WYKŁAD

GEOMETRYI WYKREŚLNEJ

PRZEZ

ERNESTA SĄGAYŁĘ

Egzaminatora w Szkole Centralnej Sztuk i Rękodzieł, Naczelnika prac rysunkowych i Repetytora tejże Szkoły,
Profesora Geometryi Wykreślnej w Lyceum Chaptal

CZĘŚĆ PIERWSZA

DLA UŻYTKU SZKÓŁ MATEMATYCZNYCH WYŻSZYCH

TEKST

PARYŻ

NAKŁADEM BIBLIOTEKI KÓRNICKIEJ

1882

WYKŁAD

GEOMETRYI WYKREŚLNEJ

MOTTEROZ, Adm.-Direct. des Imprimeries réunies, A, rue Mignon, 2, Paris

WYKŁAD

GEOMETRYI WYKREŚLNEJ

EZ

ERNESTA SĄGAYŁĘ

Egzaminatora w Szkole Centralnej Sztuk i Rękodzieł, Naczelnika prac rysunkowych i Repetytora tejże Szkoły,
Profesora Geometryi Wykreślnej w Lyceum Chaptal

CZĘŚĆ PIERWSZA

DLA UŻYTKU SZKÓŁ MATEMATYCZNYCH WYŻSZYCH

TEKST

PARYŻ

NAKŁADEM BIBLIOTEKI KÓRNICKIEJ

1882

Wyższa Szkoła Pedagogiczna
BIBLIOTEKA GŁÓWNA
w Kielcach
097222

PRZEDMOWA AUTORA

Dzieło, którego tom I^szy wychodzi na widok publiczny, powstało z inicyatywy ś. p. Jana Hrabiego Działyńskiego.

Urodzony i wychowany we Francyi, nie władając dostatecznie językiem polskim, nie byłbym znalazł sposobności dania się poznać narodowi, do którego mam zaszczyt należeć, gdyby nie zachęta i pomoc ś. p. właściciela Biblioteki Kórnickiéj, który chcąc uzupełnić swe wydawnictwo w dziedzinie nauk matematycznych przez ogłoszenie obszernéj Geometryi Wykreślnéj, nakłonił mię do pisania tego dzieła po francusku z tem zastrzeżeniem, iżby tekst jego polski w przekładzie p. Kaźmierza Brandta, Sekretarza Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu, został wydany jako oryginał jednocześnie z tekstem francuskim.

Przyjął ś. p. Nakładca program dzieła przezemnie przedłożony; z hojnością, na jaką nie zawsze stać ciała naukowe lub rządy krajów niepodległych, obmyślił wspaniale jego wydanie, postarał się o jak najozdobniejsze wykonanie tablic, i jeżeli światła publiczność polska przyzna niejaką wartość mojej Geometryi Wykreślnéj, będzie w tém główna zasługa ś. p. Hrabiego Jana Działyńskiego.

Co do mnie, poczytuję sobie za obowiązek oświadczyć tutaj, obok czci dla Jego pamięci, głęboką wdzięczność tak Jemu jak Jego spadkobiercy, Hrabiemu Władysławowi Zamoyskiemu, za daną mi możność dokonania téj pracy. Składam przytém podziękowanie Panu Kaźmierzowi Brandtowi nietylko za tłumaczenie, ale i za wieloraką pomoc, jakiéj doświadczałem od niego wśród tak długiego i mozolnego druku. Osobne nareszcie podziękowanie

winienem Panu Dr Danielowi Wierzbickiemu za pomoc przy korekcie, na czém zyskała nietylko poprawność druku, lecz i czystość języka, oraz Panu E. Hellé, rytownikowi, który z wielkiém staraniem i umiejętnością wykonał wszystkie rysunki.

Co do naukowéj strony dzieła, służyły mu za podstawę nasze własne wykłady Geometryi Wykreślnéj w ciągu lat przeszło dziesięciu w Collège Chaptal i w Szkole Centralnéj w Paryżu.

Przy wykładzie Geometryi Wykreślnéj przedewszystkiém baczyć należy, aby do teoryi były dodane jak najliczniejsze zostosowania. Po każdéj przeto ważniejszéj teoryi dajemy dla użytku uczących się ćwiczenia do niéj zastosowane. Obok nich prawie wszędzie znajduje się rozwiązanie, ażeby czytelnik mógł sprawdzić i uzupełnić wypadek własnych poszukiwań. Należy tylko rozpatrywać się najprzód w rysunkach i dopiéro potém zaglądać do tekstu, gdyż tym sposobem jedynie nabywa się gruntownéj znajomości geometryi wykreślnéj.

Ernest SĄGAYŁO.

Paryż, dnia 20 Września 1882.

WYKŁAD

GEOMETRYI WYKREŚLNEJ

KSIĘGA PIERWSZA

LINIJE PROSTE I PŁASZCZYZNY

ROZDZIAŁ PIERWSZY

WIADOMOŚCI WSTĘPNE

1. Cel Geometryi Wykreślnej. — Zwyczajny rysunek, bez żadnego uprzedniego studyum, służy do przedstawienia przedmiotów otaczających. Dla osiągnięcia tego celu, rysownik zmuszony jest, prawie zawsze, zmeiniać w rozmaity sposób wymiary i kształty ciał przedstawianych. Rysunki w ten sposób wykonywane nie mogą być użyteczne ani Geometrom, którzy na jednej płaszczyznie zwykli przedstawiać figury znajdujące się w przestrzeni, ani Architektom, ani też Inżynierom dla których rysunek jest o tyle tylko użytecznym o ile przedstawia on położenie względne, kształt, a nadewszystko wymiary rzeczywiste rozmaitych części składowych ciała. Dla nadania rysunkom tej niezbędnej ścisłości matematycznej uciec się należy do metody, tyle obfitej, zwanej metodą przekształcenia figur geometrycznych. Przekształcona płaska, która właśnie odpowiada figurze w przestrzeni, może być otrzymaną najrozmaitszemi sposobami; najprostszym z nich jest sposób tak zwany «*metoda rzutów*» któremu sławny MONGE nadał miano *Geometryi Wykreślnej*.

Własności figury przedstawionej i tej którą chcemy przedstawić są w ścisłym z sobą związku, to jest, że każdej własności jednej figury odpowiada podobna własność drugiej i odwrotnie; związek ten posłużył MONGE'owi do wykazania z wielką zręcznością znacznej liczby własności geometrycznych.

W dalszym ciągu niniejszego dzieła podamy rozwinięcia użyteczne dotyczące tej kwestyi, na chwilę zaś ograniczymy się na tym krótkim rzucie oka, który już potrafi zwrócić naszą uwagę na jedną zasadę geometryczną niewyczerpaną i istniejącą obok głównego celu Geometryi Wykreślnej.

Widzimy więc, że Geometrya Wykreślna ma dwa główne zadania : pierwsze, którego przedmiotem jest podanie sposobu przedstawiania figur w przestrzeni to jest trzy-wymiarowych na płaszczyznie, która jest powierzchnią dwu-wymiarową i drugie, którego przedmiotem jest podanie metody, z geometryi rozumowej, zwanej przez p. Chasles metodą *przemiany figur* (transmutation des figures).

O NIESKOŃCZONOSCI

2. Linija prosta przedstawia tylko jeden punkt w nieskończoności. — W samej rzeczy, jakikolwiek punkt prostej znajduje się, powiadamy, w nieskończoności, jeżeli odległość jego od innego jakiegokolwiek punktu obranego dowolnie na tejże prostej jest większą od wszelkiej długości, którą sobie możemy wystawić. Przyjąwszy to określenie, weźmy pod uwagę jakąkolwiek liniję prostą i na niej dwa punkta stałe A i B i punkt ruchomy M; wszelka wartość szczególna nadana prostemu stosunkowi odcinków $\frac{MA}{MB}$ oznacza odrazu położenie punktu M, lecz dla punktu prostej leżącego w nieskończoności stosunek ten jest zawsze równy 1, a zatem należy przyjąć, dla nadania większej ogólności rozwiązaniom geometrycznym, że ta jedyna wartość stosunku odnosi się li-tylko do jednego punktu, lub inaczej mówiąc, że dwa końce prostej uważanej są połączone jednym tylko punktem zwanym *punktem tej prostej w nieskończoności.* Przyjąć zarazem należy, dla uniknienia *absurdum*, że wielkość punktów w nieskończoności nie jest, jak innych punktów prostej, zerem.

3. Prosta w nieskończoności dla płaszczyzny. — Jakakolwiek prosta danej płaszczyzny posiada jeden punkt w nieskończoności, w skutek tego, miejsce punktów w nieskończoności danej płaszczyzny jest przecięte jakąkolwiek prostą w jednym punkcie, a zatem miejsce to w nieskończoności musi być liniją prostą.

4. Płaszczyzna w nieskończoności dla powierzchni. — Miejsce prostych w nieskończoności wszystkich płaszczyzn danej powierzchni tworzy powierzchnię, a ponieważ linija prosta przecina tę powierzchnią w jednym tylko punkcie, zatem miejsce punktów w nieskończoności dla powierzchni jest płaszczyzną.

O RZUTACH

5. Rzut zbieżny (*fig.* 1). — Jeżeli jakikolwiek pęk linij prostych S.ABC.... ma wszystkie swe promienie SA, SB, SC... skierowane do rozmaitych punktów jakiejś figury A, B, C... która daje się sprowadzić do jednego punktu, przecięcie jej jakąkolwiek płaszczyzną P, znaną pod nazwiskiem płaszczyzny rzutów, utworzy, figury danej w przestrzeni, przekształconą *a, b, c*...., którą Poncelet nazwał *rzutem zbieżnym* figury A, B, C... na płaszczyznę P.

W tym systemacie pęk S.ABC,... prostych danych tworzy *pęk rzucający;* promienie SA, SB, SC,... są *linijami rzucającemi*, a wierzchołek pęku S jest punktem *zbiegu rzutów*.

6. Perspektywa zwyczajna (*fig.* 1). — Rzut zbieżny przybiera także nazwę perspektywy zwyczajnej figury rzuconej i w takim razie oko obserwatora znajduje się w punkcie zbiegu rzutów S; linije rzucające zwią się tu *promieniami widzenia*, a płaszczyzna P zwie się *płaszczyzną obrazu.*

7. Cień rzucony przez punkt świecący (*fig.* 1). — W końcu rzut zbieżny może być jeszcze uważany za cień rzucony przez punkt świecący na płaszczyznę P figury danej A, B, C,... i w tem przypuszczeniu wierzchołek S pęku linij staje się punktem świecącym a linije rzucające stają się promieniami świecącemi.

