Augustynowicz.

Ja

Książka

Mborzkiewicz

POCZĄTKI
GEOMETRYI

w

ośmiu Księgach na dwie

części podzielonych.

zebrane przez

Wincentego Karczewskiego,

Nauczyciela Matematyki w Szkole Woiewódzkiey, Woiewództwa Krakowskiego; byłego Zastępcę Professora Astronomii w Imperatorskim Wileńskim Uniwersytecie, i Pomocnika w Obserwatorium Astronomiczném tegoż Uniwersytetu.

CZĘŚĆ PIERWSZA.

---

w KIELCACH
w Drukarni Jana Nep. Wodziczki.
1823. Roku.

Za pozwoleniem Zwierzchnoſci.

Yako tak Ustrzyki
Do Stanisława
Morsia Własny [illegible]

Swradczy
Matyn

Jaśnie Wielmożnemu

KASPEROWI

WIELOGŁOWSKIEMU

RADZCY STANU NADZWYCZAYNEMU,

PREZESOWI

Kommissyi Woiewództwa Krakowskiego,

Kawalerowi Orderu Stego Stanisława.

Prawdziwemu znawcy i miłośnikowi Nauk, gorliwemu o rozszerzenie czystey Religii, i gruntowney oświaty Mężowi; w dowód Szacunku, osobistey wdzięczności i poważenia; te Początki Geometryi ma honor przypisać

Wincenty Karczewski.

LISTA
Prenumeratorów.

Adamski Józef.
Biblioteka Uniwersytetu Jagiellońskiego.
Biblioteka Szkoły Wydz. w Pińczowie.
Bzowski Cypryan, Ob. z Bętkowic.
Borzęcki Stanisław, Prof. Szk. Woie. w Kielcach.
Banasiewicz, Prof. S. Wydz. w Pińczowie.
Borowicz Jan, Prof. S. Woie. w Płocku.
Bronicki Fran. Stanis. Exak. w Olbro.
Brudziński Ludwig, Uczeń S. Woie. w Kielcach.
Bilski Paweł, U. S. Woie. w Lublinie.
Borowski.
Chęciński Ignacy, Prof. S. Wydz. w Pińczowie.
Chwalibóg Włodzimierz, U. S. Woie. w Kielcach.
Chachulski Stanisław.
Ciosnowski.
Cybulski Seweryn, U. S. Wydz. w Pińczowie.
Chwałkowski Franciszek.
Chrościński.
Czechowski Karol, U. S. Woie. w Kielcach.
Drozdowski Józef, S. K. Woie. w Kielcach.
Drotkiewicz Teofil, U. S. Woie. w Kielcach.
Ekielski Alexander.
Frączkiewicz Augustyn, Prof. Mat. Lice. Krak.
Gottofrey Stefan, b. Prof. S. Woiew. w Kielcach.
Grodzicki Kazimierz.
Gliński Prot, U. S. Woie. w Kielcach.
Grzybowski Sylwester, U. S. Woie. w Kielcach.

Gostkowski Floryan, U. S. Woie. w Kielcach.
Górski Józef, U. S. Woie. w Kielcach.
Gosławski, U. S. Woie. w Lublinie.
Głogowski Konstanty, U. S. Woie. w Lublinie.
Grabiański.
Grabowski.
Gorski.
Helman Felix, U. S. Woie. w Kielcach.
Janicki Stanisław, Prof. S. Wydz. w Pińczowie.
Jaworski Felix, U. S. Woie. w Kielcach.
Jżycki Konstanty, U. S. W. w Kielcach.
Janicki Józef.
Jenicz.
X. Kowalski, Rektor S. Wydz. w Pińczowie.
Kopycki Kajetan, Prof. S. Woie. w Kielcach.
Kucharski Andrzey, Prof. S. Woie. w Kielcach.
Koncewicz Jan, Prof. S. Woiew. w Kielcach.
Koncewicz Łukasz, Prof. S. Woie. w Kielcach.
Kuliński Jacenty, Prof. S. Woie. w Płocku.
Karczewski Józef, Adwo. Sąd. Gł. Dep. Wileńsk.
Karczewski Julian, Ucz. Uniwer. Wileńskiego.
Karczewski Bolesław, U. Uniwer. Wileńskiego.
Keler Jan, Dyrek. Poczt. w Kielcach.
Kleczeński, Rewiz. Gener.
Kobyliński Antoni, Rendant Stęp. Woie. Płock.
Krolikowski Ludwik.
Kalinowski Jan, Expedytor.
Krzycki Kazimierz, Pisarz Kom. Kras.
Kurkowski Józef.
Korusiewicz.
Komorowski.
Krzyżanowski Tomasz, U. S. W. w Kielcach.
Kuliński Eustachy, U. S. Woiew. w Kielcach.
Konarski Konstanty, U. S. Woiew. w Kielcach.

Lisowski Antoni, Expedytor w Wileczko.
Lekczyński.
Łęski Józef, Prof. Astronom w Uniwer. Jagiell.
Łuszczkiewicz Michał, Prof. Fiz. w Lic. Krak.
Łazurkiewicz Józef, U. S. Wydz. w Pińczowie.
Morykoni Kajetan, Rektor S. Woie. w Płocku.
Mochnacki Stefan, A. T. C. P. I. W. K. w Kielcach
Marciszewski Józef, U. S. Woiew. w Kielcach.
Macieyka Ignacy, U. S. Woiew. w Kielcach.
Magowski.
Nowakowski Tomasz, Exaktor w Olkuszu.
Niolko Józef, U. S. Woiew. w Kielcach.
Ostrowski Fran. Fil. Mag. P. S. Woie. w Lublinie
Olechowski Teodor, U. S. Woiew. w Kielcach.
Olszański, U. S. Woiew. w Lublinie.
Paprocki Antoni, K. W. A. R. w Kielcach.
Powstański, Rektor Lice. Krak. S. Anny.
Pinko Albin, Prof. S. Woiew. w Płocku.
Pysch Józef.
Popławski Jan, U. S. Woiew. w Kielcach.
Przywarski.
Popiel Paweł.
Paszkowski Ignacy, U. S. Woiew. w Kielcach.
Płaziński Antoni, Kont. Kas. w Olkuszu.
Płaszczewski Mikołay, Kont. Kom. Krasien.
Radwański Felix, Wysłuż. Prof. Uniw. Krak.
Senator W. M. K. Kaw. Ord. S. Stanisława.
Rogalski.
Roykiewicz Jan, A. E. K. W. w Kielcach.
Rupniewski Franciszek, U. S. Woie. w Kielcach.
Rylski Edward, U. S. Woiew. w Kielcach.
Ramlau Saladyn, U. S. Woiew. w Kielcach.
Hr. Sierakowski Sebastyan, Kustosz Kor. Kawaler Orderu S. Stanisława I. Klas.

Smolikowski Andrzey, Fil. Dok. Czł. Tow. Nauk. Krak. i Lub. Rektor Sz. Woie. w Lublinie.
Szopowicz Franciszek, Prof. Mat. w Uni. Jagiell.
Sobertin Józef, Prof. Sz. Woiew. w Kielcach.
Stokowski Wincenty, K. W. W. P. w Kielcach.
Sobieszczański Ludwik, Prof. S. Woie. w Kielc.
Sołtyk Stanisław, U. S. Woiew. w Kielcach.
Stokowski Wincenty, U. S. Woie. w Kielcach.
Strusiński, U. S. Woiew. w Lublinie.
Szwarc Michał, R. M. w Kielcach.
Sokulski Franciszek.
Suchodolski Ignacy, U. S. Woiew. w Kielcach.
Szczepański Kazimierz, U. S. Woie. w Kielcach.
Symonowicz Napoleon, U. S. Woie. w Kielcach.
Sladkowski Walenty, U. S. Woiew. w Kielcach.
Smietanka Piotr, U. S. Woiew. w Kielcach.
Stacherski Maciey, U. S. Wydz. w Pińczowie.
Slirnikie.
Tarczewski Ferdynand, Ob. Obwodu Stopnic.
Trzciński Andrzey, Prof. S. Woiew. w Płocku.
Tomaszewski, Expedytor w Szyd.
Ujazdowski Tomasz, Prof. S. Woie. w Kielcach.
X. Wiśniewski Zygmunt, Prof. S. Woie. w Kielc.
Wilski Stanisław, Poborca Gener. w Kielcach.
Wysocki Augustyn, Prof. S. Wydz. w Pińczowie.
Wittmann Jan Kanty, Prof. S. Wydz. w Pińczo.
Wielogłowski Alexander, U. S. Woie. w Kielc.
Wielogłowski Eustachy, U. S. Woie. w Kielcach
Wodzicki Alexander.
Wodzicki Franciszek.
Wierzeyski Andrzey, A. E. K. W. w Kielcach.
Wóycikowski Dominik, A. W. A. S. R. w Kielc.
Wieckowski Józef, U. S. Woiew. w Kielcach.

Warzycki Floryan, U. S. Woiew. w Kielcach.
Wilczyński Roman, U. S. Woiew. w Kielcach.
Zabellewicz, Fil. Mag. Prof. S. Woie. w Lublinie
Zborowski Józef, Prof. S. Woiew. w Płocku.
Zdżarski Augustyn, Prof. S. Woiew. w Płocku.
Zagrodzki Antoni, U. S. Woiew. w Kielcach.
Zamara Grzegorz, U. S. Woiew. w Kielcach.
Zagrodzcy Soter i Julian, U. S. Wydz. w Pińczo.
Zarski Hypolit, U S. Woiew. w Kielcach.
Zochowski Felix, S. Woiew. w Lublinie.

W. W. Prenumeratorowie, których Listy dotąd nieodebrałem, będąc umieszczeni na czele Części Drugiey, maiącey wyyść podług Prospektu w Miesiącu Lipcu, odbiorą razem dwie Części tego Dzieła. — Prenumerować można do końca Miesiąca Czerwca r. b. 1823.

W. Kar.

PRZEMOWA.

Dla iakich pobudek, i w iakich chęciach ośmieliłem się w roku zeszłym ogłosić drukiem *Początki Arytmetyki*; dla tych samych pobudek, i w tych samych chęciach dzisiay przy pomocy Szanownych Rodaków wydaię na iaw obecne dzieło pod tytułem: *Początki Geometryi.* W ogólnym iego rozkładzie trzymałem się po naywiększey części sławnego Geometry Francuzkiego *Legendre* (*) (którego dzieła sprawiedliwie we Francyi i innych Kraiach za elementarne uznano), odmiany zaś i dodatki w niém poczynione oddawszy pod Sąd Łaskawych Czytelników, kończę słowami *Biota*, (**) „ Si les „ personnes qui se serviront de mon ouvrage „ veulent encore m' honorer de leurs remar-

„ ques,

(*) A. M. *Legendre* membre de l' institut et de la legion d' honneur, de la société royale de Londres, etc.

(**) Traité élémentaire d' Astronomie Phisique par J. B. *Biot*, membre de l' institut de France, etc.

„ ques, je les recevrai avec reconnaissannce, „ persuadé qu' un livre *élémentaire* ne devient „ jamais bon qu' à force de le corriger. "

Pisałem w Kielcach dnia 30. Kwietnia roku 1823. n. s.

Wincenty Karczewski,
Prof. Pierw. Z. w S. W. K.

POCZĄTKI GEOMETRYI.

CZĘŚĆ PIERWSZA

Obeymuiąca figury płaskie, czyli wykreślone na płaszczyźnie

KSIĘGA PIERWSZA.

Początki.

Opisania.

I. Przedmiotem *Geometryi*, iest wymiar rozciągłości; rozciągłość ma trzy rozmiary; *długość*, *szerokość*, i *wysokość*.

II. *Linija*, iest długość bez szerokości. Ostateczne końce linii nazywaią się *punktami*: punkt zatem niema rozciągłości.

 III. *Li-*

III. *Linija prosta* iest drogą naykrótszą z iednego punktu do drugiego.

IV. Każda linija, która nie iest prostą, ani złożoną z linij prostych, iest *liniją krzywą*. Więc AB (fig. 1.) linija prosta; ACDB, *połamana*, czyli złożona z linij prostych; zaś AEB linija krzywa.

V. *Powierzchnia*, iest to długość i szerokość, bez wysokości czyli grubości.

VI. *Płaszczyzna*, iest powierzchnią, na którey biorąc od upodobania dwa punkta, i łącząc ie liniją prostą, ta linija całkiem leży na powierzchni.

VII. Każda powierzchnia, która nie iest płaszczyzną, ani złożoną z powierzchni płaskich, iest *powierzchnią krzywą*.

VIII. *Bryła*, albo *ciało*, ma trzy rozmiary rozciągłości.

IX. Skoro dwie linije proste CA, BA, (fig. 2.) przetną się, ilość większa lub mnieysza o którą są oddalone iedna od drugiey, co do ich położenia nazywa się *kątem;* punkt przecięcia się A, *wierzchołkiem kąta*, linije zaś CA, BA tego kąta *ramionami.*

Kąt oznacza się, albo przez literę wierzchołka A, albo przez trzy litery BAC, CAB, staraiąc się zawsze kłaść literę wierzchołka we srzodku. Kąty, równie iak wszystkie inne ilości, można dodawać, odciągać, mnożyć, dzielić: kąt *np.* DCE (fig. 21). iest *summą* dwóch kątów DCB, BCE; kąt

zaś

zaś DCB, iest *różnicą* dwoch kątów DCE, BCE.

X. Gdy linija prosta BA, przetnie liniją prostą CD, (fig. 3.) tym sposobem, że kąty *przyległe* BAC, BAD, będą między sobą równe, każdy z tych kątów nazywa się *kątem prostym*, linija zaś BA, *prostopadłą* na CD.

XI. Każdy kąt CAB (fig. 4.) mnieyszy od kąta prostego, nazywa się *kątem ostrym*; kady kąt DEF, większy od kąta prostego, nazywa się *kątem rozwartym*.

XII. Dwie linije, położone na tey samey płaszczyznie, i przedłużone w iakimkolwiek kierunku, i do iakieykolwiek długości, gdy nieprzecinaią się, te dwie linije nazywaią się *równoległemi* (fig. 5).

XIII. *Figura płaska*, iest płaszczyzną, ograniczoną ze wszech stron linijami.

Jeżeli linije są proste, przestrzeń niemi zamknięta, nazywa się *figurą prostokreslną*, albo *wielobokiem*; zaś linije same razem wzięte, składaią *perimetr* wieloboku (fig. 6).

XIV. Wielobok, składaiący się z trzech boków iest nayprostszy ze wszystkich wieloboków, i nazywa się *tróykątem*; ze czterech zaś boków *czworobokiem*; z pięciu *pięciobokiem* i t. d.

XV. Tróykąt, maiący trzy boki równe, nazywa się *tróykątem równobocznym* (fig. 7); *tróykątem równo-ramiennym*, tróykąt, którego dwa tylko boki są równe (fig. 8.); *tróy-kątem* zaś *różnobocznym*, którego wszystkie trzy boki są nierówne (fig. 9).

XVI. Tróykąt, maiący ieden kąt prosty, nazywa się *tróykątem prostokątnym* (fig. 10); bok przeciwległy kątowi prostemu, nazywa się *przeciwprostokątną*. Tak w tróykącie prostokątnym BAC, kąt prosty iest A, zaś przeciwprostokątną BC.

XVII. *Kwadratem*, nazywa się czworobok, maiący boki równe i kąty proste (fig. 11).

Prostokątem, nazywa się czworobok maiący boki nierówne, lecz kąty proste (fig. 12).

Równoległobokiem, nazywa się czworobok maiący boki sobie przeciwległe, równoległe (fig. 13).

Kwadratem ukośnym, czworobok, maiący boki równe, chociaż kąty nie są proste (fig. 14).

Nakoniec *Trapezem*, nazywa się czworobok, którego dwa tylko boki są równoległe (fig. 15).

XVIII. *Przekątną*, nazywa się linija prosta, łącząca wierzchołki dwóch kątów nieprzyległych. Naprzykład AC (fig. 45 *bis*) iest przekątna.

XIX. *Wielobok równoboczny* iest ten, którego wszystkie boki są równe; zaś *wielobok równokątny*, którego wszystkie kąty są równe.

XX. Dwa wieloboki są *równoboczne między*

sq-

sobą, skoro boki, umieszczone w tym samym porządku, postępuiąc ich perimetrami w tym samym kierunku, iednego, są równe bokom drugiego; to iest: bok pierwszy iednego, iest równy bokowi pierwszemu drugiego, drugi bok pierwszego wieloboku, drugiemu bokowi drugiego, trzeci trzeciemu i t. d. A z tąd rozumiemy, co znaczą dwa wieloboki *równokątne między sobą*.

Wykład wyrazów i znaków.

Axioma, iest to prawda niepotrzebuiąca dowodzenia; iest to zadanie samo przez się widoczne.

Twierdzenie, iest to prawda; staiąca się widoczną za pomocą rozumowania, nazwanego dowodzeniem.

Zagadnienie, iest to pytanie wymagaiące rozwiązania.

Twierdzenie przybrane, iest to prawda używana do dowodzeń, lub rozwiązania zagadnień.

Imie pospolite *zadanie*, rozciąga się bez różnicy do twierdzeń, zagadnień, i twierdzeń przybranych.

Wniosek; iest to wniosek wypływaiący z wielu zadań.

Uwaga; iest to uwaga nad iednem albo wielu zadaniami poprzedzaiącemi, usiłuiąca pokazać ich związek, użyteczność, zwięzłość, lub rozwlekłość.

Przy

Przypuszczenie; iest to przypuszczenie bądź w wyrażeniu zadania, bądź w ciągu dowodzenia.

Znak =, iest znakiem *równości*; więc wyrażenie A = B, znaczy, że A iest równe B.

Dla wyrażenia że A iest większe od B, pisze się A > B.

Dla wyrażenia zaś że A iest mnieysze od B piszę A < B.

Znak + wymawia się *więcey*, i wskazuie *dodawanie*.

Znak — wymawia się *mniey*, i wskazuie *odciąganie*: więc A + B, oznacza summę ilości A i B; zaś A — B, ich różnicę, czyli co pozostaie po odciągnieniu B od A. Podobnie A — B + C, albo A + C — B, znaczy, że A i C powinny bydź dodane razem, a od wszystkiego B powinno bydź odciągniętém.

Prawdy niepotrzebuiące dowodzenia (Axioma)

1. Dwie ilości, równe trzeciey, są równe między sobą.
2. Całość iest większa od swoiey części.
3. Całość iest równa summie części na które została podzieloną.
4. Z iednego punktu do drugiego, iednę tylko liniję prostą prowadzić można.
5. Dwie wielkości, linija, powierzchnia, albo bryła są równe; skoro przyłożone iedna do drugiey przystaią do siebie w całey swoiey rozciągłości.

ZA-

ZADANIE PIERWSZE.

Twierdzenie.

Wszystkie kąty proste są równe między sobą. (fig. 16).

Niech będzie linija prosta D C, prostopadła na AB, i linija H G, prostopadła na EF; powiadam że kąty DCA, HGE, będą równe między sobą.

Weźmijmy cztery odległości równe AC, CB, EG, GF; odległość AB, będzie równa odległości EF, i liniją EF można położyć na linij AB tym sposobem, że punkt E padnie na punkt A, punkt zaś F na punkt B. Te dwie linije tak położone zbiegną się całkiem iedna z drugą, bez czego byłyby dwie linije proste z A do B, co bydź niemoże (Axio. 4); więc punkt G, srzodek linij EF, padnie na punkt C, srzodek linij AB. Gdy linija EG przystaie także do linij AC, mówię że linija HG, padnie i przystanie do linij DC; przypuśćmy, że pada na liniją KC odmienną od linij DC; ponieważ z przypuszczenia mamy że kąt:

$$EGH = HGF$$

potrzeba, ażebyśmy mieli kąt

$$KCA = KCB$$

lecz kąt

$$KCA > DCA$$

nadto kąt

$$DCA = DCB$$

zaś

zaś kąt

$$DCB > KCB$$

więc kąt

$$KCA > KCB,$$

a zatem linija HG niepadnie na liniją KC odmienną od linij DC, więc padnie na DC, i kąt HGE na kąt DCA, więc wszystkie kąty proste są równe między sobą.

Wniosek. Przez ten sam punkt C, dany na linij AB, niemożna wyprowadzić dwóch prostopadłych do tey linij: ponieważ gdyby CD, CK, były temi dwiema prostopadłemi, kąt DCB byłby prostym równie iak kąt KCB, i część byłaby równa całości.

ZADANIE II.

Twierdzenie

Każda linija prosta, przecinaiąca drugą liniją prostą, składa z tą ostatnią dwa kąty przyległe, których summa iest równa dwom kątom prostym. (fig. 17).

Z punktu C wyprowadźmy do AB prostopadłą CE, kąt

$$ACD = ACE + ECD$$

dodawszy z obu stron kąt DCB, będziemy mieli:

$$ACD + DCB = ACE + ECD + DCB$$

kąt zaś ACE iest kątem prostym, kąty ECD, DCB składaią i są równe także kątowi prostemu ECB; więc summa dwoch katów

ACD

ACD + DCB, iest równa dwom kątom prostym.

Wniosek I. Jeżeli kąt ACD iest prosty, kąt iemu przyległy DCB będzie także prosty, i na odwrót.

Wniosek II. Jeżeli linija DE (fig. 18). iest prostopadłą do linij AB; będzie także linija AB prostopadłą do DE.

Z tad, że DE iest prostopadłą do AB, kat ACD iest prosty i równy katowi przyległemu DCB także prostemu. Lecz gdy kąt ACD iest kątem prostym, kąt iemu przyległy ACE będzie także kątem prostym; więc kąt ACE = ACD, a zatem linija AB iest prostopadłą do linij DE.

Wniosek III. Wszystkie kąty (fig. 19). BAC, CAD, DAE, EAF tuż po sobie następuiące z iedney strony linij prostey BF, wzięte razem składaią dwa kąty proste; ponieważ summa ich, iest równa summie dwoch kątów przyległych BAC, CAF.

Wniosek IV. Cztery kąty ułożone około iednego punktu, powstaiące z przycięcia się dwoch linij prostych, razem wzięte składaią cztery katy proste; ponieważ dwa kąty ACE, ECB (fig. 22). wzięte razem, składaią dwa kąty proste; dwa zaś kąty ACD, DCB wzięte razem składaią także dwa katy proste: a zatem w ogólności, summa katów, powstaiących z przecięcia się w iednym puncie C (fig. 23). tylu linij prostych ile będziemy chcieli,

np.

np. kąty ACB, BCD, DCE, ECF, FCA, będzie równa czterem kątom prostym. Ponieważ, ieżeli około punktu C, ułożymy czteny kąty proste za pomocą dwóch linij do siebie prostopadłych, te cztery kąty proste zaymą tę samę przestrzeń, iaką przestrzeń zaymuią kąty ACB, BCD, DCE, ECF, FCA.

ZADANIE III.

Twierdzenie.

Dwie linije proste maiące dwa punkta wpólne, zbiegną się iedna z drugą w całey swoiey rozciągłości, i złożą iednę tylko i tę samę liniją prostą. (fig. 20).

Niech będą dwie linije proste ABD, PQR; ieżeli przypuścimy, że AB = PQ, i ieżeli przeniesiemy liniją prostą PQ na liniją prostą iey równą AB; te dwie linije proste składać będą iednę tylko liniję prostą AB, między punktami A i B. Ponieważ gdyby nie składały iedney linij prostey AB, wyszłyby z dwóch punktow A i B dwie linije proste co bydź niemoże (Axiom 4). Przypuśćmy następnie, że te dwie linije przedłużaiąc się, zaczynaią się rozchodzić w pukcie C, iedna w kierunku CD, druga w kierunku CE. Wyprowadźmy z punktu C liniją prostą iakąkolwiek CF, różniącą się od linij prostych CD, CE; linija ACD będąc liniją prostą będziemy mieli:

ACF

ACF + FCD = 2 kątom prostym.

Linija ACE będąc także liniją prostą będziemy mieli:

ACF + FCE = 2 kątom prostym.

Więc potrzeba abyśmy mieli

ACF + FCD = ACF + FCE,

odiąwszy z obu stron kąt ACF, pozostanie kąt

FCD = FCE,

co iest niepodobieństwem, ponieważ część, FCE niemoże bydź równą całości FCD.

Więc linije proste, maiące dwa punkta wspólne A i B, niemoga rozdzielić się w żadnym punkcie ich przedłużenia, więc w całey swoiey rozciągłości składać będą iednę i tę samę liniją prostą.

ZADANIE IV.

Twierdzenie.

Jeżeli dwa kąty przyległe razem wzięte składaią dwa kąty proste, dwa ramiona zewnętrzne tych dwóch kątów są w liniy prostey. (fig. 21).

Ponieważ gdyby linija CB, niebyła przedłużeniem linij AC; niech będzie CE tém przedłużeniem, naówczas linija ACE będac liniją prostą, bedziemy mieli:

ACD + DCE = 2 kątom prostym,

lecz mamy z przypuszczenia

ACD + DCB = 2 kątom prostym,

więc

ACD

ACD + DCE = ACD + DCB,
a odiąwszy z obu stron kąt ACD, pozostałaby część DCB, równa całości DCE, co iest niepodobieństwem; więc CB ramie kąta DCB, iest przedłużeniem AC ramienia kąta ACD, więc z ramion kątów przyległych ACD, DCB, ramiona AC, CB, są w linij prostey.

ZADANIE V.

Twierdzenie.

Kąty w wierzchołkach przeciwległe są sobie równe. (fig. 22).

Ponieważ DE iest liniją prostą.

DCA + ACE = 2 kątom prostym;
ponieważ AB iest liniją prostą

ACE + ECB = 2 kątom prostym
więc

DCA + ACE = ACE + ECB;
odiąwszy z obu stron ten sam kąt ACE, pozostaną kąty w wierzchołkach przeciwległe równe to iest:

DCA = ECB;
podobnym sposobem dowiedlibyśmy że:

ACE = DCB.

ZADANIE VI.

Twierdzenie.

Dwa tróykąty są równe, ieżeli dwa boki w iednym tróykącie, równe dwom bokom

w dru-

w drugim tróykącie, obeymuią między sobą kąt równy. (fig. 24).

Niech będzie kąt A równy kątowi D; bok AB równy bokowi DE; bok AC równy bokowi DF, powiadam, że tróykąty BAC, EDF będą równe.

Położywszy bok AB na boku iemu równym DE, punkt A padnie na punkt D, punkt B na punkt E: a ponieważ kąt A iest równy kątowi D, gdy bok AB przystaie do boku DE, bok AC przystanie do bôku DF; aże bok AC iest równy bokowi DF, więc punkt C padnie na punkt F, i trzeci bok BC pokryie i przystanie dokładnie do boku EF; a zatem tróykąt BAC, iest równy tróykątowi EDF. (Axio. 5).

Wniosek. Dla tego że trzy rzeczy: w dwóch tróykątach są równe, to iest: A = D, AB = DE, AC = DF; można wnieść że trzy drugie będą także równe, iako to: B = E, C = F, BC = EF.

ZADANIE VII.

Twierdzenie.

W dwóch tróykątach, ieżeli dwa kąty w iednym tróykącie, są równe dwóm kątom w drugim tróykącie, i bok przyległy tym dwóm kątom w iednym tróykącie, iest rowny bokowi przyległemu dwom kątom w drugim

troy-

tróykącie, te dwa tróykąty przystaną do siebie. (fig. 24).

Niech będzie bok BC równy bokowi EF, kąt B równy kątowi E, kąt C równy kątowi F, mówię, że tróykąt DEF, będzie równy tróykątowi ABC.

Przyłożywszy bok EF do boku iemu równego BC, punkt E padnie na punkt B, punkt F na punkt C. Ponieważ kąt E iest równy kątowi B, bok ED póydzie w kierunku linij BA; więc punkt D, znaydzie się na którymkolwiek punkcie tey linij; a gdy kąt F iest także równy kątowi C, bok FD weźmie kierunek linij CA, i punkt D znaydzie się na którymkolwiek punkcie tey linij, więc punkt D będąc razem na dwóch liniach BA, CA znaydzie się w ich spólném przecięciu się A; więc dwa tróykąty DEF, i ABC przystaną do siebie.

Wniosek. Dla tego że trzy rzeczy w dwoch tróykątach są równe, to iest: BC = EF, B = E C = F, wnieść można, że trzy drugie są także równe, iako to. BA = ED, CA = FD, A = D.

ZADANIE VIII.

Twierdzenie.

W każdym tróykącie, ieden bok ktorykolwiek iest mnieyszy od summy dwoch drugich bokow, a większy od ich rożnicy. (fig. 24).

Ponieważ naprzykład linija prosta BC,

iest

iest naykrótszą drogą z punktu B do punktu C, więc mamy

$$BC < BA + AC$$

mamy także

$$BC + AC > AB,$$

odiąwszy z obu stron AC będziemy mieli

$$BC > AB - AC$$

ZADANIE IX.

Twierdzenie.

Jeżeli z punktu wziętego wewnątrz tróykąta, poprowadzimy dwie linije do ostatecznych końcow iednego z boków tego tróykąta, summa tych dwoch linij wewnętrznych będzie mnieysza od summy dwoch drugich bokow tróykąta te dwie linije obeymuiących. (fig. 25).

Jeżeli z punktu O wziętego wewnątrz tróykąta BAC, poprowadzimy dwie linije OB, OC, do ostatecznych końców boku BC, i ieżeli BO przedłużymy aż do spotkania się z bokiem AC w punkcie D, będziemy mieli:

$$OC < OD + DC$$

dodawszy z obu stron BO, otrzymamy:

$$BO + OC < BO + OD + DC$$

czyli

$$BO + OC < BD + DC$$

podobnie

$$BD < DA + AB,$$

dodawszy po obu stronach DC będziemy mieli

BD +

$$BD + DC < CD + DA + AB$$

czyli

$$BD + DC < CA + AB$$

lecz mamy wyżey

$$BO + OC < BD + DC$$

więc

$$BO + OC < CA + AB.$$

ZADANIE X.

Twierdzenie.

Jeżeli dwa boki w iednym tróykącie, są rowne dwom bokom w tróykącie drugim, i ieżeli kąt obięty bokami tróykąta pierwszego iest większy od kąta obiętego bokami tróykąta drugiego, bok trzeci tróykąta pierwszego, będzie większy od boku trzeciego tróykąta drugiego. (fig. 26).

Niech będą dwa tróykąty BAC, EDF, w których boki BA, AC pierwszego, są równe bokom ED, DF tróykąta drugiego, lecz kąt BAC pierwszego, iest większy od kąta EDF drugiego, powiadam że bok trzeci BC tróykąta pierwszego, będzie większy od trzeciego boku EF tróykąta drugiego.

Zróbmy kąt GAC = EDF, bok GA = ED, złączywszy GC, tróykąt GAC będzie równy tróykątowi EDF, ponieważ z wykreślenia maią ieden kąt równy obięty bokami równemi (Zad. VI), będziemy więc mieli GC = EF. Tu mogą bydź trzy przypadki, po-

podług tego: iak punkt G pada zewnątrz, na bok BC, lub wewnątrz tróykąta BAC.

Pierwszy przypadek, ieżeli pada zewnątrz mamy: (fig. 26).

$$AB < AI + IB$$

lecz

$$AB = AI + IG$$

więc

$$AI + IG < AI + IB$$

azatém

$$IG < IB$$

lecz

$$GC < IG + IC$$

więc

$$GC < IB + IC \quad \text{albo}$$
$$GC < BC$$

a ponieważ

$$GC = EF$$

azatém

$$EF < BC.$$

Drugi przypadek. Jeżeli punkt G pada na bok BC (fig. 27). widoczną iest rzeczą że bok GC albo iemu równy bok EF będzie mnieyszy od boku BC.

Trzeci przypadek. Nakoniec, ieżeli punkt G pada wewnątrz tróykąta BAC (fig. 28). będziemy mieli podług twierdzenia poprzedzaiącego $AG + GC < AB + BC$. Odiąwszy z iedney strony bok AG, z drugiey zaś strony bok $AB = AG$, pozostanie $GC < BC$, czyli $EF < BC$.

Uwaga. I naodwrót, ieżeli dwa boki AB, AC w tróykącie ABC, są równe dwom bokom DE, DF w tróykącie DEF; i ieżeli trzeci bok CB w pierwszym tróykącie, iest większy od boku trzeciego EF w drugim tróykącie, kąt BAC w tróykącie pierwszym, będzie większy od kąta EDF w tróykącie drugim. Ponieważ gdyby niebył większy, potrzebaby było ażeby kąt BAC był równy albo mnieyszy od kąta EDF, więc w pierwszym przypadku bok CB byłby równy, w drugim zaś przypadku byłby mnieyszy od boku EF; lecz gdy bok CB nie iest ani równy, ani mnieyszy od boku EF, lecz większy, azatem kąt BAC będzie większy od kąta EDF.

ZADANIE XI.

Twierdzenie.

Jeżeli trzy boki w iednym tróykącie, są równe trzem bokom w drugim tróykącie, te dwa tróykąty będą równe między sobą. (fig. 24).

Niech będzie bok $AB = DE$, bok $AC = DF$, bok $CB = FE$, powiadam że kąt $A = D$, kąt $B = E$, kąt $C = F$.

Ponieważ przypuściwszy że kąty A i D nie są równe, *np.* kąt $A > D$, gdy boki AB, AC obeymuiące kąt A, są równe bokom DE, DF obeymuiącym kąt D, podług twierdzenia poprzedzaiącego mielibyśmy $BC > EF$, co iest przeciwko przypuszczeniu gdyż mamy

BC =

BC=EF. Więc gdy kąty A i D są równe, tróykąty ABC, DEF maiące kąt równy w każdym obięty bokami równemi, będą równe.

Uwaga. Kąty równe są przeciwległe bokom równym: więc katy równe A i D są przeciwległe bokom równym BC, EF.

ZADANIE XII.

Twierdzenie.

W tróykącie równo-ramiennym, kąty przeciwległe bokom równym są równe. (fig. 29).

Niech będzie bok AB równy bokowi AC, powiadam, że kąt C będzie równy kątowi B. Z wierzchołka kąta A poprowadźmy liniją prostą AD do punktu D srzodka *podstawy* BC; gdy BD = DC, trzy boki w tróykącie BAD, są równe trzem bokom w tróykącie DAC, a zatém podług twierdzenia poprzedzaiącego kąt B iest równy kątowi C.

Wniosek. Każdy tróykąt równoboczny iest razem równokątny.

Uwaga. Z równości tróykątów BAD, DAC wypada, że kąt BAD, iest równy kątowi DAC, więc kąt BAD = ADC, a oba będąc kątami prostemi; *linija prosta prowadzona z wierzchołka tróykąta równoramiennego na srzodek podstawy, iest do tey podstawy prostopadłą, i dzieli kąt w wierzchołku na dwie części równe.*

W tróykącie nierówno-ramiennym, za podstawę bierze się od upodobania bok którykolwiek W tróykącie zaś równoramiennym, bok obięty bokami równemi.

ZADANIE XIII.

Twierdzenie.

Jeżeli w tróykącie dwa kąty są równe, boki przeciwległe tym kątom będą równe, i tróykąt będzie równo-ramienny (fig. 30).

Niech będzie kąt ABC, rowny kątowi ACB, powiadam, że bok AC będzie równy bokowi AB.

Gdyby te boki niebyły równe, niech będzie AB > AC. Na boku więc większym AB odetnijmy liniją BD = AC, i złączmy DC. Kąt DBC z przypuszczenia równy kątowi ACB, dwa boki DB, BC obeymuiące kąt DBC w tróykącie DBC, względnie będą równe dwóm bokom AC, CB, obeymuiącym kąt ACB w tróykącie ACB; więc dwa tróykąty DBC, ACB powinny bydź równe, iako maiące w każdym ieden kąt równy obięty bokami równemi (Zad. VI.), więc potrzebaby, ażeby kąt DCB pierwszego tróykąta, przeciwległy bokowi DB, był równy kątowi ABC, drugiego tróykąta przeciwległemu bokowi AC, uważanemu iako równemu bokowi DB; gdy zaś z przypuszczenia kąt ABC, iest równy kątowi ACB, potrzebaby, ażeby kąt DCB był równy kątowi ACB, co iest niepodobieństwem; więc bydź niemoże AB > AC,

a za-

zatém AB = AC, i tróykąt będzie równoramiennym.

ZADANIE XIV.

Twierdzenie.

W tróykącie z dwóch boków naywiększy, iest przeciwległy kątowi naywiększemu; z dwóch zaś kątów naywiększy, iest przeciwległy bokowi naywiększemu. (fig. 31).

1. Niech będzie kąt C większy od kąta B, powiadam, że bok AB, przeciwległy kątowi C, iest większy od boku AC przeciwległego kątowi B.

Weźmy kąt DCB równy kątowy B, więc w tróykącie DCB będziemy mieli BD = DC (Zad. XIII). Lecz linija prosta AC iest krótszą od linij połamaney AD + DC, zaś AD + DC = AD + DB = AB; więc AB > AC.

2. Niech będzie bok AB większy od boku AC, powiadam, że kąt C przeciwległy bokowi AB, będzie większy od kąta B przeciwległego bokowi AC.

Ponieważ gdyby kąt C niebył większy od kąta B, potrzeba, ażeby był mnieyszy albo równy kątowi B;

Naprzód, gdyby kąt C był mnieyszy od kąta B, bok AB byłby mnieyszy od boku AC co iest przeciwko założeniu;

Następnie, gdyby kąt C był równy kątowi

towi B, bok AB byłby równy bokowi AC, co iest także przeciwko założeniu:

Więc kąt C niemogąc bydź ani mnieyszym, ani równym kątowi B, a zatém kąt C będzie większy od kąta B.

ZADANIE XV.

Twierdzenie.

Z punktu danego zewnątrz linij prostey, iednę tylko prostopadłę na tę liniją spuścić można. (fig. 32).

Przypuściwszy, że z punktu danego A zewnątrz linij prostey DE możemy spuścić dwie prostopadłe AB, AC; przedłużmy iednę z nich *np.* AB. do odległości BF = BA, i złączmy FC. Tróykąt CBF byłby równy tróykątowi ABC: ponieważ kąt prosty FBC, iest równy kątowi prostemu CBA, bok BF = BA, bok BC wspólny, więc te tróykąty iako maiące ieden kąt w każdym równy, objęty między bokami równemi przystaną do siebie, więc BCF = BCA. Z przypuszczenia kąt BCA iest kątem prostym, więc kąt BCF będzie także kątem prostym; więc gdy dwa kąty przyległe BCA, BCF wzięte razem składaią dwa kąty proste, potrzeba, ażeby linija ACF była liniją prostą (Zad. IV). z kąd wypadłoby, że między dwóma temi samemi punktami A i F możnaby poprowadzić dwie linje proste ABF, ACF co iest rzeczą

nieniapodobna, (Axio 4), więc iest także rzeczą niepodobna, ażeby dwie prostopadłe z tego samego punktu, mogły bydź spuszczone na tę samę liniją prostą.

ZADANIE XVI.

Twierdzenie

Jeżeli przez punkt dany zewnątrz linij prostey, spuścimy prostopadłą natę liniją, i poprowadzimy linije pochyłe do różnych punktów linij prostey daney:

1mo *Prostopadła będzie liniją naykrótszą.*

2do *Dwie linije pochyłe w równey odległości z obu stron prostopadłey będą sobie równe.*

3. *Z dwóch linij pochyłych wziętych zktórey kolwiek strony prostopadłey, naydłuższa, naywięcey od prostopadłey będzie oddaloną.*

Przedłużywszy prostopadłą AB (fig. 33). o odległość BF = BA, i przez punkt A poprowadziwszy linije pochyłe do punktow D, C linij prostey daney, złączmy FC, FD.

1. Tróykąt CBF iest równy tróykotowi CBA, ponieważ kąt prosty CBF, iest równy kątowi prostemu CBA, bok CB wspólny, bok BF = BA, więc tróykąty CBF, CBA będą równe iako maiące w każdym kąt równy między bokami równemi (Zad. VI), trzeci bok CF będzie równy trzeciemu bokowi AC.

Li-

Linija zaś prosta ABF iest krótszą od linij połamaney ACF, więc AB połowa ABF iest krótszą od AC połowy ACF, więc

1*mo* Prostopadła iest krótsza od pochyłey.

2*do* Jeżeli weźmiemy BE = BC, i poprowadzimy pochyłą AE; kąt CBA = ABE, bok AB wspólny, więc tróykąt CBA, iest równy tróykątowi ABE, azatém boki AE, AC są równe; więc 2*do* dwie pochyłe w równey odległości zobu stron od prostopadłey są równe.

3. W tróykacie DFA, summa linij AC, CF, iest mnieysza (Zad. IX). od summy boków AD, DF; więc AC połowa linij ACF iest krótszą od AD połowy linij ADF; więc 3*tio* linije pochyłe im bardziey oddalaią się od prostopadłey tém są dłuższe.

Wniosek I. Prostopadła, mierzy prawdziwą odległość punktu od linij, ponieważ iest ze wszystkich linij pochyłych naykrótszą.

Wniosek II. Z iednego punktu do tey samey linij, niemożemy poprowadzić trzech linij prostych równych: bo z iedney strony prostopadłey, byłyby dwie linije pochyłe sobie równe, co bydź niemoże.

ZADANIE XVII.

Twierdzenie.

