne dla sumy 2 pierwszych wyrazów, jest zatem słuszne dla sumy trzech pierwszych wyrazów postępu. Ponieważ jest słuszne dla sumy trzech pierwszych wyrazów postępu, jest zatem słuszne dla czterech pierwszych wyrazów postępu, itd.

Twierdzenie jest więc słuszne dla n pierwszych kolejnych wyrazów postępu geometrycznego.

Ćwiczenia.

112. Przy pomocy indukcji zupełnej udowodnić
a) słuszność wzoru (VII) § 51
b) słuszność wzoru (IV) § 48.

113. Przy pomocy indukcji zupełnej udowodnić słuszność podstawowego wzoru procentu składanego (§ 35).

114. Przy pomocy indukcji zupełnej udowodnić słuszność następujących wzorów:

a) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

b) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$

c) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3}$

d) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2 (n+1)^2}{4}$.

Wkłady okresowe.

§ 61. Jeżeli w ciągu n równych okresów czasu na początku każdego z nich wpłacać będziemy do banku pewną stałą kwotę k złotych, to — przy stopie p procentu składanego — kwoty te utworzą pewien kapitał.

Ta stała kwota *k zł* nazywa się **wkładem okresowym.**

Zagadnienie wkładów okresowych omówimy w założeniu, że są one wpłacane na początku każdego **roku.**

Zadanie. Obliczyć kapitał, utworzony przez wkłady okresowe *k zł* w ciągu *n* lat, jeżeli stopa procentu składanego wynosi *p*.

Pierwszy wkład *k zł* złożony zostaje na *n* lat. Utworzy on zatem kapitał k_1 według wzoru (15) § 35:

$$k_1 = k\ (1 + r)^n, \text{ gdzie } r = \frac{p}{100}.$$

Drugi wkład *k zł* złożony zostaje na $(n - 1)$ lat. Zatem utworzy on kapitał

$$k_2 = k\ (1 + r)^{n-1}.$$

Trzeci kapitał, złożony na $(n - 2)$ lat, utworzy kapitał

$$k_3 = k\ (1 + r)^{n-2} \text{ itd.}$$

Ostatni — n-ty — wkład, wpłacony na początku ostatniego roku, złożony zostaje tylko na 1 rok. Utworzy on kapitał

$$k_n = k\ (1 + r).$$

Suma kapitałów, utworzonych przez każdy z tych n wkładów, będzie kapitałem szukanym. Oznaczając go przez A, otrzymamy $A = k(1 + r)^n + k(1 + r)^{n-1} + k(1 + r)^{n-2} + \ldots + k(1 + r)$, albo, stosując prawo przemienności sumy:

$$A = k(1 + r) + k(1 + r)^2 + \ldots + k(1 + r)^n.$$

Składniki otrzymanej sumy tworzą postęp geometryczny, którego pierwszym wyrazem jest $a_1 = k(1 + r)$, a ilorazem $q = 1 + r$. Zatem, według wzoru na sumę n wyrazów postępu geometrycznego, otrzymamy:

$$A = \frac{k(1 + r)\ [(1 + r)^n - 1]}{(1 + r) - 1}, \text{ czyli}$$

(XIV) $$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{k(1 + r)\ [(1 + r)^n - 1]}}{\mathbf{r}}.$$

§ 62. Otrzymany wzór (XIV) ustala związek między czterema wielkościami: wkładem okresowym (k), stopą procentową ($p = 100\,r$) liczbą lat (n) i kapitałem utworzonym (A). Mając trzy z tych wielkości, moglibyśmy przy pomocy wzoru (XIV) obliczyć czwartą wielkość.

Uwaga I. Przy obliczaniu k i A, należy obliczanie rozpocząć od wyrażenia $(1 + r)^n - 1$ tzn. obliczyć najpierw wartość $(1 + r)^n$ i odjąć od niej 1. Tablice matematyczno-fizyczne czterocyfrowe, z których korzystamy przy rachunku logarytmów, podają wartości liczbowe wyrażenia $(1 + r)^n$ dla wartości r i n częściej spotykanych.

Uwaga II. Poznane dotąd metody nie pozwolą nam na obliczanie liczby r ze wzoru (XIV), gdyż otrzymane równanie względem r jest stopnia n-tego.

§ 63. Typowym przykładem tworzenia kapitału drogą wkładów okresowych jest lokowanie oszczędności w P. K. O. na tzw. książeczkach oszczędnościowych premiowych. Wpłacający co miesiąc 8 *zł* otrzymuje, — przy stopie procentu składanego $4\frac{1}{2}$, — po 10 latach 1000 *zł*.

Upraszczając nieco warunki takiego oszczędzania, rozwiążmy następujące

Zadanie. Jaki kapitał utworzy się po 10 latach, jeżeli wkład okresowy roczny wynosi 96 *zł*, a stopa procentu składanego wynosi 4,5?

Stosując wzór (XIV) otrzymamy:

$$A = \frac{96.1,045. [(1,045)^{10} - 1]}{0,045}.$$

Obliczymy najpierw wartość wyrażenia $(1,045)^{10} - 1$.

$$\lg 1,045 \approx 0,0191; \quad 10 \lg 1,045 \approx 0,1910.$$

$$\mathrm{Nlg}\, 0,1910 \approx 1,552; \quad (1,045)^{10} \approx 1,552$$

Zatem $(1,045)^{10} - 1 \approx 0,552$

$$A \approx \frac{96 \cdot 1,045 \cdot 0,552}{0,045} = \frac{96 \cdot 1045 \cdot 0,552}{45},$$ a po skróceniu przez 45

$$A \approx 32 \cdot 209 \cdot 0,184.$$

$$\lg A \approx \lg 32 + \lg 209 + \lg 0,184$$

Po wykonaniu rachunków otrzymamy $A \approx 1230$ *zł*.

Jak widzimy, kapitał utworzony wynosi nie 1000 *zł*, lecz 1230 *zł*. Jeżeli jednak weźmiemy pod uwagę liczne premie, wypłacane przez P. K. O. posiadaczom książeczek oszczędnościowych premiowych, dojdziemy wówczas do wniosku, że ten sposób lokowania oszczędności jest dla oszczędzającego korzystny.

Ćwiczenia.

115. Na początku każdego roku uczeń wkładał do P. K. O. po 50 *zł* na 4% składany. Jaki kapitał odebrał po 8 latach, jeżeli w ciągu tego czasu nie podejmował żadnej kwoty?

116. W ciągu ilu lat należy składać na początku każdego roku po 100 *zł* na 5% składany, aby otrzymać 1004 *zł*?

117. Ile *zł* należy wkładać do P. K. O. na początku każdego roku na 4% składany, aby po 9 latach otrzymać 658,3 *zł*?

Część IV. Postęp geometryczny nieskończony.

§ 64. Rozważmy ciąg nieskończony o wyrazie ogólnym

$$a_n = (\tfrac{1}{2})^n.$$

Obliczając jego wyrazy kolejne, otrzymamy

$$a_1 = \tfrac{1}{2},\quad a_2 = \tfrac{1}{4},\quad a_3 = \tfrac{1}{8},\quad a_4 = \tfrac{1}{16},\quad a_5 = \tfrac{1}{32} \text{ itd.}$$

Wyrazy tego ciągu tym są mniejsze, im jest większa wartość wskaźnika n.

Przedstawmy wartości tych wyrazów na osi liczbowej (rys. 12).

Rys. 12.

Jak widzimy z przedstawienia graficznego, punkty, będące obrazami wartości wyrazów naszego ciągu, zbliżają się tym bardziej do punktu 0, im jest większa wartość n.

O takim ciągu mówimy, że wyrazy jego **dążą do 0, gdy liczba n wzrasta nieograniczenie,** co zapisujemy

$$a_n \to 0, \text{ gdy } n \to \infty$$

albo że **granicą wyrazów ciągu jest 0, gdy n wzrasta nieograniczenie,** co zapisujemy

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0 \qquad \text{(po łacinie limes = granica)}$$

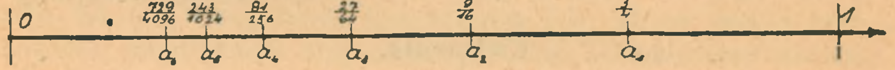
W ciągu nieskończonym o wyrazie ogólnym

$$a_n = (\tfrac{3}{4})^n$$

wyrazami kolejnymi są

$$a_1 = \tfrac{3}{4};\quad a_2 = \tfrac{9}{16};\quad a_3 = \tfrac{27}{64};\quad a_4 = \tfrac{81}{256};\quad a_5 = \tfrac{243}{1024};\quad a_6 = \tfrac{729}{4096} \text{ itd.}$$

I w tym ciągu wartości jego wyrazów tym są mniejsze, im większa jest wartość n,



Rys. 13.

tzn., że wyrazy jego dążą do 0, gdy n rośnie nieograniczenie. Zatem

$$a_n \to 0, \text{ gdy } n \to \infty$$

albo

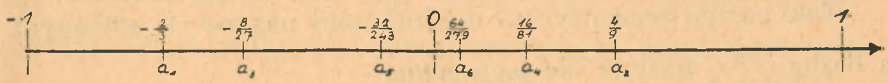
$$\lim_{n \to \infty} (\tfrac{3}{4})^n = 0.$$

Podobnie w ciągu nieskończonym o wyrazie ogólnym

$$a_n = (-\tfrac{2}{3})^n$$

wyrazami kolejnymi są

$$a_1 = -\tfrac{2}{3},\ a_2 = \tfrac{4}{9},\ a_3 = -\tfrac{8}{27},\ a_4 = \tfrac{16}{81},\ a_5 = -\tfrac{32}{243},\ a_6 = \tfrac{64}{729} \text{ itd.}$$



Rys. 14

A więc i wyrazy tego ciągu dążą do 0 (przyjmując wartości na przemian dodatnie i ujemne), gdy n rośnie nieograniczenie. Zatem

$$(-\tfrac{2}{3})^n \to 0, \text{ gdy } n \to \infty$$

albo

$$\lim_{n\to\infty} (-\tfrac{2}{3})^n = 0.$$

Widzimy stąd, że **n-ta potęga** liczby, zawartej między -1 a $+1$, **dąży do 0, gdy wykładnik n rośnie nieograniczenie,** tzn. że

$$a^n \to 0, \text{ gdy } n \to \infty$$

albo

$$\lim_{n\to\infty} a^n = 0.$$

jeżeli $|a| < 1$.

§ 65. Rozpatrzmy postęp geometryczny nieskończony

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots,\ a_n \ldots \qquad (n \to \infty).$$

Suma n początkowych wyrazów kolejnych tego postępu wynosi zgodnie ze wzorem (XII)

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \text{ albo } S_n = \frac{a_1 - a_1 q^n}{1-q}.$$

Sumę tę można napisać w postaci

$$S_n = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1}{1-q}\cdot q^n.$$

Jeżeli $|q| < 1$, to, jak wiemy z § 64, $q^n \to 0$, gdy $n \to \infty$.

Zatem liczba $\frac{a_1}{1-q}\cdot q^n$ też dąży do 0, gdy $n \to \infty$, czyli że

$$S_n \to \frac{a_1}{1-q} \text{ gdy } n \to \infty$$

albo

$$\text{(XV)} \qquad \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}.$$

Jeżeli zatem wartość bezwzględna ilorazu postępu geometrycznego nieskończonego jest mniejsza od 1 $(-1<q<1)$, to wzór (XV) wyraża granicę, do jakiej dąży suma n początkowych wyrazów tego postępu, gdy liczba wyrazów (n) rośnie nieograniczenie.

Taki postęp geometryczny nieskończony nazywa się **zbieżnym**, a liczba $\frac{a_1}{1-q}$ nazywa się jego **sumą**.

Przykład I. W postępie geometrycznym nieskończonym

$$2, \tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{9}, \tfrac{2}{27}, \ldots$$

mamy: $a_1 = 2$; $q = \frac{1}{3}$. Zatem postęp ten jest zbieżny, a jego suma wynosi:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{2}{1-\frac{1}{3}} = 3.$$

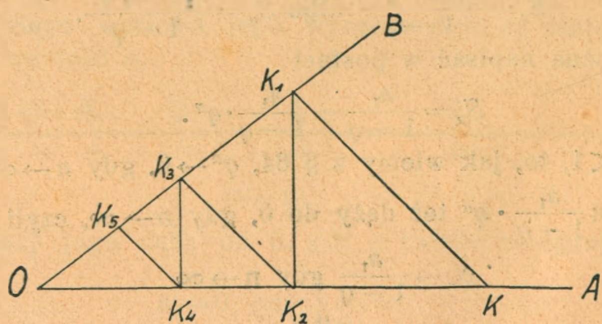
Przykład II. Pierwszy wyraz postępu geometrycznego nieskończonego jest równy $-\frac{3}{4}$. Suma tego postępu jest równa jego ilorazowi. Znaleźć iloraz postępu.

Jeżeli oznaczymy przez x szukany iloraz, to — zgodnie z treścią — otrzymamy równanie

$$\frac{-\frac{3}{4}}{1-x} = x \text{ i po rozwiązaniu } x_1 = -\tfrac{1}{2},\ x_2 = 1\tfrac{1}{2}.$$

Ponieważ iloraz x winien spełniać warunek $-1<x<1$, gdyż w przeciwnym wypadku postęp nie byłby zbieżny i nie posiadałby sumy, więc tylko $x_1 = -\frac{1}{2}$ jest rozwiązaniem zadania.

Przykład III. Dany jest $\sphericalangle AOB = 45^0$ (rys. 15). Na ramieniu OA odmierzono odcinek $OK = a$ i poprowadzono $KK_1 \perp OB$.



Rys. 15.

Z punktu K_1 poprowadzono $K_1K_2 \perp OA$; z punktu K_2 poprowadzono $K_2K_3 \perp OB$ itd. itd. Obliczyć granicę do jakiej dąży suma:

$KK_1 + K_1K_2 + K_2K_3 + K_3K_4 + \ldots$, gdy liczba tych odcinków rośnie nieograniczenie.

Ponieważ $\triangle\, KOK_1$ jest prostokątny i równoramienny, więc na mocy tw. Pitagorasa: $OK_1 = K_1K = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Z $\triangle\, OK_1K_2$, który również jest prostokątny i równoramienny, na mocy tegoż twierdzenia otrzymamy: $OK_2^2 + K_1K_2^2 = OK_1^2$, czyli $2K_1K_2^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$, stąd $2K_1K_2^2 = \frac{a^2}{2}$ więc $K_1K_2^2 = \frac{a^2}{4}$ i $K_1K_2 = OK_2 = \frac{a}{2}$.

Podobnie z $\triangle\, OK_2K_3$ — prostokątnego i równoramiennego — znajdziemy:

$$K_2K_3 = \frac{a\sqrt{2}}{4} \quad \text{itd. itd.}$$

Zatem odcinki: KK_1, K_1K_2, K_2K_3, ... tworzą ciąg nieskończony

$$\frac{a\sqrt{2}}{2},\ \frac{a}{2},\ \frac{a\sqrt{2}}{4},\ \ldots,$$

który, jak łatwo sprawdzić, jest postępem geometrycznym nieskończonym, o pierwszym wyrazie $a_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ i ilorazie

$$q = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ponieważ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ jest > -1 a < 1, więc suma S_n odcinków KK_1, K_1K_2, K_2K_3, ..., gdy ich liczba rośnie nieograniczenie, dąży do granicy, równej

$$\frac{a\sqrt{2}}{\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot 2} = \frac{a\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}},$$

a po uwolnieniu mianownika od niewymierności i uproszczeniu ułamka

$$\lim_{n \to \infty} S_n = a(\sqrt{2} + 1).$$

Ułamki okresowe.

§ 66. Wiemy z arytmetyki, że chcąc obliczyć rozwinięcie dziesiętne ułamka zwyczajnego (tzn. zamienić ten ułamek na ułamek dziesiętny), dzielimy licznik ułamka przez jego mianownik. Przy wykonywaniu tego działania zajść mogą dwa wypadki.

W y p a d e k I. Dzieląc licznik ułamka przez jego mianownik otrzymać możemy — po wykonaniu pewnej liczby dzieleń — resztę równą 0. Wówczas po przecinku dziesiętnym otrzymamy **skończoną** liczbę cyfr dziesiętnych, inaczej mówiąc, otrzymane rozwinięcie dziesiętne będzie ułamkiem dziesiętnym **skończonym**. Tak np. rozwinięcia dziesiętne ułamków: $\frac{7}{20}$, $\frac{11}{40}$, $\frac{17}{32}$ będą ułamkami dziesiętnymi skończonymi. Istotnie: $\frac{7}{20}=0{,}35$; $\frac{11}{40}=0{,}275$; $\frac{17}{32}=$ $=0{,}53125$.

W y p a d e k II. Dzieląc licznik ułamka przez jego mianownik możemy nie otrzymać reszty równej 0, tzn. że dzielenie nigdy się nie kończy. Wówczas otrzymane po przecinku dziesiętnym cyfry lub grupy cyfr muszą się powtarzać. Istotnie: ponieważ reszty są zawsze mniejsze od dzielnika, zatem po pewnej skończonej liczbie dzieleń jedna z tych reszt, a za nią i wszystkie następne muszą się powtórzyć. A że tym samym resztom odpowiadają te same cyfry ilorazu, zatem i cyfry ilorazu muszą się powtórzyć. W tym więc wypadku otrzymane rozwinięcie dziesiętne ułamka zwyczajnego będzie ułamkiem dziesiętnym **nieskończonym,** który nazywamy **ułamkiem dziesiętnym okresowym.** Powtarzającą się **cyfrę dziesiętną lub grupę cyfr dziesiętnych nazywamy okresem.**

Tak np. obliczając rozwinięcia dziesiętne ułamków $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{11}$, $\frac{41}{333}$ otrzymamy $\frac{5}{6}=0{,}8333\ldots$; $\frac{3}{11}=0{,}272727\ldots$; $\frac{41}{333}=0{,}123123123\ldots$ Ułamki okresowe zapisujemy w ten sposób, że okres piszemy tylko raz jeden, ale zamykając go w nawias. Np. $\frac{5}{6}=0{,}8(3)$; $\frac{3}{11}=0{,}(27)$; $\frac{41}{333}=0{,}(123)$.

§ 67. Gdybyśmy chcieli rozwiązać zagadnienie odwrotne, tzn. zamienić ułamek dziesiętny na ułamek zwykły, to w wypadku, gdy ułamek dziesiętny jest skończony, rozwiązanie nie nastręcza trudności. Np.

$2{,}384=2\frac{384}{1000}$ i po skróceniu ułamka otrzymamy $2{,}384=2\frac{48}{125}$.

Jeżeli jednak ułamek dziesiętny jest okresowy, wówczas podany wyżej sposób nie może mieć zastosowania, chyba do podania przybliżonej wartości ułamka zwyczajnego.

Np. przyjmując, że wartością przybliżoną ułamka 0,8(3) w trzecim stopniu dokładności jest 0,833, otrzymamy $0{,}833=\frac{833}{1000}$. A wiemy z § 66, że $0{,}8(3)=\frac{5}{6}$. Zatem $\frac{833}{1000}$ jest przybliżoną wartością $\frac{5}{6}$. (Łatwo sprawdzić, że popełniony błąd przy zapisie $\frac{5}{6}=\frac{833}{1000}$ wynosi $\frac{1}{3000}$).

Rozpatrzmy zatem jakikolwiek ułamek okresowy np. 0,5(18). Ułamek ten można przedstawić jako sumę nieskończonej ilości ułamków, mianowicie

$$0{,}5(18) = \tfrac{5}{10} + \tfrac{18}{1000} + \tfrac{18}{100000} + \tfrac{18}{10000000} + \ldots$$

Wszystkie składniki tej sumy, oprócz pierwszego, tworzą postęp geometryczny nieskończony, w którym $a_1 = \tfrac{18}{1000}$, a iloraz $q = \tfrac{1}{100}$. Ponieważ q jest ułamkiem właściwym, przeto postęp ten jest zbieżny, a suma ta (S_n) posiada granicę, gdy liczba składników rośnie nieograniczenie:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{18}{1000}}{1 - \frac{1}{100}} = \tfrac{18}{990}.$$

Zatem $0{,}5(18) = \tfrac{5}{10} + \tfrac{18}{990} = \tfrac{513}{990} = \tfrac{57}{110}$.

Podobnie np.

$$2{,}(15) = 2 + \tfrac{15}{100} + \tfrac{15}{10000} + \tfrac{15}{1000000} + \ldots$$

Rozumując jak poprzednio, otrzymamy:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{15}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \tfrac{15}{99} = \tfrac{5}{33}$$

Zatem $2{,}(15) = 2\tfrac{5}{33}$.

Jak widzimy, przy pomocy własności postępu geometrycznego nieskończonego możemy zamienić i ułamek okresowy na ułamek zwyczajny.

Ćwiczenia.

118. Dane są postępy geometryczne nieskończone:

a) $2, 3, \tfrac{9}{2}, \tfrac{27}{4}, \ldots$

b) $\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{8}, \tfrac{3}{32}, \ldots$

c) $2, \tfrac{4}{5}, \tfrac{8}{25}, \tfrac{16}{125}, \ldots$

d) $\tfrac{2}{3}, \tfrac{5}{3}, \tfrac{25}{6}, \tfrac{125}{12}, \ldots$

e) $\tfrac{3}{4}, -\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{12}, -\tfrac{1}{36}, \ldots$

f) $1, -\tfrac{2}{3}, \tfrac{4}{9}, -\tfrac{8}{27}, \ldots$

g) $1, -\tfrac{3}{2}, \tfrac{9}{4}, -\tfrac{27}{8}, \ldots$

h) $2, -\tfrac{4}{5}, \tfrac{8}{25}, -\tfrac{16}{125}, \ldots$

i) $-\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, -\tfrac{9}{2}, \tfrac{27}{2}, \ldots$

k) $3, -1, \tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{9}, \ldots$

1⁰ Które z nich są zbieżne? 2⁰ W każdym z postępów zbieżnych obliczyć jego sumę.

119. Obliczyć sumę postępu geometrycznego nieskończonego

a) 0,4, 0,12, 0,036, ...

b) 0,5, — 0,05, 0,005, — 0,0005 ...

120. Pierwszy wyraz postępu geometrycznego nieskończonego wynosi

a) 5, b) 10, c) 1, d) —3

a suma postępu wynosi

a) 6, b) 100, c) $\tfrac{2}{3}$, d) —2.

Znaleźć iloraz postępu.

121. Obliczyć iloraz postępu geometrycznego nieskończonego, wiedząc, że suma postępu jest dwa razy większa od pierwszego wyrazu.

122. Wyznaczyć wartości x, dla których postęp geometryczny nieskończony

$$1, \frac{2x}{1+x}, \frac{4x^2}{(1+x)^2}, \dots$$

jest zbieżny i ma sumę równą 5.

123. Wyznaczyć wartości x, dla których postęp geometryczny nieskończony

$$1, \frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \dots$$

jest zbieżny i ma sumę równą x.

124. Wyznaczyć wartości x, dla których postęp geometryczny nieskończony

$x+2, \quad (x+2)(x-3), \quad (x+2)(x-3)^2, \quad (x+2)(x-3)^3, \dots$

jest zbieżny i ma sumę równą $2x+4$.

125. Dla jakich wartości x postępy geometryczne nieskończone

a) $1, -(11-7x+x^2), (11-7x+x^2)^2, -(11-7x+x^2)^3; \dots$

b) $1, (6x^2-5x), (6x^2-5x)^2, (6x^2-5x)^3, \dots$

c) $1, (x^2-3x+1), (x^2-3x+1)^2, (x^2-3x+1)^3, \dots$

są zbieżne?

126. W kwadracie o boku a połączono odcinkami prostej środki boków sąsiednich. W otrzymanym kwadracie połączono znowu odcinkami prostej środki boków sąsiednich itd.

Obliczyć granicę, do jakiej dążą a) obwody otrzymanych kwadratów, b) pola otrzymanych kwadratów, gdy liczba ich rośnie w podany sposób nieograniczenie.

127. W trójkącie foremnym o boku a połączono odcinkami prostej środki boków. W otrzymanym trójkącie foremnym połączono znowu odcinkami prostej środki boków itd.

Obliczyć granicę, do jakiej dążą a) obwody otrzymanych trójkątów, b) pola otrzymanych trójkątów, gdy liczba ich rośnie w podany sposób nieograniczenie.

128. Następujące ułamki okresowe zamienić na ułamki zwyczajne:

a) 0,(7), b) 2,(3), c) 0,(45), d) 1,(21),

e) 0,(243), f) 0,5(3), g) 3,2(5), h) 0,4(27).

ROZDZIAŁ IV.

Trygonometria.

Część I. Pojęcia wstępne.

§ 68. Spośród odcinków i kątów, z jakimi spotykamy się w geometrii przy badaniu własności trójkąta, wyróżniamy trzy jego boki i trzy jego kąty wewnętrzne. Te sześć wielkości nazywają się, jak wiemy, elementami trójkąta. Wiemy również, że między tymi elementami zachodzą pewne zależności. I tak, jeżeli α, β, γ oznaczają kąty wewnętrzne trójkąta, to

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^{\circ}.$$

Podobnie, twierdzenie Pitagorasa w trójkącie prostokątnym, a twierdzenie o kwadracie boku, leżącego naprzeciw kąta ostrego lub rozwartego w dowolnym trójkącie, wyrażają zależności między bokami trójkąta.

Każda z tych zależności ujęta jest w postać równania, z którego możemy obliczyć jedną wielkość, mając pozostałe wielkości, występujące w tym równaniu.

Ale każda z poznanych dotąd zależności obejmuje tylko elementy tego samego rodzaju: albo boki, albo kąty. Nie znamy dotąd żadnego równania, które by wyrażało związek między **bokami i kątami** trójkąta. Niektóre jednak twierdzenia geometrii, jak np.: w trójkącie naprzeciw równych kątów leżą równe bo
twierdzenie do niego odwrotne i twierdzenie przeciwne, nasu
przypuszczenie, że zależności między bokami i kątami trójkąta przecież istnieją.

Wykrycie tych zależności, ujęcie ich w równania stanowi podstawowy cel działu matematyki, zwanego **trygonometrią** (od greckiego: trigono = trójkąt, metreo = mierzę).

Mierzenie kątów.

§ 69. Za jednostkę miary kątów przyjęliśmy w geometrii $\frac{1}{90}$ część kąta prostego (albo $\frac{1}{360}$ część kąta pełnego), którą nazywamy **stopniem kątowym** (1°). Stopień dzieli się na 60 minut ($60'$), minuta zaś na 60 sekund ($60''$). Tak więc kąt $28^\circ 33' 15''$ oznacza kąt, który zawiera 28 stopni, 33 minuty i 15 sekund.

Uwaga. Przy działaniach na stopniach, minutach i sekundach należy pamiętać, że

$$1^\circ = 60', \qquad 1' = 60''.$$

Tak np.:

a)
$$\begin{array}{r} 28^\circ\ 43' \\ +\ \ 9^\circ\ 58' \\ \hline 37^\circ 101' = 38^\circ 41'. \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rl} 62^\circ\ \ 24' : 4 = 15^\circ 36' & \\ -60 & \\ 2^\circ = 120' & \\ \hline 144' & \\ -12 & \\ \hline 24 & \\ -24 & \\ \hline = = & \end{array}$$

§ 70. Jest rzeczą oczywistą, że umowa, dotycząca wyboru 1° za jednostkę miary kąta, jest najzupełniej dowolną, gdyż zamiast $\frac{1}{360}$ części kąta pełnego można by przyjąć za jednostkę miary kąta jakąkolwiek inną część kąta pełnego. Dzięki tej właśnie dowolności wprowadzono we Francji jednostkę miary kąta, opartą na podziale dziesiętnym. Mianowicie za jednostkę miary kąta przyjęto $\frac{1}{100}$ część kąta prostego (tzn. $\frac{1}{400}$ część kąta pełnego). Tę $\frac{1}{100}$ część kąta prostego nazywamy **gradusem** (1^G). Kąty mniejsze od 1^G wyrażamy w częściach dziesiętnych gradusa.

Ponieważ miarą kąta prostego, wyrażoną w stopniach, jest 90°, a miarą tegoż kąta w gradusach jest 100^G, przeto 90° odpowiada 100^G, czyli

$$1^G = \left(\tfrac{9}{10}\right)^\circ = 54'.$$

Odwrotnie $$1^\circ = \left(\tfrac{10}{9}\right)^G = 1^G,(1).$$

§ 71. W balistyce*) spotykamy inną jeszcze jednostkę miary kąta. Jest nią kąt, pod którym widzimy odcinek 1 *m* z odległości 1 000 *m* (tj. 1 *km*). Kąt taki jest w przybliżeniu równy $\frac{1}{6400}$

---

*) Balistyka zajmuje się badaniem ruchu pocisku bądź wewnątrz lufy (tzw. balistyka wewnętrzna), bądź po wylocie z lufy (tzw. balistyka zewnętrzna).

części kąta pełnego. Ta $\frac{1}{6400}$ część kąta pełnego nazywa się „**tysiączną zwykłą**“ (1^t).

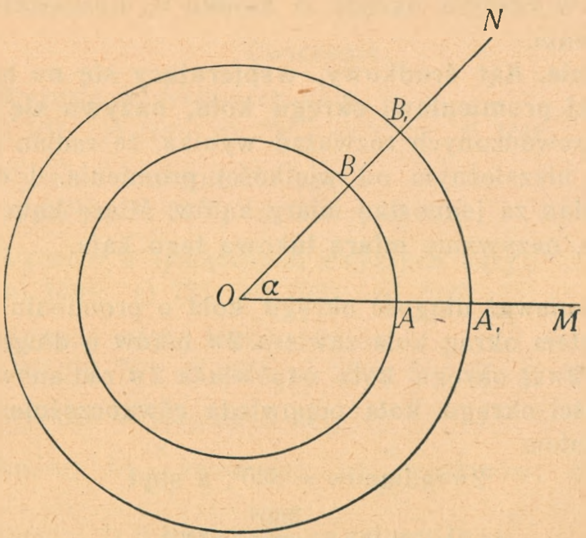
Ponieważ 360^0 odpowiada 6400^t, przeto

$$1^0 = \left(\tfrac{6400}{360}\right)^t, \text{ czyli } 1^0 = 17^t, \quad (7)$$

$$1^t = \left(\tfrac{360}{6400}\right)^0, \text{ czyli } 1^t = 3'\,22'',5.$$

§ 72. Poznamy obecnie jednostkę miary kąta niezależną od kąta pełnego.

Niechaj dany będzie dowolny kąt $MON = \alpha$. Z wierzchołka O tego kąta zakreślmy dwa okręgi kół o promieniach $OA = R$ i $OA_1 = R_1$ (rys. 16). Kąt α będzie wówczas w każdym z tych okręgów kątem środkowym. Temu kątowi środkowemu α odpowiadać będą: łuk AB w jednym okręgu koła i łuk A_1B_1 w drugim okręgu koła.



Rys. 16.

Oznaczmy przez C długość łuku AB, przez C_1 długość łuku A_1B_1, a przez n liczbę stopni kąta α. Wiemy z geometrii, że długość łuku AB wyraża się wzorem

$$C = \frac{2\pi Rn}{360},$$

a długość łuku A_1B_1 — wzorem

$$C_1 = \frac{2\pi R_1 n}{360}.$$

Z pierwszego wzoru otrzymamy

$$\frac{C}{R}=\frac{2\pi n}{360},$$

a z drugiego

$$\frac{C_1}{R_1}=\frac{2\pi n}{360}.$$

Zatem

$$\frac{C}{R}=\frac{C_1}{R_1}.$$

Gdybyśmy przyjęli, że $C=R$, wówczas z równości $\frac{C}{R}=\frac{C_1}{R_1}$ wynikałoby, że $C_1=R_1$. Kąt MON byłby wówczas kątem środkowym, wspierającym się na łuku o długości równej promieniowi okręgu i to w każdym okręgu o środku 0, niezależnie od wielkości promienia.

Określenie. Kąt środkowy, wspierający się na łuku o długości równej promieniowi okręgu koła, nazywa się radianem.

Z przeprowadzonych rozważań wynika, że radian jest kątem stałym, tzn. niezależnym od wielkości promienia. I dlatego też przyjęto radian za jednostkę miary kątów. Miarę kąta, wyrażoną w radianach, nazywamy **miarą łukową** tego kąta.

§ 73. Ponieważ długość okręgu koła o promieniu R jest równa $2\pi R$, zatem okrąg koła zawiera 2π łuków o długości R, tzn., że długości $2\pi R$ okręgu koła odpowiada 2π radianów. A że tej samej długości okręgu koła odpowiada równocześnie kąt pełny czyli 360^0, zatem

$$2\pi \text{ radianów} = 360^0, \text{ a stąd}$$

$$1 \text{ radian} = \frac{360^0}{2\pi}, \text{ czyli}$$

$$\mathbf{1\ radian} = \frac{180^0}{\pi}. \tag{1}$$

Jednocześnie z równości

$$360^0 = 2\pi \text{ radianów}$$

wynika, że

$$1^0 = \frac{2\pi}{360} \text{ radianów, czyli}$$

$$1^0 = \frac{\pi}{180} \text{ radianów.} \tag{2}$$

Ponieważ π jest liczbą niewymierną, zatem liczby $\frac{180}{\pi}$ i $\frac{\pi}{180}$

są też niewymierne. Przyjmując $\pi = 3{,}1415$ z dokładnością do czterech miejsc dziesiętnych, otrzymamy w przybliżeniu, że

$$1 \text{ radian} \approx 57^0 17',$$

a $1^0 \approx 0{,}0174$ radianów ($\approx$ oznacza równość przybliżoną). Uczący się wykona odpowiednie wyliczenia.

Uwaga. Z równości (1) wynika, że

$$180^0 = \pi \text{ radianów},$$

a $$90^0 = \frac{\pi}{2} \text{ radianów}.$$

Możemy odtąd kąt pełny oznaczać albo przez 360^0 albo przez 2π radianów, kąt półpełny — albo przez 180^0 albo przez π radianów, kąt zaś prosty — albo przez 90^0 albo przez $\frac{\pi}{2}$ radianów.

Ćwiczenia.

129. Wyrazić w gradusach kąty:
a) 18^0; b) 15^0; c) 60^0; d) 72^0; e) 120^0; f) 150^0.

130. Wyrazić w stopniach kąty:
a) 40^G; b) 15^G; c) 35^G; d) 60^G; e) 75^G.

131. Wyrazić w tysiącznych zwykłych kąty:
a) 120^0; b) 150^0; c) 72^0; d) 108^0; e) 252^0.

132. Wyrazić miarę łukową kątów:
a) 45^0; b) 30^0; c) 75^0; d) 105^0; e) 120^0; f) 135^0; g) 10^0; h) 125^0.

133. Wyrazić w stopniach kąty:
a) $\frac{\pi}{15}$ radianów; b) $\frac{\pi}{20}$ radianów; c) $\frac{\pi}{25}$ radianów; d) $\frac{\pi}{8}$ radianów; e) $\frac{\pi}{12}$ radianów; f) 3 radianów; g) 8 radianów.

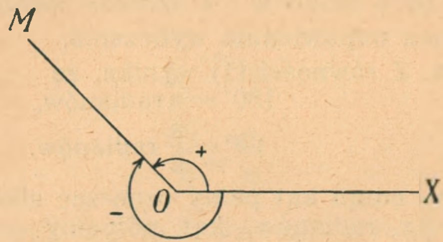
134. Obliczyć długość łuku okręgu koła o promieniu R, jeżeli kąt środkowy, wsparty na tym łuku, ma k radianów.

135. Obliczyć pole wycinka kołowego, którego kąt środkowy ma k radianów, a promień okręgu jest równy R.

Uogólnienie pojęcia kąta.

§ 74. Niech dana będzie na płaszczyźnie półprosta, wychodząca z punktu O. Jeżeli ta półprosta obraca się w danej płaszczyźnie dookoła punktu O od pewnego położenia początkowego

OX do położenia końcowego OM (rys. 17), wówczas obrót, wykonany przez daną półprostą, jest wyznaczony przez kąt XOM.



Rys. 17.

Obrót ten może być wykonany w jednym z dwóch kierunków: albo w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara, albo w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara (rys. 17). Pierwszy z tych kierunków obrotu nazywać będziemy **kierunkiem dodatnim obrotu**, a kąt wyznaczony przez ten obrót — **kątem dodatnim**, drugi zaś z tych kierunków obrotu nazywać będziemy **kierunkiem ujemnym obrotu**, a kąt wyznaczony przez ten obrót — **kątem ujemnym.**

Każdemu zatem obrotowi półprostej od pewnego położenia początkowego do położenia końcowego odpowiadać będzie kąt, którego miarą w obranych jednostkach będzie liczba względna.

Znak tej liczby względnej wskaże kierunek obrotu, z którego kąt dany powstał. Tak np. równości

$$\alpha = 48^0; \quad \beta = -32^0$$

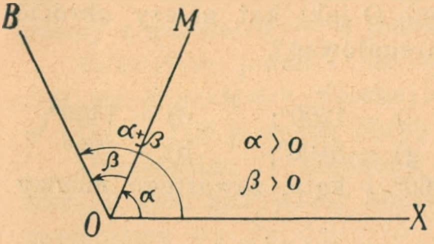
oznaczają, że kąt α powstał z obrotu w kierunku dodatnim, a kąt β — z obrotu w kierunku ujemnym.

Równości

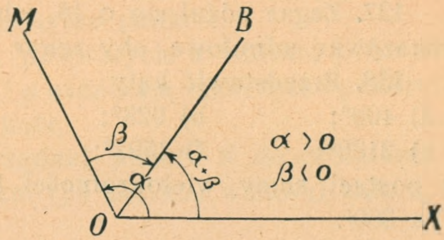
$$\alpha = 74^0 \quad \text{i} \quad \beta = -74^0$$

wskazują, że kąty α i β są co do wielkości równe, lecz mają znaki przeciwne. Kąty takie nazywać będziemy **kątami przeciwnymi.**

§ 75. Aby utworzyć sumę kątów α i β, obracamy pewną ruchomą półprostą od jej położenia początkowego OX o kąt α do położenia OM (rys. 18), a następnie półprostą OM obracamy o kąt β do położenia OB. Otrzymany w ten sposób kąt XOB będzie sumą kątów α i β: $\sphericalangle XOB = \alpha + \beta$. Jest rzeczą zrozumiałą, że obroty te wykonywamy w kierunku dodatnim lub ujemnym, zależnie od znaku kątów α i β, jak to wskazują rys. 18a i 18b.

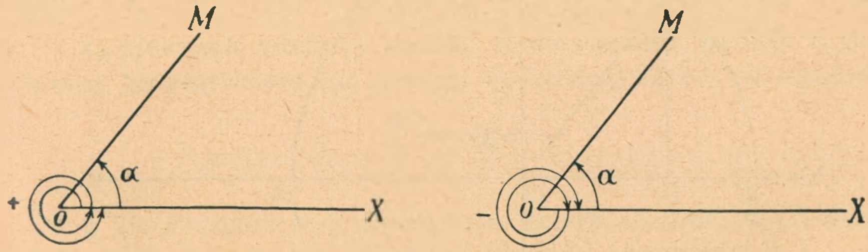


rys. 18 a



rys. 18 b

§ **76.** Jeżeli kąt β, który dodajemy do kąta α, jest wielokrotnością całkowitą 360^0, tzn. jest postaci $n \cdot 360^0$, gdzie n jest liczbą całkowitą (dodatnią, ujemną lub zerem), wówczas ramię OM wykona $|n|$ pełnych obrotów w kierunku dodatnim lub ujemnym, zależnie od znaku n. Przez dodanie więc kąta $n \cdot 360^0$ do kąta α położenie ramion kąta α nie ulegnie zmianie, tzn. że kąt α i kąt $n \cdot 360^0 + \alpha$ będą miały te same ramiona (rys. 19).



rys. 19.