8. Rzut ostrokręgowy. — Powierzchnią stożkową nazywamy powierzchnię utworzoną ruchem prostej przechodzącej bezustannie przez punkt stały S i opierającej się na linii stałej AB zwanej *kierownicą* (*fig.* a_1)

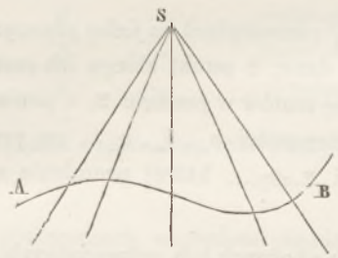

Fig. a_1.

Określenie powierzchni stożkowej podane powyżej usprawiedliwia dostatecznie nazwę rzutu ostrokręgowego lub stożkowego nadaną rzutowi zbieżnemu.

9. Rzut walcowy. — Powierzchnią walcową nazywamy powierzchnię utworzoną ruchem prostej zmieniającej swe położenie równolegle do prostej danej D i opierającej się na krzywej stałej AB (*fig.* a_2)

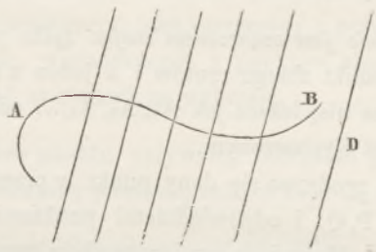

Fig. a_2.

Podług tego określenia rzut stożkowy zamienia się na rzut walcowy, jeżeli punkt zbiegu leży w nieskończoności S_∞ i w danym oznaczonym kierunku (*fig.* 2).

10. Rzut ukośny (*fig.* 2). — Każdy rzut walcowy zrobiony w kierunku prostej D lecz nie prostopadle do płaszczyzny rzutów P, zwie się *rzutem ukośnym* lub *perspektywą kawalierską* lub nareszcie *cieniem słonecznym*.

11. Rzut prostopadły (*fig.* 3). — Jeżeli kierunek wszystkich linij rzucających jest prostopadły do płaszczyzny rzutów, to rzut figury danej na płaszczyznę rzutów zwie się rzutem prostopadłym (ortogonalnym).

Uwaga.—Rozmaite rodzaje rzutów, które podaliśmy powyżej, wypływają z rzutów zbieżnych, wszelka więc własność rzutowa znaleziona dla tych ostatnich stosować się będzie w zupełności do wszystkich innych.

12. Twierdzenie. — *Rzut linii prostej na płaszczyznę jest linią prostą.* — Ponieważ rzucające rozmaitych punktów prostej uważanej tworzą płaszczyznę, która przecinając się z płaszczyzną rzutów daje na przecięcie inną prostę będącą rzutem prostej danej, zatem w ogólności rzutem prostej na płaszczyznie jest linija prosta.

Twierdzenie nasze staje się fałszywem wtedy tylko, kiedy dana prosta w przestrzeni przechodzi przez punkt zbiegu rzutów, albowiem wówczas, wszystkie rzucające zchodzą się z linią rzuconą, a w skutek tego, cały rzut sprowadza się do jednego punktu.

13. Twierdzenie. — *Rzuty linij równoległych na jedną płaszczyznę tworzą wiązkę* (*fig.* 4). — Niech będą A, B, C,... linije równoległe dane, S punkt zbiegu ich rzutów; linija równoległa SΣ do linij danych A, B, C... spotyka płaszczyznę rzutów w punkcie Σ, a ponieważ ten punkt jest rzutem wspólnym punktów leżących w nieskończoności a_∞, b_∞, c_∞... na prostych danych, zatem punkt ten jest zarazem wierzchołkiem wiązki $\Sigma.\alpha\beta\gamma$,... której promienie są rzutami prostych równoległych wziętych pod uwagę.

W przypadku rzutów walcowych ukośnych lub ortogonalnych prosta SΣ będzie miała w nieskończoności dwa punkta zupełnie różne: jeden na kierunku prostych rzuconych, drugi na kierunku prostych rzucających, zkąd wypada, że ta prosta leżeć będzie na płaszczyznie w nieskończoności (§ 8), a zatem, że punkt Σ będzie również w nieskończoności, czyli, że *rzuty ukośne lub ortogonalne prostych równoległych są równoległe.*

OZNACZENIE POŁOŻENIA PUNKTU

14. *Położenie punktu danego nie jest oznaczonem znając tylko jeden z jego rzutów na płaszczyznie* (*fig.* 5). — Niech będą: S punkt zbiegu rzutów i a jeden z rzutów punktu danego; uważmy rzucającą S, wszystkie punkta na niej leżące jak A_1, A_2, A_3,... odpowiadają w zupełności zadaniu, zatem punkt w przestrzeni nie jest wyznaczonym.

Dla usunięcia tej niepewności zgodzono się dany punkt w przestrzeni przedstawiać dwoma rzutami a, a' na dwie płaszczyzny P, Q, i odpowiedniemi punktami zbiegu rzutów S, Σ; wówczas bowiem punkt A w przestrzeni znajdować się musi w punkcie przecięcia A rzucających Sa, $\Sigma a'$.

RZUTY PROSTOKĄTNE

15. Zazwyczaj w Geometryi Wykreślnej używa się dla oznaczenia położenia jakiegokolwiek przedmiotu danego w przestrzeni, rzutów prostopadłych na dwie płaszczyzny V, H tworzące z sobą kąt prosty (*fig.* 6) i zwane płaszczyznami rzutów. Jakkolwiek położenie tych płaszczyzn V i H może być dowolne, jednakże zazwyczaj przyjmuje się że jedna z nich jest poziomą a druga pionową.

Przecięcie tych dwu płaszczyzn o których mowa daje liniję prostą, którą nazywamy *linią ziemną* albo *osią rzutów* i oznaczamy ją literami x i y położonemi w ten sposób, że jeżeli wyobrazimy sobie obserwatora stojącego w kącie 1 na płaszczyznie poziomej i obróconego twarzą ku płaszczyznie pionowej, litera x leżeć będzie po lewej jego stronie a litera y po prawej.

Przyjąwszy tę uwagę dotyczącą obserwatora, którą tu raz na zawsze wprowadzamy, spostrzegamy

że: 1° oś rzutów dzieli płaszczyznę poziomą na dwie części, z których pierwsza leżąca przed osią zwie się *płaszczyzną poziomą przednią*, a druga leżąca za osią zwie się *płaszczyzną poziomą tylną*; 2° oś rzutów dzieli płaszczyznę pionową także na dwie części, z których pierwsza leżąca po nad osią zwie się *płaszczyzną pionową górną*, a druga leżąca pod osią *płaszczyzną pionową dolną*.

Płaszczyzny rzutów tworzą pomiędzy sobą cztery kąty dwuścienne noszące nazwy ścian przez które są utworzone (*fig.* 6), a mianowicie:

kąt dwuścienny 1 zwie się kątem *przednio-górnym*,
kąt — 2 — *tylno-górnym*,
kąt — 3 — *tylno-dolnym*,
kąt — 4 — *przednio-dolnym*.

Zazwyczaj dla uproszczenia omówienia oznacza się cztery kąty dwuścienne o których mowa liczbami 1, 2, 3, 4.

16. Kreślenie rzutów na dwu płaszczyznach względem siebie prostopadłych w położeniu swem naturalnem przywiodłoby w końcu do robienia rysunków w przestrzeni, otóż dla uniknienia i obejścia tej trudności obracamy (czyli robimy kład) od przodu ku tyłowi płaszczyznę pionową górną z figurą na niej wyrysowaną na około linii ziemnej jako osi tak, żeby ona padła na płaszczyznę poziomą tylną (*fig.* 6); w ten sposób utworzona figura jest płaską, przybiera nazwę *wykres* (*fig.* 7) i służy nietylko do przedstawienia figury w przestrzeni, lecz nadto do wykonywania na niej wszelkich odpowiednich działań.

Żeby dowiedzieć się co przedstawia jakikolwiek *wykres* należy przypuścić myślą że płaszczyzna pionowa rzutów została na nowo podniesioną do swego pierwotnego położenia (*fig.* 8) i w tym stanie wyobrazić sobie kształt figury w przestrzeni, jako otrzymany z przecięcia się odpowiednich promieni dwu wiązek prostych rzucających, wychodzących z punktów zbiegu rzutów i dotykających rozmaitych punktów przedstawionych w rzutach na wykresie.

17. *Znamieniem* lub *wzniesieniem* punktu nazywamy odległość jego od płaszczyzny poziomej rzutów; odległość zaś punktu od płaszczyzny pionowej rzutów zwie się *oddaleniem*.

18. Twierdzenie. — W jakimkolwiek *wykresie*: 1° *Oba rzuty jednego i tego samego punktu leżą na jednej prostej prostopadłej do osi rzutów* i odwrotnie; *dwa jakiekolwiek punkta wykresu, leżące na jednej linii rzutów, są rzutami jednego i tego samego punktu w przestrzeni*; 2° *Znamię punktu równa się odległości jego rzutu pionowego od osi rzutów; oddalenie zaś równa się odległości tejże osi od jego rzutu poziomego.*

W samej rzeczy: 1° Niech będzie punkt A dany i a, a'_1 jego dwa rzuty (*fig.* 9); płaszczyzna aAa'_1 jest prostopadła do obu płaszczyzn rzutów, przecięcia więc jej $a'_1\alpha$ i $a\alpha$ z temi płaszczyznami są prostopadłe do osi rzutów xy. Jeżeli więc teraz będziemy obracać na około linii xy płaszczyznę pionową aż do zlania się jej z płaszczyzną poziomą, prosta $a'_1\alpha$ zostanie ciągle prostopadłą do linii ziemnej xy i przypadnie na $\alpha a'$, która jest przedłużeniem $\alpha a'_1$, a zatem na wykresie dwa rzuty a, a' punktu A znajdują się po zrobieniu kładu płaszczyzny pionowej na jednej linii rzutów. Dla dowiedzenia odwrotności tego twierdzenia, zauważmy, że 1° na wykresie, z samego założenia wypada, rzuty uważane leżą na jednej prostej prostopadłej do osi rzutów, że 2° ta prostopadła do osi rzutów, po przywiedzeniu napowrót płaszczyzny pionowej do swego pierwotnego położenia dla odtworzenia

figury w przestrzeni, rozdzieli się na osi rzutów na dwie proste leżące na płaszczyznie prostopadłej do płaszczyzn rzutów; z powyższych danych wywnioskować możemy że rzucające odpowiednie punktom danym leżą na tej płaszczyznie i przecinają się właśnie na niej w punkcie przestrzeni którego rzuty są dane.