Jeżeli przez punkt wzięty na srzodku li-

nij

nij prostey, podzieloney na dwie części równe, wyprowadzimy do tey linij prostey prostopadłą; 1mo każdy punkt tey prostopadłey będzie w w równey odległości od dwóch ostatecznych końców linij prostey: każdy zaś punkt niebędący na prostopadłey, będzie w nierówney odległości od tychże ostatecznych końców linij. (fig. 34).

Ponieważ *naprzód* mamy z przypuszczenia AC = CB, linije pochyłe DA, DB; EA, EB; FA, FB; oddalone równie od prostopadłey są sobie równe; więc 1*mo* każdy punkt będący na prostopadłey FE iest w równey odległości od ostatecznych końców A i B, linij prostey AB.

2*do*. Niech będzie punkt I. leżący z boku prostopadłey FE; ieżeli złączymy IA, IB, iedna z tych linij przetnie prostopadłą w punkcie D, z którego punktu poprowadziwszy liniją DB będziemy mieli DB = DA. Lecz linija prosta IB iest krótszą od linij połamaney IDB, zaś IDB = IDA = IA więc IB < IA, azatém 2*do* każdy punkt niebędący na prostopadłey iest w nierówney odległości od ostatecznych końców A, B, linij prostey AB.

ZADANIE XVIII.

Twierdzenie.

Jeżeli we dwóch tróykątach prostokątnych,

nych, przeciwprostokątna i bok w iednym troykącie, są równe przeciwprostokątney i bokowi odpowiadaiącemu w drugim tróykącie, te dwa tróykąty prostokątne będą równe między sobą. (fig. 35).

Niech będzie przeciw-prostokątna AC równa przeciwprostokątney DF, i bok AB równy bokowi odpowiadaiacemu DE, powiadam, że tróykąt prostokątny ABC, będzie równy tròykątowi prostokątnemu DEF.

Będą te dwa tróykąty widocznie równe, ieżeli trzeci bok BC, będzie równy trzeciemu bokowi EF. Przypuśćmy, że te dwa ostatnie boki nie sa równe, i że $BC > EF$; wziąwszy $BG = EF$, złączmy AG. Tróykąt ABG iest równy tròykątowi DEF, ponieważ kąt prosty B iest równy kątowi prostemu E, bok $AB = DE$, bok $BG = EF$, więc te dwa tròykąty będąc równe (Zad. VI). bok AG będzie równy bokowi DF; lecz z założenia mamy $DF = AC$ więc $AG = AC$. Linija zaś pochyła AC, bardziey oddalona od prostopadłey AB aniżeli linija pochyła AG, tey ostatniey równą bydź niemoże, więc BC niemoże bydź $>$ od EF, więc będzie $BC = EF$; azatém tróykąt ABC icst równy tròykątowi DEF.

Uwaga. Można także dowieść sposobem prawie podobnym, że dwa tróykąty prostokatne są równe, ieżeli maią przeciwprostokątną i kąt równy. (fig. 35.)

Niech

Niech będzie przeciw - prostokatna A C = D F, kąt A C B równy kątowi D F E, powiadam, że tróykąt prostokątny A B C, będzie równy tróykątowi prostokątnemu D E F.

Równość tych dwóch tróykątów będzie widoczną, ieżeli okażemy, że bok B C, iest równy bokowi E F, ponieważ naówczas dwa tróykąty będą miały kąt równy w każdym, obięty bokami równemi (Zad: VI). Przypuśćmy że boki B C, E F nię są równe, że B C > E F; biorąc C H = F E, i łącząc A H; tróykąty A C H D F E byłyby równe iako maiące kąt A C H = D F E, i boki A C, C H, obeymuiące kąt A C H, równe bokom D F, F E obeymuiacym kąt D F E (Zad. VI.); więc kąt prosty D E F byłby równy kątowi A H C; lecz z założenia kąt D E F = A B C; więc kąt prosty A B C byłby równy kątowi A H C, i z iednego punktu A, możnaby było spuścić dwie prostopadłe na tę samę liniję prostą B C, co iest rzeczą niepodobną (Zad. XV.), więc iest także rzeczą niepodobną, ażeby bok B C > E F, więc bok B C = E F; azatém dwa tróykąty prostokątne A B C, D E F będą rowne.

Z A D A N I E XIX.

Twierdzenie.

Jeżeli dwie linije proste, są prostopadłe do trzeciey linij prostey, te dwie linije proste będą równolegle między sobą, to iest: iż

prze-

przedłużone do iakieykolwiek odległości, nigdy się z sobą nieprzetną. (*Opis.* 12). (fig. 36)

Ponieważ, gdyby dwie linije CA, DB, prostopadłe do linij AB, mogły przeciąć się z iedney lub drugiey strony linij AB w iakimkolwiek punkcie, więc z tego punktu moglibyśmy spuścić dwie prostopadłe na tę samę liniją AB, co iest rzeczą niepodobną. (Zad. XV).

ZADANIE XX.

Twierdzenie przybrane.

Jeżeli z dwóch linij prostych, iedna iest prostopadłą do trzeciey linij prostey daney, druga zaś z tą trzecią liniją daną składa kąt ostry, te dwie linije proste dostatecznie przedłużone przetną się. (fig. 36).

Niech będzie linija prosta AB, z którą linija EA składa kąt ostry EAB, a do którey linija DB iest prostopadłą, powiadam, że te dwie linije proste AE, BD dostatecznie przedłużone, przetna się (*)

Z punktu iakiegokolwiek F, wziętego na kierunku linij AE, spuśćmy prostopadłą FG, na liniją AB; punkt G, niepadnie w punkcie A, ponieważ kąt FAB iest mnieyszy od kąta pro-

(*) Czytać *Géometrie par Lacroix, dixième édition* (1814). §. 40. k. 23. *Géometrie* par *Legendre.* Pierwsze wydania przed rokiem 1817.

prostego; niepadnie w punkcie H na przedłużeniu BA, bo naówczas wyszłyby dwie prostopadłe KA, KH, z iednego punktu K na tę samę liniją prostą AH. Azatem punkt G padnie iak figura pokazuie w kierunku AB.

Na linij AE weźmy drugi punkt L, w odległości AL większey od odległości AF, a spuściwszy na AB prostopadłą LM, okażemy podobnie iak wyżey, że punkt M, niepadnie ani na punkt G, ani na punkta będące w kierunku GA, lecz w kierunku GB, tak, że odległość AM będzie koniecznie większą od odległości AG.

Jeżcli figurę dobrze wykreśliliśmy, widzieć będziemy, że gdy linija AL iest dwa razy większą od linij AF, odległość AM, iest dwa razy większą od odległości AG; gdy AL iest trzy razy większą od AF, odległosć AM iest doskonale trzy razy większą od odległości AG, i t. d.; z tąd iasno widzimy, że nietylko linija prosta AE dostatecznie przedłużona, przetnie się z liniją prostą BD dostatecznie przedłużoną, lecz nadto oznaczyć będziemy mogli na linij AE za pomocą proporcyi, odległość punktu, w którym te dwie linije przetną się.

ZADANIE XXI.

Twierdzenie.

Jeżeli dwie linije proste spuszczone na

trze-

trzecią liniją prostą składaią z tą ostatnią dwa kąty wewnętrzne których summa iest równą dwóm kątom prostym, te dwie linije będą równoległe między sobą. (fig. 37. bis)

Jeżeli że srzodka G linij daney AB spuścimy prostopadłą GE na liniją prostą AD; i prostopadłą GF na liniją prostą FBC, powiadam naprzód, że dwie prostopadłe GE, GF będą w linij prostey.

Jakoż mamy z przypuszczenia

DAB + ABC = 2 kątom prostym,

mamy także

ABF + ABC = 2 kątom prostym;

więc

DAB = ABF.

Więc w tróykątach prostokątnych GEA, GFB, przeciwprostokątna GA będąc rowną przeciwprostokątney GB; kąt GAE = GBF dwa te tróykąty będą równe, więc kąt AGE będzie równy kątowi BGF. Z przyczyny że linija AB iest liniją prostą, mamy:

AGE + EGB = 2 kątom prostym

mamy podobnie

BGF + EGB = 2 kątom prostym,

więc boki EG, GF będą w linij prostey (Zad. IV).

A zatém linije proste AD, BC będąc prostopadłemi do tey samey linij prostey FE będą rownoległemi między sobą (Zad. XIX).

ZA-

ZADANIE XXII.

Twierdzenie.

Jeżeli dwie linije proste składaią z trzecią liniją prostą dwa kąty wewnętrzne których summa będzie mnieyszą od dwóch kątow prostych; te dwie linije dostatecznie przedłużone, przetną się. (fig. 37).

Do linij daney AB, poprowadźmy dwie linije CA, DH, tak, ażeby kąty CAB, ABH były równe; przez punkt G srzodek linij AB poprowadźmy prostopadłą GE i GF na linije CA, DH, a między te ostatnie i przez punkt A, poprowadźmy liniją prostą IL. Ponieważ kąt AEK iest prosty, linija AE iako prostopadła iest liniją krótszą od linij pochyłey AK; więc w tróykącie AEK (Zad. XIV). kąt AKE < AEK; więc kąt IKF równy kątowi EKA iest mnieyszy od kąta prostego. Azatém linije KI, FD, przedłużone dostatecznie przetną się (Zad. XX).

Uwaga. Jeżeli linije MA, DB, składaią z liniją AB dwa kąty MAB, DBA, ktorych summa iest większą od dwóch kątów prostych naówczas dwie linije MA, DB nieprzetną się nad liniją AB, lecz pod liniją AB. Ponieważ dwa kąty MAB, BAN składaią dwa kąty proste; dwa zaś kąty ABD, ABF, składaią także dwa kąty proste; więc te cztery kąty razem wzięte składaią cztery kąty proste. Lecz summa dwóch kątów MAB, DBA

wy-

wynosi więcey nad dwa kąty proste, więc summa pozostałych dwóch kątów BAN, ABF iest mnieyszą od dwóch kątów prostych, a zatém dwie linije proste AN, BF przedłużone dostatecznie, przetną się pod liniją AB.

Wniosek. Przez punkt dany A, do linij daney BD, iednę tylko rownoległę, poprowadzić można. Ponieważ iedna tylko linija AC robi summę dwóch kątów CAB + DBA równą dwóm kątóm prostym, a ta linija iest równoległą żądaną: każda zaś inna linija iako to: IA albo MA składaią summę kątów wewnętrznych mnieyszą albo większą od dwóch kątów prostych; więc te linije dostecznie z liniją BD przedłużone przetną się nad, lub pod liniją AB.

ZADANIE XXIII.

Twierdzenie.

Jeżeli dwie linije rownoległe są przecięte od trzeciey linij prostey, summa kątów wewnętrznych iest równa dwóm kątom prostym. (fig. 38).

Niech będą dwie linije rownoległe AB, CD, przecięte trzecią liniją prostą EI, powiadam, że kąty wewnętrzne AGO, GOC będą równe dwóm kątom prostym.

Ponieważ, gdyby summa dwóch kątów wewnętrznych AGO, GOC była mnieyszą od dwóch kątów prostych, linije BA DC,

prze-

przecięłyby się ze strony A, C, co iest przeciwko założeniu. Gdyby summa dwóch kątów wewnętrznych AGO, GOC była większą od dwóch kątów prostych, linije proste AB, CD przecięłyby się ze strony B, D, co iest także przeciwko założeniu; więc gdy summa dwóch kątów wewnętrznych AGO, GOC iest ani mnieyszą ani większą od dwóch kątów prostych, więc summa dwóch kątów wewnętrznych AGO, GOC, będzie równą dwóm kątom prostym.

Wniosek. I. Jeżeli kąt GOC iest prosty, kąt AGO będzie także prosty, więc każda linija skoro iest prostopadłą do iedney z równoległych, iest razem prostopadłą i do drugiey.

Wniosek II. Kąty wewnętrzne z tey samey strony nazywaią się także kątami *wnętrznemi*, iuż dowiedliśmy, że kąty wnętrzne są równe dwóm kątom prostym. Z kąd wnieść możemy że:

1*mo* Summa kątów EGA, COI, nazwanych kątami *zewnętrznemi*, iest równa dwóm kątom prostym. Jakoż summa kątów AGO + AGE + GOC + COI = 4 kątom prostym odiąwszy summę kątów AGO + GOC równą dwóm kątom prostym, pozostała summa AGE + COI będzie także równa dwóm kątom prostym.

2*do* Kąty AGO, GOD nazwane *na przemian wnętrzne* będą równe. Mamy bowiem

AGO + GOC = 2 kątom prostym
GOD + GOC = 2 kątom prostym,

azatém

AGO = GOD.

3*tio* Kąty EGB, COI, nazwane *na przemian zewnętrzne* będą równe. Ponieważ mamy

EGB + EGA = 2 kątom prostym
COI + EGA = 2 kątom prostym,

więc

EGB = COI.

4*to* Kąty AGO, COI, nazwane *wewnętrzno-zewnętrzne* (niektorzy Autorowie nazywaią kątami odpowiadaiącemi) są rowne. Gdyż

AGO + GOC = 2 kątom prostym,
COI + GOC = 2 kątom prostym,

więc będziemy mieli

AGO = COI.

I na odwrót:

1*mo* Jeżeli summa kątów *zewnętrznych* AGE, COI iest równa dwóm kątom prostym, powiadam, że linije AB, CD, będą rownoległe. Mamy bowiem

AGO + AGE + GOC + COI = 4 kątom prostym, odiąwszy summę kątów AGE + COI, ktora z założenia iest równą dwóm kątom prostym, pozostanie

AGO + GOC = 2 kątom prostym

Więc (Zad. XXI). linije AB, CD będą rownoległe.

2*do* Je-

2*do* Jeżeli kąty *na przemian-wnętrzne* AGO, GOD będą równe linije, AB, CD będą równoległe. Jakoż, linija CD będąc liniją prostą, mamy

GOD + GOC = 2 kątom prostym

mamy zaś z założenia

GOD = AGO

więc będziemy mieli

AGO + GOC = 2 kątom prostym

Więc (Zad. XXI). linije AB, CD, będą równoległe.

3*tio* Jeżeli kąty *na przemian zewnętrzne* EGB, COI będą równe, linije AB, CD, będą równoległe. Mamy bowiem kąt

EGB = AGO

więc będziemy mieli

COI = AGO

nadto

COI + GOC = 2 kątom prostym

więc będziemy mieli

AGO + GOC = 2 kątom prostym

Azatém (Zad. XXI). linije AB, CD będą równoległe.

4*to* Jeżeli kąty *wnętrzno-zewnętrzne* AGO, COI są równe, linije AB, CD, będą równoległe. Linija EI będąc liniją prostą mamy:

COI + COG = 2 kątom prostym

mamy zaś z założenia

więc COI = AGO

AGO + COG = 2 kątom prostym,

 Aza-

Azatém (Zad. XXI). dwie linije AB, CD będą równoległe.

ZADANIE XXIV.

Twierdzenie.

Jeżeli dwie linije są równoległe do linij trzeciey, te dwie linije są równoległe między sobą. (fig. 39).

Niech będą dwie linije AB, CD, równoległe do linij trzeciey LI, powiadam, że te dwie linije AB, CD, będą równoległe między sobą.

Poprowadźmy PQR prostopadłą do LI, ponieważ AB iest równoległą do LI, linija PR będzie prostopadłą do linij AB (Zad. XXIII); podobnie, ponieważ CD iest równoległą do LI, linija PR będzie prostopadłą do linij CD. Azatém AB, CD, będąc prostopadłemi do tey samey linij prostey PQ, będą równoległe między sobą (Zad. XIX).

ZADANIE XXV.

Twierdzenie.

Dwie równoległe, w każdym punkcie są w równey od siebie odległości. (fig. 40).

Maiąc dwie linije równoległe AB, CD, ieżeli przez dwa punkta wzięte od upodobania na linij AB, wyniesiemy dwie prostopadłe FH, EG, te dwie prostopadłe będą także prostopadpadłemi do drugiey linij równoległey CD (Zad. XXIII.); a nadto linije FH, EG będą równe między sobą.

Poprowadźmy liniją FG, kąty GFE, FGH, odniesione do równoległych AB, CD będą równe iako na przemian-wewnętrzne (*Uwaga z Zad.* XXIII.); podobnie ponieważ linije proste FH, EG, prostopadłe do jedney i tey samey linij prostey AB, więc są równoległe między sobą, więc kąty EGF, GFH, odniesione do równoległych FH, EG, będą równe iako na przemian-wewnętrzne. Więc dwa tróykąty EFG, FGH, maiące bok wspólny FG przyległy dwóm kątóm równym (Zad. VII.) są równe; azatem bok EG, który mierzy odległość linij równoległych AB, CD, od punktu E, iest równy bokowi FH mierzącemu odległość tych samych linij równoległych od punktu F.

ZADANIE XXVI.

Twierdzenie

Jeżeli ramiona iednego kąta, są równoległe do ramion kąta drugiego, i leżą w tym samym kierunku, kąty temi ramionami obięte będą równe. (fig. 41).

Niech będą dwa kąty BAC, DEF, których ramiona BA, DE; AC, EF, leżąc w tym samym kierunkn są równoległe, powiadam, że kąt BAC będzie równy kątowi DEF.

Prze-

Przedłużmy ramie DE, aż do spotkania się z ramieniem AC w punkcie G; kąt DEF iest równy kątowi DGC, ponieważ ramie EF iest rownoległe do ramienia AC (Zad. XXIII). kąt DGC iest równy kątowi BAC; ponieważ ramie DG iest równoległe do ramienia BA; więc kąt DEF, iest równy kątowi BAC.

Uwaga. Przyczyna, ażeby ramiona kąta BAC leżały w iednym kierunku z ramionami kąta DEF, iest ta, iż przedłużywszy ramie FE ku H, kąt DEH będzie miał ramiona równoległe do ramion kąta BAC, lecz w tym przypadku te dwa kąty niebędą sobie rowne, składać tylko będą razem dwa kąty proste.

ZADANIE XXVII.

Twierdzenie.

W każdym tróykącie summa trzech kątów iest rowna dwóm kątom prostym. (fig. 42).

W tróykącie iakimkolwiek CBA, przedłużywszy bok CA aż do D, i poprowadziwszy z punktu A liniją prostą AE równoległą do boku CB; kąty BCA, EAD, iako *wewnętrzno-zewnętrzne*, odniesione do linij CAD będą równe; podobnie kąty CBA, BAE, iako *na przemian-wewnętrzne* odniesione do linij AB, będą równe; więc trzy kąty tróykąta CBA, składaią summę trzech kątów CAB, BAE, EAD równą dwóm kątom prostym (*Wniosek* III. *Zad.* II).

I. *Wniosek.* W tróykącie, poznamy kąt trzeci, odeymuiąc summę dwóch kątów znanych od dwóch kątów prostych.

II. Jeżeli dwa kąty w iednym tróykącie, są równe dwóm kątom w tróykącie drugim, trzeci kąt w pierwszym tróykącie, będzie równy trzeciemu kątowi w tróykącie drugim, i te dwa tróykąty będą równokątne między sobą.

III. W iednym tróykącie, ieden tylko kąt prosty bydź może, ponieważ gdyby były dwa kąty proste, trzeci kąt zniknąłby; w iednym także tróykącie więcey nad ieden kąt rozwarty bydź niemoże.

IV. W każdym tróykącie prostokątnym, summa dwóch kątów ostrych, iest równa iednemu kątowi prostemu.

V. Gdy każdy tróykąt równoboczny, iest razem równokątnym (Żad. XII.), więc każdy kąt w tróykącie równobocznym iest równy trzeciey części dwóch kątów prostych; tak, iż ieżeli kąt prosty wyrazimy przez iedność, każdy kąt w tróykącie równobocznym wyrazi się przez $\frac{2}{3}$.

VI. W każdym tróykącie CBA (fig. 42). kąt zewnętrzny BAD iest równy summie dwóch kątów wewnętrznych przeciwległych B i C; ponieważ AE będąc linija równoległą do boku CB, część BAE iest równa kątowi B, druga zaś część EAD iest równa kątowi C.

ZA-

ZADANIE XXVIII.

Twierdzenie.

W każdym wieloboku summa wszystkich kątów wewnętrznych iest równa tyle razy dwóm kątom prostym. ile iest iedności w liczbie boków mniey dwóma. (fig. 43),

Niech będzie ABCDEIGA wielobok; ieżeli z wierzchołka kąta A, poprowadzimy do wierzchołków wszystkich kątów przeciwległych linije proste AC, AD, AE, AI; widzimy, że wielobok maiący 7 boków został podzielony na 5 tróykątów, azatém summa iego kątów wewnętrznych 2 (7 — 2) = 10 kątom prostym.

Wielobok byłby podzielony na 6 tróykątów gdyby miał 8 boków, i w ogólności na tyle tróykątów, ile iest boków mniey dwoma. Wszystkie bowiem te tróykąty maią za wspólny wierzchołek punkt A, a za podstawy różne boki wieloboku, wyiąwszy dwa, obeymuiące kąt A.

Wniosek I. Summa kątów w czworoboku, iest równa dwóm kątom prostym rozmnożonym przez 4—2, co czyni 4 kąty proste; więc ieżeli wszystkie kąty czworoboku są rowne, każdy z nich będzie kątem prostym, a w tym razie czworobok będzie prostokątem lub kwadratem (Opisa. XVII).

Wniosek II. Summa kątów w pięcioboku, iest równa dwóm kątóm prostym mnożonym

nym przez 5 — 2, co czyni 6 kątów prostych; więc skoro pięciobok iest równokątny, każdy kąt iest równy piątey części 6 kątów prostych czyli $\frac{6}{5}$ kąta prostego.

Wniosek III. Summa kątów sześcioboku iest 2 (6 — 2) czyli 8 kątów prostych; więc w sześcioboku równokatnym, każdy kąt iest szóstą częścią ośmiu kątów prostych, czyli $\frac{4}{3}$ kąta prostego.

Uwaga I. Gdybyśmy to zadanie chcieli przystosować do wieloboków maiących kąty *wklęsłe* (fig. 44). należałoby uważać każdy kąt wklęsły większy od dwóch kątów prostych. Lecz dla uniknienia wszelkiego zamatwania, uważać będziemy wieloboki z kątami *wypukłemi*, czyli *wieloboki wypukłe* takie, iż linija prosta prowadzona w nich podług upodobania, naywięcey w dwóch punktach może przeciąć perimetr tego wieloboku.

Uwaga II. Jeżeli przedłużymy w tym samym kierunku wszystkie boki wieloboku wypukłego (fiig. 45): summa kątów *zewnętrznych* złożonych z każdego boku wieloboku i z przedłużenia boku iego dotykaiącego się iest równa czterém kątom prostym, iakakolwiek będzie liczba boków wieloboku. Każdy bowiem kąt zewnętrzny *b* B A, z kątem wewnętrznym A B C przyległym składaią *dwa kąty proste*, które się powtarzaią w wieloboku tyle razy, ile iest boków czyli kątów; summa kątów tak zewnętrznych iak wewnętrznych, składać będzie

dzie tyle razy dwa kąty proste, ile wielobok ma boków. Odeymuiąc od tey summy, summę katów wewnętrznych, równą tyle razy dwa kąty proste, ile wielobok ma boków mniey dwoma, pozostaną dwa razy dwa kąty proste, czyli cztery kąty proste na summę kątów zewnętrznych.

Uwaga III. Dwa wieloboki są równe, skoro składaią się z tey samey liczby tróykątów równych i podobnie rozłożonych, czyli zebranych tym samym sposobem, ponieważ naówczas widocznie położone ieden na drugim, te dwa wieloboki całkiem pokryią się i przystaną do siebie.

ZADANIE XXIX.

Twierdzenie.

W równoległoboku, boki i kąty przeciwległe są równe. (fig. 45).

Poprowadźmy przekątną DB, dwa tróykąty ADB, DBC maią bok wspólny BD, a dla równoległości boków AD, BC, kąt ADB = DBC (Zad. XXIII.); dla równoległości zaś boków AB, DC, kąt ABD = BDC; więc dwa tróykąty są równe (Zad. VII.), zatem bok AB, przeciwległy kątowi ADB, iest równy bokowi DC, przeciwległemu kątowi równemu DBC, i trzeci bok AD iest równy trzeciemu bokowi B C; więc w równoległoboku boki przeciwległe są równe.

Z równości tych samych tróykątów wypada, że kąt A iest równy kątowi C, kąt ADC złożony z dwóch kątów ADB, BDC, iest równy kątowi ABC złożonemu z dwóch kątów DBC, ABD; więc w równoległoboku kąty przeciwlzgłe są równe.

Wniosek. Więc dwie równoległe AB, CD, obięte między dwiema drugiemi równoległemi AD, BC są równe.

Uwaga. Zadanie XXV. iest wnioskiem zadania poprzedzaiącego.

ZADANIE XXX.

Twierdzenie.

Jeżeli w czworoboku, boki przeciwległe są równe, boki te będą między sobą równoległe, a figura będzie równoległobokiem (fig. 45).

Niech będzie czworobok ABCD, w którym boki AB = CD, AD = BC, powiadam, że boki równe w tym cworoboku będą równoległe, a czworobok będzie równoległobokiem.

Poprowadźmy przekątną DB; w dwóch tróykątach ABD, BDC trzy boki w iednym tróykącie będą równe trzem bokom w drugim tróykacie, te dwa więc tróykaty sa równe; więc kąty ADB, DBC przeciwległe bokom równym

AB,

AB, DC będą równe; względem zaś boków AD, BC kąty te są *na przemian zewnętrzne* (Zad. XXIII. Wnios. II). więc boki AD, BC będą równoległe.

Podobnie, kąty ną przemian - wewnętrzne ABD, BDC będąc równe, boki AB, DC będą równoległe; więc czworobok ABCD iest równoległobokiem.

ZADANIE XXXI.

Twierdzenie.

Jeżeli w czworoboku, dwa boki przeciwległe są równe i równoległe, drugie dwa boki tego czworoboku będą równe i równoległe, i czworobok będzie równoległobokiem (fig. 45).

Niech będzie czworobok ABCD, w którym dwa boki przeciwległe AB, CD są równe i równoległe, powiadam, że dwa drugie boki AD, BC, będą równe i równoległe, i czworobok będzie równoległobokiem.

Prowadźmy przekątną DB; ponieważ bok AB iest równoległy do boku DC, kąty na przemian - wewnętrzne, ABD, BDC są równe (Zad. XXIII. Wnio. II). nadto bok AB = DC, bok DB wspólny, więc tróykąty ABD, DBC maiące kąt równy w każdym obięty bokami równemi będą równe (Zad. VI.), azatem bok AD = BC; zaś kąty ADB, DBC względem linij prostych AD, BC iako na przemian wewnętrzne są równe, (Zad. XXIII.

Wnios.

Wnios. II). linije AD, BC, będąc równoległe; czworobok ABCD będzie równoległobokiem.

ZADANIE XXXII.

Twierdzenie.

W każdym równoległoboku, dwie przekątne przecinaią się na dwie części równe. (fig. 45. bis).

W równoległoboku ABCD poprowadziwszy przekątne AC, DB; w dwóch tróykątach ADO, COB, bok AD = CB, kąt ADO = CBO (Zad. XXIII. *Wnios.* II.); i kąt DAO = OCB; więc dwa tróykąty maiące w każdym bok równy przyległy dwóm kątom równym (Zad. VII). są równe; więc AO, bok przeciwległy kątowi ADO, iest równy OC bokowi przeciwleglemu kątowi OBC więc także DO = OB.

Uwaga. W przypadku, gdyby równoległobok był kwadratem ukośnym, bok AB = BC, tróykąt AOB = OBC iako maiące w każdym po trzy boki równe, kąt AOB = BOC, więc dwie przekątne w kwadracie ukośnym, przecinaią się pod kątami prostemi.

KSIĘGA II.

O kole, i o wymiarze kątow.

Opisania.

I. *Obwodem koła*, nazywa się linija krzywa, którey wszystkie punkta są w rowney odległości od punktu wziętego wewnątrz obwodu, nazwanego *srzodkiem.*

Przestrzeń zakończona tą liniją krzywą nazywa się *kołem.*

NB. W mówieniu bierze się niekiedy *koło*, za *obwód koła*, lecz zawsze pamiętać należy, że koło iest to przestrzeń maiąca długość i szerokość, obwód zaś koła iest tylko liniją krzywą.

II. Każda linija prosta CA, CE, CD, CB, i t.d. (fig. 46). prowadzona ze srzodka do obwodu koła nazywa się *promieniem* albo *półsrzednicą*; każda linija prosta AB przechodząca przez srzodek obwodu koła, i zakończona z obu stron tymże obwodem koła, nazywa się *srzednicą.*

Więc w obwodzie koła wszystkie promienie są równe, wszystkie srzednice dwa razy większe od promienia, są także równe.

III. Cząstka Obwodu FHG nazywa się *łukiem.* Linija prosta FG dotykaiąca się ostastatecznych końców łuku, nazywa się *cienciwą* tego łuku.

IV. Powierzchnia, albo część koła obięta między łukiem i cienciwą nazywa się *odcinkiem.*

NB. Tey samey cienciwie odpowiadaią dwa łuki FHG, FEG, azatém i dwa odcinki, lecz zawsze mówić będziemy o naymnieyszym.

V. *Wycinek* iest część koła zamknięta między łukiem ED i dwoma promieniami CD, CE prowadzonemi do ostatecznych końców tego łuku.

VI. Nazywa się *liniją wpisaną* (fig. 47). AB, którey ostateczne końce są na obwodzie koła.

Kątem wpisanym, kąt BAC złożony z dwóch cienciw BA, AC którego wierzchołek leży na obwodzie koła.

Tróykątem wpisanym, tróykąt BAC którego trzech kątów wierzchołki leżą na obwodzie koła.

W ogólności nazywa się *figurą wpisaną*, figura, którey wszystkie kąty maią swoie wierzchołki na obwodzie: w tym razie mówić można, że obwód koła iest *opisany* na tey figurze.

VII. Linija AB (fig. 48). przecinaiąca obwód koła w dwóch punktach, nazywa się *sieczną.*

VIII. *Styczną*, linija CD maiąca ieden

punkt

punkt wspólny z obwodem koła. Punkt zaś wspólny M, *punktem dotknięcia.*

IX. Dwa obwody wzaiemnie są stycznemi, ieżeli maią ieden punkt wspólny.

X. Jeżeli wszystkie boki wieloboku, są stycznemi do obwodu koła, wielobok iest *opisany na obwodzie koła*, albo *obwód koła w wieloboku wpisany*. (fig. 160).

ZADANIE I.

Twierdzenie.

Każda srzednica dzieli koło i obwód koła na dwie części równe. (fig. 49).

Przełamawszy koło w kierunku srzednicy AB, linija krzywa AEB, powinna przystać doskonale do linij krzywey AFB; bez czego w iedney lub drugiey byłyby punkta niebędace w równey odległości od szrodka C, co iest przeciwko opisaniu koła.

ZADANIE II.

Twierdzenie.

Każda cienciwa iest mnieyszą od srzednicy. (fig. 49).

Jeżeli do ostatecznych końców cienciwy AD, poprowadzimy promienie CA, CD, będziemy mieli liniją prosta $AD < AC + CD$, albo $AD < AB$.

Wnio-

Wniosek. Więc naywiększa linija prosta którą można wpisać w koło, iest równa iego srzednicy.

ZADANIE III.

Twierdzenie.

Linija prosta w dwóch tylko punktach przeciąć może obwód koła.

Gdyby linija prosta przecięła obwód koła w trzech punktach, te trzy punkta byłyby w równey odległości od srzodka, więc z iednego punktu do iedney i tey samey linij prostey byłyby prowadzone trzy linije proste równe, co iest rzeczą niepodobną (Zad. XVI. K. I.)

ZADANIE IV.

Twierdzenie

W tém samém kole albo w dwóch kołach równych, kąty (których wierzchołki są we srzodku koła) równe, obeymuią na obwodzie łuki równe; i na odwrót, ieżeli łuki na obwodzie koła są równe, kąty we srzodku koła będą także równe. (Fig. 61).

Ponieważ 1*mo* Jeżeli kąt ACB=DCE, te dwa kąty przystaną do siebie; a dla równości boków punkt A padnie na pukt D, punkt zaś B na punkt E; naówczas łuk AB padnie i przystanie do łuku DE; ponieważ, gdyby te dwa łuki niezbiegły się z sobą, więc w iednym lub drugim łuku byłyby punkta nierównie od srzodka oddalone, co bydź niemoże, więc łuk AB = DE.

2do Jeżeli łuk AB = DE, powiadam, że kąt ACB będzie równy kątowi DCE; gdyby te kąty niebyły równe, niech będzie ACB większy, i niech będzie ACI = DCE; będziemy więc mieli łuk AI = łukowi DE: lecz z założenia łuk AB = BE; więc mielibyśmy AI = AB, całość równa części, co bydź niemoże, azatém kąt ACB = DCE.

ZADANIE V.

Twierdzenie.

W iednem kole, lub w dwóch kołach równych, łuki równe obeymuią cienciny równe; cienciny zaś równe obeymuią łuki równe. (fig. 50).

Promień AC będąc równy promieniowi EO, łuk AMD równy łukowi ENG, powiadam, że cienciwa AD będzie równą cienciwie EG.

Ponieważ, ieżeli poprowadzimy promienie DC, GO, łuki AMD, ENG będąc róne, kąty ACD, EOG bedą równe (Zad. IV); więc tróykąty ACD, EOG maiące ieden kąt równy obięty między bokami równemi będą równe, więc trzeci bok AD iednego tróykąta będzie równy trzeciemu bokowi FG drugiego tróykąta.

Naodwrót, przypuszczaiąc zawsze pro-

mień

mień AC=EO, ieżeli cięciwa AD równa cięciwie EG, powiadam, że łuk AMD będzie równy łukowi ENG.

Poprowadziwszy promienie CD OG; w dwóch tróykątach ACD, EOG, trzy boki w iednym tróykącie, są równe trzem bokom w drugim tróykącie, więc te dwa tròykąty są równe (Zad. XI. K. I.), więc kąt ACD = EOG; a zatém łuki (Zad. IV.) AMD, ENG obięte bokami tych kątów będą równe.

ZADANIE VI.

Twierdzenie.

W tém samém kole, albo w kołach równych, (biorąc łuki mnieysze od półobwodu koła), *łuk większy iest obięty większą cięciwą, łuk zaś mnieyszy obięty cięciwą mnieyszą.* (fig. 50).

Niech będzie łuk AH większy od łuku AD; poprowadziwszy cięciwy AD, AH, i promienie CD, CH: dwa boki AC, CH tróykąta ACH, są ròwne dwóm bokom AC, CD tróykąta ACD: kąt zaś ACH iest większy od kąta ACD; wiec (Zad. X. K. I.) trzeci bok AH w tróykącie ACH, iest większy od boku trzeciego AD w tròykącie ACD; azatém cięciwa obeymuiąca łuk większy AH, iest większą od cięciwy obeymuiącey łuk mnieyszy AD.

Wzaiemnie, ieżeli cięciwa AH, iest większą od cieńciwy EG, powiadam; że łuk AH będzie większy od łuku EG.

Ponieważ, gdyby łuk AH niebył większy od łuku EG, potrzeba, aby łuk AH był mnieyszy od łuku EG, albo równy łukowi EG. Jeżeli przypuścimy naprzód, że łuk AH będzie mnieyszy od łuku EG, podług zadania poprzedzaiącego cieńciwa AH, będzie mnieyszą od cieńciwy EG, co iest przeciwko założeniu. Jeżeli przypuścimy następnie, że łuk AH iest równy łukowi EG, potrzeba (Zad. V.) ażeby cieńciwa AH była równą cieńciwie EG, co iest także przeciwko założeniu, więc łuk AH niebędąc ani mnieyszy od łuku EG, ani równy łukowi EG; azatém łuk AH będzie większy od łuku EG.

Uwaga. Gdyby łuki były większe od pół-obwodu koła, wtym razie *łuku większego cieńciwa iest mnieyszą, łuku zaś mnieyszego cieńciwa większa.* Naprzykład łuku AKBD większego od łuku AKBH cieńciwa AD iest mnieyszą od cieńciwy AH.

ZADANIE VII.

Twierdzenie.

Promień, prostopadły go cieńciwy, dzieli tę cieńciwę i łuk tą cieńciwą obięty na dwie części równe. (fig. 51).

Niech będzie srzodek koła C, cieńciwa AB; powiadam, że promień CG dzieli cieńciwę

ciwę AB i łuk tą cięciwą obięty AGB na dwie części równe.

Poprowadziwszy promienie CA, CB; tróykąty prostokątne CDA, CDB będą miały przeciwprostokątną CA=CB, bok CD wspólny; więc te dwa tróykąty iako maiące przeciwprostokątną równą, i ieden bok równy (Zad. XVIII. K. I.) będą równe, więc AD=DB.

W drugim przypadku, ponieważ AD=DB, linija CG iest prostopadłą do srzodka linij AB; więc (Zad. XVII. K. I). wszystkie punkta tey prostopadłey będąc w równey odległości od ostatecznych końców A i B, linij AB, punkt G będąc iednym z tych punktów, odległość AG=BG. Gdy więc cięciwa AG iest równa cięciwie GB, łuk AG iest równy łukowi GB (Zad. V.); azatém promień CG prostopadły do cięciwy AB, dzieli łuk w punkcie G, obięty cięciwą AB, na dwie części równe.

Uwaga. Srzodek C koła; srzodek D cięciwy AB, i srzodek G łuku obiętego tą cięciwą, leżą na tey samey linij prostey CG prostopadłey do cięciwy AB. Gdy dwa punkta są dostateczne do oznaczenia położenia linij prostey; więc linija prosta CG przechodząca przez dwa punkta C, G, przeyidzie koniecznie przez punkt trzeci D, i będzie prostopadłą do cięciwy AB.

Zkąd także wypada, że *prostopadła wy-*

nie-

niesiona na połowie cięciwy, przechodzi przez srzodek koła, i przez połowę łuku obiętego tą cięciwą.

ZADANIE VIII.

Twierdzenie.

Przez trzy punkta dane nieleżące na iedney linij prostey, ieden tylko obwód koła poprowadzić można. (fig. 52).

Niech będą trzy punkta A, B, C; złączmy punkt A z punktem B, punkt B z punktem C, a podzieliwszy dwie linije proste AB, BC, każdą na dwie części równe, wyprowadźmy z ich srzodków dwie prostopadłe DE, FG, powiadam naprzód, że te dwie prostopadłe zbiegną się w punkcie O.

Mogą tu bydź dwa przypadki, albo kąt ABC nie iest prostym, albo kąt ABC iest kątem prostym.

1*mo* Jeżeli kąt ABC nie iest kątem prostym, summa kątów wewnętrznych GFB, ABF, będąc większą lub mnieyszą od dwóch kątów prostych, linije AB, GF, przetną się (Zad. XXII. K. I.); niech przetną się naprzykład w punkcie K; w tróykącie prostokątnym BFK, kąt K będąc kątem ostrym, summa katów wewnętrznych EDK, GKD, będąc mnieyszą od dwóch kątów prostych, linije DE, KG, dostatecznie przedłużone przetnąsię w punkcie O.

2*do* Je-

2*do* Jeżeli kat ABC iest kątem prostym, linija DE prostopadła do linij AB, będzie równoległą do linij BC; więc linija prosta DE, prostopadła do srzodka linij AB, spotka się z liniją FG. prostopadłą do srzodka linij BC, w punkcie O. Ponieważ przez punkt F, iednę tylko równoległę BC, do linij DE, poprowadzić można. (Zad. XXII. K. I. wniosek.)

Punkt zatém O, leżący na prostopadłey DE, iest w równey odległości od dwóch punktów A, B, (Zad. XVII. K. I.); ten sam punkt O, leżąc na prostopadłey FG, iest w równey odległości od dwóch punktów B, C; więc trzy odległości OA, OB, OC, są równe. A zatém obwód koła opisany ze srzodka O, promieniem OB, przeyidzie koniecznie przez trzy punkta dane A, B, C.

Możemy więc zawsze poprowadzić obwód koła przez trzy punkta dane niebędące w linij prostey, lecz niewięcey nad ieden; ponieważ gdyby był drugi obwód przechodzący przez trzy punkta dane A, B, C, iego srzodek niemogłby leżeć zewnątrz linij DE (Zad. XVII. K. I.) bo niebyłby w równey odległości od punktów A, B; dla podobney przyczyny tenże srzodek niemogłby leżeć zewnątrz linij FG, więc leżałby razem na dwóch linijach DE, FG. Gdy zaś dwie linije proste w iednym tylko punkcie przeciąć się mogą, a zatém przez trzy punkta dane ieden tylko obwód koła poprowadzić można.

Wnio-

Wniosek. Dwa obwody kôł, naywięcey w dwóch punktach przeciąć się mogą, bo gdyby miały trzy punkta wspólne, miałyby ten sam srzodek, i składałyby ieden tylko i ten sam obwód.

ZADANIE IX.

Twierdzenie.

Dwie cieńciwy równe są w równey odległości od srzodka koła; z dwóch zaś cieńciw nierównych, naymnieysza, iest od srzodka koła nayodległeysza. (fig. 53).

1*mo* Niech będzie cieńciwa AB, równa cieńciwie DE; podzieliwszy te dwie cieńciwy w punktach G, F, na dwie części równe, spuśćmy na te punkta ze srzodka koła C dwie prostopadłe CG, CF, i poprawadźmy promienie CA, CD.