Gdy zatem mamy dwie półproste OX i OM, wychodzące z jednego punktu O, to drugą z tych półprostych otrzymać można z pierwszej przy pomocy nieskończenie wielu obrotów. Jeden z tych obrotów α zawarty będzie między 0^0 a 360^0, każdy zaś inny będzie postaci $n \cdot 360^0 + \alpha$, gdzie n, jak widzieliśmy, jest dowolną liczbą całkowitą (dodatnią, ujemną lub zerem).

§ **77.** Każdy kąt możemy przedstawić w postaci $n \cdot 360^0 + \alpha$. Np. $1756^0 = 4 \cdot 360^0 + 316^0$; $2925^0 = 8 \cdot 360^0 + 45^0$; $-810^0 = -3 \cdot 360^0 + 270^0$ itd.

Ćwiczenia.

136. Zegar śpieszy się o 10 minut. O jaki kąt należy obrócić wskazówkę minutową, aby zegar uregulować?

137. Zegar późni się o 15 minut. O jaki kąt należy obrócić wskazówkę minutową, aby zegar uregulować?

138. Przedstawić kąty:

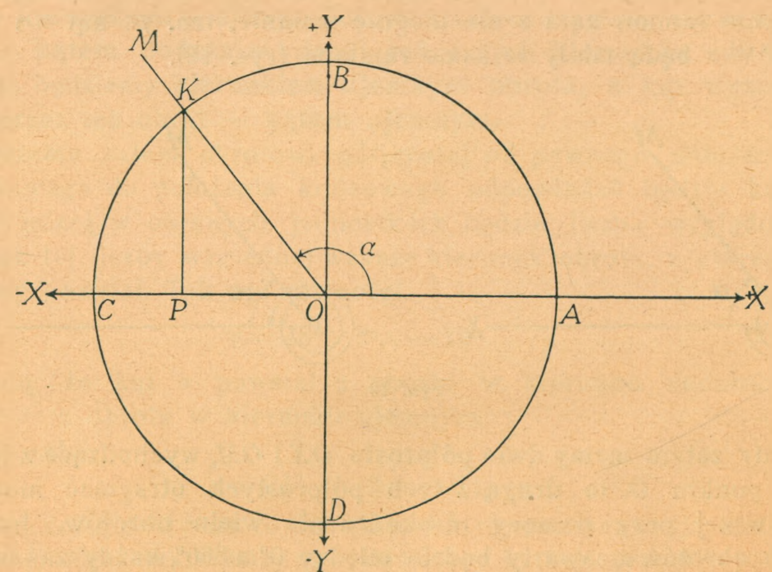
a) 408^0; b) 923^0; c) -1200^0; d) -1459^0;
e) 2138^0; f) 4592^0; g) -3108^0; h) -723^0

w postaci sumy wielokrotności 360^0 i kąta, zawartego między 0^0 a 360^0.

139. Zegar zatrzymał się o godz 12. O jaki kąt należy o godz. 7^{10} obrócić wskazówkę minutową, aby zegar uregulować?

Część II. Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta.

§ 78. Niech dany będzie prostokątny układ osi spółrzędnych *XOY*. Z punktu *O*, jako ze środka, zakreślmy dowolnym promie-



Rys. 20.

niem *R* okrąg koła, przecinający osie spółrzędnych odpowiednio w punktach *A*, *B*, *C*, *D* (rys. 20).

Jeżeli ruchoma półprosta *OM*, wychodząc z początkowego położenia *OX*, obracać się będzie w jednym z dwóch poznanych kierunków dookoła punktu O, wówczas zakreśli ona wszystkie możliwe kąty, których ramieniem początkowym jest OX. Półprosta ta w każdym swym położeniu przetnie okrąg koła — jak wiemy z geometrii — w jednym tylko punkcie.

Rozważmy jeden z kątów, powstałych z obrotu półprostej OM, np. $\sphericalangle AOM = \alpha$. Niechaj x i y oznaczają spółrzędne punktu K, w którym OM przecina okrąg koła.

Określenia: 1) **stosunek rzędnej punktu K do promienia R okręgu koła nazywamy sinusem** (po polsku: wstawą) **kąta** α, co zapisujemy

$$\frac{y}{R} = \sin\alpha$$

2) **stosunek odciętej punktu K do promienia R okręgu koła nazywamy kosinusem** (po polsku: dostawą) **kąta** α, co zapisujemy

$$\frac{x}{R} = \cos\alpha$$

3) **stosunek rzędnej punktu K do odciętej punktu K nazywamu tangensem** (po polsku: styczną) **kąta** α, co zapisujemy

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\alpha$$

4) **stosunek odciętej punktu K do rzędnej punktu K nazywamy kotangensem** (po polsku: dostyczną) **kąta** α, co zapisujemy

$$\frac{x}{y} = \operatorname{ctg}\alpha.$$

§ 79. Poznane w § poprzednim cztery stosunki są dla danego kąta stałe, tzn. że nie zależą od długości promienia R.

Istotnie: zakreślmy z punktu O jako ze środka drugi okrąg koła o dowolnym promieniu R_1 (rys. 21) i oznaczmy przez x_1 i y_1 spółrzędne punktu K_1, w którym półprosta OM przetnie ten okrąg koła.

Z podobieństwa trójkątów:

$$OPK \text{ i } OP_1K_1$$

wynika, że

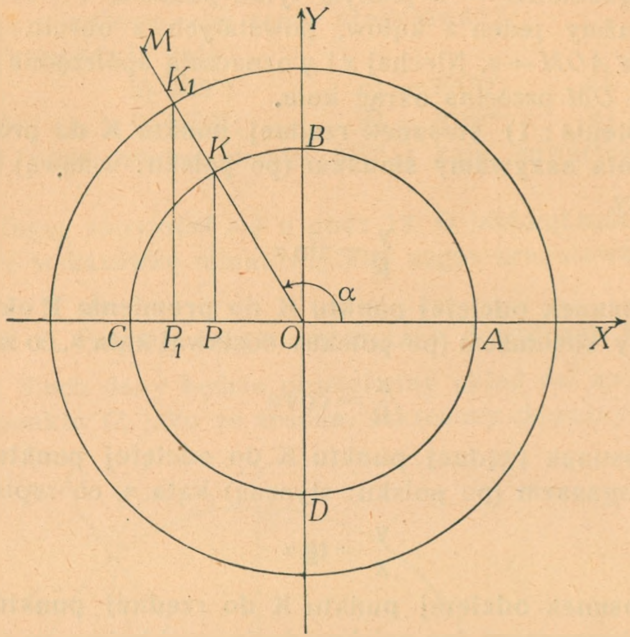
$$\frac{KP}{K_1P_1} = \frac{OK}{OK_1}; \quad \frac{OP}{OP_1} = \frac{OK}{OK_1}; \quad \frac{KP}{K_1P_1} = \frac{OP}{OP_1};$$

albo

$$\frac{y}{y_1} = \frac{R}{R_1}; \quad \frac{x}{x_1} = \frac{R}{R_1}; \quad \frac{y}{y_1} = \frac{x}{x_1}.$$

Stąd:

$$\frac{y}{R} = \frac{y_1}{R_1} = \sin\alpha; \quad \frac{x}{R} = \frac{x_1}{R_1} = \cos\alpha; \quad \frac{y}{x} = \frac{y_1}{x_1} = \operatorname{tg}\alpha,$$



Rys. 21.

co dowodzi, że każdy z poznanych czterech stosunków jest dla danego kąta α stały.

Uwaga. Z rozważań podanych w § 78 wynika, że chcąc wyznaczyć sinus, kosinus, tangens i kotanges kąta, należy: 1° wierzchołek kąta przyjąć za początek prostokątnego układu osi spółrzędnych, a ramię początkowe kąta za dodatni kierunek osi X; 2° wyznaczyć spółrzędne punktu, w którym ramię ruchome przecina okrąg koła, zakreślony dowolnym promieniem z wierzchołka kąta, jako ze środka.

§ 80. Jeżeli półprosta OM obracać się będzie dookoła punktu O w pewnym kierunku, wówczas punkt K przecięcia się tej półprostej z okręgiem koła przesuwać się będzie po okręgu. Zatem ze zmianą wielkości kąta zmienia się położenie punktu K na okręgu, a stąd zmieniają się i spółrzędne punktu K w odniesieniu do obranego układu osi spółrzędnych. A ponieważ, według określenia, sin α, cos α, tg α i ctg α zależą tylko od spółrzędnych punktu K, gdyż R jest stałe, zatem i cztery poznane stosunki zmieniają się zależnie od zmian kąta α. Dlatego też te cztery stosunki nazywamy **funkcjami trygonometrycznymi kąta** α.

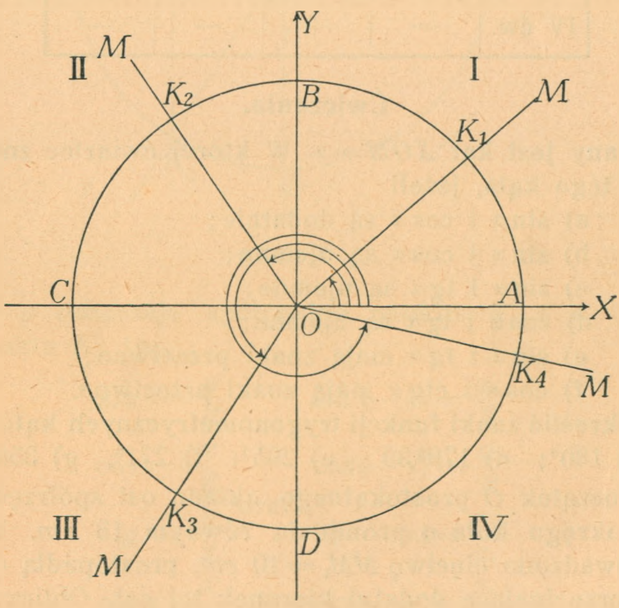
§ 81. Z określenia funkcji trygonometrycznych kąta wynika bezpośrednio, że

1^0 sinus, kosinus, tangens i kotangens kąta, jako stosunki długości, są liczbami oderwanymi;

2^0 tg i ctg kąta są względem siebie odwrotnościami, gdyż każde z wyrażeń: $\frac{y}{x}$ i $\frac{x}{y}$ jest odwrotnością drugiego.

Znak funkcji trygonometrycznych kąta.

§ 82. Wiemy, że osie spółrzędnych dzielą płaszczyznę na 4 części, zwane ćwiartkami (rys. 22). Jeżeli ruchome ramię kąta α znajduje się w I ćwiartce płaszczyzny, wówczas kąt α nazywamy **kątem I ćwiartki.** Jeżeli to ramię ruchome znajduje się w II, III lub IV ćwiartce, wówczas kąt α nazywamy odpowiednio **kątem II, III lub IV ćwiartki.**



Rys. 22.

Jeżeli kąt α jest kątem I ćwiartki, wówczas spółrzędne punktu K_1 są dodatnie, stąd i funkcje trygonometryczne kąta I ćwiartki są dodatnie.

Jeżeli kąt α jest kątem II ćwiartki, wówczas rzędna punktu K_2 jest dodatnia, a odcięta jest ujemna. Stąd $\sin\alpha$ jest dodatni, a pozostałe funkcje trygonometryczne są ujemne.

Jeżeli kąt α jest kątem III ćwiartki, wówczas spółrzędne punktu K_3 są ujemne. Stąd $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$ są ujemne, a $\operatorname{tg}\alpha$ i $\operatorname{ctg}\alpha$ dodatnie.

Jeżeli kąt α jest kątem IV ćwiartki, wówczas odcięta punktu K_4 jest dodatnia, a rzędna jest ujemna. Stąd $\cos\alpha$ jest dodatni, a pozostałe funkcje trygonometryczne są ujemne.

Otrzymane wyniki uwidocznione są w poniższej tabeli:

	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
I ćw.	+	+	+	+
II ćw.	+	—	—	—
III ćw.	—	—	+	+
IV ćw.	—	+	—	—

Ćwiczenia.

140. Dany jest kąt $XOM = \alpha$. W której ćwiartce znajduje się ramię OM tego kąta, jeżeli

a) $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$ są dodatnie;
b) $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$ są ujemne;
c) $\sin\alpha$ i $\operatorname{tg}\alpha$ są ujemne;
d) $\cos\alpha$ i $\operatorname{tg}\alpha$ są ujemne;
e) $\sin\alpha$ i $\operatorname{tg}\alpha$ mają znaki przeciwne;
f) $\cos\alpha$ i $\operatorname{ctg}\alpha$ mają znaki przeciwne.

141. Określić znaki funkcji trygonometrycznych kątów: a) 50^0; b) 91^0; c) 130^0; d) $179^0 30'$; e) 205^0; f) 271^0; g) 358^0.

142. Początek O prostokątnego układu osi spółrzędnych jest środkiem okręgu koła o promieniu równym 13 *cm*. W okręgu tym poprowadzono cięciwę $MM_1 = 10$ *cm*, prostopadłą do osi odciętych i przecinającą dodatni kierunek tej osi. Obliczyć funkcje trygonometryczne kątów XOM i XOM_1.

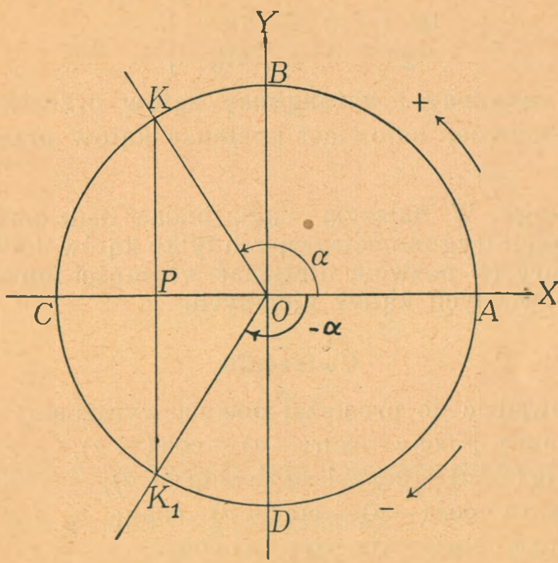
143. Początek O prostokątnego układu osi spółrzędnych jest środkiem okręgu koła o promieniu równym 10 *cm*. W okręgu tym poprowadzono cięciwę $MM_1 = 12$ *cm*, prostopadłą do osi rzędnych i przecinającą dodatni kierunek tej osi. Obliczyć funkcje trygonometryczne kątów XOM i XOM_1.

Przebieg zmienności funkcji trygonometrycznych kąta.

Funkcje trygonometryczne kątów przeciwnych.

§ 83. Rozpatrzmy dwa kąty przeciwne:

$$\sphericalangle AOK = \alpha \text{ i } \sphericalangle AOK_1 = -\alpha \text{ (rys. 23).}$$



Rys. 23.

Jeżeli x i y oznaczają spółrzędne punktu K, a x_1 i y_1 spółrzędne punktu K_1, to

$$\sin\alpha = \frac{y}{R} \qquad \sin(-\alpha) = \frac{y_1}{R}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{R} \qquad \cos(-\alpha) = \frac{x_1}{R}$$

oraz

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} \qquad \operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{y_1}{x_1}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y} \qquad \operatorname{ctg}(-\alpha) = \frac{x_1}{y_1}.$$

Ale punkty K i K_1 są symetrycznie położone względem osi odciętych, zatem odcięte punktów K i K_1 są sobie równe, a rzędne tych punktów różnią się tylko znakami. Zatem:

$$x = x_1, \; y_1 = -y. \text{ Stąd:}$$

$$\sin(-\alpha) = \frac{-y}{R} = -\sin\alpha; \quad \cos(-\alpha) = \frac{x}{R} = \cos\alpha; \quad \operatorname{tg}(-\alpha) =$$

$$= \frac{-y}{x} = -\operatorname{tg}\alpha; \quad \operatorname{ctg}(-\alpha) = \frac{x}{-y} = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

Mamy więc następujące wzory:

$$\left.\begin{array}{l} \sin(-\alpha) = -\sin\alpha \\ \cos(-\alpha) = \cos\alpha \\ \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha \\ \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha \end{array}\right| \qquad \text{(I)}$$

tzn. **sinusy, tangensy i kotangensy kątów przeciwnych mają wartości przeciwne,** natomiast **kosinusy kątów przeciwnych są sobie równe.**

Uwaga. W dalszym ciągu badać będziemy własności funkcji trygonometrycznych tylko kątów dodatnich, gdyż wzory (I) pozwolą otrzymać własności funkcji trygonometrycznych kątów ujemnych.

Ćwiczenia.

144. Sprowadzić do prostszej postaci wyrażenia:

a) $\sin\alpha + \cos\alpha - \sin(-\alpha) - \cos(-\alpha)$;

b) $\operatorname{tg}(-\alpha) + \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}(-\alpha)$;

c) $\sin\alpha \cdot \cos(-\alpha) - \sin(-\alpha) \cdot \cos\alpha$;

d) $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}(-\alpha) - \operatorname{tg}(-\alpha) \cdot \operatorname{ctg}\alpha$.

145. Sprowadzić do prostszej postaci wyrażenia ułamkowe

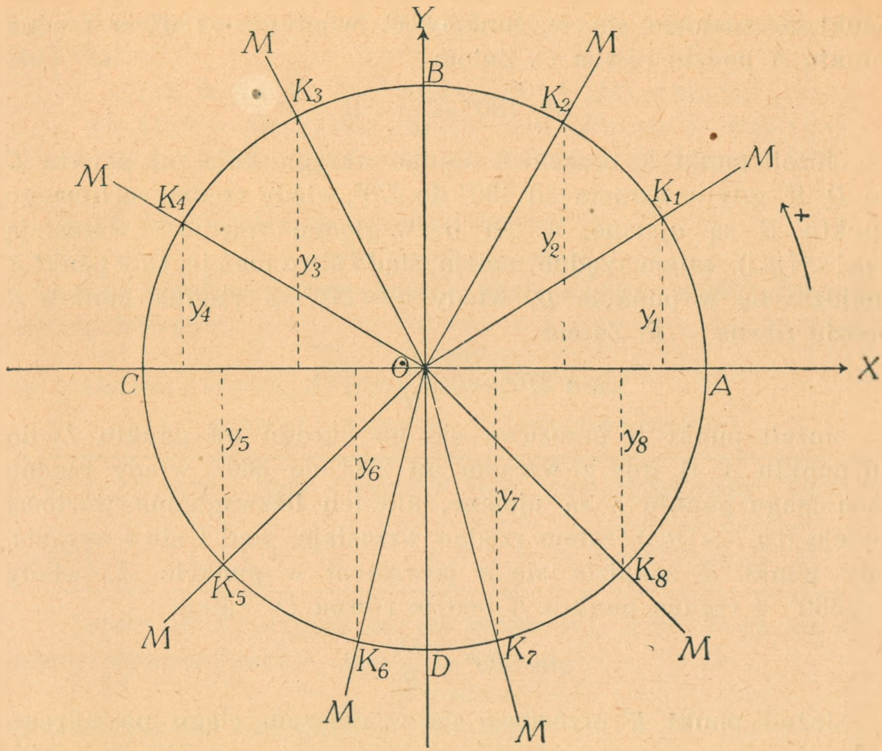
a) $\dfrac{1 + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}(-\alpha)}$; b) $\dfrac{2\sin\alpha + \sin(-\alpha)}{2\cos(-\alpha) - \cos\alpha}$;

c) $\dfrac{[\sin\alpha - \cos(-\alpha)]\,[\sin\alpha + \cos(-\alpha)]}{[\sin(-\alpha) + \cos\alpha]\,[-\sin(-\alpha) + \cos(-\alpha)]}$;

d) $\dfrac{\sin\alpha \cdot \operatorname{tg}(-\alpha) + \operatorname{tg}\alpha}{-\operatorname{ctg}(-\alpha) + \operatorname{ctg}\alpha \cdot \sin(-\alpha)}$.

Przebieg zmienności sinusa kąta.

§ 84. Jeżeli ruchome ramię OM kąta α (rys. 24) zajmuje początkowe położenie OX, wtedy mówimy, że $\alpha = 0^0$. Ponieważ



rys. 24.

rzędna punktu A, w którym leży wówczas punkt K, jest równa 0, zatem ze wzoru $\sin\alpha = \frac{y}{R}$ otrzymamy

$$\sin 0^0 = \frac{O}{R} = O.$$

Jeżeli punkt K przesuwa się po okręgu koła w kierunku dodatnim od punktu A do punktu B, tj. jeżeli α wzrasta od O^0 do 90^0, wówczas rzędne ruchomego punktu K wzrastają ($y_1 < y_2$). tj. $\sin\alpha$ też wzrasta. Gdy punkt K znajdzie się w punkcie B, wtedy $\alpha = 90^0$, a rzędna p. K równa będzie R. Zatem

$$\sin 90^0 = \frac{R}{R} = 1.$$

Jeżeli punkt K przesuwa się po okręgu koła od punktu B do punktu C, tj. gdy α wzrasta od 90^0 do 180^0, wtedy rzędne punktu ruchomego K maleją ($y_3 > y_4$), zatem i $\sin\alpha$ maleje. Gdy punkt K znajdzie się w punkcie C, wtedy $\alpha = 180^0$, a rzędna punktu K będzie równa O. Zatem

$$\sin 180^0 = \frac{O}{R} = 0.$$

Jeżeli punkt K przesuwa się po okręgu koła od punktu C do D, tj. gdy α wzrasta od 180^0 do 270^0, wtedy rzędne ruchomego punktu K są ujemne, a ich bezwzględne wartości wzrastają ($|y_5| < |y_6|$), zatem rzędne maleją, stąd i $\sin\alpha$ maleje. Gdy punkt K znajdzie się w punkcie D, wtedy $\alpha = 270^0$, a rzędna punktu K będzie równa $-R$. Zatem

$$\sin 270^0 = -\frac{R}{R} = -1.$$

Jeżeli punkt K przesuwa się po okręgu od punktu D do do punktu A, tj. gdy α wzrasta od 270^0 do 360^0, wtedy rzędne ruchomego punktu K są ujemne, ale ich bezwzględne wartości maleją ($|y_7| > |y_8|$), zatem rzędne wzrastają, stąd i $\sin\alpha$ wzrasta. Gdy punkt K znajdzie się z powrotem w punkcie A, wtedy $\alpha = 360^0$, a rzędna punktu K będzie równa O. Zatem

$$\sin 360^0 = \frac{O}{R} = 0.$$

Jeżeli punkt K przesuwa się w dalszym ciągu po okręgu koła, tj. gdy α wzrasta od 360^0 do 720^0, potem od 720^0 do 1080^0, itd., itd., wtedy punkt K zajmować będzie te same położenia na okręgu koła, jakie zajmował przy zmianie α od 0^0 do 360^0, tzn. że $\sin\alpha$ przyjmować będzie te same wartości i w tej samej kolejności, jak w przedziale od 0^0 do 360^0.

§ 85. Jeżeli ruchome ramię OM kąta α (rys. 24), wychodząc ze swego położenia początkowego OX wykona n pełnych obrotów (w kierunku dodatnim czy ujemnym) dookoła punktu O po czym powróci do położenia OK_1, wówczas — jak wiemy z § 76 — zakreśli ono kąt $n \cdot 360^0 + \alpha$, taki, że

$$\sin (n \cdot 360^0 + \alpha) = \frac{y_1}{R}.$$

A ponieważ $\frac{y_1}{R} = \sin\alpha$, stąd

$$\sin (n \cdot 360^0 + \alpha) = \sin\alpha \tag{3}$$

gdzie n oznacza dowolną liczbę całkowitą, dodatnią lub ujemną.

Zatem $\sin\alpha$ nie zmienia swej wartości, gdy α zwiększymy lub zmniejszymy o wielokrotność 360^0.

Mówimy, że $\sin\alpha$ jest **funkcją okresową** i że **okresem $\sin\alpha$ jest** 360°.

Tak więc: $\sin 385^\circ = \sin(360^\circ + 25^\circ) = \sin 25^\circ$; $\sin 1157^\circ = \sin(1080^\circ + 77^\circ) = \sin 77^\circ$; $\sin(-620^\circ) =$ $= \sin(-720^\circ + 100^\circ) = \sin(-2\cdot 360^\circ + 100^\circ) = \sin 100^\circ$.

§ 86. Pamiętając, że według wzorów (I)

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

i że $\sin\alpha$ jest funkcją okresową o okresie równym 360°, utwórzmy tablicę funkcji

$$y = \sin\alpha$$

na podstawie wyników, otrzymanych w § 84.

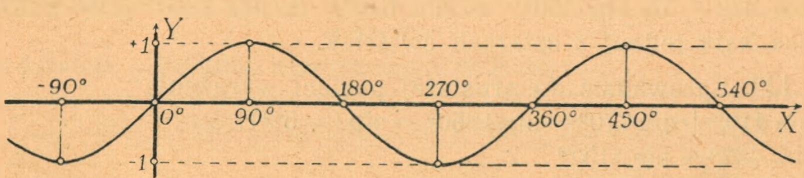
($\nearrow$ oznacza: wzrasta; $\searrow$ oznacza: maleje).

α	...	$\nearrow$	-270°	$\nearrow$	-180°	$\nearrow$	-90°	$\nearrow$	0°	$\nearrow$	90°	$\nearrow$	180°	$\nearrow$	270°	$\nearrow$	360°	$\nearrow$	450°	$\nearrow$	...
$\sin\alpha$	...		1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1		...

Jeżeli oś X przyjąć za oś kątów (α), a oś Y za oś $\sin\alpha$, wtedy wykres funkcji

$$y = \sin\alpha$$

przedstawia się następująco (rys. 25).



Rys. 25.

Krzywa, będąca wykresem funkcji $y = \sin\alpha$ nazywa się **sinusoidą.**

Ponieważ $\sin\alpha$ jest funkcją okresową o okresie równym 360°, zatem łuki krzywej, odpowiadające kątom od 0° do 360°, od 360° do 720° itd. oraz kątom od 0° do -360°, od -360° do -720° itd., są równe. Łuki te tworzą jedną nieprzerwaną linię krzywą, która rozciąga się nieskończenie po obu stronach osi Y. Jeżeli poprowadzimy dwie proste równoległe do osi X w odległościach od niej równych odpowiednio $+1$ i -1, wówczas zauważymy, że punkty sinusoidy, odpowiadające kątom takim, jak -270°, -90°, 90°, 270° itd., tj. kątom, które można wyrazić wzorem

$\alpha = (2n+1)\cdot 90^0$(*), leżą na tych prostych, pozostałe zaś jej punkty są położone między tymi prostymi.

§ 87. Z przebiegu zmienności $\sin\alpha$ wynika, że:

1^0 dla $\alpha = 270^0$ (lub ogólnie dla $\alpha = n\cdot 360^0 + 270^0$), $\sin\alpha$ przyjmuje najmniejszą wartość (*minimum*), równą -1;

2^0 dla $\alpha = 90^0$ (lub ogólnie dla $\alpha = n\cdot 360^0 + 90^0$), $\sin\alpha$ przyjmuje największą wartość (*maximum*), równą 1;

3^0 dla $\alpha = 0^0$ (lub ogólnie dla $\alpha = n\cdot 360^0$), $\sin\alpha$ przyjmuje wartość 0;

4^0 dla innych wartości kąta, $\sin\alpha$ przyjmuje zawsze tylko wartości dodatnie lub ujemne, zawarte między -1 a $+1$.

Ćwiczenia.

146. Zbadać przebieg zmienności i wykonać wykres funkcji a) $y = 2\sin x$; b) $y = \frac{1}{2}\sin x$.

147. Obliczyć wartość wyrażenia
a) $\sin 90^0 + \sin(-270^0) - \sin 180^0 + \sin(-90^0)$;
b) $\sin(-90^0)\cdot\sin 90^0 - \sin 270^0\cdot\sin(-270^0)$.

148. Pamiętając, że $\sin\alpha$ jest funkcją okresową, wyrazić a) $\sin 372^0$; b) $\sin 400^0$; c) $\sin 610^0$; d) $\sin 1225^0$ przy pomocy sinusa kąta jednej z czterech ćwiartek.

149. Sprowadzić do prostszej postaci wyrażenia
a) $\sin 410^0 + \sin 770^0 - \sin 1850^0 - \sin(-50^0)$;
b) $\dfrac{\sin 432^0 + \sin 1152^0}{\sin 792^0 + \sin 1872^0}$.

150. Prosta równoległa do osi x poprowadzona jest w odległości s od tej osi $(-1 < s < 1)$.

a) W ilu punktach prosta ta przetnie łuk sinusoidy, odpowiadający kątom przedziału $0^0 - 360^0$?

b) W ilu punktach prosta ta przetnie sinusoidę?

Sformułować otrzymane wyniki.

Przebieg zmienności kosinusa kąta.

§ 88. Przebieg zmienności kosinusa kąta zbadać można w ten sam sposób, jaki zastosowaliśmy przy badaniu zmienności sinusa

(*) n oznacza dowolną liczbę całkowitą.

kąta. Wyniki rozważań — które winien przeprowadzić uczący się przy pomocy odpowiedniego rysunku — będą następujące:

1) gdy $\alpha=0^0$, to $\cos 0^0=1$;

2) gdy α wzrasta od 0^0 do 90^0, to $\cos\alpha$ maleje i dla $\alpha=90^0$, $\cos 90^0=0$;

3) gdy α wzrasta od 90^0 do 180^0, to $\cos\alpha$ maleje, przyjmując wartości ujemne i dla $\alpha=180^0$, $\cos 180^0=-1$;

4) gdy α wzrasta od 180^0 do 270^0, to $\cos\alpha$ wzrasta, przyjmując wartości ujemne i dla $\alpha=270^0$, $\cos 270^0=0$;

5) gdy α wzrasta od 270^0 do 360^0, to $\cos\alpha$ wzrasta i dla $\alpha=360^0$, $\cos 360^0=1$;

6) $\cos\alpha$ nie zmienia swej wartości, gdy α zwiększymy lub zmniejszymy o wielokrotność 360^0, tj.

$$\cos(n\cdot 360^0+\alpha)=\cos\alpha, \tag{4}$$

gdzie n oznacza liczbę całkowitą, dodatnią lub ujemną. Inaczej mówiąc, **$\cos\alpha$ jest funkcją okresową o okresie równym 360^0.**

Tak np. $\cos 875^0=\cos(2\cdot 360^0+155^0)=\cos 155^0$; $\cos(-1060^0)=\cos(-3\cdot 360^0+20^0)=\cos 20^0$, itd.

§ 89. Pamiętając, że według wzorów (I)

$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$$

i że $\cos\alpha$ jest funkcją okresową o okresie równym 360^0, utwórzmy tablicę funkcji

$$y=\cos\alpha$$

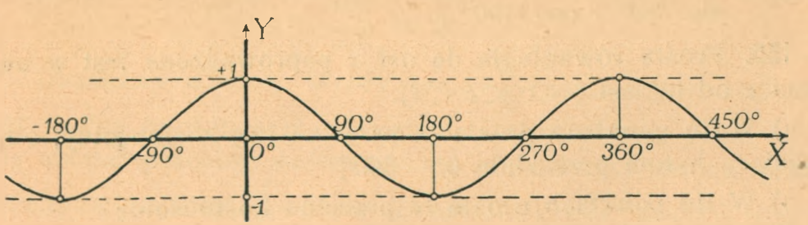
na podstawie wyników, otrzymanych w § 88.

α	...	↗	-270^0	↗	-180^0	↗	-90^0	↗	0^0	↗	90^0	↗	180^0	↗	270^0	↗	360^0	↗	450^0	↗	...
$\cos\alpha$	...		0	↘	-1	↗	0	↗	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	1	↘	0		...

Jeżeli oś X przyjąć za oś kątów, a oś Y za oś $\cos\alpha$, wtedy wykres funkcji

$$y=\cos\alpha$$

przedstawia się następująco (rys. 26):



Rys. 26.

Krzywa, będąca wykresem funkcji $y = \cos\alpha$ nazywa się **kosinusoidą.**

Gdybyśmy na rysunku, przedstawiającym sinusoidę, przesunęli oś Y o odcinek, odpowiadający kątowi 90^0, wówczas otrzymalibyśmy kosinusoidę. Uczący się, na podstawie własności sinusoidy, omówionych w § 86, sam sformułuje własności kosinusoidy.

§ 90. Z przebiegu zmienności $\cos\alpha$ wynika, że

1^0 dla $\alpha = 180^0$ (lub ogólnie: dla $\alpha = n \cdot 360^0 \pm 180^0$), $\cos\alpha$ przyjmuje najmniejszą wartość *(minimum),* równą -1;

2^0 dla $\alpha = 0^0$ (lub ogólnie: dla $\alpha = n \cdot 360^0$), $\cos\alpha$ przyjmuje największą wartość *(maximum),* równą $+1$;

3^0 dla $\alpha = 90^0$ (lub ogólnie: dla $\alpha = n \cdot 360^0 \pm 90^0$), $\cos\alpha$ przyjmuje wartość 0;

4^0 dla innych wartości kąta, $\cos\alpha$ przyjmuje zawsze tylko wartości dodatnie lub ujemne, zawarte między -1 a $+1$.

Ćwiczenia.

151. Zbadać przebieg zmienności i wykonać wykres funkcji

a) $y = 2\cos x$; b) $y = \frac{1}{2}\cos x$.

152. Obliczyć wartość wyrażenia

a) $\cos(-180^0) + \cos 270^0 - \cos 0^0 + \cos 360^0$;

b) $\sin 90^0 \cdot \cos 180^0 - \cos(-360^0) \cdot \sin(-90^0)$.

153. Pamiętając, że $\cos\alpha$ jest funkcją okresową, wyrazić

a) $\cos 369^0$; b) $\cos 440^0$; c) $\cos 825^0$; d) $\cos 1332^0$

przy pomocy kosinusa kąta jednej z czterech ćwiartek.

154. Sprowadzić do prostszej postaci wyrażenia:

a) $\cos 740^0 - \cos 380^0 + \cos 1460^0 + \cos(-20^0)$;

b) $\dfrac{\sin 470^0 + \cos(-830^0)}{\sin 830^0 + \cos 1190^0}$

155. Prosta równoległa do osi x poprowadzona jest w odległości c od tej osi ($-1 < c < 1$).

a) W ilu punktach prosta ta przecina łuk kosinusoidy, odpowiadający kątom przedziału $0^0 - 360^0$?

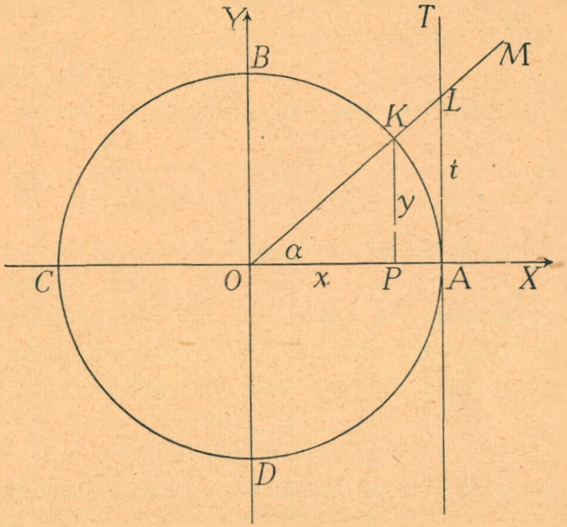
b) W ilu punktach prosta ta przecina kosinusoidę?

Sformułować otrzymane wyniki.

Przebieg zmiennośc tangensa kąta.

§ 91. Jeżeli punkt K, poruszający się po okręgu koła w kierunku dodatnim (rys. 27) znajdzie się w punkcie B lub D, wówczas jego odcięta x przyjmie wartość 0. Ponieważ dla tych położeń punktu K, a więc dla kątów 90° albo 270°, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$ nie posiada żadnej wartości określonej, przeto przebieg zmienności $tg\,\alpha$ zbadamy w sposób następujący.

Niech α oznacza dowolny kąt AOM. Poprowadźmy przez punkt A (rys. 27) styczną AT do okręgu koła i wyznaczmy punkt L,



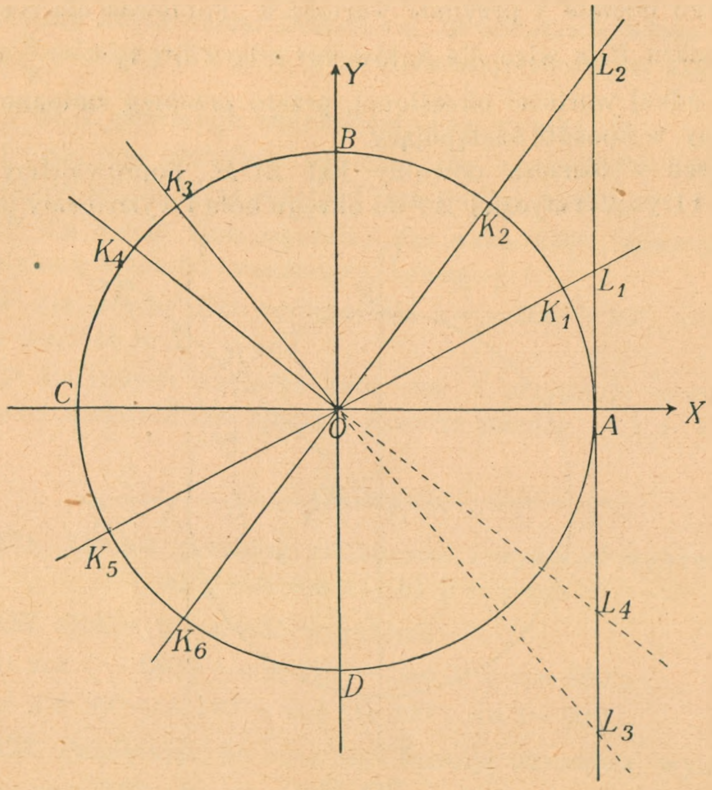
Rys. 27.

w którym ruchome ramię OM (albo jego przedłużenie) przecina styczną AT. Z podobieństwa trójkątów OPK i OAL wynika, że $\frac{PK}{AL} = \frac{OP}{OA}$ albo $\frac{y}{AL} = \frac{x}{OA}$. Stąd $\frac{y}{x} = \frac{AL}{OA}$. Ale $\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \alpha$, więc

$$\frac{AL}{OA} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Oznaczmy $AL = t$. Wtedy $\operatorname{tg} \alpha = \frac{t}{R}$, gdzie R jest stałe. Ale t jest rzędną punktu L w odniesieniu do układu osi XOY. Zatem, aby zbadać przebieg zmienności $\operatorname{tg} \alpha$, wystarczy zbadać przebieg zmienności ułamka $\frac{t}{R}$, gdzie R jest stałe, gdy punkt K przesuwa się po okręgu koła.

Na rys. 28 punkty L_1, L_2, $L_3, \ldots$ oznaczają położenia punktu L, gdy punkt K przesuwa się po okręgu koła od punktu A w kierunku dodatnim.



Rys. 28

Jeżeli $\alpha = O^0$, to punkt L leży w punkcie A, którego rzędna jest równa O, a odcięta jest równa R. Stąd $\mathrm{tg}\ 0^\circ = \frac{O}{R} = 0$.