2° Figura $Aa'_1\alpha a$ jest prostokątem, wypada ztąd że $Aa = a'_1\alpha = a'\alpha$ i $Aa'_1 = a\alpha$, które to równości udawadniają dostatecznie drugiej części naszego twierdzenia.

Prosta aa' łącząca na wykresie dwa rzuty jednego i tegoż samego punktu (*fig.* 10) nosi nazwę *linii rzutów.*

Wniosek. — *Żeby dwie linije dane w przestrzeni przecinały się z sobą, potrzebnem i dostatecznem jest, żeby punkta przecięcia się ich rzutów tegoż samego nazwiska, leżały na jednej linii prostej prostopadłej do osi rzutów* (*fig.* 11). Niech będą ab, $a'b'$; cd, $c'd'$ rzuty dwu linij jakichkolwiek, żeby te linije przecinały się w przestrzeni potrzebnem i dostatecznem jest, żeby punkta przecięcia f i f', ich rzutów tegoż samego nazwiska, były rzutami jednego i tegoż samego punktu w przestrzeni, lub, na zasadzie powyżej podanego twierdzenia, żeby punkta f i f' leżały na jednej linii rzutów.

19. Znakowanie. — Oznaczać będziemy raz na zawsze : 1° wielkiemi literami A, B, C,... punkta figur danych w przestrzeni; 2° małemi odpowiedniemi literami $a, b, c, \ldots$ rzuty poziome; 3° temiż samemi małemi literami akcentowanemi $a', b', c', \ldots$ rzuty pionowe tychże samych punktów.

20. Części widzialne. — Dla oznaczenia części widzialnych na rysunku przyjętem jest raz na zawsze że oko obserwatora znajduje się w odległości nieskończenie wielkiej i na prostopadłej do płaszczyzny na którą dany przedmiot rzucamy, po nad płaszczyzną poziomą i przed płaszczyzną pionową.

Hipotezy te mają za cel zamienianie rzutów na perspektywę (§ **6**, **10** i **11**), której promienie widzenia, skutkiem położenia w jakiem się znajduje obserwator, są równoległe do odpowiednich linij rzucających.

Nadto, uważając płaszczyzny rzutów za nieprzezroczyste, wypływa, że obserwator będzie mógł tylko dostrzegać przedmioty znajdujące się w pierwszym kącie dwuściennym 1.

21. Wykonanie rysunku.— Na rysunkach Geometryi Wykreślnej znajdujemy zazwyczaj dwa rodzaje linij: 1° linije przedstawiające dane w zadaniu i linije wypadkowe; 2° linije pomocnicze. Na każdym rysunku części widzialne odnoszą się tylko do linij przedstawiających dane rzeczy w zadaniu i do linij wypadkowych; tak jedne jak drugie przedstawiają się czarnemi linijami ciągłemi jeżeli są widzialne i punktami okrągłemi (.....) czarnemi kiedy ich dostrzedz nie możemy.

Linije pomocnicze przedstawia się kreskami czarnemi przerywanemi (— — — — —) lub też linijami ciągłemi lecz czerwonemi.

Jeżeli przypadkowo jakaś linija pomocnicza jest dużego znaczenia przedstawia się ją wówczas liniją przerywaną kształtu (=.·.=.·.=.·.=.·.=) lub też liniją ciągłą niebieską.

ROZDZIAŁ II

SPOSOBY PRZEDSTAWIANIA PUNKTU, LINIJ I PŁASCZYZNY

22. Przedstawienie punktu. — Dla zupełnego wyczerpania kwestyi dotyczącej sposobów przedstawienia punktu za pomocą rzutów prostopadłych (ortogonalnych) ułożymy tutaj tabliczkę rozmaitych jego położeń względem płaszczyzn rzutów (*fig.* 12).

(a, a') Punkt leżący w kącie 1
(b, b') — — 2
(c, c') — — 3
(d, d') — — 4
(f, f') punkt leżący na płaszczyźnie pionowej po nad płaszczyzną poziomą;
(g, g') — — — pod — —
(h, h') — — poziomej za płaszczyzną pionową;
(i, i') — — — przed — —
(j, j') punkt leżący na osi rzutów;
(k, k') punkt leżący na płaszczyźnie dzielącej drugi kąt dwuścienny na dwie równe części;
(l, l') punkt leżący na płaszczyźnie dzielącej na dwie równe części czwarty kąt dwuścienny;
(m, m') Jeżeli założymy $m_\mu = m'_\mu$, znamię punktu równać się będzie jego oddaleniu od płaszczyzny pionowej rzutów, a sam punkt leżeć będzie na płaszczyźnie dzielącej na dwie równe części kąt dwuścienny 1.
(n, n') punkt leżący na płaszczyźnie dzielącej na dwie równe części kąt dwuścienny 3 dla którego mamy $n_\nu = n'_\nu$.

23. Usunięcie linii ziemnej (*fig.* 13). — Niech będą $m, n, p, \ldots$ $m', n', p', \ldots$ rzuty punktów jakiejkolwiek figury danej w przestrzeni i xy linija ziemna; przesuńmy tę liniję równolegle do jej pierwotnego położenia na odległość równą δ, *np.* do położenia x_1y_1; po tem przesunięciu wzniesienia rozmaitych punktów powiększą się lub zmniejszą o wielkość δ, gdy tymczasem oddalenia zmniejszą się lub powiększą o takąż samą wielkość.

Dla wytłomaczenia tego rezultatu dosyć jest przypuścić, że płaszczyzna pozioma została przesuniętą do góry lub na dół o wielkość δ i że płaszczyzna pionowa została przysunięta lub odsunięta o tęż samą wielkość.

Dla wielkiej liczby rysunków główną rolę odgrywa położenie względne punktów, a zatem, położenie ich względem płaszczyzn rzutów nie przedstawiając żadnego interesu, można bardzo często usunąć w zupełności liniję ziemną, pamiętając jednakże że kierunek tej linii, którego znajomość jest zawsze użyteczną, oznaczy się za pomocą linij rzutów, to jest za pomocą prostopadłych do osi rzutów istniejących na każdym bez wyjątku rysunku, na których leżą rzuty każdego z punktów uważanych.

Uwaga. — Z łatwością widzimy, że przesunięcie osi rzutów równolegle do jej pierwotnego położe-

nia, chociaż zmienia płaszczyzny spółrzędne nie wpływa jednakże bynajmniej na zmianę położenia płaszczyzny dzielącej na dwie równe części kąty dwuścienne 2 i 4, to jest że ta ostatnia płaszczyzna zachowuje położenie stałe.

PRZEDSTAWIENIE LINIJ

24. Przedstawienie linij. — Linija prosta przedstawioną jest zawsze przez swe dwa rzuty, rozpatrzmy więc szczególne dwa przypadki, na które w zastosowaniach natrafić możemy.

Płaszczyzna równoległa do płaszczyzny pionowej rzutów zwie się *płaszczyzną frontową* lub po prostu *obrazem lub frontem*, a figura narysowana na płaszczyznie obrazu zwie się figurą obrazu i mówić należy *prosta obrazu, koło obrazu, wielobok obrazu.* Linija leżąca na płaszczyznie równoległej do płaszczyzny poziomej zwie się: *pozioma* albo *linija zrównania.*

Płaszczyzna prostopadła do osi rzutów nosi nazwę *płaszczyzny profilu,* wszelka figura narysowana na tej płaszczyznie zwie się *figurą profilu,* powiemy np.: *prosta profilu, koło profilu, wielobok profilu.*

25. Twierdzenie. — *Rzut prostopadły lub ukośny jakiejkolwiek linii jest w naturalnej wielkości, jeżeli ta linija leży na płaszczyznie równoległej do płaszczyzny rzutów.* — W samej rzeczy, w tym przypadku linija i jej rzut przedstawiają przecięcie walca, rzucającego tę liniję, dwoma płaszczyznami równoległemi, a przesuwając jedno z tych przecięć równolegle de swego pierwotnego położenia i w kierunku rzucających doprowadzimy go do zlania się z drugiem.

26. Twierdzenie. — *Rzut prostopadły linii jakiejkolwiek lecz nie leżącej na płaszczyznie równoległej do płaszczyzny rzutów, jest mniejszy od linii rzuconej.* — Uważmy najprzód prostę AB która nie jest równoległą do płaszczyzny rzutów, rzućmy ją na *ab* i oznaczmy kąt jaki ona tworzy z płaszczyzną rzutów przez α; będzie, bardzo naturalnie, $ab = AB$ dos α, a zatem $AB > ab$ gdyż kąt α nie jest równym zeru. Własność której tu dowiedliśmy dla jakiejkolwiek prostej będzie także prawdziwą dla wszelkiej linii łamanej.

Uważmy obecnie łuk jakiejkolwiek krzywej, wiemy że długość tego łuku jest granicą obwodu linii łamanej wpisanej w uważany łuk, której boki zdążają do zera podług jakiegokolwiek dowolnego prawa. Wypada więc ztąd, że linija w przestrzeni i jej rzut są granicami obwodów obu linij łamanych zmiennych, z których jedna jest wpisaną w łuk dany, gdy tymczasem druga zostaje bezustannie rzutem pierwszej, a których boki tak jedne jak drugie mają za wspólną granicę zero. W ten sposób sprowadzamy odrazu nasze zadanie do podanego poprzednio. Dwa zadania odwrotne poprzedzającym, jeżeli uważać będziemy tylko rzuty ortogonalne, są także prawdziwe, gdyż obejmują one wszystkie możliwe przypadki i prowadzą przy hipotezach różnych, do wypadków zupełnie różnych, czyli że wypadki charakteryzują hipotezy a hipotezy wypadki, więc zadania odwrotne poprzedzającym są prawdziwe. — Streszczając możemy powiedzieć: *Żeby rzut prostopadły jakiejkolwiek linii na płaszczyznę, był równy naturalnej wielkości tej linii, niezbędnem jest żeby płaszczyzna, na której leży linija dana, była równoległą do płaszczyzny rzutów wziętej pod uwagę.*

27. Twierdzenie. — *Jeżeli jakakolwiek linija leży na płaszczyznie prostopadłej do jednej z płaszczyzn rzutów, to rzut jej na tę ostatnią płaszczyznę jest prostolinijny i odwrotnie.* W samej rzeczy, jeżeli linija jakakolwiek leży na płaszczyznie prostopadłej do jednej z płaszczyzn rzutów, rzucające odpowiednia

rozmaitym jej punktom leżą w płaszczyznie linii uważanej, prosta więc przecięcia płaszczyzny rzutów z płaszczyzną, na której leży linija w przestrzeni, jest rzutem tej ostatniej linii, zatem rzut ten jest prostolinijny.