Trókąty prostokątne CFA, CGD, maią przeciwprostokątne CA, CD równe; nadto bok AF połowa cieńciwy AB, iest równy bokowi DG połowie cieńciwey DE, więc te dwa tróykąty będąc równe (Zad. XVIII. K. I.) trzeci bok CF iest równy trzeciemn bokowi CG, azatém 1*mo*. Dwie cieńciwy równe AB, DE, są w równey odległości od srzodka koła C.

2*do* Niech będzie cieńciwa AH większa od cieńciwy DE, łuk ANKBH będzie większy od łuku DME (Zad. VI.) na łuku ANKBH weźmy część ANKB = DME, a poprowa-

dziw-

dziwszy cięciwę AB, spuśćmy CF prostopadłą na tę cięciwę, i CI prostopadłą na cięciwę AH; widoczną iest rzeczą że $CF > CO$, zaś $CO > CI$ (Zad. XVI. K. I.) azatém $CF > CI$, lecz $CF = CG$ ponieważ cięciwy AB DE są równe, więc $CG > CI$, azatém z dwóch cięciw nierównych, naymnieysza iest od srzodka koła nayodleglеysza.

ZADANIE X.

Twierdzenie.

Prostopadła prowadzona do ostatecznego końca promienia będącego na obwodzie koła, iest styczną do tego obwodu. (fig. 54.)

Jeżeli do ostatecznego końca promienia CA przez punkt A na obwodzie, poprowadzimy prostopadłą BD, powiadam, że ta prostopadła będzie styczną do obwodu koła.

Ponieważ linija pochyła CE iest dłuższą od linij prostopadłey CA (Zad. XVI. K. I.), punkt E leży zewnątrz obwodu koła; więc linija BD ma tylko ieden punkt A wspólny z obwodem; a zatém BD iest styczna (Opisanie VIII).

Uwaga. Gdyby można było poprowadzic drugą styczne *np.* AF, ta styczna niebyłaby już prostopadłą do promienia CA, więc spuściwszy że srzodka obwodu koła C prostopadłą C G na tę nową styczną AF, linija CA, będąc liniją pochyła względem linij CG,

bę-

będziemy mieli CG < CA, więc pukt G należący do styczney AF, będąc bliżey srzodka obwodu koła C, aniżeli punkt A, punkt z założenia będący na obwodzie koła, azatém punkt G tey mniemaney styczney AF, byłby wewnarz obwodu koła. (*)

ZADANIE XI.

Twierdzenie.

Dwie linije równoległe, odcinaią na obwodzie koła łuki równe. (fig. 55. i fig. 56).

Mogą bydź trzy przypadki:

1*mo* Jeżeli dwie równoległe są siecznemi, poprowadziwszy promień CH prostopadły do cięciwy MP, a który razem będzie prostopadły i do iey równoległey NQ (Zad. XXIII. K. I.); punkt H będzie na połowie łuku MHP, i na połowie łuku NHQ (Zad. VII.); więc łuk MH = HP, i łuk NH = HQ: z tad

MH — HN = HP — HQ

to iest łuk

MN = PQ.

2*do* Je-

(*) Podobnym sposobem dowieść można, że między styczną AD, i obwodem koła AO żadney inney linij iaką iest *np.* linija AF poprowadzić niemożna, i że styczna AD, poprowadzona do punktu A, ma tę szczególną własność, iż między wszystkiemi linijami

2*do* Jeżeli z dwóch równoległych AB, DE (fig. 56.) iedna iest sieczną, druga zaś styczną do punktu dotknięcia H, poprowadziwszy promień CH, ten będzie prostopadły do styczney DE (Zad. X). i do iey równoległey MP. Lecz promień CH będąc prostopadłym do cięciwy MP, punkt H iest na połowie łuku MHP, więc łuki MH, HP obięte między równoległemi AB, DE są równe.

3*tio* Nakoniec, ieżeli dwie równoległe DE, IL (fig. 56.) są stycznemi, iedna w punkcie H, druga w punkcie K, poprowadziwszy sie-

---

mi prostemi prowadzonemi przez punkt A, naybardziey do linij krzywey iest zbliżoną.

Jakoż, ieżeli przypuścimy że linija prosta *np.* AF może bydź poprowadzoną między styczną AD i liniją krzywa AO, spuściwszy prostopadłą CG na liniją prostą AF, będziemy mieli $CG < CA$, więc punkt G byłby wewnątrz obwodu koła, azatém linija prosta AF niemoże bydź położoną między AD i AO iakieśmy wyżey przypuścili. Z tey okoliczności przytoczmy tu wyrazy *Lagranża* (fonctions analytiques *p.* 117). „podług „dawnych Geometrów, linija prosta iest sty- „czną do linij krzywey, skoro maiąc ieden „punkt wspólny z liniją krzywą, żadney in- „ney linij prostey przez ten punkt między „nią i liniją krzywą poprowadzić niemożna „i t. d.

sieczną AB równoległą do tych stycznych, mamy MH=HP, MK=KP; więc cały łuk HMK=HPK, i każdy z tych łuków iest pół obwodem koła.

ZADANIE XII.

Twierdzenie.

Jeżeli dwa obwody kół przecinaią się w dwóch punktach, linija przechodząca przez srzodki tych dwóch obwodów, będzie prostopadłą do cienciwy, łączącey punkta ich przecięć, i dzielić będzie tę cienciwę na dwie części równe. (fig. 57, i fig. 58).

Ponieważ linija AB łącząca punkta przecięć dwóch kół, iest wspólną cienciwą tych dwóch kół; wyprowadziwszy ze srzodka tey cienciwy prostopadłą, ta prostopadła przeyść powinna przez każdy z dwóch srzodków C, i D (Zad. VII). Gdy zaś przez dwa punkta dane iednę

„i t. d.“ I na tém to starożytném opisaniu styczney, *Lagranż* w dziele wyżey wspomnionéin, ustanowił teoryą dotknięć że ścisłością i pięknością które są właściwe temu wielkiemu Geometrze.

Lecz dowieść należy na odwrót, iż ieżeli linija prosta DE (fig. 56). iest styczną do punktu H obwodu koła MHP, promień CH łączący srzodek obwodu koła C z punktem dotiednę tylko liniję prostą poprowadzić możemy, więc linija prosta przechodząca przez srzodki dwóch obwodów kół, będzie prostopadłą do połowy ich wspólney cienciwy.

ZADANIE XIII.

Twierdzenie.

Jeżeli odległość dwóch srzodków iest mnieysza od summy promieni, i ieżeli promień naywiększy iest mnieyszy od summy z promienia naymnieyszego i odległości srzodków, dwa koła przetnąsię. (fig. 57. 58).

Do przecięcia się dwóch kół potrzeba, ażeby tróykąt CAD miał mieysce; więc nietylko ażeby odległość srżodków CD była $< AC + AD$, lecz ażeby promień naywiększy AD był $< AC + CD$. W każdym więc razie, skoro tróykąt CAD może bydź złożony, obwody opisane ze srzodków C, D, przetną się w punktach A, B.

ZA-

---

dotknięcia H, będzie prostopadły do tey styczney.

Jakoż gdyby promień CH niebył prostopadłym do DE, z punktu C możnaby spuścić na DE inną prostopadłą CO odmienną od CH, i mielibyśmy $CO < CH$, więc punkt O, będąc bliżey srzodka aniżeli punkt H, linija prosta DE byłaby sieczną a co iest przeciwko założeniu.

ZADANIE XIV.

Twierdzenie.

Jeżeli odległość srzodków dwóch kół iest równa summie ich promieni, te dwa koła zetkną się zewnętrznie. (fig. 59).

Widocznie, iż będą miały punkt A wspólny, lecz tylko ten ieden punkt A, ponieważ, aby miały dwa punkta wspólne, potrzeba, ażeby odległość srzodków była mnieyszą od summy ich promieni.

ZADANIE XV.

Twierdzenie.

Jeżeli odległość srzodków dwóch kół, iest równa różnicy ich promieni, te dwa koła zetkną się wewnętrznie. (fig. 60).

Naprzód widoczną iest rzeczą, że maią punkt wspólny A; i że drugiego punktu wspólnego mieć niemogą, bo nato potrzeba, aby promień naywiększy A D, był mnieyszy od summy z promienia mnieyszego A C, i odległości srzodków C D (Zad. XIII.), co niema mieysca.

Wniosek. Więc ieżeli dwa koła ztykaią się bydź wewnętrznie, bądź zewnętrznie, ich srzodki i punkt zetknięcia leżą nateyże samey linij prostey.

Uwaga. Wszystkie koła maiące srzodki na linij prostey C D, i których obwody prze-

cho-

chodzą przez punkt A (fig. 59, 60). maiąc tylko między sobą ten ieden punkt wspólny, są stycznemi iedne do drugich.

I ieżeli przez punkt A, poprowadzimy liniją AE prostopadłą do linij AD, linija prosta AE będzie styczną wspólną obu tym kołom.

ZADANIE XVI.

Twierdzenie.

W iednem kole, lub w kołach równych, ieżeli dwa kąty we srzodku dwóma promieniami obięte tak są między sobą, iak dwie liczby całkie, łuki na obwodzie koła temi promieniami odcięte, będą tak między sobą, iak też same liczby całkie. (fig. 62).

Niech kąt M będzie wspólną miarą dwóch kątów ACB, DCE, i niech tenże kąt M będzie zamknięty siedm razy w kącie A C B. a cztery razy w kącie D C E. Kąty cząstkowe A C m, m C n, n C p, i t. d. D C x, x C y, y C z i t.d. będąc równe między sobą, łuki cząstkowe A m, m n, np it.d. Dx., xy, y z i t. d. będą także równe między sobą (Zad. IV.); więc cały łuk AB będzie do całego łuku DE iak 7 do 4. Widoczną iest rzeczą że to samo rozumowanie miałoby mieysce, gdyby zamiast liczb 7 i 4 były iakiekolwiek inne liczby. Więc ieżeli stosunek kątów ACB, DCE może bydź wyrażony w liczbach cał-

kich,

kich, łuki AB, DE będą między sobą iak kąty ACB, DCE.

Uwaga. Wzaiemnie, ieżeli łuki AB, DE będą między sobą iak dwie liczby całkie, kąty ACB, DCE będą między sobą iak te same liczby, i będziemy mieli zawsze proporcyą: *Kąt* ACB: kąta DCE:: łuk AB: do łuku DE; ponieważ łuki cząstkowe Am, mn i t.d. Dx, xy it.d. będąc równe, kąty cząstkowe ACm, mCn it.d. DCx, xCy it.d. będą także równe.

ZADANIE XVII,

Twierdzenie.

Jakikolwiek będzie stosunek dwóch kątów, te zawsze będą między sobą, iak łuki obięte między ich ramionami, i opisane z ich wierzchołków iako srzodków, promieniami równemi. (fig. 63).

Niech będą te dwa kąty ACB, ACD, powiadam, że będziemy mieli zawsze proporcyą:

kąt ACB : *kąta* ACD : : *łuk* AB : *łuku* AD.

Połóżmy kąt naymnieyszy na kącie naywiększym; ieżeli proporcya wyżey wzmiankowana niema mieysca, kąt ACB będzie do kąta ACD iak łuk AB do łuku większego lub mnieyszego od łuku AD. Przypuśćmy że do łuku większego od łuku AD, a wyraziwszy ten łuk większy przez AO będziemy mieli pro-

por-

porcyą: *kąt* ACB : *kąta* ACD : : *łuk* AB : *łuku* AO.
Wystawmy teraz że łuk AB iest podzielony na części równe, z których każda będzie mnieyszą od DO, więc przynaymniey ieden punkt znaydzie się między D i O, niech tym punktem będzie I, złączmy CI; łuki AB, AI będą między sobą iak dwie liczby całkie, i będziemy mieli podług twierdzenia poprzedzaiącego proporcyą następuiącą:

kąt ACB : *kąta* ACI : : *łuk* AB : *łuku* AI;

porównywaiąc te dwie proporcye, gdy poprzedniki są te same, następniki złożą proporcyą

kąt ACD : *kąta* ACI : : *łuk* AO : *łuku* AI.

Lecz łuk AO iest większy od łuku AI, więc gdyby ta proporcya była prawdziwą, potrzeba ażeby kąt ACD był większy od kąta ACI, gdy przeciwnie iest mnieyszy, azatém proporcya iest fałszywą. Lecz ta proporcya wypadła z dwóch proporcyy:

Kąt ACB : *kąta* ACD : : *łuk* AB : *łuku* AO,

Kąt ACB : *kąta* ACI : : *łuk* AB : *kuku* AI,

i gdy ostatnia z tych dwóch proporcyy została doskonale dowiedzioną (Zad. XVI.), więc pierwsza z tych dwóch proporcyy iest fałszywą; azatém bydź niemoże, ażeby kąt ACB, był do kąta ACD iak łuk AB do łuku większego od łuku AD.

Przez rozumowanie zupełnie podobne dowiedlibyśmy, że czwarty wyraz proporcyi, niemoże bydź mnieyszy od łuku AD, więc ten czwarty wyraz będąc doskonale równy łukowi AD, azatem będziemy mieli proporcyą:

Kąt A C B : *kąta* A C D :: *łuk* A B : *łuku* A D.

Wniosek. Z tey proporcyi wypada, że gdybyśmy szukali liczby razy, którą łuk A B, obeymuie łuk A D, ta liczba będzie liczbą wyrażaiącą iak wiele razy kąt A C B, obeymuie kąt A C D; ieżeli obierzemy za iednostkę kątów, to iest za kąt, do którego odnoszą się, i z którym porównywaią się wszystkie inne kąty, kąt A C D; liczba razy którą kąt A C B, obeymować będzie kąt A C D, wyrazi miarę liczebną kąta A C B. I ieżeli w tym samym czasie, weźmiemy łuk A D za iednostkę łuków, liczba razy, którą łuk A B, obeymować będzie łuk A D, będzie miarą liczebną łuku A B. Azatém miara liczebna kąta A C B, będzie tą samą, co miara łuku A B. Więc gdy pospolicie dla skrócenia mowimy, że kąta A C B miarą iest łuk A B, obięty między iego ramionami, i opisany z iego wiezchołka iako srzodka, nigdy zapomnieć nienależy, że to tylko wówczas ma mieysce, skoro weźmiemy za iednostkę kątów, kąt obeymuiący między swoiemi ramionami łuk obrany za iednostkę łuków, i opisany tym samym promieniem co łuk pierwszy.

Uwaga I. Jeżeli dla większey prostoty, obierzemy kąt prosty za iednostkę kątów, naówczas czwarta część obwodu koła, odcięta ramionami kąta prostego, będzie iednostką łuków; porównywaiąc z tą iednostką łuków, łuk

mie-

mierzący kąt dany, będziemy mieli stosunek kąta danego do kąta prostego.

Uwaga II. Wszystko cośmy wyłożyli w poprzedzaiących zadaniach względem porównania kątów z łukami, równie ma mieysce względem porównania wycinków z łukami: ponieważ, skoro kąty są równe, wycinki są równe, i w ogólności proporcyonalne kątom; *więc dwa wycinki* ACB, ACD (fig. 63.), *wzięte w tém samém kole, lub w dwóch kołach równych, są między sobą iak łuki* AB, AD, *podstawy tych wycinków.* Ztąd widzimy, że łuki koła służąc do wymiaru kątów, służyć także mogą do wymiaru różnych wycinków tego samego koła, albo kół równych. (*)

ZADANIE XVIII.

Twierdzenie.

Miarą kąta wpisanego w obwód koła, iest połowa łuku obiętego ramionami tego kąta. (fig. 64, i fig. 65).

Niech będzie kąt wpisany BAD, powiadam, że miarą iego będzie połowa łuku BD.

Założmy naprzód, że srzodek koła iest wewnątrz kąta BAD; poprowadziwszy srzednicę AE, i promienie CB, CD, kąt BCE, ia-

---

(*) Dla łatwieyszego obięcia Zad. XVI., i XVII. należy dobrze odczytać w Arytmetyce §. §. 144, 151. i t. d.

ko zewnętrzny, iest równy summie wewnętrznych B A C, A B C (Zad. XXIII. K. I.): lecz tróykąt B A C, będąc tróykątem równoramiennym, kąt B A C = A B C; więc kąt B C E, iest dwa razy większy od kąta B A C. Kąt B C E, iako kąt we srzodku koła ma za miarę łuk B E; więc kąt B A C, będzie miał za miarę połowę łuku B E. Dla podobney przyczyny kąt C A D, będzie miał za miarę połowę łuku E D; azatém summa kątów B A C + C A D, albo kąt B A D, będzie miał za miarę połowę summy łuków B E + E D, albo połowę łuku B D.

Założmy powtóre, że srzodek koła C, znayduie się zewnątrz kąta B A D (fig. 65.); naówczas poprowadziwszy srzednicę A E, kąt B A E, będzie miał za miarę połowę łuku B E, kąt zaś D A E, połowę łuku D E; więc ich różnica B A D, będzie miała za miarę połowę łuku B E, zmnieyszonego połową łuku E D; czyli połowę łukn B D.

Więc każdy kąt wpisany ma za miarę połowę łuku obiętego między iego ramionami.

Wniosek I. Wszystkie kąty B A C, B D C, B E C, wpisane w tym samym odcinku BADEC (fig. 66), są równe; ponieważ maią za miarę połowę tego samego łuku B O C.

Wniosek II. Każdy kąt B A D (fig. 67.), wpisany wpółkole, iest kątem prostym, ponieważ ma za miarę połowę pół-obwodu koła B O D, czyli czwartą część obwodu koła.

Chcąc dowieść tę prawdę innym sposobem,

bem, poprowadźmy promień CA; tròykąt BAC, iest tróykątem równoramiennym, więc kąt BAC=ABC; tròykąt CAD, iest także tróykątem równoramiennym; więc kąt CAD= ADC, więc BAC+CAD, czyli kąt BAD= ABD+ADB. Gdy dwa kąty B, i D, w tròykącie ABD, są równe kątowi trzeciemu BAD, i gdy trzy kąty w tróykącie składaią dwa kąty proste, więc kąt BAD iest kątem prostym.

Wniosek III. Każdy kąt wpisany BAC (fig. 66). w odcinku większym od półkoła, iest *kątem ostrym*, ponieważ ma za miarę połowę łuku BOC, mnieyszego od pół-obwodu koła. Każdy zaś kąt BOC, wpisany w odcinek mnieyszy od półkoła, iest *kątem rozwartym*, ponieważ ma za miarę połowę łuku BAC, większego od półobwodu koła.

Wniosek IV. W czworoboku wpisanym BADC (fig. 68). kąty przeciwległe A, C, składaią razem dwa kąty proste; ponieważ kąt BAD, ma za miarę połowę łuku BCD, kąt BCD połowę łuku BAD; więc dwa kąty BAD, BCD, razem wzięte maią za miarę połowę obwodu koła; więc ich summa wynosi dwa kąty proste.

ZADANIE XIX.

Twierdzenie.

Kąt złożony ze styczney i cięciwy, ma za miarę połowę łuku obiętego między styczną cięciwą. (fig. 69).

Niech

Niech będzie styczna BA, i cienciwa AC, powiadam, że kąt BAC, będzie miał za miarę połowę łuku AMDC.

Z punktu dotknięcia A, wyprowadźmy srzednicę AD; kat BAD prosty (Zad. X.), ma za miarę połowę obwodu koła AMD, kąt DAC, ma za miarę połowę łuku DC; więc katy BAD + DAC, albo kąt BAC, ma za miarę połowę łuku AMD, nadto połowę łuku DC, albo połowę łuku AMDC. Tym samym sposobem dowiedlibyśmy, że kąt CAF, ma za miarę połowę łuku AC, obiętego między styczną AF, i cienciwą AC.

Zagadnienia względne do dwóch pierwszych książek części pierwszey.

Zagadnienie Pierwsze.

Podzielić liniją prostą daną AB, *na dwie części równe.* (fig. 70).

Z punktów A i B, iako ze srzodków, promieniem większym od połowy linij daney AB, opiszmy dwa łuczki przecinaiace się w punkcie D; punkt D, będzie w rowney odegłości od punktów A, B: naznaczmy podobnie nad albo pod liniją AB, drugi punkt E, równo oddalony od punktów A, B; przez dwa punkta D, E, poprowadziwszy liniją DE, ta przetnie liniją daną AB w punkcie C, na dwie części równe. Ponieważ z dwóch punktów D, E,

każkazdy iest w równey odległości od ostatecznych końców A, B, linij daney A B; więc oba leżeć będą na prostopadłey wyniesioney na połowie linij A B. Gdy przez dwa punkta iednę tylko liniję prostą poprowadzić można; azatém linija D E, będzie prostopadłą, która w punkcie C, podzieli liniją daną AB, na dwie części równe.

Zagadnienie II.

Przez punkt A, *dany na linij prostey* BC, *wyprowadzić prostopadłą do tey linij.* (fig. 71).

Weźmy punkta B, C; w równey odległości od punktu A, z których iako ze srzodków i promieniem nieco większym od BA, opiszmy dwa łuczki przecinaiące się w punkcie D; poprowadziwszy liniją prostą AD, ta będzie prostopadłą żądaną. Ponieważ punkt D, będąc w równey odległości od punktów B, C, leży na prostopadłey wyniesioney z połowy linij daney B C; więc AD, iest tą prostopadłą.

Uwaga. To samo wykreślenie służy na złożenie kąta prostego BAD, w punkcie danym A, linij prostey B C.

Zagadnienie III.

Z punktu A, *danego zewnątrz linij prostey* BD, *spuścić prostopadłą na tę liniję.* (fig. 72).

Z punk-

Z punktu A, iako ze srzodka promieniem dostatecznym opiszmy łuk który przetnie liniją daną BD, w dwóch punktach B, D; naznaczmy następnie punkt E, równie odległy od punktów B, D, a poprowadziwszy liniją prostą AE, ta będzie prostopadłą żądaną. Ponieważ dwa punkta A, E, są w równey odległości od punktów B, D; linija AE, iest prostopadłą do połowy linij daney BD.

Zagadnienie IV.

W punkcie A, *linij daney* AB, *zrobić kąt równy kątowi danemu* K. (fig. 73).

Z wierzchołka kąta danego K, iako ze srzodka i promieniem od upodobania, opiszmy łuk odcięty dwoma ramionami kąta danego K; z punktu A, iako ze srzodka i promieniem AB, równym promieniowi KI, opiszmy łuk nieograniczony BO; weźmy następnie promień równy cięciwie LI, i z punktu B, iako ze srzodka tym promieniem opiszmy łuk, który przetnie w punkcie D, łuk nieograniczony BO; poprowadźmy AD; kąt DAB, będzie równy kątowi danemu K. Ponieważ dwa łuki BD, LI, promieni i cięciw równych są równe (Zad. V. K. II.) kąt BAD, iest równy kątowi IKL.

Zagadnienie V.

Podzielić kąt albo łuk dany na dwie części równe. (fig. 74).

1mo Je-

1mo Jeżeli chcemy podzielić łuk AB, na dwie części równe, z punktów A, B, tego łuku iako ze srzodków, i tym samym promieniem opiszmy dwa łuczki przecinaiące się w punkcie D; przez punkt D, i przez srzodek łuku danego C, poprowadziwszy liniją CD, ta podzieli łuk dany AB, na dwie części równe w punkcie E. Ponieważ dwa punkta C, D, każdy iest w równey odległości od ostatecznych końców A, B, cieńciwy AB, obeymuiącey łuk dany AB; więc linija CD, będąc prostopadłą do połowy tey cieńciwy, podzieli w punkcie E, łuk AB, na dwie części równe (Zad. VII. K. II).

2do Jeżeli chcemy podzielić kąt ACB, na dwie części równe, z wierzchołka tego kąta C, iako ze srzodka opisawszy łuk AB, reszta wykonywa się iak wyżey.

Uwaga. Jakim sposobem podzieliliśmy kąt ACB, lub łuk AB, na dwie części równe, tym sposobem podzielimy połowę tego kąta ACE, lub połowę łuku EA, na dwie części równe; więc przez poddziały następne możemy podzielić kąt albo łuk dany na 4, 8, 16 i t. d. części równe.

Zagadnienie VI.

Przez punkt dany A, *poprowadzić liniją równoległą do linij daney* BC. (fig. 75).

Z punktu A, iako ze srzodka, i promieniem dostateczney wielkości, opiszmy łuk nie-

ogra-

ograniczony EO; z punktu E iako ze srzodka, i tym samym promieniem opiszmy łuk AF; weźmy ED=AF, i poprowadźmy AD, która będzie równoległą żądaną.

Ponieważ złączywszy AE, kąty AEF, EAD są równe, więc linije AD, EF są równoległe. (Zad. XXIII. K. I).

Zagadnienie VII.

W tróykącie maiąc znane dwa kąty, np. A, B, *wynaleść kąt trzeci.* (fig. 76).

Wykreśliwszy liniją nieograniczoney wielkości DEF, złożmy w punkcie E kąt DEC= A, i kąt CEH=B, pozostały kąt HEF będzie trzecim kątem żądanym.

Ponieważ te trzy kąty razem wzięte składaią dwa kąty proste.

Zagadnienie VIII.

Maiąc dany kąt A, *i dwa ramiona ten kąt obeymuiące* B, C, *wykreślić tróykąt.* (fig. 77).

Wykreśliwszy liniją nieograniczoney długości DE, złóżmy w punkcie D kąt EDF równy kątowi danemu A; weźmy następnie DG=B, DH=C, a złączywszy punkta G, H, liniją prostą GH, tróykąt GDH będzie tróykątem żądanym.

Zagadnienie IX.

Maiąc bok i dwa kąty wykreślić tróykąt. (fig. 78).

Z dwóch

Z dwóch kątów danych, albo oba będą przyległe bokowi danemu, albo ieden będzie przyległy a drugi przeciwległy: w tym ostatnim przypadku znalazłszy kąt trzeci (Zagad. VII.), będziemy mieli dwa kąty przyległe. Wykreśliwszy więc liniją prostą DE równą bokowi danemu, złóżmy w punktach D, E, kąty, równe dwóm kątom przyległym; dwie linije DF, EG składaiące z bokiem danym te kąty, przedłużone, przetną się w punkcie H, a tróykąt ztąd powstaiący HDE, będzie tróykątem żądanym.

Zagadnienie X.

Maiąc dane trzy boki A, B, C, *wykreślić tróykąt.* (fig. 79).

Wykreślmy liniją DE równą bokowi A; z punktu E iako ze srzodka i promieniem równym drugiemu bokowi B, opiszmy łuczek; z punktu D, iako ze srzodka i promieniem równym trzeciemu bokowi C, opiszmy drugi łuczek, te dwa łuczki przetną się w punkcie F; poprowadziwszy linije DF, EF, tróykąt DEF, będzie tróykątem żądanym.

Uwaga. Gdyby ieden z boków był większy od summy dwóch boków drugich, albo mnieyszy od ich różnicy, łuczki nieprzeciełyby się. Lecz ieżeli summa dwóch boków wziętych od upodobania iest większą od boku trzeciego, rozwiązanie zawsze będzie miało mieysce.

Zagad-

Zagadnienie XI.

Maiąc dane dwa boki A, B, *z kątem* C, *przeciwległym bokowi* B, *wykreślić tróykąt.* (fig. 80). (fig. 81). (fig. 82).

Dwa tu zachodzą przypadki, 1*mo* albo bok dany B, przeciwległy katowi danemu C, iest mnieyszy od boku drugiego danego A; 2*do* albo bok przeciwległy B, iest większy od boku A. *W pierwszym przypadku* skoro B < A (fig. 82). Złóżmy kąt EDF, równy kątowi danemu C, weźmy liniią DE, równą bokowi danemu A, a z punktu E, iako ze srzodka i promieniem równym bokowi danemn B, mnieyszym od boku A, opiszmy łuk koła GF, który przetnie bok DF dostatecznie przedłużony, w dwóch punktach G, F, złączywszy EG, EF; linije proste EG, EF, będąc dwiema linijami pochyłemi równemi i mnieyszemi od linij ED, będą mniey oddalone od prostopadłey EH, aniżeli linija ED; więc linije pochyłe EF, EG, leżąc z iedney strony linij pochyłey ED, składać będą dwa tróykąty EFD, EGD, w których kąt EDF = C, należeć będzie do obu tych tróykątow; nadto te dwa tróykąty maiąc boki EF, ED, i EG, ED, równe bokom B i A, ieden tróykat i drugi zadosyć uczynią zagadnieniu; azatem w tym przypadku zagadnienie będzie miało dwa rozwiązania. *W drugim przypadku* skoro bok B > A (fig. 80. 81.), wziąwszy iak

w przy-w przypadku poprzedzaiącym kąt EDF = C, ED = A, z punktu zaś E iako ze srzodka promieniem EF = B opisawszy łuk koła, ten ieszcze przetnie liniją DF w dwóch punktach, lecz te punkta nie będą iuż leżeć z tey samey strony boku ED iak w przypadku poprzedzaiącym (fig. 82). Z kąd wnosimy że w tym drugim przypadku tróykąt DEF (fig. 80. 81). iest tróykątem iedynym mogącym rozwiązać zagadnienie.

Zagadnienie XII.

Maiąc boki przyległe A, B *równoległoboku, z kątem* C *który obeymuią, wykreślić równoległobok.* (fig. 83).

Poprowadźmy liniją DE = A, złóżmy w punkcie D kąt FDE = C, weźmy DF = B, opiszmy dwa łuczki ieden z punktu F, iako ze srzodka i promieniem EG = DE; drugi z punktu E, iako ze srzodka i promieniem EG = DF: przez punkt G, w którym te dwa łuczki przetną się, poprowadziwszy FG, EG; czworobok DEGF, będzie równoległobokiem żądanym. Ponieważ z wykreślenia boki przeciwległe są równe, więc figura wykreślona iest równoległobokiem (Zad. XXX. K. I.), azatem równoległobok iest złożony z boków danych i kąta danego.

Wniosek. Jeżeli kąt dany iest prosty, figura będzie prostokątem, nadto ieżeli boki są równe, figura będzie kwadratem.

Zagad-

Zagadnienie XIII.

Znaleść srzodek koła albo łuku danego. (fig. 84).

Weźmy podług upodobania na obwodzie koła danym, albo na łuku danym, trzy punkta A, B, C; złączmy punkt A z punktem B, liniją AB; punkt B, z punktem C, liniją BC; podzielmy te dwie linije na dwie części równe przez prostopadłe DE, FG; punkt O, w którym te prostopadłe spotkaią się, będzie srzodkiem szukanym.

Uwaga. To samo wykreślenie służy chcąc poprowadzić obówd koła przez trzy punkta dane, lub wykreślić obwód w którym tròykąt dany ABC, będzie wpisany.

Zagadnienie XIV.

Przez punkt dany poprowadzić styczną do koła danego. (fig. 85).

Jeżeli punkt dany A, iest na obwodzie koła, poprowadziwszy promień CA, i liniją DA prostopadłą do promienia CA, ta linija DA będzie styczną żądaną (Zad. X. K II). Jeżeli punkt A, iest zewnątrz obwodu koła (fig. 86.); złączmy srzodek koła z punktem danym A liniją prostą CA; podzielmy CA na dwie części równe w punkcie O; z punktu O, iako ze srzodka i promieniem OC, opiszmy obwód koła który przetnie obwód koła dany w punkcie B; poprowadziwszy z punktu danego A,

do

do punktu B, liniją prostą AB, ta będzie styczną żądaną. Ponieważ prowadząc CB, kąt CBA, wpisany wpółobwód koła iest kątem prostym (Zad. XVIII. K. II.), więc AB, będąc prostopadłą do ostatecznego końca promienia CB, iest styczną do koła danego.

Uwaga. Przez punkt dany A, będący zewnątrz koła, dwie styczne równe AB, AD, poprowadzić można. Ponieważ tróykąty prostokątne CBA, CDA, maią przeciwprostokątną CA wspólną, bok CB=CD, więc te dwa tróykąty będąc rowne (Zad. XVIII. K. I). AD=AB, i kąt CAD=CAB.

Zagadnienie XV.

W tróykąt dany wpisać obwód koła. (fig. 87).

Podzielmy kąty A i B, każdy na dwa kąty równe przez linije AO, BO, które zbiegną się w punkcie O; z punktu O spuśćmy prostopadłe OD, OE, OF, na trzy boki danego tróykąta; powiadam, że te trzy prostopadłe będą równe między sobą. Ponieważ z wykreślenia kąt DAO=OAF, kąt ADO=AFO, więc trzeci kąt AOD, iest równy trzeciemu kątowi AOF. Krom boku AO, spólnego dwom tróykątom AOD, AOF, kąty przyległe bokowi równemu są równe, więc te dwa tróykąty przystaną do siebie, więc DO=OF. Podobnym sposobem dowiedziemy, że dwa tróykąty BOD, BOE, są ró-

wne

wne między sobą, i OD=OE; więc trzy prostopadłe OD, OE, OF, będąc równe, ieżeli z punktu O, iako ze srzodka, i promieniem OD, opiszemy obwód koła, widoczną iest rzeczą, że ten obwód będzie wpisany w tróykat dany ABC; ponieważ bok AB, prostopadły do ostatecznego końca promienia OD iest styczną, równie iak boki BC, AC, są stycznemi do ostatecznych końców promieni OE, OF.

Uwaga. Trzy linije dzielące na dwa równe kąty każdy z trzech kątów tróykąta, zbiegną się w iednym i tym samym punkcie.

Zagadnienie XVI.

Na linij prostey daney AB, *opisać odcinek obeymuiący kąt dany* C; *to iest odcinek któryby obeymował wszystkie kąty wew. wpisane, równe kątowi danemu* C. (fig. 88. i 89).

Przedłużywszy liniją daną AB, w kierunku AB do D; złóżmy w punkcie B, kąt EBD=C; poprowadźmy BO, prostopadłą do BE, i GO prostopadłą do połowy linij daney AB; z punktu O iako ze srzodka, i promieniem OB opiszmy półobwód koła, odcinek żądany będzie AMB. Ponieważ BF iako prostopadła do ostatecznego końca promienia OB, iest styczną; kąt zaś ABF, ma za miarę połowę łuku AKB (Zad. XIX. K. II.), nadto kąt AMB, iako kąt wpisany, ma także

za

za miarę połowę łuku AKB, więc kąt AMB = ABF = EBD = C; więc wszystkie kąty wpisane w odcinek AMB, są równe kątowi danemu C.

Uwaga. Gdyby kąt dany był prosty, odcinek szukany byłby półobwodem koła opisanym na linij daney AB w tym razie srzednicy obwodu koła.

Zagadnienie XVII.

Znaleść stosunek liczebny dwóch linij prostych danych AB, CD, *maiących między sobą miarę wspólną.* (fig. 90).

Przeniosłszy liniją daną naymnieyszą CD, na liniją daną naywiększą AB, powtarzaiąc to przeniesienie tyle razy, ile razy linija naywiększa AB, obeymowac będzie liniją naymnieyszą CD, naprzykład dwa razy z resztą BE, będziemy mieli

$$AB = 2CD + BE.$$

Przeniosłszy resztę BE na liniją daną CD tyle razy, ile ta ostatnia obeymować będzie pierwszą, naprzykład ieden raz z resztą DF, więc

$$CD = BE + DF.$$

Przeniosłszy drugą resztę DF, na resztę pierwszą BE, tyle razy, ile może bydź obiętą, naprzykład raz ieden z resztą BG; azatem

$$BE = DF + BG.$$

Przeniosłszy trzecią resztę BG, na drugą gą resztę DF, tyle razy, ile będzie obiętą, powtarzaiąc te przenoszenia z iedney reszty na drugą, aż znaydziemy resztę zamykaiącą się liczbę razy spełna w reszcie poprzedzaiącey.

Naówczas ta ostatnia reszta będąc wspólną miarą linij zadanych, łatwo znaydziemy wartości reszt poprzedzaiących, a nakoniec wartości dwóch linij zadanych, wyciągaiąc ich stosunek w liczbach. Naprzykład, przypuśćmy że BG, iest obiętą razy dwa spełna w reszcie DF, będziemy mieli $DF = 2BG$; zkąd wyciągniemy następnie:

$$BE = DF + BG = 2BG + BG = 3BG;$$
$$CD = DE + DF = 3BG + 2BG = 5BG;$$
$$AB = 2CD + BE = 10BG + 3BG = 13BG;$$

azatém

$$AB : CD :: 13BG : 5BG,$$

albo

$$AB : CD :: 13 : 5.$$

Niech będzie *np.* $CD = 1.$ stopie.

Będziemy mieli:

$AB = \frac{13}{5} CD = \frac{13}{5}$ *stop* $= 2$ *stop*, 7 *cali*, $2\frac{1}{5}$ *linij*
ztąd widziemy, iż zawsze będziemy mogli znaleść długość przedmiotu AB, wyrażoną w stopach, calach, linijach i t. d., chociaż miara CD, którey używamy niema poddziałów na stopy, cale linije i t. d., byleby tylko długość całkowita CD, była wiadomą.

Uwaga. Sposób któryśmy teraz dopiero wyłożyli, iest ten sam który przepisuie *Arytmetyka* (§. 86). na znalezienie wspólnego

nego dzielnika dwóch liczb, więc innego dowodzenia niemamy potrzeby.

Zdarza się, iż ciągnąc iak naydaley działanie, reszta którąby była zamkniętą liczbę razy spełna w reszcie poprzedzaiącey nieznayduie się. Naówczas dwie linije proste niemaiąc wspólney miary, nazywaią się *niewspółmiernemi:* czego widzieć będziemy przykład w stosunku przekątney do boku kwadratu. Więc naówczas stosunku dokładnego w liczbach oznaczyć niemożna: lecz zaniedbawszy ostatnią resztę, znaydziemy stosunek mniey więcey zbliżony, podług tego, iak działanie mniey więcey daley posunioném będzie.

Zagadnienie XVIII.

Dwa kąty A, B, *będąc dane, wynaleść ich wspólną miarę, ieżeli ią maią, a ztąd ich stosunek w liczbach.* (fig. 91).

Promieniami równemi AC=BE, opiszmy dwa łuki CD, EF, które są miarą tych kątów; w porównaniu zaś łuków CD, EF, postępować będziemy iak w zagadnieniu poprzedzaiącém; ponieważ łuk tak może bydź przeniesionym na łuk tego samego promienia, iak linija prosta, na liniją prostą. Przyidziemy więc do wspólney miary łuków CD, EF, ieżeli ią maią tym samym sposobem, iakim przyszliśmy do wspólney miary dwóch linij danych, i do ich stosunku w liczbach. Lecz ten stosunek dwóch łuków będzie ten sam, co stosunek kątów (Zad. XVII. K. II.); i ieżeli DO, iest wspolną miarą łuków CD, EF, kąt DAO, będzie miarą wspólną kątów CAD, EBF.

Uwaga. Można więc znaleść wartość bezwzględną kąta, porównywaiąc łuk który mu służy za miarę, z całym obwodem koła. Naprzykład, ieżeli łuk CD, iest do obwodu koła, iak 3 do 25; kąt A, będ ie $\frac{3}{25}$ czterech kątów prostych, albo $\frac{12}{25}$ kąta prostego.

Przytrafić się może, że łuki porównywane niebędą miały wspólney miary, naówczas będziemy mieli na kąty stosunki w liczbach mniey więcey zbliżone, podług tego iak działanie mniey więcey daley posunionem będzie.

KSIĘ-

KSIĘGA III.

O proporcyonalności figur.

Opisania.

I. Nazywać będziemy *figury równo-wartuiące*, których powierzchnie są równe.

Dwie figury mogą bydź równo-wartuiące chociaż w cale do siebie niepodobne: *np.* koło może równo-wartować kwadratowi, tróykąt prostokątowi, i t. d.

Nazwanie *figur równych* służyć będzie figurom przystaiącym do siebe, i zbiegaiącym się we wszystkich punktach: *np.* dwa tróykąty w których trzy boki w iednym są równe trzem bokom w drugim, dwa koła których promienie są równe, i t. d.

II. Dwie figury są *podobne*, skoro kąty w iedney są równe kątom w drugiey, i *boki odpowiadaiące* proporcyonalne. Przez boki odpowiadaiace rozumieć będziemy maiące to samo położenie w dwòch figurach, albo przyległe dwom kątóm równym. Które kąty nazywaią się także kątami odpowiadaiącemi. Dwie figury równe są zawsze podobne, lecz dwie figury podobne mogą bydź bardzo nierówne.

III. W dwóch kołach nierównych, *łuki,*

wy-

wycinki, i odcinki podobne, odpowiadaią kątom we śrzodku równym.

Tak kąt A (fig. 92), będąc równy kątowi O, łuk BC iest *podobny* łukowi DE, wycinek BAC, wycinkowi DOE i t. d.

IV. *Wysokość* równoległoboku, iest prostopadła EF (fig. 93), mierzaca odległość dwóch boków przeciwległych AB, DC, wziętych za podstawy.

V. *Wysokość* tróykata, iest prostopadła AD (fig. 94), spuszczona z wierzchołka kąta A, na bok iemu przeciwległy BC, wzięty za podstawę.

VI. *Wysokość* trapeza, iest prostopadła EF (fig. 95), poprowadzona między iego dwóma bokami równoległemi AB, DC.

VII. *Pole*, albo powierzchnia figury, są wyrazy prawie iedno znaczące. Pole oznacza szczególnie część powierzchowną figury, mierząc albo porównywaiąc z innemi powierzchniami.