Jeżeli α wzrasta od 0^0 do 90^0, rzędne $t_1, t_2 \ldots$ punktów $L_1, L_2 \ldots$ są dodatnie i wzrastają nieograniczenie, więc i $\mathrm{tg}\,\alpha$ jest dodatni i wzrasta nieograniczenie, co zapisujemy symbolem

$$\mathrm{tg}\ \alpha \to +\infty$$

$$\text{gdy } \alpha \to 90^0.$$

Zobaczmy, jak zmienia się $\mathrm{tg}\ \alpha$, gdy α **maleje** od 180^0 do 90^0. Jeżeli $\alpha = 180^0$, to punkt L leży znowu w punkcie A (jak dla $\alpha = 0^0$), zatem **tg** $180^0 = 0$. Jeżeli α **maleje** od 180^0 do 90^0, wówczas rzędne $t_4, t_3, \ldots$ punktów $L_4, L_3, \ldots$ są ujemne, a ich wartości bezwzględne wzrastają nieograniczenie, tzn. że rzędne te, przyjmując wartości ujemne, **maleją** nieograniczenie, więc i tgα jest ujemny i **maleje** nieograniczenie, co zapisujemy symbolem

$$\text{tg}\,\alpha \to -\infty$$
$$\text{gdy } \alpha \to 90^0.$$

Stąd, gdy α **wzrasta** od 90^0 do 180^0, tgα jest ujemny i **wzrasta** do 0.

Jeżeli α **wzrasta** od 180^0 do 270^0 i od 270^0 do 360^0, tzn, gdy punkt K przesuwa się od p. C do p. D i od p. D do p. A, wtedy punkt L zajmuje na stycznej AT te same położenia, jakie zajmował przy zmianie α od 0^0 do 90^0 i od 90^0 do 180^0, zatem przebieg zmienności tgα w przedziale od 180^0 do 360^0 będzie taki sam, jak w przedziale od 0^0 do 180^0.

Z rys. 28 widać, że jeżeli OK_5 jest przedłużeniem OK_1, to $\sphericalangle AOK_5 = 180^0 + \alpha$, a

$$\text{tg} \sphericalangle AOK_5 = \text{tg} \sphericalangle AOK_1 = \frac{t_1}{R},$$

czyli tg $(180^0 + \alpha) = $ tg α, co wskazuje, że **tgα jest również funkcją okresową o okresie 180^0.**

Ogólnie, jeżeli ramię OK_1 wykona **n półobrotów**, w kierunku dodatnim czy ujemnym tzn. gdy α zwiększymy albo zmniejszymy o $n \cdot 180^0$, wówczas zajmować ono będzie albo położenie OK_5 albo OK_1, tzn. że

$$\textbf{tg}\,(\mathbf{n} \cdot \mathbf{180^0} + \alpha) = \textbf{tg}\,\alpha, \tag{5}$$

gdzie n oznacza liczbę całkowitą dodatnią lub ujemną.

Np. tg $203^0 = $ tg $(180^0 + 23^0) = $ tg 23^0.
tg $680^0 = $ tg $(3 \cdot 180^0 + 140^0) = $ tg 140^0.
tg $(-347^0) = $ tg $(-2 \cdot 180^0 + 13^0) = $ tg 13^0.

§ **92.** Pamiętając, że według wzorów (I)

$$\text{tg}\,(-\alpha) = -\text{tg}\,\alpha$$

i że tgα jest funkcją okresową o okresie równym 180^0, utwórzmy tablicę funkcji:

$$y = \text{tg}\,\alpha$$

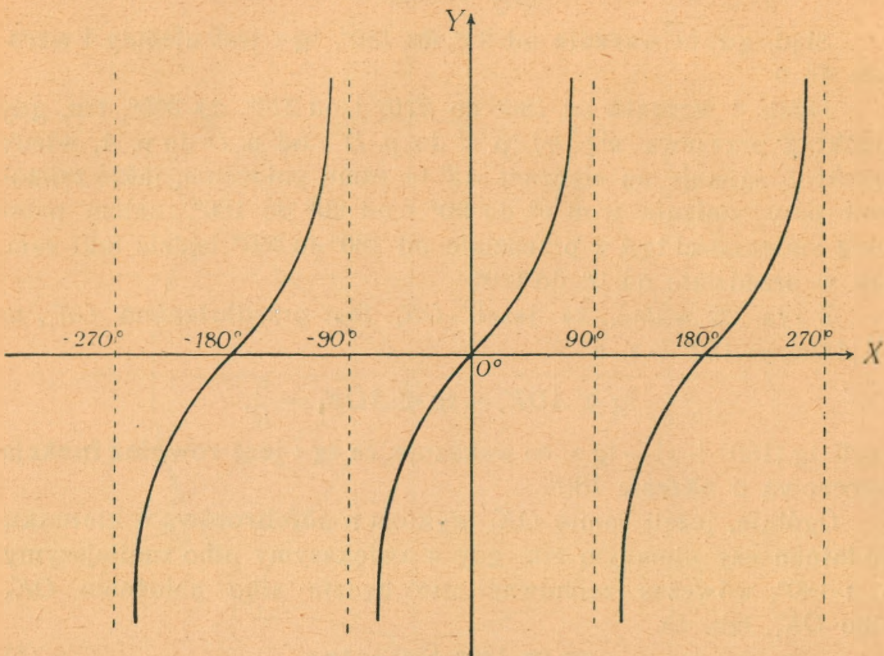
na podstawie wyników, otrzymanych w § 91.

α	...↗	-180^0	↗	-90^0	↗	0^0	↗	90^0	↗	180^0	↗	270^0	↗...
tg α	...↗	0	↗	$+\infty$ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$ ∞	↗...

Jeżeli oś X przyjąć za oś kątów (α), a oś Y za oś tg α, wtedy wykres funkcji

$$y = \operatorname{tg} \alpha$$

przedstawia się następująco (rys. 29).



Rys. 29.

Krzywa, będąca wykresem funkcji $y = \operatorname{tg} \alpha$, nazywa się **tangensoidą.**

W przeciwieństwie do wykresu $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$, tangensoida składa się z nieskończonej ilości łuków (tzw. gałęzi), które nie łączą się w jedną nieprzerwaną linię. Jeżeli w punktach osi X, odpowiadającym kątom takim, jak -90^0, 90^0, 270^0 itd., tj. kątom, które można wyrazić wzorem $\alpha = n \cdot 180^0 + 90^0$ *), poprowadzimy proste prostopadłe do osi X, wówczas stwierdzimy, że każdy łuk tangensoidy zawarty jest między dwiema takimi kolejnymi prostymi i rozciąga się nieograniczenie po obu stronach osi X. Zauważymy nadto, że każdy z tych łuków zbliża się nieograniczenie do dwóch takich kolejnych prostych, ale nie ma z nimi żadnego

*) n oznacza liczbę całkowitą.

punktu wspólnego. Gdyby bowiem taki punkt wspólny istniał, wówczas rzędna jego, wyrażająca tangens jednego z kątów $\alpha = n \cdot 180^0 + 90^0$, miałaby wartość określoną, a jak wiemy z § 91, dla każdego z tych kątów tangens określonej wartości nie posiada.

§ 93. Z przebiegu zmienności $\operatorname{tg} \alpha$ wynika, że

1^0 dla $\alpha = 0^0$ (ogólnie: dla $\alpha = n \cdot 180^0 + 90^0$), $\operatorname{tg} \alpha$ nie posiada żadnej określonej wartości,

2^0 $\operatorname{tg} \alpha$ wzrasta, gdy kąt α wzrasta,

3^0 $\operatorname{tg} \alpha$ zmienia się w zakresie nieograniczonym, tzn. że $\operatorname{tg} \alpha$ przyjmuje wartości wszystkich liczb rzeczywistych.

Zmienność kotangensa kąta.

§ 94. Wiemy, że między $\operatorname{tg} \alpha$ i $\operatorname{ctg} \alpha$ zachodzi związek (p. § 81)

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Zatem

$$\operatorname{ctg} (n \cdot 180^0 + \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg} (n \cdot 180^0 + \alpha)} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha,$$

tzn., że **$\operatorname{ctg} \alpha$ jest funkcją okresową o okresie równym 180^0**.

Wiemy również z przebiegu zmienności $\operatorname{tg} \alpha$, że w każdym z przedziałów: od 0^0 do 90^0, od 90^0 do 180^0, itd. wartości $\operatorname{tg} \alpha$ wzrastają, gdy α wzrasta. Ponieważ $\operatorname{ctg} \alpha$ jest odwrotnością $\operatorname{tg} \alpha$, zatem w każdym z wymienionych przedziałów **wartości $\operatorname{ctg} \alpha$ maleją, gdy α wzrasta.**

Badanie przebiegu zmienności $\operatorname{ctg} \alpha$ można by oprzeć na wzorze $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$. Ze względu jednak na to, że dla wartości α, równych 0^0, 180^0, itd. wyrażenie $\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$ traci sens, nadamy $\operatorname{ctg} \alpha$ postać, dogodną do badania przebiegu jego zmienności.

Poprowadźmy przez punkt B (rys. 30) styczną BT do okręgu koła. Z podobieństwa trójkątów: OKP i OBN wynika, że

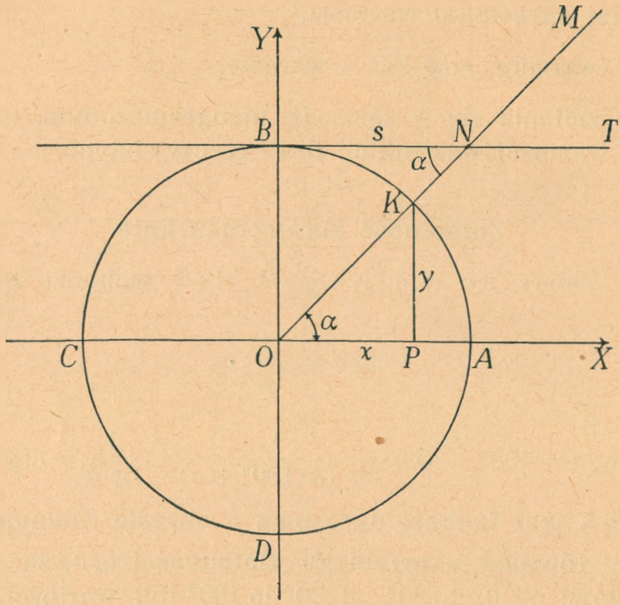
$$\frac{OP}{BN} = \frac{PK}{OB} \text{ albo } \frac{x}{BN} = \frac{y}{OB}.$$

Stąd

$$\frac{x}{y} = \frac{BN}{OB}. \quad \text{Ale } \frac{x}{y} = \operatorname{ctg} \alpha,$$

więc

$$\frac{BN}{OB} = \operatorname{ctg} \alpha.$$



Rys. 30.

Oznaczmy $BN = s$. Wtedy $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{s}{R}$, gdzie R jest stałe. Ale s jest odciętą p. N w odniesieniu do obranego układu osi. Zatem, aby zbadać przebieg zmienności $\operatorname{ctg} \alpha$, wystarczy zbadać przebieg zmienności ułamka $\frac{s}{R}$, gdzie R jest stałe, tzn. zbadać przebieg zmienności odciętej s, gdy punkt K porusza się po okręgu koła od punktu A w kierunku dodatnim.

Uczący się, na podstawie odpowiedniego rysunku, sam przeprowadzi rozważania i wykona wykres funkcji $y = \operatorname{ctg} \alpha$.

Ćwiczenia.

156. Pamiętając, że $\operatorname{tg}\alpha$ i $\operatorname{ctg}\alpha$ są funkcjami okresowymi, wyrazić:

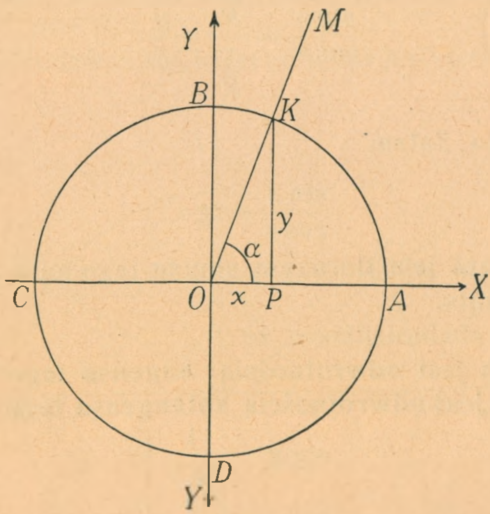
a) $\operatorname{tg} 183^0$; b) $\operatorname{tg} 268^0$; c) $\operatorname{tg} 660^0$; d) $\operatorname{tg} (-1228^0)$ przy pomocy tangensa kąta I lub II ćwiartki;

e) $\operatorname{ctg} 207^0$; f) $\operatorname{ctg} (-528^0)$; g) $\operatorname{ctg} 2385^0$ przy pomocy kotangensa kąta ćwiartki I lub II.

157. W ilu punktach prosta równoległa do osi X przecina a) każdą gałąź tangensoidy (i kotangensoidy), b) gałęzie tangensoidy (i kotangensoidy), odpowiadające kątom przedziału $0^0 - 360^0$? Sformułować otrzymany wynik.

158. W ilu punktach przecina tangensoidę (i kotangensoidę) prosta równoległa do osi x? Sformułować otrzymany wynik.

Związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta.



Rys. 31.

§ 95. a) Niechaj x i y oznaczają spółrzędne punktu K, w którym ruchome ramię kąta α przecina okrąg koła. Trójkąt OKP

(rys. 31) jest prostokątny ($\sphericalangle KPO = 90^\circ$), zatem na podstawie twierdzenia Pitagorasa mamy:

$$KP^2 + OP^2 = OK^2$$

czyli

$$y^2 + x^2 = R^2.$$

Dzieląc obie strony tej równości przez R^2, otrzymujemy

$$\left(\frac{y}{R}\right)^2 + \left(\frac{x}{R}\right)^2 = 1.$$

Ale, zgodnie z określeniem, $\frac{y}{R} = \sin\alpha$; $\frac{x}{R} = \cos\alpha$, czyli

$$(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1.$$

Równość tę piszemy bez użycia nawiasów w postaci

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \tag{6}$$

tzn. **suma kwadratów sinusa i kosinusa tego samego kąta jest równa 1.**

b) Wiemy z określenia, że

$$\sin\alpha = \frac{y}{R} \quad \text{i} \quad \cos\alpha = \frac{x}{R}.$$

Dzieląc stronami te dwie równości, otrzymujemy

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{y}{R}}{\frac{x}{R}} = \frac{y}{x}.$$

Ale $\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\alpha$. Zatem

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha, \tag{7}$$

tzn. **tangens kąta jest ilorazem sinusa tego kąta przez kosinus tego samego kąta.**

c) W § 81 stwierdziliśmy, że

kotangens kąta jest odwrotnością angensa tego samego kąta, a tangens kąta jest odwrotnością kotangensa tego samego kąta:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{ctg} x &= \frac{1}{\operatorname{tg} x} \\ \text{i} \quad \operatorname{tg} x &= \frac{1}{\operatorname{ctg} x} \end{aligned}\right| \tag{8}$$

Uwaga. Z równości (7) wynika bezpośrednio, że

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

§ 96. Wzory (6), (7) i (8) wyrażają podstawowe związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta. Tworzą one układ trzech równań, w których występują cztery funkcje trygonometryczne kąta. Znając jedną z tych funkcji, możemy z równań (6), (7) i (8) obliczyć pozostałe.

Przykład I. Dany jest $\sin\alpha = s$ $(-1 < s < 1$, zgodnie z § 87). Obliczyć pozostałe funkcje trygonometryczne kąta α.

Ze wzoru (6) otrzymamy:

$$s^2 + \cos^2\alpha = 1, \text{ stąd}$$
$$\cos^2\alpha = 1 - s^2, \text{ zatem}$$
$$\cos\alpha = \mp\sqrt{1 - s^2}.$$

Ze wzoru (7) obliczymy $\operatorname{tg}\alpha$:

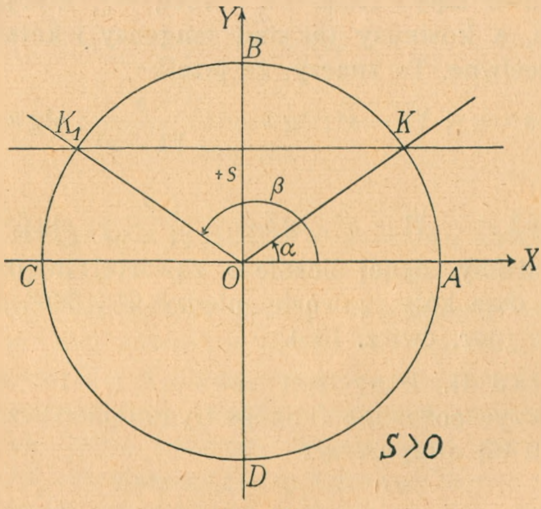
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{s}{\mp\sqrt{1-s^2}} = \mp\frac{s}{\sqrt{1-s^2}}.$$

Wreszcie ze wzoru (8) obliczymy $\operatorname{ctg}\alpha$:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \mp\frac{\sqrt{1-s^2}}{s}.$$

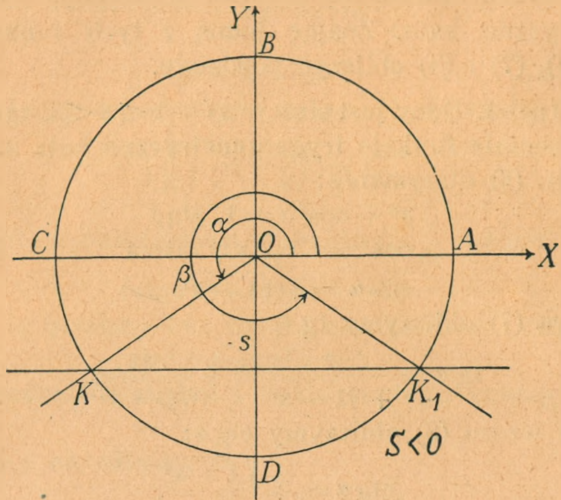
Jak widzimy, danemu sinusowi kąta odpowiadają po **dwie** wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta, różniące się tylko znakami. Aby wyjaśnić otrzymane wyniki, rozwiążemy następujące

Zadanie I. Zbudować kąt, którego sinus jest równy danej liczbie s $(-1 < s < 1)$.



Rys. 32 a

Zakreślmy okrąg koła o środku w początku układu osi spółrzędnych i promieniu równym jednostce długości (rys. 32). Po-



Rys. 32b

prowadźmy następnie prostą równoległą do osi X w odległości od niej równej s. Prosta ta przetnie okrąg koła w dwóch punktach K i K_1, symetrycznie położonych względem osi Y. Zatem rzędne tych punktów są sobie równe, natomiast odcięte różnią się tylko znakiem. Wobec tego, prowadząc półproste OK i OK_1, otrzymamy dwa kąty: $AOK = \alpha$ i $AOK_1 = \beta$, których sinusy są sobie równe, a kosinusy (a stąd tangensy i kotangensy) mają wartości przeciwne. To znaczy, że jeżeli

$$\sin\alpha = s\,;\ \cos\alpha = +\sqrt{1-s^2}\,;\ \operatorname{tg}\alpha = +\frac{s}{\sqrt{1-s^2}}\,;\ \operatorname{ctg}\alpha = +\frac{\sqrt{1-s^2}}{s},$$

to

$$\sin\beta = s\,;\ \cos\beta = -\sqrt{1-s^2}\,;\ \operatorname{tg}\beta = -\frac{s}{\sqrt{1-s^2}}\,;\ \operatorname{ctg}\beta = -\frac{\sqrt{1-s^2}}{s}.$$

Jak więc widzimy, danej liczbie s, zawartej między -1 a $+1$, odpowiadają **dwa** kąty, zawarte między 0^0 i 360^0, których sinus jest równy s. (por. ćwicz. 150).

P r z y k ł a d II. Dany jest $\cos\alpha = c$ $(-1 < c < 1$, zgodnie z § 90). Obliczyć pozostałe funkcje trygonometryczne kąta α.

Ze wzoru (6) otrzymamy:

$$\sin^2\alpha + c^2 = 1, \text{ a stąd}$$

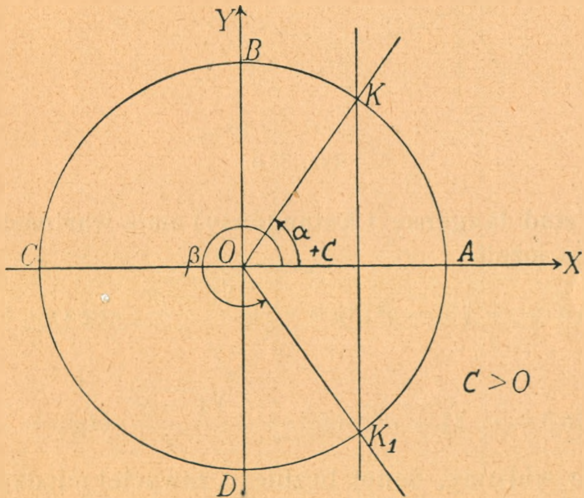
$$\sin\alpha = \mp\sqrt{1-c^2}.$$

Ze wzorów (7) i (8) obliczymy $\operatorname{tg}\alpha$ i $\operatorname{ctg}\alpha$:

$$\operatorname{tg}\alpha = \mp \frac{\sqrt{1-c^2}}{c} \quad \text{i} \quad \operatorname{ctg}\alpha = \mp \frac{c}{\sqrt{1-c^2}}.$$

Jak widzimy, danemu kosinusowi kąta odpowiadają po **dwie** wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta, różniące się tylko znakami. Aby wyjaśnić otrzymane wyniki, rozwiążemy następujące

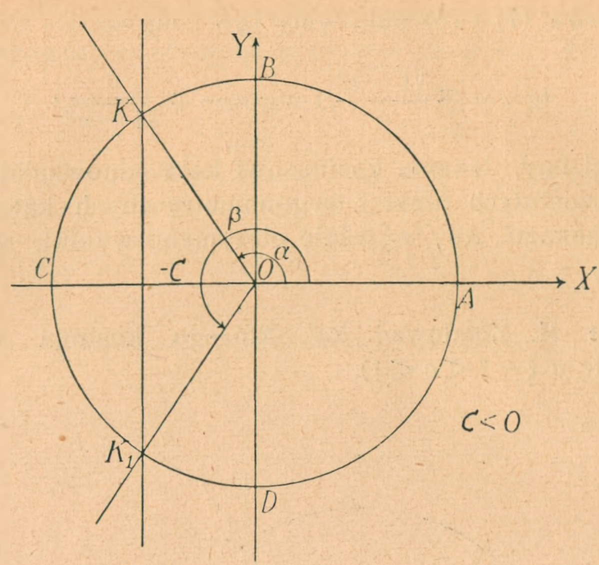
Zadanie II. Zbudować kąt, którego kosinus jest równy danej liczbie c $(-1 < c < 1)$.



Rys. 33 a

Zakreślmy okrąg koła o środku w początku układu osi spółrzędnych i promieniu równym jednostce długości (rys. 33).

Poprowadźmy następnie prostą równoległą do osi Y w odległości od niej równej c. Prosta ta przetnie okrąg koła w dwóch punktach K i K_1, symetrycznie położonych względem osi X. Zatem odcięte tych punktów są sobie równe, natomiast rzędne różnią się tylko znakami. Wobec tego, prowadząc półproste OK i OK_1 otrzymamy dwa kąty: $AOK = \alpha$ i $AOK_1 = \beta$, których kosinusy są sobie równe i każdy z nich jest równy c,



Rys. 33 b

a sinusy (a stąd tangensy i kotangensy) mają wartości przeciwne. To znaczy, że jeżeli

$$\cos\alpha = c;\ \sin\alpha = +\sqrt{1-c^2};\ \operatorname{tg}\alpha = +\frac{\sqrt{1-c^2}}{c};\ \operatorname{ctg}\alpha = +\frac{c}{\sqrt{1-c^2}},$$

to

$$\cos\beta = c;\quad \sin\beta = -\sqrt{1-c^2};\quad \operatorname{tg}\beta = -\frac{\sqrt{1-c^2}}{c};\ \operatorname{ctg}\beta = -\frac{c}{\sqrt{1-c^2}}.$$

Jak więc widzimy, danej liczbie c, zawartej między -1 a $+1$, odpowiadają **dwa** kąty, zawarte między 0^0 i 360^0, których kosinus jest równy c (por. ćwicz. 155).

Przykład III. Dany jest $\operatorname{tg}\alpha = t$ (t oznacza dowolną liczbę rzeczywistą, zgodnie z § 93). Obliczyć pozostałe funkcje trygonometryczne kąta α.

Ze wzoru (7) mamy

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = t, \text{ a stąd: } \sin\alpha = t\cdot\cos\alpha.$$

Podstawiając tę wartość $\sin\alpha$ do wzoru (6), otrzymamy

$$t^2\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;\ \text{stąd: } (t^2+1)\cos^2\alpha = 1, \text{ zatem}$$

$$\cos\alpha = \mp\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

A ponieważ $\sin\alpha = t\cdot\cos\alpha$, więc

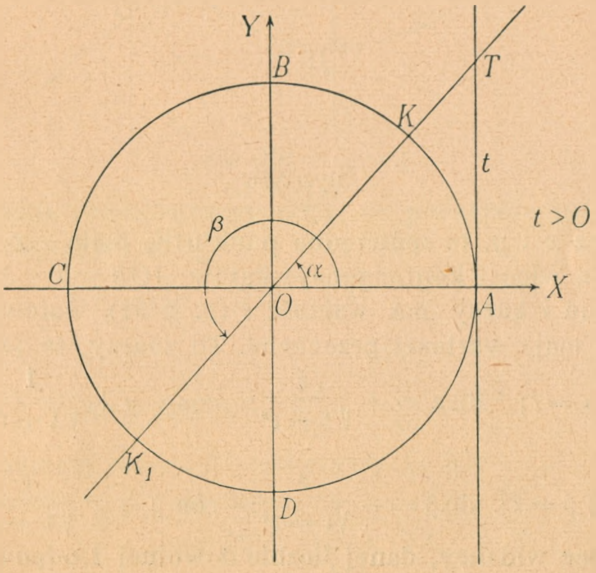
$$\sin\alpha = \mp\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Wreszcie ze wzoru (8) otrzymamy

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{t}.$$

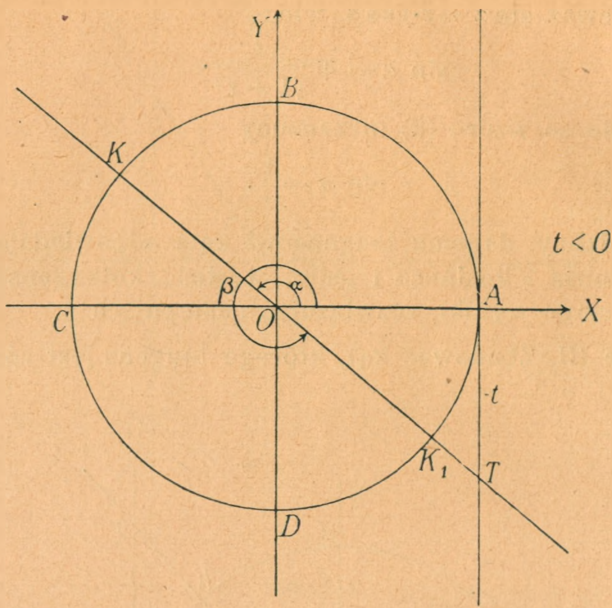
Jak widzimy, danemu tangensowi kąta odpowiadają po **dwie** wartości sinusa i kosinusa i jedna wartość kotangensa. Wyjaśnimy otrzymane wyniki, rozwiązując następujące

Zadanie III. Zbudować kąt, którego tangens jest równy danej liczbie t.



Rys. 34 a

Zakreślmy okrąg koła o środku w początku układu osi spółrzędnych i promieniu równym 1 (rys. 34). Poprowadźmy następnie styczną do okręgu w punkcie A i na tej stycznej odmierzmy od punktu A odcinek $AT = t$. Prosta, przechodząca przez punkty O i T, przetnie okrąg koła w dwóch punktach: K i K_1 symetrycznie położonych względem środka okręgu O, czyli względem początku układu osi spółrzędnych. Zatem spółrzędne punktów K i K_1 różnią się tylko znakami, tzn. że jeżeli spółrzędne punktu K ozna-



Rys. 34 b

czymy przez x i y, to spółrzędne punktu K_1 będą $-x$ i $-y$. Stąd tangensy (a więc i kontangensy) kątów $AOK=\alpha$ i $AOK_1=\beta$ są sobie równe i każdy ma wartość t (p. § 91), natomiast sinusy i kosinusy maja wartości przeciwne. To znaczy, że jeżeli

$$\operatorname{tg}\alpha=t;\quad \sin\alpha=+\frac{t}{\sqrt{1+t^2}};\quad \cos\alpha=+\frac{1}{\sqrt{1+t^2}},$$

to

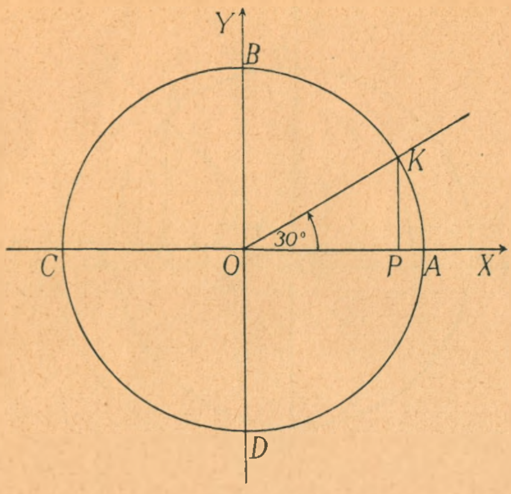
$$\operatorname{tg}\beta=t;\quad \sin\beta=-\frac{t}{\sqrt{1+t^2}};\quad \cos\beta=-\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Jak więc widzimy, danej liczbie dowolnej t odpowiadają **dwa** kąty, zawarte między 0^0 i 360^0, których tangens jest równy t. (por. ćw. 157).

Funkcje trygonometryczne kątów: 30^0, 45^0 i 60^0.

§ 97. 1) Jeżeli $\sphericalangle AOK=30^0$ (rys. 35), to przyprostokątna KP trójkąta prostokątnego OPK jest równa połowie przeciwprostokątnej OK, czyli

$$KP=\frac{R}{2}\cdot \text{ Zatem}$$



Rys. 35

$$\sin 30^0 = \frac{\frac{R}{2}}{R} = \tfrac{1}{2}.$$

Z trójkąta prostokątnego OPK, na podstawie twierdzenia Pitagorasa, obliczymy OP:

$$OP = \sqrt{R^2 - KP^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Stąd } \cos 30^0 = \frac{OP}{OK} = \frac{\frac{R\sqrt{3}}{2}}{R} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Przy pomocy wzoru (7) obliczymy tg 30^0:

$$\operatorname{tg} 30^0 = \frac{\sin 30^0}{\cos 30^0} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

a stąd

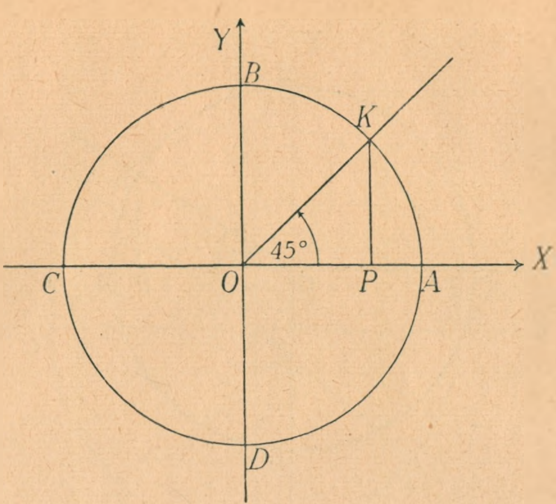
$$\operatorname{ctg} 30^0 = \frac{1}{\operatorname{tg} 30^0} = \sqrt{3}.$$

2) Jeżeli $\sphericalangle ACK = 45^0$ (rys. 36), to trójkąt prostokątny OPK jest równoramienny: $PK = OP$, więc

$$\operatorname{tg} 45^0 = \frac{PK}{OP} = 1.$$

Stąd

$$\operatorname{ctg} 45^0 = \frac{1}{\operatorname{tg} 45^0} = 1$$



Rys. 36

Z trójkąta prostokątnego OPK, na podstawie twierdzenia Pitagorasa, obliczymy $OP = PK$:

$$OP^2 + PK^2 = OK^2, \text{ czyli}$$
$$2OP^2 = R^2, \text{ a stąd}$$
$$OP^2 = \frac{R^2}{2} \text{ i } OP = \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{R\sqrt{2}}{2}.$$

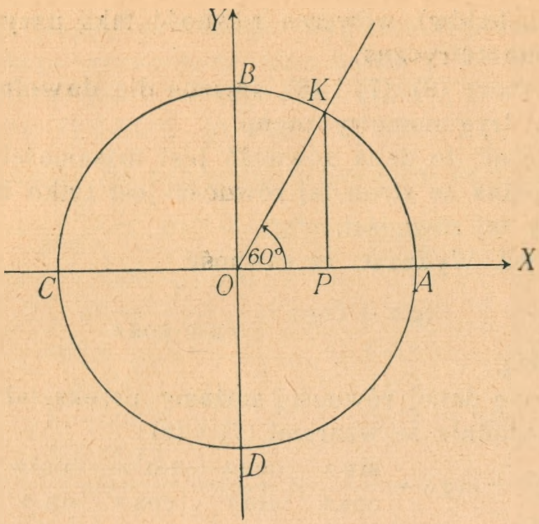
Stąd $\sin 45^0 = \dfrac{PK}{OK} = \dfrac{\frac{R\sqrt{2}}{2}}{R} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. A że $OP = PK$, więc $\cos 45^0 = \dfrac{OP}{OK} = \dfrac{PK}{OK} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

3) Jeżeli $\sphericalangle AOK = 60^0$ (rys. 37), to $\sphericalangle OKP = 30^0$, a w takim razie $OP = \dfrac{CK}{2} = \dfrac{R}{2}$. Stąd $\cos 60^0 = \dfrac{\frac{R}{2}}{R} = \dfrac{1}{2}$.

Z trójkąta prostokątnego OPK, na podstawie twierdzenia Pitagorasa, obliczymy PK:

$$PK = \sqrt{OK^2 - OP^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

Zatem $\sin 60^0 = \dfrac{PK}{OK} = \dfrac{\frac{R\sqrt{3}}{2}}{R}$, czyli $\sin 60^0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



Rys. 37

W takim razie

$$\text{tg } 60^0 = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

$$\text{a ctg } 60^0 = \frac{1}{\text{tg } 60^0} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

W podanej niżej tabeli zestawione są otrzymane wyniki:

	30^0	45^0	60^0
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
ctg	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Tożsamości trygonometryczne

§ 98. Jeżeli pewna równość, zachodząca między dwoma wyrażeniami, z których jedno przynajmniej zawiera funkcje trygonometryczne kąta (lub kątów), jest słuszna dla wszystkich wartości tego kąta (lub kątów), wówczas równość taką nazywamy **tożsamością trygonometryczną.**

Tak np. wzory (6), (7) i (8), słuszne dla **dowolnego** kąta, są tożsamościami trygonometrycznymi.

Aby wykazać, że dana równość jest tożsamością, wystarczy wykazać, że jedna ze stron tej równości jest tylko **inną postacią** drugiej strony tej równości.

Przykład. Wykazać, że równość

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$$

jest tożsamością.

Lewą stronę danej równości możemy przekształcić w sposób następujący, zgodnie ze wzorami (7) i (8):

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos\alpha\cdot\sin\alpha}.$$

Ale, według wzoru (6), licznik otrzymanego ułamka jest równy 1. Zatem

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\cos\alpha\cdot\sin\alpha},$$ co należało wykazać.

Ćwiczenia.

159. Zbudować kąt, którego

a) $\sin\alpha=\frac{2}{3}$; b) $\sin\alpha=-\frac{2}{3}$; c) $\cos\alpha=\frac{4}{5}$

d) $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$; e) $\operatorname{tg}\alpha=2$; f) $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{3}{2}$.

160. Wiedząc, że

a) $\sin\alpha=\frac{2}{3}$; b) $\cos\alpha=\frac{4}{5}$; c) $\operatorname{tg}\alpha=2$;

d) $\operatorname{ctg}\alpha=3$; e) $\sin\alpha=\frac{2}{3}$; f) $\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}$

g) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{2}$; h) $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{2}$; i) $\sin\alpha=-\frac{3}{4}$;

k) $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$; l) $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{4}{5}$; n) $\operatorname{ctg}\alpha=-2$,

obliczyć pozostałe funkcje trygonometryczne kąta α.

161. Wiedząc, że

a) $\sin\alpha=2\cos\alpha$; b) $\cos\alpha=\frac{1}{3}\sin\alpha$; c) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{4}\operatorname{ctg}\alpha$

obliczyć funkcje trygonometryczne kąta α.

162. Uprościć wyrażenia

a) $\frac{\sin 60^0\cdot\sin 30^0\cdot\operatorname{tg}45^0}{\cos 30^0\cdot\operatorname{ctg}45^0}$; b) $\frac{\operatorname{tg}60^0\cdot\operatorname{ctg}30^0}{\operatorname{ctg}60^0\cdot\operatorname{tg}30^0}$;

c) $\frac{\sin 45^0\cdot\operatorname{tg}45^0}{\cos 45^0\cdot\cos 60^0\cdot\operatorname{ctg}30^0}$.

163. Pamiętając, że funkcje trygonometryczne są okresowe, obliczyć funkcje trygonometryczne kątów

a) 390^0; b) 780^0; c) 225^0; d) 240^0;
e) 1140^0; f) 1470^0; g) 405^0; h) 585^0.

164. Wykazać, że następujące równości są tożsamościami:

a) $1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$; b) $1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$;

c) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$;

d) $\frac{1-\sin\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha$; e) $\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$;

f) $\frac{\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}-\frac{\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}=0$; g) $\frac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$;

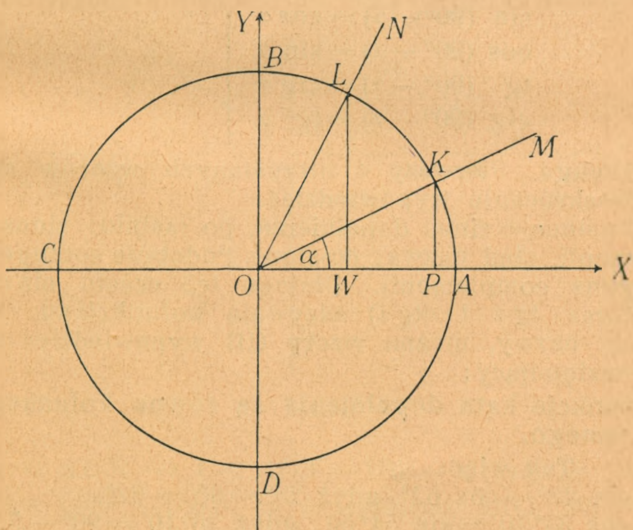
h) $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{2}{\sin\alpha}$;

i) $(1+\sin\alpha)\left(\frac{1}{\cos\alpha}-\operatorname{tg}\alpha\right)=\cos\alpha$; k) $\operatorname{ctg}\alpha+\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1}{\sin\alpha}$.

Tablice funkcji trygonometrycznych.

Funkcje trygonometryczne kąta dopełnienia.

§ 99. Jeżeli suma dwóch kątów jest równa 90^0, wówczas każdy z tych kątów nazywa się **dopełnieniem** drugiego. Jeżeli



Rys. 38

więc dany jest kąt α, to jego dopełnienie jest kątem równym $90^0 - \alpha$.