Odwrotnie. — Jeżeli rzut jakiejkolwiek linii jest prostolinijny, rzucające rozmaitych jej punktów leżą wszystkie na płaszczyznie rzucającej, przechodzącej przez ten rzut i prostopadłej do płaszczyzny na którą wykonywamy rzut; ponieważ z drugiej strony linija dana w przestrzeni leży na płaszczyznie rzucającej, musi więc się znajdować na płaszczyznie prostopadłej do tej na którą rzut wykonywamy.

Wynik I. — *Jeżeli linija dana leży na płaszczyznie równoległej do jednej z płaszczyzn rzutów, rzut jej na drugą płaszczyznę rzutów jest równoległy do osi rzutów i odwrotnie.* — Wynik ten jest widocznym, gdyż z dowodzenia twierdzenia z którego on wypływa wypada, że rzut ten linii danej na drugą płaszczyznę rzutów jest śladem płaszczyzny, na której leży linija rzucona, na płaszczyznie rzutów którą ta płaszczyzna spotyka, i nadto że ten ślad jest koniecznie równoległym do osi rzutów.

Co do odwrotności, takowa, możemy powiedzieć natychmiast, jest widoczną; jeżeli bowiem jeden z rzutów linii danej jest równoległy do osi rzutów, wówczas odpowiednia płaszczyzna rzucająca jest równoległą do drugiej płaszczyzny rzutów, a w skutek tego, linija w przestrzeni, która leży na swej płaszczyznie rzucającej, znajduje się w rzeczywistości na płaszczyznie równoległej do tej z płaszczyzn rzutów na której nie leży rzut wzięty pod uwagę.

Wynik II. — *Jeżeli dana jakakolwiek linija leży na jednej z płaszczyzn rzutów, to rzut jej na drugą płaszczyznę rzutów przypada na linii ziemnej i odwrotnie.* — Własność ta jest tylko szczególnym przypadkiem poprzedzającej.

Wynik III. — *Linia profilu ma dwa rzuty prostolinijne i prostopadłe do osi rzutów w tymże samym punkcie i odwrotnie.*

Dla dowiedzenia niniejszego zadania dostatecznem będzie zastosować twierdzenie z którego ono wypływa, do obu rzutów linii uważanej.

Uwaga. — Rzuty wszystkich linij, leżących na jednej i tej samej płaszczyznie profilu, padają, jak tego dowodzi ostatni wynik poprzedniego twierdzenia, na ślady samej płaszczyzny, rzuty więc ich są niewyraźne, a zatem: *jakakolwiek linija profilu nie jest dostatecznie określoną przez swe rzuty.*

28. Twierdzenie. — *Żeby dwie linije wzięte dowolnie na dwu płaszczyznach rzutów wyznaczały linię w przestrzeni, niezbędnem i dostatecznem jest, żeby cztery ich punkta ostateczne brane w kierunku poprzecznym leżały po dwa na oddzielnych linijach rzutów.*

Warunek ten jest w samej rzeczy niezbędnym, gdyż:

1° gdyby, na rysunku przedstawiającym linię uważaną, dwie linije rzutów aa', bb' (*fig.* 14), odpowiadające punktom ostatecznym branym w kierunku poprzecznym, zchodziły się z sobą, linija rzucona znaleśćby się musiała na płaszczyznie profilu i w takim razie, byłaby niewyznaczoną (§ 27, Wyn. III, Uw.); otóż, chociaż przypadek podobny może mieć w rzeczywistości miejsce, odrzucimy go z tego względu, że szukamy tutaj warunków, którym zadość uczynić należy, żeby linija dana była wyznaczoną przez swe rzuty.

2° gdyby, na rzutach c, c' linii danej (*fig.* 15), ostateczne punkta brane w kierunku poprzecznym

nie leżały po dwa na oddzielnych linijach rzutów, znalazłyby się takie punkta, które mając np. rzut pionowy m' nie posiadałyby odpowiedniego rzutu poziomego, co jest niemożebnem. Wnosimy więc, jak to ma miejsce na figurze 16-ej, gdzie punkta ostateczne $(a, a')(b, b')$ leżą na odpowiednich linijach rzutów, że muszą one zawsze zadosyć czynić temu warunkowi, czyli że warunek ten jest niezbędnym.

Powiadamy że jest on dostatecznym; w samej rzeczy, jeżeli warunek ten jest dopełniony, możemy wybrać na dwu rzutach danych tyle par punktów bardzo bliskich siebie i połączonych linijami rzutów ile nam się podoba i otrzymać w ten sposób rzuty szeregu punktów także bardzo zbliżonych. Jeżeli obecnie będziemy zbliżać do siebie tak znalezione linije rzutów, otrzymamy w granicy ciąg nieprzerwany punktów, które utworzą liniję zazwyczaj krzywą, której rzutami będą właśnie dwie linije dane. Warunki tutaj podane będąc dopełnione, linija szukana będzie wyznaczoną w przestrzeni, a zatem warunki te są dostateczne.

Wynik. — *Żeby dwie linije wzięte dowolnie na dwu płaszczyznach rzutów wyznaczały w zupełności liniję w przestrzeni, niezbędnem i dostatecznem jest, żeby żadna z nich nie była prostopadłą do osi rzutów.*

29. *Śladami* jakiejkolwiek linii nazywamy punkta w których ona spotyka płaszczyzny rzutów; te z nich, które leżą na płaszczyznie pionowej rzutów zwią się *śladami pionowemi*, leżące zaś na płaszczyznie poziomej rzutów noszą nazwę *śladów poziomych.*

30. Zadanie. — *Znaleść ślady jakiejkolwiek linii której rzuty są dane* (*fig.* 17).— Niech l i l' będą rzutami jakiejkolwiek linii której chcemy wynaleść ślady np. na płaszczyznie pionowej rzutów. Punkta szukane znajdują się jednocześnie na linii L i na płaszczyznie pionowej rzutów, a zatem, jako należące do linii L, rzuty ich poziome winny się znajdować na linii l, a ponieważ nadto leżą one na płaszczyznie pionowej rzutów, rzuty ich na drugą z płaszczyzn spółrzędnych winny leżeć na osi rzutów xy, zatem rzuty poziome szukanych śladów pionowych znajdą się na wspólnem przecięciu prostych l i xy, to jest, w punktach v_1, v_2, v_3, v_4; z drugiej strony widzimy, że ślady pionowe szukane są swemi własnemi rzutami pionowemi, które winny leżeć zarazem na linijach rzutów poprowadzonych przez punkta v_1, v_2, v_3, v_4, i na rzucie pionowym linii danej, to jest na linii l', znajdą się więc one w punktach przecięcia tych prostych, to jest w punktach v_1', v_2', v_3', v_4'. Ślady poziome dadzą się otrzymać w sposób zupełnie podobny poprzedzającemu, który tylko co podaliśmy przy wyznaczaniu śladów pionowych. Z powyższego rozumowania wyprowadzić możemy następujące prawo: *Dla znalezienia śladu linii danej na jednej z płaszczyzn rzutów, należy przedłużyć do spotkania się z osią rzutów, rzut przeciwnego nazwiska tej linii i z punktu wspólnego przecięcia się tych dwóch linij poprowadzić prostopadłę do osi rzutów aż do spotkania się z drugim rzutem linii danej, punkt tak otrzymany będzie właśnie śladem szukanym.*

Części widzialne jakiejkolwiek linii względnie do płaszczyzn rzutów (*fig.* 17).—Dla oznaczenia części widzialnych jakiejkolwiek linii, należy przedewszystkiem nakreślić zapomocą metody podanej powyżej, ślady linii danej, następnie należy zauważyć że odcinki tej linii, zawarte pomiędzy śladami po sobie następującemi, znajdują się w jednym kącie dwuściennym utworzonym przez płaszczyzny spółrzędne, i że z tych odcinków te tylko są widzialne, które się znajdują w kącie dwuściennym 1 (§ 20).

Reguła ta została zastosowaną na figurze 17, na której stosownie do przyjętej umowy w paragrafie 21, zostały wyznaczone części widzialne rzutów jakiejkolwiek linii.

Ślady prostej. — Sposób znalezienia śladów jakiejkolwiek linii, podany powyżej, może być zastosowany bez zmiany do znalezienia śladów linii prostej; fig. 18 przedstawia jego zastosowanie do tego szczególnego przypadku.

31. Przecięcie jakiejkolwiek linii z płaszczyzną dzielącą na dwie równe części kąty dwuścienne 2 i 4. — Rzuty jakiegokolwiek punktu, leżącego na płaszczyznie dzielącej na dwie równe części kąty dwuścienne 2 i 4, zlewają się z sobą, więc punkta przecięcia dwu rzutów tej linii danej są właśnie rzutami punktów szukanych; jeżeli więc linija dana jest jakakolwiek, jak to ma miejsce na figurze 17, przecięcie się jej rzutów l, l' daje następujące punkta szukane (m_1, m'_1), (m_2, m'_2), (m_3, m'_3), (m_4, m'_4),...; jeżeli zaś linija dana d, d' (*fig.* 18) jest liniją prostą, otrzymamy tylko jeden punkt (m_1, m'_1) odpowiadający zadaniu.