Znak $\times$, oznacza mnożenie; tak $A \times B$, wyraża wieloczyn z A, rozmnożonego przez B. Zamiast znaku $\times$, używa się niekiedy punkt; A. B, tosamo znaczy, co $A \times B$. Oznacza się także ten sam wieloczyn bez żadnego pośrzedniego znaku, *np*. przez AB; lecz w tym razie, używać nienależy wyrażenia linij AB, to iest: odległości dwóch punktów A i B.

Wyrażenie $A \times (B + C - D)$, oznacza wieloczyn z A przez $B + C - D$. Gdybyśmy

chcie-

chcieli mnożyć $A+B$ przez $A-B+C$, oznaczylibyśmy ten wieloczyn następuiącym sposobem: $(A+B)\times(A-B+C)$; wszystko, co iest zamkniętém między nawiasami, uważa się za iednę ilość.

Liczba, położona przed liniją lub ilością, służy za czynnika tey linii lub ilości; tak chcąc wyrazić że linija AB, iest wziętą trzy razy, napisalibyśmy $3AB$; połowa kąta A, wyraża się przez $\frac{1}{2}$ A.

Kwadrat z linij AB, oznacza się przez $\overline{AB}^2$; sześcian, przez $\overline{AB}.^3$ Wyłożemy na swoiém mieyscu, co oznaczaią dokładnie kwadrat i sześcian linij.

Znak $\sqrt{}$, wskazuie pierwiastek do wyciągnienia; $\sqrt{2}$, iest pierwiastek kwadratowy z dwóch; $\sqrt{A.B}$, pierwiastek z wieloczynu A. B, czyli srzednia Geometryczna proporcyonalna między A i B. (*Aryt.* §. 150). (*)

ZADANIE PIERWSZE.

Twierdzenie.

Równoległoboki maiące podstawy równe i wysokości równe, są równo-wartuiące.

Niech będzie linija AB (fig. 96.), wspólną

(*) Dla dokładnego obięcia tey księgi trzeciey, równie iak innych ksiąg następuiących, potrzena podstawa dwóch równoległoboków ABCD, ABEF; ponieważ z założenia te dwa równoległoboki maią tę samę wysokość, ich podstawy wyższe DC, FE, będą na tey samey linij DE, równoległey do AB.

Z natury równoległoboków, bok AD iest równy i równoległy do boku BC; bok AF iest równy i równoległy do boku BE, więc (Zad. XXVI. K. I.) kąt DAF=CBE; azatem tróykąty DAF, CBE, będą równe (Zad. XI. K. I). Jeżeli od czworoboku ABED, odeymiemy tróykąt ADF, zostanie równoległobok ABEF; od tego samego czworoboku, odiąwszy tróykąt CBE, pozostanie równoległobok ABCD. Więc dwa równoległoboki ABCD, ABEF, maiące tę samę podstawę, i tę samę wysokość, są równo-wartuiące.

Wnio-

---

trzeba mieć przytomne wszystkie prawdy któreśmy zebrali w Arytmetyce (§. 134.... 177). Zróbmy tu tylko iednę uwagę: maiąc proporcyą, A : B : : C : D, wiemy, że wieloczyn ze skraynych, A × D, iest równy wieloczynowi ze srzednich, B × C. (Aryt. §. 150). Ta prawda iest widoczna na liczbach, lecz nią będzie także naiakichkolwiek ilościach, byleby te były wyrażone liczbami. Jeżeli *np.* A, B, C, D, są liniiami, można wziąść iednę z tych czterech linij za iednostkę, albo obrać piątą, służącą

Wniosek. Każdy równoległobok ABCD (fig. 97.), iest równo-wartuiący prostokątowi ABEF, tey samey podstawy, i tey samey wysokości.

ZADANIE II.

Twierdzenie.

Każdy tróykąt iest połową równoległoboku tey samey podstawy. i tey samey wysokości. (fig. 98. fig. 98. *bis*).

Niech będzie tróykąt BAC, przez punkt C, poprowadźmy równoległą CD, do boku BA; przez punkt A, równoległą AD, do boku BC; boki CD, DA, równoległoboku ABCD, będąc równe bokom AB, BC, (Zad. XXIX. K. I.); tróykąt BAC = CAD (Zad. XI. K. I.). Prostopadła AO, spuszczona z wierzchołka A, tróykąta BAC (fig. 98.); na pod-

---

cą wszystkim tym linija za wspólną miarę; naówczas każda linija A, B, C, D, wyrażać będzie pewną liczbę iednostek; liczbę całką lub ułamkową, wymierną albo niewymierną, a proporcya między linijami A, B, C, D, stanie się proporcyą liczb.

Wieloczyn więc z linij A i D, który nazywa się także ich *prostokątem*, iest liczbą iednostek linijowych zamkniętych w A, mnożoną przez liczbę iednostek linijowych zampodstawę B C; albo na przedłużenie tey podstawy (fig. 98. *bis*), iest razem wysokością tróykąta B A C, i rownoległoboku A B C D. Więc tróykąt iest połową rownoległoboku tey samey podstawy, i tey samey wysokości.

Wniosek. Wszystkie tróykąty podstaw i wysokości równych, są równo - wartuiace.

Naprzód: Tróykąty B A C, B D C (fig. 98.), maiące podstawę wspólną B C, i wierzchołki leżące na tey samey linij prostey F D, równoległey do B C, są równo - wartuiące. Jakoż widoczną iest rzeczą, że ieden i drugi z tych tróykątów iest połową równoległoboku A B C D, tey samey podstawy, i tey samey wysokości.

Powtóre: Tróykąty B A E, E A C (fig. 112.), maiące ten sam wierzchołek A, i podstawy B E, E C równe, będą równo - wartuiące, iako tey samey wysokości A D.

ZADA-

---

zamkniętych w D; z tąd łatwo poymuiemy, że ten wieloczyn może i powinien bydź równy wieloczynowi z linij B i C.

Ilości A i B, mogą bydź naprzykład linijami, zaś C, D, powierzchniami; zawsze iednak uważać ie należy iako liczby: A i B, iako liczby powstaiące z iednostek liniiowych; C i D, z iednostek powierzchni; a wieloczyny $A \times D$, $B \times C$, będą liczbami.

W ogólności, we wszystkich działaniach kto-

ZADANIE III.

Twierdzenie.

Dwa prostokąty tey samey wysokości, są między sobą iak podstawy. (fig. 99).

Niech będą dwa prostokaty ABCD, AEFD, maiące tę samę wysokość AD; powiadam, że są między sobą iak ich podstawy AB, AE.

Założmy *naprzód:* że podstawy AB, AE; będą *współmierne*, i że będą naprzykład iak liczby 7, i 4: ieżeli podzielimy AB, na 7 części równych; AE zamykać będzie 4 takich części; wyprowadziwszy z każdego punktu podziału prostopadłe do podstawy, złożemy 7 prostokatów cząstkowych równych między sobą, iako maiące tę samę podstawę, i tę samę wysokość. Prostokąt ABCD, zamy-

---

które wykonywać będziemy zapomocą proporcyy, pamiętaymy uważać wyrazy tych proporcyy, iako liczby każda swoiego gatunku, a w poymowaniu tych działań, i we wnioskach z nich wypadaiących, żadney trudności mieć niebędziemy.

Ostrzedz także powinniśmy, że niektóre dowodzenia oprzemy na nayprostszych prawidłach *Algiebry*; tak maiac

$$A = B + C,$$

ieżeli rozmnożymy obie strony tego równania mykeć będzie 7 prostokątów cząstkowych, gdy prostokąt AEFD, zamykać ich będzie 4; więc prostokąt ABCD, iest do prostokata AEFD, iak 7 do 4; albo iak AB do AE. To samo rozumowanie ma mieysce w każdym innym stosunku, i iakikolwiek on będzie, byleby współmierny, będziemy mieli:

ABCD : AEFD :: AB : AE.

Założmy *powtóre:* że podstawy AB, AE (fig. 100.), są *niewspółmierne*; powiadam, że będziemy ieszcze mieli:

ABCD : AEFD :: AB : AE.

Ponieważ, ieżeli ta proporcya nie iest prawdziwą, trzy pierwsze wyrazy zostaiąc te same, czwarty będzie większy albo mnieyszy od AE. Przypuśćmy że będzie większy, i że mamy

ABCD : AEFD :: AB : AO.

Podzieliwszy linija AB, na części równe mniey ze od EO, przynaymniey ieden punkt podziału I, padnie między E i O: przez ten punkt wyprowadziwszy prostopadłą IK, do podstawy AI; podstawy AB, AI, będąc współmier-

---

nia przez tę samę ilość M, będziemy mieli

$$A \times M = B \times M + C \times M.$$

Maiąc dwa równania:

$$A = B + C$$
$$D = E - C,$$

Jeżeli ie dodamy do siebie otrzymamy,

$$A + D = B + E, \text{ i t.d.}$$

miernemi mamy

ABCD : AIKD :: AB : AI;

lecz z przypuszczenia

ABCD : AEFD :: AB : AO,

gdy w tych dwóch proporcyach poprzedniki są równe, następniki złożą proporcyą

AIKD : AEFD :: AI : AO.

Linija AO > AI, potrzeba by prostokąt AEFD > AIKD, gdy przeciwnie iest mnieyszy więc ta ostatnia proporcya iest fałszywą; i gdy została wyprowadzoną z dwoch proporcyy poprzedzaiących, z których gdy pierwsza iest prawdziwą, druga koniecznie fałszywą bydź musi. Więc ABCD niemoże bydź do AEFD, iak AB, do wyrazu większego od AE, więc czwarty wyraz iest równy AE.

Przez rozumowanie zupełnie podobne dowiedlibyśmy, że czwarty wyraz proporcyi niemoże bydź mnieyszy od AE, więc iest równy AE. Azatem iakikolwiek będzie stosunek podstaw, dwa prostokąty tey samey wysokości, są między sobą iak ich podstawy.

ZADANIE IV.

Twierdzenie.

Dwa iakiekolwiek prostokąty, są między sobą, iak wieloczyny z podstaw, przez wysokości. (fig. 101).

Niech będą dwa prostokaty ABCD, AEGF, powiadam że będziemy mieli:

ABCD

ABCD:AEGF::AB × AD:AE × AF.

Ułożywszy dwa prostokąty tak, ażeby kąty A, były w wierzchołku przeciwległe; przedłużmy boki GE, CD, aż do spotkania się w punkcie H; dwa prostokąty ABCD, AEHD, maiące tę samę wysokość AD, są między sobą iak podstawy AB, AE; dla podobney przyczyny dwa prostokąty AEHD, AEGF, są iak podstawy AD, AF; zkąd:

ABCD:AEHD::AB:AE,

AEHD:AEGF :: AD:AF.

Mnożąc porządkiem te proporcye, i uważaiąc, że wyraz AEHD, może bydź wymazany (*Aryt.* §. 142.), iako wspólny czynnik poprzednika i następnika będziemy mieli:

ABCD:AEGF::AB × AD:AE × AF.

Uwaga. Z poprzedzaiącey proporcyi następuiące wypada równanie,

$$\frac{ABCD}{AEGF} = \frac{AB \times AD}{AE \times AF}$$

Pierwsza strona wyraża liczbę razy, którą prostokąt ABCD, obeymuie prostokąta AEGF; tę liczbę razy odkryie nam druga strona, gdy wyraziemy w liczbach, za pomocą iakieykolwiek iednostki linijowey, wartość boków AB, AD, AE, AF; i następnie szukać będziemy, ile razy liczba oderwana wyrażaiąca wieloczyn AB × AD, zamykać będzie liczbę oderwaną wyrażaiącą wieloczyn AE × AF. Jeżeli *np.* wysokość AD = 3 obranym iednostkom linijowym, podstawa AB = 5, AE = 2,

AF

AF = 3; więc AB × AD = 15, AE × AF = 6. azatém

$$\frac{ABCD}{AEGF} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2},$$ to iest:

że prostokąt ABCD, składać się będzie z dwa razy i pół wziętego prostokąta AEGF. Powierzchnia mierzy się porównywaiąc z iednostką iey gatunku, nazwaną kwadratem; ieżeli AEGF będzie kwadratem, AE = AF. Biorąc razem bok tego kwadratu za iednostkę linijową, będziemy mieli AE × AF = 1. Ztąd

$$\frac{ABCD}{AEGF} = AB \times AD.$$

Pierwsza strona wyrażaiąca rzetelnie liczbę razy, którą prostokąt ABCD, zamyka iednostkę powierzchni, będzie wyrażeniem liczebném miary tego prostokatu, więc oznaczywszy dla skrócenia wyrażenie liczebne o którém mowa, tym samym prostokątem, będziemy mieli

$$ABCD = AB \times AD.$$

I w tém to zdarzeniu można mówić, że *prostokąt ma za miarę wieloczyn z podstawy przez wysokość.* Niech podstawa AB, prostokąta ABCD (fig. 102.), obeymuie 10 razy iednostkę linijową, zaś wysokość AD, 5 razy. Prostokąt zatém ABCD, powinien zamykać iednostkę powierzchni liczbę razy oznaczoną przez AB × AD, czyli 10 × 5, albo 50. Co łatwo sprawdzimy, wynosząc z podstawy AB, i wyi wysokości AD, w punktach ich podziału prostopadłe, które przeciąwszy się, złożą 30 kwadratów równych, iak to figura pokazuie.

Jeżeli *np.* wysokość AD, składa się z $3\frac{1}{3}$ iednostek, czyli z $\frac{10}{3}$; podstawa AB, z $3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$; wieloczyn AB × AD, czyli $\frac{7}{2} \times \frac{10}{3} = \frac{70}{6}$ (*Aryt.* §. 99). albo nakoniec $\frac{35}{3}$ (*Aryt.* §. 83). będąc złożony z $11\frac{2}{3}$ iednostek, prostokąt ACBD, iest rowno-wartuiący $11\frac{2}{3}$ razy wziętemu kwadratowi AEGF.

Mieszaią często w Geometryi wieloczyn dwóch linij z ich *prostokątem*, a to wyrażenie przeszło nawet aż do niektórych Arytmetyk, dla oznaczenia wieloczynu dwóch liczb nierównych, iak kwadrat na oznaczenie wieloczynu liczby samey przez się mnożoney.

Kwadraty liczb 1, 2, 3, i t. d. są 1, 4, 9, i t. d. (*Aryt.* §. 106). Jakoż widz emy, że kwadrat zrobiony na linij podwóyney (fig. 103). iest poczwórny, na potróyney, dziewięc razy większy, i t. d.

ZADANIE V.

Twierdzenie.

Pole iakiegokolwiek równoległoboku, iest równe wieloczynowi z podstawy przez wysokość. (fig. 97).

Ponieważ równoległobok ABCD, iest równowartuiący prostokątowi ABEF, maiącemu tę samę podstawę AB, i wysokość BE

(Zad.

(Zad. I. *Wnios.*); zaś prostokąt ABEF, ma za miarę $AB \times BE$ (Zad. IV.); więc pole równoległoboku $ABCD = AB \times BE$.

Wniosek. Wyraziwszy przez H, h, wysokości dwóch równoległoboków; przez B, b, podstawy; przez P, p, powierzchnie; będziemy mieli: $P = H \times B$, $p = h \times b$; z kąd nam wypada następuiąca proporcya:

$$P : p :: H \times B : h \times b.$$

Jeżeli w dwóch równoległobokach podstawy są równe, będziemy mieli (*Aryt.* §. 142).

$$P : p :: H : h.$$

Jeżeli wysokości są równe, otrzymamy

$$P : p :: B : b$$

Więc równoległoboki tey samey podstawy są iak wysokości, tey zaś samey wysokości, iak podstawy.

ZADANIE VI.

Twierdzenie.

Pole tróykąta iest równe wieloczynowi z podstawy przez połowę wysokości. (fig. 104).

Ponieważ troykąt BAC, iest połową równoległoboku BAEC, maiącego tę samę wysokość AD, i podstawę BC (Zad. II.), zaś powierzchnia równoległoboku $BAEC = BC \times AD$ (Zad. V.); więc powierzchnia tróykąta $BAC = \frac{1}{2} BC \times AD$, albo $= BC \times \frac{1}{2} AD$.

Wniosek. Wyraziwszy przez H, h, wysokości dwòch tróykątów; przez B, b, pod-

stawy;

stawy; przez T, t, powierzchnie; będziemy mieli $T = \frac{1}{2}(H \times B)$, $t = \frac{1}{2}(h \times b)$, ztąd:

$$T : t :: \tfrac{1}{2}(H \times B) : \tfrac{1}{2}(h \times b).$$

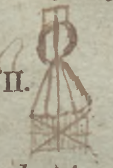
1*mo* Jeżeli $B = b$, będziemy mieli

$$T : t :: H : h;$$

2*do* Jeżeli $H = h$, otrzymamy (*Aryt.* §. 142.)

$$T : t :: B : b.$$

Więc dwa tróykąty tey samey podstawy, są iak wysokości, tey zaś samey wysokości, iak podstawy.



ZADANIE VII.

Twierdzenie.

Pole trapeza, iest równe wysokości, mnożoney przez połowę summy podstaw równoległych. (fig. 105). To iest: że pole trapeza $ABCD = EF \times \frac{1}{2}(AB + DC)$.

Przez punkt I, na połowie boku CB, poprowadźmy liniją KL, równoległą do boku przeciwnego trapeza AD, i przedłużmy DC aż do spotkania się z liniją KL. W tróykątach IBL, ICK, bok $IB = IC$ z wykreślenia; ponieważ CK, BL są równoległemi, kąt $LIB = CIK$, kąt $IBL = ICK$ (Zad. XXIII. K. I.); więc te dwa tróykąty są równe (Zad. VII. K I). Jeżeli do tróykąta IBL, dodamy figurę LADCI, będziemy mieli trapez BADC; ieżeli do tróykąta $IKC = IBL$, dodamy tę samę figurę CDALI, otrzymamy równoległobok KDAL. Więc trapez ABCD, iest równo-wartuiący ró-

równoległobokowi A L K D; zaś ten ostatni ma za miarę wieloczyn z wysokości EF (która iest razem wysokością trapeza), przez podstawę A L; więc trapez A B C D, będzie miał także za miarę $EF \times AL$. Lecz $AL = DK$, $LB = CK$; więc $AB + DC = AL + LB + DC = AL + CK + DC$, albo $AB + DC = AL + DK = 2AL$, a ztąd $AL = \frac{1}{2}(AB + DC$; a zatém $EF \times AL = EF \times \frac{1}{2}(AB + DC)$. Więc nakoniec pole trapeza

$$ABCD = EF \times \tfrac{1}{2}(AB + DC).$$

Uwaga. Jeżeli przez punkt I, srzodek boku B C trapeza, poprowadzimy liniją I H, równoległą do podstawy A B; punkt H, będzie także na połowie boku trapeza A D: ponieważ figury A H I L, H D K I, maiące boki przeciwległe równoległe są równoległobokami, $AH = IL$, $HD = IK$; ponieważ tróykąt $BIL = CIK$, $IL = IK$; więc $AH = HD$. Uważać zatém można $HI = AL = \frac{1}{2}(AB + CD)$; więc pole trapeza wyrazić się także może przez $EF \times HI$, to iest: wysokość mnożoną przez liniją łączącą połowy boków *nierównoległych.* (*)

(*) Wymierzaiąc równoległobok, tróykąt, albo trapez, zawsze iest łatwo mieć długość ich boków, i wielkość kątów; lecz niekiedy bardzo trudno spuścić prostopadłe służące do wymiaru ich wysokości. Naówczas usu-

ZADANIE VIII.

Twierdzenie.

Podzieliwszy liniją na dwie części, kwadrat z całey linij, obeymować będzie kwadrat, z iedney części, więcey kwadrat z części drugiey, więcey dwa razy wzięty prostokąt z dwóch części linij podzieloney. To iest (fig. 106). że:

$$\overline{AC}^2 = (AB + BC)^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2AB \times BC$$

Wykreśliwszy kwadrat ACDE, weźmy AF = AB, i poprowadźmy liniją FG równoległą do AC, i BH równoległą do AE.

$$ACDE = ABIF + IGDH + BCGI + IHEF.$$

Rozebrawszy oddzielnie cztery części z których kwadrat ACDE składa się, widzieć będziemy że:

1*mo* ABIF iest kwadratem zrobionym na AB, ponieważ wzięliśmy AF = AB, więc

$$ABIF = AB \times AF = \overline{AB}^2$$

2*do* że

---

usuwa się ta trudność za pomocą *Trygonometryi.*

Jeżeli chcemy wymierzyć równoległobok ABCE (fig. 104.), będziemy mieli naprzód (Zad. V.) ABCE = BC × AD; następnie tróykąt prostokątny ADB, daie proporcyą (*Tryg.* Część I. §. 32). R : *Wst.* B :: AB : AD z tąd $AD = \frac{Wst.B \times AB}{R}$

aza-

2*do* że IGDH iest kwadratem na BC, gdyż maiąc $AC = AE$, $AB = AF$, będziemy mieli

$$AC - AB = AE - AF$$

albo $BC = EF$, z przyczyny zaś linij równoległych gdy $IG = IH$, azatém $IGDH = IG \times IH = BC^2$

3*tio* że BCGI będąc prostokątem złożonym na BI i BC, mamy

$$BCGI = BI \times BC$$

azatém

$$BCGI = AB \times BC$$

4*to* że $IHEF = IF \times FE = AB \times BC$. Więc podstawuiąc na mieyscu czterech powierzchni ABIF, IGDH, BCGI, IHEF z których składa się kwadrat ACDE, wykre-

---

azatém pole równoległoboku

$$ABCE = (BC \times AB) \times \frac{Wst.B.}{R}$$

Jeżeli dla większey prostoty weźmiymy $R = 1$, i gdy dwa boki równoległoboku wyrazimy przez a, c, będziemy mieli na wyrażenie iego powierzchni $a\,c.$ *Wst.* B.

Z kąd widzimy, że pole równoległoboku, iest rowne wieloczynowi z dwóch iego boków, przez wstawę kąta temi bokami obięgtego.

2*do* Jeżli idzie o tróykąt ABC (fig. 104), którego boki niech będą wyrażone przez $a, b, c,$

kreślony na AC, albo na AB + BC, ich wartości teraz dopiero znalezione otrzymamy
$\overline{AC}^2$ albo $(AB+BC)^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2AB \times BC$

Uwaga. W Algiebrze podnosząc do kwadratu dwó-wyraz $a+b$, mamy
$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$. (*Aryt.* §. 108).

ZADANIE IX.

Twierdzenie.

Jeżeli linija iest różnicą dwóch drugich, kwadrat wyniesiony na różnicy, obeymować będzie kwadrat z iedney linij, więcey kwadrat z drugiey, mniey dwa razy wzięty prostokąt z dwóch linij danych. To iest: że (fig. 107).
$\overline{AC}^2$ albo $(AB - CB)^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CB}^2 - 2AB \times CB$.

Wystawiwszy kwadrat ABIF, weźmy AE = AC, poprowadźmy liniją CG, równoległą do BI; HK, równoległą do AB; i dopełniymy kwadratu EFLK.

ACDE

---

a, *b*, *c*, zaś kąty tym bokom przeciwległe przez A, B, C; ponieważ tróykąt ABC, iest połową równoległoboku ABCE, więc mamy:

$ABC = \frac{1}{2}ac$. *Wst.* B
$BAC = \frac{1}{2}cb$. *Wst.* A.
$ACB = \frac{1}{2}ab$. *Wst.* C.

Azatém pole tróykąta iest równe połowie wieloczynu z dwóch iego boków, przez wstawę kąta temi bokami obiętego.

$ACDE = ABIF + EFLK - CBIG - DGLK.$
Uważaiąc oddzielnie cztery części składaiące kwadrat ACDE, mamy:

1*mo* $ABIF = AB \times AF = \overline{AB}^2$

2*do* $EFLK = \overline{BC}^2$

3*tio* CBIG iest prostokątem którego bok $GC = AB$, azatem $CBIG = AB \times BC$.

4*to* DGLK iest prostokątem którego bok $KD = AB$, $KL = BC$, więc $DGLK = AB \times BC$.

Podstawiwszy te wartości kwadratu ACDE wystawionego na AC, albo na $AB - CB$, będziemi mieli:

$\overline{AC}^2$ albo $(AB - CB)^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2AB \times BC$

Uwaga. To Zadanie odpowiada wzorowi w Algiebrze

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab.$$

ZA-

3*tio* Gdybyśmy chcieli wyrazić powierzchnią trapeza ABCD (fig. 105). zapomocą boków i iednego z kątów, unikaiąc działania mechanicznego spuszczania prostopadłey EF; uważaymy że równoległobok $ALKD = AD \times AL$. *Wst.* A, więc trapez

$ABCD = AD \times \frac{1}{2}(AB + DC)$. *Wst.* A.

Podobnym sposobem znaleźlibyśmy, iż miarę tego samego trapeza można wyrazić za pomocą wieloczynu

$BC \times \frac{1}{2}(AB + DC)$. *Wst.* B.

Czytać także Geometryą Bezout *Nro.* 155. 156.

ZADANIE X.

Twierdzenie.

Prostokąt zrobiony na summie i różnicy dwoch linij, iest równy różnicy kwadratów tych dwoch linij. (fig. 108).

To iest:

$$(AB + CB) \times (AB - CB) = \overline{AB}^2 - \overline{CB}^2$$

Wystawmy na AB i AC kwadraty ABIF, ACDE; przedłużmy AB o ilość BK = CB, i dopełnijmy prostokąta AKLE.

Podstawa tego prostokąta AK, iest summa dwóch linij AB, CB; iego zaś wysokość AE iest różnicą tych samych linij AB, CB; więc prostokąt

$$AKLE = (AB + CB) \times (AB - CB).$$

Lecz tenże sam prostokąt iest złożony z dwóch części ABHE + BKLH; część zaś BKLH iest równa prostokątowi EDGF, ponieważ BH = DE, BK = EF; więc AKLE = ABHE + EDGF. Te zaś dwie części składaią kwadrat ABIF, mniey kwadrat DHIG, a ten ostatni iest kwadratem wyniesionym na BC, więc

$$(AB + CB) \times (AB - CB) = \overline{AB}^2 - \overline{CB}^2$$

Uwaga. W Algiebrze mamy wzór odpowiadaiący $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

ZADANIE XI.

Twierdzenie.

Kwadrat z przeciw-prostokątney, iest ró–

równy summie kwadratów z boków kąt prosty obeymuiących. (fig. 109).

W troykacie prostokątnym przy A: wyniosłszy kwadraty na trzech bokach, spuśćmy z wierzchołka kąta prostego na przeciw-prostokątną prostopadłą AD, przedłużaiąc do punktu E, i prowadząc linije AF, HC.

Kąt ABF składa się z kąta ABC, więcey kąta prostego CBF; kąt HBC, składa się z tego samego kąta ABC, więcey z kąta prostego ABH; więc kąt ABF = HBC. Gdy AB = BH, iako boki tego samego kwadratu, dla tey samey przyczyny BF = BC; więc tróykąty ABF, HBC, maiące kąt równy obięty bokami równemi są równe (Zad. VI. K. I.)

Tróykąt ABF, maiący tę samę podstawę BF, i wysokość BD (Zad. II.), iest połową prostokąta BDEF (albo dla krótkości BE).

Tróykąt HBC, iest także połową kwadratu AH; dla kątów prostych BAC, BAL, linije AC, AL, składaią iednę liniją prostą CL, równoległą do HB (Zad. IV. K. I.); więc tróykąt HBC, iest połową kwadratu AH, maiącego tę samę podstawę i wysokość.

Gdy tróykąt ABF = HBC; prostokąt BDEF dwa razy większy od tróykąta ABF, iest równo-wartuiący kwadratowi ABHL dwa razy większemu od tróykąta HBC. Dowiedlibyśmy podobnym sposobem, że prostokąt CDEG, iest równowartuiący kwadratowi ACIK; i gdy razem dwa prostokaty BDEF,

CDEG

CDEG, składaią kwadrat BCGF; więc kwadrat z przeciwprostokątney, iest równy summie kwadratów, z boków kat prosty obeymuiących. To iest: $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$.

Wniosek I. Kwadrat z boku obeymuiacego kąt prosty, iest równy kwadratowi z przeciw-prostokątney, *mniey* kwadratem z boku drugiego, czyli: $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2$.

Wniosek II. W kwadracie ABCD (fig. 118.), poprowadziwszy przekatną AC, w tróykącie równoramiennym ABC, mamy:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2\overline{AB}^2;$$

Więc *kwadrat z przekątney, iest dwa razy większy od kwadratu z boku.* Jakoż, poprowadziwszy przez punkta A, C, równoległe do BD; przez B, D, do AC: kwadrat EFGH, będąc kwadratem z AC, obeymuie 8 tróykątów równych tróykątowi AEB, i gdy kwadrat ABCD, obeymuie ich tylko 4; więc kwadrat EFGH, iest dwa razy większy od kwadratu ABCD. Czyli: $\overline{AC}^2 : \overline{AB}^2 :: 2 : 1$, wyciągnąwszy pierwiastek kwadratowy mamy: $AC : AB :: \sqrt{2} : 1$; to iest: *że przekątna kwadratu iest niewymierną względem boku* (*Aryt.* §. 107.); oczém na inném mieyscu mówić nam wypadnie.

Wniosek III. Dowiedliśmy (fig. 109.), że kwadrat AH, iest równo-wartuiący prostokątowi BE; z przyczyny zaś wspólney wysokości BF, kwadrat BCGF, iest do prostokąta

kąta BDEF, iak podstawa BC, do podstawy BD, więc $\overline{BC}^2 : \overline{AB}^2 :: BC : BD$. To iest: *że kwadrat z przeciw-prostokątney iest do kwadratu z boku kąt prosty obeymuiącego, iak przeciw-prostokątna do odcinka przyległego temu bokowi.* Nazywamy tu *odcinkiem* część przeciw-prostokątney odciętą prostopadłą spuszczoną z wierzchołka kąta prostego; tak BD iest odcinkiem przyległym bokowi AB, zaś DC bokowi AC.

Wniosek IV. Prostokąty BDEF, DCGE, maiące tę samę wysokość, są iak podstawy BD, CD. Gdy zaś te prostokąty są równowartuiące kwadratom z AB, i AC, więc

$$\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 :: BD : DC.$$

Azatém, *kwadraty z dwóch boków kąt prosty obeymuiących, są między sobą, iak odcinki przeciw-prostokątney przyległe tym bokom.*

ZADANIE XII.

Twierdzenie.

W tróykącie biorąc kąt ostry, kwadrat z przeciw-ostrokątney, iest mnieyszy od summy kwadratów z boków ten kąt obeymuiących; i ieżeli spuścimy prostopadłą na ieden z boków kąt ostry obeymuiących, różnica będzie równą podwóynemu wieloczynowi z boku na który spuszczona prostopadła, przez odcinek przyległy kątowi ostremu. (fig. 110).

To

To iest: $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC \times CD$.

Dwa są przypadki 1*mo* Jeżeli prostopadła pada wewnatrz tróykata ABC, będziemy mieli: $BD = BC - CD$, więc (Zad. IX).

$$\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 - 2BC \times CD$$

dodaiąc po obu stronach $\overline{AD}^2$, otrzymamy

$$\begin{array}{l} \overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 - 2BC \times CD \\ + \overline{AD}^2 \qquad\qquad + \overline{AD}^2 \end{array}$$

gdy $\overline{BD}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{AB}^2$, $\overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2$ więc $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2BC \times CD$.

2*do* Jeżeli prostopadła pada zewnątrz tróykata ABC (fig. 110. *bis*) będziemy mieli $BD = CD - BC$, więc (Zad. IX).

$$\overline{BD}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{BC}^2 - 2CD \times BC$$

dodaiąc po obu stronach tego równania $\overline{AD}^2$, otrzymamy iak wyżey:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC \times CD.$$

ZADANIE XIII.

Twierdzenie.

W tróykącie ieżeli weźmiemy kąt rozwarty, kwadrat z przeciw-rozwartokątney iest większy od summy kwadratów z boków ten kąt obeymuiących; i ieżeli spuścimy prostopadłą na ieden z boków kąt rozwarty obeymuiących, różnica będzie równa podwóynemu wieloczynowi z boku na który spuszczona prostopadła, przez odcinek przyległy kątowi rozwartemu. (fig. 111).

To iest: $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 + 2BC \times CD$.

Prostopadła wewnątrz tróykąta paść niemoże; ponieważ gdyby naprzykład padła w punkcie E, tróykąt ACE, miałby razem kąt prosty i rozwarty, co iest rzeczą niepodobną (Zad. XXVII K. I.), więc padnie zewnątrz tróykąta, azatem będziemy mieli:

$BD = BC + CD$, więc (Zad. VIII).

$\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + 2BC \times CD$

dodaiąc po obu stronach AD^2, otrzymamy

$\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + 2BC \times CD$

$\overline{AD}^2 \qquad\qquad \overline{AD}^2$

Gdy $\overline{BD}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{AB}^2$, $\overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 \quad \overline{AC}^2$; więc $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 + 2BC \times CD$.

ZADANIE XIV.

Twierdzenie.

W tróykącie, poprowadziwszy z wierzchołka liniją prostą na połowę podstawy, summa kwadratów z boków kąt w wierzchołku obeymuiących, iest równa dwa razy wziętemu kwadratowi z linij na srzodek podstawy sprowadzoney, więcey dwa razy kwadrat z połowy podstawy. (fig. 112). To iest:

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\overline{AE}^2 + 2\overline{BE}^2.$$

Spuściwszy prostopadłą AD na podstawę BC; w tróykącie AEC (Zad. XII). mamy

$$\overline{AC}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EC}^2 - 2EC \times ED;$$

z troyz tróykata zaś ABE (Zad. XIII.) mamy

$$\overline{AB}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{BE}^2 + 2EB \times ED$$

gdy BE = EC, więc dodawszy do siebie te dwa równania wypada:

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\overline{AE}^2 + 2\overline{BE}^2.$$

Wniosek. W równoległoboku ABCD (fig. 113.), przekątne AC, BD, przecinaiąc się wzaiemnie w punkcie F, na dwie części równe (Zad. XXXI. K. I.); tróykąt ABC daie

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2\overline{AF}^2 + 2\overline{BF}^2.$$

W tróykącie ADC mamy:

$$\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 = 2\overline{AF}^2 + 2\overline{DF}^2.$$

Dodaiąc stronę do strony, i uważaiąc że BF = DF, będziemy mieli:

$$\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 + \overline{BC}^2 = 4\overline{AF}^2 + 4\overline{DF}^2$$

Lecz $4\overline{AF}^2 = (2AF)^2 = \overline{AC}^2$; zaś $4\overline{DF}^2 = (2DF)^2 = \overline{BD}^2$; więc *w równoległoboku summa kwadratów z boków, iest równa summie kwadratów z przekątnych.*

ZADANIE XV.

Twierdzenie.

W troykącie, linija równoległa do podstawy, dzieli boki proporcyonalnie. (fig. 114). Tak, że mamy

$$AD : DB :: AE : EC.$$

Złączmy BE, DC; dwa tróykaty BDE, DEC, maiące tę samę podstawę DE, i wysokość; ponieważ wierzchołki B, C, leżą na

linij

linij równoległey do podstawy; są równowartuiące (Zad. II).

Tróykąty ADE, DEB, maiace wierzchołek spólny w E, są iak podstawy AD, DB (Zad. VI.), więc

ADE:DEB::AD:DB.

W tróykąty ADE, EDC, maiące także wierzchołek wspólny w D, są iak podstawy AE, EC, więc

ADE:EDC::AE:EC.

Lecz tróykąt DEB = EDC, więc z przyczyny stosunku spólnego w tych dwóch proporcyach, będziemy mieli

AD : DB :: AE : EC.

Wniosek I. Ztad wypada że (*Aryt.* §. 156.):

AD + DB : AD :: AE + EC : AE
albo AB : AD :: AC : AE
azatém AB : DB :: AC : EC.

Wniosek II. Jeżeli między dwiema linijami prostemi AB, CD (fig. 115). *Poprowadzimy tyle równoległych ile będziemy chcieli* Np AC, EF, GH, BD, i t. d. *linije proste* AB, CD, *przez te równoległe będą przecięte proporcyonalnie*, i będziemi mieli AE:CF::EG:FH::GB:HD.

Niech linije proste AB, CD, przetną się w punkcie O; w tróykącie OEF, dla linij AC, równoległey do podstawy EF, mamy: OE:AE::OF:CF, albo

OE : OF :: AE : CF.

W tróy-

W tróykacie O G H, mamy podobnie OE:EG::OF:FH, albo

OE : OF : : EG : FH;

więc z przyczyny stosunku wspólnego OE:OF, te dwie proporcye daią

AE : CF :: EG : FH.

Tym samym sposobem dowiedziemy że:

EG : FH : : GB : HD, i t. d.

więc linije AB, CD, są przecięte proporcyonalnie przez równoległe EF, GH i t. d.

ZADANIE XVI.

Twierdzenie

Linija, przecinaiąca boki tróykąta proporcyonalnie, iest równoległą do podstawy.

Ponieważ gdyby linija DF (fig. 116.), niebyła równoległą do BC, niech będzie linija DO; naówczas podług Zadania poprzedzaiącego będziemy mieli

AD : DB : : AO : OC.

Lecz z założenia

AD : DB : : AF : FC, więc

AO : OC : : AF : FC;

proporcya fałszywa, ponieważ z iedney strony poprzednik AE > AO, z drugiey następnik EC < OC; więc równoległa prowadzona do podstawy BC przez punkt D, niemoże różnić się od linij DF; więc linija DF iest równoległą.

Uwaga. To samo rozwiązanie miałoby

miey–

mieysce, gdybyśmy założyli proporcyą

AB : AD :: AC : AE.

Ponieważ z tey proporcyi mielibyśmy

AB — AD : AD :: AC — AE : AE,

albo BD : AD :: CE : AE.

ZADANIE XVII.

Twierdzenie.

W tróykącie, linija dzieląca kąt na dwie części równe, podzieli podstawę na dwa odcinki proporcyonalne bokom przyległym.

Tak że będziemy mieli (fig. 117.)

BD : DC :: AB : AC.

Przez punkt C, poprowadźmy liniją CE równoległą do DA, aż do spotkania się w punkcie E, z przedłużonym bokiem BA. W tróykacie BCE, linija AD, będąc równoległą do podstawy EC, mamy (Zad. XV).

BD : DC :: BA : AE.

Lecz z przyczyny linij równoległych AD, EC, kąt ACE = CAD, kąt AEC = BAD (Zad. XXIII. K. I). Z założenia zaś mamy kąt CAD = BAD, więc kąt ACE = AEC; azatem AE = AC (Zad. XIII. K. I.); Podstawiwszy w proporcyi poprzedzaiącey, AC na mieyscu AE, otrzymamy

BD : DC :: AB : AC.

ZADANIE XVIII.

Twierdzenie.

Dwa tróykąty równokątne maią boki od-

 po-

powiadaiące proporcyonalne, i są podobne.

Jeżeli we dwóch tróykątach (fig. 119). BAC, CDE, kąt BAC=CDE, ACB=DEC, ABC=DCE; powiadam że boki odpowiadaiące będą proporcyonalne, to iest:

BC:CE::AB:DC::AC:DE.

Ułożywszy boki odpowiadaiące BC, CE, w tym samym kierunku, przedłużmy boki BA, ED, aż do przecięcia się w punkcie F.

Ponieważ BCE iest linija prosta, a kąt BCA=CED, więc bok AC iest równoległy do boku DE (Zad. XXIII. K. I). Dla tey samey przyczyny bok AB, iest równoległy do boku DC; więc figura ACDF, iest równoległobokiem.

W tróykącie BFE, linija AC będąc równoległą do podstawy FE, mamy (Zad. XV).

BC : CE :: BA : AF,

na mieyscu AF, położywszy CD, będziemy mieli

BC : CE :: BA : CD.

W tym samym tróykącie BFE, linija CD będąc równoległą do podstawy BF, mamy

BC : CE :: FD : DE,

zamiast FD, położywszy AC, otrzymamy

BC : CE :: AC : DE.

Nakoniec z dwóch proporcyy zamykaiących ten sam stosunek BC : CE, wypada

AC : DE :: BA : CD.

Więc tróykąty równokątne maią boki odpowiadaiące proporcyonalne. Podług zaś *Opi-*

sa-

sania II. dwie figury są podobne, skoro maią kąty równe, a boki odpowiadaiące proporcyonalne; więc *tróykąty równokątne, są figury podobne.*

Wniosek. Ażeby dwa tróykąty były podobne, dosyć aby dwa kąty w iednym, były równe dwóm kątom w drugim, naówczas trzeci będzie r wny trzeciemu, i dwa tróykąty będą równokątne.

Uwaga. W tróykątach podobnych, boki odpowiadaiące są przeciwległe kątom równym; więc kąt ACB, będąc równy kątowi DEC, bok AB, iest odpowiadaiącym bokowi DC; podobnie AC i DE są odpowiadaiącemi, iako przeciwległe kątom równym ABC, DCE; znaiąc boki odpowiadaiące składaią się natychmiast proporcye

BC : CE :: AC : DE :: BA : CD.

ZADANIE XIX.