Niech $\sphericalangle AOM = \alpha$ i $\sphericalangle AON = 90^0 - \alpha$ (rys. 38). Zgodnie z określeniem funkcji trygonometrycznych kąta, mamy:

$$\sin(90^0 - \alpha) = \frac{WL}{OL}$$

i (a

$$\cos(90^0 - \alpha) = \frac{OW}{OL}.$$

Trójkąty prostokątne OKP i OLW są przystające, gdyż $OL = OK$, jako promienie tego samego okręgu koła oraz $\sphericalangle OKP = \sphericalangle AOL = 90^0 - \alpha$. Stąd: $PK = OW$ i $OP = LW$. Podstawiając otrzymane wartości OW i LW do wzorów (a), otrzymamy

$$\sin(90^0 - \alpha) = \frac{OP}{OL} = \frac{OP}{OK} = \cos\alpha$$

$$\cos(90^0 - \alpha) = \frac{PK}{OL} = \frac{PK}{OK} = \sin\alpha,$$

stąd

$$\operatorname{tg}(90^0 - \alpha) = \frac{\sin(90^0 - \alpha)}{\cos(90^0 - \alpha)} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$$

$$\operatorname{ctg}(90^0 - \alpha) = \frac{\cos(90^0 - \alpha)}{\sin(90^0 - \alpha)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Otrzymaliśmy więc następujące zależności między funkcjami trygonometrycznymi kątów dopełniających się:

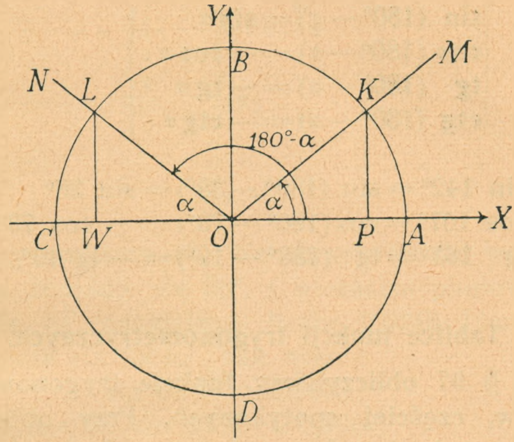
$$\left.\begin{aligned} \sin(90^0 - \alpha) &= \cos\alpha \\ \cos(90^0 - \alpha) &= \sin\alpha \\ \operatorname{tg}(90^0 - \alpha) &= \operatorname{ctg}\alpha \\ \operatorname{ctg}(90^0 - \alpha) &= \operatorname{tg}\alpha \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II)}$$

Uwaga. Pierwszy z otrzymanych wzorów można by w skróceniu wypowiedzieć:
kosinus = sinus dopełnienia, po łacinie: **sinus** complementi, stąd nazwa: co-sinus. Podobnie cotangens = **tangens** complementi. Dlatego też często $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$ (oraz $\operatorname{tg}\alpha$ i $\operatorname{ctg}\alpha$) nazywają kofunkcjami. Używając tej nazwy, można wzory (II) wypowiedzieć w sposób następujący:
funkcje kąta dopełnienia są równe kofunkcjom kąta danego.

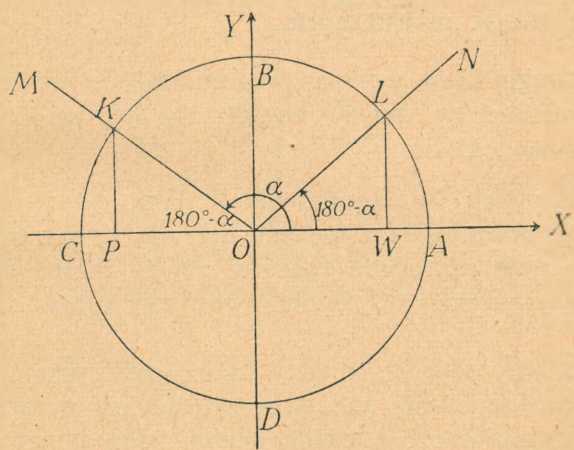
Tak więc:
$\sin 28^0 = \cos 62^0$, gdyż $28^0 = 90^0 - 62^0$;
$\cos 35^0 10' = \sin 54^0 50'$, gdyż $35^0 10' = 90^0 - 54^0 50'$;
$\operatorname{tg} 15^0 27' = \operatorname{ctg} 74^0 33'$.

Funkcje trygonometryczne kąta spełnienia.

§ 100. Jeżeli suma dwóch kątów jest równa 180°, wówczas każdy z tych kątów nazywa się **spełnieniem** drugiego. Jeżeli więc dany jest kąt α, to jego spełnienie jest kątem równym $180^\circ - \alpha$.



Rys. 39



Rys. 40

Niech $\sphericalangle AOM = \alpha$ i $\sphericalangle AON = 180^\circ - \alpha$ (rys. 39 i 40).

Trójkąty OKP i OLW są przystające, gdyż $OK = OL$, jako promienie tego samego okręgu koła oraz $\sphericalangle KOP = \sphericalangle LOW$, gdyż

$\sphericalangle LOW = 180^0 - (180^0 - \alpha) = \alpha$ (rys. 39), albo $\sphericalangle KOP = 180^0 - \alpha$ (rys. 40). Stąd $KP = WL$, tzn. że punkty K i L leżą na prostej, równoległej do osi X, czyli są symetrycznie położone względem osi Y. Zatem zgodnie z zadaniem I § 96, sinusy kątów α i $180^0 - \alpha$ są sobie równe, a pozostałe funkcje trygonometryczne różnią się tylko znakami. Mamy więc:

$$\left.\begin{aligned} \sin(180^0 - \alpha) &= \sin\alpha \\ \cos(180^0 - \alpha) &= -\cos\alpha \\ \operatorname{tg}(180^0 - \alpha) &= -\operatorname{tg}\alpha \\ \operatorname{ctg}(180^0 - \alpha) &= -\operatorname{ctg}\alpha \end{aligned}\right| \qquad \text{(III)}$$

Np.

$$\begin{aligned} \sin 142^0 &= \sin(180^0 - 38^0) = \sin 38^0 \\ \cos 107^0 &= \cos(180^0 - 73^0) = -\cos 73^0 \\ \operatorname{tg} 161^0 &= \operatorname{tg}(180^0 - 19^0) = -\operatorname{tg} 19^0. \end{aligned}$$

Tablice funkcji trygonometrycznych.

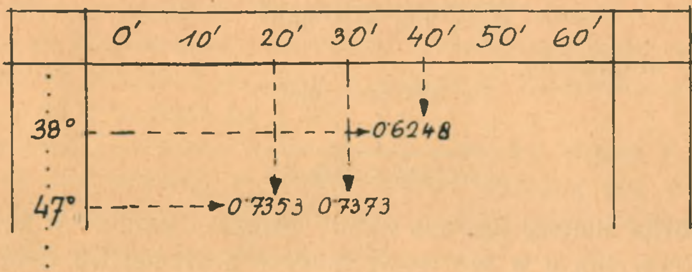
§ 101. W § 97 obliczyliśmy funkcje trygonometryczne niektórych kątów, częściej spotykanych. Przy obliczaniu funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta posługiwać się będziemy specjalnymi tablicami, w których wartości funkcji trygonometrycznych podane są w **przybliżeniu z dokładnością,** przeważnie do **czterech miejsc dziesiętnych.**.

Uwaga. Jest rzeczą zrozumiałą, że w tablicach tych wartości np. sin 0^0, sin 90^0, sin 30^0, tg 45^0 itp. są podane dokładnie.

§ 102. Ponieważ w zagadnieniach, jakie będziemy poruszali, spotkamy się przeważnie z kątami ostrymi i rozwartymi, przeto omówimy przede wszystkim sposoby użycia tablic przy odnajdywaniu wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych i rozwartych.

I) Jak wiemy z § 99, między funkcjami trygonometrycznymi kątów dopełniających się zachodzą zależności, wyrażone wzorami (II). Według tych wzorów, każda liczba, będąca wartością sinusa kąta, jest jednocześnie wartością kosinusa kąta dopełnienia. Podobnie, każda liczba, będąca wartością tangensa kąta, jest jednocześnie wartością kotangensa kąta dopełnienia. Na podstawie tych własności ułożone są tablice wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych.

a) Chcąc znaleźć np. **sin** $38^0 40'$, szukamy kąta 38^0 w kolumnie pierwszej po stronie **lewej** (rys. 41), a w pierwszej rubryce



Rys. 41

poziomej od góry szukamy $40'$. Na skrzyżowaniu wiersza poziomego, w którym znajduje się 38^0, z wierszem pionowym, w którym znajduje się $40'$, znajdziemy liczbę 0,6248. Liczba ta — to wartość przybliżona sin $38^0 40'$. Tak więc

$$\sin 38^0 40' \approx 0{,}6248.$$

Znajdziemy podobnie, że $\sin 69^0 30' \approx 0{,}9367$.

b) Chcąc znaleźć np. sin $47^0 28$, zauważymy, że z nierówności

$$47^0 20' < 47^0 28' < 47^0 30'$$

wynika — na podstawie własności sinusa kąta — nierówność

$$\sin 47^0 20' < \sin 47^0 28' < \sin 47^0 30'.$$

Z tablicy sinusów znajdziemy, że

$$\sin 47^0 20' \approx 0{,}7353$$
$$\sin 47^0 30' \approx 0{,}7373.$$

Zatem, gdy kąt wzrasta od $47^0 20'$ do $47^0 30'$ tj. o $10'$, sinus kąta wzrasta o 0,7373 — 0,7353 tj. o 20 dziesięciotysięcznych. Zakładając, że w przedziale od $47^0 20'$ do $47^0 30'$ przyrosty sinusów są wprost proporcjonalne do przyrostów kątów, obliczymy, że przyrostowi kąta o $1'$ odpowiada przyrost sinusa o $\frac{20}{10}$ dziesięciotysięcznych, a więc przyrostowi kąta o $8'$ odpowiada przyrost sinusa o $8 \cdot \frac{20}{10}$ dziesięciotysięcznych, tj. o 16 dziesięciotysięcznych. Stąd

$$\sin 47^0 28' \approx 0{,}7353 + 0{,}0016 = 0{,}7369.$$

Uwaga. Liczbę 0,0016, którą dodaliśmy do sin $47^0 20'$, aby otrzymać sin $47^0 28'$, nazywamy **poprawką** sinusa, a zastosowana tu metoda nosi nazwę **interpolacji.** Niektóre tablice zawierają poprawki, obliczone w specjalnych rubrykach, oznaczonych napisem „Poprawki“.

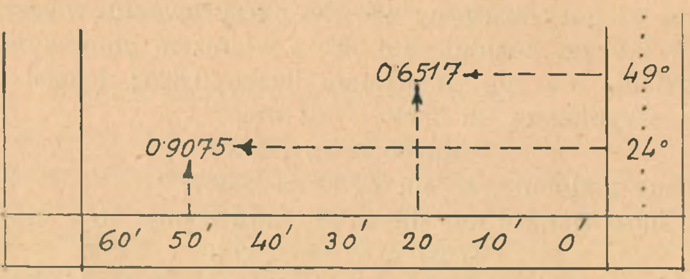
Obliczenia sin 47°28′ zapisujemy w sposób następujący:

$$\left.\begin{array}{lrr} \sin & 47^0 20' \approx & 0{,}7353 \\ P & 8' \approx & 16 \end{array}\right\} +$$
$$\overline{\sin\ 47^0 28' \approx 0{,}7369.}$$

Podobnie znajdziemy

$$\left.\begin{array}{lrr} \sin & 75^0 0' \approx & 0{,}9659 \\ P & 6' \approx & 4 \end{array}\right\} +$$
$$\overline{\sin\ 75^0 6' \approx 0{,}9663.}$$

c) Chcąc znaleźć np. cos 24°50′, szukamy kąta 24° w kolumnie **prawej** (rys. 42), a w pierwszej rubryce poziomej **od dołu** (czyli ostatniej rubryce poziomej) szukamy 50′.



Rys. 42.

Na skrzyżowaniu wiersza poziomego, w którym znajduje się 24° z wierszem pionowym, w którym znajduje się 50′, znajdziemy liczbę 0,9075. Liczba ta — to wartość przybliżona cos 24°50′. Tak więc

$$\cos 24^0 50' \approx 0{,}9075.$$

Podobnie znajdziemy, że $\cos 61^0 10' \approx 0{,}4823$.

d) Chcąc znaleźć np. cos 49°24′, odnajdujemy najpierw cos 49°20′: $\cos 49^0 20' \approx 0{,}6517$. Następnie, rozumując podobnie, jak w p. b), obliczymy poprawkę cos 49°20′ dla 4′ (albo odczytamy tę poprawkę z tablicy) Poprawka ta wynosi 0,0009. **Odejmujemy** ją od wartości cos 49°20′, gdyż jak wiemy z przebiegu zmienności $\cos\alpha$, $\cos\alpha$ maleje, gdy α wzrasta od 0° do 90°.

Obliczenia zapisujemy w sposób następujący:

$$\left.\begin{array}{lrr} \cos & 49^0 20' \approx & 0{,}6517 \\ P & 4' \approx & 9 \end{array}\right\} -$$
$$\overline{\cos\ 49^0 24' \approx 0{,}6508}$$

e) Sposób odnajdywania wartości przybliżonych tangensa i kotangensa kąta ostrego jest taki sam, jak przy odnajdywaniu wartości sinusa i kosinusa. Przypomnimy tylko, że

1⁰ szukając wartości **tangensa**, szukamy **stopni** w pierwszej kolumnie po stronie **lewej**, **dziesiątki minut** odczytujemy w pierwszej rubryce poziomej **od góry**, a poprawki **dodajemy**, gdyż $\operatorname{tg}\alpha$ wzrasta, gdy α wzrasta (p. § 93).

2⁰ szukając wartości **kotangensa**, szukamy **stopni** w kolumnie po stronie **prawej**, **dziesiątki minut** odczytujemy w pierwszej rubryce poziomej **od dołu**, a poprawki **odejmujemy**, gdyż $\operatorname{ctg}\alpha$ maleje, gdy α wzrasta (p. § 94).

Tak np. znajdziemy, że

$$\left.\begin{array}{lrr} \operatorname{tg} & 76^0 50' \approx & 4{,}275 \\ P & 8' \approx & 43 \end{array}\right\} + \qquad \left.\begin{array}{lrr} \operatorname{ctg} & 21^0 40' \approx & 2{,}517 \\ P & 4' \approx & 9 \end{array}\right\} -$$

$$\begin{array}{lrr} \operatorname{tg} & 76^0 58' \approx & 4{,}318 \end{array} \qquad \begin{array}{lrr} \operatorname{ctg} & 21^0 44' \approx & 2{,}508 \end{array}$$

Uwaga. Wartości tangensów kątów, większych od 60^0, oraz kotangensów kątów, mniejszych od 30^0, podane są w tablicach w przybliżeniu z dokładnością do trzech (albo dwóch) miejsc dziesiętnych. Odpowiednie więc poprawki wyrażają części **tysiączne** (albo setne).

II) Wiemy, że każdemu kątowi rozwartemu odpowiada jeden tylko kąt ostry, który jest spełnieniem tego kąta rozwartego. Np. kąt 23^0 jest spełnieniem kąta 157^0; kąt 48^0 jest spełnieniem kąta 132^0 itd. A między funkcjami trygonometrycznymi kątów spełniających zachodzą zależności, wyrażone wzorami (III). Z tych wzorów wynika zatem, że **obliczanie funkcji trygonometrycznych kąta rozwartego sprowadza się do obliczenia funkcji trygonometrycznych kąta ostrego, będącego spełnieniem kąta rozwartego.**

Chcąc np. obliczyć $\sin 135^0 43'$, zauważymy, że

$$135^0 43' = 180^0 - 44^0 17'.$$

Zatem według wzorów (III)

$$\sin 135^0 43' = \sin (180^0 - 44^0 17') = \sin 44^0 17'.$$

Z tablic odnajdziemy, że $\sin 44^0 17' \approx 0{,}6982$. Zatem

$$\mathbf{\sin 135^0 43' \approx 0{,}6982.}$$

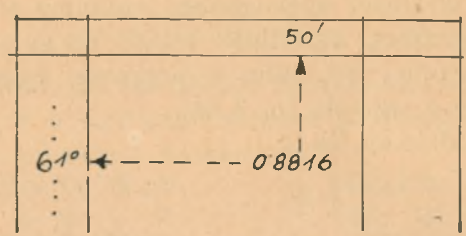
Podobnie np. $\cos 128^0 15' = \cos (180^0 - 51^0 45') = -\cos 51^0 45'$, zgodnie z wzorami (III). Z tablic odnajdziemy, że $\cos 51^0 45' \approx$ $\approx 0{,}6191$, więc

$$\cos 128^0 15' \approx -0{,}6191.$$

§ 103. Przy pomocy tablic rozwiązać możemy zagadnienie odwrotne, tj. znaleźć kąt, gdy mamy wartość jednej z jego funkcji trygonometrycznych.

a) Jeżeli np. $\sin x = 0{,}8816$, wówczas z tablicy sinusów znajdziemy, że liczba ta odpowiada kątowi $61^\circ 50'$ (rys. 43). Zatem

$$x \approx 61^\circ 50'.$$



Rys. 43

b) Jeżeli np. $\sin x = 0{,}4368$, wówczas w tablicy sinusów liczby 0,4368 nie odnajdziemy. Zauważymy jednak, że liczbą najbliższą, ale mniejszą od 0,4368 jest liczba $0{,}4358 \approx \sin 23^\circ 50'$ a liczbą najbliższą, ale większą od 0,4368, jest liczba $0{,}4384 \approx \sin 26^\circ$. Zatem, gdy sinus wzrasta o $0{,}4384 - 0{,}4358$, tj. o 0,0026, to kąt wzrasta o 10'. Zakładając, że i tu przyrosty kątów są wprost proporcjonalne do przyrostów sinusów, obliczymy, że przyrostowi sinusa o 0,0001 odpowiada przyrost kąta o $\frac{10'}{0{,}0026}$, a przyrostowi sinusa o 0,0010 $(= 0{,}4368 - 0{,}4358)$ odpowiada przyrost kąta o $\frac{10' \cdot 0{,}0010}{0{,}0026} = \left(\frac{100}{26}\right)' \approx 3',8$ tj. po zaokrągleniu: 4'. Stąd

$$0{,}4368 \approx \sin(25^\circ 50' + 4'), \text{ czyli}$$
$$x \approx 25^\circ 50'.$$

Uwaga. Jeżeli tablice zawierają rubrykę poprawek, wówczas poprawkę kąta odczytujemy bezpośrednio z tej rubryki.

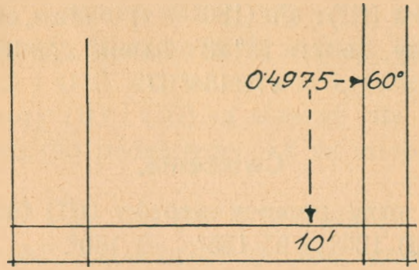
Zapis obliczenia jest następujący:

$$\sin x \approx 0{,}4368$$
$$\left.\begin{array}{rr} 4358 \;— & 23^\circ 50' \\ \hline 10 \;— & 4' \end{array}\right\} +$$
$$x \approx 23^\circ 54'.$$

W analogiczny sposób odnajdujemy kąt, gdy mamy wartość jego tangensa.

c) Jeżeli np. $\cos x = 0{,}4975$, wówczas z tablicy kosinusów (napis umieszczony **u dołu** tablicy sinusów) znajdziemy, że liczba ta odpowiada kątowi $60^0 10'$ (rys. 44). Zatem $x \approx 60^0 10'$.

Uwaga. Stopnie odczytujemy w kolumnie **po prawej** stronie, a dziesiątki minut w pierwszej rubryce poziomej od **dołu**.



Rys. 44

d) Jeżeli np. $\cos x = 0{,}8532$, wówczas w tablicy kosinusów liczby 0,8532 nie odnajdziemy. Zauważymy jednak, że liczbą najbliższą, ale mniejszą od 0,8532 jest liczba 0,8526 i że odpowiada ona kątowi $31^0 30'$. Różnica między liczbą daną (0,8532) i odczytaną z tablic (0,8526) wynosi: $0{,}8532 - 0{,}8526 = 0{,}0006$. Rozumując, jak w p. b), obliczymy (albo odczytamy z tablicy), że poprawka kąta wynosi $4'$.

Ponieważ z przebiegu zmienności $\cos\alpha$ wynika, że kąt maleje, gdy kosinus wzrasta, zatem poprawkę **odejmujemy** od $31^0 30'$:

$$x \approx 31^0 30' - 4' = 31^0 26'.$$

Zapis obliczeń jest następujący:

$$\cos x = 0{,}8532$$

$$\left.\begin{array}{rcr} \underline{8526} & - & 21^0 30' \\ 6 & - & 4' \end{array}\right\} -$$

$$x \approx 31^0 26'.$$

W analogiczny sposób odnajdujemy kąt, gdy znamy wartość jego kotangensa.

P r z y k ł a d I. Znaleźć kąt rozwarty, którego tangens jest równy $-1{,}4028$.

Jeżeli x oznacza kąt szukany, to musi istnieć taki kąt ostry α, że $x = 180^0 - \alpha$. Zatem $\operatorname{tg} x = -1{,}4028$, więc $\operatorname{tg}(180^0 - \alpha) = -1{,}4028$, czyli według wzoru (III): $-\operatorname{tg}\alpha = -1{,}4028$, skąd $\operatorname{tg}\alpha = 1{,}4028$. Z tablic znajdziemy, że $\alpha \approx 54^0 31'$. Zatem

$$x \approx 180^0 - 54^0 31'; \quad x \approx 125^0 29'.$$

P r z y k ł a d II. Znaleźć kąt rozwarty, którego sinus jest równy 0,4287.

Jeżeli przez α oznaczymy kąt spełniający szukany kąt x, to $x = 180^0 - \alpha$. Ponieważ $\sin x = 0{,}4287$, więc $\sin(180^0 - \alpha) = 0{,}4287$. Ale według wzorów (III): $\sin(180^0 - \alpha) = \sin\alpha$, czyli $\sin\alpha = 0{,}4287$. Z tablic znajdziemy, że $\alpha \approx 25^0 23'$. Zatem $x \approx 180^0 - 25^0 23'$;

$$x \approx 154^0 37'.$$

Ćwiczenia.

165. Obliczyć przy pomocy wzorów (III) funkcje trygonometryczne kątów: a) 120^0; b) 135^0; c) 150^0.

166. Obliczyć przy pomocy tablic:
a) $\cos 38^0 23'$; b) $\operatorname{tg} 43^0 51'$; c) $\sin 72^0 3'$; d) $\operatorname{ctg} 22^0 11'$;
e) $\cos 60^0 5'$; f) $\operatorname{tg} 45^0 12'$; g) $\sin 83^0 52'$; h) $\operatorname{ctg} 51^0 44'$;
i) $\cos 12^0 45'$; k) $\operatorname{ctg} 79^0 8'$; l) $\operatorname{tg} 77^0 55'$.

167. Obliczyć przy pomocy tablic:
a) $\sin 127^0 23'$; b) $\cos 139^0 42'$; c) $\operatorname{tg} 151^0 8'$;
d) $\operatorname{ctg} 155^0 21'$; e) $\sin 109^0 59'$; f) $\cos 93^0 47'$;
g) $\operatorname{tg} 178^0 2'$; h) $\operatorname{ctg} 93^0 31'$; i) $\sin 92^0 35'$.

168. Znaleźć kąt ostry x, wiedząc, że:
a) $\operatorname{tg} x = 0{,}5213$; b) $\operatorname{ctg} x = 1{,}6128$; c) $\sin x = 0{,}4391$;
d) $\cos x = 0{,}3577$; e) $\operatorname{tg} x = 1{,}2217$; f) $\cos x = 0{,}0175$.

169. Znaleźć kąt ostry, wiedząc, że:
a) $\operatorname{tg} x = \frac{2}{3}$; b) $\sin x = \frac{3}{7}$; c) $\cos x = \frac{11}{14}$; d) $\operatorname{ctg} x = 1\frac{3}{8}$;
e) $\sin x = \frac{1}{3}$; f) $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{3}$ g) $\operatorname{tg} x = \sqrt{2}$; h) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3} - 1$.

W s k a z ó w k a: obliczyć rozwinięcia dziesiętne ułamków (wzgl. pierwiastków) z dokładnością do 4 miejsc dziesiętnych.

170. Znaleźć kąt rozwarty y, wiedząc, że:
a) $\sin y = 0{,}3895$; b) $\sin y = \frac{3}{16}$; c) $\cos y = -\frac{7}{8}$;
d) $\cos y = -0{,}5213$; e) $\operatorname{tg} y = -0{,}4328$;
f) $\operatorname{tg} y = -1\frac{2}{3}$; g) $\operatorname{ctg} y = -1{,}2934$; h) $\operatorname{ctg} y = -\frac{5}{6}$.

Wzory redukcyjne.

§ 104. Omówione w §§ poprzednich tablice funkcji trygonometrycznych zawierają wartości tych funkcji tylko kątów ostrych. Stosując jednak wzory (III), możemy przy pomocy tych tablic obliczać funkcje trygonometryczne kątów rozwartych. Poznamy obecnie wzory, które pozwolą obliczać funkcje trygonometryczne dowolnego kąta.

Podane w § 99 wzory (II) wyprowadzone zostały w założeniu, że kąt α jest ostry, a wzory (III) § 100 — w założeniu, że kąt α jest ostry lub rozwarty. Rozumowania jednak, które doprowadziły nas do wzorów (II) i (III) są słuszne dla każdego kąta i dlatego też otrzymane wzory (II) i (III) są słuszne dla **dowolnego** kąta.

a) We wzorach (II) podstawmy $-\beta$ na miejsce α. Otrzymamy wówczas:
$\sin(90^0+\beta)=\cos(-\beta)$; $\cos(90^0+\beta)=\sin(-\beta)$; $\operatorname{tg}(90^0+\beta)=$ $=\operatorname{ctg}(-\beta)$; $\operatorname{ctg}(90^0+\beta)=\operatorname{tg}(-\beta)$. Ale zgodnie z wzorami (I) § 83 mamy

$\cos(-\beta)=\cos\beta$; $\sin(-\beta)=-\sin\beta$; $\operatorname{ctg}(-\beta)=-\operatorname{ctg}\beta$; $\operatorname{tg}(-\beta)=-\operatorname{tg}\beta$. Zatem

$$\left.\begin{aligned}\sin(90^0+\beta)&=\cos\beta\\ \cos(90^0+\beta)&=-\sin\beta\\ \operatorname{tg}(90^0+\beta)&=-\operatorname{ctg}\beta\\ \operatorname{ctg}(90^0+\beta)&=-\operatorname{tg}\beta\end{aligned}\right\}\qquad\text{(IV)}.$$

b) We wzorach (III) podstawmy $-\beta$ na miejsce α. Otrzymamy
$\sin(180^0+\beta)=\sin(-\beta)$; $\cos(180^0+\beta)=-\cos(-\beta)$;
$\operatorname{tg}(180^0+\beta)=-\operatorname{tg}(-\beta)$; $\operatorname{ctg}(180^0+\beta)=-\operatorname{ctg}(-\beta)$.
Ale zgodnie z wzorami (I) § 83 mamy
$\sin(-\beta)=-\sin\beta$; $-\cos(-\beta)=-\cos\beta$;
$-\operatorname{tg}(-\beta)=-(-\operatorname{tg}\beta)=\operatorname{tg}\beta$; $-\operatorname{ctg}(-\beta)=-(-\operatorname{ctg}\beta)=$ $=\operatorname{ctg}\beta$.

Zatem

$$\left.\begin{aligned}\sin(180^0+\beta)&=-\sin\beta\\ \cos(180^0+\beta)&=-\cos\beta\\ \operatorname{tg}(180^0+\beta)&=\operatorname{tg}\beta\\ \operatorname{ctg}(180^0+\beta)&=\operatorname{ctg}\beta\end{aligned}\right\}\qquad\text{(V)}.$$

c) We wzorach (V) podstawmy $180^0-\gamma$ na miejsce β. Otrzymamy:
$\sin(360^0-\gamma)=-\sin(180^0-\gamma)$; $\cos(360^0-\gamma)=-\cos(180^0-\gamma)$;
$\operatorname{tg}(360^0-\gamma)=\operatorname{tg}(180^0-\gamma)$; $\operatorname{ctg}(360^0-\gamma)=\operatorname{ctg}(180^0-\gamma)$.

Ale zgodnie z wzorami (III) § 100 mamy

$$-\sin(180^0-\gamma)=-\sin\gamma;\quad -\cos(180^0-\gamma)=-(-\cos\gamma)=\cos\gamma.$$
$$\operatorname{tg}(180^0-\gamma)=-\operatorname{tg}\gamma;\quad \operatorname{ctg}(180^0-\gamma)=-\operatorname{ctg}\gamma.$$

Zatem

$$\left.\begin{aligned}\sin(360^0-\gamma)&=-\sin\gamma\\ \cos(360^0-\gamma)&=\cos\gamma\\ \operatorname{tg}(360^0-\gamma)&=-\operatorname{tg}\gamma\\ \operatorname{ctg}(360^0-\gamma)&=-\operatorname{ctg}\gamma\end{aligned}\right| \qquad (\mathrm{VI}).$$

§ 105. Jeżeli kąty α, β, γ, występujące we wzorach (III), (IV), (V) i (VI) oznaczają kąty I ćwiartki, to kąty $90^0+\beta$ i $180^0-\alpha$ oznaczają kąty II ćwiartki, kąt $180^0+\beta$ oznacza kąt III ćwiartki, a kąt $360^0-\gamma$ oznacza kąt IV ćwiartki. Zatem przy pomocy wzorów (III), (IV), (V) i (VI) możemy sprowadzić obliczenia funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta do obliczenia funkcji trygonometrycznych kąta I ćwiartki. O wzorach (III), (IV), (V) i (VI) mówimy, że **redukują** (sprowadzają) dowolne kąty do kątów I ćwiartki i dlatego wzory te nazywamy **wzorami redukcyjnymi**.

Przykład I. Obliczyć funkcje trygonometryczne kąta 234^0. Ponieważ $234^0=180^0+54^0$, zatem według wzorów (V) $\sin 234^0=\sin(180^0+54^0)=-\sin 54^0$; $\cos 234^0=\cos(180^0+54^0)=-\cos 54^0$; $\operatorname{tg} 234^0=\operatorname{tg}(180^0+54^0)=\operatorname{tg} 54^0$; $\operatorname{ctg} 234^0=\operatorname{ctg}(180^0+54^0)=\operatorname{ctg} 54^0$. Z tablic znajdziemy, że

$\sin 234^0=-\sin 54^0\approx-0{,}8090$; $\cos 234^0=-\cos 54^0\approx-0{,}5878$; $\operatorname{tg} 234^0=\operatorname{tg} 54^0\approx 1{,}3764$; $\operatorname{ctg} 234^0=\operatorname{ctg} 54^0\approx 0{,}7265$.

Przykład II. Obliczyć funkcje trygonometryczne kąta 1005^0.

Jak wiemy z § 77 każdy kąt można przedstawić jako sumę wielokrotności 360^0 i kąta, zawartego między 0^0 a 360^0. Zatem $1005^0=2.360^0+285^0$. Stąd

$$\sin 1005^0=\sin(2.360^0+285^0);\quad \cos 1005^0=\cos(2.360^0+285^0);$$
$$\operatorname{tg} 1005^0=\operatorname{tg}(2.360^0+285^0)=\operatorname{tg}(4.180^0+285^0);$$
$$\operatorname{ctg} 1005^0=\operatorname{ctg}(2.360^0+285^0)=\operatorname{ctg}(4.180^0+285^0).$$

Ponieważ sinus i kosinus kąta są funkcjami okresowymi o okresie 360^0 (§§ 85 i 88), a tangens i kontangens kąta — funkcjami okresowymi o okresie 180^0 (§§ 91 i 94), zatem

$\sin 1005^0=\sin 285^0$; $\cos 1005^0=\cos 285^0$; $\operatorname{tg} 1005^0=\operatorname{tg} 285^0$; $\operatorname{ctg} 1005^0=\operatorname{ctg} 285^0$.

Ale $285^0 = 360^0 - 75^0$, zatem, zgodnie z wzorami (VI) otrzymamy:

$$\sin 1005^0 = \sin (360^0 - 75^0) = -\sin 75^0$$
$$\cos 1005^0 = \cos (360^0 - 75^0) = \cos 75^0$$
$$\text{tg } 1005^0 = \text{tg } (360^0 - 75^0) = -\text{tg } 75^0$$
$$\text{ctg } 1005^0 = \text{ctg } (360^0 - 75^0) = -\text{ctg } 75^0.$$

Z tablic znajdziemy, że

$$\sin 1005^0 = -\sin 75^0 \approx -0{,}9659,$$
$$\cos 1005^0 = \cos 75^0 \approx 0{,}2588,$$
$$\text{tg } 1005^0 = -\text{tg } 75^0 \approx -3{,}732,$$
$$\text{ctg } 1005^0 = -\text{ctg } 75^0 \approx -0{,}2679.$$

§ 106. Wiemy z § 96, że danej liczbie s, zawartej między -1 a $+1$, odpowiadają dwa kąty, zawarte między 0^0 a 360^0, których sinusy są sobie równe i każdy z nich ma wartość s. Ze wzorów (III) wiemy, że $\sin \alpha = \sin (180^0 - \alpha)$. Jeżeli więc α jest mniejszym kątem, którego sinus jest równy s, to drugim, większym kątem jest $180^0 - \alpha$. Inaczej mówiąc, równanie

$$\sin x = s$$

posiada dwa rozwiązania zawarte między 0^0 a 360^0: jeżeli jednym rozwiązaniem jest $x = \alpha$, to drugim jest $x = 180^0 - \alpha$. Ale $\sin x$ jest funkcją okresową o okresie 360^0, zatem każdy z kątów $n \cdot 360^0 + \alpha$ i $n \cdot 360^0 + 180^0 - \alpha$, ($n$ — dowolna liczba całkowita) również ma sinus równy s. Zatem równanie $\sin x = s$ posiada nieskończenie wiele rozwiązań, tzn. że istnieje nieskończenie wiele kątów, spełniających równanie $\sin x = s$ (por. ćw. 150). Kąty te wyrażone są wzorami:

$$x_1 = n \cdot 360^0 + \alpha \text{ i } x_2 = n \cdot 360^0 + 180^0 - \alpha.$$

Kąt α nazywamy **pierwiastkiem głównym** danego równania.

P r z y k ł a d. Równanie $\sin x = \frac{1}{2}$ posiada jako jedno rozwiązanie $x = 30^0$ (p. § 97[1]). Wobec tego $x = 180^0 - 30^0$ czyli $x = 150^0$ jest również rozwiązaniem danego równania. Wszystkie rozwiązania danego równania wyrażone są zatem wzorami:

$$x_1 = n \cdot 360^0 + 30^0 \text{ i } x_2 = n \cdot 360^0 + 150^0.$$

$x = 30^0$ jest pierwiastkiem głównym danego równania.

§ 107. Wiemy z § 96, że danej liczbie c, zawartej między -1 a $+1$, odpowiadają dwa kąty, zawarte między 0^0 a 360^0, których kosinusy są sobie równe i każdy z nich ma wartość c. Ze wzorów (VI) wiemy, że $\cos \alpha = \cos (360^0 - \alpha)$. Jeżeli więc α jest mnie szym kątem, którego kosinus jest równy c, to drugim, większym kątem, jest $360^0 - \alpha$. Inaczej mówiąc, równanie

$$\cos x = c$$

posiada dwa rozwiązania zawarte między 0^0 a 360^0: jeżeli jednym jest $x = \alpha$, to drugim jest $x = 360^0 - \alpha$. Ale $\cos x$ jest funkcją okresową o okresie 360^0, zatem każdy z kątów

$n \cdot 360^0 + \alpha$ i $n \cdot 360^0 + 360^0 - \alpha$ (n — dowolna liczba całkowita)

posiada kosinus równy c. Zatem równanie $\cos x = c$ posiada nieskończenie wiele rozwiązań, tzn. że istnieje nieskończenie wiele kątów, spełniających równanie $\cos x = c$ (por. ćw. 155). Kąty te wyrażone są wzorami

$$x_1 = n \cdot 360^0 + \alpha \text{ i } x_2 = n \cdot 360^0 + 360^0 - \alpha.$$

Kąt α nazywamy **pierwiastkiem głównym** równania danego.

Przykład. Równanie $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ posiada jako jedno rozwiązanie $x = 45^0$ (§ 97(2)). Wobec tego $x = 360^0 - 45^0$ czyli $x = 315^0$ jest również rozwiązaniem danego równania. Wszystkie rozwiązania danego równania wyrażone są zatem wzorami:

$$x_1 = n \cdot 360^0 + 45^0 \text{ i } x_2 = n \cdot 360^0 + 315^0.$$

$x = 45^0$ jest pierwiastkiem głównym danego równania.

§ 108. Rozumując, jak w §§ poprzednich, dojdziemy do wniosku, że równanie $\operatorname{tg} x = t$ (lub równanie $\operatorname{ctg} x = k$) posiada nieskończenie wiele rozwiązań (por. ćw. 158), wyrażonych wzorem

$$x = n \cdot 180^0 + \alpha.$$

I w tym wypadku kąt α nazywamy **pierwiastkiem głównym** równania $\operatorname{tg} x = t$ lub $\operatorname{ctg} x = k$.

Przykład. Równanie $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ posiada jako rozwiązanie, $x = 60^0$ (§ 97(3)). Wobec tego wszystkie rozwiązania danego równania są wyrażone wzorem

$$x = n \cdot 180^0 + 60^0,$$

gdzie 60^0 jest pierwiastkiem głównym danego równania.

Ćwiczenia.

171. Obliczyć funkcje trygonometryczne kątów: a) 210^0; b) 225^0; c) 240^0; d) 300^0; e) 315^0; f) 330^0.

172. Obliczyć wartość wyrażenia

a) $\sin 120^0 \cdot \operatorname{tg} 240^0$; b) $\cos 120 \cdot \operatorname{tg} 225^0$;

c) $\dfrac{\operatorname{tg} 150^0 \cdot \cos 315^0}{\operatorname{ctg} 210^0 \cdot \sin 300^0}$; d) $\sin 210^0 + \cos 300^0 + \operatorname{tg} 225^0 + \operatorname{ctg} 315^0$.

173. Sprowadzić do prostszej postaci wyrażenia:

a) $\sin(180^0 - \alpha) + \sin(180^0 + \alpha) - \sin(360^0 - \alpha)$;

b) $-\sin(90^\circ-\alpha)\cdot\cos(180^\circ+\alpha)+\sin(180^\circ-\alpha)\cdot\sin(360^\circ+\alpha)$;

c) $\dfrac{\operatorname{tg}(180^\circ-\alpha)\cdot\cos(360^\circ-\alpha)}{\operatorname{ctg}(180^\circ+\alpha)\cdot\sin(180^\circ-\alpha)}$;

d) $\dfrac{\operatorname{tg}(90^\circ+\beta)\cdot\cos(90^\circ-\beta)\cdot\sin(180^\circ+\beta)}{\cos(360^\circ+\beta)\cdot\operatorname{ctg}(180^\circ-\beta)\cdot\sin(360^\circ-\beta)}$.

174. Wykazać, że następujące równości są tożsamościami:
a) $\cos(90^\circ+x)+\cos(90^\circ-x)+\sin(180^\circ+x)=\sin(-x)$;
b) $\operatorname{ctg}(360^\circ-y)+\operatorname{ctg}(360^\circ+y)-\operatorname{tg} y=\operatorname{tg}(-y)$;
c) $\sin(180^\circ-x)+\cos(90^\circ+x)-\sin(180^\circ+x)-\sin(-x)=$ $=2\sin x$.