32. Przecięcie jakiejkolwiek linii l, l' z płaszczyzną dzielącą na dwie równe części kąty dwuścienne 1 i 3 (*fig.* 19 i 20, tab. II). — Rzuty jakiegokolwiek punktu leżącego na płaszczyznie dzielącej na dwie równe części kąty dwuścienne 1 i 3, są symetrycznie położone względem osi rzutów; żeby więc wyznaczyć rzuty pionowe szukanych punktów przecięcia, jeżeli linija dana jest jakąkolwiek liniją krzywą (*fig.* 19), lub liniją prostą (*fig.* 20), należy przedewszystkiem nakreślić liniję pomocniczą l_1 symetryczną do l względem osi rzutów i znaleść punkta przecięcia tej linii pomocniczej z rzutem pionowym l' linii danej, a punkta w ten sposób otrzymane będą właśnie punktami szukanemi; znajdziemy więc: w przypadku figury 19 rzuty pionowe następujące m'_1, m'_2, m'_3, w przypadku zaś figury 20-ej punkt m'_1. Po dokonaniu tych wykreśleń, linije rzutów, przechodzące przez punkta tylko co znalezione, przecinając się z rzutem poziomym l linii danej, wyznaczą rzuty poziome punktów szukanych i otrzymamy: dla figury 19-ej punkta (m_1, m'_1), (m_2, m'_2), (m_3, m'_3), a dla figury 20-ej punkt (m_1, m'_1).

33. Zadanie. — *Znając ślady jakiejkolwiek prostej, znaleść jej rzuty* (*fig.* 18). — Niech będą: h ślad poziomy prostej danej i v' jej ślad pionowy; dla znalezienia rzutów tej prostej, szukajmy rzutów dwu jakichkolwiek z jej punktów; jeżeli przyjmiemy ślady h i v', które są swemi własnemi rzutami na płaszczyznach spółrzędnych na których one leżą, a których drugie rzuty leżą na przecięciu się osi rzutów z linijami rzutów przechodzącemi przez punkta h i v', znajdziemy rzuty (h, h') i (v, v'), dwu punktów prostej danej, a łącząc tak znalezione rzuty punktów prostemi hv i $h'v'$ otrzymamy rzuty prostej odpowiadające zadaniu.

34. Przedstawienie prostej. — Dla zupełnego wyczerpania kwestyi dotyczącej przedstawienia prostej przez swe rzuty, rozbierzemy tutaj rozmaite przypadki odpowiadające różnym położeniom, jakie dana prosta przyjmować może względem płaszczyzn rzutów.

1° *Proste pochyłe względem płaszczyzn rzutów i względem linii ziemnej.* — Wykresy utworzone przez takie proste są następujące:

Prosta jakakolwiek (*fig.* 21). — Kreśląc ślady tej prostej dostrzegamy że ona przechodzi przez trzy kąty dwuścienne i możemy oznaczyć jej części widzialne (§ 30).

Prosta pochyła spotykająca oś rzutów (*fig.* 22). — Ta prosta przechodzi tylko dwa kąty dwuścienne i ma dwa ślady v', h zlewające się w jednym punkcie na osi rzutów.

Prosta pochyła równoległa do płaszczyzny dzielącej na dwie równe części kąty dwuścienne (*fig.* 23, tab. II).— Punkt spotkania tej prostej z płaszczyzną dzielącą na dwie równe części kąty dwuścienne 2 i 4 znajduje się w nieskończoności, a zatem rzuty tej prostej d, d' muszą być równoległe (§ 31). Odwrotnie więc. Jeżeli rzuty jakiejkolwiek prostej są równoległe względem siebie na rysunku, prosta ta jest równoległą do płaszczyzny dzielącej na dwie równe części kąty dwuścienne 2 i 4.

Prosta pochyła leżąca na płaszczyznie dzielącej na dwie równe części kąty dwuścienne 2 i 4 (*fig.* 24, tab. II). — Rzuty rozmaitych punktów tej prostej winny się zlewać na rysunku w jeden; toż samo winno mieć miejsce z rzutami d, d' samej prostej.

Prosta pochyła leżąca na płaszczyznie dzielącej na dwie równe części kąty dwuścienne 1 i 3 (*fig.* 25, tab. II). — Rzuty rozmaitych punktów tej prostej, a tem samem i rzuty samej prostej, winny się zlewać na rysunku.

Prosta pochyła równoległa do płaszczyzny dzielącej na dwie równe części kąty dwuścienne 1 i 3 (*fig.* 26, tab. II).— Ta prosta winna zajmować na rysunku położenie równoległe do prostej o której mówiliśmy powyżej, zatem jej rzuty winny być jednakowo nachylone do osi rzutów.

2° *Prosta pochyła względem płaszczyzn spółrzędnych i prostopadła* (co do kierunku) *do osi rzutów* (*fig.* 27, tab. II). — Prosta ta znajduje się na płaszczyznie profilu i rzuty jej, prostopadłe do osi rzutów w jednym i tym samym punkcie, nie wystarczają do dokładnego oznaczenia jej położenia (§ 27. Uw.), widocznem jest jednakże, że oznaczając rzuty dwu punktów (a, a'), (b, b') tej prostej będzie ona w zupełności wyznaczoną; oto jest sposób którego używamy dla wyznaczenia położenia prostej leżącej na płaszczyznie profilu. Dla oznaczenia części widzialnych takiej prostej należy znaleść jej ślady; sposób ogólny podany powyżej nie mogąc jednakże być zastosowanym do przypadku którym się zajmujemy, uciec się musimy do metody osobnej którą tu podamy.

Zadanie. — *Znaleść ślady prostej profilu* (*fig.* 27, tab. II).

Pierwsze rozwiązanie (*fig.* 27, tab. II).— Obróćmy płaszczyznę profilu, na której leży prosta $(ab, a'b')$, na około swego śladu poziomego ab i zróbmy jej kład na płaszczyznę poziomą rzutów; podczas tego ruchu punkt a' opisuje na płaszczyznie pionowej rzutów łuk koła, którego środkiem jest punkt α, aż do spotkania się z osią rzutów w punkcie a'_1; rzucające punktu A przypadają w kładzie na prostych α_1, α'_1 przechodzących przez punkta a, a'_1 i prostopadłych odpowiednio do prostych ab i xy; punkt ich wspólnego przecięcia A_1 tworzy ślad punktu A. Kład B_1 drugiego punktu B prostej danej otrzymuje się w sposób zupełnie podobny do poprzedzającego, łącząc więc punkta A_1, B_1 liniją prostą A_1B_1 i przedłużając ją na obie strony, otrzymamy, w punktach przecięcia się tej prostej raz z prostą ab drugi raz z osią rzutów xy, punkta h i v' które są właśnie śladami szukanemi.

Powróćmy obecnie płaszczyznę profilu do swego pierwotnego położenia; punkt h pozostanie nieruchomym na prostej ruchomej i na płaszczyznie poziomej rzutów, jest więc on śladem poziomym prostej danej; punkt v'_1 opisze na płaszczyznie pionowej rzutów łuk koła, którego środkiem jest punkt α i przypadnie, nie opuszczając podczas tego ruchu ani prostej, ani płaszczyzny pionowej, w punkcie v'; ten ostatni punkt musi więc być szukanym śladem pionowym prostej danej.

Drugie rozwiązanie (*fig.* 28, tab. II).—Niech będzie prosta dana ab, $a'b'$, żeby znaleść jej ślady rzućmy ją na płaszczyznę poziomą rzutów, przyjmując za punkt zbiegu rzutów jakikolwiek punkt płaszczyzny pionowej np. s, s'; w tym celu nakreślmy proste $sa, s'a'$, wyznaczające rzucającą stożkową punktu A,

którego rzut poziomy α przedstawia rzut zbieżny pierwszego punktu prostej profilu; rzut zbieżny β, drugiego punktu tejże prostej, wyznaczy się w sposób podobny do poprzedniego, zatem łącząc tak otrzymane punkta z sobą, znajdziemy najprzód szukany rzut zbieżny $\alpha\beta$, a następnie punkta przecięcia h i v'_1 tej prostej przedłużonej, z osią rzutów xy i z prostą ab.

Zauważmy obecnie : 1° że wszelki punkt płaszczyzny poziomej rzutów jest nietylko swym własnym rzutem ortogonalnym, lecz nadto swym własnym rzutem zbieżnym; 2° że rzuty zbieżne punktów płaszczyzny pionowej rzutów leżą na osi rzutów; widzimy więc, że punkt h jest rzutem zbieżnym szukanego śladu poziomego czyli tym śladem, a punkt v'_1 jest rzutem zbieżnym śladu pionowego, który leży w punkcie v' przecięcia rzucającej stożkowej $s'v'_1$ z prostą ab. Zadanie to da się jeszcze rozwiązać inaczej, posługując się rzutami walcowemi wykonanemi w kierunku linii obrazu. Po podaniu tych rozwiązań, zajmijmy się na nowo roztrząsaniem kwestyj dotyczących szczególnych położeń linij prostych.

3° *Prosta dana jest prostą obrazu* (*fig.* 29, tab. II). — Rzut poziomy d tej prostej jest równoległy do osi rzutów (§ 27. Wyn. 1), rzut zaś jej pionowy d' jakikolwiek i na nim pewna część prostej jest widzialną w naturalnej wielkości (§ 25).

4° *Prosta pozioma* (*fig.* 30, tab. II). — Z powyższego wypada, że rzut pionowy takiej prostej jest równoległy do osi rzutów, tymczasem rzut jej poziomy jakikolwiek obejmuje daną prostę w naturalnej wielkości.

5° *Prosta równoległa do płaszczyzn spółrzędnych* (*fig* 31, tab. II). — Oba rzuty takiej prostej są równoległe do linii ziemnej i jakikolwiek jej odcinek przedstawia się w rzucie na którąkolwiek z płaszczyzn rzutów, w naturalnej wielkości.

6° *Prosta prostopadła do płaszczyzny pionowej rzutów* (*fig.* 32, tab. II).— Rzut pionowy takiej prostej sprowadza się do jednego punktu d' (§ 12), rzut zaś jej poziomy d zlewa się z prostopadłą do osi rzutów poprowadzoną przez ten punkt d' (§ 27. Wyn. III).

7° *Prosta prostopadła do płaszczyzny poziomej rzutów* (*fig.* 33, tab. II). — W tym przypadku rzut poziomy sprowadza się do jednego punktu d, a rzut pionowy d' zlewa się z prostopadłą do linii ziemnej poprowadzoną przez punkt d.