Twierdzenie

Dwa tróykąty maiące boki odpowiadaiące proporcyonalne, są równokątne i podobne. (fig. 120).

Przypuśćmy że

BC : EF :: BA : ED :: AC : DF,

powiadam, że tróykąty ABC, DEF, będą miały kąty równe, to iest:

$A = D$, $B = E$, $C = F$.

Złożmy w punkcie E, kąt $FEG = B$,

w punkcie F, kąt E F G = C, trzeci kąt G, będzie równy trzeciemu katowi A, i dwa tróykąty A B C, E F G, będą równokątne; więc podług Zadania poprzedzaiacego

B C : E F :: A B : E G,

lecz z założenia

B C : E F :: A B : D E;

a zatém E G = D E. Będziemy ieszcze mieli

B C : E F :: A C : F G,

B C : E F :: A C : D F,

więc F G = D F; azatém tróykaty E G F, D E F, maiące trzy boki w iednym, równe trzem bokom w drugim, są równe (Zad. XI. K. I). Lecz z wykreślenia tróykąt E G F, iest równokątny z tróykątem A B C, więc tróykąty D E F, A B C, są także równokątne i podobne.

Uwaga I. Widziemy z tych dwóch ostatnich proporcyy, że w tróykatach równość kątów wypada z proporcyonalności boków, i wzaiemnie; więc dla zapewnienia się o podobieństwie tróykątów, ieden z tych warunków dostatecznym bydź może. Lecz nie iest to samo z figurami więcey boków maiącemi; ponieważ gdyby szło tylko o czworoboki; bez odmiany kątów można odmienić proporcyą boków, bez odmiany zaś boków, proporcyą kątów: więc proporcyonalność boków niemoże bydź wypadkiem równości kątów, ani na odwrót. Widziemy na przykład (fig. 121.), że prowadząc E F, równolegle do B C, katy

czwo-

czworoboku AEFD, są równe kątom czworoboku ABCD; lecz proporcya boków iest wcale różna: podobnie bez odmiany czterech boków AB, BC, CD, AD, możemy zbliżyć lub oddalić punkta B i D, co odmieni kąty.

Uwaga II. Dwa zadania poprzedzaiące, łącznie z zadaniem kwadratu z przeciw-prostokątney, są Zadaniami nayważnieyszemi i nayobfitszemi w Geometryi; wszystkie bowiem figury mogą się dzielić na tróykąty, a każdy tróykąt na dwa tróykąty prostokątne. Więc ogólne własności tróykątów, zamykaią wyraźnie własności wszystkich figur.

ZADANIE XX.

Twierdzenie.

Dwa tróykąty maiące kąt równy obięty bokami proporcyonalnemi, są podobne, (fig. 122).

Niech będzie kąt A = D, i boki

AB : DE :: AC : DF;

powiadam, że tróykąt BAC, iest podobny tróykątowi EDF.

Weźmy AG = DE, i poprowadźmy liniją GH równoległą do BC; kąt AGH = ABC (Zad. XXIII. K. I.), a tróykąt AGH, będąc równokątny z tróykątem ABC, mamy:

AB : AG :: AC : AH;

lecz założenia

AB : DE :: AC : DF,

zaś z wykreślenia AG = DE; więc AH = DF.

Dwa

Dwa tróykąty GAH, EDF maiące kąt równy obięty bokami równemi, są równe. Lecz tróykąt GAH iest podobny tróykątowi BAC; azatém tróykąt EDF, iest także podobny tróykątowi BAC.

ZADANIE XXI.

Twierdzenie.

Dwa tróykąty maiące boki odpowiadaiące równoległe, albo prostopadłe, są podobne. (fig. 123).

Ponieważ 1*mo* Jeżeli bok AB, iest równoległy do boku DE, BC do EF, kąt ABC iest równy kątowi DEF (Zad. XXVI. K. I.); dla tey samey przyczyny kąt ACB = DFE, BAC = EDF; więc tróykąty ABC, DEF będąc równokątne, są podobne.

2*do* Niech będzie bok DE (fig. 124). prostopadły na bok AB, DF na AC; w czworoboku AIDH, cztery kąty razem wzięte wartuią cztery kąty proste (Zad. XXVIII. K. I.); gdy dwa z nich I, H, są proste, więc dwa pozostałe IAH, IDH wartuią dwa kąty proste. Lecz dwa kąty EDF, EDH wartuią także dwa kąty proste; więc kąt EDF = IAH, albo A. Podobnie dowiedziemy ieżeli bok EF, iest prostopadły na bok BC, FD na AC, kąt DFE = C, kąt DEF = B; więc dwa tróykąty BAC, DEF, w których boki iednego

są

są prostopadłe do boków drugiego, są równokątne i podobne.

Uwaga. W przypadku boków równoległych, bokami odpowiadaiącemi są boki równoległe; w przypadku zaś boków prostopadłych, bokami odpowiadaiącemi są boki prostopadłe. Tak w tym ostatnim przypadku, D E iest bokiem odpowiadaiącym bokowi A B, F D bokowi A C, zaś EF bokowi CB. W przypadku boków prostopadłych względne położenie dwóch tróykątów, może bydź odmienne od położenia na figurze 124; lecz równość kątów względnych dowiedłaby się zawsze, bądź przez czworoboki, bądź przez porównanie, dwóch tróykątów, które z kątami w wierzchołku przeciwległemi składaią kąty proste: naprzykład, niech będą dwa tróykąty B A C, E D F (fig. 124. *bis*), których boki są prostopadłemi to iest: D E na A B, D F na A C, F E na B C; powiadam naprzód że kąt F = kątowi C. Jakoż ieżeli do kąta D K F, dodamy kąt F, będziemy mieli kąt prosty; ieżeli do kąta G K C = D K F, dodamy kąt C, będziemy mieli także kąt prosty, więc kąt F = kątowi C.

Następnie dowiodę że kąt F D E = kątowi C A B. Jakoż I D A + I D F = 1 kąt prosty; w tróykącie prostokątnym A I D, mamy I D A + I A D = 1 kąt prosty, więc I D F = I A D; lecz mamy

I D F + F D E = 2 kąty proste
I A D + C A B = 2 kąty proste,

więc

więc kąt FDE=kątowi CAB. Nakoniec okażę, że kąt DEF=kątowi ABC. Jakoż mamy IEG+DEF=2 kąty proste. W czworoboku BGEI, w którym summa kątów równa czterem kątom prostym, i w którym kąty G, I, są prostemi, mamy IEG+ABC=2 kąty proste; więc kąt DEF=kątowi ABC.

ZADANIE XXII.

Twierdzenie.

Linije prowadzone od upodobania przez wierzchołek tróykąta, dzielą podstawę, i liniją równoległą do podstawy proporcyonalnie. (fig. 125). To iest że będziemy mieli:

DI:BF::IK:FG::KL:GH::LE:HC.

Ponieważ linija DI, iest równoległa do BF, tróykaty ADI, ABF równokatne daią (Zad. XVIII). DI:BF::AI:AF.

Ponieważ linija IK, iest równoległą do FG, mamy IK:FG::AI:AF; z tych dwòch proporcyy maiących wspólny stosunek AI:AF, otrzymamy DI:BF::IK:FG.

Podobnym sposobem dowiedlibyśmy że:

IK : FG :: KL : GH

KL : GH :: LE : HC,

złączywszy te stosunki będziemy mieli

DI:BF::IK:FG::KL:GH::LE:HC.

Uwaga. W przypadku figury (125. *bis*), wyprowadzilibyśmy podobnie szereg stosunków

DI:HC::IK:GH::KL:GF::LE:BF.

aząazatem, ieżeli ostateczne końce dwóch linij równoległych DE, BC, połączymy dwiema linijami prostemi DC, EB, dwa punkta iakiekolwiek L, F, przecinaiące proporcyonalnie linije równoległe, będą zawsze na linij prostey LF, przechodzącey przez punkt A, wspólnego przecięcia się linij DC, EB.

Wniosek. Więc ieżeli linija BC, będzie podzieloną na części równe w punktach F, G, H; linija do niey równoległa DE, będzie także podzieloną na części równe w punktach I, K, L.

ZADANIE XXIII.

Twierdzenie.

W tróykącie prostokątnym, spuściwszy prostopadłą z kąta prostego na przeciw-prostokątną: (fig. 126),

1*mo* *Dwa tróykąty cząstkowe z tąd powstaiące, są podobne do siebie, i do tróykąta całkowitego.*

2*do* *Każdy z boków kąt prosty obeymujących, iest srzednio-proporcyonalny między przeciw-prostokątną, i odcinkiem iemu przyległym.*

3*tio* *Prostopadła, iest srzednią-proporcyonalną miedzy odcinkami przeciw-prostokątney.*

Ponieważ 1*mo* Tróykąty prostokątne BDA, BAC, maią kąt wspólny B; trzeci

kąt

kąt B A D, pierwszego tróykąta, iest równy trzeciemu kątowi C, drugiego; więc te dwa tróykąty są równokątne i podobne. Podobnie dowiedziemy, że tróykąt A D C, iest podobny tróykątowi B A C; azatem trzy tróykąty są równokątne i podobne.

2*do* Z podobieństwa tróykątów B D A, B A C; A D C, B A C, mamy

$$\div\ BD : AB : BC.$$

$$\div\ DC . AC : BC.$$ (*Aryt.* §§. 146. 150).

3*tio* Nakoniec, z podobieństwa tróykątów A D B, A D C, otrzymuiemy:

$$\div\ BD : AD : DC.$$

Uwaga. Z wyższych proporcyy

$$\div\ BD : AB : BC$$

$$\div\ DC : AC : BC,$$

następuiące wyciągamy równania:

$$\overline{AB}^2 = BD \times BC$$

$$\overline{AC}^2 = DC \times BC, \text{ więc}$$

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = BD \times BC + DC \times BC$$

$$= BC \times (BD + DC)$$

$$= BC \times BC = \overline{BC}^2,$$

azatém $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$; to iest: *kwadrat z przeciw-prostokątney, równy summie kwadratów z boków kąt prosty obeymuiących.* Wpadamy więc na Zadanie kwadratu z przeciw-prostokątney drogą wcale odmienną od tey którąśmy wyżey postępowali.

Wniosek. Jeżeli z punktu A (fig. 127). na obwodzie koła, poprowadzimy dwie cięciwy

A B

AB, AC, do ostatecznych końców srzednicy BC; tròykat BAC, będąc prostokątnym przy A (Zad. XVIII. K. II.): więc 1*mo prostopadła* AD, *iest srzednią proporcyonalną między odcinkami* BD, DC, *srzednicy*; albo co iest to samo $\overline{AD}^2 = BD \times DC$.

2*do Cięciwa* AB *iest srzednią proporcyonalną między srzednicą* BC, *i przyległym odcinkiem* BD, to iest:

$$\overline{AB}^2 = BD \times BC,$$

mamy także $\overline{AC}^2 = CD \times BC$; więc

$$\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 :: BD : CD.$$

Jeżeli porównamy AB, z BC, będziemy mieli $\overline{AB}^2 : \overline{BC}^2 :: BD : BC$, otrzymamy także $\overline{AC}^2 : \overline{BC}^2 :: DC : BC$. Te stosunki kwadratów z boków bądź między sobą, bądź z kwadratem przeciw-prostokątney już są dane we Wnioskach III. i IV. Zadania XI.

ZADANIE XXIV.

Twierdzenie.

Dwa tròykąty maiące kąt równy, są iak prostokąty z boków kąt równy obeymuiących. (fig. 128). To iest:

$$ABC : ADE :: AB \times AC : AD \times AE.$$

Poprowadziwszy BE; dwa tròykaty ABE, ADE, maiące wierzchołek wspólny E, są iak podstawy (Zad. VI.), więc

ABE

ABE : ADE :: AB : AD,

mamy także

ABC : ABE :: AC : AE.

Mnożąc porządkiem te dwie proporcye, i opuszczaiąc wspólny wyraz ABE, będziemy mieli

ABC:ADE::AB × AC:AD × AE.

Wniosek. Więc dwa tròykąty byłyby ròwno-wartuiące, gdyby prostokąt AB × AC, był ròwny prostokątowi AD × AE; gdybyśmy zaś mieli AB:AD::AC:AE, linija DE, byłaby ròwnoległą do boku BC.

ZADANIE XXV.

Twierdzenie.

Dwa tròykąty podobne, są między sobą iak kwadraty z boków odpowiadaiących. (fig. 122).

Niech będzie kąt A = D, kąt B = E; z przyczyny kątów ròwnych A i D, podług Zadania poprzedzaiącego będziemy mieli

ABC:DEF::AB × AC:DE × DF,

dla podobieństwa zaś tych samych tròykątów

AB : DE :: AC : DF.

Rozmnożywszy tę proporcyą wyraz z wyrazem przez proporcyą następuiącą iedną znaczącą AC : DF :: AC : DF,

otrzymamy AB × AC:DE × DF::$\overline{AC}^2$:$\overline{DF}^2$,

więc ABC:DEF::$\overline{AC}^2$:$\overline{DF}^2$. Azatém dwa

tròy-

tròykąty podobne, są iak kwadraty z boków odpowiadaiących.

ZADANIE XXVI.

Twierdzenie.

Dwa wieloboki podobne, składaią się z tey samey liczby tròykątów podobnych, i podobnie rozłożonych. (fig. 129).

W wielobokach ABCDE, FGHIK, poprowadziwszy z kątów A i F, przekątne AC, AD, FH, FI; ponieważ te wieloboki są podobne, kąt ABC, iest równy kątowi odpowiadaiącemu FGH (Opis. II.); a nadto boki AB; BC, są proporcyonalne bokom FG, GH, więc

AB : FG : : BC : GH.

Tròykąty ABC, FGH, maiące kąt równy, obięty bokami proporcyonalnemi, są podobne (Zad. XX.); więc kąt BCA = GHF. Te kąty równe, odięte od kątów równych BCD, GHI, reszty ACD, FHI, będą równe: lecz ponieważ tròykąty ABC, FGH, są podobne mamy

AC : FH : : BC : GH,

z przyczyny zaś podobieństwa wieloboków mamy

BC : GH : : CD : HI,

więc

AC : FH : : CD : HI;

lecz iuż widzieliśmy, że kąt ACD = FHI, azatem tròykąty ACD, FHI, maiące kąt ró-

wny

wny obięty bokami proporcyonalnemi, są podobne. Tym sposobem postępuiąc w dowodzeniu podobieństwa tròykątòw następuiących, iakabykolwiek była liczba bokòw wielobokòw zadanych, przekonywamy się, że dwa wieloboki podobne, składaią się z tey samey liczby tròykątòw podobnych, i podobnie rozłożonych.

Uwaga. Zadanie odwròtne ròwnie iest prawdziwem: *Jeżeli dwa wieloboki składaią się z tey samey liczby tròykątòw podobnych i podobnie rozłożonych, te dwa wieloboki są podobne.* Ponieważ z podobieństwa tròykątòw względnych mamy: kąt ABC = FGH, BCA = GHF, ACD = FHI; więc BCD = GHI; podobnie CDE = HIK i t. d. Nadto AB : FG :: BC : GH :: AC : FH :: CD : HI i t. d. więc dwa wieloboki maiące kąty ròwne, i boki proporcyonalne, są podobne.

ZADANIE XXVII.

Twierdzenie.

Perymetra wielobokòw podobnych, są iak boki odpowiadaiące, a ich powierzchnie, iak kwadraty z tych samych bokòw. (fig. 129).

1mo Ponieważ z natury figur podobnych mamy AB : FG :: BC : GH :: CD : HI :: DE : i t. d. więc summa poprzednikòw AB + BC + CD i t. d. perymetru pierwszey figury, iest do summy następnikòw FG + GH + HI i t. d. perymetru

metru figury drugiey, iak poprzednik do następnika, czyli $AB:FG$. (*Aryt.* §. 157).

2*do* Ponieważ tròykaty ABC, FGH; ACD, FHI, są podobne mamy (Zad. XXV).

$$ABC : FGH :: \overline{AC}^2 : \overline{FH}^2,$$

$$ACD : FHI :: \overline{AC}^2 : \overline{FH}^2,$$

więc z przyczyny stosunku wspólnego otrzymamy $ABC:FGH::ACD:FHI$; przez podobne rozumowanie znaleźlibyśmy ACD FHI $::$ $ADE : FIK$. Więc summa poprzedników $ABC + ACD + ADE$, czyli wielòbok $ABCDE$, iest do summy następników $FGH + FHI + FIK$, czyli do wielòboku $FGHIK$, iak poprzednik ABC, iest do następnika FGH, albo $\overline{AB}^2 : \overline{FG}^2$; więc powierzchnie wielobokòw podobnych, są iak kwadraty z bokòw odpowiadaiących.

Uwaga. Gdybyśmy wykreślili trzy figury podobne, ktòrychby odpowiadaiące boki były ròwne trzem bokom tròykąta prostokątnego, figura wykreślona na przeciw-prostokątney, będzie ròwna summie dwòch drugich figur. Niech będą naprzykład trzy figury podobne P, Q, R (fig. 129. *bis*), wykreślone na bokach AB, AC, BC, tròykąta prostokątnego, powiadam, że będziemy mieli:

$$R = P + Q.$$

Jakoż, ponieważ figury P, Q, R, są podobne mamy

$P:Q$

$$P : Q :: \overline{AB}^2 : \overline{AC}^2$$
$$R : Q :: \overline{BC}^2 : \overline{AC}^2,$$

następnie z pierwszey proporcyi wyciągamy $P + Q : Q :: \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 : \overline{AC}^2$ (*Aryt* §. 156). gdy $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$, więc trzy wyrazy tey ostatniey proporcyy, będąc równe trzem ostatnim wyrazom proporcyi poprzedzaiącey, azatém $R = P + Q$.

ZADANIE XXVIII.

Twierdzenie.

Części dwóch cięciw przecinaiących się wewnątrz obwodu koła, są odwrótnie proporcyonalne. (fig. 130). To iest:

$$AO : DO :: CO : OB.$$

Złączywszy CA, BD: w tròykątach AOC, BOD, kąty przy O, są ròwne iako w wierzchołku przeciwlegle; kąt $A = D$, iako obeymuiące swemi ramionami ten sam łuk BC; dla tey samey przyczyny kąt $C = B$; więc poròwnywaiąc w tych dwòch tròykątach podobnych boki odpowiadaiące, będziemy mieli $AO : DO :: CO : OB$.

Uwaga. Z tąd wypada (*Aryt.* §. 150).

$$AO \times OB = DO \times CO;$$

to iest: *że prostokąt z dwóch części iedney cięciwy, iest równy prostokątowi z dwóch części cięciwy drugiey.*

ZADA-

ZADANIE XXIX.

Twierdzenie.

Z punktu wziętego zewnątrz obwodu koła, poprowadzone dwie sieczne kończące się wewnątrz obwodu, są odwrotnie proporcyonalne do części zewnętrznych. (fig. 131).

To iest: OB : OC :: OD : OA.

Złączywszy DB, AC; w tróykątach ODB, OAC, podobnych iako maiących kąt O, wspólny, kąt B = C (Zad. XVIII. K. II.), azatem i kąt trzeci ODB = OAC; porównywaiąc boki odpowiadaiące, będziemy mieli:

OB : OC :: OD : OA.

Wniosek. Więc prostokąt OB × OA = OC × OD.

ZADANIE XXX.

Twierdzenie.

Z punktu wziętego zewnątrz obwodu koła, poprowadzone styczna, i sieczna; styczna będzie srzednią proporcyonalną między sieczną, i iey częścią zewnętrzną. (fig. 132).

To iest: OC : OA :: OA : OD.

Złączywszy AD, AC; w tróykątach OAD, OAC, podobnych iako maiacych kąt wspólny O, kąt OAD = C (Zad. XIX. K. II.), azatem i trzeci kąt OAC = ODA; porównywaiąc boki odpowiadaiace otrzymamy:

OC : OA :: OA : OD.

Wniosek. Więc rownaiąc wieloczyn ze srzednich, z wieloczynem ze skraynych mamy:

$$\overline{AO}^2 = OC \times OD.$$

Uwaga. To zadanie iest szczególnym przypadkiem poprzedzaiącego; ponieważ, gdy sieczna OAB (fig. 131.), obraca się około punktu O, a kąt BOC powiększa się, punkta A, B, zbliżaiąc się, zbiegną się w iednym punkcie A, linija prosta OAB, z sieczney stanie się styczną (fig. 132). Naówczas, odległości OA, OB (fig. 131.), będąc równe, w proporcyi dowiedzioney (Zad. XXIX).

$$OD : OA :: OB : OC,$$

kładąc na mieyscu OB, ilość równą OA, otrzymamy proporcyą Zadania XXX., to iest:

$$OD : OA :: OA : OC.$$

ZADANIE XXXI.

Twierdzenie.

W tróykącie, podzieliwszy kąt liniją prostą na dwie części równe, prostokąt z boków ten kąt obeymuiących, iest równy prostokątowi z odcinków boku trzeciego, więcey kwadratowi z linij kąt dzielącey. (fig. 133).

To iest: $BA \times AC = \overline{AD}^2 + BD \times DC.$ przez trzy punkta A, B, C, poprowadziwszy obwód koła, i przedłużywszy liniją AD, dzielącą kąt BAC na dwie części równe, aż do obwodu, złączmy CE.

Tróykąt BAD, iest podobny tróykątowi AEC;

AEC; ponieważ z założenia kąt BAE=EAC, kąt B=E, iako maiące za miarę połowę łuku AC, azatém kąt trzeci ADB=ACE; więc w tych tròykątach podobnych, boki odpowiadaiące daią proporcyą

BA : AE :: AD : AC, z tąd
BA × AC=AE × AD; lecz
AF=AD+DE,

rozmnożywszy obie strony przez AD, otrzymamy: $AE \times AD = \overline{AD}^2 + AD \times DE$; lecz gdy $AD \times DE = BD \times DC$ (Zad. XXVIII.), azatém

$$BA \times AC = \overline{AD}^2 + BD \times DC.$$

ZADANIE XXXII.

Twierdzenie.

Przepuściwszy przez trzy wierzchołki tròykąta obwód koła, prostokąt z dwóch boków, iest rówuy prostokątowi ze srzednicy, przez prostopadłą spuszczoną na bok trzeci tròykąta. (fig. 134). To iest:

AB × AC=EC × AD.

Złączywszy AE; w tròykątach ADB, EAC, kąt prosty D=A, kąt B=E; azatém BAD=ACE, więc tròykąty podobne, daią proporcyą następuiącą:

AB : EC :: AD : AC,

a z tąd AB × AC=EC × AD.

Wniosek. Rozmnożywszy obie strony przez tę samę ilość BC, będziemy mieli:

$$AB \times AC \times BC = EC \times AD \times BC;$$

wieloczyn $AD \times BC$, iest równy dwa razy wziętey powierzchni tróykąta (Zad. VI.), azatém *wieloczyn z trzech boków tróykąta, iest równy iego powierzchni, mnożoney przez dwa razy wziętą srzednicę obwodu koła opisanego.*

Uwaga. Dowiedziemy także, że *powierzchnia tròykąta, iest równa iego perymetrowi, rozmnożonemu przez połowę promienia koła wpisanego.* (fig. 87).

Ponieważ tròykąty AOB, BOC, AOC, maią wysokość wspólną promień koła wpisanego, i wierzchołek O; ich summa będzie równa summie podstaw AB, BC, AC, mnożoney przez połowę promienia OD; azatém powierzchnia tróykąta ABC, iest ròwna iego perymetrowi, mnożonemu przez połowę promienia koła wpisanego.

ZADANIE XXXIII.

Twierdzenie.

W czworoboku wpisanym w obwód koła, prostokąt z dwóch przekątnych, iest równy summie prostokątów z boków przeciwległych. (fig. 135). To iest:

$$AC \times BD = AB \times CD + AD \times BC.$$

Odciąwszy łuk $CO = AD$, poprowadźmy liniją BO, spotykaiącą przekątną AC, w punkcie I. Ponieważ łuk $AD = OC$, kąt $ABD = CBI$, kąt $ADB = BCI$ iako wpisane

sane w ten sam odcinek, azatém kąt $BAD = BIC$; więc tróykąty podobne ABD, CBI, daią proporcyą następuiącą

$$AD : CI :: BD : BC,$$

z tąd $$AD \times BC = CI \times BD.$$

Tròykąt ABI, iest podobny tróykątowi DBC; ponieważ łuk $AD = OC$, dodawszy po obu stronach OD, będziemy mieli $AO = DC$; więc kąt $ABI = DBC$, nadto kat $BAI = BDC$ iako wpisane w ten sam odcinek, azatém kąt $BIA = BCD$; więc w tròykątach podobnych ABI, DBC, boki odpowiadaiące daią proporcyą

$$AB : BD :: AI : CD,$$

z tąd $$AB \times CD = AI \times BD.$$

Łącząc te dwa wypadki, i uważaiąc że $AI \times BD + CI \times BD = (AI + CI) \times BD = AC \times BD$, będziemy mieli

$$AD \times BC + AB \times CD = AC \times BD.$$

Uwaga. Dowiedziemy także, że *w czworoboku wpisanym dwie przekątne są między sobą, iak summa prostokątów z boków dotykaiących się ostatecznych ich końców.* To iest:

$$BD : AC :: AB \times BC + AD \times DC : AB \times AD + BC \times CD.$$

Wyraziwszy przez O srzodek, przez AE srzednicę koła opisanego, podług wniosku zadania XXXII. będziemy mieli:

$AB \times BC \times AC =$ *powierzchnia* $ABC \times 2\,AE$

$AD \times DC \times AC =$ *powierzchnia* $ADC \times 2\,AE$

dodawszy te dwa rownania otrzymamy

AB

$$AB \times BC \times AC + AD \times DC \times AC =$$
powierzchnia $ABCD \times 2AE$,
czyli $(AB \times BC + AD \times DC)\, AC =$
powierzchnia $ABCD \times 2AE$.

Mamy także:

$AB \times AD \times BD =$ *powierzchnia* $ABD \times 2AE$
$BC \times CD \times BD =$ *powierzchnia* $BCD \times 2AE$
z tąd $(AB \times AD + BC \times CD)\, BD =$
powierzchnia $ABCD \times 2AE$.

Gdy dwie ilości równe trzeciey równe między sobą, więc

$$(AB \times BC + AD \times DC)\, AC = (AB \times AD + BC \times CD)\, BD$$

rozebrawszy to równanie na proporcyą, będziemy mieli:

$$BD : AC :: AB \times BC + AD \times DC : AB \times AD + BC \times CD.$$

Za pomocą tych dwóch zadań, maiąc znane boki, znaydziemy przekątne.

ZADANIE XXXIV.

Twierdzenie.

Obrawszy punkt wewnątrz obwodu koła, P, (fig 136). *ieżeli weźmiemy drugi* Q, *zewnątrz na przedłużeniu promienia* CA, *tak że* $CP : CA :: CA : CQ$; *i ieżeli z punktu iakiegokolwiek* M, *wziętego na obwodzie, poprowadzimy do tych punktów linije* MP, MQ, *te będą w stosunku następuiącym:*

$$MP : QM :: AP : AQ.$$

Po-

Ponieważ z założenia

$$CP : CA :: CA : CQ,$$

zaś $CM = CA$, więc

$$CP : CM :: CM : CQ;$$

Azatem tróykąty PCM, QCM, maiące kąt C, obięty bokami CP, CM, pierwszego tróykąta, proporcyonalnemi do boków CM, CQ drugiego, będąc podobne mamy:

$$PMC = CQM.$$

Poprowadziwszy cięciwę AM, kąt zewnętrzny $MAC = CQM + AMQ$ gdy $MAC = AMC = PMC + AMP$, więc

$$PMC + AMP = CQM + AMQ;$$

odeymuiąc z iedney strony kąt PMC, z drugiey iemu równy CQM, pozostanie kąt $AMP = AMQ$. Z kąd podług Zadania XVII., otrzymamy:

$$MP : MQ :: AP : AQ.$$

Zagadnienia względne do Księgi trzeciey.

Zagadnienie Pierwsze.

Podzielić liniją prostą daną na tyle częſci równych na ile będziemy chcieli, albo na częſci proporcyonalne linijom danym. (fig. 137).

1*mo* Niech będzie linija AB, do podzielenia na pięć części równych. Przez ostateczny koniec A, poprowadźmy liniją prostą nieograniczoney długości AG, a biorąc AC wielkości

ści iakiey kolwiek, połóżmy pięć razy na AG. Złączywszy ostatni punkt podziału, z ostatecznym końcem linij AB, poprowadźmy CI, równoległą do GB; powiadam, że AI będzie piątą częścią linij AB, i że kładąc AI pięc razy na AB, ta będzie podzieloną na pięc części równych. Ponieważ linija CI, iest równoległą do GB, boki AG, AB, są pocięte proporcyonalnie w punktach C, I (Zad. XV). Gdy AC iest piątą częścią AG, więc AI iest piątą częścią AB.

2do. Niech będzie linija AB (fig. 138.), do podzielenia na części proporcyonalne linijom danym P, Q, R. Przez ostateczny koniec A, poprowadźmy liniją nieograniczoną AG; weźmy na niey AC = P, CD = Q, DE = R; złączywszy punkt E, z ostatecznym końcem linij daney AB, przez punkta C, D, poprowadziwszy CI, DK, równoległe do EB; mamy (Zad. XV).

$$AI : AC :: IK : CD :: KB : DE;$$

gdy z wykreślenia AC, CD, DE, są równe linijom danym P, Q, R; więc

$$AI : P :: IK : Q :: KB : R.$$

Zagadnienie II.

Znaleść czwartą proporcyonalną do trzech linij danych A, B, C. (fig. 139).

Pod iakimkolwiek kątem poprowadziwszy dwie linije DE, DF nieograniczoney długości, weźmy na pierwszey DA = A, DB = B; zaś

na

na drugiey DC=C; złączywszy AC, i przez punkt B, poprowadziwszy liniją BX, równoległą do AC, mamy:

DA : DB :: DC : DX;

gdy trzy pierwsze wyrazy są równe trzem linijom danym A, B, C; DX, iest czwartą proporcyonalną żądaną.

Zagadnienia III.

Znaleść srzednią proporcyonalną między dwiema linijami danemi A, B. (fig. 140).

1*mo* Na linij nieograniczoney, weźmy DE=A, EF=B; na całey zaś linij DF=A+B, iako na srzednicy, opisawszy półobwód koła, DGF; z punktu E, wynieśmy prostopadłą EG, która iest srzednią proporcyonalną między dwoma odcinkami srzednicy DE, EF (Zad. XXIII. K. III.): te zaś odcinki są równe linijom danym A i B.

2*do* Znaydziemy tę samę srzednią proporcyonalną opisując na linij naywiększey=B, półobwód EKF, i biorąc EH=A; a wyprowadziwszy HK, prostopadłą do EF, i złączywszy punkta E, K, liniją prostą, będziemy mieli (Zad. XXIII. K. III.):

EH *czyli* A : EK :: EK : EF *czyli* B.

3*tio* Rozwiążemy ieszcze to zagadnienie, opisując półobwódkoła na linij HF, różnicy dwóch linij danych; a następnie poprowadziwszy liniją prostą EI, styczną do tego półobwodu koła, otrzymamy (Zad. XXX. K. III.):

EF

EF *czyli* B : EI :: EI : EH *czyli* A.

Z poprzedzaiących wykreśleń widziemy że EG = EK = EI; azatém trzy punkta G, K, I, leżą na tym samym obwodzie koła opisanym z punktu E, iako ze srzodka.

Zagadnienie IV.

Podzielić liniją daną AB, *na dwie części tak, aby część naywiększa była srzednią proporcyonalną między całą liniją i częścią drugą.* (fig. 141).

Z ostatecznego końca B, linij daney, wyprowadźmy prostopadłą BC, równą połowie linij daney AB; z punktu C, iako ze srzodka promieniem CB, opisawszy obwód koła, i poprowadziwszy liniją AC, przecinaiącą obwód w punkcie D, weźmy AF = AD; powiadam; że będziemy mieli

AB : AF :: AF : FB.

Linija AB, prostopadła do ostatecznego końca promienia CB, iest styczną (Zad. X. K. II.); przedłużywszy AC, do przecięcia się z obwodem koła w punkcie E, będziemy mieli AE : AB :: AB : AD; z kąd (*Aryt.* §. 156).

AE — AB : AB :: AB — AD : AD;

promień BC, iest połową linij daney AB; więc srzednica DE = AB, azatém AE — AB = AD = AF; AB — AD = AB — AF = FB; więc AF : AB :: FB : AD albo : AF, z kąd

AB : AF :: AF : FB.

Uwaga. Ten gatunek dzielenia linij AB, na-

nazywa się dzieleniem *na stosunek srzedni i skrayny:* którego użycie niżey widzieć będziemy,

Sieczną AE, uważać można podzieloną w punkcie D, na stosunek srzedni i skrayny; ponieważ AB = DE, mamy

$$AE : DE :: DE : AD.$$

Z tąd, ieżeli weźmymy AG = AE, odległość punktu G, od ostatecznego końca A, linij prostey AB, będzie także srzednią proporcyonalną między odległością tego samego punktu, od drugiego ostatecznego końca B, linij prostey AB; iakoż, z wyższey proporcyi wyciągami następuiącą

$$AE + DE : AE :: DE + AD : DE,$$

z którey mamy

$$GB : GA :: GA : AB.$$

Zagadnienie V.

W kącie BCD, *przez punkt dany* A, *poprowadzić liniją prostą* BD, *tym sposobem ażeby części* AB, AD, *obięte między punktem danym* A, *i dwoma ramionami kąta danego* BCD, *były równe.* (fig. 142).

Przez punkt dany A, poprowadźmy liniją prostą AE, równoległą do CD, i weźmy CE = EB; przez punkta zaś B, A, poprowadziwszy liniją prostą BAD, mamy

$$BE : EC :: BA : AD;$$

gdy BE = EC, azatém BA = AD.

Uwaga. Jeżeli chcemy, aby linija prosta

sta BAD, przez punkt dany A, była podzieloną na dwie części AB, AD, proporcyonalne linijom danym M, N. Na boku CD, weźmy liniją CM = M, MN = N; przez punkt dany A, poprowadziwszy AE, równoległą do CD, złączmy ME; przez punkt N, poprowadziwszy NB, równoległą do ME, złączmy punkta B, A, liniją prostą BAD; ponieważ EM, iest równoległą do BN, mamy

$$MN : CM :: \text{albo } N : M :: BE : EC,$$

linija AE, będąc także równoległą do CD, mamy $BE : EC :: AB : AD$,

a z tąd $AB : AD :: N : M.$

Jeżeli chcemy aby dwie części AB, AD, były równe, uczyniwszy $M = N$, azatem $CE = EB$; więc poprowadziwszy EA, otrzymamy $AB = AD$.

Zagadnienie VI.

Zrobić kwadrat równo-wartuiący równoległobokowi, albo tróykątowi danemu. (fig. 143).

1*mo.* Niech będzie ABCD równoległobok, którego AB podstawa, DE wysokość; między AB i DE, niech będzie srzednio-proporcyonalna *np.* XY; więc

$$AB : XY :: XY : DE,$$

z tąd $\overline{XY}^2 = AB \times DE;$

gdy $AB \times DE$ iest miarą równoległoboku ABCD, zaś $\overline{XY}^2$ miarą kwadratu, więc kwadrat iest równo-wartuiący równoległobokowi.

2*do*

2do Niech będzie tróykąt ABC (fig. 144.), którego podstawa BC, wysokość AD; weźmy srzednią-proporcyonalną między BC, i połową AD, niech nią będzie *np.* XY; więc

$$BC : XY :: XY : \tfrac{1}{2} AD,$$

z tąd $$\overline{XY}^2 = BC \times \tfrac{1}{2} AD;$$

azatém kwadrat wyniesiony na XY, iest równo-wartuiący tróykątowi ABC.

Zagadnienie VII.

Na linij daney AD (fig. 145.), *wystawić prostokąt* ADEX, *równo-wartuiący prostokątowi danemu* ABEC.

Szukaymy czwartey proporcyonalney do trzech linij AD, AB, AC, i niech nią będzie *np.* AX; więc

$$AD : AB :: AC : AX,$$

z tąd $$AD \times AX = AB \times AC;$$

azatém prostokąt ADEX, iest równo-wartuiący prostokątowi ABEC.

Zagadnienie VIII.

Znaleść w linijach stosunek prostokątu z dwóch linij danych A, B; *do prostokątu z dwóch linij danych* C, D. (fig. 148).

Niech będzie X, czwartą proporcycnalną do trzech linij B, C, D; powiadam, że stosunek z dwóch linij A i X, będzie równy stosunkowi z dwóch prostokątów $A \times B$, $C \times D$.

Ponieważ $B : C :: D : X$, z tąd $C \times D = B \times X$; azatem

$A \times B$

$$A \times B : C \times D :: A \times B : B \times X :: A : X.$$

Wniosek. Więc dla otrzymania stosunku kwadratów zrobionych na linijach danych A, C; znalazłszy trzecią proporcyonalną X, otrzymamy A : C :: C : X, i będziemy mieli

$$A^2 : C^2 :: A : X.$$

Zagadnienie IX.

Znaleść w linijach stosunek wieloczynu z trzech linij danych A, B, C, *do wieloczynu z trzech linij danych* P, Q, R. (fig. 149).

Do trzech linij danych P, A, B, niech będzie czwarta proporcyonalna X; do trzech linij C, Q, R, czwarta proporcyonalna Y. Dwie linije X, Y, będą między sobą, iak wieloczyn z A, B, C, do wieloczynu z P, Q, R.

Ponieważ P : A :: B : X, mamy $A \times B = P \times X$, a mnożąc obie strony przez C, otrzymamy $A \times B \times C = C \times P \times X$.

Ponieważ C : Q :: R : Y, mamy $Q \times R = C \times Y$, a mnożąc obie strony przez P, będziemy mieli $P \times Q \times R = P \times C \times Y$. Więc

$$A \times B \times C : P \times Q \times R :: C \times P \times X : C \times P \times Y :: X : Y.$$

Zagadnienie X.

Wykreślić tróykąt równo-wartuiący wielobokowi danemu. (fig. 146).

W wieloboku ABCDE, poprowadźmy przekątne CE, CA, odcinaiące tróykąty CED, CBA; przez punkt D, poprowadziwszy DF ró-

równoległą do CE, aż do spotkania się z przedłużonym bokiem AE w punkcie F, złączmy CF; tróykąty CED, CEF, maiące podstawę CE, i wysokość wspólną, gdyż wierzchołki D, F, leżą na linij DF, równoległey do podstawy; są równo-wartuiące. Dodaiąc do pierwszego tróykąta figurę ABCE, będziemy mieli wielobok ABCDE; tę samę figurę dodawszy do drugiego, otrzymamy wielobok ABCF, równo-wartuiący pierwszemu. Następnie, za tróykąt CBA, biorąc iemu równo-wartuiący CGA; pięciobok dany ABCDE, zamieni się na tróykąt równo-wartuiący GCF.

Ten sam sposób służy na każdą inną figurę; ponieważ zmnieyszaiąc każdego razu po iednym boku, wpadniemy zawsze na tróykąt równo-wartuiący.

Uwaga. Widzieliśmy (Zagad. VI.), że każdy tróykąt zamienionym bydź może na kwadrat równo-wartuiący; więc zawsze znaydziemy kwadrat równo-wartuiący figurze prostokreślney daney; co się nazywa *kwadrować* figurę prostokreślną, albo znaleść iey *kwadraturę.* Zagadnienie o *kwadraturze koła,* zależy na znalezieniu kwadratu równo-wartuiącego, maiąc daną srzednicę.

Zagadnienie XI.

Wykreślić kwadrat równy summie, albo różnicy dwóch kwadratów danych. (fig. 147).

Niech

Niech będą A i B, boki kwadratów danych. *1mo* Jeżeli chcemy znaleść kwadrat równy summie kwadratów, poprowadźmy dwie linije nieograniczoney długości ED, EF, pod kątem prostym; wziąwszy ED = A, EG = B; złączmy punkta G, D, liniją prostą, która będzie bokiem kwadratu szukanego. Ponieważ kwadrat z przeciw-prostokątney GD, iest równy summie kwadratów z boków ED, EG, kąt prosty obeymuiących.

2do Chcąc otrzymać kwadrat równy różnicy kwadratów, złożmy podobnie kąt prosty FEH, weźmy liniją GE = B, i z punktu G, iako ze srzodka promieniem GH = A, opiszmy łuk przecinaiący liniją EH, w punkcie H; w tróykącie prostokątnym GEH, mamy: $\overline{HE}^2 = \overline{GH}^2 - \overline{GE}^2$ czyli $\overline{HE}^2 = A^2 - B^2$

Zagadnienie XII.

Wykreślić kwadrat, który będzie do kwadratu danego ABCD, *iak linija* M, *do* N. (fig. 150).

Na linij nieograniczoney, weźmy EF = M, FG = N; na EG = M + N, iako srzednicy opiszmy połobwód koła; z punktu F, wyprowadźmy do srzednicy prostopadłą FH, z punktu zaś H, cienciwy HG, HE, przedłużaiąc nieograniczenie: na pierwszey wziąwszy HK = AB, zaś przez punkt K, poprowadziwszy liniją KI, równoległą do srzednicy EG; w troykącie KHI (Zad. XV. K. III.);

ma-

mamy HI:HK::HE:HG, więc

$\overline{HI}^2 : \overline{HK}^2 :: \overline{HE}^2 : \overline{HG}^2$

lecz w tróykącie prostokątnym GHE (Zad. XXIII.), mamy $\overline{HE}^2 : \overline{HG}^2$ :: EF:FG albo :: M:N, więc $\overline{HI}^2 : \overline{HK}^2$ :: M:N, i gdy HK = AB, azatem $\overline{HI}^2 : \overline{AB}^2$ :: M:N.