175. Obliczyć przy pomocy tablic
a) $\sin 237^\circ 45'$; b) $\cos 300^\circ 27'$; c) $\operatorname{tg} 257^\circ 22'$;
d) $\operatorname{ctg} 325^\circ 14'$; e) $\sin 285^\circ 59'$; f) $\cos 189^\circ 37'$;
g) $\operatorname{tg} 303^\circ 19'$; h) $\operatorname{ctg} 260^\circ 53'$.

176. Przy pomocy tablic rozwiązać równania
a) $\sin x=\frac{5}{11}$; b) $\cos y=\frac{7}{12}$; c) $\operatorname{tg} z=\frac{15}{13}$ i podać wzory, wyrażające wszystkie kąty, spełniające dane równania.

177. Podać wzory, wyrażające wszystkie kąty, spełniające równania
a) $\sin x=-0{,}3934$; b) $\cos x=-0{,}4105$; c) $\operatorname{tg} x=-1{,}2109$.

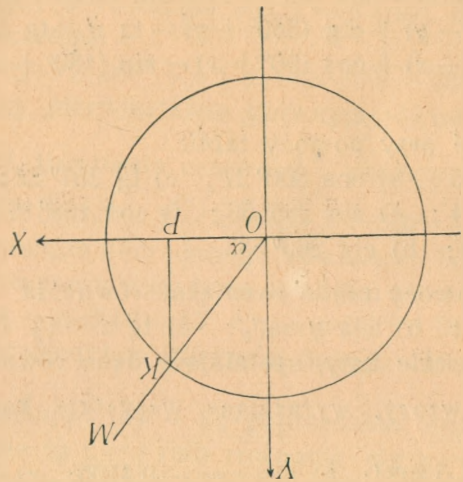
Część III. Rozwiązywanie trójkątów.

§ 109. Wiemy z geometrii, że jeżeli dane są trzy elementy trójkąta, w tym przynajmniej jeden bok, wówczas możemy zbudować ten trójkąt, tzn. wykreślić pozostałe, a więc nieznane jego elementy. Ponieważ jednak każdemu odcinkowi i kątowi odpowiada liczba, wyrażająca miarę tego odcinka lub kąta w odpowiednich jednostkach, zatem budowa, albo inaczej konstrukcja trójkąta może być zastąpiona obliczaniem nieznanych jego elementów w odpowiednich jednostkach miary. Takie właśnie obliczanie nieznanych elementów trójkąta nazywa się **rozwiązywaniem trójkąta.**

Rozwiązywanie trójkątów prostokątnych.

Zależności (związki) między bokami i kątami trójkąta prostokątnego.

§ 110. Niech dany będzie prostokątny układ osi spółrzędnych XOY (rys. 45) Z punktu 0, jako ze środka, zakreślmy okrąg koła o dowolnym promieniu R i poprowadźmy półprostą OM w I ćwiartce płaszczyzny. Oznaczmy przez α otrzymany kąt ostry XOM. Jeżeli wyznaczymy spółrzędne punktu przecięcia K półprostej OM z okręgiem koła ($x = OP$; $y = PK$), wówczas trójkąt OKP będzie trójkątem prostokątnym ($\sphericalangle\ KPO = 90^0$), w którym $\sphericalangle\,\alpha$ jest przeciwległy przyprostokątnej KP, a przyległy do przyprostokątnej OP.



Rys. 45

Zgodnie z określeniem funkcji trygonometrycznych mamy:

$$\frac{KP}{OK} = \sin\alpha, \text{ a stąd } \mathrm{KP} = \mathrm{OK}\cdot\sin\alpha \qquad (9)$$

$$\frac{OP}{OK} = \cos\alpha, \text{ „ „ } \mathrm{OP} = \mathrm{OK}\cdot\cos\alpha \qquad (10)$$

$$\frac{KP}{OP} = \mathrm{tg}\,\alpha, \text{ „ „ } \mathrm{KP} = \mathrm{OP}\cdot\mathrm{tg}\,\alpha \qquad (11)$$

$$\frac{OP}{KP} = \mathrm{ctg}\,\alpha, \text{ „ „ } \mathrm{OP} = \mathrm{KP}\cdot\mathrm{ctg}\,\alpha \qquad (12)$$

tzn.

(9) **długość przyprostokątnej jest równa iloczynowi długości przeciwprostokątnej przez sinus kąta przeciwległego tej przyprostokątnej;**

(10) **długość przyprostokątnej jest równa iloczynowi długości przeciwprostokątnej przez kosinus kąta przyległego do tej przyprostokątnej;**

(11) **długość przyprostokątnej jest równa iloczynowi tangensa kąta jej przeciwległego przez długość drugiej przyprostokątnej;**

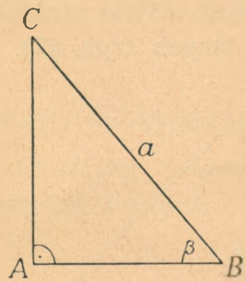
(12) **długość przyprostokątnej jest równa iloczynowi kotangensa kąta do niej przyległego przez długość drugiej przyprostokątnej.**

Te cztery otrzymane i sformułowane wzory stanowią układ podstawowych związków między elementami trójkąta prostokątnego.

Rozwiązywanie trójkątów prostokątnych.

§ 111. Rozróżniamy w geometrii cztery podstawowe (elementarne) konstrukcje trójkątów prostokątnych. Tym czterem konstrukcjom podstawowym odpowiadają cztery podstawowe wypadki rozwiązywania trójkątów prostokątnych.

Wypadek I. Rozwiązać trójkąt prostokątny, mając przeciwprostokątną i jeden z kątów ostrych (rys. 46).



Rys. 46

Rozwiązanie:

Dane: $\sphericalangle A = 90^\circ$; $CB = a$; $\sphericalangle B = \beta$.

Znaleźć: $\sphericalangle C$; $AB = c$; $AC = b$.

Kąt C znajdziemy z równania:

$$\sphericalangle C + \beta = 90^\circ, \text{ stąd } \sphericalangle C = 90^\circ - \beta.$$

Ponieważ β jest kątem przyległym do przyprostokątnej c, więc na mocy wzoru (10)

$$c = a \cdot \cos \beta.$$

Ponieważ β jest kątem przeciwległym przyprostokątnej b, więc na mocy wzoru (9)

$$b = a \cdot \sin \beta.$$

Zastosowanie liczbowe. Jeżeli np.: $a = 10\ dcm$; $\beta = 57^0 38'$, to przy pomocy tablic funkcji trygonometrycznych możemy obliczyć pozostałe elementy trójkąta.

Obliczenia przeprowadzamy w sposób następujący:

Obliczenie $\sphericalangle$ C:

$$\sphericalangle C = 90^0 - 57^0 38' = 32^0 22'.$$

Obliczenie c:

$c = 10 \cdot \cos 57^0 38'$;

$$\left.\begin{array}{lr} \cos 57^0 30' \approx & 0{,}5373 \\ P \quad 8' \approx & 20 \end{array}\right\} -$$

$$\cos 57^0 38' \approx 0{,}5353$$

$c \approx 10 \cdot 0{,}5353$

$\mathbf{c \approx 5{,}353\ dcm}$

Obliczenie b:

$b \approx 10 \cdot \sin 57^0 38'$;

$$\left.\begin{array}{lr} \sin 57^0 30' \approx & 0{,}8434 \\ P \quad 8' \approx & 13 \end{array}\right\} +$$

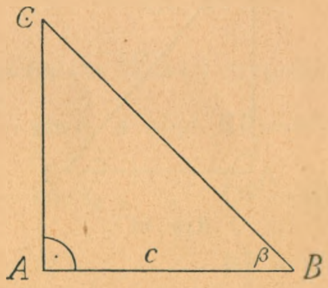
$$\sin 57^0 38' \approx 0{,}8447$$

$b \approx 10 \cdot 0{,}8447$

$\mathbf{b \approx 8{,}447\ dcm}$

Odpowiedź: $\sphericalangle C = 32^0 22'$; $c \approx 5{,}353\ dcm$; $b \approx 8{,}447\ dcm$.

Wypadek II. Rozwiązać trójkąt prostokątny, mając przyprostokątną i jeden z kątów ostrych (rys. 47).



Rys. 47

Rozwiązanie:

Dane $\sphericalangle A = 90^0$; $AB = c$; $\sphericalangle B = \beta$.

Znaleźć: $\sphericalangle C$; $AC = b$; $CB = a$.

Kąt C znajdziemy z równania

$$\sphericalangle C + \beta = 90^0, \text{ stąd } \sphericalangle C = 90^0 - \beta.$$

Ponieważ β jest kątem przeciwległym przyprostokątnej b, więc według wzoru (11)

$$\mathbf{b = c \cdot tg\,\beta.}$$

Ponieważ β jest kątem przyległym do danej przyprostokątnej c, więc według wzoru (10)

$c = a \cdot \cos\beta$. Z tego równania znajdziemy

$$a = \frac{c}{\cos\beta}.$$

Oczywiście przeciwprostokątną a można było obliczyć, stosując twierdzenie Pitagorasa:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}.$$

Zastosowanie liczbowe: $c = 20\,dcm$; $\sphericalangle B = 54^0\,19'$.

Obliczenie $\sphericalangle$ C:

$$\sphericalangle C = 90^0 - 54^0\,19' = 35^0\,41'.$$

Obliczenie b:

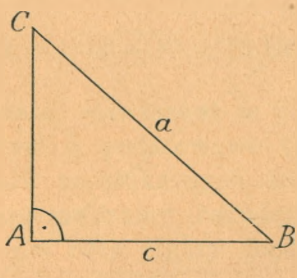
$b = 20 \cdot \mathrm{tg}\,54^0\,19'$;	$\mathrm{tg}\,54^0\,10' \approx 1{,}3848$
$b \approx 20 \cdot 1{,}3926$	$P \quad 9' \approx \quad 78$ +
$b \approx 27{,}852\ dcm$	$\mathrm{tg}\,54^0\,19' \approx 1{,}3926$

Obliczenie a:

$a = \dfrac{20}{\cos 54^0\,19'}$;	$\cos 54^0\,10' \approx 0{,}5854$
$a \approx \dfrac{20}{0{,}5833}$	$P \quad 9' \approx \quad 21$ —
$a \approx 34{,}28\ dcm$	$\cos 54^0\,19' \approx 0{,}5833$

Odpowiedź: $\sphericalangle C = 35^0\,41'$; $b = 27{,}852\,dcm$; $a = 34{,}28$.

Wypadek III. Rozwiązać trójkąt prostokątny, mając przeciwprostokątną i jedną z przyprostokątnych (rys. 48).



Rys. 48

Rozwiązanie:

Dane: $\sphericalangle A = 90^0$; $BC = a$; $AB = c$.

Znaleźć: $\sphericalangle C$; $\sphericalangle B$; $AC = b$.

Ponieważ między przeciwprostokątną a i przyprostokątną c zachodzi związek

$$c = a \cdot \sin C, \text{ stąd}$$

$$\sin C = \frac{c}{a}.$$

Mając zaś sin C znajdziemy z tablic $\sphericalangle C$.

$\sphericalangle B$ obliczymy z równania

$$\sphericalangle B + \sphericalangle C = 90^0, \text{ stąd } \sphericalangle B = 90^0 - \sphericalangle C.$$

Wreszcie ze wzoru

$$b = a \sin B \quad \text{lub} \quad b = a \cos C$$

znajdziemy przyprostokątną b.

Zastosowanie liczbowe: $a = 15\,dcm$; $c = 8\,dcm$

Obliczenie $\sphericalangle$ C:

$$\sin C = \tfrac{8}{15}; \qquad \sin C \approx 0{,}5333$$

$$\left.\begin{array}{rcr} 5324 & - & 32^0\,10' \\ \hline 9 & - & 4' \end{array}\right\} +$$

$$\sphericalangle C \approx 32^0 14'.$$

Obliczenie $\sphericalangle$ B:

$$\sphericalangle B \approx 90^0 - 32^0 14' = 57^0 46'.$$

Obliczenie b:

$b \approx 15 \cdot \sin 57^0 46'$

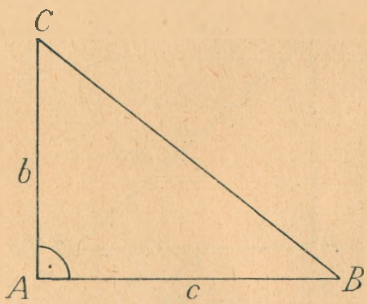
$b \approx 15 \cdot 0{,}8459$

$b \approx 12{,}69\,dcm.$

$$\left.\begin{array}{lcr} \sin\ 57^0 40' & \approx & 0{,}8450 \\ P \quad\ 6' & \approx & 9 \\ \hline \sin\ 57^0 46' & \approx & 0{,}8459 \end{array}\right\} +$$

Odpowiedź: $\sphericalangle C \approx 32^0 14'$; $\sphericalangle B \approx 57^0 46'$; $b \approx 12{,}69\,dcm$.

Wypadek IV. Rozwiązać trójkąt prostokątny, mając jego przyprostokątne (rys. 49).



Rys. 49

Rozwiązanie:

Dane: $\sphericalangle A = 90^0$; $AC = b$; $AB = c$.

Znaleźć: $\sphericalangle C$; $\sphericalangle B$; $BC = a$.

Ze wzoru $c = b.\ tg \sphericalangle C$ znajdziemy

$\operatorname{tg} C = \frac{c}{b}$, a stąd przy pomocy tablic znajdziemy kąt C.

Kąt B obliczymy z równania

$$\sphericalangle B + \sphericalangle C = 90^0,\ \text{stąd}\ \sphericalangle B = 90^0 - \sphericalangle C.$$

Wreszcie ze wzoru $b = a \cdot \sin B$ znajdziemy

$$a = \frac{b}{\sin B}.$$

Oczywiście, że przeciwprostokątną można również obliczyć, stosując twierdzenie Pitagorasa:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}.$$

Zastosowanie liczbowe: $b = 10\ dcm$; $c = 9\ dcm$.

Obliczenie $\sphericalangle$ C:

$$\operatorname{tg} C = \tfrac{9}{10};\quad \operatorname{tg} C = 0{,}9000$$

$$\left.\begin{array}{rr} 8952 - & 41^0\,50' \\ \hline 48 - & 9' \end{array}\right\} +$$

$$\sphericalangle C \approx 41^0\,59'.$$

Obliczenie $\sphericalangle$ B:

$$\sphericalangle B \approx 90^0 - \sphericalangle 41^0\,59' = 48^0\,1'.$$

Obliczenie a:

$$a \approx \frac{10}{\sin\ 48^0\,1'} \qquad \left.\begin{array}{ll} \sin\ 48^0 & \approx 0{,}7431 \\ P\quad 1' \approx & 2 \end{array}\right\} + \qquad \begin{array}{l} \hline \sin\ 48^0\,1' \approx 0{,}7433 \end{array}$$

$$a \approx \frac{10}{0{,}7433}; \qquad a \approx 13{,}45\ \text{dcm}.$$

Taki sam wynik obliczenia a otrzymalibyśmy, stosując twierdzenie Pitagorasa:

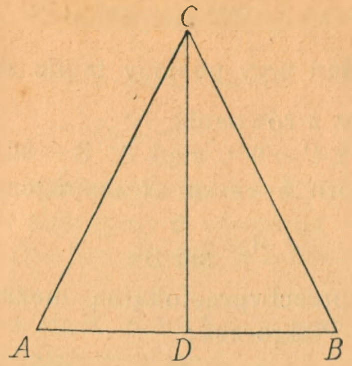
$$a = \sqrt{100 + 81} \approx 13{,}45.$$

§ 112. Cztery zadania, rozwiązane w § poprzednim, stanowią, jak zaznaczyliśmy w tym §, podstawowe (elementarne) wypadki rozwiązywania trójkątów prostokątnych. Do tych czterech wypadków podstawowych sprowadzamy rozwiązywanie takich zadań, w których występujące w nich figury można podzielić na trójkąty prostokątne.

P r z y k ł a d 1. Rozwiązać trójkąt równoramienny, znając wysokość względem podstawy i kąt przy wierzchołku (rys. 50).

Rozwiązanie:

Dane: $AC = CB$; $\sphericalangle ACB = \alpha$; $CD \perp AB$; $CD = h$.



Rys. 50

Znaleźć: $\sphericalangle A = \sphericalangle B$; $AC = CB$; AB.

$\sphericalangle A = \sphericalangle B$ znajdziemy z równania

$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180^0$, czyli

$2\sphericalangle A + \alpha = 180^0$, albo

$$\sphericalangle A = \frac{180^0 - \alpha}{2} = 90^0 - \frac{\alpha}{2}.$$

AC obliczymy z $\triangle$-*a* prostokątnego ACD, w którym znamy $CD = h$ i $\sphericalangle ACD = \frac{\alpha}{2}$, (wypadek II § 111):

$$CD = AC \cdot \cos\frac{\alpha}{2}, \text{ stąd } AC = \frac{h}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Aby obliczyć AB, zauważmy, że $AB = 2 \cdot AD$. Obliczymy AD z trójkąta prostokątnego ACD, w którym AD jest przyprostokątną przeciwległą kątowi $\frac{\alpha}{2}$. Zatem

$$AD = CD \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}, \text{ czyli } AD = h \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Stąd $AB = 2\ h \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

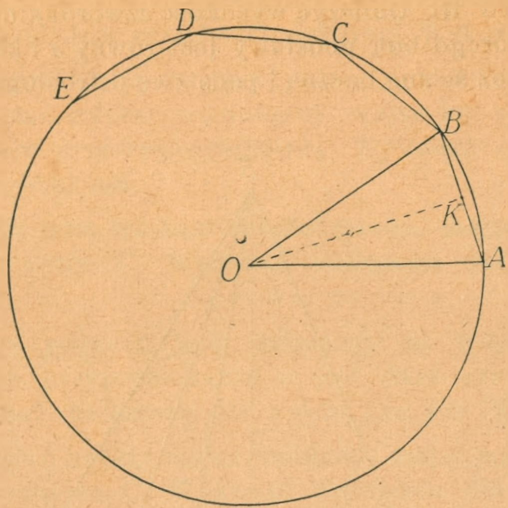
Przykład II. Obliczyć pole foremnego n-kąta, mając promień okręgu koła opisanego na tym n—kącie (rys. 51).

Rozwiązanie:

Dane: $AB = BC = CD = \ldots$; $OA = OB = OC = \ldots = R$.

Znaleźć: pole wielokąta.

Jak wiemy z geometrii, pole wielokąta foremnego równa się iloczynowi połowy jego obwodu przez długość promienia okręgu



Rys. 51.

koła wpisanego w ten wielokąt. Jeżeli więc S oznacza szukane pole, $2p$ — obwód wielokąta i r — promień okręgu koła wpisanego, wówczas

$$S = p \cdot r.$$

Obliczenie $p = \frac{n \cdot AB}{2}$ sprowadza się do obliczenia boku AB, który jest podstawą trójkąta równoramiennego AOB. W trójkącie tym znamy $OA = R$ i $\sphericalangle AOB = \frac{360^0}{n}$, gdyż kąty $AOB, BOC, COD, \ldots$ są sobie równe i każdy z nich jest równy $\frac{1}{n}$ kąta pełnego. Prowadząc zatem $OK \perp AB$, otrzymujemy trójkąt prostokątny OAK, w którym $AK = \frac{AB}{2}$, a $\sphericalangle AOK = \frac{\sphericalangle AOB}{2}$. Stąd

$$AK = R \cdot \sin \frac{180^0}{n} \text{ i } AB = 2R \cdot \sin \frac{180^0}{n}.$$

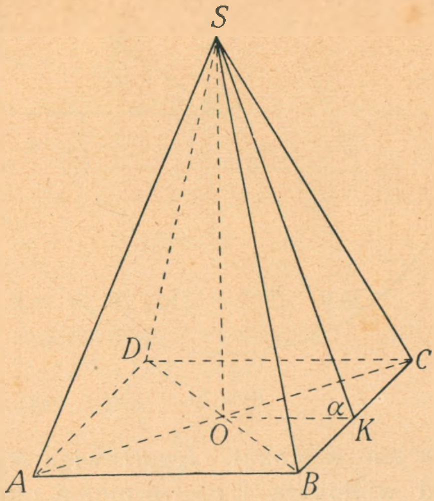
Z tego samego trójkąta prostokątnego obliczymy $r = OK$:

$$OK = R \cdot \cos \frac{180^0}{n}.$$

Zatem $S = \frac{2nR \cdot \sin \frac{180^0}{n}}{2} \cdot R \cdot \cos \frac{180^0}{n}$, czyli po uproszczeniu

$$S = n \cdot R^2 \sin \frac{180^0}{n} \cdot \cos \frac{180^0}{n}.$$

P r z y k ł a d III. Obliczyć wysokość czworokątnego foremnego ostrosłupa, którego bok podstawy jest równy a i kąt dwuścienny, utworzony przez ścianę boczną i podstawę ostrosłupa, jest równy α. (rys. 52).



Rys. 52.

Rozwiązanie:

Dane: $AB = BC = CD = DA = a$; $\sphericalangle DAB = 90^0$.

$SA = SB = SC = SD$; $SO \perp [ABCD]$.

Kąt dwuścienny o krawędzi $BC = \alpha$.

Znaleźć $SO = h$.

Wyznaczamy kąt liniowy danego kąta dwuściennego. Prowadząc $SK \perp BC$ i łącząc punkt O z punktem K otrzymujemy $\sphericalangle SKO = \alpha$. Szukaną wysokość znajdziemy jako przyprostokątną trójkąta prostokątnego SOK, w którym mamy drugą przyprostokątną $OK = \frac{a}{2}$ i kąt α. Zatem $SO = OK \cdot \operatorname{tg} \alpha$ czyli $h = \frac{a \cdot \operatorname{tg} \alpha}{2}$.

Ćwiczenia.

178. Rozwiązać trójkąt prostokątny (a oznacza długość przeciwprostokątnej, b i c długości przyprostokątnych), mając:

I) $a = 30$ cm; $\sphericalangle B = 38^0 52$;

II) $a = 35$ cm; $b = 25$ cm;

III) $c = 5$ cm; $\sphericalangle C = 63^0 14'$;

IV) $c = 20$ cm; $\sphericalangle B = 43^0 34'$;

V) $b = 10$ cm; $c = 15$ cm.

179. Rozwiązać trójkąt prostokątny, mając przyprostokątną c i wysokość h względem przeciwprostokątnej. Wykonać obliczenia dla $c = 30$ *cm*; $h = 20$ *cm*.

180. Rozwiązać trójkąt prostokątny, mając kąt ostry B i wysokość względem przeciwprostokątnej. Wykonać obliczenia dla $\sphericalangle B = 51^0 42'$; $h = 10$ *cm*.

181. Obliczyć pole trójkąta prostokątnego, mając przyprostokątną b i kąt ostry C. Wykonać obliczenia dla $b = 20$ *cm*; $\sphericalangle C = 33^0 22'$.

182. Obliczyć promień koła opisanego na trójkącie prostokątnym, którego przyprostokątna c jest dana oraz kąt B jest równy β. Wykonać obliczenia dla $c = 50$ *cm*; $\beta = 72^0 3'$.

183. Rozwiązać trójkąt równoramienny, mając jego podstawę c i kąt przy wierzchołku C. Wykonać obliczenia dla $c = 200$ *mm* i $\sphericalangle C = 35^0$.

184. Rozwiązać trójkąt równoramienny, mając jego ramię a i podstawę c. Wykonać obliczenia dla $a = 30$ *cm*; $c = 40$ *cm*.

185. W kole o promieniu R wykreślono cięciwę, której długość wynosi l. Obliczyć kąt środkowy, wsparty na danej cięciwie. Wykonać obliczenia dla $R = 15$ *cm*; $l = 20$ *cm*.

186. Obliczyć obwód foremnego dziesięciokąta, wpisanego w okrąg koła o danym promieniu R. Wykonać obliczenia dla $R = 100$ *mm*.

187. Bok foremnego ośmiokąta ma długość a. Obliczyć promienie okręgów kół opisanego i wpisanego. Wykonać obliczenia dla $a = 20$ *cm*.

188. Promień okręgu koła wpisanego w dwunastokąt foremny jest równy r. Obliczyć bok tego wielokąta. Wykonać obliczenia dla $r = 5$ *dcm*.

189. Bok rombu ma długość a; mniejsza przekątna jest równa l. Obliczyć kąty rombu. Wykonać obliczenia dla $a = 30$ cm; $l = 40$ *cm*.

190. Większa przekątna rombu ma długość m. Kąt rozwarty jest równy α. Obliczyć bok rombu. Wykonać obliczenia dla $m = 15$ *dcm*; $\alpha = 132^0 56'$.

191. Przekątna prostokąta jest równa k. Kąt między przekątnymi jest równy α. Obliczyć boki prostokąta. Wykonać obliczenia dla $k = 20$ *cm*; $\alpha = 125^0 18'$.

192. Podstawą prostopadłościanu jest kwadrat o przekątnej k. Przekątna prostopadłościanu jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α. Obliczyć krawędź boczną prostopadłościanu. Wykonać obliczenia dla $k = 10$ *cm*; $\alpha = 48^0 21'$.

193. Podstawą graniastosłupa prostego jest trójkąt równoboczny o boku a. Przekątna ściany bocznej jest nachylona do boku podstawy pod kątem α. Obliczyć powierzchnię boczną graniastosłupa. Wykonać obliczenia dla $a = 10$ *cm*; $\alpha = 35^0 31'$.

194. Podstawą foremnego ostrosłupa jest kwadrat o boku a. Krawędź boczna jest nachylona do boku podstawy pod kątem α. Obliczyć powierzchnię boczną ostrosłupa. Wykonać obliczenia dla $a = 20$ *cm*; $\alpha = 54^0 45'$.

195. Podstawą foremnego ostrosłupa jest kwadrat o boku a. Ściana boczna ostrosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α. Obliczyć powierzchnię boczną ostrosłupa. Wykonać obliczenia dla $a = 10$ *dcm*; $\alpha = 64^0 31'$.

196. Podstawą foremnego ostrosłupa jest kwadrat. Wysokość ostrosłupa jest równa h, a krawędź boczna jest równa b. Obliczyć kąt nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy. Wykonać obliczenia dla $h = 7$ *dcm*; $b = 12$ *dcm*.

197. Bok podstawy foremnego czworokątnego ostrosłupa jest równy a, wysokość zaś ostrosłupa jest równa h. Obliczyć kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy. Wykonać obliczenia dla $a = 8$ *dcm*; $h = 15$ *dcm*.

Tablice logarytmów funkcji trygonometrycznych.

§ 113. Rozwiązując zadania, w których występować będą boki i kąty trójkąta czy wielokąta, otrzymamy w wyniku pewne wyrażenia, zawierające funkcje trygonometryczne kątów. Obliczanie wartości liczbowych takich wyrażeń wykonywać jest najdogodniej przy pomocy logarytmów. Chcąc np. obliczyć $x = (0{,}385)^2 \cdot \cos 23^0$, obliczylibyśmy najpierw

$$\lg x = 2 \lg 0{,}385 + \lg \cos 23^0, \text{ a następnie } N\lg x.$$

Aby jednak znaleźć lg cos 23^0 musielibyśmy wykonać dwie czynności:

1^0 z tablicy kosinusów odczytać liczbę, która wyraża przybliżoną wartość cos 23^0;

2^0 znaleźć z tablic logarytmów przybliżoną wartość logarytmu otrzymanej liczby. Te dwie czynności zastępujemy jedną przez wprowadzenie tablic logarytmów funkcji trygonometrycznych.

§ 114. Tablice logarytmów funkcji trygonometrycznych ułożone są na podstawie tych samych własności, co i tablice funkcji trygonometrycznych. Zatem: 1) zawierają przybliżone wartości logarytmów funkcji trygonometrycznych tylko kątów **ostrych**, 2) tablica logarytmów sinusów jest jednocześnie tablicą logarytmów kosinusów, a tablica logarytmów tangensów — tablicą logarytmów kotangensów.

§ 115. Przy pomocy tych tablic możemy rozwiązać dwa zagadnienia:

a) mając kąt, znaleźć przybliżoną wartość logarytmów jego funkcji trygonometrycznych;

b) mając wartość logarytmu jednej z funkcji trygonometrycznych kąta, znaleźć przybliżoną wartość kąta.

§ 116. Ponieważ odnajdywanie logarytmów funkcji trygonometrycznych odbywa się w ten sam sposób, jak odnajdywanie wartości funkcji trygonometrycznych, przeto ograniczymy się do podania następujących dwóch wskazówek:

1) jeżeli szukamy logarytmu sinusa lub tangensa, wówczas stopnie kąta odczytujemy w pierwszej kolumnie po stronie **lewej**, dziesiątki minut — w pierwszej rubryce poziomej **od góry** a poprawki **dodajemy**;

2) jeżeli szukamy logarytmów kosinusa lub kotangensa, wówczas stopnie kąta odczytujemy w kolumnie po stronie **prawej**, dziesiątki minut w pierwszej rubryce poziomej **od dołu**, a poprawki **odejmujemy**.

Obliczenia zapisujemy w sposób następujący:

$$\begin{array}{lllr} \lg & \sin & 54^0 20' \approx & \bar{1},9098 \\ & P & 6 \approx & 5 \\ \hline \lg & \sin & 54^0 26' \approx & \bar{1},9103 \end{array} \; + \qquad\qquad \begin{array}{lllr} \lg & \operatorname{ctg} & 18^0 40' \approx & 0,4713 \\ & P & 3' \approx & 12 \\ \hline \lg & \operatorname{ctg} & 18^0 43' \approx & 0,4701 \end{array} \; -$$

§ 117. Odnajdywanie kąta, gdy znamy logarytm jednej z jego funkcji trygonometrycznych odbywa się w ten sam sposób, jak odnajdywanie kąta, gdy znamy wartość jednej z jego funkcji trygonometrycznych.

1) jeżeli np. $\lg \operatorname{tg} x \approx \bar{1},5044$, wówczas w tablicy logarytmów tangensów szukamy liczby: 1,5044. Liczby takiej nie znajdziemy, ale zauważymy, że najbliższy logarytm, lecz o mantysie mniejszej wynosi $\bar{1},5031$. Logarytm ten odpowiada kątowi $17^0 40'$ (w pierwszej kolumnie po stronie **lewej**). Różnica między mantysą daną

i odczytaną z tablic wynosi 0,0013 i odpowiada kątowi 3′. Zatem $x \approx 17^\circ 40' + 3' = 17^\circ 43'$.

Zapis obliczenia jest następujący:

$$\lg \operatorname{tg} x \approx \bar{1},5044$$

$$\left.\begin{array}{r} \underline{5031} - 17^\circ 40' \\ 13 - \quad 3 \end{array}\right\} +$$

$$x \approx 17^\circ 43'.$$

W ten sam sposób postępujemy przy odnajdywaniu kąta, gdy znamy jego sinus;

2) jeżeli np. $\lg \operatorname{ctg} x \approx 0,5894$, wówczas w tablicy logarytmów kotangensów liczby 0,5894 nie znajdziemy. Zauważymy jednak, że najbliższy logarytm, lecz o mantysie mniejszej wynosi 0,5873. Logarytm ten odpowiada kątowi $14^\circ 30'$ (w kolumnie po stronie prawej). Różnica między mantysą daną i odczytaną z tablic wynosi 0,0021 i odpowiada kątowi 4′. Zatem $x \approx 14^\circ 30' - 4' = 14^\circ 26'$.

Zapis obliczenia jest następujący:

$$\lg \operatorname{ctg} x \approx 0,5894$$

$$\left.\begin{array}{r} \underline{5873} - 14^\circ 30' \\ 21 - \quad 4' \end{array}\right\} -$$

$$x \approx 14^\circ 26'.$$

Zadanie. Obliczyć objętość foremnego czworokątnego graniastosłupa, którego przekątna, równa l, jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α (rys. 53). Wykonać obliczenia dla $l = 7,32\ dcm$; $\alpha = 39^\circ 27'$.

Rozwiązanie:

Dane: $AB = BC = CD = DA$; $\sphericalangle DAB = 90^\circ$.

$AE \# HD \# GC \# FB$; $AE \perp [ABCD]$.

$HB = l$; $\sphericalangle HBD = \alpha$.

Znaleźć: objętość (V) graniastosłupa.

Szukana objętość $V = B \cdot h$, gdzie B oznacza pole podstawy, a h wysokość graniastosłupa.

Obliczenie B. Ponieważ podstawa graniastosłupa jest kwadratem, zatem

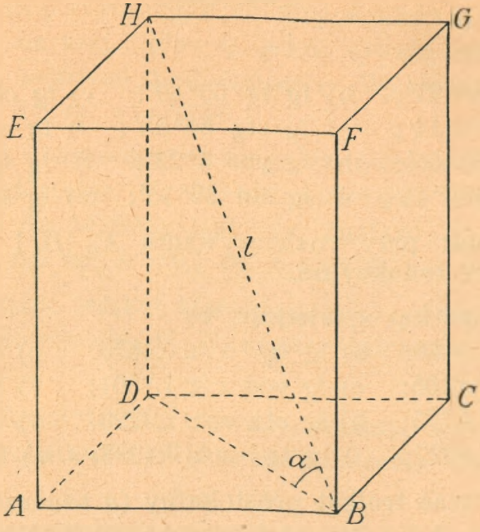
$$B = \frac{DB^2}{2}.$$

DB obliczymy z trójkąta prostokątnego HBD, w którym $\sphericalangle D = 90^\circ$, $HB = l$ i $\sphericalangle HBD = \alpha$:

$$DB = l \cdot \cos \alpha.$$

Stąd

$$B = \frac{l^2 \cos^2 \alpha}{2}$$



Rys. 53

Obliczenie *h*. Ponieważ graniastosłup jest foremny, to wysokość graniastosłupa jest równa jego krawędzi bocznej:

$$h = HD.$$

HD obliczymy również z trójkąta prostokątnego HBD:

$$HD = l \cdot \sin \alpha.$$

Stąd
$$V = \frac{l^3 \cdot \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha}{2}.$$

Przy pomocy logarytmów obliczymy przybliżoną wartość V.

$$\lg V = 3 \lg 7{,}32 + 2 \lg \cos 39^\circ 27' + \lg \sin 39^\circ 27' + \text{clg } 2.$$

Obliczenia główne

$$\begin{array}{lr}
3 \lg 7{,}32 & \approx 2{,}5935 \\
2 \lg \cos 39^\circ 27' & \approx \bar{1}{,}7754 \\
\lg \sin 39^\circ 27' & \approx \bar{1}{,}8030 \\
\text{clg } 2 & \approx \bar{1}{,}6990 \\
\hline
\lg V & \approx 1{,}8709 \\
 & \underline{8704} - 7420 \\
 & 5 - \quad 8\,(9)
\end{array}$$

$\text{Nlg } V \approx 74{,}28$ (albo 74,29)

$V \approx 74{,}28$ dcm^3 (albo 74,29 dcm^3)

Odpowiedź: objętość graniastosłupa wynosi 74,28 dcm^3 (albo 74,29 dcm^3)

Obliczenia pomocnicze

$$\begin{array}{l}
\lg 7{,}32 \approx 0{,}8645 \\
3 \lg 7{,}32 \approx 3 \cdot 0{,}8645 = 2{,}5935 \\
\hline\hline
\left.\begin{array}{lr} \lg \cos 39^\circ 20' \approx & \bar{1}{,}8884 \\ P \quad 7' \approx & 7 \end{array}\right\} - \\
\hline
\lg \cos 39^\circ 27' \approx \bar{1}{,}8877 \\
2 \lg \cos 39^\circ 27' \approx \bar{1}{,}7754 \\
\hline\hline
\left.\begin{array}{lr} \lg \sin 39^\circ 20' \approx & \bar{1}{,}8020 \\ P \quad 7' \approx & 10 \end{array}\right\} + \\
\hline
\lg \sin 39^\circ 27' \approx \bar{1}{,}8030 \\
\hline\hline
\lg 2 \approx 0{,}3010
\end{array}$$

Ćwiczenia.

198. Obliczyć:

a) $\lg \sin 43^\circ 27'$; b) $\lg \operatorname{tg} 53^\circ 49'$; c) $\lg \operatorname{ctg} 33^\circ 33'$;
d) $\lg \cos 28^\circ 14'$; e) $\lg \operatorname{ctg} 55^\circ 55'$; f) $\lg \cos 5^\circ 14'$;
g) $\lg \sin 85^\circ 56'$; h) $\lg \cos 4^\circ 22'$; i) $\lg \operatorname{tg} 8^\circ 54'$;
k) $\lg \sin 137^\circ 46'$; l) $\lg \sin 99^\circ 15'$; m) $\lg \sin 163^\circ 52'$.

Uwaga: przy rozwiązywaniu *k*), *l*) i *m*) zastosować wzory redukcyjne.

199. Obliczyć kąt x, wiedząc, że

a) $\lg \sin x \approx \overline{1},5483$; b) $\lg \operatorname{tg} x \approx 0,4675$; c) $\lg \cos x \approx \overline{1},3322$;
d) $\lg \operatorname{ctg} x \approx 0,6105$; e) $\lg \cos x \approx \overline{1},7501$; f) $\lg \sin x \approx \overline{1},2819$;
g) $\lg \operatorname{tg} x \approx \overline{1},5775$; h) $\lg \operatorname{ctg} x \approx \overline{1},2299$; i) $\lg \cos x \approx \overline{1},6510$;
k) $\lg \sin x \approx \overline{1},8327$; l) $\lg \operatorname{tg} x \approx 0,4928$; m) $\lg \sin x \approx \overline{1},5003$.

200. Rozwiązać trójkąt prostokątny (a oznacza długość przeciwprostokątnej, b i c długości przyprostokątnych), mając:

I. $a = 9,73\ m$; $\sphericalangle B = 45^\circ 24'$;
II. $a = 0,59\ m$; $b = 0,374\ m$;
III. $c = 39,06\ dcm$; $\sphericalangle C = 63^\circ 21'$;
IV. $c = 13,54\ dcm$; $\sphericalangle B = 70^\circ 15'$;
V. $b = 2,093$; $c = 0,842\ m$.

Uwaga: przy obliczaniu przeciwprostokątnej dogodniej jest oprzeć się na wzorach (9) i (10), niż stosować twierdzenie Pitagorasa.

201. Dany jest okrąg koła o środku O i promieniu R oraz punkt zewnętrzny A. Z punktu A prowadzimy styczną do okręgu koła. Styczna ta jest nachylona do odcinka OA pod kątem α. Znaleźć odległość punktu A od środka okręgu. Wykonać obliczenia dla $R = 6,58\ dcm$, $\alpha = 42^\circ 56'$.

202. Na okręgu koła o promieniu R odmierzono łuk $\alpha < 90^\circ$ i końce tego łuku połączono odcinkiem prostej. Znaleźć długość otrzymanej cięciwy i jej odległość od środka okręgu. Wykonać obliczenia dla $R = 38,55\ cm$, $\alpha = 72^\circ 42'$.

203. Łuk okręgu koła jest α. Cięciwa, podpierająca ten łuk, ma długość l. Znaleźć promień okręgu koła. Wykonać obliczenia dla $l = 27,09\ dcm$; $\alpha = 83^\circ 38'$.

204. Znaleźć wysokość wieży, wiedząc, że promienie słoneczne padają na ziemię pod kątem α, a długość cienia wieży wynosi $k\ m$. Wykonać obliczenia dla $k = 5,6\ m$; $\alpha = 68^\circ 43'$.

205. Jaka siła, równoległa do długości równi pochyłej, zrównoważy leżący na niej ciężar Q, jeżeli równia ma długość l i jest nachylona do poziomu pod kątem α. Wykonać obliczenia dla $Q = 23$ *kg*; $l = 3{,}5$ *m*; $\alpha = 42^0 30'$.