WZGLĘDNE POŁOŻENIA PROSTYCH

35. Dwie proste dane mogą zajmować w przestrzeni jedno z trzech następujących położeń :

1° mogą się przecinać,

2° mogą być równoległe,

3° mogą nie leżeć na jednej płaszczyznie.

Żeby można było wyznaczyć położenie dwu prostych na danym rysunku przypomnijmy przedewszystkiem 1° że rzuty tegoż samego nazwiska dwu prostych przecinających się (d, d'), (d_1, d'_1) krzyżują się w dwu punktach m, m' (*fig.* 34, tab. II) leżących na jednej linii rzutów (§ 18, Wn.); 2° że rzuty tegoż samego nazwiska dwu prostych równoległych (d, d'), (d_1, d'_1) są względem siebie równoległe. Odwrotności tych dwu własności będąc także prawdziwe, widzimy, że dwie proste (d, d'), (d_1, d'_1) nie leżą na jednej płaszczyznie (*fig.* 36, tab. II), jeżeli warunki charakteryzujące dwa pierwsze przypadki nie są dopełnione.

36. Zadanie. — *Oznaczyć położenie względne dwu prostych* $(ab, a'b')$, $(cd, c'd')$ *leżących na jednej i tej samej płaszczyznie profilu.*

Pierwsze rozwiązanie (*fig.* 37, tab. II). — Zasadzając się na metodach podanych powyżej (§ 34. 2°) można, nie zmieniając położenia względnego prostych danych, zrobić ich kład na około śladu poziomego płaszczyzny profilu na której one leżą w $A_1B_1C_1D_1$ i oznaczyć wprost na tym kładzie ich położenie względne; w przypadku którym się zajmujemy, proste dane przecinają się w punkcie, którego kładem jest punkt M_1. Gdybyśmy, obecnie, po zrobieniu kładu, życzyli znaleść, rzuty punktu przecięcia w kładzie M_1, w przypadku odpowiadającym dwu prostym nierównoległym, należałoby, wychodząc z punktu M_1, zrobić wykreślenie odwrotne temu, którego użyliśmy do zrobienia kładu jakiegokolwiek z punktów danych; postępując w ten sposób znajdziemy rzuty m, m' punktu spotkania prostych profilu.

Drugie rozwiązanie. — Rozwiązanie które w tej chwili podajemy zasadza się na następującej uwadze: *Żeby dwie proste leżące na jednej płaszczyznie lub na dwu płaszczyznach równoległych były względem siebie równoległe, niezbędnem i dostatecznem jest, żeby ich rzuty ukośne, na dwie płaszczyzny równoległe wzięte w tym samym kierunku, były równoległe.* W samej rzeczy, niech będą dwie proste $(ab, a'b')$, $(cd, c'd')$ których rzuty są dane (*fig.* 38, tab. II); przesuńmy oś rzutów równolegle do swego pierwotnego położenia w x_1y_1 tak, żeby punkt d leżał na niej a zatem punkt d, d' na płaszczyznie poziomej rzutów; następnie rzućmy na tę nową płaszczyznę rzutów w kierunku prostej obrazu $c\gamma$, $c'\gamma'$, dowolnie obranej, prostę cd, $c'd'$; rzut ukośny punktu c, c' wyznaczy się śladem poziomym γ rzucającej $c\gamma$, $c'\gamma'$, a ponieważ punkt d leżący na płaszczyznie poziomej, która obecnie jest płaszczyzną poziomą rzutów, jest swym własnym rzutem ukośnym, otrzymamy więc rzut ukośny pierwszej prostej danej łącząc punkta d i γ liniją prostą. Rzut ukośny $b\alpha$ drugiej prostej danej, na płaszczyznie poziomej rzutów utworzonej kreśląc nową oś rzutów x_2y_2 otrzymamy w taki sam sposób jak powyżej. Jeżeli więc obecnie rzuty $b\alpha$ i $d\gamma$ są względem siebie równoległe, proste leżące na płaszczyznie profilu będą także równoległe, w przeciwnym razie proste dane przetną się z sobą.

Używając tylko jednej płaszczyzny poziomej rzutów, otrzymalibyśmy, za pomocą metody rzutów ukośnych, nie tylko położenie względne dwu prostych, lecz nadto rzuty punktu wspólnego ich przecięcia jeżeli te proste się krzyżują. Wykonanie odpowiedniego rysunku zostawiamy czytelnikowi celem bardzo użytecznego ćwiczenia.

37. **Zadanie.** — *Znaleść położenia względne dwu prostych leżących na dwu płaszczyznach profilu.*

Zadanie to jest tylko uogólnieniem zadania poprzedzającego, i rozwiązanie podane dla tego ostatniego może być bezzmiennie zastosowanem do niniejszego; ze względu jednakże na objaśnienia które podaliśmy powyżej, kwestya nasza nie przedstawia żadnych trudności, w skutek więc tego postaramy się podać tu inne rozwiązanie nieco prostsze od poprzedzającego, które także daje się zastosować do szczególnego przypadku już rozwiązanego i prowadzi do wykreśleń nieco krótszych od podanych poprzednio.

Niech będą $(ab, a'b')$, $(cd, c'd')$ dwie proste dane (*fig.* 39, tab. II), żeby te proste były równoległe, potrzebnem i dostatecznem jest, żeby proste pomocnicze $(ac, a'c')$, $(bd, b'd')$ otrzymane z połączenia z sobą po dwa punktów pierwszych prostych, leżały na jednej płaszczyznie; w ten sposób zadanie sprowadza się do przypadku ogólnego; w samej rzeczy, obecnie winniśmy znaleść położenia względne dwu prostych jakichkolwiek $(ac, a'c')$, $(bd, b'd')$ nie leżących na płaszczyznie profilu; na naszym rysunku widzimy, że punkta przecięcia rzutów różnego nazwiska f', g tych prostych nie leżą na jednej prostopadłej do osi rzutów, a zatem tak te proste, jak i proste leżące na płaszczyznach profilu, nie znajdują się na jednej płaszczyznie.

Za pomocą sposobu podanego tutaj, możemy, jak to powiedzieliśmy powyżej, rozwiązać zadanie podane w paragrafie 36; w samej rzeczy, niech będą $(ab, a'b')$, $(\gamma\delta, \gamma'\delta')$ rzuty punktów służących do wyznaczenia prostych danych na jednej płaszczyznie profilu (*fig.* 39, tab. II); dla przekonania się czy te proste są równoległe, posuńmy jednę z nich np. $(\gamma\delta, \gamma'\delta')$ równolegle do jej pierwotnego położenia i w kierunku osi rzutów; prosta ta przyjmie, na dowolnie obranej płaszczyznie profilu, położenie $(cd, c'd')$ wyznaczone przez przecięcie się śladów płaszczyzny pomocniczej z prostemi, równoległemi do osi rzutów xy, przechodzącemi przez punkta $\gamma\gamma'$, $\delta\delta'$. W tej chwili już możemy zastąpić prostę $(\gamma\delta, \gamma'\delta')$ przez $(cd, c'd')$ i powrócić do zadania które jest przedmiotem niniejszego paragrafu.

38. Zadanie. — *Znaleść położenia względne prostej jakiejkolwiek i prostej profilu* (*fig.* 40, tab. II).— Usuńmy oś rzutów (§ 23). Niech będą $(ab, a'b')$ i (d, d') proste dane, żeby te proste się przecinały potrzebnem i dostatecznem jest, żeby punkta (a, a'), (b, b') i punkt przecięcia (c, c') prostej (d, d'), z płaszczyzną profilu przechodzącą przez drugą prostę daną, leżały na jednej linii prostej, lub żeby rzuty tych punktów, na jakąkolwiek płaszczyznę i w jakimkolwiek systemacie, leżały na jednej prostej; w tym celu rzućmy je walcowo w kierunku prostej (d, d') na płaszczyznę dzielącą na dwie równe części kąty dwuścienne 2 i 4 (§ 23, Uw.), a znajdziemy, dla przypadku przedstawionego rysunkiem, że trzy punkta (α, α'), (β, β') i (γ, γ') leżą na jednej prostej, czyli że proste dane przecinają się.

PRZEDSTAWIANIE PŁASCZYZNY

39. — Płaszczyzna w przestrzeni może być przedstawiona: jużto przez dwie proste, bądź równoległe, bądź przecinające się; jużto przez trzy punkta nie leżące na jednej linii prostej; jużteż przez jedną prostę i punkt zewnątrz niej leżący i t. d. Zazwyczaj przyjętem zostało oznaczać płaszczyznę dwoma prostemi podług których przecina ona dwie płaszczyzny rzutów; proste te zwią się śladami płaszczyzny danej. Płaszczyzna dana ma z płaszczyznami rzutów jeden tylko punkt wspólny leżący na trzech prostych wspólnego przecięcia tych trzech płaszczyzn branych po dwie; otóż te proste, które są śladami płaszczyzny uważanej, zbiegają się z osią rzutów w jednym punkcie, który w przypadku równoległości płaszczyzny danej do linii ziemnej, oddali się do nieskończoności, czyli streszczając mamy: *Ślady płaszczyzny przecinają oś rzutów w jednym tylko punkcie, leżącym w odległości nieskończenie wielkiej jeżeli płaszczyzna jest równoległa do osi rzutów.*

40. Twierdzenie. — *Jeżeli prosta jest prostopadła do płaszczyzny to rzuty jej ortogonalne są prostopadłe do śladów płaszczyzny* (*fig.* 41, tab. III).— Dowodzenie tego twierdzenia przeprowadzone dla jednej którejkolwiek płaszczyzny rzutów, jest dostateczne. Niech więc będzie P, ab płaszczyzna dana i jej ślad; D, R i d prosta prostopadła do płaszczyzny P, jej płaszczyzna rzucająca i rzut jej na płaszczyznę Q; płaszczyzna R jest zarazem prostopadła do płaszczyzny rzutów Q i do płaszczyzny danej P, gdyż obejmuje ona wszystkie rzucające punktów prostej danej D i samą prostę. Rzucające te i prosta są znów prostopadłe: pierwsze, z wykreślenia, do płaszczyzny rzutów a ostatnia, z założenia, do płaszczyzny P. Płaszczyzna R jest więc prostopadła do wspólnego przecięcia ab płaszczyzn P i Q; odwrotnie, ab jest prostopadła do płaszczyzny R a zatem i do wszystkich prostych leżących na płaszczyznie a zatem i do rzutu d prostej danej. Widzimy więc, że ślad ab płaszczyzny P jest prostopadły do rzutu d prostej danej D.