Zagadnienie XIII.

Na boku FG, *odpowiadaiącym bokowi* AB, *opisać wielobok podobny wielobokowi danemu* ABCDE. (fig. 129).

W wieloboku ABCDE, poprowadziwszy przekątne AC, AD, złóżmy w punkcie F, kąt GFH = BAC; w punkcie zaś G, kąt FGH = ABC; linije FH, GH, przeciąwszy się złożą kąt H = C; i tróykąt FGH, będzie podobny tróykątowi ABC. Na boku FH, odpowiadaiącym bokowi AC, wystawmy tróykąt FIH, podobny tróykątowi ADC; na boku zaś FI, odpowiadaiącym bokowi AD, tróykąt FIK, podobny tróykątowi ADE. Wielobok FGHIK, będzie wielobokiem podobnym do wieloboku danego ABCDE, ponieważ składaią się z tey samey liczby tróykątów podobnych, i podobnie ułożonych (Zad. XXVI).

Zagadnienie XIV.

Maiąc dane dwie figury podobne, wykreślić figurę podobną równą ich summie, albo różnicy. (fig. 129. *bis*).

K. Chcąc

Chcąc mieć summę dwóch figur podobnych P, Q; na ramionach AB, AC, kąta prostego BAC, weźmy części AB, AC, równe bokom podobnym dwóch figur danych P, Q; złączywszy BC, i na tey linij uważaney iako na boku odpowiadaiącym AC, wykreśliwszy figurę R, podobną figurze Q, będziemy mieli (Zad. XXVII. *Uwaga*).

$$R = P + Q.$$

Jeżeli idzie o znalezienie różnicy dwóch figur podobnych R, Q; wyprowadziwszy z ostatecznego końca boku AC, figury Q, prostopadłą AB; z punktu zaś C, iako ze srzodka promieniem CB, równym bokowi CB, figury R, podobnym do boku AC, figury Q, opisawszy łuk koła przecinaiący prostopadłą AB w punkcie B, linija AB będąc bokiem podobnym figury żądaney P, możemy na niey wykreślić figurę podobną do R. Dowiedliśmy (Zad. XXVII. *Uwaga*) że

$$P + Q = R,$$

odciągnąwszy z obu stron tę samę figurę Q, otrzymamy $P = R - Q$.

Zagadnienie XV.

Wykreślić figurę podobną figurze daney, w stosunku iak M *do* N.

Niech będzie A, bok figury daney; X, bok odpowiadaiący figury szukaney; potrzeba ażeby kwadrat z X, był do kwadratu z A, iak M iest do N (Zad. XXVII). Znaydziemy X,

za

za pomocą Zagadnienia XII., a znaiąc X, resztę dokończymy podług Zagadnienia XIII.

Zagadnienie XVI.

Wykreślić figurę podobną figurze P, *i rownowartuiącą figurze* Q. (fig. 151).

Szukaymy boku M kwadratu rownowartuiącego figurze P, i boku N kwadratu równowartuiącego figurze Q. Niech X, będzie czwartą proporcyonalną do trzech linij danych M, N, AB; na boku X odpowiadaiącym bokowi AB, wykreśliwszy figurę podobną figurze P, ta będzie także rownowartuiącą figurze Q.

Wyraziwszy bowiem przez Y, figurę wykreśloną na boku X, będziemy mieli

$$P : Y :: \overline{AB}^2 : X^2$$

lecz z wykreślenia

$$AB : X :: M : N \text{ albo}$$

$$\overline{AB}^2 : X^2 :: M^2 : N^2 \text{ więc}$$

$$P : Y :: M^2 : N^2.$$

Mamy także z wykreślenia

$$M^2 = P,\ N^2 = Q \text{ więc}$$

$$P : Y :: P : Q,$$

azatem $Y = Q$; więc figura Y, iest podobną do figury P, i rownowartuiącą figurze Q.

Zagadnienie XVII.

Wykreślić prostokąt rowno-wartuiący kwadratowi danemu C, *i którегoby boki przyległe czyniły summę daną* AB. (fig. 152).

Na AB, iako srzednicy opiszmy połobwód koła, i poprowadźmy liniją równoległą do srzednicy DE, w odległości AD, równey bokowi kwadratu danego C. Z punktu E, w którym równoległa przecina obwód koła, spuśćmy na srzednicę prostopadłą EF; powiadam, że AF, FB, będą bokami przyległemi prostokąta szukanego. Ponieważ ich summa równa AB, zaś prostokąt AF × FB, równy kwadratowi z EF (Zad. XXIII.), albo kwadratowi z AD; azatem iest równo-wartuiący kwadratowi danemu C.

Uwaga. Ażeby zagadnienie było podoném do rozwiązania, odległośc AD, niepowinna przechodzić promienia, toiest: bok kwadratu C, niepowinien przewyższać połowy linij AB.

Zagadnienie XVIII.

Wykreślić prostokąt równowartuiący kwadratowi C, *któregoby boki przyległe miały między sobą różnicę daną* AB. (fig. 153).

Na AB, iako srzednicy, opiszmy obwód koła; z ostatecznego końca A, wyprowadźmy styczną AD, równą bokowi kwadratu C; przez punkt D, i srzodek koła O, poprowadźmy sieczną DF, powiadam, że DE i DF, będą bokami przyległemi prostokąta żądanego.

Ponieważ 1*mo* różnica tych boków równa srzednicy EF albo AB; 2*do* prostokąt

DE × DF

$DE \times DF$ iest równy $\overline{AD}^2$ (Zad. XXX.); a-zatém równowartuiący kwadratowi danemu G.

Zagadnienie XIX.

Znaleść miarę wspólną ieżeli iest, między przekątną i bokiem kwadratu. (fig. 154).

Niech będzie ABCG kwadrat, którego AC przekątna. Przeniosłszy bok kwadratu CB, na przekątną CA ile razy obiąć może (Zagad. XVII. K. II.); opiszmy ze srzodka C, promieniem CB połobwód koła DBE: widziemy, że CB mieści się w AC raz ieden z resztą AD, którą trzeba porównać z bokiem CB, albo AB.

Powtóre, kąt ABC będąc prosty, AB iest styczną, AE sieczną, wychodzące z tego samego punktu A, więc (Zad. XXX).

$$AD : AB :: AB : AE,$$

zamiast $AD:AB$, możemy brać $AB:AE$; linija zaś $AB = CD$, zamyka się dwa razy w AE z resztą AD, którą trzeba porównać z AB. Z tąd widziemy, że działanie będąc nieskończoném, przekątna z bokiem kwadratu wspólney miary niema (Zad. XI).

Uwaga. Równie iest rzeczą niepodobną znaleść dokładny stosunek w liczbach przekątney do boku kwadratu; lecz będziemy mogli do niego zbliżyć się tak, iak sami będziemy chcieli za pomocą ułamku ciągłego. Jakoż, ieżeli dla większey prostoty uczynimy $AB = 1$, proporcya $AD:AB::AB:AE$, wy-

żey

żey dowiedziona stanie się $AD:1::1:AE$ a ztąd $AD = \frac{1}{AE}$

Lecz mamy $AE = ED + AD = 2 + AD$, więc będziemy mieli

$$AD = \frac{1}{2 + AD}$$

Azatém przekątna $AC = DC + AD$ albo

$$AC = 1 + \frac{1}{2 + AD}$$

Jeżeli w tey wartości na AC, podstawimy za AD wartość $\frac{1}{2 + AD}$ będziemy mieli

$$AC = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + AD}}$$

Podstawuiąc ciągle za AD wartość wyżey znalezioną otrzymamy

$$AC = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + 1 \ldots}}}}$$ *nieskończenie.*

Dla otrzymania pierwszego zbliżenia, weźmy dwa wyrazy z ciągłego ułamku, i będziemy mieli

$$AC = 1 + \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{2};$$

Dla otrzymania drugiego zbliżenia, weźmy trzy wyrazy

$$AC = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}} = 1 + \tfrac{2}{5} = \tfrac{7}{5};$$

Ze czterech wyrazów będziemy mieli

$$AC = \tfrac{17}{12};$$

zaś z wyrazów pięciu znaydziemy

$$AC = \tfrac{41}{29};$$

z tego zaś ostatniego zbliżenia wyciągamy proporcyą następuiącą

$$AC : 1 :: 41 : 29$$

albo

$$AC : AB :: 41 : 29,$$

tak, że stosunek zbliżony przekątney do boku kwadratu iest iak 41 do 29. Znaleźlibyśmy stosunek bardziey zbliżony, rachuiąc większą liczbę wyrazów.

KSIĘGA IV.

O wielobokach foremnych i o wymiarze koła.

Opisanie.

Wielobok, razem równokątny i równoboczny, nazywa się *wielobokiem foremnym.* Wieloboki foremne składać się mogą z nieskończoney liczby boków. Tróykąt równoboczny, iest wielobokiem trzybocznym, kwadrat czworobocznym i t. d.

ZADANIE PIERWSZE.

Twierdzenie

Dwa wieloboki foremne z tą samą liczbą boków, są dwie figury podobne. (fig. 155).

Niech będą dwa sześcioboki ABCDEF, $abcdef$; summa kątów w iednym i drugim, równa ośmiu kątom prostym (Zad. XXVIII. K. I). Kąty A, a, będąc każdy szóstą częścią tey summy, są równe; dla podobney przyczyny kąt $B=b$, $C=c$, i t. d. z natury zaś wieloboków foremnych, boki $AB=BC=CD$, i t. d.. $ab=bc=cd$, i t. d. azatém

$$AB:ab::BC:bc::CD:cd \text{ i t. d.}$$

więc dwie figury maiące kąty równe i boki odpopowiadaiące proporcyonalne, są podobne (*Opis*. II. K. III).

Wniosek. Perymetra dwóch wielobokòw foremnych z tą samą liczbą boków, są iak boki odpowiadaiące, ich zaś powierzchnie, iak kwadraty z tych samych boków. (Zad. XXVII. K. III.

ZADANIE II.

Twierdzenie.

Każdy wielobok foremny może bydź wpisany w obwód koła, i obwodem koła opisany (fig. 156).

Niech będzie wielobok ABCDEFGH; przez trzy iego wierzchołki A, B, C, obwód koła poprowadzić można (Zad. VIII. K. II.); niech O, będzie srzodkiem tego koła, zaś OP prostopadłą na połowę boku BC; złączmy AO, OD.

Czworoboki OPCD, OPBA, przystaną do siebie, iako maiące bok OP wspólny, kąt prosty OPC = OPB; więc bok PC pokrywszy bok PB, pukt C padnie na punkt B. Gdy z natury wieloboku foremnego kąt PCD = PBA, CD weźmie kierunek BA, ponieważ CD = BA, punkt D, padnie na punkt A, i dwa czworoboki zbiegną się całkiem ieden z drugim. Gdy odległość OD = AO, obwód koła przechodzący przez wierzchołki A, B, C, przeyidzie także przez D: przez po-

do-

dobne rozumowanie dowiedziemy, że obwód koła przechodzący przez trzy wierzchołki B, C, D, przeyidzie przez wierzchołek następuiący E, i tak następnie: więc ten sam obwód koła, który przechodzi przez wierzchołki A, B, C, przeyidzie przez wszystkie wierzchołki kątów wieloboku foremnego, a wielobok będzie wpisany w obwód koła.

W drugim przypadku, wszystkie boki AB, BC, CD it.d. są cienciwami równemi, więc są w równey odległości od srzodka (Zad. IX. K. II.); azatem ieżeli ze srzodka O, promieniem OP, opiszemy obwód koła ten wszystkich boków wieloboku dotknąwszy się w połowie, będzie wpisany w wielobok, czyli obwódkoła wielobokiem opisany.

Uwaga I. Punkt O, wspólny srzodek obwodu koła wpisanego i opisanego, może bydź także uważany za srzodek wieloboku, i dla tey przyczyny nazywa się *kąt we srzodku*, kąt AOB, powstaiący z dwóch promieni prowadzonych do ostatecznych końców tego samego boku AB.

Ponieważ wszystkie cienciwy AB, BC i t. d. są równe, więc wszystkie kąty we srzodku będąc równe, wartość każdego znayduie się, dzieląc 4 kąty proste przez liczbę boków wieloboku.

Uwaga II. Chcąc wpisać wielobok foremny o pewney liczbie boków w obwód koła dany, dosyć iest podzielić ten obwód na

tyle

tyle części równych, ile wielobok ma boków; ponieważ łuki równe obeymuią cięciwy A B, B C, C D i t. d. równe; (Zad. V. K. II.), tróykąty A O B, B O C, C O D i t. d. będą także równe (Zad. XI. K. I). azatem wszystkie kąty A B C, B C D, C D E i t. d. będąc równe, figura A B C D E F G H, będzie wielobokiem foremnym.

ZADANIE III.

Zagadnienie.

Wpisać kwadrat w obwód koła dany. (fig. 157).

Poprowadziwszy dwie srzednice AC, BD, przecinaiące się pod kątem prostym, złączmy ostateczne końce A, B, C, D; ponieważ kąty A O B, B O C, C O D, D O A równe, cięciwy AB, BC, CD, DA są równe, nadto kąty A B C, B C D i t. d. są proste, iako wpisane wpółobwód koła (Zad. XVIII. K. II.), więc figura A B C D, iest kwadratem wpisanym.

Uwaga. W tróykącie B O C, prostokątnym i równoramiennym mamy $\overline{BC}^2 = 2\,\overline{BO}^2$ z tąd $BC : BO :: \sqrt{2} : 1$, (Zad. XI. K. III). Zatém, *bok kwadratu wpisanego iest do promienia, iak pierwiastek kwadratowy z 2, do iedności.*

ZADANIE IV.

Zagadnienie.

Wpisać sześciobok foremny i tróykąt ró-

równoboczny w obwód koła dany. (fig. 158).

Przypuściwszy że AB, iest iednym z boków sześcioboku wpisanego, poprowadźmy promienie AO, OB; kąt AOB, iest szóstą częścią czterech kątów prostych; więc biorac kąt prosty za iedność, będziemy mieli AOB $= \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$: dwa drugie kąty ABO, BAO, wartuią razem $2 - \frac{2}{3}$, albo $\frac{4}{3}$, a że leżą na przeciwko boków równych (Zad. XII. K. I.), każdy z nich $= \frac{2}{3}$; więc tróykąt ABO równokątny, iest równobo zny, a bok sześcioboku wpisanego równy promieniowi. Azatem przeniosłszy promień sześć razy na obwód koła, otrzymamy sześciobok foremny wpisany.

Maiąc sześciobok ABCDEF wpisany, ieżeli złączymy wierzchołki kątów A, C, E, złożymy tróykąt równoboczny ACE.

Uwaga. Kąt ACD, iako wpisany wpółobwód koła, będąc prosty, w tróykącie prostokątnym ACD mamy:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{CD}^2 \text{ albo}$$

$$\overline{AC}^2 = (2AO)^2 - \overline{AO}^2 = 3\overline{AO}^2,$$

z kąd wypada proporcya

$$\overline{AC}^2 : \overline{AO}^2 :: 3 : 1$$

wyciągnąwszy pierwiastek kwadratowy mamy

$$AC : AO :: \sqrt{3} : 1.$$

Więc *bok tróykąta równobocznego, iest do promienia koła opisuiącego, iak pierwiastek kwadratowy z liczby* 3, *do iedności.*

ZA-

ZADANIE V.

Zagadnienie.

W koło dane, wpisać dziesięciobok foremny, pięciobok, i piętnastobok. (fig. 159).

Podzielmy promień AO na stosunek srzedni i skrayny w punkcie M (Zag. IV. K. III); (*) wziąwszy cięciwę AB, równą naywiększemu odcinkowi OM, złączmy MB; z wykreślenia mamy

$$AO : OM :: OM : AM;$$

gdy

$$AB = OM,$$

$$AO : AB :: AB : AM;$$

tròykąty AOB, ABM maiące kąt wspólny A, obięty bokami proporcyonalnemi, są podobne (Zad. XX. K. III). Tròykąt AOB iest tròykątem równoramiennym, więc tróykąt ABM będąc nim także, i mamy $AB = MB$, gdy $AB = OM$, więc $MB = MO$, a tròykąt BMO będąc tròykątem równoramiennym, z iedney strony mamy kąt $ABM = AOB$, z drugiey $MBO = AOB$, więc ABO albo $ABM + MBO$ będzie podwóynym AOB; kąt BAO będzie także podwóynym AOB, więc summa $ABO + BAO + AOB$ ważąc dwa kąty proste i wartuiąc pięć razy kąt AOB, ten ostatni będzie piątą częścią

(*) Zagadnienie dzielenia linij daney na stosunek srzedni i skrayny rozwiążmy ieszcze sposobem analitycznym. Liniją daną AB. (fig. 141). wyścią dwóch katów prostych albo dziesiątą częścią czterech kątów prostych, azatém łuk AB iest dziesiatą częścią obwodu koła; zaś cienciwa AB bokiem dziesięcioboku foremnego, którą przeniosłszy razy dziesięć na obwód koła otrzymamy dziesięciobok foremny wpisany.

Wniosek I. Łącząc po dwa wierzchołki dziesięcioboku foremnego, złożemy pięciobok foremny ACEGI.

Wniosek II. AB będąc bokiem dziesięcioboku, niech AL będzie bokiem sześcioboku; naówczas łuk BL będzie w stosunku do obwodu koła $\frac{1}{6}-\frac{1}{10}$, albo $\frac{1}{15}$; więc cienciwa BL, będzie bokiem piętnastoboku, foremnego.

$$CL=\frac{1}{5}-\frac{1}{6}=\frac{6}{30}-\frac{5}{30}=\frac{1}{30};$$

azatém cienciwa łuku CL, będzie bokiem wieloboku składaiącego się z 30 boków.

Uwaga. Maiąc wielobok foremny wpisany, ieżeli podzielimy łuki obięte iego bokami na dwie części równe, i poprowadzimy cienciwy połłuków, te ostatnie złożą nowy wielobok foremny z liczbą boków podwóyną: więc

---

wyraziwszy przez a, odległość punktu F, od ostatecznego końca A, przez x, będziemy mieli:

$$BF=AB-AF=a-x$$

gdy podług zagadnienia linije AB, AF, FB składać powinny proporcyą

$$AB : AF :: AF : BF$$

wktówięc kwadrat posłuży do wpisania wieloboków foremnych o 8, 16, 32 i t. d. bokach. Sześciobok, o 12, 24, 48 i t. d. bokach. Dziesięciobok, o 20, 40, 80 i t. d. Pietnastobok, o 30, 60, 120 i t.d. bokach.

ZA-

---

wktórey podstawiwszy litery zamiast linij któremi te ostatnie zgodziliśmy się oznaczać otrzymamy $a : x :: x : a - x$, zkąd $x^2 = a(a - x)$. Abyśmy z tego równania podług wiadomych prawideł Algiebry wyciągnęli wartość na ilość niewiadomą x, ułożmy go pod kształtem $x^2 + ax = a^2$. Dodawszy po obu stronach ilość $\frac{a^2}{4}$, i wyciągnąwszy pierwiastek kwadratowy będziemy mieli $x + \frac{a}{2} = \pm \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}$,

równanie to daie nam dwie różne wartości na ilość niewiadomą x, to iest:

$$x = -\frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}$$

$$x = -\frac{a}{2} - \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}$$

z których każda wyraża odległość punktu F, od ostatecznego końca A, linij daney AB. Chcąc z pierwszey wartości oznaczyć geometrycznie położenie punktu F, z punktu

B, wy-

ZADANIE VI.

Zagadnienie.

Będąc dany wielobok foremny ABCDEF, *wpisany w obwód koła, opisać na tymże samym obwodzie wielobok podobny danemu.*

W punkcie T (fig. 160.), na połowie łuku AB, poprowadźmy styczną GH, która będzie

---

B, wyprowadziwszy prostopadłą $BC = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} a$, złączmy AC. W tróykącie prostokątnym ABC, mamy $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}$. Z punktu C, iako ze srzodka promieniem BC, opisawszy obwód koła będziemy mieli

$$AD \quad AC - DC = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2},$$

linija AD będąc równą pierwszey wartości na x, z punktu A, iako srzodka promieniem AD, opisawszy łuk DF, otrzymamy $AF = x$.

Zastanowiwszy się nad drugą wartością na x, gdy $CE = \frac{a}{2}$, $AC = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}$, więc $-CE - AC = -AE$, azatém $x = -AE$. Gdy pierwsza wartość na x, dodatna przeniesioną została od A do F; drugą odjemna, przeniesioną bydź powinna od A do G; linija zaś GA, iest srzednią proporcyonalną między GB i AB (Zagad. IV. K. III. *Uwaga*).

dzie równoległą do AB (Zad. X. K. II.), uczyniwszy to samo na połowie każdego łuku BC, CD i.t.d.; te styczne po przecięciu się złożą wielobok podobny wielobokowi wpisanemu.

Tròykąty prostokatne OTH, OXH maiące przeciw-prostokatną OH wspòlną, i bok OT = OX są równe (Zad. XVIII. K. I.), więc kąt TOH = HOX, linija OH przechodząc przez trzy punkta O, B, H, przeyidzie przez połowę łuku TX; dla tey samey przyczyny punkt I, iest na przedłużeniu OC i t.d. Linije GH, HI, będąc równoległe do AB, BC, kąt GHI = ABC (Zad. XXVI. K. I.); kąt HIK = BCD i t.d. Nakoniec z przyczyny linij równoległych mamy

$$GH : AB :: OH : OB,$$
$$HI : BC :: OH : OB \text{ więc}$$
$$GH : AB :: HI : BC$$

Lecz AB = BC, azatém GH = HI. Dla tey samey przyczyny HI = IK, i t.d.

Więc wielobok opisany iest wielobokiem foremnym i podobnym do wieloboku wpisanego.

Wniosek. I. Wzaiemnie, maiąc wielobok opisany na obwodzie koła GHIK i t.d. możemy za iego pomocą wykreślić wielobok wpisany ABCD i t.d.; iakoż poprowadziwszy do wierzchołków G, H, I, K i t.d., linije OG, OH, OI, OK, i t.d., te przetną obwòd koła w punktach A, B, C, D i t.d., które połączywszy cięciwami AB, BC, CD i t.d. po-

 wsta-

wstanie wielobok wpisany. W tymże samym przypadku połączywszy punkta dotknięcia T, X, P, Q złożymy także wielobok wpisany podobny wielobokowi opisanemu.

Wniosek II. Więc na kole daném możemy opisać wszystkie wieloboki foremne które umiemy wpisać, i na odwrót.

ZADANIE VII.

Twierdzenie.

Pole wieloboku foremnego iest równe iego perymetrowi rozmnożonemu przez połowę promienia koła wpisanego. (fig. 160).

Niech będzie wielobok foremny GHIK i t. d. tróykąt GOH ma za miarę $GH \times \frac{1}{2} OT$, tróykąt HOI ma za miarę $HI \times \frac{1}{2} OX$: aże $OX = OT$, więc dwa tróykąty razem wzięte maią za miarę $(GH + HI) \times \frac{1}{2} OT$.

Postępuiąc tak co do innych tróykątów widzieć będziemy, że summa wszystkich tróykątów, albo cały wielobok, ma za miarę summę podstaw GH, HI, IK i t. d. czyli perymetr wieloboku, mnożony przez $\frac{1}{2} OT$, połowę promienia koła wpisanego.

Uwaga. Promień koła wpisanego OT, czyli prostopadła spuszczona ze srzodka na ieden z boków, nazywa się niekiedy *prostopadłą wieloboku.*

ZADA-

ZADANIE VIII.

Twierdzenie

Perymetra wieloboków foremnych tey samey liczby boków są iak promienie kół opisanych, i iak promienie kół wpisanych; ich zaś powierzchnie iak kwadraty z tych samych promieni. (fig. 161).

Niech AB, będzie bokiem iednego wieloboku, O iego srzodkiem, OA promieniem koła opisanego, OD promieniem koła wpisanego. Niech ab będzie bokiem drugiego wieloboku foremnego podobnego, o iego srzodkiem, oa i od promieniami kół opisanego i wpisanego. Perymetra tych dwóch wieloboków są między sobą iak boki AB i ab (Zad. XXVII. K. III.); lecz kąty A, a, każdy będąc połową kąta wieloboku foremnego są równe, dla tey samey przyczyny kat $B = b$, azatém tróykąty ABO, abo; ADO, ado, będąc podobne, mamy:

$$AB : ab :: AO : ao :: DO : do,$$

perymetra więc wieloboków foremnych, są iak promienie kół opisanych, i iak promienie kół wpisanych.

Gdy powierzchnie tych samych wieloboków są iak kwadraty z boków odpowiadaiących, azatém iak kwadraty z promieni kół opisanych, i iak kwadraty z promieni kół wpisanych.

ZADANIE IX.

Twierdzenie przybrane.

Każda linija krzywa, albo wielobok, o-

łaczaiące od iednego do drugiego końca liniją wypukłą AMB, *są dłuższe od linij otoczoney.* (fig. 162).

Przez liniją wypukłą, rozumiemy liniją krzywą albo wielobok, albo w części liniją krzywą w części wielobok, którą linija prosta we dwóch tylko punktach przeciąć może. Ponieważ gdyby linija AMB, szła wężykowato niebyłaby wypukłą, gdyż linija prosta przecięłaby ią więcey aniżeli w dwoch punktach. Łuki koła są wyraźnie wypukłemi, lecz zadanie rozciąga się do każdey byleby podług opisania wypukłey linij. Gdyby linija wypukła AMB niebyła naykrótszą od wszystkich ia otaczaiących, przypuśćmy niech linije otaczaiące będą krótsze albo równe otoczoney AMB. W tem przypuszczeniu linije otaczaiące przechodząc przez te same ostateczne końce A, B, linij otoczoney AMB, niemogą wzrastać nieskończenie; więc aby przypuszczenie miało mieysce, potrzeba także aby między samemi linijami otaczaiącemi, krótszemi lub rownemi otoczoney, była iedna naykrótsza od wszystkich innych; niechże tą liniją otaczaiącą naykrótszą będzie ACDEB; między dwiema linijami poprowadźmy iak tylko będziemy chcieli liniją prostą PQ, która tylko w iednym punkcie dotknie się AMB, linija prosta PQ, iest krótszą od połamaney PCDEQ, ieżeli za część PCDEQ podstawiemy liniją prostą PQ, będziemy mieli liniją otaczaiącą APQB, krótszą

od

od APDQB, z założenia między otaczaiącemi naykrótszą, więc przypuszczenie, aby linije otaczaiące były równe lub krótsze od otoczoney, mieysca mieć niemoże, azatém wszystkie linije otaczaiące są dłuższe od otoczoney.

Uwaga. Dowiedlibyśmy zupełnie tym samym sposobem, że linija wypukła i zamknięta AMB (fig. 163.), iest krótszą od wszystkich linij otaczaiących ią ze wszech stron; bądź, że linija otaczaiąca FHG, dotyka się linij wypukłey AMB, w iednym lub w wielu punktach, bądź ią otacza bez dotknięcia się.

ZADANIE X.

Twierdzenie przybrane.

Maiąc dane dwa obwody kół odsrzodkowe, możemy zawsze w obwód koła większy wpisać wielobok foremny, którego boki niedotkną się obwodu koła mnieyszego; na obwodzie zaś koła mnieyszego opisać wielobok foremny, którego boki niedotkną się obwodu koła większego; tak, że w iednym i drugim przypadku, wieloboki zamknięte będą między dwoma obwodami kół. (fig. 164).

Niech będą CA, CB, promienie dwóch obwodów kół odsrzodkowych. W punkcie A, poprowadziwszy styczną DE, przecinaiącą większy obwód koła w punktach D, E; i za pomocą zadań poprzedzaiących w większy obwód wòd koła wpisawszy wielobok foremny, podzielmy łuki obięte iego bokami na dwie częśći równe; nakoniec poprowadziwszy cieńciwy pòł-łuków, otrzymamy wielobok foremny z liczbą boków podwòyną. Ciągnąc podziały łuków na połowę, przyidziemy do łuku mnieyszego od DBE, którego niech będzie BM połową; przenieśmy tę połowę od B ku N, a MBN będzie łukiem żądanym, będącym na obwodzie koła którego CB promień. Cieńciwa MN, będąc mnieyszą od cieńciwy DKE, i razem do niey równoległą, iest od srzodka C odległeyszą; azatém wielobok foremny, którego MN iest bokiem, niedotknie się obwodu koła promienia CA.

Poprowadźmy CM, CN, spotykaiące styczną DE, w punktach P, Q; PQ będzie bokiem wieloboku opisanego na mnieyszym obwodzie koła, podobnym do wieloboku wpisanego w obwód koła większy. Bok PQ, niedotknie się obwodu koła większego, ponieważ CP < CM. Tym sposobem wpisany wielobok foremny o iakieykolwiek liczbie boków w większy obwód koła, i wielobok podobny opisany na mnieyszym obwodzie, zamknięte będą między dwoma obwodami tych kół.

Uwaga. Maiąc dwa wycinki odsrzodkowe FCG, ICH, możemy także w wycinek większy wpisać *część wieloboku foremnego*, lub częścią wieloboku foremnego podobnego wycinek mnieyszy opisać, tak, że ślady

dwóch

dwòch wieloboków będą obięte między dwoma łukami, dzieląc łuk F B G na 2, 4, 8, i t. d. części równych, dochodząc do części mnieyszey od D B E. Nazywamy *częścią wieloboku foremnego* figurę, zakończona szeregiem cięńciw równych wpisanych w łuk F G, z iednego końca w drugi. Część ta ma własności główne wieloboków foremnych, ma kąty równe i boki równe, iest razem wpisuiącą się i opisuiącą koło; iednak stanowi część wieloboku foremnego w tenczas, kiedy łuk obięty przez ieden z iey boków będzie częścią spełną obwodu koła.

ZADANIE XI.

Twierdzenie.

Obwody kół są iak promienie, a ich powierzchnie iak kwadraty z promieni. (fig. 165).

Dla skrócenia oznaczmy przez *ob.* C A, *ob.* O B, obwody kół promieni C A, O B, powiadam że

C A : O B :: *ob.* C A : *ob.* O B.

Gdyby ta proporcya niemiała mieysca, trzy pierwsze wyrazy zostaiąc te same, czwarty byłby większy albo mnieyszy; przypuśćmy mnieyszy, i niech będzie

C A : O B :: *ob.* C A : *ob.* O D.

W obwòd koła promienia O B, wpiszmy wielobok foremny E F G K I E, ktòrego boki niedotkną się obwodu koła promienia O D (Zad. X).

w ob-w obwód koła promienia CA, wpiszmy wielobok podobny MNPSIM; ponieważ te wieloboki są podobne, ich perymetra są iak promienie kół opisanych (Zad. VIII.), to iest:

MNPSIM : EFGKIE :: CA : OB,

lecz z założenia

CA : OB :: *ob.* CA : *ob.* OD,

więc mielibyśmy

MNPSIM : EFGKIE :: *ob.* CA : *ob* OD.

W tey proporcyi widziemy, że pierwszy poprzednik iest mnieyszy od poprzednika drugiego; więc aby ta proporcya była prawdziwa, potrzeba aby pierwszy następnik był mnieyszy od następnika drugiego, co gdy nie iest, więc proporcya iest fałszywą. I gdy została wyprowadzoną z dwòch poprzedzaiących, z których pierwsza została dowiedziona (Zad. VIII.), druga koniecznie fałszywą bydź musi; więc iest rzeczą niepodobną abyśmy mieli

CA : OB :: *ob.* CA : *ob.* OD,

to iest: ażeby promień był do drugiego promienia, iak obwòd koła pierwszego promienia, do obwodu koła *mnieyszego*, od obwodu koła opisanego promieniem drugim. Dowiedlibyśmy także, że bydź niemoże, ażeby promień był do drugiego promienia, iak obwód koła promienia pierwszego, do obwodu koła *większego*, od obwodu koła opisanego promieniem drugim; azatém obwody kół są iak promienie.

Przez rozumowanie i wykreślenie całkiem

po-

podobne okazalibyśmy, że powierzchnie kół są iak kwadraty z promieni; co też we wniosku zadania następuiącego obaczemy.

Wniosek I. Łuki podobne AB, DE, (fig. 166.) są iak promienie AC, DO; wycinki zaś podobne ACB, DOE, iak kwadraty z tych promieni. Ponieważ łuki są podobne kąt C = O (Opis. III. K. III); w proporcyi zaś *kąt* C : 4 *kątów prostych* : : *łuk* AB : *ob.* CA *kąt* O : 4 *kątów prostych* : : *łuk* DE : *ob.* OD gdy pierwsze dwa stosunki są równe, drugie dwa złożą proporcyą następuiącą

łuk AB : *łuku* DE :: *ob* CA : *ob.* OD

lecz mamy

CA : OD :: *ob* CA : *ob* OD

więc będziemy mieli

łuk AB : *łuku* DE :: CA : OD.

Powtóre wycinki ACB, DOE są iak całe koła, a te ostatnie iak kwadraty z promieni; więc *wycinek* ACB : *wycinka* DOE : : $\overline{CA}^2$ $\overline{OD}^2$.

Wniosek II. Chcąc mieć obwód koła równy summie albo różnicy dwóch obwodów kół, których CA i OB (fig. 165). są promieniami; na linij prostey CB (fig. 164). wziąwszy dwie części AC, AB równe promieniom danym, z punktu C, iako srzodka promieniem CB, wykreślemy obwód koła żądany, ponieważ

CA : OB :: *ob.* CA : *ob.* OB

więc (Arytm. §. 156).

CA : CA + OB : : *ob.* CA : *ob.* CA + *ob.* OB

ma-

mamy także $CA : CB :: ob. CA : ob. CB$, i gdy $CB = CA + OB$, więc w dwóch ostatnich proporcyach, trzy wyrazy w pierwszey będąc równe trzem wyrazom w drugiey, czwarty, będzie równy czwartemu, to iest:

$$ob.\ CB = ob.\ CA + ob.\ OB.$$

ZADANIE XII.

Twierdzenie.

Powierzchnia koła równa wieloczynowi z obwodu przez połowę promienia. (fig. 167).

Oznaczywszy powierzchnią koła promienia CA, przez *pow.* CA, będziemy mieli

$$pow.\ CA = \tfrac{1}{2} CA \times ob.\ CA.$$

Gdyby ilość $\frac{1}{2} CA \times ob. CA$, niebyła miarą koła promienia CA, więc byłaby miarą koła większego lub mnieyszego. Załóżmy że iest miarą koła większego, i niech

$$\tfrac{1}{2} CA \times ob.\ CA = pow.\ CB.$$

Na kole promienia CA, opiszmy wielobok foremny $DEFG$ i t. d. którego boki niedotkną się obwodu koła promienia CB (Zad. X.); powierzchnia tego wieloboku będzie równa iego perymetrowi mnożonemu przez $\frac{1}{2} AC$ (Zad. VII.), to iest:

$$\tfrac{1}{2} CA \times (perym.\ DEFG \text{ i t.d.}) = wielo.\ DEFG \text{ i t.d.}$$

porównywaiąc ten wypadek z poprzedzaiącym widziemy, że czynnik $\frac{1}{2} CA$ będąc wspólny, perymetr $DEFG$ i t. d. $> ob. CA$ więc

$$\tfrac{1}{2} CA \times (perym.\ DEFG \text{ i t.d.}) > \tfrac{1}{2} CA \times ob.\ CA;$$

aza-

azatém, gdy pierwsza strona drugiego równania, większa od strony pierwszey ròwnania pierwszego, strona druga drugiego, większą bydź powinna od strony drugiey pierwszego, to iest: wielobok DEFG i.t.d. $>$ *pow.* CB, co bydź niemoże; azatém ilość $\frac{1}{2}$ CA $\times$ *ob.* CA, niemoże bydź miarą koła większego od *pow.* CA, więc *pow.* CA $=$ $\frac{1}{2}$ CA $\times$ *ob.* CA.

Podobnym sposobem okazalibyśmy że ilość $\frac{1}{2}$ CB $\times$ *ob.* CB, niemoże bydź miarą koła mnieyszego, naprzykład *pow.* AC, i że *pow.* BC $=$ $\frac{1}{2}$CB $\times$ *ob.* CB. Azatém obwód koła mnożony przez połowę promienia, iest miarą powierzchni tego samego koła.

Wniosek I. Powierzchnia wycinka równa iego łukowi mnożonemu przez połowę promionia (fig. 168). Ponieważ
wycinek ACB : *pow.* CA : : *łuk* AMB : *ob.* CA, rozmnożywszy oba wyrazy drugiego stosunku przez $\frac{1}{2}$ CA, będziemy mieli *wyci.* ACB : *pow.* CA : : *łuk* AMB $\times$ $\frac{1}{2}$ CA : *ob.* CA $\times$ $\frac{1}{2}$ CA; gdy

pow. CA $=$ *ob.* CA $\times$ $\frac{1}{2}$ CA, więc

wycinek ACB $=$ *łukowi* AMB $\times$ $\frac{1}{2}$ CA.

Wniosek II. Nazwawszy obwód koła, którego srzednica iest iednością, przez $\overline{\pi}$; ponieważ obwody są iak promienie albo iak srzednice, więc będziemy mieli (fig. 165).

1 : $\overline{\pi}$: : 2 CA : *ob.* CA, z tąd

ob. CA $=$ 2 $\overline{\pi}$ $\times$ CA.

Rozmnożywszy obie strony przez $\frac{1}{2}$ CA, otrzymamy $\frac{1}{2}$ CA $\times$ *ob.* CA $=$ $\overline{\pi}$ $\times$ $\overline{CA}^2$, czyli

po-

powierznia $CA = \pi \times \overline{CA}^2$. To iest: *powierznia koła iest równa wieloczynowi z kwadratu promienia, przez liczbę stateczną wyrażaiącą stosunek obwodu koła do srzednicy.*

Gdy *pow.* $OB = \pi \times \overline{OB}^2$, więc $\pi \times \overline{CA}^2 : \pi \times \overline{OB}^2 :: \overline{CA}^2 : \overline{OB}^2$; azatém *powierzchnie kół są między sobą iak kwadraty z promieni,* co się też zgadza z twierdzeniem poprzedzaiącém.

Uwaga. Powiedzieliśmy iuż (Zagad. X. K. III.), że zagadnienie o kwadraturze koła, zależy na znalezieniu kwadratu równo-wartuiącego, maiąc daną srzednicę albo promień. Powierzchnia koła równo-wartuie prostokątowi z obwodu przez połowę promienia, ten prostokąt zamienić możemy na kwadrat (Zagad. VI. K. III.): więc zagadnienie o kwadraturze koła przyprowadza się do znalezienia stosunku obwodu koła do promienia albo srzednicy. Stosunek ten oznaczyć się tylko może przez przybliżenie; *Archymedes* znalazł $3\frac{1}{7}$, *Métyus* $\frac{355}{113}$. Nakoniec wartość przybliżona na π, rozwinięta do 140 decymalnych, z których tu 16 wypisuiemy

3, 1415926535897932 i t. d.

iuż ledwo niedochodzi prawdy.

W zagadnieniach następuiących podamy dwa bardzo proste sposoby otrzymania tych przybliżeń.

ZADA-

ZADANIE XIII.

Zagadnienie.

Maiąc dane powierzchnie, wieloboku foremnego wpisanego, i wieloboku podobnego opisanego, wynaleść powierzchnie wieloboków foremnych wpisanych i opisanych z podwóyną liczbą boków. (fig. 169).

Niech będzie AB, bok wieloboku wpisanego, EF rownoległy do AB, bok wieloboku podobnego opisanego, C srzodek koła; ieżeli poprowadzimy cięciwę AM, i styczne AP, BQ, cięciwa AM, będzie bokiem wieloboku wpisanego z podwóyną liczbą boków, zaś PQ, dwa razy większy od PM, bokiem wieloboku podobnego opisanego (Zad. VI). Wyraźmy przez A, powierzchnią wieloboku wpisanego którego AB iest bokiem, przez B, powierznią wieloboku podobnego opisanego; przez A' powierzchnią wieloboku którego bokiem iest AM, zaś przez B' powierzchnią wieloboku podobnego opisanego; maiąc A i B, znaydziemy A' i B', uważaiąc

1*mo* Tróykąty ACD, ACM, maiące ten sam wierzchołek A, są iak podstawy (Zad. VI. K. III. *Wniosek*) azatém

$$ACD : ACM :: CD : CM;$$

z tróykątów ACM, ECM maiących ten sam wierzchołek M, mamy

$$ACM : ECM :: CA : CE,$$

ponieważ linija AD iest równoległą do EM

więc

więc (Zad. XV. K. III). $CD : CM :: CA : CE$, azatém $ACD : ACM :: ACM : ECM$.