206. Siła P równoległa do długości równi pochyłej równoważy leżący na równi ciężar Q. Wysokość równi jest $= h$, a kąt nachylenia równi do poziomu jest $= \alpha$. Znaleźć Q. Wykonać obliczenia dla $P = 8{,}5$ *kg*; $h = 0{,}5$ *m*; $\alpha = 64^0 30'$.

207. Rozwiązać trójkąt równoramienny, mając jego podstawę c i kąt przy wierzchołku C. Wykonać obliczenia dla $c = 7{,}52$ *dcm*, $\sphericalangle C = 148^0 38'$.

208. Rozwiązać trójkąt równoramienny, mając jego ramię a i kąt A przy podstawie. Wykonać obliczenia dla $a = 350{,}2$ *cm*, $\sphericalangle A = 49^0 23'$.

209. Rozwiązać trójkąt równoramienny, mając podstawę c i wysokość h względem podstawy. Wykonać obliczenia dla $c = 0{,}392$ *m*, $h = 0{,}287$ *m*.

210. Dany jest ukośnik (romb) o kącie ostrym α. Mniejsza jego przekątna jest $= m$. Znaleźć bok rombu. Wykonać obliczenia dla $m = 54{,}9$ *cm*, $\alpha = 78^0 6'$.

211. Większa przekątna rombu ma długość p, a kąt rozwarty rombu jest $= \beta$. Obliczyć pole rombu. Wykonać obliczenia dla $p = 8{,}05$ *m*, $\beta = 108^0 58'$.

212. Mniejsza przekątna rombu ma długość m, a kąt ostry rombu jest $= \alpha$. Obliczyć pole koła, wpisanego w dany romb. Wykonać obliczenia dla $m = 3{,}54$ *dcm*, $\alpha = 61^0 5'$.

213. Znaleźć kąty rombu, mając jego przekątne m i p. Wykonać obliczenia dla $m = 13{,}48$ *dcm*, $p = 23{,}07$ *dcm*.

214. Większa podstawa trapezu równoramiennego jest średnicą okręgu koła opisanego na danym trapezie. Każdy z równych boków trapezu ma długość d, a kąt ostry trapezu jest $= \alpha$. Obliczyć podstawy trapezu. Wykonać obliczenie dla $d = 0{,}48$ *m*; $\alpha = 32^0 49'$.

215. Podstawą foremnego ostrosłupa jest kwadrat o boku a. Kąt dwuścienny, jaki tworzy ściana boczna z podstawą, jest równy α. Znaleźć objętość ostrosłupa. Wykonać obliczenia dla $a = 23{,}09$ *dcm*, $\alpha = 38^0 59'$.

216. Krawędź boczna foremnego czworokątnego ostrosłupa jest równa b i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem β. Znaleźć objętość ostrosłupa. Wykonać obliczenia dla $b = 0{,}843\ m$; $\beta = 65^0 13'$.

217. Bok podstawy prostopadłościanu jest równy a i tworzy z jedną z przekątnych tej podstawy kąt α. Przekątna prostopadłościanu jest nachylona do podstawy pod kątem β. Znaleźć objętość prostopadłościanu. Wykonać obliczenia dla $a = 1{,}358\ m$; $\alpha = 42^0 8'$; $\beta = 57^0 39'$.

218. Bok podstawy foremnego trójkątnego ostrosłupa jest równy a. Kąt między wysokością ostrosłupa i jego krawędzią boczną jest równy α. Obliczyć objętość ostrosłupa. Wykonać obliczenia dla $a = 32{,}51\ cm$; $\alpha = 61^0 16'$.

219. Promień koła wpisanego w podstawę foremnego sześciokątnego ostrosłupa jest równy r. Krawędź boczna ostrosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α. Obliczyć objętość ostrosłupa. Wykonać obliczenia dla $r = 8{,}53\ cm$; $\alpha = 31^0 58'$.

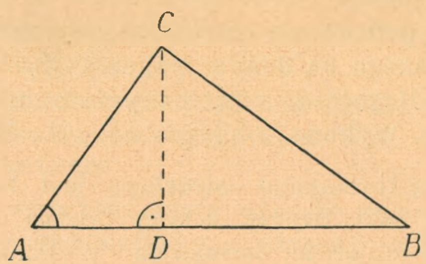
Pole trójkąta i równoległoboku.

§ 118. Jak widzieliśmy w §§ poprzednich, podstawowe związki między elementami trójkąta prostokątnego mają duże zastosowanie przy rozwiązywaniu szeregu zagadnień geometrycznych. Zastosujemy je obecnie przy obliczaniu pola dowolnego trójkąta i równoległoboku.

Zadanie I. Obliczyć pole trójkąta, mając dwa jego boki i kąt zawarty między nimi.

Ponieważ dany kąt może być ostry, prosty lub rozwarty, przeto rozpatrzymy trzy wypadki:

a) Dany kąt jest ostry: $\sphericalangle A < 90^0$ (rys. 54).



Rys. 54.

Prowadząc wysokość CD względem boku AB, możemy napisać:

$$\text{Pole } \triangle ABC = \frac{AB \cdot CD}{2}.$$

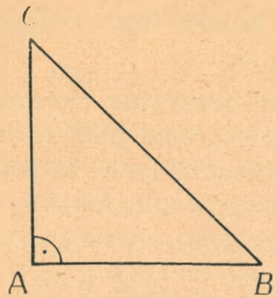
Z trójkąta prostokątnego ACD ($\sphericalangle D = 90^\circ$) mamy

$$CD = AC \cdot \sin A.$$

Podstawiając wartość CD do wzoru na pole $\triangle$ ABC, otrzymamy

$$\textbf{Pole } \triangle \textbf{ ABC} = \frac{\textbf{AB} \cdot \textbf{AC} \cdot \textbf{sin A}}{2}.$$

b) Jeżeli $\sphericalangle A = 90^\circ$ (rys. 55), wówczas dane boki są przyprostokątnymi.



Rys. 55.

W tym wypadku, jak wiemy z geometrii:

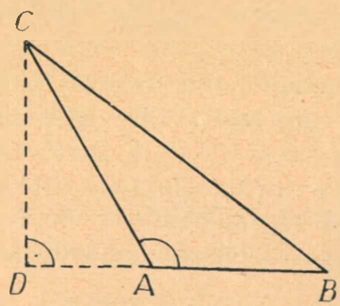
$$\text{Pole } \triangle ABC = \frac{AB \cdot AC}{2}.$$

Wynik ten możemy napisać w postaci:

$$\textbf{Pole } \triangle \textbf{ ABC} = \frac{\textbf{AB} \cdot \textbf{AC} \cdot \textbf{sin A}}{2},$$

gdyż w tym wypadku $\sin A = \sin 90^\circ = 1$.

c) Jeżeli $\sphericalangle A$ jest rozwarty: $\sphericalangle A > 90^\circ$ (rys. 56), to spodek



Rys. 56.

wysokości CD względem boku AB leżeć będzie na przedłużeniu boku AB. Mamy

$$\text{Pole} \triangle ABC = \frac{AB \cdot CD}{2}.$$

Ale z trójkąta prostokątnego CDA ($\sphericalangle D = 90^0$) mamy:

$$CD = AC \sin \sphericalangle CAD, \text{ a że } \sphericalangle CAD = 180^0 - \sphericalangle A,$$

to $CD = AC \cdot \sin(180^0 - \sphericalangle A) = AC \cdot \sin A$. Podstawiając wartość CD do wzoru na pole trójkąta, otrzymamy:

$$\text{Pole} \triangle \text{ABC} = \frac{\text{AB} \cdot \text{AC} \cdot \sin \text{A}}{2}.$$

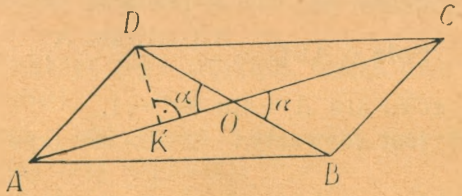
Jak widzimy, **pole każdego trójkąta mierzy się połową iloczynu długości dwóch boków tego trójkąta przez sinus kąta, zawartego między nimi.**

Wniosek. Ponieważ przekątna równoległoboku dzieli go na dwa trójkąty przystające, przeto pole równoległoboku równe jest podwojonemu polu jednego z tych trójkątów. Jeżeli więc a i b oznaczają przyległe boki równoległoboku, α — kąt zawarty między nimi, to pole równoległoboku wyrazić można wzorem

$$\text{P} \square = 2 \cdot \frac{ab \sin \alpha}{2}, \text{ czyli } \text{P} \square = \text{a} \cdot \text{b} \cdot \sin \alpha,$$

tj. **pole równoległoboku mierzy się iloczynem długości dwóch jego boków przyległych przez sinus kąta zawartego między nimi.**

Zadanie II. Obliczyć pole równoległoboku $ABCD$ (rys. 57), mając jego przekątne i kąt między przekątnymi.



Rys. 57.

Przekątne równoległoboku tworzą cztery kąty, z których każde dwa są albo przyległe, albo wierzchołkowe. Jeżeli więc $\sphericalangle COB = \alpha$, to $\sphericalangle DOA = \alpha$, a $\sphericalangle DOC = \sphericalangle AOB = 180^0 - \alpha$.

Aby obliczyć pole równoległoboku $ABCD$, zauważmy, że każda z przekątnych dzieli równoległobok na 2 przystające trójkąty. Tak np. przekątna AC dzieli równoległobok na $\triangle$ ADC i $\triangle$ ABC. Zatem

$$\text{Pole} \square ABCD = 2 \cdot \text{Pole} \triangle ADC.$$

Prowadząc $DK \perp AC$, otrzymujemy

$$\text{Pole} \triangle ADC = \frac{AC \cdot DK}{2}.$$

Ale z $\triangle DKO$, w którym $\sphericalangle K = 90^0$, mamy

$$DK = DO \cdot \sin \alpha.$$

Zatem

$$\text{Pole} \triangle ADC = \frac{AC \cdot DO \cdot \sin \alpha}{2}, \text{ a stąd}$$

$$\text{Pole} \square ABCD = \frac{2 \cdot AC \cdot DO \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{AC \cdot 2 \cdot DO \cdot \sin \alpha}{2}$$

Ale $2\,DO = DB$, więc

$$\textbf{Pole} \square \mathbf{ABCD} = \frac{\mathbf{AC \cdot DB \cdot \sin} \alpha}{2},$$

tzn. **pole równoległoboku mierzy się połową iloczynu długości jego przekątnych przez sinus kąta zawartego między przekątnymi.**

Uwaga. Zastosujmy otrzymany wynik do rombu. Jak wiemy, przekątne rombu są do siebie prostopadłe. Zatem $\alpha = 90^0$, a że $\sin 90^0 = 1$, więc

pole rombu mierzy się połową iloczynu długości przekątnych.

Twierdzenie to znane nam jest z geometrii.

Ćwiczenia.

220. Pole trójkąta ABC jest równe s, bok AB jest równy c, kąt $CAB = \alpha$. Obliczyć bok AC. Wykonać obliczenia dla $s = 252\ cm^2$; $c = 43{,}5\ cm$; $\alpha = 42^0 33'$.

221. Pole trójkąta ABC jest równe s, bok AB ma długość równą c, bok BC ma długość równą a. Obliczyć kąt ABC. Wykonać obliczenia dla $s = 18{,}56\ m^2$; $c = 6{,}05\ m$; $a = 8{,}34\ m$.

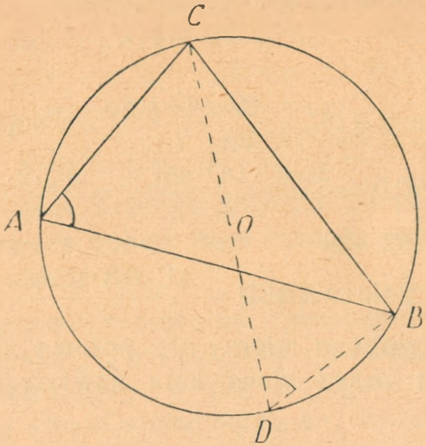
222. Obliczyć kąty, utworzone przez przekątne równoległoboku, jeżeli przekątne te są równe odpowiednio l i m, a pole równoległoboku jest równe s. Wykonać obliczenia dla $l = 7{,}5\,dcm$, $m = 8{,}59\,dcm$; $s = 32{,}8\ dcm^2$.

Rozwiązywanie trójkątów dowolnych.

Zależności między bokami i kątami trójkąta dowolnego.

§ 119. Rozważmy dowolny trójkąt ABC. Niechaj punkt O będzie środkiem okręgu koła opisanego na tym trójkącie (rys. 58).

Przez jeden z wierzchołków tego trójkąta, np. C poprowadźmy średnicę $CD=2R$ tego okręgu i koniec D tej średnicy połączmy z jednym z pozostałych wierzchołków trójkąta, np. z B. Otrzy-



Rys. 58.

many $\triangle$ CDB będzie prostokątny, gdyż kąt wpisany CBD opiera się na półokręgu koła. Z trójkąta prostokątnego CDB otrzymamy

$$CB=CD\cdot\sin\sphericalangle CDB.$$

Ale $\sphericalangle CAB=\sphericalangle CDB$, gdyż obydwa są kątami wpisanymi w tym samym okręgu koła i opierają się na tym samym łuku CB. Zatem $CB=CD\cdot\sin A$, albo $CB=2R\cdot\sin A$.

Stąd
$$\frac{CB}{\sin A}=2R. \tag{13}$$

Gdybyśmy koniec D średnicy połączyli z wierzchołkiem A, otrzymalibyśmy, rozumując jak poprzednio:

$$\frac{AC}{\sin B}=2R. \tag{13'}$$

Podobnie, prowadząc średnicę przez wierzchołek A i łącząc jej drugi koniec z wierzchołkiem C, otrzymalibyśmy — po analogicznych rozumowaniach

$$\frac{AB}{\sin C}=2R. \tag{13''}$$

Ponieważ prawe strony otrzymanych równości są równe, zatem

$$\frac{AB}{\sin C}=\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin B}=2R. \tag{14}$$

Stąd

Twierdzenie: W każdym trójkącie iloraz długości boku tego trójkąta przez sinus kąta przeciwległego jest stały dla danego trójkąta i równy średnicy koła opisanego.

Twierdzenie to znane jest pod nazwą **twierdzenia sinusów.**

Wniosek. Jeżeli w proporcjach

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} \text{ oraz } \frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}$$

przestawimy wyrazy środkowe, wówczas otrzymamy:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{\sin C}{\sin A}, \text{ oraz } \frac{BC}{AC} = \frac{\sin A}{\sin B}.$$

Te proporcje można ująć w proporcję złożoną

$$AB : BC : AC = \sin C : \sin A : \sin B$$

tzn. że w każdym trójkącie boki jego są proporcjonalne do sinusów kątów przeciwległych.

Uwaga. Twierdzenie sinusów formułuje nie tylko związek między elementami trójkąta dowolnego, lecz wyraża również związek między tymi elementami a promieniem koła opisanego na trójkącie. Dlatego też bardzo często wygodnie jest stosować twierdzenie sinusów przy obliczaniu tego promienia.

§ 120. Znamy z geometrii twierdzenia o kwadracie długości boku, leżącego naprzeciw kąta ostrego lub rozwartego.

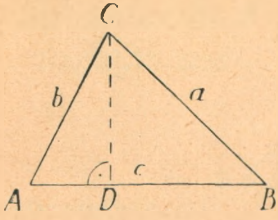
Jeżeli a, b, c oznaczają boki trójkąta, to

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2c \cdot AD \text{ (rys. 59)}$$

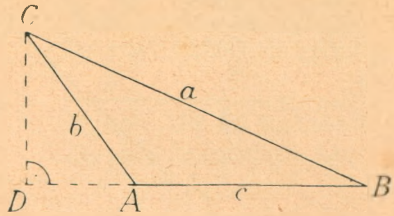
albo

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2c \cdot AD \text{ (rys. 60),}$$

zależnie od tego, czy kąt A jest ostry, czy rozwarty.



Rys. 59.



Rys. 60.

Ale w obu wypadkach możemy wyrazić odcinek AD w zależności od $\sphericalangle A$. Mianowicie:

gdy $\sphericalangle A$ jest ostry, to z $\triangle ACD$ (rys. 59) mamy:

$$AD = b \cdot \cos A$$

i podstawiając tę wartość w równość $a^2 = b^2 + c^2 - 2c \cdot AD$ otrzymamy

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A; \qquad (15)$$

gdy $\sphericalangle A$ jest rozwarty, to z $\triangle ACD$ (rys. 60) mamy:

$AD = b \cdot \cos \sphericalangle CAD$, ale $\sphericalangle CAD = 180^0 - \sphericalangle A$, zatem

$$AD = b \cdot \cos (180^0 - \sphericalangle A) = - b \cdot \cos A.$$

Podstawiając tę wartość w równość $a^2 = b^2 + c^2 + 2c \cdot AD$ otrzymamy

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A. \qquad (15)$$

Jak widzimy, przez wprowadzenie funkcji trygonometrycznych, obydwa twierdzenia geometryczne o kwadracie długości boku trójkąta można ująć w jedno

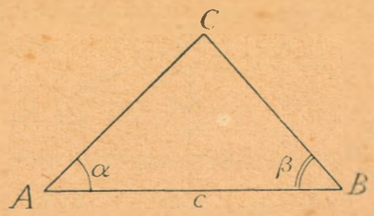
Twierdzenie. W trójkącie kwadrat długości boku trójkąta jest równy sumie kwadratów długości boków pozostałych mniej podwójny iloczyn tych długości przez kosinus kąta, zawartego między nimi.

Twierdzenie to nosi nazwę **twierdzenia kosinusów.**

Rozwiązywanie trójkątów dowolnych.

§ 121. Rozróżniamy w geometrii cztery podstawowe (elementarne) konstrukcje trójkątów dowolnych. Tym konstrukcjom podstawowym odpowiadają cztery wypadki rozwiązywania trójkątów dowolnych.

Wypadek I. Rozwiązać trójkąt, mając jeden jego bok i dwa kąty do niego przyległe (rys. 61).



Rys. 61.

Rozwiązanie:

Dane: $AB = c$; $\sphericalangle A = \alpha$; $\sphericalangle B = \beta$.

Znaleźć: $\sphericalangle C$; $AC = b$; $BC = a$.

Kąt C znajdziemy z równości $\alpha + \beta + \sphericalangle C = 180^0$, stąd

$$\sphericalangle \mathrm{C} = 180^0 - (\alpha + \beta).$$

Stosując twierdzenie sinusów, mamy:

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} \text{ albo } \frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin \beta}, \text{ stąd}$$

$$\mathrm{b} = \frac{\mathrm{c} \cdot \sin \beta}{\sin \mathrm{C}}.$$

Podobnie, na mocy tegoż twierdzenia:

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin \alpha}, \text{ stąd}$$

$$\mathrm{a} = \frac{\mathrm{c} \cdot \sin \alpha}{\sin \mathrm{C}}.$$

Zastosowanie liczbowe: $c = 43{,}05$ *dcm*; $\alpha = 71^0\,32'$; $\beta = 42^0\,54'$.

Obliczenie $\sphericalangle$ C. Obl. pomocnicze:

$$\alpha + \beta = 71^0\,32' + 42^0\,53' = 114^0\,25'.$$

Obl. główne:

$$\sphericalangle \mathrm{C} = 180^0 - 114^0\,25' = 65^0\,35'.$$

Obliczenie b.

$$\lg b = \lg c + \lg \sin \beta + \mathrm{clg} \sin C.$$

Obliczenia główne

$\lg c \approx 1{,}6340$

$\lg \sin \beta \approx \bar{1}{,}8328$

$\mathrm{clg} \sin C \approx 0{,}0407$

$\lg b \approx 1{,}5075$

$5065 - 3210$

$10 - 8$

Nlg 1,5075 ≈ 32,18

b ≈ 32,18 dcm

Obliczenia pomocnicze

$\lg 43.00 \approx 1{,}6335$ +

$P\ 5 \approx 5$

$\lg 43^0 05 \approx 1{,}6340$

$\lg \sin 42^0\,50' \approx \bar{1}{,}8324$ +

$P\ 3' \approx 4$

$\lg \sin 42^0\,53' \approx \bar{1}{,}8328$

$\lg \sin 65^0\,30' \approx \bar{1}{,}9590$ +

$P\ 5' \approx 3$

$\lg \sin 65^0\,35' \approx \bar{1}{,}9593$

$\mathrm{clg} \sin 65^0\,35' \approx 0{,}0407$

Obliczenie a.

$$\lg a = \lg c + \lg \sin \alpha + \mathrm{clg} \sin C.$$

Obliczenia główn

$$\begin{array}{ll} \lg c & \approx 1{,}6304 \\ \lg \sin \alpha & \approx \overline{1}{,}9771 \\ \underline{\operatorname{clg} \sin C} & \underline{\approx 0{,}0407} \\ \lg a & \approx 1{,}6518 \\ & \quad \underline{6513} - 4480 \\ & \qquad 5 - \quad 5 \end{array}$$

$N \lg 1{,}6518 \approx 44{,}85$

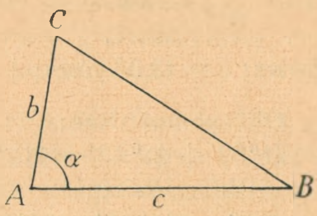
$a \approx 44{,}85$ *dcm*

Obliczenia pomocnicze

$$\begin{array}{lll} \lg \sin & 71^\circ 30' \approx \overline{1}{,}9770 & \\ \quad P & \quad 2' \approx \quad 1 & + \\ \hline \lg \sin & 71^\circ 32' \approx \overline{1}{,}9771 & \end{array}$$

Odpowiedź: $a \approx 44{,}85$ *dcm*; $b \approx 32{,}18$ *dcm*; $C = 65^\circ 45'$.

Wypadek II. Rozwiązać trójkąt, mając dwa jego boki i kąt, zawarty między nimi (rys. 62).



Rys. 62.

Rozwiązanie:

Dane: $AB = c$; $AC = b$; $\sphericalangle A = \alpha$.

Znaleźć: $CB = a$; $\sphericalangle B$; $\sphericalangle C$.

Bok $CB = a$ znajdziemy na mocy twierdzenia kosinusów:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\, b \cdot c \cdot \cos \alpha. \text{ Stąd}$$

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2\, bc \cdot \cos \alpha}.$$

Aby obliczyć $\sphericalangle B$, zastosujemy twierdzenie sinusów:

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin \alpha}. \text{ Stąd}$$

$$\sin B = \frac{b \cdot \sin \alpha}{a};$$ przy pomocy tablic znajdziemy $\sphericalangle B$.

Wreszcie $\sphericalangle C$ znajdziemy z równania:

$$\alpha + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180^\circ, \text{ stąd } \sphericalangle C = 180^\circ - (\alpha + \sphericalangle B).$$

Zastosowanie liczbowe: $c = 13{,}25$ *dcm*; $b = 8{,}43$ *dcm*; $\alpha = 43^\circ 52'$.

Obliczenie a.

$b^2 = 8{,}43 \cdot 8{,}43 \approx 71{,}06$ (po zaokrągleniu)

$c^2 = 13{,}25 \cdot 13{,}25 \approx 175{,}6$ („ „)

$\lg 2\,bc \cdot \cos\alpha = \lg 2 + \lg b + \lg c + \lg \cos\alpha.$

Obliczenia główne

$$\begin{array}{ll} \lg 2 & \approx 0{,}3010 \\ \lg b & \approx 0{,}9258 \\ \lg c & \approx 1{,}1222 \\ \lg \cos\alpha & \approx \overline{1},8580 \\ \hline \lg 2bc \cdot \cos\alpha & \approx 2{,}2070 \\ & \quad 2070 - 1611 \end{array}$$

$\mathrm{N}\lg 2bc \cdot \cos\alpha \approx 161{,}6.$

$2bc \cdot \cos\alpha \approx 161{,}6.$

$a^2 \approx 71{,}06 + 175{,}6 - 161{,}6 =$

$= 85{,}06$

$a \approx \sqrt{85{,}06}$

Obliczenia pomocnicze

$$\left.\begin{array}{l} \lg \cos 43^0 50' \approx \overline{1},8582 \\ \quad P \quad 2' \approx \quad 2 \end{array}\right\} -$$

$$\lg \cos 43^0 52' \approx \overline{1},8580$$

$$\begin{array}{r} 71{,}06 \\ +\ 175{,}6 \\ \hline 246{,}66 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 246{,}66 \\ -\ 161{,}6 \\ \hline 85{,}06 \end{array}$$

$\lg a = \frac{1}{2} \lg 85{,}06\,;$

$$\left.\begin{array}{l} \lg 85{,}00 \approx 1{,}9294 \\ \quad P \quad 6 \approx \quad 3 \end{array}\right\} +$$

$$\lg 85{,}06 \approx 1{,}9297$$

$$\lg a \approx \frac{1{,}9297}{2} \approx 0{,}9648$$

$$\begin{array}{rcr} -\ 9647 & - & 9220 \\ \hline 1 & - & 1 \end{array}$$

$\mathrm{Nlg}\ a \approx 9{,}221$

a ≈ 9,221 dcm

Obliczenie ∢ B.

$\lg \sin B = \lg b + \lg \sin\alpha + \mathrm{clg}\ a.$

Obliczenia główne

$$\begin{array}{ll} \lg b & \approx 0{,}9258 \\ \lg \sin\alpha & \approx \overline{1},8408 \\ \mathrm{clg}\ a & \approx \overline{1},0352 \\ \hline \lg \sin B & \approx \overline{1},8018 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rcr} 8004 & - & 39^0\,10' \\ \hline 14 & - & 9' \end{array}\right\} +$$

$B \approx 39^0 19'$

Obliczenia pomocnicze

$$\begin{array}{l} \lg\ 9{,}221 \approx 0{,}9648 \\ \mathrm{clg}\ 9{,}221 \approx \overline{1},0352 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lg \sin 43^0 50' \approx \overline{1},8405 \\ \quad P \quad 2' \quad 3 \end{array}\right\} +$$

$$\lg \sin 43^0 52' \approx \overline{1},8408$$

Obliczenie ∢ C.

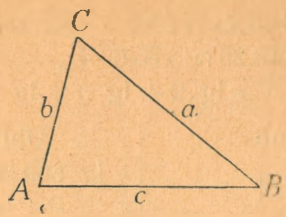
∢ $C \approx 180^0 - 83^0 11' = 96^0 49'$

Obliczenie pomocnicze

$43^0 52' + 39^0 19' = 83^0 11'.$

Odpowiedź: $a \approx 9{,}221\ dcm$; ∢ $B \approx 39^0 19'$; ∢ $C \approx 96^0 49'$.

Wypadek III. Rozwiązać trójkąt, mając trzy jego boki (rys. 63).



Rys. 63.

Rozwiązanie:
Dane: $AB = c$; $BC = a$; $AC = b$.
Znaleźć: $\sphericalangle A$; $\sphericalangle B$; $\sphericalangle C$.

Stosując twierdzenie kosinusów względem jednego z boków trójkąta, otrzymamy:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A. \text{ Stąd}$$

$2bc \cdot \cos A = b^2 + c^2 - a^2$ i $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, a przy pomocy tablic znajdziemy $\sphericalangle A$.

Stosując następnie twierdzenie sinusów: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

otrzymamy $$\sin B = \frac{b \cdot \sin A}{a},$$

a przy pomocy tablic znajdziemy $\sphericalangle B$.

Wreszcie kąt C znajdziemy z równania
$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180^0$, stąd $\sphericalangle C = 180^0 - (\sphericalangle A + \sphericalangle B)$.

Zastosowanie liczbowe: $a = 9{,}4\,dcm$; $b = 5{,}3\,dcm$; $c = 4{,}7\,dcm$.

Obliczenie $\sphericalangle A$:

$$b^2 = 28{,}09;\quad c^2 = 22{,}09;\quad a^2 = 88{,}36.$$
$$b^2 + c^2 = 50{,}18;\quad b^2 + c^2 - a^2 = -38{,}18.$$
$$2 \cdot b \cdot c = 49{,}82.$$

$$\cos A = \frac{-38{,}18}{49{,}82} = -\frac{3818}{4982}.$$

Ponieważ $\cos A$ ma wartość ujemną, a kąt A jest kątem trójkąta, więc $\sphericalangle A$ jest kątem rozwartym. Zatem istnieje taki kąt ostry x, że $\sphericalangle A = 180^0 - x$.

Stąd: $\cos A = \cos(180^0 - x)$, czyli $\cos A = -\cos x$. Ponieważ $\cos A = -\frac{3818}{4982}$, więc $-\cos x = -\frac{3818}{4982}$ czyli $\cos x = \frac{3818}{4982}$.

$\lg \cos x = \lg 3818 + \mathrm{clg}\ 4982.$

obliczenia główne.

$$\begin{array}{l}
\lg\ 3818 \approx 3{,}5818 \\
\underline{\text{clg}\ 4982 \approx \overline{4}{,}3026} \\
\lg\cos x \approx \overline{1}{,}8844
\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r}
\underline{8843 - 40^0} \\
1 - \quad 1'
\end{array}\right\} -$$

$x \approx 39^0\,59'$.

Stąd $\sphericalangle A \approx 180^0 - 39^0\,59' = 140^0\,1'$

obliczenia pomocnicze.

$$\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}
\lg\ 3810 \approx 3{,}5809 \\
P \quad\quad 8 \approx \quad\quad 9
\end{array}\right\} + \\
\hline
\lg\ 3818 \approx 3{,}5818 \\
\hline\hline
\left.\begin{array}{l}
\lg\ 4980 \approx 3{,}6972 \\
P \quad\quad 2 \approx \quad\quad 2
\end{array}\right\} + \\
\hline
\lg\ 4982 \approx 3{,}6974 \\
\text{clg}\ 4982 \approx \overline{4}{,}3026
\end{array}$$

Obliczenie B.

$$\lg\sin B = \lg b + \lg\sin A + \text{clg}\ a.$$

obliczenia główne.

$$\begin{array}{l}
\lg\ b \quad\quad \approx 0{,}7243 \\
\lg\ \sin A \approx \overline{1}{,}8080 \\
\underline{\text{clg}\ a \quad\quad \approx \overline{1}{,}0269} \\
\lg\ \sin B \approx \overline{1}{,}5592
\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r}
\underline{5576 - 21^0\,10'} \\
16 - \quad\quad 5'
\end{array}\right\} +$$

$\sphericalangle B \approx 21^0\,15'$.

obliczenia pomocnicze.

$$\sin 140^0 1' = \sin(180^0 - 39^0 59')$$

$$= \sin 39^0\,59'$$

$$\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}
\lg\ \sin\ 39^0\,50' \approx \overline{1}{,}8066 \\
P \quad\quad 9' \approx \quad\quad 14
\end{array}\right\} + \\
\hline
\lg\ \sin\ 39^0\,59' \approx \overline{1}{,}8080 \\
\hline\hline
\lg\ 9{,}4 \approx 0{,}9731 \\
\text{clg}\ 9{,}4 \approx \overline{1}{,}0269
\end{array}$$

Obliczenie $\sphericalangle$ C.

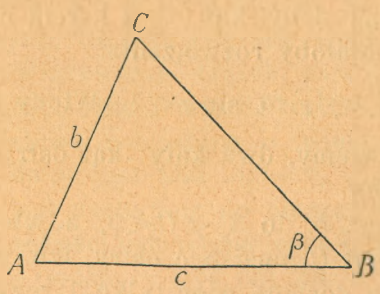
$\sphericalangle C = 180^0 - 161^0\,16' = 18^0\,44'$

obliczenia pomocnicze

$140^0\,1' + 21^0\,15' = 161^0\,16'$

Odpowiedź: $\sphericalangle A \approx 140^0\,1'$; $\sphericalangle B \approx 21^0\,15'$; $\sphericalangle C \approx 18^0\,44'$.

Wypadek IV. Rozwiązać trójkąt, mając dwa jego boki i kąt przeciwległy jednemu z nich (rys. 64).



Rys. 64.

Rozwiązanie:

Dane: $AB = c$; $AC = b$; $\sphericalangle B = \beta$.

Znaleźć: CB; $\sphericalangle A$; $\sphericalangle C$.

Z twierdzenia sinusów mamy:

$$\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin \beta}. \text{ Stąd } \sin C=\frac{c \cdot \sin \beta}{b}$$

przy pomocy tablic znajdziemy $\sphericalangle C$.

$\sphericalangle A$ znajdziemy z równania: $\sphericalangle A+\sphericalangle C+\beta=180^{0}$, czyli $\sphericalangle A=$ $=180^{0}-(\beta+C)$. Wreszcie stosując powtórnie twierdzenie sinusów

$$\frac{CB}{\sin A}=\frac{b}{\sin \beta}$$

znajdziemy
$$CB=\frac{b \sin A}{\sin \beta}.$$

Powstaje pytanie, czy dla dowolnie dobranych c, b, β zadanie jest zawsze możliwe i ile posiada rozwiązań?

Aby na postawione pytanie odpowiedzieć, rozważmy otrzymaną wartość $\sin C$:

$$\sin C=\frac{c \cdot \sin \beta}{b}.$$

1°. Jeżeli $\frac{c \sin \beta}{b}>1$, wtedy wartość $\sin C$ byłaby większa od 1, co, jak wiemy, jest niemożliwe. W tym więc wypadku zadanie nie miałoby rozwiązania. Uczący się wykaże, że niezależnie od kątów trójkąta, $c \cdot \sin \beta$ wyraża wysokość danego trójkąta względem boku CB. Wobec tego wysokość ta nie może być większa od boku b.

2°. Jeżeli $\frac{c \sin \beta}{b}=1$, wtedy $\sin C=1$, zatem $C=90^{0}$. W takim razie trójkąt jest trójkątem prostokątnym i kąt β musi być kątem ostrym. Gdyby więc dany kąt β był kątem rozwartym lub prostym, zadanie nie miałoby rozwiązania.

3°. Jeżeli $\frac{c \sin b}{b}<1$, to $\sin c<1$. Wtedy tej wartości $\sin C$ odpowiadają, jak wiemy, dwa kąty: kąt ostry C_1 i kąt rozwarty $C_2=180^{0}-C_1$ (§ 96).

Jeżeli zatem $c<b$, to i $\sphericalangle C<\beta$, a wtedy niezależnie od wielkości kąta β, kąt C musi być ostry, tzn. może przyjąć tylko wartość C_1. Zadanie posiada więc tylko 1 rozwiązanie.

Jeżeli $c=b$, to i $\sphericalangle C=\beta$. Zatem β i $\sphericalangle C$ muszą być kątami ostrymi, tzn., że w tym wypadku zadanie ma tylko 1 rozwiązanie (trójkąt równoramienny). Gdyby β był kątem rozwartym lub prostym, zadanie nie miałoby rozwiązań.

Jeżeli $c > b$, to i $\sphericalangle C > \beta$. Zatem β musi być kątem ostrym, a wtedy kąt C może być kątem ostrym, lub rozwartym, tzn. może przyjąć wartość C_1 i wartość C_2. W tym więc wypadku zadanie będzie miało dwa rozwiązania.

Zestawienie otrzymanych wyników podaje poniższa tabela:

<table>
<tr><td>$c \cdot \sin\beta > b$</td><td></td><td></td><td>rozwiązań nie ma</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$c \cdot \sin\beta = b$</td><td rowspan="3"></td><td>$\beta > 90^0$</td><td rowspan="2">rozwiązań nie ma</td></tr>
<tr><td>$\beta = 90^0$</td></tr>
<tr><td>$\beta < 90^0$</td><td>1 rozwiązanie ($\triangle$ prostokątny)</td></tr>
<tr><td rowspan="7">$c \cdot \sin\beta < b$</td><td>$c < b$</td><td></td><td>1 rozwiązanie</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$c = b$</td><td>$\beta > 90^0$</td><td rowspan="2">rozwiązań nie ma</td></tr>
<tr><td>$\beta = 90^0$</td></tr>
<tr><td>$\beta < 90^0$</td><td>1 rozwiązanie ($\triangle$ równoramienny)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$c > b$</td><td>$\beta > 90^0$</td><td rowspan="2">rozwiązań nie ma</td></tr>
<tr><td>$\beta = 90^0$</td></tr>
<tr><td>$\beta < 90^0$</td><td>2 rozwiązania</td></tr>
</table>

Uczący się stwierdzi słuszność otrzymanych wyników drogą wykonania odpowiednich konstrukcji geometrycznych.

§ 122. Cztery zadania, rozwiązane w § poprzednim, stanowią, jak zaznaczyliśmy w tym §, podstawowe wypadki rozwiązywania trójkątów dowolnych. Do tych czterech wypadków podstawowych sprowadzamy rozwiązywanie takich zadań, w których figury w nich występujące można podzielić na trójkąty.

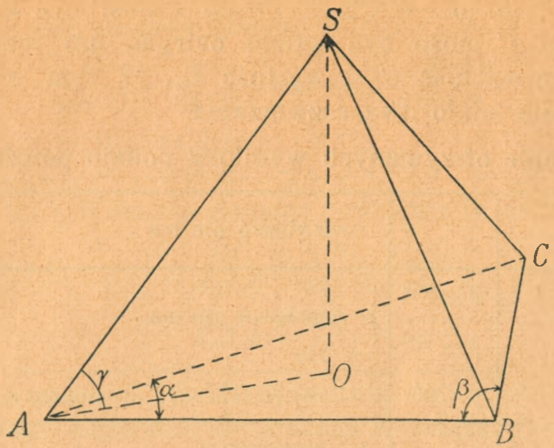
Zadanie. Podstawą ostrosłupa o wierzchołku S jest trójkąt ABC, w którym dany jest bok $AB = c$, $\sphericalangle A = \alpha$, $\sphericalangle B = \beta$. Krawędź boczna SA jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem γ, a spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem okręgu koła opisanego na trójkącie podstawy (rys. 65). Znaleźć objętość ostrosłupa.

R o z w i ą z a n i e:

Dane: $BA = c$; $\sphericalangle CAB = \alpha$; $\sphericalangle ABC = \beta$.

$AO = BO = CO$.

$SO \perp [ABC]$; $\sphericalangle SAO = \gamma$.



Rys. 65

Znaleźć: objętość (V) ostrosłupa.

$$V = \frac{B \cdot h}{3},$$

gdzie B oznacza pole podstawy, h — wysokość ostrosłupa.

Obliczenie B.

$B = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin\alpha$ (p. zadanie I § 118). AC obliczymy z trójkąta ABC, stosując twierdzenie sinusów:

$$\frac{AC}{\sin\beta} = \frac{AB}{\sin \sphericalangle C}.$$

Ale $\sphericalangle C = 180^0 - (\alpha + \beta)$, więc $\sin \sphericalangle C = \sin(\alpha + \beta)$. Stąd

$$AC = \frac{c \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Podstawiając wartość AC do wzoru na pole podstawy, otrzymamy

$$B = \frac{c^2 \sin\alpha \cdot \sin\beta}{2 \sin(\alpha + \beta)}.$$

Obliczenie . Z trójkąta prostokątnego SOA ($\sphericalangle 0 = 90^0$) znajdziemy $h = SO = AO \cdot \operatorname{tg} \gamma$.

OA, jako promień koła opisanego na $\triangle$ ABC, znajdziemy przy pomocy twierdzenia sinusów:

$$OA = \frac{AB}{2 \sin \sphericalangle C} = \frac{c}{2 \sin(\alpha + \beta)}. \text{ Stąd } h = \frac{c \cdot \operatorname{tg} \gamma}{2 \sin(\alpha + \beta)}.$$

Podstawiając wartości B i h do wzoru na objętość, otrzymamy

$$V = \frac{c^3 \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \operatorname{tg} \gamma}{12 \sin^2 (\alpha + \beta)}.$$

Ćwiczenia.