41. Odwrotnie. — *Jeżeli na dwu płaszczyznach rzutów, rzuty ortogonalne prostej są odpowiednio prostopadłe do śladów płaszczyzny, prosta jest prostopadłą do płaszczyzny.* — Zachowajmy tak figurę jako też i notacye przyjęte przy dowodzeniu tego twierdzenia wprost i zanim przystąpimy do dowodzenia odwrotności, zauważmy, że aby twierdzenie wprost było prawdziwe, trzeba, żeby rzuty prostej były prostopadłe do śladów płaszczyzny na dwu płaszczyznach rzutów, inaczej bowiem na płaszczyznie R możemy sobie wystawić nieskończoną liczbę prostych nieprostopadłych do płaszczyzny P, których rzut wspólny będzie jednakże miał miejsce na prostej *d*. Zajmijmy się obecnie samem dowodzeniem i zauważmy że płaszczyzny Q i R są do siebie prostopadłe a zatem i prosta *ab* prostopadła do ich wspólnego przecięcia *d* na jednej z nich Q, jest prostopadłą także do drugiej R. Z powyższego wnosimy, że płaszczyzna P, na której leży prosta wspólnego przecięcia; jest także prostopadła do płaszczyzny R, czyli odwrotnie, płaszczyzna R jest prostopadła do płaszczyzny P.

Jedna z płaszczyzn rzucających prostę D będąc prostopadłą do płaszczyzny danej P, druga płaszczyzna rzucająca musi być także do niej prostopadłą, a zatem prosta przecięcia D tych dwu płaszczyzn musi być także prostopadłą do płaszczyzny danej P.

42. Twierdzenie. — *Rzut ortogonalny kąta prostego na płaszczyznę równoległą do jednego z jego boków jest w naturalnej wielkości* (*fig.* 42, tab. III). — Niech będą ABC i *abc* kąt prosty i jego rzut na płaszczyznę Q równoległą do jednego z jego boków np. do boku AB. Prosta AB równoległa do płaszczyzny Q jest prostopadła do rzucającej B*b* wierzchołka; nadto z założenia jest ona prostopadła do prostej BC a zatem jest ona także prostopadła do płaszczyzny S przedstawionej przez te dwie proste, zkąd wypływa że płaszczyzna rzucająca R jest także prostopadła do płaszczyzny S, więc kąt dwuścienny R, S utworzony przez te dwie płaszczyzny jest kątem prostym, a ponieważ jego ściany są odpowiednio prostopadłe do płaszczyzn rzutów, kąt więc *abc* który jest kątem płaskim dwuściennego R, S musi być kątem prostym.

Niniejsze twierdzenie, zawierające dwie hipotezy i jedno rozwiązanie, prowadzi do dwu odwrotności, których prawdziwość podajemy w następującem dowodzeniu.

43. Pierwsza odwrotność. — *Jakikolwiek kąt jest prostym jeżeli jego rzut na płaszczyznę równoległą do jednego z jego boków jest kątem prostym.* — Zachowując figurę i notacye poprzedzającego paragrafu i przypuszczając że kąt *abc* jest prosty, powiadamy, że kąt dwuścienny R, S musi być także kątem prostym i prosta *ab* prostopadłą do płaszczyzny S. Bok AB będąc równoległy do płaszczyzny rzutów Q, będzie także prostopadły do płaszczyzny S, będzie więc prostopadły do wszystkich prostych na niej leżących a w szczególności do boku BC, czyli że ten kąt jest rzeczywiście prostym.

44. Druga odwrotność. — *Jeżeli rzut na płaszczyznie jakiegokolwiek kąta prostego jest w naturalnej wielkości ten kąt ma przynajmniej jeden ze swych boków równoległy do płaszczyzny rzutów.* — Zachowajmy figurę i notacye (§ 42). Kąty *abc* i ABC są proste z założenia, chcemy dowieść, że jeżeli jeden z jego boków np. BC nie jest równoległy do płaszczyzny Q, drugi jego bok AB musi być równoległym. W samej rzeczy, kąt *abc* będąc prosty, kąt dwuścienny utworzony przez płaszczyzny R, S musi być także prostym, w skutek tego boki kąta płaskiego muszą być prostopadłe do ścian na których nie leżą i równoległe do płaszczyzny rzutu Q; z drugiej strony, prosta BC nie jest równoległą do płaszczyzny Q a zatem nie jest ona równoległą do *bc* nie jest więc ona także prostopadłą do płaszczyzny R,

wynika ztąd, że jedyna prosta płaszczyzny R prostopadła do BC jest prosta AB, a zatem ta prosta jest jedną z krawędzi kąta płaskiego mierzącego kąt dwuścienny utworzony przez płaszczyzny R i S, i jest ona równoległą do płaszczyzny Q.

POŁOŻENIA JAKIEJKOLWIEK PŁASZCZYZNY WZGLĘDEM PŁASZCZYZN RZUTÓW

45. *Płaszczyzna dana jest pochyła względem płaszczyzn rzutów* (*fig.* 43, tab. III). — Płaszczyzna taka przecina wszystkie cztery kąty dwuścienne utworzone przez płaszczyzny rzutów, a figura wskazuje części widzialne jej śladów $P\alpha P'$.

46. *Płaszczyzna dana jest prostopadła do płaszczyzny dzielącej na dwie równe części kąty dwuścienne* 2 i 4 (*fig.* 44, tab. III). —Ślady $P\alpha P'$ tej płaszczyzny zchodzą się z sobą na rysunku. W samej rzeczy, płaszczyzna ta winna być prostopadłą do jakiejkolwiek prostej, leżącej na płaszczyznie dzielącej na dwie równe części kąty dwuścienne 2 i 4, której rzuty d i d' zchodzą się z sobą (§ 34), ślady zatem płaszczyzny także muszą się z sobą zchodzić.

Odwrotnie: jeżeli ślady $P\alpha P'$ jakiejś płaszczyzny zchodzą się z sobą, płaszczyzna ta jest prostopadłą do płaszczyzny dzielącej na dwie równe części kąty dwuścienne 2 i 4. W samej rzeczy, rzuty d i d' prostej, leżącej na płaszczyznie dzielącej na dwie równe części kąty dwuścienne 2 i 4, zchodzą się z sobą na prostopadłej do $P\alpha P'$, zatem płaszczyzna ta jest prostopadłą do płaszczyzny dzielącej na dwie równe części kąty dwuścienne 2 i 4.

47. *Płaszczyzna dana jest płaszczyzną profilu* (*fig.* 45, tab. III). — Ślady jej $P\alpha P'$ zchodzą się z sobą i są prostopadłe do linii ziemnej.

48. *Płaszczyzna dana jest prostopadłą do płaszczyzny dzielącej na dwie równe części kąty dwuścienne* 1 i 3 (*fig.* 46, tab. III). — Dowodzenie zupełnie podobne do podanego w paragrafie 46 doprowadzi nas do wykazania, że ślady tej płaszczyzny są symetrycznie rozłożone względem linii ziemnej i odwrotnie.

49. *Płaszczyzna dana jest prostopadłą do płaszczyzny pionowej rzutów* (*fig.* 47, tab. III). — Ślad pionowy $\alpha P'$ takiej płaszczyzny jest jakikolwiek, ślad jej zaś poziomy αP, jako przecięcie się dwu płaszczyzn prostopadłych do płaszczyzny pionowej rzutów, jest prostopadły do tej ostatniej płaszczyzny, a tem samem i do linii ziemnej. Dowodzenie odwrotności tego zadania nie przedstawia żadnych trudności.

50. *Płaszczyzna dana jest prostopadła do płaszczyzny poziomej rzutów* (*fig.* 48, tab. III). — W tym przypadku, zupełnie podobnym do poprzedzającego, ślad poziomy αP płaszczyzny danej jest jakikolwiek, ślad zaś jej pionowy $\alpha P'$ jest prostopadły do linii ziemnej.

51. *Płaszczyzna dana jest równoległa do płaszczyzny pionowej rzutów* (*fig.* 49, tab. III). — Ślad poziomy takiej płaszczyzny, jako powstały z przecięcia płaszczyzny poziomej rzutów z płaszczyzną równoległą do płaszczyzny pionowej rzutów, jest równoległy do linii wspólnego przecięcia płaszczyzn rzutów, to jest do linii ziemnej, ślad zaś jej pionowy leży na płaszczyznie pionowej rzutów w odległości nieskończenie wielkiej.

52. *Płaszczyzna dana jest równoległa do płaszczyzny poziomej rzutów* (*fig.* 50, tab. III). — Widzimy,

przez analogię, że ślad pionowy P′ takiej płaszczyzny jest równoległy do osi rzutów xy, ślad jej zaś na drugiej płaszczyznie spółrzędnych jest prostą w nieskończoności tej płaszczyzny.

53. *Płaszczyzna dana jest równoległa do osi rzutów* (*fig.* 51, tab. III). — Ponieważ przecięcia wszelkiej płaszczyzny przeprowadzonej przez oś rzutów z płaszczyzną równoległą do tej osi, są równoległe do osi rzutów, zatem oba ślady P, P′ płaszczyzny danej muszą być równoległe do osi rzutów.

54. *Płaszczyzna dana przechodzi przez oś rzutów* (*fig.* 52, tab. III). — Położenie takiej płaszczyzny nie może być wyznaczonem przez jej dwa ślady, które w tym przypadku zchodzą się z osią rzutów xy, potrzeba więc, dla oznaczenia położenia takiej płaszczyzny, znać rzuty m, m' jednego z jej punktów nie leżącego na osi rzutów xy.

ROZDZIAŁ III

ZADANIA DOTYCZĄCE LINII PROSTEJ I PŁASCZYZNY

55. **Zadanie 1.** — *Przez punkt dany nakreślić prostę równoległą do prostej danej* (*fig.* 53, tab. III). — Niech będą $(ab, a'b')$ i (c, c') rzuty prostej danej i punktu; rzuty prostej szukanej winny przechodzić przez punkt c, c' i być równoległe odpowiednio do rzutów ab, $a'b'$ prostej danej, wykreślenie więc ich nie przedstawia żadnej trudności; jednakże postępowanie to może być tylko stosowane do prostych, które nie są prostemi profilu; w tym bowiem ostatnim przypadku należy użyć innego sposobu, który podajemy poniżej.