Oznaczywszy przez N, liczbę boków wielobów wpisanych i opisanych których powierzchnie są wyrażone przez A i przez B, naówczas 2 N wyrażać będzie liczbę boków wieloboków z podwóyną liczbą boków. Tróykąt ACD, iest zamknięty w powierzchni A, liczbę razy oznaczoną przez 2 N, więc

$ACD = \frac{A}{2N}$, $ACM = \frac{A'}{2N}$, $ECM = \frac{B}{2N}$, $\frac{B'}{2N} =$

PCQ albo 2 PCM. Podstawiwszy te wyrażenia w proporcyi poprzedzaiącey otrzymamy

$$\frac{A}{2N} : \frac{A'}{2N} :: \frac{A'}{2N} : \frac{B}{2N},$$

czyli $A : A' :: A' : B$, ztąd $A'^2 = A \times B$, azatém

$$A' = \sqrt{A \times B}.$$

2*do* Tróykąty CPA, CPE, maiące tę samę wysokość, są iak podstawy (Zad. VI. K. III. *Wniosek.*) azatém $CPA : CPE :: CA : CE$, mamy także $ACD : ACM :: CD : CM$, zaś $CA : CE :: CD : CM$, azatém $CPA : CPE :: ACD : ACM$, więc (*Aryt.* §. 156.)

$CPA + CPE : CPA :: ACD + ACM : ACD$; gdy tróykat $CPA = CPM$, azatém $CPA + CPE = CEM$, więc

$$CEM : CPM :: ACD + ACM : ACD,$$

zamiast tróykątów CEM, CPM, ACD, ACM, położywszy ich wartości otrzymamy

$$\frac{B}{2N} : \frac{B'}{4N} :: \frac{A}{2N} + \frac{A'}{2N} : \frac{A}{2N},$$

rozmnożywszy wyrazy pierwszego stosunku przez 4N, drugiego przez 2N, będziemy mieli $2B : B' :: A + A' : A$, z tąd

$$B' = \frac{2A \times B.}{A + A'}$$

ZADANIE XIV.

Zagadnienie.

Znaleść stosunek zbliżony obwodu koła do srzednicy.

Niech będzie promień koła $= 1$, bok kwadratu wpisanego iest $\sqrt{2}$ (Zad. III.), bok kwadratu opisanego równy srzednicy $= 2$; więc powierzchnia kwadratu wpisanego $= 2$, kwadratu opisanego $= 4$. Uczyniwszy $A = 2$, $B = 4$, znaydziemy za pomocą zadania poprzedzaiącego ośmiobok wpisany,

$$A' = \sqrt{8} = 2,8284271$$

i ośmiobok opisany

$$B' = \frac{16}{2 + \sqrt{8}} = 3,3137085.$$

Poznawszy ośmioboki wpisane i opisane za ich pomocą znaydziemy 16stoboki, uczyniwszy $A = 2,8284271$, $B = 3,3137085$. 16stoboki posłużą do znalezienia 32 boków i t. d. aż nim różnica między wielobokami wpisanym i opisanym niezniknie przynaymniey w decymalney na którey zatrzymamy się, iak to w następuiącym rachunku widziemy.

Li–

Liczba boków.	*Wielo. wpisany.*	*Wielo. opisany*
4	2,0000000	4,0000000
8	2,8284271	3,3137085
16	3,0614674	3,1825979
32	3,1214451	3,1517249
64	3,1365485	3,1441184
128	3,1403311	3,1422236
256	3,1412772	3,1417504
512	3,1415138	3,1416321
1024	3,1415729	3,1416025
2048	3,1415877	3,1415951
4096	3,1415914	3,1415933
8192	3,1415923	3,1415928
16384	3,1415925	3,1415927
32768	3,1415926	3,1415926.

Ponieważ powierzchnia koła równa *pół-obwodowi mnożonemu przez promień*, promień będąc iednością *półobwód* = 3,1415926; srzednica będąc iednością, *obwód* = 3,1415926, więc stosunek obwodu koła do srzednicy oznaczony przez π = 3,1415926.

ZADANIE XV.

Twierdzenie przybrane.

Tróykąt ACB, *iest równo-wartuiący tróykątowi* DCF *maiącemu ten sam kąt* C, *i, którego bok* CF *równy* CD, *iest srzednio-proporcyonalny między* CA *i* CB. *Nadto, ieżeli kąt* CAB, *iest kątem prostym, prostopadła* CE, *spuszczona na podstawę tróy-*

kąta

kąta równoramiennego, będzie srzednią proporcyonalną między bokiem CA, *i połową summy z boków* CA, CB. (fig. 170).

1*mo* Z przyczyny kąta wspólnego C, mamy ACB : DCF :: AC × CB : DC × CF albo : $\overline{DC}^2$ (Zad. XXIV. K. III.); więc te dwa tróykąty będą równo-wartuiące ieżeli $\overline{DC}^2$ = AC × CB, albo ieżeli DC, iest srzednią proporcyonalną między AC i CB.

2*do* Prostopadła CGE, przecinaiąc kąt ACB, na dwie części równe mamy (Zad. XVII. K. III). AG : GB :: AC : CB, zkąd

AG : AG + GB :: AC : AC + CB
AG : AB :: AC : AC + CB

lecz AG : AB :: ACG : ACB albo 2 DCE; nadto ieżeli kąt A, iest kątem prostym, tróykąty prostokątne CAG, CED będąc podobne, dadzą proporcyą:

$$ACG : CDE :: \overline{AC}^2 : \overline{CE}^2, \text{ więc}$$
$$\overline{AC}^2 : 2\overline{CE}^2 :: AC : AC + CB.$$

Rozmnożywszy drugi stosunek przez AC poprzedniki staną się równe i będziemy mieli

$$2\overline{CE}^2 = AC \times (AC + CB) \text{ albo}$$
$$\overline{CE}^2 = AC \times \frac{(AC + CB)}{2};$$

Więc 2*do* ieżeli kąt A iest kątem prostym, prostopadła CE będzie srzednio-proporcyonalna między bokiem AC, i połową summy boków AC, CB.

ZADANIE XVI.

Zagadnienie.

Znaleść obwód koła różniący się tak mało od wieloboku foremnego danego, iak będziemy chcieli. (fig. 171).

Niech będzie kwadrat MBPN; ze srzodka C, spuściwszy prostopadłą CA na bok MB, złączmy CB. Obwód koła opisany promieniem CA, będzie obwodem wpisanym w kwadrat; obwód zaś koła opisany promieniem CB, będzie obwodem koła opisanym na tym samym kwadracie: pierwszy obwód koła będzie mnieyszy od kwadratu, drugi zaś większy, lecz idzie o ściśnienie tych granic.

Weźmy linije CD, CE, z których każda iest równą srzedniey proporcyonalney między CA, i CB, i złączmy DE. Tróykąt równoramienny ECD, iest równo-wartuiacy tróykątowi BCA (Zad. XV.); uczyńmy to samo z każdym z ośmiu tróykątów z których kwadrat składa się, a tym sposobem złożymy ośmio-bok foremny równo-wartuiący kwadratowi MBPN. Obwód koła opisany promieniem CF srzednio-proporcyonalnym między CA i $\frac{CA + CB}{2}$ będzie w ośmiobok wpisany, obwodem zaś koła wykreślonego promieniem CD, ten sam ośmiobok będzie opisany. Więc pierwszy obwód koła będzie mnieyszy od kwadratu danego, drugi zaś obwód koła

ła

ła będzie większy od tego samego kwadratu. Jeżeli tym samym sposobem zamienimy tròykąt prostokątny CFD, na tróykąt ròwno-ramienny równo-wartuiący, złożymy wielobok foremny od 16 boków, równo-wartuiący kwadratowi danemu. Obwód koła wpisany w ten wielobok będzie mnieyszy od kwadratu danego, będzie zaś większy od tego samego kwadratu obwód koła opisany na tym wieloboku.

Tym sposobem daley postępuiąc, stosunek między promieniem obwodu koła wpisanego, i promieniem obwodu koła opisanego, różnić się będzie tak mało iak sami będziemy chcieli. Naówczas ieden i drugi obwód koła mogą bydź uważane iako równo-wartuiące kwadratowi danemu.

Uwaga. Niech będzie a promień obwodu koła wpisanego w wielobok znaleziony, b, promień obwodu koła opisuiącego tenże sam wielobok, niech będą a', b' promienie podobne wieloboku następuiącego maiącego liczbę boków podwóyną. Podług tego cośmy dowiedli, b' iest srzednio-proporcyonalnym między a i b, zaś a' iest srzednio-proporcyonalnym między a i $\frac{a+b}{2}$; także będziemy mieli

$$b' = \sqrt{a \times b}, \quad a' = \sqrt{a \times \frac{a+b}{2}};$$

z kąd znaiąc promienie a, i b wieloboku znalezionego, łatwo poznamy promienie a' i b'

wieloboku następuiącego: a postępuiąc tak ciągle ròżnica między dwoma promieniami stanie się nieznaczną; naòwczas ieden albo drugi z tych promieni będzie promieniem koła ròwnowartuiącego kwadratowi albo wielobokowi danemu.

Sposòb ten z łatwością wykonywaiący się na linijach, szukaiąc srzednich proporcyonalnych następnych między linijami znanemi; łatwiey się ieszcze wykonywa na liczbach, i iest iednym z naywygodnieyszych sposobòw ktòrego Geometrya początkowa dostarczyć może do prętkiego wynalezienia stosunku zbliżonego obwodu koła do srzednicy. Niech będzie bok kwadratu $=2$, pierwszy promień wpisany CA będzie 1, pierwszy promień opisany CB będzie $\sqrt{2}$ albo 1,4142136. Uczyniwszy więc $a=1$, $b=1{,}4142136$, znaydziemy $b'=1{,}1892071$, $a'=1{,}0986841$. Te liczby posłużą do rachowania liczb następnych podług prawa ciągłości.

Promie. kòł opisanych	*Promie. kòł wpisanych*
1,4142136	1,0000000
1,1892071	1,0986841
1,1430500	1,1210863
1,1320149	1,1265639
1,1292862	1,1279257
1,1286063	1,1282657.

Gdy iuż pierwsza połowa cyfr z obu stron iest ta sama, zamiast srzednich geometrycznych

mo-

możemy użyć srzednich arytmetycznych różniących się tylko od siebie w ostatnich liczbach decymalnych, tym sposobem skróciwszy znacznie działanie wypadki będą następuiące:

1,1284360	1,1283508
1,1283934	1,1283721
1,1283827	1,1283774
1,1283801	1,1283787
1,1283794	1,1283791
1,1283792	1,1283792.

Azatém 1,1283792 iest promieniem przybliżonym obwodu koła równego wpowierzchni kwadratowi, którego bok iest 2. Zkąd łatwo wynaleść stosunek obwodu koła do srzednicy: ponieważ dowiedliśmy wyżey, że powierzchnia koła iest równa kwadratowi z promienia tego koła mnożonemu przez liczbę π; więc ieżeli podzielimy powierzchnią 4, przez kwadrat z 1,1283792, wykonawszy rachunek będziemy mieli na wartość π iak wyżey 3,1415926 i t. d.

DODA-

DODATEK do Księgi IV.

Opisania.

I. Nazywamy *maximum*, ilość naywiększą między wszystkiemi ilościami tego samego gatunku; *minimum* zaś ilość naymnieyszą.

Srzednica, iest *maximum* między wszystkiemi linijami łączącemi dwa punkta obwodu koła; prostopadła zaś iest *minimum*, między wszystkiemi linijami prostemi prowadzonemi z iednego punktu danego na liniją prostą daną.

II. Figurami *Isoperymetrycznemi* nazywać będziemy figury maiące *perymetra* równe.

ZADANIE PIERWSZE.

Twierdzenie.

Między wszystkiemi tróykątami tey samey podstawy, i tego samego perymetru, tróykąt maximum *iest ten, w którym dwa boki są równe.* (fig. 172).

Niech będzie $AC = CB$, $AM + MB = AC + CB$; powiadam, że tróykąt równoramienny ACB, iest większy od tróykąta AMB, maiącego tę samę podstawę, i ten sam perymetr. Z punktu C iako srzodka, promieniem

CA

CA$=$CB, opisawszy obwód koła przecinający bok przedłużony AC w punkcie D, złączmy BD; kąt DBA wpisany wpół-obwód koła będzie kątem prostym. Przedłużywszy prostopadłą DB do N, i uczyniwszy MN$=$MB, złączmy AN. Z punktów M i C, spuśćmy na DN prostopadłe MP, CG; CB$=$CD, MN$=$MB, AC$+$CB$=$AD, AM$+$MB$=$AM$+$MN; gdy AC$+$CB$=$AM$+$MB, więc AD$=$AM$+$MN; azatém AD$>$AN: linija pochyła AD większa od pochyłey AN, iest od prostopadłey AB odległeyszą, więc DB$>$BN; azatém linija BG, połowa BD (Zad. XII. K. I.), będzie większą od BP połowy BN. Lecz tróykąty ABC, AMB, maiące tę samę podstawę, są iak wysokości BG, BP; gdy BG$>$BP, więc tróykąt równoramienny ACB, iest większy od tróykąta nierównoramiennego AMB, tey samey podstawy, i tego samego perymetru.

ZADANIE II.

Twierdzenie.

Między wszystkiemi wielobobami Isoperymetrycznemi, i tey samey liczby boków, wielobok maiący boki równe iest maximum.

Niech będzie ABCDEF (fig. 173). wielobok *maximum*; ieżeli bok BC, nie iest równy CD, wynieśmy na podstawie BD tróykąt równo-ramienny BOD, który niech bę-

dzie

dzie isoperymetrycznym z tróykątem BCD; tróykąt BOD będąc większy od tróykąta BCD (Zad. I.), wielobok ABODEF będzie większy od wieloboku ABCDEF; więc ten ostatni niebyłby *maximum* między wszystkiemi wielobokami maiącemi ten sam perymetr i tę samę liczbę boków, co iest przeciwko założeniu. Azatém BC=CD, CD=DE, DE =EF i t. d.; więc wszystkie boki wieloboku *maximum* są między sobą równe.

ZADANIE III.

Twierdzenie.

Ze wszystkich tróykątów powstaiących z dwóch boków danych, robiąc między niemi kąt od upodobaniu, maximum *iest ten, w którym dwa boki dane czynią kąt prosty.*

Niech będą dwa tróykąty BAC, BAD (fig. 174.), maiące bok AB wspólny, i bok AC=AD; ieżeli kąt BAC iest prosty, tróykąt BAC będzie większy od tróykąta BAD, w którym kąt A iest ostry lub rozwarty. Podstawa BA będąc wspólną, dwa tróykąty BAC, BAD są iak wysokości AC, ED; aże prostopadła ED, iest krótszą od pochyłey AD, albo iey równey AC, więc tróykąt BAD, iest mnieyszy od tróykąta BAC.

ZADA-

ZADANIE IV.

Twierdzenie.

Ze wszystkich wieloboków złożonych z boków danych i iednego boku od upodobania, wielobok maximum *będzie ten, którego wszystkie kąty są wpisane w pół-obwód koła, w którym bok niewiadomy iest srzednicą.*

Niech będzie ABCDEF (fig. 175). nay-większy z wieloboków *złożony* z boków danych AB, BC, CD, DE, EF, i AF od upodobania; poprowadźmy przekątne AD, DF. Gdyby kąt ADF niebył prostym, zachowuiąc części ABCD, DEF iakiemi są, powiększaiąc tróykąt ADF, powiększylibyśmy cały wielobok, czyniąc kąt ADF prostym podług zadania poprzedzaiącego; lecz ten wielobok powiększonym bydź niemoże z przyczyny, że podług przypuszczenia już doszedł *maximum*; więc kąt ADF już iest kątem prostym. Co iest to samo z kątami ABF, ACF, AEF; więc wszystkie kąty A, B, C, D, E, F, wieloboku *maximum* są wpisane wpółobwód koła, w którem bok nieoznaczony AF iest srzednicą.

Uwaga. Na okazanie ile iest sposobów składania wieloboku z boków danych, i iednego od upodobania będącego srzednicą półobwodu koła, w którém inne boki są wpisane uważaymy, że ieżeli ta sama cienciwa AB (fig. 76.), obeymuie łuki wykreślone różnemi

pro-

promieniami AC, AD, kąt we srzodku oparty na tey cieńciwie będzie mnieyszy w kole którego promień iest większy. Jakoż kąt ADO $=$ ACD $+$ CAD (Zad. XXVII. K. I.), azatém ACD $<$ ADO, podwoiwszy obie strony otrzymamy ACB $<$ ADB.

ZADANIE V.

Twierdzenie.

Jeden tylko iest sposób składania wieloboku ABCDEF *z boków danych, i iednego od upodobania będącego srzednicą poł-obwodu koła, w którém inne boki są wpisane.*

Przypuśćmy (fig. 175). obwód koła zadosyć czyniący pytaniu; wziąwszy obwód koła większy, cieńciwy AB, BC, CD i t. d. odpowiadaiąc we srzodku obwodu koła kątom mnieyszym; tych ostatnich summa będąc mnieyszą od summy dwóch kątów prostych, ostateczne końce boków danych, niedosięgną ostatecznych końców srzednicy: przeydą ie, gdy obwód koła weźmiemy mnieyszy; więc wielobok o który idzie, w ieden tylko obwód koła wpisanym bydź może.

Uwaga. Odmieniwszy od upodobania porządek boków AB, BC, CD i t. d. srzednica i powierzchnia wieloboku zostaną te same; iakikolwiek bowiem będzie porządek łuków AB, BC i t. d. byleby ich summa składała pół-obwód koła, wielobok będzie zawsze tey

sa-

samey powierzchni, gdyż będzie równy półobwodowi koła mniey odcinki AB, BC i t.d. których summa zawsze iest ta sama.

ZADANIE VI.

Twierdzenie.

Ze wszystkich wieloboków złożonych z boków danych, maximum *iest ten, którego można wpisać w obwód koła.* (fig. 177).

Niech będzie ABCDEFG wielobok wpisany, zaś *aocdefg* wielobok niewpisany złożony z boków równych, tak, że AB$=$*ao*, BC$=$*oc* i t. d. powiadam, że wielobok wpisany iest większy od wieloboku niewpisanego.

Poprowadziwszy srzednicę EM, złączmy AM, MB; na *ao*$=$AB, wykreśliwszy tróykąt *amo*$=$AMB, złączmy *em*. Podług zadania IV, wielobok EFGAM, iest większy od wieloboku *efgam*, przynaymniey że ten ostatni niemoże bydź podobnie wpisany wpółobwód koła, w którym bok *em* byłby srzednicą, gdyż w tym przypadku (Zad. V). dwa wieloboki byłyby równe. Dla tey samey przyczyny wielobok EDCBM, iest większy od wieloboku *edcom;* więc cały wielobok wpisany EFGAMBCDE, iest większy od całego wieloboku niewpisanego *efgamocde*. Odeymuiąc z obu stron tróykąty równe AMB, *amo*, pozostanie wielobok ABCDEFG, większy od wieloboku niewpisanego *aocdefg*.

Uwa-

Uwaga. Dowiedlibyśmy tu iak w zadaniu V, że ieden tylko obwód koła mieć można, azatém że ieden tylko iest wielobok *maximum* zadosyć czyniący pytaniu; a ten wielobok byłby ieszcze tey samey powierzchni zmieniwszy iakimkolwiek sposobem porządek iego boków.

ZADANIE VII.

Twierdzenie.

Wielobok foremny iest maximum, *między wszystkiemi wielobokami isoperymetrycznemi, i tey samey liczby boków.*

Ponieważ podług twierdzenia II. wielobok *maximum* ma wszystkie boki równe, zaś podług twierdzenia poprzedzaiącego daie się wpisać w obwód koła, więc ten wielobok iest wielobokiem foremnym.

ZADANIE VIII.

Twierdzenie przybrane.

W dwóch obwodach kół nierównych, dwa kąty w srzodku są iak łuki ie obeymuiące dzielone przez promienie. (fig. 178).

To iest: kąt $C : O, :: \frac{AB}{AC} : \frac{DE}{DO}$.

Promieniem $OF = AC$ opisawszy łuk FG obięty ramionami przedłużonemi OD, OE, będziemy mieli (Zad. XVII. K. II).

$$C : O :: AB : FG$$

albo $$C : O :: \frac{AB}{AC} : \frac{FG}{FO};$$

z przyczyny zaś łuków podobnych FG, DE (Zad. XI. K. IV).

$$FG : DE :: FO : DO;$$

więc stosunek $\frac{FG}{FO} = \frac{DE}{DO}$

azatém $C : O :: \frac{AB}{AC} : \frac{DE}{DO}.$

ZADANIE IX.

Twierdzenie.

Z dwóch wieloboków foremnych i isoperymetrycznych, wielobok maiący większą liczbę boków, iest wielobokiem naywiększym. (fig. 179).

Niech będzie połowa boku iednego wieloboku DE, O, iego srzodek, OE prostopadła; AB połowa drugiego boku, C srzodek, CB prostopadła. Srzodki O i C, leżąc w odległości iakieykolwiek OC, prostopadłe OE, CB niech idą w kierunku linij OC: więc DOE, ACB będą półkątami we srzodku wieloboków, i gdy te kąty nie są równe, linije OD, CA, przedłużone zbiegną się w punkcie F; z punktu F spuściwszy na przedłużoną liniją OC prostopadłą FG; z punktów zaś O i C iako ze srzodków opisawszy łuki GI, GH kończące się na bokach OF, CF. Podług twierdzenia poprzedzaiącego mamy

$$O : C :: \frac{GI}{OG} : \frac{GH}{CG};$$

lecz DE iest do perymetru pierwszego wieloboku, iak kąt O do 4 kątów prostych; AB iest do

pery-

perymetru drugiego wieloboku, iak kąt C do 4 kątów prostych; gdy perymetra wieloboków są równe, więc

$$DE : AB :: O : C \text{ albo}$$
$$DE : AB :: \frac{GI}{OG} : \frac{GH}{CG}.$$

Mnożąc poprzedniki przez OG, następniki przez CG, będziemy mieli

$$DE \times OG : AB \times CG :: GI : GH;$$

lecz tróykąty podobne DOE, FOG daią

$$OE : OG :: DE : FG$$

z kąd $DE \times OG = OE \times FG$,

mamy także $AB \times CG = CB \times FG$, azatém

$$OE \times FG : CB \times FG :: GI : GH,$$

albo $OE : CB :: GI : GH.$

Więc ieżeli pokażemy, że łuk GI iest większy od łuku GH, prostopadła wieloboku OE będzie większą od prostopadłey CB.

Wykreślmy z drugiey strony linij CF figurę CKx równą figurze CGx tak, że $CK = CG$, kąt $HCK = HCG$, łuk $Kx = xG$; linija krzywa KxG otaczaiąc łuk KHG będzie większą od łuku KHG (Zad. IX. K. IV). Więc xG połowa linij krzywey KxG iest większą od HG połowy łuku KHG, więc łuk GI iest większy od łuku GH. Azatém prostopadła OE iest większa od prostopadłey CB: dwa zaś wieloboki maiące ten sam perymetr są między sobą iak ich prostopadłe (Zad. VII. K. IV.); więc wielobok maiący za połowę boku DE iest większy od wieloboku maiącego za połowę boku AB, pierwszy wielobok ma większą liczbę boków, gdyż iego kąt

we

we srzodku iest mnieyszy; więc z dwóch wieloboków foremnych i isoperymetrycznych, wielobok maiący większą liczbę boków iest naywiększy.

ZADANIE X.

Twierdzenie

Koło iest większe od każdego wieloboku isoperymetrycznego. (fig. 180).

Jużeśmy dowiedli, że ze wszystkich wieloboków isoperymetrycznych, i tey samey liczby boków, wielobok foremny iest naywiększy; więc idzie tylko o porównanie koła z wielobokiem foremnym iakimkolwiek isoperymetrycznym. Niech będzie AI połowa boku tego wieloboku, C iego srzodek. Niech będzie w kole isoperymetrycznem kąt $DOE = ACI$, łuk DE równy AI. Wielobok Q iest do koła R, iak tróykąt ACI do wycinka DOE; więc będziemy mieli

$$Q : R :: \tfrac{1}{2} AI \times CI : \tfrac{1}{2} DE \times OE :: CI : OE.$$

Poprowadziwszy w punkcie E, styczną EG przecinaiącą OD w punkcie G; tróykąty podobne ACI, GOE daią proporcyą

$$CI : OE :: AI \text{ albo } DE : GE, \text{ więc}$$

$$Q : R :: DE : GE \text{ albo} : DE \times \tfrac{1}{2} OE : GE \times \tfrac{1}{2} OE$$

gdy $DE \times \frac{1}{2} OE$, iest miarą wycinka DOE, zaś $GE \times \frac{1}{2} OE$, iest miarą tróykąta GOE, i gdy wycinek DOE iest mnieyszy od tróykąta GOE; więc $Q < R$, azatem koło iest większe od każdego wieloboku isoperymetrycznego.

Koniec Części Pierwszey.

O m y ł k i.

Kar. 9 *W.* 23 z przycięcia się *p.* z przecięcia się
— 19 — 23 B A D *p.* B D A
— 22 — 2 założoniu *p.* założeniu
— 50 — 8 B E *p.* D E
— 50 — 14 cieńciny *p.* cieńciwy
— 50 — 27 F G *p.* E G
— 52 — 25 *go p. do*
— 56 — 21 cieńciwey *p.* cieńciwy
— 64 często zamienić ń na n
— 89 — 18 liniją *p.* linijom
— 95 — 8 A C B D *p.* A B C D
— 101 — 19 weźmiymy *p.* weźmy
— 111 — 7 W tróykąty *p.* Tróykąty
— 112 w całém Zad. XVI. E zamienić na F

w F i g u r a c h

(fig. 37. *bis*) na mieyscu D położyć C, na mieyscu zaś C, literę D.
(fig. 64. i 65.) zamiast A F *p.* A E
(fig. 128.) zamiast F *p.* E
(fig. 143.) złączyć liniją punkta A i D
(fig. 174.) zamiast F *p.* E
(fig. 178.) zamiast O G *p.* O E G.

REJESTR RZECZY

w Części Pierwszey zawartych.

KSIĘGA PIERWSZA.

Karta

Opisania - - - - - - 1
Wykład wyrazów i znaków - - 5
Prawdy niepotrzebuiące dowodzenia - 6
ZAD. I. Wszystkie kąty proste są równe między sobą fig. 16. - - - 7
ZAD. II. Każda linija prosta przecinaiąca drugą liniją prostą, składa z tą ostatnią dwa kąty przyległe, których summa iest równa dwóm kątom prostym. fig. 17. - 8
ZAD. III. Dwie linije proste maiące dwa punkta wspólne, zbiegną się iedna z drugą w całey swoiey rozciągłości, i złożą iednę tylko i tę samę liniją prostą. fig. 20. 10
ZAD. IV. Jeżeli dwa kąty przyległe razem wzięte składaią dwa kąty proste, dwa ramiona zewnętrzne tych dwóch kątów są w linij prostey. fig. 21. - - 11
ZAD. V. Kąty w wierzchołkach przeciwległe są sobie równe. fig. 22. - - 12
ZAD. VI. Dwa tróykąty są równe, ieżeli dwa boki w iednym tróykącie, równe dwóm bokom w drugim tróykącie obeymuią między sobą kąt równy. fig. 24. - 13
ZAD. VII. W dwóch tróykątach, ieżeli dwa kąty w iednym tróykącie, są równe dwóm kątom w drugim tróykącie, i bok

przylęgły tym dwóm kątom w iednym tróykącie, iest równy bokowi przyległemu dwóm kątom w drugim tróykącie, te dwa tróykąty przystaną do siebie. fig. 24. - - - - - 13

ZAD. VIII. W każdym tróykącie, ieden bok którykolwiek iest mnieyszy od summy dwóch drugich boków, a większy od ich różnicy. fig. 24. - - - 14

ZAD. IX. Jeżeli z punktu wziętego wewnątrz tróykąta, poprowadzimy dwie linije do ostatecznych końców iednego z boków tego tróykąta, summa tych dwóch linij wewnętrznąch będzie mnieysza od summy dwóch drugich boków tróykąta te dwie linije obeymuiących. fig. 25. - 15

ZAD. X. Jeżeli dwa boki w iednym tróykącie, są równe dwóm bokom w tróykącie drugim, i ieżeli kąt obięty bokami tróykąta pierwszego iest większy od kąta obiętego bokami tróykąta drugiego, bok trzeci tróykąta pierwszego będzie większy od boku trzeciego trókąta drugiego. fig. 26. 27. 28. - - - 16

ZAD. XI. Jeżeli trzy boki w iednym tróykącie, są równe trzem bokom w drugim tróykącie, te dwa tróykąty będą równe między sobą. fig. 24. - - - 18

ZAD. XII. W tróykącie równo-ramiennym, kąty przeciwległe bokom równym są równe. fig. 29. - - - - 19

ZAD. XIII. Jeżeli w tróykącie dwa kąty są

Karta

równe, boki przeciwległe tym kątom będą równe, i tróykąt będzie równo-ramienny. fig. 30. - - - - 20

ZAD. XIV. W tróykącie z dwóch boków naywiększy, iest przeciwległy kątowi naywiększemu; z dwóch zaś kątów naywiększy, iest przeciwległy bokowi naywiększemu. fig. 31. - - - 21

ZAD. XV. Z punktu danego zewnątrz linij prostey, iednę tylko prostopadłę na tę liniją spuścić można. fig. 32. - - 22

ZAD. XVI. Jeżeli przez punkt dany zewnątrz linij prostey, spuścimy prostopadłą na tę liniją, i poprowadzimy linije pochyłe do różnych punktów linij prostey daney: 1*mo* Prostopadła będzie liniją naykrótszą 2*do* Dwie linije pochyłe w równey odległości z obu stron prostopadłey będą sobie równe. 3*tio* Z dwóch linij pochyłych wziętych z którey kolwiek strony prostopadłey, naydłuższa, naywięcey od prostopadłey będzie oddaloną. fig. 33. - - - - 23

ZAD. XVII. Jeżeli przez punkt wzięty na srzodku linij prostey, podzieloney na dwie części równe, wyprowadzimy do tey linij prostey prostopadłą; 1*mo* każdy punkt tey prostopadłey będzie w równey odległości od dwóch ostatecznych końców linij prostey: 2*do* każdy zaś punkt niebędący na prostopadłey, będzie w nierówney odległości od tych-

Karta

że ostatecznych końców linij. fig. 34. 24

ZAD. XVIII. Jeżeli we dwóch tróykątach prostokątnych, przeciwprostokątna i bok w iednym tróykącie, są równe przeciwprostokątney i bokowi odpowiadaiącemu w drugim tróykącie, te dwa tróykąty prostokątne będą równe między sobą. fig. 35. - - - - - 25

ZAD. XIX. Jeżeli dwie linije proste, są prostopadłe do trzeciey linij prostey, te dwie linije proste będą równolegle między sobą, to iest: iż przedłużone do iakieykolwiek odległości, nigdy się z sobą nieprzetną. (Opis. 12). fig. 36. - - 27

ZAD. XX. Jeżeli z dwóch linij prostych, iedna iest prostopadłą do trzeciey linij prostey daney, druga zaś z tą trzecią liniją daną składa kąt ostry, te dwie linije proste dostatecznie przedłużone przetną się. fig. 36. - - - 28

ZAD. XXI. Jeżeli dwie linije proste spuszczone na trzecią liniją prostą składaią z tą ostatnią dwa kąty wewnętrzne których summa iest równa dwóm kątom prostym, te dwie linije będą równoległe między sobą. fig. 37. *bis*. - - - 29

ZAD. XXII. Jeżeli dwie linije proste składaią z trzecią liniją prostą dwa kąty wewnętrzne których summa będzie mnieyszą od dwóch kątów prostych; te dwie linije dostatecznie przedłużone, przetną się. fig. 37. - - - - - - 31

ZAD. XXIII. Jeżeli dwie linije równoległe są przecięte od trzeciey linij prostey, summa kątów wewnetrznych iest równa dwóm kątom prostym. fig. 38. - - 32
ZAD. XXIV. Jeżeli dwie linije są równoległe do linij trzeciey, te dwie linije są równoległe między sobą. fig. 39. - 36
ZAD. XXV. Dwie równoległe, w każdym punkcie są w równey od siebie odległości. fig. 40. - - - - - 36
ZAD. XXVI. Jeżeli ramiona iednego kąta, są równoległe do ramion kąta drugiego, i leżą w tym samym kierunku, kąty temi ramionami obięte będą równe. fig. 41. - - - - - 37
ZAD. XXVII. W każdym tróykącie summa trzech kątów iest równa dwóm kątóm prostym. fig. 42. - - - 38
ZAD. XXVIII. W każdym wiełoboku summa wszystkich kątów wewnętrznych iest równa tyle razy dwóm kątom prostym, ile iest iednostek w liczbie boków mniey dwóma. fig. 43. - - - - 40
ZAD. XXIX. W równoległoboku, boki i kąty przeciwległe są równe. fig. 45. - 42
ZAD. XXX. Jeżeli w czworoboku, boki przeciwległe są równe, boki te będą między sobą równoległe, a figura będzie równoległobokiem. fig. 45. - - 43
ZAD. XXXI. Jeżeli w czworoboku, dwa boki przeciwległe są równe i równoległe, drugie dwa boki tego czworoboku

będą równe i równoległe, i czworobok będzie równoległobokiem. fig. 45. - 44
ZAD. XXXII. W każdym równoległoboku, dwie przekątne przecinaią się na dwie części równe. fig. 45. *bis*. - - 45

K S I Ę G A II.

Opisania - - - - - - 46
ZAD. I. Każda srzednica dzieli koło i obwód koła na dwie części równe. fig. 49. 48
ZAD. II. Każda cieńciwa iest mnieyszą od srzednicy. fig. 49. - - - - 48
ZAD. III. Linija prosta w dwóch tylko punktach przeciąć może obwód koła - 49
ZAD. IV. W tém samém kole albo w dwóch kołach równych, kąty (których wierzchołki są we srzodku koła) równe, obeymuią na obwodzie łuki równe; i na odwrót, ieżeli łuki na obwodzie koła są równe kąty we srzodku koła będą także równe. fig. 61. - - - - 49
ZAD. V. W iedném kole, lub w dwóch kołach równych, łuki równe obeymuią cieńciwy równe; cieńciwy zaś równe obeymuią łuki równe. fig. 50. - - 50
ZAD. VI. W tém samém kole, albo w kołach równych, (biorąc łuki mnieysze od połobwodu koła), łuk większy iest obięty większą cieńciwa, łuk zaś mnieyszy obięty cieńciwą mnieyszą. fig. 50. - 51
ZAD. VII. Promień, prostopadły do cieńciwy, dzieli tę cieńciwę i łuk tą cieńciwą obięty na dwie części równe. fig. 51. - 52

Karta

ZAD. VIII. Przez trzy punkta dane nieleżące na iedney linij prostey, ieden tylko obwód koła poprowadzić można fig. 52. - - - - - 54

ZAD. IX. Dwie cienciwy równe są w równey odległości od srzodka koła; z dwóch zaś cienciw nierównych, naymnieysza, iest od srzodka koła nayodległeysza. fig. 53. - - - - - 56

ZAD. X. Prostopadła prowadzona do ostatecznego końca promienia będącego na obwodzie koła, iest styczną do tego obwodu. fig. 54. - - - - 57

ZAD. XI. Dwie linije równoległe, odcinaią na obwodzie koła łuki równe. fig. 55. i fig. 56. - - - - - 58

ZAD XII Jeżeli dwa obwody kół przecinaią się w dwóch punktach, linija przechodząca przez srzodki tych dwóbh obwodów, będzie prostopadłą do cienciwy, łączącey punkta ich przecięć, i dzielić będzie tę cienciwę na dwie części równe. fig. 57. i fig. 58. - - - 60

ZAD. XIII, Jeżeli odległość dwóch srzodków iest mnieysza od summy promieni, i ieżeli promień naywiększy iest mnieyszy od summy z promienia naymnieyszego i odległości srzodków, dwa koła przetną się. fig. 57. 58. - - - 61

ZAD. XIV. Jeżeli odległość srzodków dwóch kół iest równa summie ichpromieni, te dwa koła zetkną się zewnętrznie. fig. 59. - - - - 62

to iest odcinek któryby obeymował wszystkie kąty w weń wpisane, równe kątowi danemu C. fig. 88. i 89. - - 80
Zagad. XVII. Znaleść stosunek liczebny dwóch linij prostych danych, maiących między sobą miarę wspólną. fig. 90. - 81
Zagad. XVIII. Dwa kąty będąc dane, wynaleść ich wspólną miarę, a z tąd ich stosunek w liczbach. fig. 91. - - 83

K S I Ę G A III.