223. Rozwiązać trójkąt ABC, mając

a) $AB = 8{,}32\ m$;	$\sphericalangle A = 42^0 37'$;	$\sphericalangle B = 75^0 28'$;
b) $AC = 2{,}39\ m$;	$AB = 3{,}51\ m$;	$\sphericalangle A = 65^0 43'$;
c) $AB = 32{,}8\ dcm$;	$BC = 35{,}4\ dcm$;	$AC = 41{,}9\ dcm$;
d) $AB = 15{,}38\ m$;	$AC = 37\ m$;	$\sphericalangle B = 43^0 28'$;
e) $BC = 7{,}39\ dcm$;	$\sphericalangle B = 34^0 12'$;	$\sphericalangle A = 102^0 51'$;
f) $AC = 0{,}549\ m$;	$\sphericalangle A = 132^0 5'$;	$\sphericalangle C = 15^0 27'$;
g) $AB = 4\ m$;	$BC = 5\ m$;	$AC = 6\ m$;
h) $BC = 12{,}3\ dcm$;	$AC = 17{,}8\ dcm$;	$\sphericalangle A = 28^0 52'$.

224. Obliczyć pole trójkąta, mając bok c i dwa kąty do niego przyległe. Wykonać obliczenia dla $c = 8{,}31\ dcm$; $\alpha = 42^0 36'$; $\beta = 75^0 17'$.

225. Rozwiązać trójkąt, mając promień R okręgu koła opisanego i dwa kąty trójkąta α i β. Wykonać obliczenia dla $R = 3{,}943\ m$; $\alpha = 51^0 8'$; $\beta = 68^0 33'$.

226. Rozwiązać trójkąt, mając dwa jego kąty α i β i wysokość h względem jednego z boków. Wykonać obliczenia dla $h = 22{,}51\ dcm$; $\alpha = 63^0 24'$; $\beta = 71^0 51'$.

227. Obliczyć promień okręgu koła wpisanego w trójkąt ABC, w którym dane są: $AB = c$; $\sphericalangle A = \alpha$; $\sphericalangle B = \beta$. Wykonać obliczenia dla $c = 7\ dcm$; $\alpha = 59^0 36'$; $\beta = 73^0 24'$.

Wskazówka: zastosować wzór: $r = \dfrac{\text{pole } \triangle}{\frac{1}{2} \text{ obwodu}}$.

228. Obliczyć pole równoległoboku $ABCD$, w którym bok $AB = a$ tworzy z przekątną AC kąt α, a z przekątną BD — kąt β. Wykonać obliczenia dla $a = 9\ cm$; $\alpha = 48^0 15'$; $\beta = 76^0 3'$.

229. Na punkt materialny działają dwie siły: $p = 15\ kg$ i $q = 18\ kg$, tworząc ze sobą kąt $71^0 18'$. Obliczyć wielkość siły wypadkowej.

230. Na punkt materialny działają dwie siły: $p = 13\ kg$ i q. Wypadkowa tych sił $R = 21\ kg$ tworzy z siłą p kąt $35^0 33'$. Obliczyć wielkość siły q.

231. Obliczyć boki trójkąta, mając jego pole s i dwa kąty: α i β. Wykonać obliczenia dla $s = 54\ dcm^2$; $\alpha = 38^0 5'$; $\beta = 79^0 13'$.

232. Obliczyć pole równoległoboku $ABCD$, w którym dane są: $AB = a$, kąt $DAB = \alpha$ i przekątna $DB = l$. Wykonać obliczenia dla $a = 8{,}7\ dcm$; $\alpha = 53^0 49'$; $l = 9{,}15\ dcm$.

233. Obliczyć objętość trójkątnego foremnego ostrosłupa, którego bok podstawy jest równy a i krawędź boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α.

Zastosowanie liczbowe: $a = 41{,}55\ m$; $\alpha = 49^0 58'$.

234. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoramienny, w którym ramię jest równe b i kąt przy podstawie α. Krawędzie boczne są sobie równe i każda z nich jest nachylona do płaszczyzny podstawy ostrosłupa pod kątem β. Obliczyć objętość ostrosłupa.

Zastosowanie liczbowe: $b = 2{,}008\ m$; $\alpha = 75^0 23'$; $\beta = 44^0 4'$.

235. Podstawami prostego graniastosłupa są trójkąty ABC i $A_1B_1C_1$, w których $AB = A_1B_1 = c$; $BC = B_1C_1 = a$ i $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A_1B_1C_1 = \alpha$. Przekątna A_1C ściany bocznej ACC_1A_1 ma długość równą $\sqrt{a^2 + c^2}$. Obliczyć objętość prostopadłościanu.

Zastosowanie liczbowe: $a = 4{,}009\ m$; $c = 7{,}521\ m$; $\alpha = 77^0 21'$.

236. Podstawą prostego graniastosłupa jest równoległobok, którego bok $= a$ tworzy z jedną przekątną równoległoboku kąt α, a z drugą przekątną — kąt β. Odcinek, łączący wierzchołek kąta rozwartego górnej podstawy z punktem przecięcia się przekątnych dolnej podstawy, ma długość a i jest nachylony do płaszczyzny podstawy pod kątem β. Znaleźć objętość graniastosłupa.

Zastosowanie liczbowe: $a = 8{,}051\ m$; $\alpha = 35^0 45'$; $\beta = 68^0 42'$.

Część IV. Funkcje trygonometryczne sumy kątów.

123. Zajmiemy się obecnie jednym z najważniejszych zagadnień trygonometrii: mając funkcje trygonometryczne kątów α i β, obliczyć funkcje trygonometryczne kąta $\alpha + \beta$.

Niechaj $\sphericalangle AOB = \alpha$ i $\sphericalangle BOC = \beta$ (rys. 66) oznaczają dwa kąty ostre. W takim razie $\sphericalangle AOC = \alpha + \beta$. Na ramieniu OC kąta $\alpha + \beta$ obierzmy dowolny punkt D i poprowadźmy:

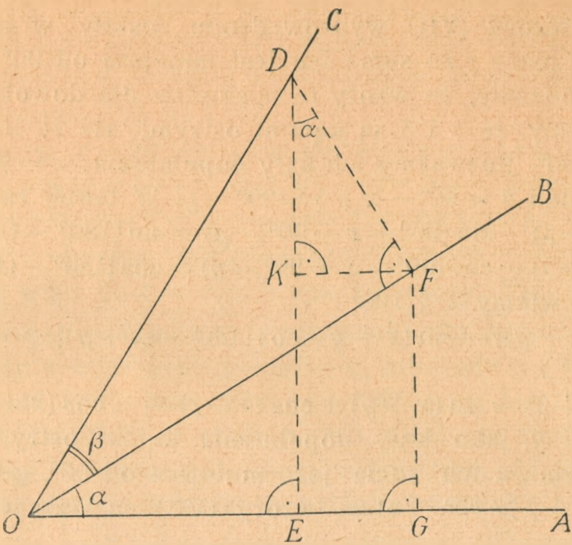
$$DE \perp OA;\quad DF \perp OB;\quad FG \perp OA;\quad FK \perp DE.$$

Z trójkąta prostokątnego ODE mamy: $DE = OD \cdot \sin(\alpha + \beta)$ i $OE = OD \cdot \cos(\alpha + \beta)$. Ale $DE = DK + KE$ i $OE = OG - EG$.

Ponieważ $KE = FG$ i $EG = KF$, więc

$$OD \cdot \sin(\alpha + \beta) = DK + FG \qquad (a)$$

$$OD \cdot \cos(\alpha + \beta) = OG - KF \qquad (b).$$



Rys. 66.

Z trójkąta prostokątnego DKF, w którym $\angle K = 90^0$ i $\angle D = \alpha$ (gdyż ramiona kąta ostrego KDF są odpowiednio prostopadłe do ramion kąta ostrego AOB) mamy:

$$DK = DF \cdot \cos\alpha \text{ i } KF = DF \cdot \sin\alpha.$$

Z trójkąta prostokątnego OFG ($\angle G = 90^0$) mamy:

$$FG = OF \cdot \sin\alpha \text{ i } OG = OF \cdot \cos\alpha,$$

a z trójkąta prostokątnego ODF ($\angle F = 90^0$) otrzymujemy:

$$DF = OD \cdot \sin\beta \text{ i } OF = OD \cdot \cos\beta.$$

Zatem

$$DK = OD \sin\beta \cdot \cos\alpha; \quad KF = OD \sin\beta \cdot \sin\alpha$$

$$FG = OD \cos\beta \cdot \sin\alpha; \quad OG = OD \cos\beta \cdot \cos\alpha.$$

Podstawiając te wartości w równości (a) i (b) otrzymamy

$$OD \cdot \sin(\alpha + \beta) = OD \cdot \sin\beta \cdot \cos\alpha + OD \cdot \cos\beta \cdot \sin\alpha,$$

$$OD \cdot \cos(\alpha + \beta) = OD \cdot \cos\beta \cdot \cos\alpha - OD \cdot \sin\beta \cdot \sin\alpha.$$

Dzieląc obie strony każdej z otrzymanych równości przez OD, otrzymamy:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\beta \cos\alpha + \cos\beta \sin\alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\beta \cos\alpha - \sin\beta \sin\alpha,$$

albo, stosując prawo przemienności sumy i iloczynu:

$$\left.\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta. \end{aligned}\right\} \quad \text{(VII)}$$

§ 124. Wzory (VII) wyprowadzone zostały w założeniu, że kąty α i β są ostre i że suma ich jest mniejsza od 90^0 (p. rys. 66). Wykażemy obecnie, że wzory te są słuszne dla dowolnych kątów.

a) Załóżmy, że α i β są kątami ostrymi, ale że ich suma jest większa od 90^0. Rozważmy ich kąty dopełnienia: $x = 90^0 - \alpha$ i $y = 90^0 - \beta$. Stąd $\alpha = 90^0 - x$ i $\beta = 90^0 - y$. W takim razie

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(90^0 - x + 90^0 - y) = \sin[180^0 - (x + y)].$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(90^0 - x + 90^0 - y) = \cos[180^0 - (x + y)].$$

Ale jak wiemy z § 100:

$\sin[180^0 - (x + y)] = \sin(x + y)$ i $\cos[180^0 - (x + y)] = -\cos(x + y)$.

Zatem

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(x + y) \text{ i } \cos(\alpha + \beta) = -\cos(x + y).$$

Kąty x i y, jako kąty dopełnienia kątów ostrych α i β, są kątami ostrymi, a ich suma jest mniejsza od 90^0, gdyż, według założenia, $\alpha + \beta > 90^0$. Zatem wzory (VII) są słuszne dla kątów x i y, czyli

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

i
$$\cos(\alpha + \beta) = -\cos(x + y) = -(\cos x \cos y - \sin x \sin y) =$$
$$= \sin x \sin y - \cos x \cos y.$$

Podstawmy na miejsce x i y ich wartości: $x = 90^0 - \alpha$; $y = 90^0 - \beta$. Otrzymamy:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin x \cos y + \cos x \sin y = \sin(90^0 - \alpha)\cos(90^0 - \beta) +$$
$$+ \cos(90^0 - \alpha)\sin(90^0 - \beta) = \cos\alpha \sin\beta + \sin\alpha\cos\beta$$

i $\cos(\alpha + \beta) = \sin x \sin y - \cos x \cos y = \sin(90^0 - \alpha)\sin(90^0 - \beta) -$
$$- \cos(90^0 - \alpha)\cos(90^0 - \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Widzimy więc, że wzory (VII) są słuszne dla dwóch kątów ostrych, których suma jest większa od 90^0, tzn. dla dwóch **dowolnych kątów ostrych.**

b) Załóżmy dalej, że jeden z kątów, np. α jest rozwarty, a drugi β ostry. Niechaj więc $\alpha = 90^0 + z$, gdzie z oznacza kąt ostry. Stąd $z = \alpha - 90^0$. W takim razie

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(90^0 + z + \beta) = \sin[90^0 + (z + \beta)]$$

i
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(90^0 + z + \beta) = \cos[90^0 + (z + \beta)].$$

Ale jak wiemy z § 104:

$\sin[90^0 + (z + \beta)] = \cos(z + \beta)$ i $\cos[90^0 + (z + \beta)] = -\sin(z + \beta)$.

Zatem

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos(z + \beta) \text{ i } \cos(\alpha + \beta) = -\sin(z + \beta).$$

Ale wzory (VII) są słuszne dla kątów ostrych z i β, tzn., że

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos(z + \beta) = \cos z \cos\beta - \sin z \sin\beta$$

i
$$\cos(\alpha + \beta) = -\sin(z + \beta) = -(\sin z \cos\beta + \cos z \sin\beta).$$

Podstawmy na miejsce z jej wartość $z=\alpha-90^0$. Otrzymamy

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos(\alpha-90^0)\cos\beta-\sin(\alpha-90^0)\sin\beta$$

i $$\cos(\alpha+\beta)=-[\sin(\alpha-90^0)\cos\beta+\cos(\alpha-90^0)\sin\beta.$$

Ale jak wiemy (§§ 83 i 99):

$$\sin(\alpha-90^0)=-\sin(90^0-\alpha)=-\cos\alpha$$

i $$\cos(\alpha-90^0)=\cos(90^0-\alpha)=\sin\alpha.$$ Zatem

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta-(-\cos\alpha\sin\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

i $$\cos(\alpha+\beta)=-(-\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

Widzimy więc, że i w tym wypadku wzory (VII) są słuszne.

c) Rozumując podobnie w wypadkach, gdy kąty α i β są rozwarte tzn. gdy $\alpha=90^0+p$; $\beta=90^0+r$, albo gdy α i β są kątami większymi od 180^0, tzn. gdy $\alpha=180^0+s$; $\beta=180^0+t$ lub $\alpha=360^0-w$; $\beta=360^0-v$ gdzie p, r, s, t, w, v są kątami ostrymi, można wykazać, w oparciu o wzory redukcyjne, że **wzory (VII) są słuszne dla dwóch dowolnych kątów dodatnich.**

d) Załóżmy, że α i β są kątami ujemnymi. Niechaj $\alpha=-x$; $\beta=-y$, gdzie x i y oznaczają kąty dodatnie. Mamy

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin[-x+(-y)]=\sin(-x-y)=\sin[-(x+y)]=$$
$$=-\sin(x+y)$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos[-x+(-y)]=\cos(-x-y)=\cos[-(x+y)]=$$
$$=\cos(x+y).$$

Ponieważ x i y są kątami dodatnimi, więc dla tych kątów wzory (VII) są słuszne. Zatem

$$\sin(\alpha+\beta)=-\sin(x+y)=-\sin x\cos y-\cos x\sin y=$$
$$=\sin(-x)\cos(-y)+\cos(-x)\sin(-y)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y=$$
$$=\cos(-x)\cos(-y)-\sin(-x)\sin(-y)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

zgodnie ze wzorami (I) § 83.

Jak widzimy wzory (VII) są więc słuszne i dla kątów ujemnych.

§ 125. Podstawmy we wzorach (VII) $\beta=-\gamma$. Otrzymamy

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin[\alpha+(-\gamma)]=\sin(\alpha-\gamma)=$$
$$\sin\alpha\cos(-\gamma)+\cos\alpha\sin(-\gamma)=\sin\alpha\cos\gamma-\cos\alpha\sin\gamma.$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos[\alpha+(-\gamma)]=\cos(\alpha-\gamma)=$$
$$=\cos\alpha\cos(-\gamma)-\sin\alpha\sin(-\gamma)=\cos\alpha\cos\gamma+\sin\alpha\sin\gamma.$$

Mamy więc następujące wzory:

$$\left.\begin{aligned}\sin(\alpha-\gamma)&=\sin\alpha\cos\gamma-\cos\alpha\sin\gamma\\ \cos(\alpha-\gamma)&=\cos\alpha\cos\gamma+\sin\alpha\sin\gamma\end{aligned}\right\}\qquad\text{(VIII)}$$

§ **126.** Ponieważ

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} \quad \text{i} \quad \operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)},$$

zatem

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

i

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}.$$

Dzieląc liczniki i mianowniki otrzymanych wyrażeń ułamkowych przez $\cos\alpha\cos\beta$ otrzymamy:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\beta}{\cos\beta}+\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}$$

i

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\beta}{\cos\beta}-\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}$$

czyli

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tg}(\alpha+\beta)&=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\\ \text{i}\quad \operatorname{tg}(\alpha-\beta)&=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\end{aligned}\right| \qquad \text{(IX)}$$

Uwaga. Sposób, przy pomocy którego obliczyliśmy, $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ i $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$ można stosować tylko w tym wypadku, gdy $\cos\alpha$ i $\cos\beta$ nie są równe zeru, tzn. gdy $\alpha\neq 90^0+n\cdot 180^0$ i $\beta\neq 90^0+n\cdot 180^0$, gdyż dla $\alpha=90^0+n\cdot 180^0$ i $\beta=$ $=90^0+n\cdot 180^0$, $\cos\alpha=0$ i $\cos\beta=0$, a dzielenie przez zero nie jest działaniem określonym. Dla tych wartości α i β można obliczyć $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ i $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$ przy pomocy wzorów redukcyjnych. Jeżeli np. $\alpha=270^0$, wówczas $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\operatorname{tg}(180^0+90^0+\beta)=\operatorname{tg}[180^0+(90^0+\beta)]=$ $=\operatorname{tg}(90^0+\beta)=-\operatorname{ctg}\beta$.

Ćwiczenia.

237. Obliczyć przy pomocy wzorów (VII), (VIII) i (IX) funkcje trygonometryczne kątów 75^0, 15^0.

Wskazówka: $75^0=45^0+30^0$.

238. Obliczyć funkcje trygonometryczne kątów $\alpha+\beta$ i $\alpha-\beta$ wiedząc, że $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\beta=\frac{12}{13}$ w założeniu, że α i β są kątami ostrymi.

239. Wyprowadzić wzory, wyrażające

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) \text{ i } \operatorname{ctg}(\alpha-\beta)$$

w zależności od $\operatorname{ctg}\alpha$ i $\operatorname{ctg}\beta$.

240. Sprowadzić do prostszej postaci wyrażenia:

a) $\sin(\alpha+60^0)+\sin(\alpha-60^0)$; b) $\sin(\alpha+60^0)-\sin(\alpha-60^0)$;
c) $\sin(\alpha+30^0)+\sin(\alpha-30^0)$; d) $\sin(\alpha+30^0)-\sin(\alpha-30^0)$;
e) $\cos(\alpha-30^0)+\cos(\alpha+30^0)$; f) $\cos(\alpha-30^0)-\cos(\alpha+30^0)$;
g) $\operatorname{tg}(\alpha+60^0)+\operatorname{tg}(\alpha-60^0)$; h) $\operatorname{tg}(\alpha+60^0)-\operatorname{tg}(\alpha-60^0)$.

241. Wykazać, że następujące równości są tożsamościami:

a) $\cos\beta+\cos(120^0+\beta)+\cos(120^0-\beta)=0$;
b) $\sin\beta+\sin(120^0+\beta)-\sin(120^0-\beta)=0$;
c) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}=\operatorname{tg}\alpha$;
d) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}=\operatorname{ctg}\alpha$;
e) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\beta-\sin^2\alpha$;
f) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$;
g) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)=\cos^2\alpha-\cos^2\beta$;
h) $\operatorname{tg}(45^0+\alpha)\cdot\operatorname{tg}(45^0-\alpha)=1$;
i) $\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\alpha-\sin\beta\cos\beta$.

Funkcje trygonometryczne kąta podwojonego i połówkowego.

§ **127.** Jeżeli we wzorach:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

założymy, że $\alpha=\beta$, wówczas otrzymamy:

$$\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha$$
$$\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha$$
$$\operatorname{tg}(\alpha+\alpha)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha}, \text{ czyli}$$

$$\left.\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2\alpha-\sin^2\alpha \\ \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(X)}$$

Ponieważ kąt β jest kątem podwojonym względem kąta $\frac{\beta}{2}$ (tak, jak kąt 2α względem kąta α), zatem, zakładając, że $\alpha = \frac{\beta}{2}$, można wzory (X) napisać w postaci

$$\left.\begin{aligned}
\sin\beta &= 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\\
\cos\beta &= \cos^2\frac{\beta}{2} - \sin^2\frac{\beta}{2}\\
\operatorname{tg}\beta &= \frac{2\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}}
\end{aligned}\right| \qquad (X')$$

§ 128. Ponieważ $\sin^2\frac{\beta}{2} + \cos^2\frac{\beta}{2} = 1$, zatem wzory

$$\sin\beta = 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2} \text{ i } \cos\beta = \cos^2\frac{\beta}{2} - \sin^2\frac{\beta}{2}$$

można napisać w postaci

$$\sin\beta = \frac{2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\sin^2\frac{\beta}{2} + \cos^2\frac{\beta}{2}} \text{ i } \cos\beta = \frac{\cos^2\frac{\beta}{2} - \sin^2\frac{\beta}{2}}{\sin^2\frac{\beta}{2} + \cos^2\frac{\beta}{2}}.$$

Jeżeli licznik i mianownik otrzymanych wyrażeń ułamkowych podzielimy przez $\cos^2\frac{\beta}{2}$, wówczas otrzymamy:

$$\left.\begin{aligned}
\sin\beta &= \frac{2\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}}\\
\cos\beta &= \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}}
\end{aligned}\right| \qquad (XI)$$

Zauważmy, że ostatni ze wzorów (X′) oraz wzory (XI) wyrażają funkcje trygonometryczne kąta β w zależności tylko od $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$.

§ 129. W § 128 wyprowadziliśmy wzory, wyrażające funkcje trygonometryczne kąta β w zależności do funkcji trygonometrycznych kąta $\frac{\beta}{2}$. Rozwiążemy obecnie zagadnienie odwrotne: wyrazimy funkcje trygonometryczne kąta $\frac{\beta}{2}$ w zależności od funkcji trygonometrycznych kąta β.

Ze wzoru $\cos^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}=1$

otrzymujemy $\cos^2\frac{\beta}{2}=1-\sin^2\frac{\beta}{2}$

albo $\sin^2\frac{\beta}{2}=1-\cos^2\frac{\beta}{2}$.

Wobec tego wzór $\cos\beta=\cos^2\frac{\beta}{2}-\sin^2\frac{\beta}{2}$

można napisać w dwóch postaciach:

$$\cos\beta=1-\sin^2\frac{\beta}{2}-\sin^2\frac{\beta}{2}$$

albo $\cos\beta=\cos^2\frac{\beta}{2}-1+\cos^2\frac{\beta}{2}$.

Stąd $\cos\beta=1-2\sin^2\frac{\beta}{2}$

albo $\cos\beta=2\cos^2\frac{\beta}{2}-1$.

Z pierwszej równości otrzymujemy:

$$2\sin^2\frac{\beta}{2}=1-\cos\beta,$$

a z drugiej $2\cos^2\frac{\beta}{2}=\cos\beta+1$.

Stąd

$$\left.\begin{aligned}\sin\frac{\beta}{2}&=\mp\sqrt{\frac{1-\cos\beta}{2}}\\ \cos\frac{\beta}{2}&=\mp\sqrt{\frac{1+\cos\beta}{2}}\\ \text{Zatem}\quad \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}&=\mp\sqrt{\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}}.\end{aligned}\right\}\qquad\text{(XII)}$$

W zależności od ćwiartki, w której znajduje się kąt $\frac{\beta}{2}$, bierzemy otrzymane pierwiastki kwadratowe ze znakiem $+$ lub $-$.

Wzory (XII) posiadają duże znaczenie w trygonometrii. Posługując się nimi, moglibyśmy ułożyć tablice przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych. Ten sposób obliczania zilustrujemy na przykładzie następującym:

Wiemy, że $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ i $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Zatem

$$\sin 15^\circ = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}; \quad \cos 15^\circ = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}.$$

Obliczając otrzymane wyrażenia z dokładnością np. do czterech miejsc dziesiętnych, otrzymalibyśmy

$$\sin 15^\circ \approx 0{,}2588 \text{ i } \cos 15^\circ \approx 0{,}9659.$$

Stąd

$$\sin 7\tfrac{1}{2}^\circ \approx \sqrt{\frac{1-0{,}9659}{2}} \text{ i } \cos 7\tfrac{1}{2}^\circ \approx \sqrt{\frac{1+0{,}9659}{2}}.$$

Po wykonaniu rachunków otrzymalibyśmy

$$\sin 7\tfrac{1}{2}^\circ \approx 0{,}1305 \text{ i } \cos 7\tfrac{1}{2}^\circ \approx 0{,}9914.$$

Postępując podobnie w dalszym ciągu, otrzymalibyśmy przybliżone wartości sinusa i kosinusa kątów takich, jak $3\frac{3}{4}^\circ$, $1\frac{7}{8}^\circ$, $\frac{15}{16}^\circ$, $\frac{15}{32}^\circ$ itd., inaczej mówiąc — wartości sinusa i kosinusa bardzo małych kątów. Stosując do tych bardzo małych kątów wzory, wyrażające funkcje trygonometryczne sumy tych kątów, ułożylibyśmy właśnie tablice przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych.

W podobny sposób Joachim Rhoeticus (czytaj Retikus), przyjaciel i uczeń Kopernika. profesor Akademii Krakowskiej, obliczał w wieku XVI w przeciągu kilkunastu lat przy pomocy licznych rachmistrzów wartości przybliżone funkcji trygonometrycznych. Późniejszy rozwój matematyki uwolnił nas od tak żmudnej pracy. Dzięki niemu bowiem zdobyto nowe metody, nie wymagające tak uciążliwych rachunków, o których wspóminaliśmy wyżej.

Ćwiczenia.

242. Wiedząc, że $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ i że α jest kątem ostrym, obliczyć $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$ i $\operatorname{ctg} 2\alpha$.

243. Wiedząc, że $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$ i że α jest kątem rozwartym, obliczyć funkcje trygonometryczne kąta 2α.

244. Wykazać, że

a) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$;

b) $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$;

Wskazówka. $3\alpha = 2\alpha + \alpha$.

245. Wykazać, że następujące równości są tożsamościami:

a) $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$; b) $\frac{\sin 2\alpha}{1-\cos 2\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$;

c) $\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha$; d) $\frac{\sin\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha$;

e) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$; f) $\operatorname{tg}(45^0+\alpha)-\operatorname{tg}(45^0-\alpha) = 2\operatorname{tg} 2\alpha$;

g) $\frac{\sin 2\beta\cos\beta}{1+\cos 2\beta} = \sin\beta$; h) $\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg} 2\beta-\operatorname{tg}\beta} = \cos 2\beta$.

246. Opierając się na ćwiczeniu 239, wyrazić $\operatorname{ctg} 2\alpha$ w zależności od $\operatorname{ctg}\alpha$.

247. Wykazać, że następujące równości są tożsamościami:
a) $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{ctg} 2\alpha$; b) $\sin 2\alpha(\operatorname{ctg} 2\alpha+\operatorname{tg}\alpha) = 1$.

248. Obliczyć bez pomocy tablic funkcje trygonometryczne kątów:
a) $22^0 30'$; b) $67^0 30'$.

249. Wiedząc, ze $\sin\alpha = \frac{4\sqrt{3}}{8}$ i że α jest kątem ostrym, obliczyć funkcje trygonometryczne kąta $\frac{\alpha}{2}$.

250. Wiedząc, że $\operatorname{tg}\beta = -\frac{3}{4}$ i że β jest kątem rozwartym, obliczyć funkcje trygonometryczne kąta $\frac{\beta}{2}$.

251. Wykazać, że następujące równości są tożsamościami:

a) $\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; b) $\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$;

c) $(1-\cos\alpha)\cdot 2\cos^2\frac{\alpha}{2} = \sin^2\alpha$; d) $(1+\cos\alpha)\cdot 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = \sin^2\alpha$;

e) $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$;

f) $$\frac{\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}.$$

Wskazówka: licznik i mianownik lewej strony równości pomnożyć przez $\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}$.

g) $$\frac{\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - \sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Wskazówka: licznik i mianownik lewej strony równości pomnożyć przez $\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}$.

Sumy i różnice funkcji trygonometrycznych.

§ 130. Jeżeli znane z §§ 123 i 125 równości:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

i

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

dodamy i odejmiemy stronami, wówczas otrzymamy po redukcji

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$$

i

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\sin\beta.$$

Oznaczmy:

$$\alpha + \beta = A; \quad \alpha - \beta = B.$$

W takim razie $\alpha = \frac{A + B}{2}$; i $\beta = \frac{A - B}{2}$; i otrzymane powyżej równości przyjmą postać:

$$\left.\begin{aligned} \sin A + \sin B &= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} \\ \sin A - \sin B &= 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XIII)}.$$

tzn. **Suma sinusów dwóch kątów równa się podwojonemu iloczynowi sinusa połowy sumy tych kątów przez kosinus połowy ich różnicy.**

Różnica sinusów dwóch kątów równa się podwojonemu iloczynowi kosinusa połowy sumy tych kątów przez sinus połowy ich różnicy.

Podobnie, dodając i odejmując stronami równości

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

i

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

otrzymamy po redukcji

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$$

i

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2\sin\alpha\sin\beta.$$

Podstawiając, jak poprzednio: $\alpha + \beta = A$ i $\alpha - \beta = B$, otrzymane wyniki można napisać w postaci:

$$\left.\begin{aligned} \cos A + \cos B &= 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} \\ \text{i} \quad \cos A - \cos B &= -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2} \end{aligned}\right\} \qquad (XIV)$$

Suma kosinusów dwóch kątów równa się podwojonemu iloczynowi kosinusa połowy sumy tych kątów przez kosinus połowy ich różnicy.

Różnica kosinusów dwóch kątów równa się przeciwnej wartości podwojonego iloczynu sinusa połowy sumy tych kątów przez sinus połowy ich różnicy.

Posługując się wzorami (XIII) i (XIV), możemy sumom i różnicom sinusów i kosinusów nadawać postać jednomianów. Przekształcenie takie ułatwia często stosowanie rachunku logarytmicznego przy obliczaniu wartości liczbowych wyrażeń, zawierających sumy i różnice, do których rachunek logarytmiczny nie nadaje się (p. uwaga § 23).

Przykład. Przedstawić w postaci jednomianu wyrażenie:

$$3 - 4\sin^2\alpha.$$

Wyłączmy 4 przed nawias. Otrzymamy

$3 - 4\sin^2\alpha = 4\left(\frac{3}{4} - \sin^2\alpha\right)$. Ale $\frac{3}{4} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$, a jak wiemy

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^0, \text{ zatem}$$

$$3 - 4\sin^2\alpha = 4(\sin^2 60^0 - \sin^2\alpha) = 4(\sin 60^0 + \sin\alpha)(\sin 60^0 - \sin\alpha)$$

Stosując wzory (XIII) otrzymamy

$$3 - 4\sin^2\alpha = 4\cdot 2\sin\frac{60^0+\alpha}{2}\cos\frac{60^0-\alpha}{2}\cdot 2\cos\frac{60^0+\alpha}{2}\sin\frac{60^0-\alpha}{2}.$$

Otrzymany wynik ma postać jednomianu. Możemy jednak sprowadzić go do jeszcze prostszej postaci, jeżeli zauważymy, że

$$2\sin\frac{60^0+\alpha}{2}\cdot\cos\frac{60^0+\alpha}{2} = \sin(60^0+\alpha)$$

$$2\sin\frac{60^0-\alpha}{2}\cdot\cos\frac{60^0-\alpha}{2} = \sin(60^0-\alpha),$$

zgodnie ze wzorami (X). Zatem ostatecznie

$$3 - 4\sin^2\alpha = 4\sin(60^0+\alpha)\cdot\sin(60^0-\alpha).$$

Ćwiczenia.

252. Wyprowadzić wzory, wyrażające:

a) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta$; b) $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta$; c) $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta$;
d) $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta$.

Wskazówka. Zastosować podstawowe zależności między sinusem i kosinusem kąta a tangensem i kotangensem tegoż kąta.

253. Obliczyć bez pomocy tablic wartość wyrażenia:

a) $\sin 75^0 + \sin 15^0$; b) $\sin 75^0 - \sin 15^0$
c) $\cos 75^0 + \cos 15^0$; d) $\cos 75^0 - \cos 15^0$.

254. Wykazać, że

a) $1 + \cos A = 2\cos^2\frac{A}{2}$; b) $1 - \cos A = 2\sin^2\frac{A}{2}$;

c) $1 + \sin A = 2\sin^2(45^0 + \frac{A}{2})$; d) $1 + \sin A = 2\cos^2(45^0 - \frac{A}{2})$;

d) $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\cos(\alpha - 45^0)$;
e) $\sin\alpha - \cos\alpha = \sqrt{2}\sin(\alpha - 45^0)$.

255. Przedstawić w prostszej postaci wyrażenia:

a) $\frac{\sin 5\alpha + \sin 3\alpha}{\sin 5\alpha - \sin 3\alpha}$; b) $\frac{\sin 7\alpha + \sin 5\alpha}{\cos 7\alpha + \cos 5\alpha}$;

c) $\frac{\cos 8\alpha - \cos 6\alpha}{\sin 8\alpha - \sin 6\alpha}$; d) $\frac{\cos 9\alpha + \cos 3\alpha}{\cos 3\alpha - \cos 9\alpha}$;

256. Przedstawić w postaci najprostszego jednomianu wyrażenia:

a) $1 + 2\cos A$; b) $1 + \operatorname{tg} B$;
c) $1 - \operatorname{tg} B$; d) $\sqrt{2} + 2\sin\beta$;
e) $\sqrt{3} + 2\cos\beta$; f) $\sqrt{3} + \operatorname{tg}\alpha$;
g) $\sqrt{3} - 3\operatorname{tg}\beta$; h) $\sqrt{3} + \operatorname{ctg}\alpha$;
i) $1 - 4\sin^2\alpha$; k) $1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha$.

257. Wykazać, że następujące równości są tożsamościami:

a) $2\sin\alpha + \sin 2\alpha = 4\sin\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}$;

b) $1 + 2\cos\alpha + \cos 2\alpha = 4\cos\alpha\cos\frac{\alpha}{2}$;

c) $\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = \operatorname{tg}\frac{\alpha + \beta}{2}$;

d) $\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = \operatorname{tg}\frac{\alpha - \beta}{2}$;

e) $\frac{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}{2\sin\alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$;

f) $\sin 2\alpha \sin\beta + \sin\alpha \sin 2\beta = 4\sin\alpha \sin\beta \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

Równania trygonometryczne.

§ 131. Jeżeli równość, zachodząca między dwoma wyrażeniami, z których jedno przynajmniej zawiera funkcje trygonometryczne kąta (lub kątów), jest słuszna tylko dla niektórych wartości tego kąta (lub kątów), wówczas równość ta nazywa się **równaniem trygonometrycznym.**

Przykład I. Rozwiązać równanie:

$$\sin x + \cos^2 x + 1 = 0.$$

W równaniu tym występują **dwie** funkcje trygonometryczne tego samego kąta x. Ze wzoru $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ otrzymamy

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x.$$

Podstawiając otrzymaną wartość $\cos^2 x$ do równania danego, mamy $\sin x + 1 - \sin^2 x + 1 = 0$, albo $\sin^2 x - \sin x - 2 = 0$.

Otrzymaliśmy równanie kwadratowe z jedną niewiadomą $\sin x$. Rozwiązując to równanie otrzymamy:

$$\sin_1 x = -1; \qquad \sin_2 x = 2.$$

Pierwiastkiem głównym (§ 106) równania $\sin_1 x = -1$ jest $x_1 = 270^0$, wszystkie zaś kąty, spełniające to równanie, wyrażone są wzorem:

$$x_1 = n \cdot 360^0 + 270^0.$$

Równanie $\sin_2 x = 2$ pierwiastka głównego nie posiada, gdyż nie ma takiego kąta, którego sinus byłby równy 2.

Przykład II. Rozwiązać równanie:

$$\sin x + \cos 2x = 0.$$

W równaniu tym występują **dwa** kąty: x i $2x$. Ale $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, zatem równanie dane można napisać w postaci:

$$\sin x + \cos^2 x - \sin^2 x = 0.$$

W równaniu tym występują dwie funkcje trygonometryczne, ale **tego samego** kąta. Postępując jak w przykładzie I, otrzymamy równanie kwadratowe względem jednej niewiadomej $\sin x$:

$$2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0.$$

Stąd po rozwiązaniu:

$$\sin_1 x = -\tfrac{1}{2} \text{ i } \sin_2 x = 1.$$

Ponieważ pierwiastkiem głównym równania $\sin_1 x = -\frac{1}{2}$ jest $x_1 = 210^0$, a równania $\sin_2 x = 1$ jest $x_2 = 90^0$, zatem wszystkie kąty, spełniające dane równanie, wyrażone są wzorami:

$$X_1 = n \cdot 360^0 + 210^0$$

$$X'_1 = n \cdot 360^0 + 180^0 - 210^0 \text{ czyli } X'_1 = n \cdot 360^0 - 30^0 \text{ oraz}$$

$$X_2 = n \cdot 360^0 + 90^0$$

$$X'_2 = n \cdot 360^0 + 180^0 - 90^0 \text{ czyli również } X_2 = n \cdot 360^0 + 90^0.$$

§ 132. Jak zatem widzimy, rozwiązując równania trygonometryczne staramy się doprowadzić je do równań, w których występuje tylko **jedna funkcja trygonometryczna jednego tylko kąta**, tzn. doprowadzić do równania algebraicznego z jedną niewiadomą.

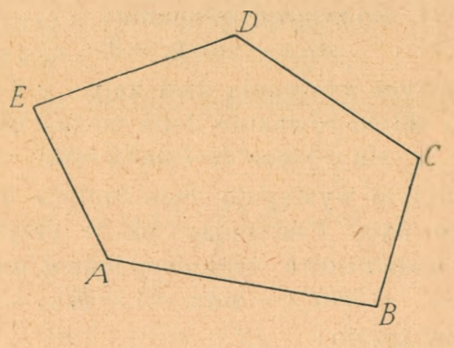
Ćwiczenia.

258. Rozwiązać równania:

a) $3 \sin x = 2 \cos^2 x$; b) $3 \sin^2 x = \cos^2 x$;
c) $2 \cos^2 x + 3 \sin x - 3 = 0$; d) $2 \sin^2 x + 3 \cos x - 3 = 0$;
e) $\operatorname{tg} x - 2 \operatorname{ctg} x = 1$; f) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{10}{3}$;
g) $\operatorname{tg} 2x = 3 \operatorname{tg} x$; h) $\sin 2x - \cos x = 0$;
i) $\cos 2x - 2 \sin^2 x = 0$; k) $2 \sin^2 x + 3 \cos 2x = 2$;
l) $\cos 2x + \cos x = 0$; m) $\sin x \cdot \operatorname{tg} x = 1$.

Część V. Zastosowania trygonometrii do miernictwa.

§ 133. Duże zastosowanie znajduje trygonometria w miernictwie, którego zadaniem jest sporządzanie planów i map geograficznych. Jeżeli np. chcemy zdjąć plan pewnego obszaru, ograniczonego punktami *A*, *B*, *C*, *D*, *E* (rys. 67), winniśmy wykreślić wielokąt

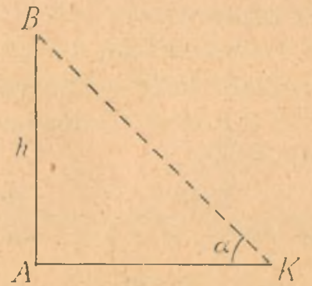


Rys. 67

ABCDE i wewnątrz niego umieścić wszystkie żądane obiekty geograficzne (np. wsie, miasta, mosty, lasy itp.) oraz wskazać względną wysokość przedmiotów (np. wzgórza lub góry), znajdujących się w badanym obszarze. Aby zaś wykreślić ten wielokąt musimy znać jego kąty i długości jego boków. Bezpośrednie mierzenie długości tych boków, tzn. odległości dwóch punktów geograficznych jest przeważnie bardzo uciążliwe ze względu na trudności terenowe (nierówności terenu, punkty niedostępne lub trudno dostępne itp.). Dlatego też staramy się jak najmniej mierzyć odległości, a jak najwięcej kąty, gdyż pomiar kątów jest zagadnieniem dość łatwym dzięki specjalnym przyrządom mierniczym (teodolit).

Oto parę łatwych zagadnień z dziedziny miernictwa, których rozwiązanie wymaga zastosowania trygonometrii.

Zadanie I. Wyznaczyć względną wysokość przedmiotu, którego podstawa jest dostępna i spoczywa na płaszczyźnie poziomej (rys. 68).



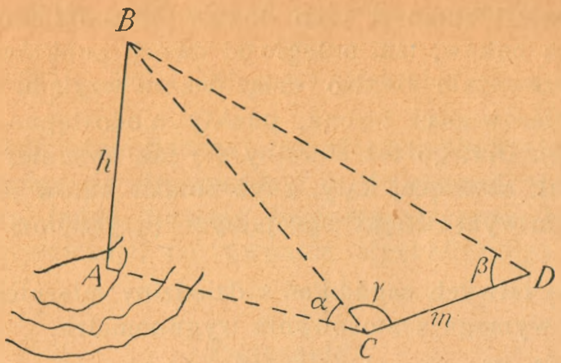
Rys. 68

Obieramy na płaszczyźnie podstawy przedmiotu punkt K w ten sposób, aby móc zmierzyć odległość AK. Następnie wyznaczamy kąt α, zawarty między poziomem AK i kierunkiem widzenia KB punktu B (kąt ten nazywa się kątem widzenia punktu B). Ponieważ w trójkącie prostokątnym AKB znamy przyprostokątną AK i kąt ostry $AKB = \alpha$, przeto

$$h = AK \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Zadanie II. Wyznaczyć względną wysokość przedmiotu, którego podstawa jest niedostępna i spoczywa na płaszczyźnie poziomej (rys. 69).

Na płaszczyźnie podstawy obieramy punkty C i D w ten sposób, aby można było zmierzyć odległość m między nimi i aby z punktów tych widać było wierzchołek B przedmiotu.



Rys. 69

Wysokość h przedmiotu obliczymy z trójkąta ABC, jeżeli znać będziemy BC i kąt ACB. Mierzymy przy pomocy przyrządów kąt $ACB = \alpha$. W takim razie

$$h = BC \cdot \sin \alpha.$$

BC obliczymy z trójkąta BCD, w którym znamy już $CD = m$. Mierzymy kąty $BCD = \gamma$ i $BDC = \beta$ i stosując twierdzenie sinusów otrzymujemy z trójkąta BCD:

$$\frac{CD}{\sin\,[180^0 - (\gamma + \beta)]} = \frac{BC}{\sin \beta}.$$

Stąd $$BC = \frac{m \sin \beta}{\sin (\gamma + \beta)},$$ wobec czego

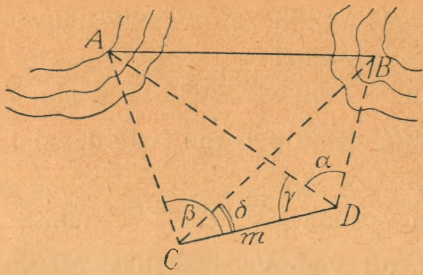
$$h = \frac{m \sin \alpha \sin \beta}{\sin (\gamma + \beta)}.$$

Zadanie III. Obliczyć odległość między dwoma punktami niedostępnymi (rys. 70), leżącymi na płaszczyźnie poziomej.

Na płaszczyźnie poziomej, na której znajdują się punkty A i B, obieramy dwa punkty C i D w ten sposób, aby można było zmierzyć odległość CD i aby z punktów tych widoczne były punkty A i B.

Z trójkąta ABD, w którym zmierzymy kąt $ADB = \alpha$, obliczymy przy pomocy twierdzenia kosinusów AB:

$$AB^2 = AD^2 + DB^2 - 2\ AD \cdot DB \cdot \cos \alpha.$$

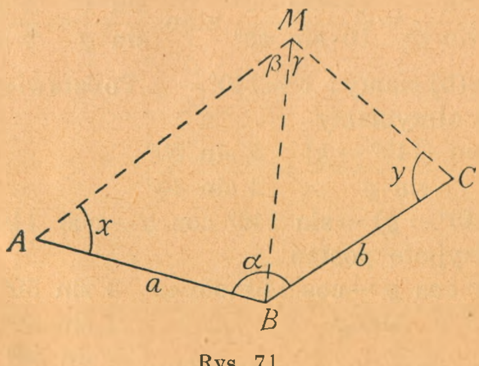


Rys. 70

Bok AD obliczymy przy pomocy twierdzenia sinusów z trójkąta ACD, w którym znamy bok $CD = m$ i w którym zmierzymy kąty $ACD = \beta$ i $ADC = \gamma$.

Bok DB obliczymy również przy pomocy twierdzenia sinusów z trójkąta BCD, w którym znamy bok $CD = m$ i kąt $BDC = \alpha + \gamma$ i w którym zmierzymy kąt $BCD = \delta$.

Zadanie IV. (Zagadnienie Pothenot'a). Znając wzajemne położenie trzech punktów A, B, C (tzn. znając $AB = a$, $BC = b$ i kąt $ABC = \alpha$), wyznaczyć przez mierzenie kątów położenie czwartego punktu M (rys. 71) leżącego w płaszczyźnie danych trzech punktów (tzn. znaleźć odległości MA, MB, MC).



Rys. 71

Jeżeli zmierzymy kąty $AMB = \beta$ i $BMC = \gamma$, to dla wyznaczenia MA, MB i MC wystarczy obliczyć tylko kąty $MAB = x$ i $MCB = y$. Istotnie, z trójkąta ABM będziemy mogli wówczas obliczyć MA i MB, a z trójkąta BMC — MC, stosując tylko twierdzenie sinusów. Rozwiązanie zatem zagadnienia Pothenot'a sprowadza się do obliczenia kątów x i y.

Z trójkąta *AMB*, według twierdzenia sinusów, mamy:

$$\frac{a}{\sin \beta} = \frac{MB}{\sin x}; \text{ stąd } MB = \frac{a \sin x}{\sin \beta}.$$

Z trójkąta *BMC*, według tegoż twierdzenia, mamy

$$\frac{b}{\sin \gamma} = \frac{MB}{\sin y}; \text{ stąd } MB = \frac{b \sin y}{\sin \gamma}.$$

Z porównania otrzymanych wartości *MB* otrzymamy:

$$\frac{a \sin x}{\sin \beta} = \frac{b \sin y}{\sin \gamma}, \text{ stąd}$$

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{b \sin \beta}{a \sin \gamma}. \qquad \text{(a)}$$

Ponieważ x i y są kątami czworokąta, którego suma kątów jest równa 360^0, zatem

$$x + y = 360^0 - (\alpha + \beta + \gamma). \qquad \text{(b)}$$

Rozwiązując otrzymany układ równań (a) i (b), znajdziemy kąty x i y.

Jeżeli np. $a = 10$ *km*, $b = 15$ *km*; $\alpha = 130^0$; $\beta = 50^0$; $\gamma = 40^0$ wtedy

$$\text{(b)} \quad x + y = 140^0$$

$$\text{(a)} \quad \frac{\sin x}{\sin y} = \frac{15 \cdot \sin 50^0}{10 \cdot \sin 40^0} \text{ albo } \frac{\sin x}{\sin y} = \frac{3 \sin 50^0}{2 \sin 40^0}.$$

Z równania (b) mamy: $x = 140^0 - y$. Podstawiając tę wartość x w równanie (a) otrzymamy

$$\frac{\sin (140^0 - y)}{\sin y} = \frac{3 \sin 50^0}{2 \sin 40^0}. \qquad \text{(c)}$$

Ale $\sin (140^0 - y) = \sin 140^0 \cos y - \cos 140^0 \sin y$. Zatem równanie (c) przyjmie postać

$$\frac{\sin 140^0 \cos y - \cos 140^0 \sin y}{\sin y} = \frac{3 \sin 50^0}{2 \sin 40^0}, \text{ czyli}$$

$$\sin 140^0 \operatorname{ctg} y - \cos 140^0 = \frac{3 \sin 50^0}{2 \sin 40^0}.$$

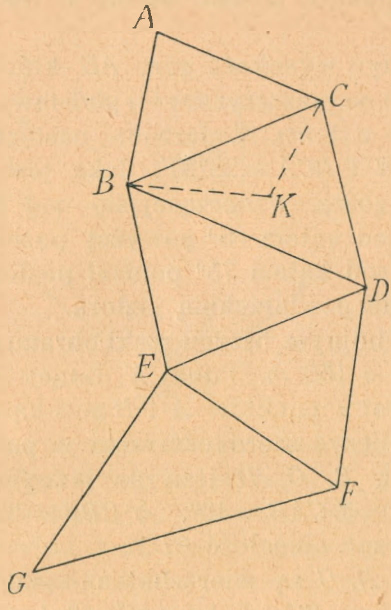
Przy pomocy tablic obliczymy wartość ułamka $\frac{3 \sin 50^0}{2 \sin 40^0}$. Otrzymamy, że wartość ta jest równa w przybliżeniu 1,788. Zatem

$$\sin 140^0 \operatorname{ctg} y - \cos 140^0 \approx 1{,}788. \text{ Stąd}$$

$$\operatorname{ctg} y \approx \frac{1{,}788 + \cos 140^0}{\sin 140^0}.$$

$$\text{Ale } \cos 140^0 = \cos(180^0 - 40^0) = -\cos 40^0 \approx -0{,}7660,$$
$$\text{a } \sin 140^0 \approx 0{,}6428. \text{ Stąd}$$
$$\operatorname{ctg} y \approx 1{,}590$$
$$1{,}590 - 32^0\,10'$$
$$y \approx 32^0\,10'$$
a więc $x \approx 140^0 - 32^0\,10'$; $x \approx 107^0\,50'$.

§ **134.** Chcąc sporządzić mapę pewnego obszaru (np. powiatu, województwa, państwa), pokrywamy go siecią trójkątów (tzw. **sieć triangulacyjna),** których wierzchołkami są punkty dowolnie obrane (najczęściej punkty wyraźnie z daleka widziane). Jeżeli obecnie zmierzymy bok AC trójkąta ABC (rys. 72), wówczas będziemy mogli obliczyć boki AB i BC tegoż trójkąta, po uprzednim zmie-



Rys. 72

rzeniu jego kątów. Obliczywszy bok BC możemy, mierząc kąty trójkąta BCD, obliczyć boki tego trójkąta. Mając zaś bok BD, możemy znowu w podobny sposób obliczyć boki trójkąta BDE itd. Inaczej mówiąc, aby wyznaczyć położenie wierzchołków sieci triangulacyjnej, wystarczy zmierzyć długość tylko jednego odcinka, tzw. **podstawy sieci,** wszystkie zaś pozostałe odległości obliczamy trygonometrycznie, mierząc przyrządami tylko kąty. Jeżeli będziemy chcieli wyznaczyć położenie pewnego punktu *K*, leżącego wewnątrz sieci, względem jej wierzchołków, napotkamy zagadnienie Pothenot'a, którego sposób rozwiązania podaliśmy poprzednio (§ 133). A jak wiemy, zagadnienie to sprowadza się do wyznaczenia dwóch kątów (np. *ABK* i *ACK*).

Ćwiczenia.

259. Obliczyć wysokość wieży *AB*, wiedząc, że jej wierzchołek *B* widoczny jest z punktu *C*, oddalonego od podstawy *B* o $^1/_2$ *km*, pod kątem $3^0 18'$.

260. Aby obliczyć wysokość góry, obrano na prostej, przechodzącej przez podstawę góry, dwa punkty *A* i *B*, oddalone od siebie o 200 *m*. Wierzchołek góry widoczny jest z punktu *A* pod kątem $22^0 15'$, a z punktu *B* pod kątem $17^0 38'$. Jaka jest wysokość góry?

261. Aby obliczyć wysokość góry *AB*, której podstawa *A* jest niedostępna, obrano na płaszczyźnie tej podstawy dwa punkty C i *D*, oddalone od siebie o 1 *km*. Zmierzono następnie kąty: $BCD = 63^0 24'$; $BDC = 58^0 8'$ i $BCA = 28^0 37'$. Jaka jest wysokość góry?

262. Stojąc na górze, wznoszącej się nad jeziorem o 350 *m*, widzimy samolot pod kątem 65^0 powyżej poziomu, a odbicie samolotu w jeziorze pod kątem 75^0 poniżej poziomu. Obliczyć wysokość samolotu nad powierzchnią jeziora.

263. Na prostolinijnym brzegu rzeki obrano dwa punkty *A* i *B*, oddalone od siebie o 150 *m*. Punkt *K*, leżący na przeciwległym brzegu widoczny jest z punktów *A* i *B* pod kątami $KAB = 48^0 35'$ i $KBA = 59^0 47'$. Obliczyć szerokość rzeki w punkcie *K*.

264. Punkty *A*, *B*, *C*, *D* leżą na jednym poziomie. Odległość $AB = 200$ *m*; $\sphericalangle CAB = 48^0$; $\sphericalangle CBA = 29^0$; $\sphericalangle DAB = 30^0$; $\sphericalangle DBA = 50^0$. Obliczyć odległość *CD*.

265. Punkty *A*, *B*, *C* są wierzchołkami sieci triangulacyjnej, o bokach: $AB = 4$ *km*; $BC = 5$ *km*; $AC = 7$ *km*. Z punktu *K*, leżącego wewnątrz trójkąta *ABC* widać bok *AB* pod kątem 120^0, a bok *AC* pod kątem 150^0. Obliczyć odległości *KA*, *KB*, *KC*.

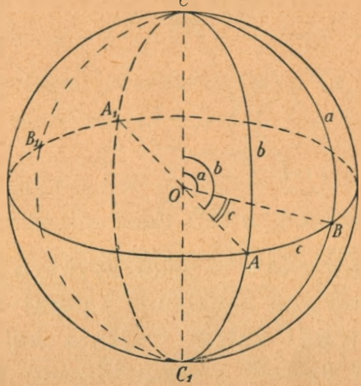
266. Rozwiązać zagadnienie Pothenot'a (p. zad. IV. § 133), jeżeli a) $AB = 2380$ *m*; $BC = 3000$ *m*; $\alpha = 139^0 42'$; $\beta = 31^0 29'$; $\gamma = 18^0 56'$;

b) $AB = 5134$ *m*; $BC = 6285$ *m*; $\alpha = 116^0 36'$; $\beta = 21^0 18'$; $\gamma = 42^0 6'$.

Część VI. Trójkąt kulisty.

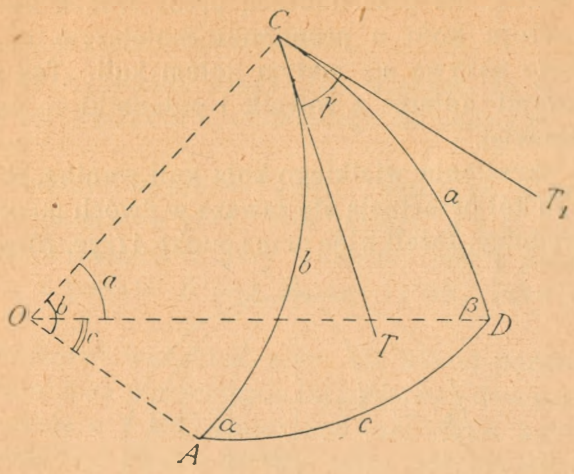
§ 135. Wiemy z geometrii, że przecinając kulę o promieniu R dowolną płaszczyzną, przechodzącą przez środek tej kuli, otrzymujemy w przekroju koło o promieniu R. Koło takie nazywa się **wielkim kołem kuli.** Przecinając natomiast kulę dowolną płaszczyzną, nie przechodzącą przez środek kuli, otrzymujemy w przekroju koło o promieniu mniejszym od promienia kuli. Takie koło nazywa się **małym kołem kuli.** Tak np. równoleżniki są małymi kołami, a równik i południki — wielkimi kołami kuli ziemskiej.

§ 136. Z określenia wielkiego koła kuli wynika, że każde dwa okręgi wielkich kół przecinają się zawsze w dwóch punktach, które są końcami średnicy. Jeżeli więc przez punkt A (rys. 73) powierzchni



Rys. 73

kuli poprowadzimy na tej powierzchni dwa okręgi wielkich kół, to okręgi te przetną się i w drugim punkcie A_1, który jest drugim końcem średnicy, przechodzącej przez A. Jeżeli obecnie poprowadzimy na powierzchni kuli trzeci okrąg wielkiego koła, nie przechodzący przez punkt A (a więc nie przechodzący przez A_1), wówczas te trzy okręgi wielkich kół podzielą powierzchnię kuli na 8 części. Każda z tych części nazywa się **trójkątem kulistym** (sferycznym). Trójkąty te ograniczone są łukami okręgów wielkich kół kuli. Np. trójkąt kulisty ABC (rys. 73) ograniczony jest łukami AB, BC, AC. Łuki te nazywamy **bokami trójkąta kulistego,** a ich końce — **wierzchołkami trójkąta kulistego.** Jeżeli wierzchołki trójkąta kulistego połączymy odcinkami prostej ze środkiem kuli, otrzymamy trzy kąty, np. kąty: AOB, AOC, BOC. Każdy z nich jest kątem środkowym wielkiego koła kuli, opartym na boku trójkąta kulistego. Jeżeli a, b, c oznaczają miary tych kątów w stopniach, to liczby te oznaczają również i miary (w stopniach) boków trójkąta kulistego. Prowadząc przez wierzchołek trójkąta kulistego styczne np. CT i CT_1 (rys. 74) do



Rys. 74

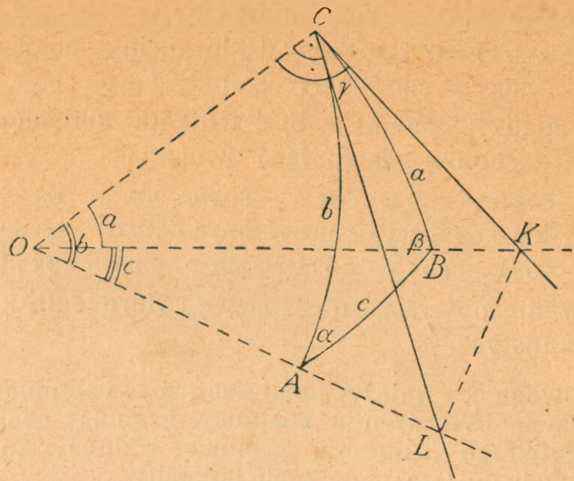
okręgów, leżące odpowiednio w płaszczyznach tych boków, otrzymamy kąty, które nazywać będziemy **kątami trójkąta kulistego.** Tak więc $\sphericalangle TCT_1 = \gamma$ jest kątem trójkąta kulistego przy wierzchołku C. W podobny sposób otrzymalibyśmy kąty α i β trójkąta kulistego ADC.

§ 137. Niechaj dany będzie trójkąt kulisty ABC kuli o promieniu R. Oznaczmy przez a, b, c boki i przez α, β, γ kąty tego trójkąta (rys. 75). Poprowadźmy przez wierzchołek C styczne do okręgów, których łuki b i a są bokami trójkąta kulistego. Jedna z tych stycznych, leżąca w płaszczyźnie boku a, przetnie przedłużenie promienia OB kuli w punkcie K, druga styczna, leżąca w płaszczyźnie boku b, przetnie przedłużenie promienia OA kuli w punkcie L. Łącząc punkty K i L odcinkiem prostej, otrzymujemy trójkąt OKL, w którym na podstawie twierdzenia kosinusów mamy:

$$KL^2 = OK^2 + OL^2 - 2 \cdot OK \cdot OL \cdot \cos c. \qquad \text{(m)}$$

Z trójkąta CLK, na podstawie tegoż twierdzenia, mamy

$$KL^2 = CK^2 + CL^2 - 2 \cdot CK \cdot CL \cdot \cos \gamma. \qquad \text{(n)}$$



Rys. 75.

Odejmując stronami równości (m) i (n), otrzymujemy

$$0 = OK^2 - CK^2 + OL^2 - CL^2 - 2 \cdot OK \cdot OL \cdot \cos c + 2 \cdot CK \cdot CL \cdot \cos \gamma.$$

Stąd

$$2 \cdot OK \cdot OL \cdot \cos c = OK^2 - CK^2 + OL^2 - CL^2 + 2 \cdot CK \cdot CL \cdot \cos \gamma. \quad \text{(p)}$$

Ale CK, jako styczna do łuku CB w punkcie C, jest prostopadła do promienia OC. Analogicznie CL jest prostopadła do OC.

Zatem z trójkątów prostokątnych OCK i OCL mamy:

$$\left.\begin{aligned} OK^2 - CK^2 &= OC^2 \\ OL^2 - CL^2 &= OC^2 \end{aligned}\right\} \quad \text{(r)}$$

oraz

z △-a OCK: $$\left.\begin{aligned} OC &= OK \cdot \cos a \\ CK &= OK \cdot \sin a \end{aligned}\right\} \quad \text{(s)}$$

z △-a OCL: $$\left.\begin{aligned} OC &= OL \cdot \cos b \\ CL &= OL \cdot \sin b \end{aligned}\right\} \quad \text{(t)}$$

Podstawiając wartości (r) do równości (p), otrzymamy

$$2 \cdot OK \cdot OL \cdot \cos c = OC^2 + OC^2 + 2\, CK \cdot CL \cdot \cos \gamma,$$

a po redukcji i podzieleniu obu stron przez 2

$$OK \cdot OL \cdot \cos c = OC^2 + CK \cdot CL \cdot \cos \gamma.$$

Równość tę możemy napisać w postaci

$$Ok \cdot OL \cdot \cos c = OC \cdot OC + CK \cdot CL \cdot \cos \gamma.$$

Podstawiając do tej równości wartości (s) i (t) otrzymamy

$$OK \cdot OL \cdot \cos c = OK \cdot \cos a \cdot OL \cdot \cos b + OK \cdot \sin a \cdot OL \cdot \sin b \cdot \cos \gamma.$$

Dzieląc obie strony otrzymanej równości przez $OK \cdot CL$ mamy

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \gamma.$$

W podobny sposób otrzymalibyśmy:

$$\cos b = \cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos \beta$$
$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha.$$

Zatem **między bokami a, b, c trójkąta kulistego i jego kątami** α, β, γ, **zachodzą następujące związki:**

$$\left.\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha \\ \cos b &= \cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos \beta \\ \cos c &= \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \gamma \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XV)}$$

Twierdzenie powyższe nosi nazwę **twierdzenia kosinusów dla trójkątów kulistych.**

Uwaga I. Należy pamiętać, że występujące w powyższym twierdzeniu kosinusy i sinusy boków trójkąta kulistego oznaczają kosinusy i sinusy kątów środkowych, opartych na tych bokach.

Uwaga II. Twierdzenie kosinusów dla trójkątów kulistych wyprowadzone zostało w założeniu, że kąty a i b są mniejsze od 90^0. Ponieważ zasada dowodu nie ulegnie zmianie w wypadku, gdy kąty te będą większe od 90^0, przeto przyjmiemy, że twierdzenie to jest słuszne dla każdego trójkąta kulistego.

§ 138. Przy pomocy wzorów (XV) możemy rozwiązać dwa zagadnienia: 1^0 obliczyć kąty trójkąta kulistego, mając jego trzy boki, 2^0 mając dwa boki trójkąta kulistego i kąt między nimi zawarty, obliczyć trzeci bok trójkąta.

Rozwiązując zadanie pierwsze, otrzymamy:

$$\cos \alpha = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}$$

$$\cos \hat{\beta} = \frac{\cos b - \cos a \cdot \cos c}{\sin a \cdot \sin c}$$

$$\cos \gamma = \frac{\cos c - \cos a \cdot \cos b}{\sin a \cdot \sin b}$$

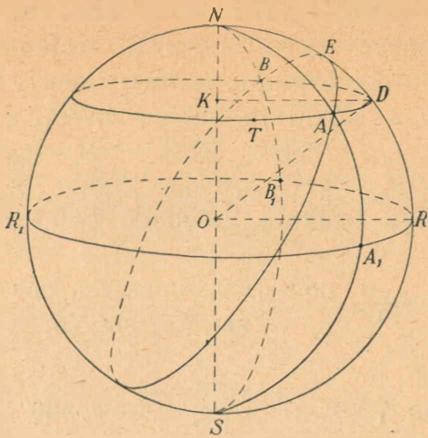
a przy pomocy tablic obliczymy wartości (przybliżone) kątów α, β, γ.

Rozwiązując zadanie drugie, tzn. gdy dane są np. a, b i γ, otrzymamy bezpośrednio ze wzorów (XV):

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \gamma.$$

Zadanie I. Dwa miasta A i B leżą na tej samej szerokości geograficznej 50^0 (tzn. na 50-tym równoleżniku), a ich długości geograficzne (np. wschodnie) wynoszą odpowiednio: 72^0 i 132^0.

Obliczyć 1° długość łuku równoleżnika, łączącego te dwa miasta, 2° długość łuku wielkiego koła kuli ziemskiej, łączącego te dwa miasta (rys. 76).



Rys. 76.

Obliczmy najpierw długość x łuku ADB. Jak wiemy z geometrii $x = \frac{\pi r \alpha}{180}$, gdzie r oznacza promień okręgu równoleżnika, α — liczbę stopni tego łuku. Z trójkąta prostokątnego OKD znajdziemy:

$$r = KD = OD \cos \sphericalangle ODK.$$

Ale OD jest promieniem R kuli ziemskiej, a $\sphericalangle ODK = \sphericalangle DOR = 50^0$, gdyż łuk DR wyraża szerokość geograficzną danych miast. Zatem

$$r = R \cos 50^0.$$

Aby obliczyć liczbę stopni łuku ADB, zauważmy, że liczba ta wyraża w stopniach różnicę długości geograficznych miast A i B. Jeżeli bowiem oznaczymy przez T punkt, w którym zerowy południk przecina dany równoleżnik, to łuk ADB = łuk TDB — łuk TA $= 132^0 - 72^0 = 60^0$.

Zatem:

$$x = \frac{\pi R \cos 50^0 \cdot 60}{180} = \frac{\pi R \cos 50^0}{3} \approx \frac{\pi R \cdot 0{,}6428}{3} \approx 0{,}2143 \cdot \pi R.$$

Obliczmy obecnie długość y łuku AEB wielkiego koła kuli, przechodzącego przez miasta A i B: $y = \frac{\pi R \alpha_1}{180}$, gdzie R oznacza promień kuli ziemskiej, α_1 — liczbę stopni łuku y.

Rozważmy trójkąt kulisty ANB, którego bokami są łuki: NA, NB i $AEB = \alpha_1$. W tym trójkącie mamy:

$$NA = NA_1 - A_1A = 90^0 - 50^0 = 40^0$$
$$NB = NB_1 - B_1B = 90^0 - 50^0 = 40^0.$$

Aby więc obliczyć trzeci bok tego trójkąta kulistego, musimy mieć kąt BNA tego trójkąta, zawarty między bokami NA i NB. Kąt ten obliczymy z trójkąta kulistego A_1NB_1, w którym znamy trzy boki:

$$NA_1 = NB_1 = 90^0 \text{ i } A_1RB_1 = 132^0 - 72^0 = 60^0.$$

Stosując do tego trójkąta kulistego twierdzenie kosinusów, znajdziemy:

$$\cos A_1NB_1 = \frac{\cos A_1RB_1 - \cos NA_1 \cdot \cos NB_1}{\sin NA_1 \cdot \sin NB_1}$$

czyli

$$\cos A_1NB_1 = \frac{\cos 60^0 - 0}{1 \cdot 1} = \cos 60^0.$$

Stosując zatem twierdzenie kosinusów dla trójkąta kulistego ANB, znajdziemy

$$\cos \alpha_1 = \cos NA \cdot \cos NB + \sin NA \cdot \sin NB \cdot \cos 60^0,$$

czyli $$\cos \alpha_1 = \cos^2 40^0 + \sin^2 40 \cdot \cos 60^0.$$

Przy pomocy tablic obliczymy, że

$$\cos^2 40^0 \approx 0{,}5870; \qquad \sin^2 40^0 \approx 0{,}4132.$$

Stąd $$\cos \alpha_1 \approx 0{,}5870 + 0{,}4132 \cdot \tfrac{1}{2}, \text{ czyli}$$
$$\cos \alpha_1 \approx 0{,}5870 + 0{,}2066$$
$$\cos \alpha_1 \approx 0{,}7936.$$

Z tablic znajdziemy, że

$$\alpha_1 \approx 37^0 29' \approx 37^0{,}48.$$

Zatem

$$y \approx \frac{\pi R \cdot 37{,}48}{180} \approx 0{,}2082 \cdot \pi R.$$

Jeżeli porównamy obecnie otrzymane wielkości x i y, stwierdzimy, że $x > y$, tzn. długość łuku wielkiego koła kuli ziemskiej, łączącego dwa punkty tego samego równoleżnika jest mniejsza od łuku tego równoleżnika, łączącego te same dwa punkty. Dlatego też długość łuku wielkiego koła kuli ziemskiej, łączącego dwa punkty tej kuli, wyraża odległość tych punktów na kuli ziemskiej.

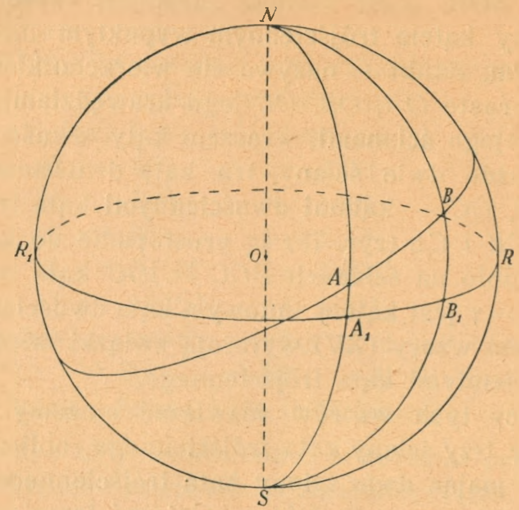
Zadanie II. Obliczyć odległość dwóch punktów A i B kuli ziemskiej, znając ich współrzędne geograficzne (tzn. długość i szerokość geograficzne każdego z tych punktów).

Niech punkt A posiada następujące spółrzędne geograficzne: szerokość płn. $22^0 30'$, długość wsch. $53^0 40'$, a punkt B — szerokość płn. $48^0 50'$, długość wsch. $82^0 20'$. W takim razie (rys. 77) $\smile A_1A = 22^0 30'$ $\smile B_1B = 48^0 50'$, a $\smile A_1B_1 = 82^0 20' - 53^0 40' = 28^0 40'$.

Z trójkąta kulistego ANB na podstawie twierdzenia kosinusów znajdziemy $\cos AB = \cos NA \cdot \cos NB + \sin NA \cdot \sin NB \cdot \cos \sphericalangle ANB$.

Ale $NA = NA_1 - A_1A = 90^0 - 22^0 30' = 67^0 30'$

$NB = NB_1 - B_1B = 90^0 - 48^0 50' = 41^0 10'$.



Rys. 77.

Stąd

$$\cos AB = \cos 67^0 30' \cdot \cos 41^0 10' + \sin 67^0 30' \cdot \sin 41^0 10' \cdot \cos \sphericalangle ANB.$$

Kąt ANB znajdziemy z trójkąta kulistego A_1NB_1, w którym

$$NA_1 = NB_1 = 90^0 \text{ i } A_1B_1 = 28^0 40' \cdot$$

$$\cos \sphericalangle ANB = \cos A_1NB_1 = \frac{\cos 28^0 40' - \cos 90^0 \cdot \cos 90^0}{\sin 90^0 \cdot \sin 90^0} \quad \text{(p. § 137)}$$

Zatem

$$\cos ANB = \cos 28^0 40'.$$

Stąd

$$\cos AB = \cos 67^0 30' \cdot \cos 41^0 10' + \sin 67^0 30' \cdot \sin 41^0 10' \cdot \cos 28^0 40'.$$

Przy pomocy tablic odnajdziemy, że $AB \approx 34^0 45' = 34^0,75$.

Wobec tego długość x łuku AB wynosi

$x \approx \frac{\pi R \cdot 34,75}{180}$, gdzie R oznacza promień kuli ziemskiej. Przyjmując $R=6378\ km$, otrzymamy, przeprowadzając obliczenia przy pomocy logarytmów, że

$$x \approx 3866\ km$$

Uwaga. Gdyby długość geograficzna punktu A była zachodnia, a punktu B wschodnia, wówczas $\smile A_1B_1=$ sumie długości geograficznych punktów A i B.

§ 139. Jeżeli z punktu O (rys. 75) poprowadzimy trzy półproste OA, OB, OC nie leżące na jednej płaszczyźnie, wówczas kąty wypukłe AOB, BOC i AOC ograniczą część przestrzeni, którą nazywamy **kątem trójściennym wypukłym** lub wprost **kątem trójściennym**. Punkt O nazywa się **wierzchołkiem** kąta trójściennego, półproste OA, OB, OC jego **krawędziami**, kąty AOB, BOC i AOC — jego **ścianami**, wreszcie kąty dwuścienne, utworzone przez każde dwie ściany, tzn. kąty dwuścienne o krawędziach OA, OB, OC — **kątami dwuściennymi** kąta trójściennego.

Ponieważ CK i CL (rys. 75) są prostopadłe do krawędzi OC, a leżą odpowiednio na ścianach BOC i AOC kąta trójściennego, przeto kąt $LCK=\gamma$ jest kątem liniowym kąta dwuściennego o krawędzi OC. Zatem wzory (XV) wyrażają związki między ścianami i kątami dwuściennymi kąta trójściennego.

Przy pomocy tych wzorów rozwiązać możemy dwa zagadnienia: 1° mając trzy ściany kąta trójściennego, obliczyć jego kąty dwuścienne, 2° mając dwie ściany kąta trójściennego i kąt dwuścienny, utworzony przez te ściany, obliczyć trzecią ścianę.

Rozwiązania tych zadań są identyczne z rozwiązaniami, podanymi w § 138.

Ćwiczenia.

267. Obliczyć odległość Warszawy (szerokość geograficzna *) 52°13′, długość geograficzna wschodnia 21°03′) od Gdyni (szerokość geograficzna 54°31′, długość geograficzna wschodnia 18°32′).

268. Obliczyć odległość Warszawy od

a) Lwowa (szer. geogr. 49°50′, dł. geogr. wsch. 24°01′)
b) Wilna („ „ 54°41′, „ „ „ 25°15′)
c) Kołomyi („ „ 48°31′, „ „ „ 25°03′).

269. Obliczyć odległość

a) Warszawa-Bukareszt (sz. geogr. 44°25′, dł. geogr. wsch. 26° 5′)

---

*) W ćwicz. 267—270 podana jest szerokość geogr. północna.

b) Warszawa-Wiedeń („ „ $48^0\,15'$, „ „ „ $16^0\,22'$)
c) Warszawa-Ateny („ „ $37^0\,58'$, „ „ „ $23^0\,43'$)

270. Obliczyć odległość Warszawy od

a) New Yorku (szer. geogr. $40^0\,46'$, dł. geogr. zach. $73^0\,58'$)
b) Chicago („ „ $41^0\,53'$, „ „ „ $87^0\,37'$)
c) San Francisko („ „ $37^0\,48'$, „ „ „ $122^0\,26'$)

271. Trzy ściany kąta trójściennego są równe odpowiednio:

a) $a = 54^0\,38'$; $b = 81^0 5'$; $c = 63^0\,19'$;
b) $a = 109^0\,21'$; $b = 135^0\,36'$; $c = 82^0\,51'$;
c) $a = b = c = 90^0$.

Obliczyć kąty dwuścienne kąta trójściennego. W zadaniu c) otrzymany wynik uzasadnić geometrycznie.

272. Dwie ściany kąta trójściennego są równe odpowiednio

a) $a = 45^0$; $b = 120^0$
b) $a = 90^0$; $b = 150^0$
c) $a = 60^0$; $b = 210^0$
d) $a = 81^0 42'$; $b = 59^0 38'$
e) $a = 132^0 15'$; $b = 118^0 4'$

a kąt dwuścienny γ zawarty między nimi jest równy

a) 60^0; b) 30^0; c) 90^0; d) $48^0\,15'$; e) $61^0\,13'$.

Obliczyć trzecią ścianę kąta trójściennego.

273. Obliczyć kąty dwuścienne, utworzone przez dwie przyległe ściany boczne czworościanu foremnego (tzn. ostrosłupa foremnego trójkątnego, którego krawędzie boczne są równe krawędziom podstawy).

274. W sześciokątnym foremnym ostrosłupie kąt ściany bocznej przy wierzchołku ostrosłupa jest równy 30^0. Obliczyć kąty dwuścienne, utworzone przez dwie przyległe ściany boczne.

SPIS RZECZY

ROZDZIAŁ I.

Nierówności.

ROZDZIAŁ II.

Uogólnienie pojęcia potęgi. Logarytmy.

ROZDZIAŁ III.

Postępy.

ROZDZIAŁ IV.

Trygonometria.

Państwowe Wydawnictwo Książek Szkolnych
we Lwowie

Poleca następujące podręczniki dla liceów ogólnokształcących:

Bornholtz T.: PODRĘCZNIK ZAGADNIEŃ ŻYCIA WSPÓŁCZESNEGO dla I klasy licealnej . . . . —.—

Borholtz T.: PODRĘCZNIK ZAGADNIEŃ ŻYCIA WSPÓŁCZESNEGO dla II klasy licealnej . . . . —.—

Cieśliński J. i *Cieślińska O.:* A TRAVERS LES SIÈCLES. Podręcznik do nauki języka francuskiego dla I klasy licealnej 4.50

Kalinowski S. i *Kalinowska E.:* PODRĘCZNIK ASTRONOMII dla liceum wydziału humanistycznego i klasycznego . —.—

Kalinowski S. i *Kalinowska E.:* PODRĘCZNIK FIZYKI dla I i II klasy liceum wydziału humanistycznego i I klasy liceum wydziału klasycznego 4.20

Kalinowski S. i *Kalinowska E.:* PODRĘCZNIK FIZYKI dla I klasy liceum wydziału matematyczno-fizycznego i przyrodniczego . . . . —.—

Kalinowski S. i *Kalinowska E.:* PODRĘCZNIK FIZYKI dla II klasy liceum wydziału matematyczno-fizycznego i przyrodniczego . . . . —.—

Kałuski S.: LITTERAE ROMANAE. Czytanka łacińska dla I klasy licealnej . . . . —.—

Kałuski S.: LITTERAE ROMANAE. Czytanka łacińska dla II klasy licealnej . . . . —.—

Turkiewicz E.: CHEMIA ORGANICZNA dla I klasy liceum wydziału przyrodniczego i II klasy liceum wydziału matematyczno-fizycznego . . . . . . —.—

Turkiewicz E.: PODRĘCZNIK CHEMII dl[...] wydziału matematyczno-fizycznego i [...]

Wróblewski J.: PODRĘCZNIK GEOMETR[...] w zakresie I klasy liceum wydział[...] zycznego . . . .

Wróblewski J.: PODRĘCZNIK GEOMETRII WYKRE[...] w zakresie II klasy liceum wydziału matematyczno-fizycznego . . . .