Opisania - - - - - - 85
ZAD. I. Równoległoboki maiące podstawy równe i wysokości równe, są równowartuiące. fig. 96. - - - - 87
ZAD. II. Każdy tróykąt iest połową równoległoboku tey samey podstawy, i tey samey wysokości. fig. 98. 98. bis - 89
ZAD. III. Dwa prostokąty tey samey wysokości, są między sobą iak podstawy. fig. 99. - - - - - 91
ZAD. IV. Dwa iakiekolwiek prostokąty, są między sobą, iak wieloczyny z podstaw przez wysokości. fig. 101. - - 93
ZAD. V. Pole iakiegokolwiek równoległoboku, iest równe wieloczynowi z podstawy przez wysokość. fig. 97. - - 96
ZAD. VI. Pole tróykąta iest równe wieloczynowi z podstawy przez połowę wysokości. fig. 104. - - - - 97
ZAD. VII. Pole trapeza, iest równe wysokości, mnożoney przez połowę sum-

my podstaw równoległych. fig. 105. - 98
ZAD. VIII. Podzieliwszy liniją na dwie części, kwadrat z całey linij, obeymować będzie kwadrat z iedney części, więcey kwadrat z części drugiey, więcey dwa razy wzięty prostokąt z dwóch części linij podzieloney. fig. 106. - - - 100
ZAD. IX. Jeżeli linija iest różnicą dwóch drugich, kwadrat wyniesiony na różnicy, obeymować będzie kwadrat z iedney linij, więcey kwadrat z drugiey, mniey dwa razy wzięty prostokąt z dwóch linij danych. fig. 107. - - - - 102
ZAD. X. Prostokąt zrobiony na summie i różnicy dwóch linij, iest równy różnicy kwadratów tych dwóch linij. fig. 108. 104
ZAD. XI. Kwadrat z przeciw-prostokątney, iest równy summie kwadratów z boków kąt prosty obeymuiących. fig. 109. 104
ZAD. XII. W tróykącie biorąc kąt ostry, kwadrat z przeciw-ostrokątney, iest mnieyszy od summy kwadratów z boków ten kąt obeymuiących; i ieżeli spuścimy prostopadłą na ieden z boków kąt ostry obeymuiących, różnica będzie równą podwóynemu wieloczynowi z boku na który spuszczona prostopadła, przez odcinek przyległy kątowi ostremu. fig. 110. - - - - - - 107
ZAD. XIII. W tróykącie ieżeli weźmiemy kąt rozwarty, kwadrat z przeciw-rozwartokątney iest większy od summy

Karta

kwadratów z boków ten kąt obeymuiących; i ieżeli spuścimy prostopadłą na ieden z boków kąt rozwarty obeymuiących, różnica będzie równa podwóynemu wieloczynowi z boku na który spuszczona prostopadła przez odcinek przyległy kątowi rozwartemu. fig. 111. - 108

ZAD. XIV. W tróykącie, poprowadziwszy z wierzchołka liniją prostą na połowę podstawy, summa kwadratów z boków kąt w wierzchołku obeymuiących, iest równa dwa razy wziętemu kwadratowi z linij na srzodek podstawy sprowadzoney, więcey dwa razy kwadrat z połowy podstawy. fig. 112. - - 109

ZAD. XV. W tróykącie, linija równoległa do podstawy, dzieli boki proporcyonalnie. fig. 114. - - - - 110

ZAD. XVI. Linija, przecinaiąca boki tróykąta proporcyonalnie, iest równoległą do podstawy. fig. 116. - - - 112

ZAD. XVII. W tróykącie, linija dzieląca kąt na dwie części równe, podzieli podstawę na dwa odcinki proporcyonalne bokom przyległym. fig. 117. - - 113

ZAD. XVIII. Dwa tróykąty równokątne maią boki odpowiadaiące proporcyonalne, i są podobne. fig. 119. - - 113

ZAD. XIX. Dwa tróykąty maiące boki odpowiadaiące proporcyonalne, są równokątne i podobne. fig. 120. - - 115

ZAD. XX. Dwa tróykąty maiące kąt równy obięty bokami proporcyonalnemi, są podobne. fig. 122. - - - 117

ZAD. XXI. Dwa tróykąty maiące boki odpowiadaiące równoległe, albo prostopadłe, są podobne. fig. 123. - - 118

ZAD. XXII. Linije prowadzone od upodobania przez wierzchołek tróykąta, dzielą podstawę, i liniją równoległą do podstawy proporcyonalnie. fig. 125. - 120

ZAD. XXIII. W tróykącie prostokątnym, spuściwszy prostopadłą z kąta prostego na przeciw-prostokątną: fig. 126. 1*mo* Dwa tróykąty cząstkowe z tąd powstaiące, są podobne do siebie, i do tróykąta całkowitego. 2*do* Każdy z boków kąt prosty obeymuiących, iest srzednio-proporcyonalny między przeciw-prostokątną, i odcinkiem iemu przyległym. 3*tio* Prostopadła, iest srzednią-proporcyonalną między odcinkami przeciw-prostokatney - - - - - 121

ZAD. XXIV. Dwa tróykąty maiące kąt równy, są iak prostokąty z boków kąt równy obeymuiących. fig. 128. - - 123

ZAD. XXV. Dwa tróykąty podobne, są między sobą iak kwadraty z boków odpowiadaiących. fig. 122. - - - 124

ZAD. XXVI. Dwa wieloboki podobne, składaią się z tey samey liczby tróykątów podobnych, i podobnie rozłożonych. fig. 129. - - - - 225

ZAD. XXVII. Perymetra wieloboków podobnych, są iak boki odpowiadaiące, a

ich powierzchnie, iak kwadraty z tych samych boków. fig. 129. - - - 126
ZAD. XXVIII. Części dwóch cienciw przecinaiących się wewnątrz obwodu koła, są odwrótnie proporcyonalne. fig. 130. 128
ZAD. XXIX. Z punktu wziętego zewnątrz obwodu koła, poprowadzone dwie sieczne kończące się wewnątrz obwodu, są odwrótnie proporcyonalne do części zewnętrznych. fig. 131. - - - 129
ZAD. XXX. Z punktu wziętego zewnątrz obwodu koła, poprowadzone styczna, i sieczna; styczna będzie srzednią proporcyonalną między sieczną, i iey częścią zewnętrzną. fig. 132. - - 129
ZAD. XXXI. W tróykącie, podzieliwszy kąt liniją prostą na dwie części równe, prostokąt z boków ten kąt obeymuiących, iest równy prostokątowi z odcinków boku trzeciego, więcey kwadratowi z linij kąt dzielącey. fig. 133. - 130
ZAD. XXXII. Przepuściwszy przez trzy wierzchołki tróykąta obwód koła, prostokąt z dwóch boków, iest równy prostokątowi ze srzednicy, przez prostopadłą spuszczoną na bok trzeci tróykąta. fig. 134. - - - - - 131
ZAD. XXXIII. W czworoboku wpisanym w obwód koła, prostokąt z dwóch przekątnych, iest równy summie prostokątów z boków przeciwległych. fig. 135. 132
ZAD. XXXIV. Obrawszy punkt wewnątrz

Karta

obwodu koła, P, (fig. 136). ieżeli weźmiemy drugi Q, zewnątrz na przedłużeniu promienia C A, tak że C P : C A : : C A : C Q; i ieżeli z punktu iakiegokolwiek M, wziętego na obwodzie, poprowadzimy do tych punktów linije M P, M Q, te będą w stosunku następuiącym: M P : Q M : : A P : A Q. - - - - 134

Zagadnienia względne do Księgi trzeciey - 135

Zagad. I. Podzielić liniią prostą daną na tyle części równych na ile będziemy chcieli, albo na części proporcyonalne linijom danym. fig. 137. - - - 135

Zagad. II. Znaleść czwartą proporcyonalną do trzech linij danych A, B, C. fig. 139. 136

Zagad. III. Znaleść srzednią proporcyonalną między dwiema linijami danemi A, B. fig. 140. - - - - 137

Zagad. IV. Podzielić liniią daną A B, na dwie części tak, aby część naywiększa była srzednią proporcyonalną między całą liniią i częścią druga. fig. 141. - 138

Zagad. V. W kącie B C D, przez punkt dany A, poprowadzić liniią prostą B D, tym sposobem ażeby części A B, A D, obięte między punktem danym A, i dwoma ramionami kąta danego B C D, były równe. fig. 142. - - - 139

Zagad. VI. Zrobić kwadrat równo - wartuiący równoległobokowi, albo tróykątowi danemu. fig. 143. - - - 140

Zagad. VII. Na linij daney AD (fig. 145). wystawić prostokąt ADEX, równowartuiący prostokątowi danemu ABEC. 141
Zagad. VIII. Znaleść w linijach stosunek prostokątu z dwóch linij danych A, B; do prostokątu z dwóch linij danych C, D. fig. 148. - - - - - 141
Zagad. IX. Znaleść w linijach stosunek wieloczynu z trzech linij danych A, B, C, do wieloczynu z trzech linij danych P, Q, R. fig. 149. - - - - 142
Zagad. X. Wykreślić tróykąt równo-wartuiący wielobokowi danemu. fig. 146. 142
Zagad. XI. Wykreślić kwadrat równy summie, albo różnicy dwóch kwadratów danych. fig. 147. - - - - 143
Zagad. XII. Wykreślić kwadrat, który będzie do kwadratu danego ABCD, iak linija M, do N. fig. 150. - - 144
Zagad. XIII. Na boku FG, odpowiadaiącym bokowi AB, opisać wielobok podobny wielobokowi danemu ABCDE. fig. 129. - - - - - 145
Zagad. XIV. Maiąc dane dwie figury podobne, wykreślić figurę podobną równą ich summie, albo różnicy. fig. 129. bis. 145
Zagad. XV. Wykreślić figurę podobną figurze daney, w stosunku iak M do N. 146
Zagad. XVI. Wykreślić figurę podobną figurze P, i równowartuiącą figurze Q. fig. 151. - - - - - 147
Zagad. XVII. Wykreślić prostokąt równo-

wartu-

wartuiący kwadratowi danemu C, i któregoby boki przyległe czyniły summę daną AB. fig. 152. - - - - 147
Zagad. XVIII. Wykreślić prostokąt równowartuiący kwadratowi C, któregoby boki przyległe miały między sobą różnicę daną AB. fig. 153. - - - 148
Zagad. XIX. Znaleść miarę wspólną ieżeli iest, między przekątną i bokiem kwadratu. fig. 154. - - - - 149

K S I Ę G A IV.

Opisanie - - - - - 152
ZAD. I. Dwa wieloboki foremne z tą samą liczbą boków, są dwie figury podobne. fig. 155. - - - - 152
ZAD. II. Każdy wielobok foremny może bydź wpisany w obwód koła, i obwodem koła opisany fig. 156. - - - 153
ZAD. III. Wpisać kwadrat w obwód koła dany. fig. 157. - - - - 155
ZAD. IV. Wpisać sześciobok foremny i tróykąt równoboczny w obwód koła dany. fig. 158. - - - - 155
ZAD. V. W koło dane, wpisać dziesięciobok foremny, pięciobok, i piętnastobok. fig. 159. - - - - - 157
ZAD. VI. Będąc dany wielobok foremny ABCDEF, wpisany w obwòd koła, opisać na tymże samym obwodzie wielobok podobny danemu. fig. 160. - 160
ZAD. VII. Pole wieloboku foremnego iest

równe iego perymetrowi rozmnożonemu przez połowę promienia koła wpisanego. fig. 160. - - - - 162
ŻAD. VIII. Perymetra wieloboków foremnych tey samey liczby boków są iak promienie kół opisanych, i iak promienie kół wpisanych; ich zaś powierzchnie iak kwadraty z tych samych promieni. fig. 161. - - - - - - 163
ŻAD. IX. Każda linija krzywa, albo wielobok, otaczaiące od iednego do drugiego końca liniją wypukłą AMB, są dłuższe od linij otoczoney. fig. 162. - 164
ZAD. X. Maiąc dane dwa obwody kół odsrzodkowe, możemy zawsze w obwód koła większy wpisać wielobok foremny, którego boki niedotkną się obwodu koła mnieyszego; na obwodzie zaś koła mnieyszego opisać wielobok foremny, którego boki niedotkną się obwodu koła większege; tak, że w iednym i drugim przypadku, wieloboki zamknięte będą między dwoma obwodami kół. fig. 164. - - - - 165
ZAD. XI. Obwody kół są iak promienie, a ich powierzchnie iak kwadraty z promieni. fig. 165. - - - - 167
ZAD. XII. Powierzchnia koła równa wieloczynowi z obwodu przez połowę promienia fig. 167. - - - - 170
ZAD. XIII. Maiąc dane powierzchnie, wieloboku foremnego wpisanego, i wie-

loboku podobnego opisanego, wynaleść powierzchnie wieloboków foremnych wpisanych i opisanych z podwóyną liczbą boków. fig. 169. - - - 173
ZAD. XIV. Znaleść stosunek zbliżony obwodu koła do srzednicy. - - - 175
ZAD. XV. Tróykąt ACB, iest równowartuiący tróykątowi DCF maiącemu ten sam kąt C, i którego bok CF równy CD, iest srzednio-proporcyonalny między CA i CB. Nadto, ieżeli kąt CAB, iest kątem prostym, prostopadła CE, spuszczona na podstawę tróykąta równoramiennego, będzie srzednią proporcyonalną między bokiem CA, i połową summy z boków CA, CB. fig. 170. 177
ZAD. XVI. Znaleść obwód koła różniący się tak mało od wieloboku foremnego danego, iak będziemy chcieli. fig. 171. 178

Dodatek do Księgi IV.

Opisania - - - - - 182
ZAD. I. Między wszystkiemi tróykątami tey samey podstawy, i tego samego perymetru, tróykąt *maximum* iest ten, w którym dwa boki są równe. fig. 172. - 182
ZAD. II. Między wszystkiemi wielobokami isoperymetrycznemi, i tey samey liczby boków, wielobok maiący boki równe iest *maximum*. fig. 173. - - 183
ZAD. III. Ze wszystkich tróykątów powstaiących z dwóch boków danych, ro-

biąc między niemi kąt od upodobania, *maximum* iest ten, w którym dwa boki dane czynią kąt prosty. - - - 184
ZAD. IV. Ze wszystkich wieloboków złożonych z boków danych i iednego boku od upodobania, wi-lobok *maximum* będzie ten, którego wszystkie kąty są wpisane w pół-obwód koła, w ktorym bok niewiadomy iest srzednicą. fig. 175. - 185
ZAD. V. Jeden tylko iest sposób składania wieloboku A B C D E F z boków danych, i iednego od upodobania będącego srzednicą pół-obwodu koła, w którém inne boki są wpisane. fig. 175. - 186
ZAD. VI. Ze wszystkich wieloboków złożonych z bokòw danych, *maximum* iest ten, którego można wpisać w obwód koła. fig. 177. - - - - - 187
ZAD. VII. Wielobok foremny iest *maximum*, między wszystkiemi wielobokami isoperymetrycznemi, i tey samey liczby boków. - - - - - 188
ZAD. VIII. W dwóch obwodach kół nierównych, dwa kąty w srzodku są iak łuki ie obeymuiące dzielone przez promienie. fig. 178. - - - - 188
ZAD. IX. Z dwóch wieloboków foremnych i isoperymetrycznych, wielobok maiący większą liczbę boków, iest wielobokiem naywiększym. fig. 179. - 189
ZAD. X. Koło iest większe od każdego wieloboku isoperymetrycznego. fig. 180. - 191
Koniec.

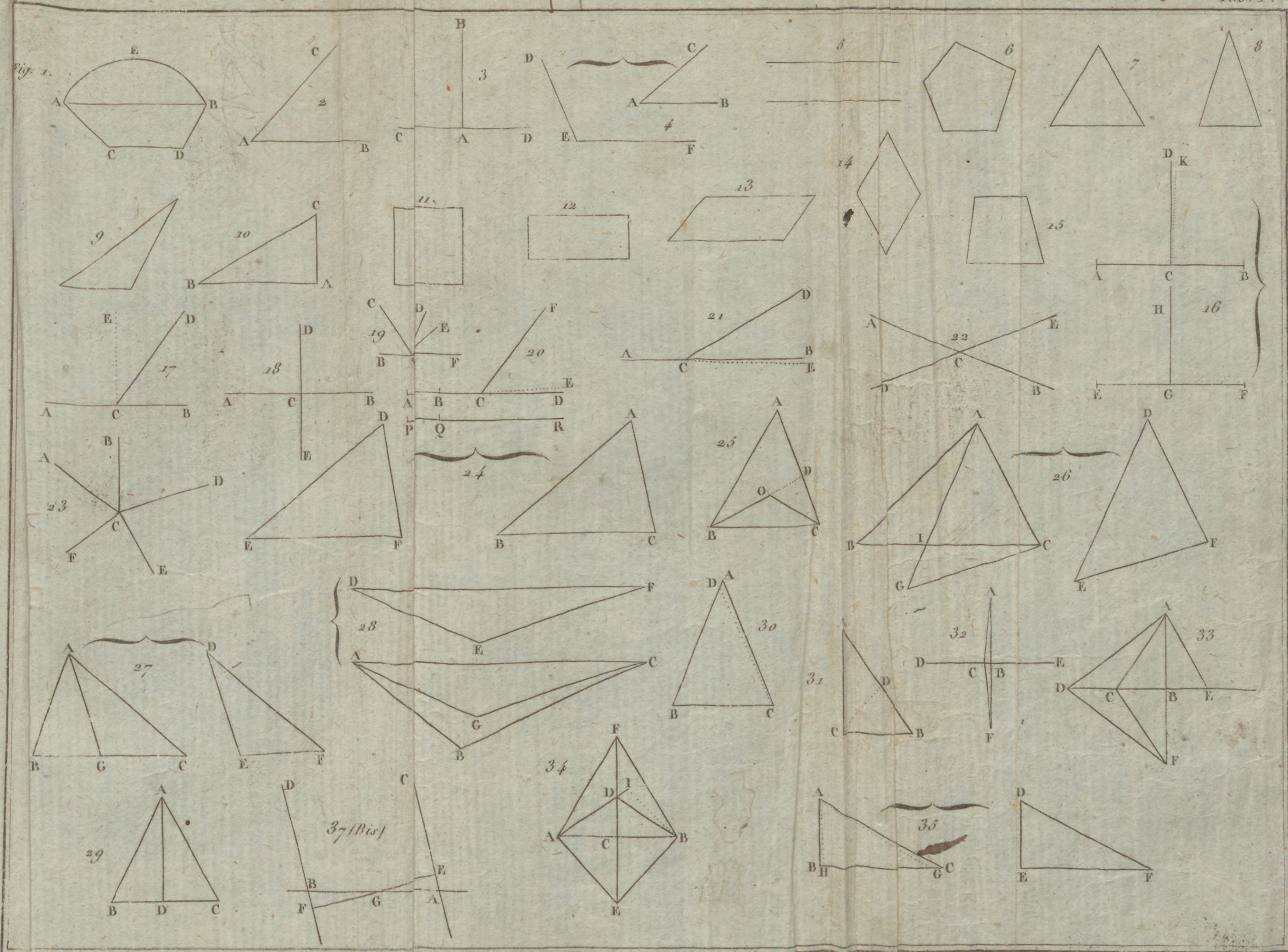
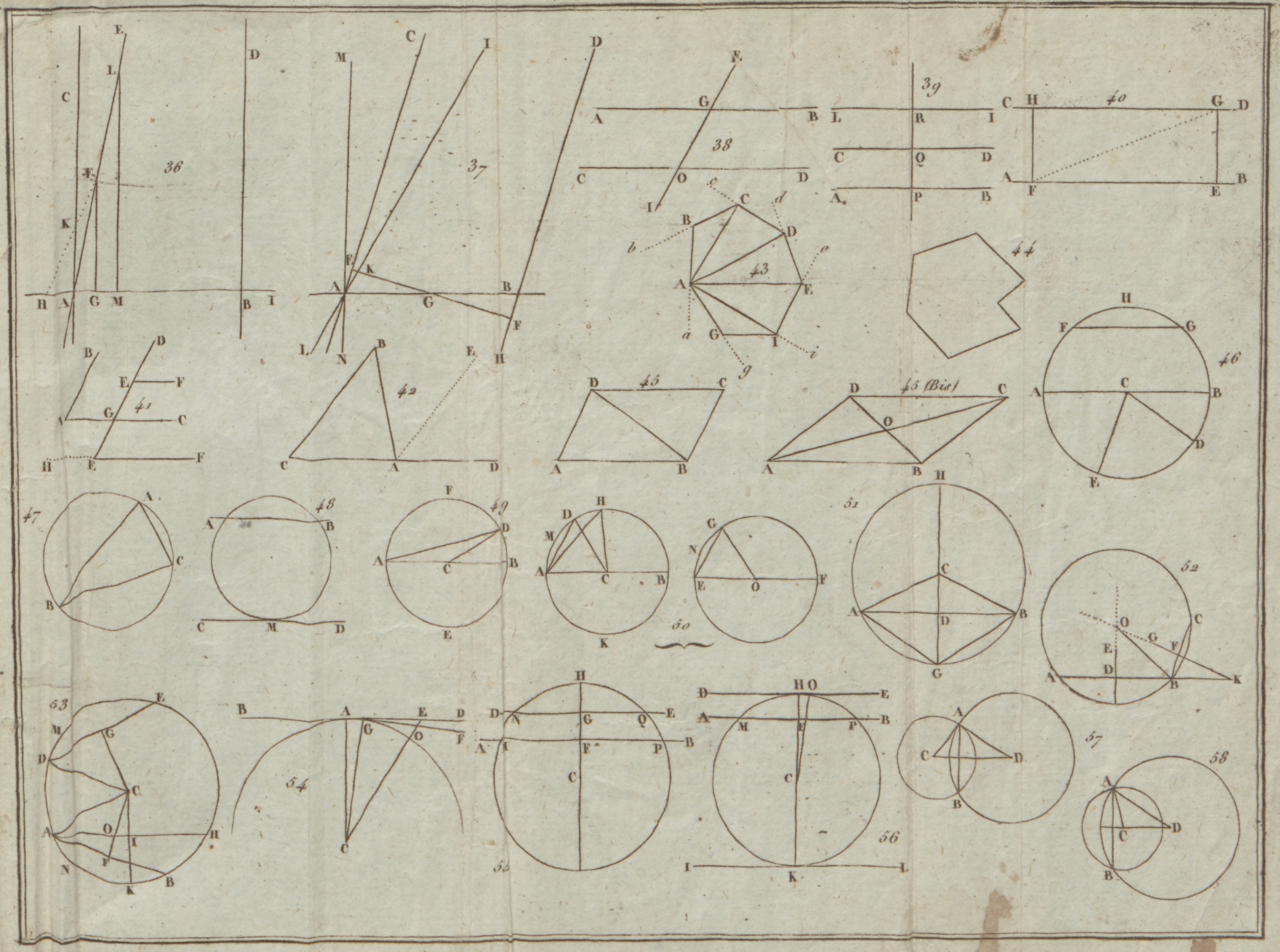
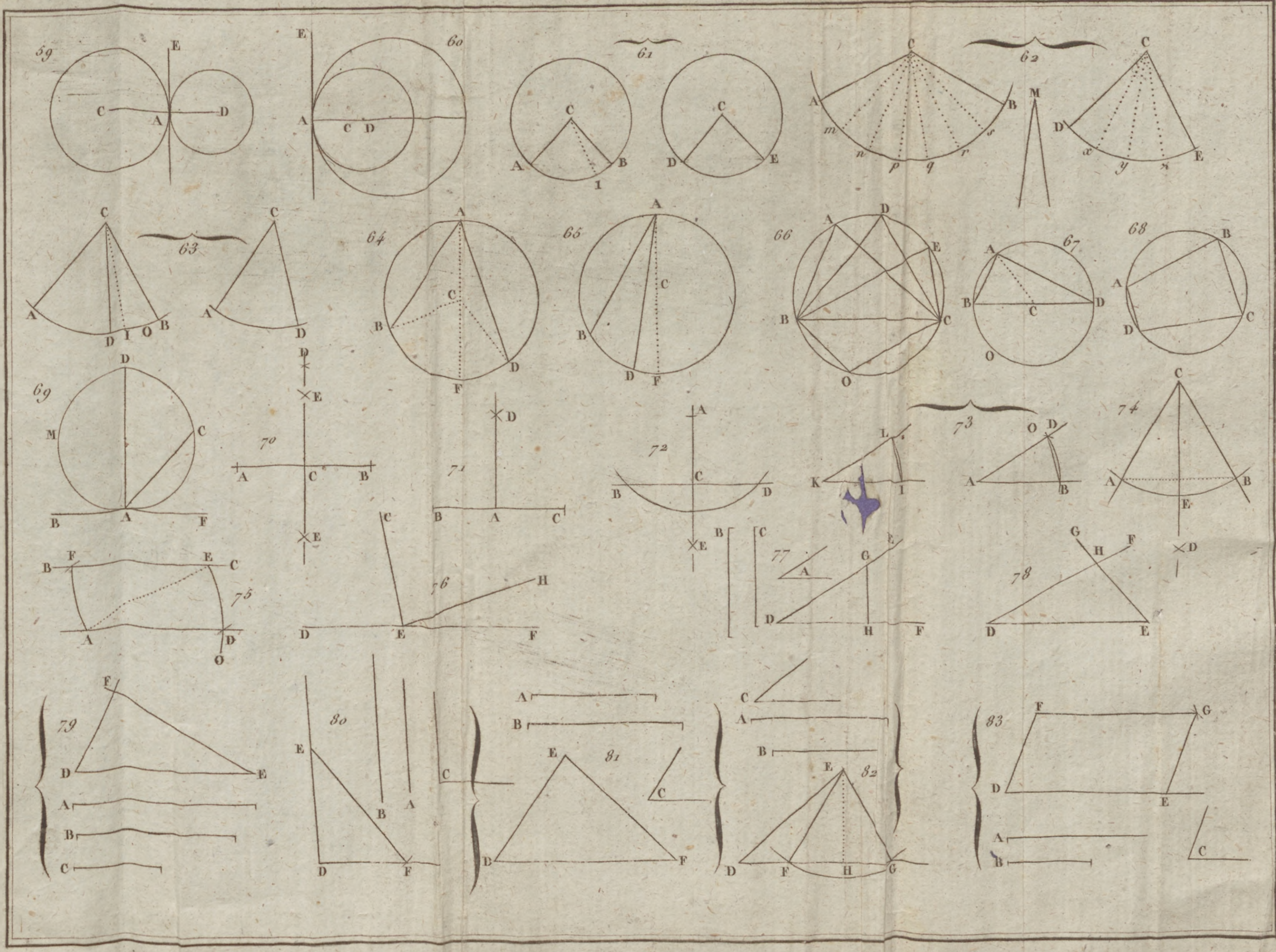
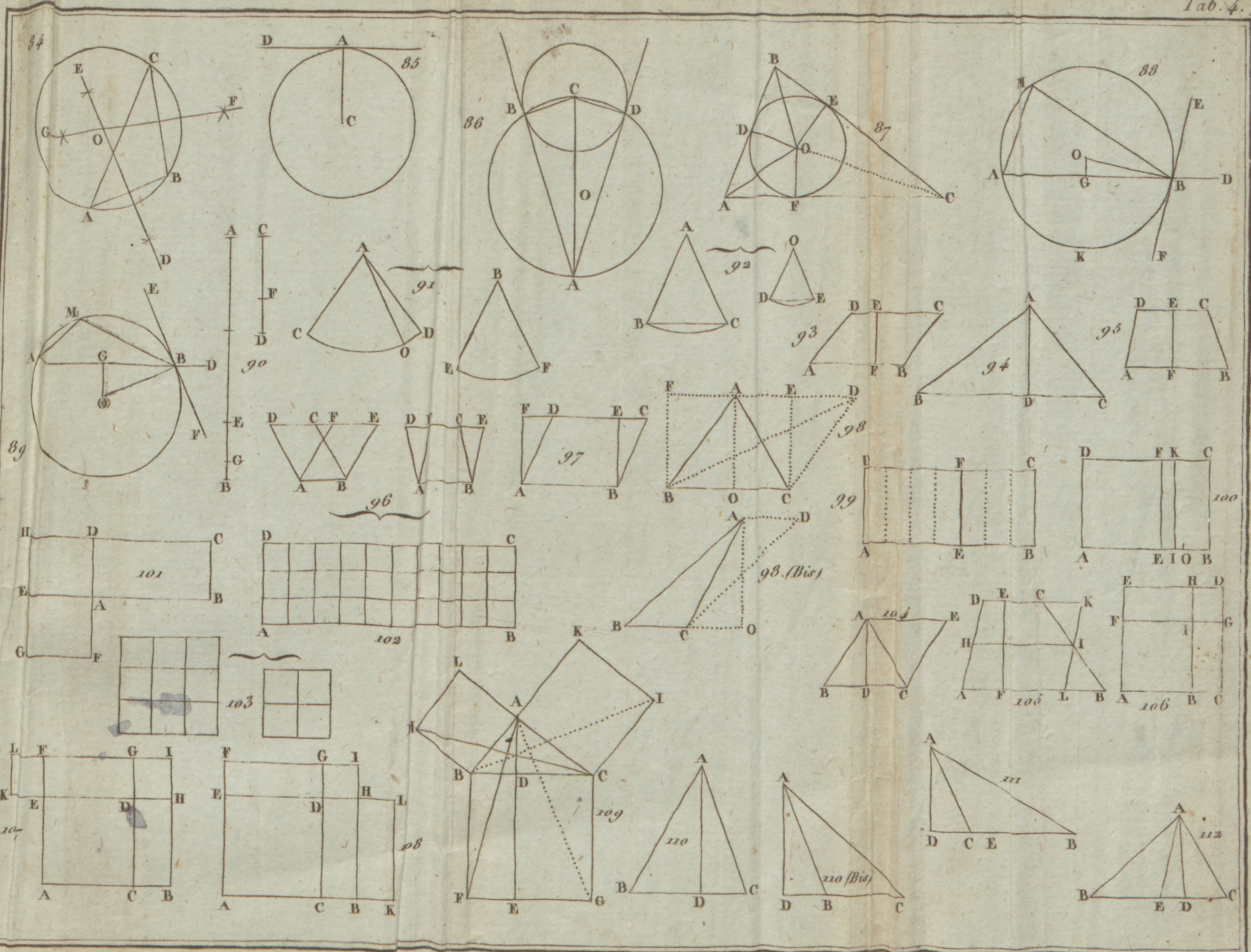
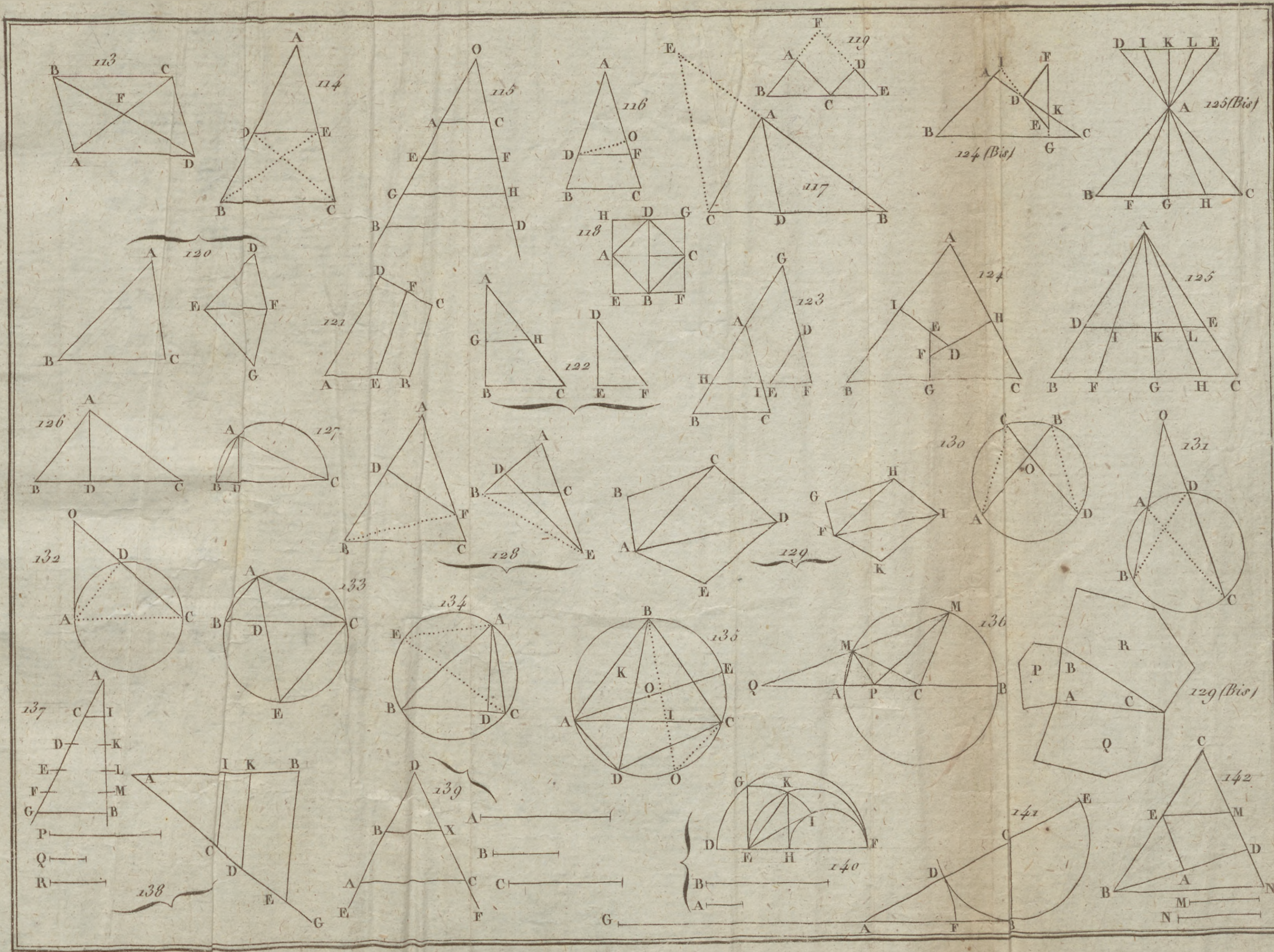


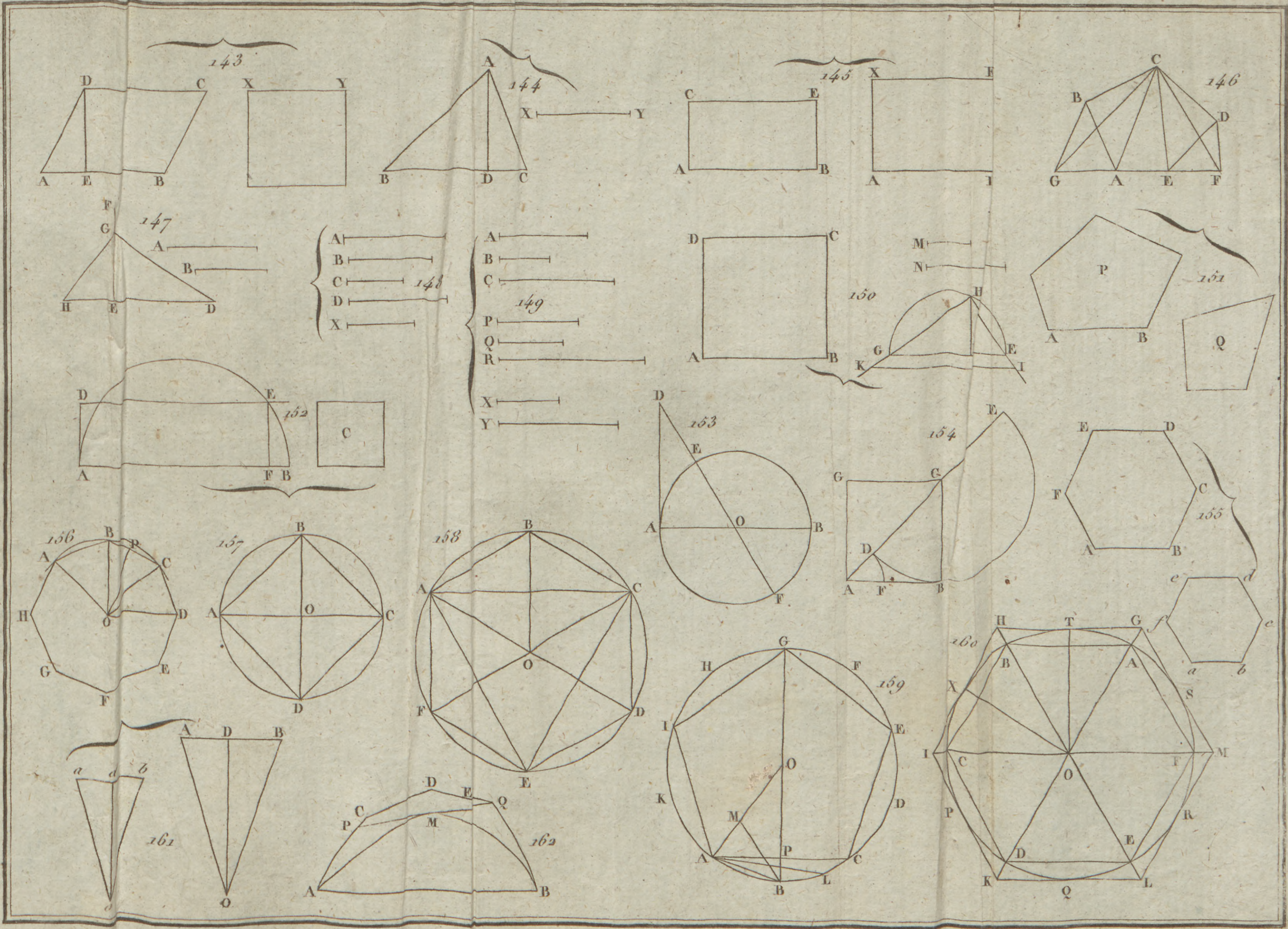
Fig. 1.
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
37 (Bis)


36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
45 (Bis)
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58

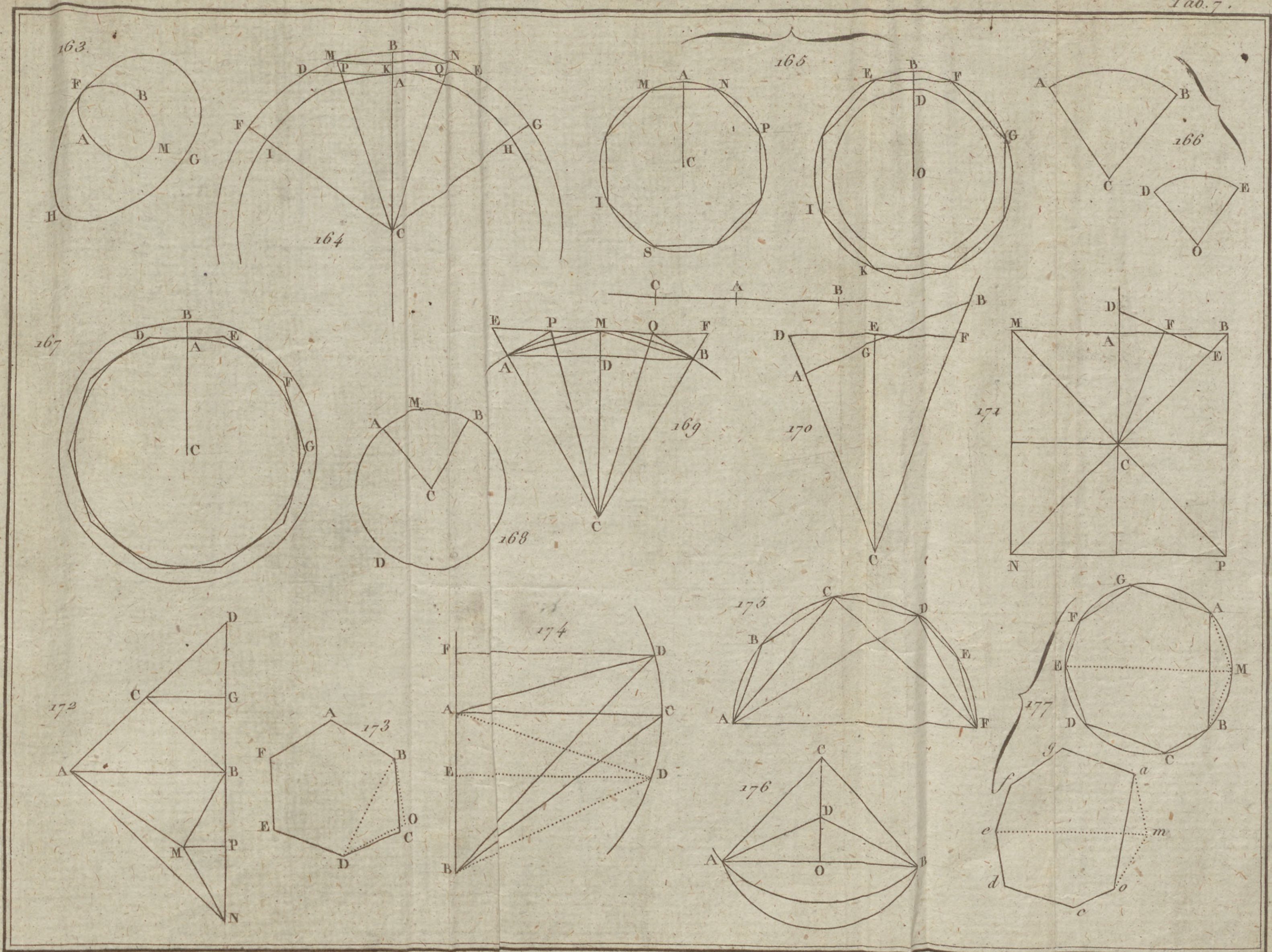


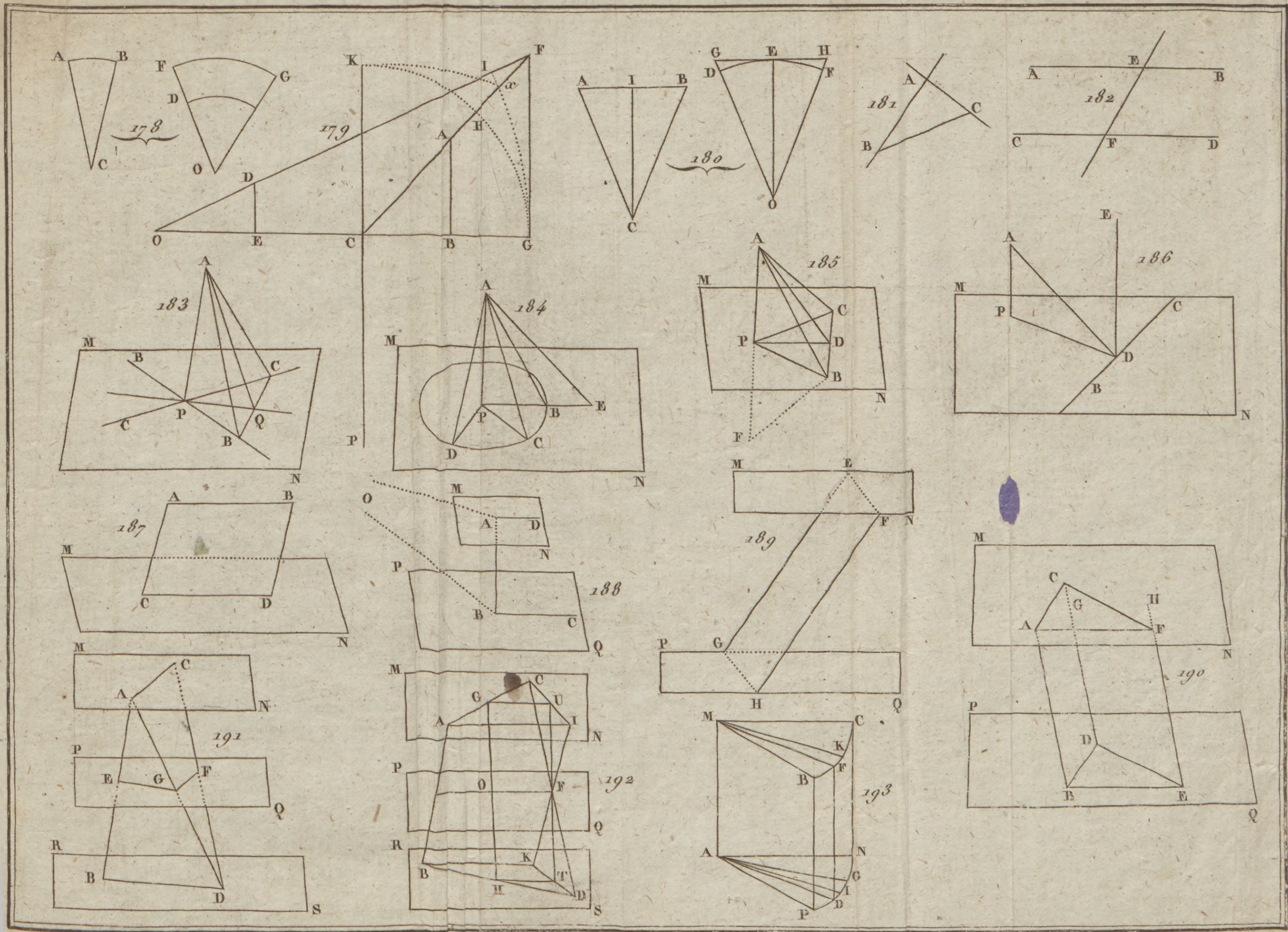

84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
98. (Bis)
99
100
101
102
103
104
105
106
107
108
109
110
110 (Bis)
111
112


113
114
115
116
117
118
119
120
121
122
123
124
124 (Bis)
125
125 (Bis)
126
127
128
129
129 (Bis)
130
131
132
133
134
135
136
137
138
139
140
141
142


143
144
145
146
147
148
149
150
151
152
153
154
155
156
157
158
159
160
161
162

Tab. 7.




178
179
180
181
182
183
184
185
186
187
188
189
190
191
192
193

50,—