Niech będą (a, a'), (b, b') (*fig.* 54, tab. III) rzuty dwu punktów wyznaczających daną prostę profilu i c, c' rzuty punktu przez który winna przechodzić prosta szukana równoległa do prostej danej.

Nakreślmy prostę ac, $a'c'$ i przez punkt b, b' poprowadźmy do niej równoległą, która w punkcie dotknięcia płaszczyzny profilu na której leży punkt c, c' wyznaczy drugi punkt d, d' prostej szukanej. Dwie płaszczyzny profilu PP′ i QQ′ przecinając się z płaszczyzną przechodzącą przez trzy punkta dane wyznaczają dwie proste równoległe (ab, ab') i $(cd, c'd')$ z których ostatnia jest właśnie rozwiązaniem danego zadania.

Sposób postępowania który podajemy, nie może być używanym jeżeli rzuty punktu D wychodzą z granic rysunku; nie będzie on także odpowiednim jeżeli dla rozwiązania zadania należy obrać naprzód punkt na prostej szukanej, lecz nawet i to ostatnie przypuszczenie nie jest dostatecznem, gdyż punkt o którym mowa musi się znajdować na prostej szukanej, zadanie to będzie więc rozwiązane w zupełności i w całej ogólności dopiero po znalezieniu drugiego rzutu punktu, którego pierwszy rzut jest znany.

Dla wykazania tego, weźmy na nowo (*fig.* 55, tab. III) punkta dane (a,a'), (b,b') i (c,c') i niech będzie d rzut poziomy punktu należącego do prostej równoległej, uważmy, dla znalezienia drugiego jego rzutu, proste AC, BD i szukajmy ich rzutów; na płaszczyznie poziomej rzutów znajdujemy natychmiast proste ac, bd a na płaszczyznie pionowej rzutów, prostę $a'c'$; następnie, ponieważ proste AC, BD leżą na jednej płaszczyznie i przecinają się z sobą w punkcie, którego rzutem poziomym jest punkt m leżący na rzutach tegoż samego nazwiska prostych, a którego rzut pionowy znajduje się

w punkcie spotkania m' linii rzutów przechodzącej przez punkt m z prostą $a'c'$, zatem widzimy, że rzut pionowy prostej BD jest prostą łączącą punkta b' z m', a punkt w którym ta prosta spotyka płaszczyznę rzutów QQ' jest właśnie drugim rzutem szukanym.

56. Punkta oddalone. — *Punktami oddalonemi* nazywać będziemy punkta niezbędne do wykonania rysunku a leżące po za jego granicami. Jeżeli rysunek przedstawia takie punkta, to zamiast uciekać się do innego arkusza papieru, który to sposób nie przedstawia nigdy dostatecznej ścisłości i nie może być użytym w kamieniarce lub ciosełce (dla których zazwyczaj rysunki kreślą się na murach lub na podłogach), należy zmniejszyć wymiary figury danej kreśląc jej figurę *podobną*.

Zadanie II. — *Oznaczyć punkt oddalony dwu prostych danych.* — Niech będą (d, d') i (δ, δ') rzuty dwu prostych danych (*fig.* 56, tab. III); weźmy za środek figury *podobnej* punkt przecięcia S dwu prostych d, d' i za stosunek *podobieństwa* np. $\frac{1}{2}$ i nakreślmy figurę *podobną* figury danej. Proste d, d' są swemi własnemi *odpowiednemi*; punkt a przypada w środku a_1 prostej Sa; proste więc *odpowiedne* prostym δ, δ' otrzymamy kreśląc z punktu a_1 równoległe δ_1, δ'_1; jeżeli obecnie, jak to zrobiliśmy na naszym rysunku, punkta przecięcia b_1, b'_1 prostych (d, δ_1), (d', δ'_1) leżą na jednej linii rzutów, proste te przecinają się z sobą i jeżeli poprowadzimy prostę Sc_1 równoległą do osi rzutów, to punkt przecięcia się S będzie wyznaczony: 1° przez swe wzniesienie (znamię) równe $2c_1b_1' + c_1\beta_1$; 2° przez swe oddalenie równe $2c_1b_1 + c_1\beta_1$ i 3° przez swą odległość poprzeczną 2Sc_1 liczoną na prawo od punktu S.

57. Zadanie III. — *Znaleźć rzuty prostej leżącej na płaszczyznie.*

1° *Płaszczyzna dana jest wyznaczoną przez swe ślady* αP, $\alpha P'$ (*fig.* 57, tab. III). — Obierzmy na śladzie pionowym płaszczyzny punkt np. v' a na śladzie jej poziomym punkt h i nakreślmy rzuty vh i $v'h'$ tej prostej. Toż samo wykreślenie, tylko zmieniając nieco jego porządek, pozwala znaleźć jeden z rzutów prostej leżącej na płaszczyznie danej przez swe ślady, znając drugi jej rzut.

2° *Płaszczyzna jest dana przez trzy punkta* (*fig.* 58, tab. III). — Niech będą A, B, C, punkta dane, obierzmy dowolnie jeden z rzutów d' prostej szukanej i nakreślmy rzuty $(ab, a'b')$, $(bc, b'c')$ prostych łączących punkta A z B i B z C; przez przecięcie się prostych $a'b'$, $b'c'$ z d' otrzymamy na płaszczyznie pionowej rzuty m', m'_1 punktów, w których prosta szukana przecina proste AB, BC; kreśląc więc obecnie linije rzutów przez punkta m', m'_1 znajdziemy rzuty ich na płaszczyznie poziomej rzutów w m, m_1 na rzutach ab, cb prostych, które wyznaczą nam właśnie dwa punkta rzutu poziomego prostej szukanej, a łącząc je z sobą linią prostą m, m_1 otrzymamy sam rzut poziomy prostej szukanej.

58. Częstokroć zdarza się w rysunkach używać prostych, które, leżąc na danej płaszczyznie, są równoległe jużto do jej śladu pionowego, jużteż do jej śladu poziomego; pierwsze z tych prostych zwią się *linijami obrazu płaszczyzny*, drugie zaś *poziomemi płaszczyzny*.

Oznaczmy rzuty prostej obrazu płaszczyzny. — Kwestya którą się w tej chwili zająć życzymy jest tylko szczególnym przypadkiem kwestyi ogólnej i winna być traktowaną w ten sam sposób co kwestya ogólna, wskutek jednakże ciągłych zastosowań, wykreślenia już podanego, przy rozwiązywaniu zadań, podajemy go tu po raz drugi.

1° *Płaszczyzna jest oznaczona przez swe ślady* (*fig.* 59, tab. III). — Rzut poziomy d prostej obrazu jest

równoległy do osi rzutów dowolnie obranej; rzut jej zaś pionowy oznaczy się w sposób następujący: wiemy, że ślad poziomy prostej winien leżeć zarazem na rzucie poziomym d prostej i na śladzie poziomym P płaszczyzny danej, zatem winien on się znajdować w punkcie h ich wspólnego przecięcia, którego rzut pionowy znajduje się w punkcie h' przecięcia się osi rzutów z liniją rzutów poprowadzoną przez punkt h; kreśląc więc przez punkt h', równolegle do śladu pionowego P' płaszczyzny danej, prostę d', otrzymamy drugi rzut szukany prostej obrazu płaszczyzny.

2° *Płaszczyzna jest oznaczona przez dwie proste przecinające się* (*fig.* 60, tab. III). — Przyjmując mm_1 za rzut poziomy prostej szukanej w położeniu dowolnem lecz równoległem do osi rzutów, znajdziemy, na mocy dowodzenia podanego w poprzedzającym ustępie, drugi jej rzut $m'm'_1$, to jest rzut pionowy. Postępując w taki sam sposób jak powyżej, znajdziemy, na figurach 61 i 62, rzuty *poziomej* płaszczyzny, kiedy ta płaszczyzna jest wyznaczoną przez swe ślady P i P' lub kiedy ona jest daną przez dwie proste przecinające się (d, d'), (d_1, d'_1).

59. Zadanie IV. — *Znaleźć rzuty punktu leżącego na płaszczyznie* (*fig.* 63 i 64, tab. IV). — Należy znaleźć rzuty jakiejkolwiek prostej leżącej na danej płaszczyznie (§ 57 i 58), np. prostej poziomej δ, δ' i na niej umieścić rzuty szukane m, m' punktu danego. Sposób postępowania tutaj podany, może być bez trudności zastosowany do przypadku, w którym jeden z rzutów punktu danego jest znany.

60. Ćwiczenie. — *Znaleźć rzuty wieloboku płaskiego* (*fig.* 65, tab. IV).— Dla wykreślenia wieloboku, możemy przyjąć za znane rzuty (a, a'), (c, c') i (f, f') trzech jego wierzchołków na dwu płaszczyznach spółrzędnych i rzuty b, d, e pozostałych wierzchołków na jednej tylko z płaszczyzn rzutów; zadanie daje się rozwiązać za pomocą rozumowania podanego w paragrafie poprzedzającym, albowiem dwa rzuty trzech punktów A, C, F wyznaczają płaszczyzny wieloboku, pozostaje więc tylko znaleźć rzuty pionowe pozostałych jego wierzchołków znając ich rzuty poziome. W tym celu, nakreślmy rzuty przekątnej ef, $e'f'$ i rzuty poziome ae, ad, ab; przecięcie się tych trzech ostatnich prostych z prostą ef w punktach g, h, k wyznacza punkta, których rzuty pionowe g', h', k' dają się znaleźć z łatwością, a łącząc je z punktem a' prostemi $a'g'$, $a'h'$, $a'k'$ otrzymamy proste na których leżą pozostałe punkta wieloboku E, D, B; biorąc więc punkta spotkania tych rzutów z linijami rzutów wyprowadzonemi z punktów e, d, b znajdziemy punkta szukane e', d', b', a zatem będziemy mogli dopełnić wykreślenia wieloboku.

61. Zadanie V. — *Znaleźć ślady płaszczyzny, danej przez dwie proste równoległe lub przecinające się* (*fig.* 67, tab. IV.— Niech będą (d, d'), (d_1, d_1') rzuty prostych danych. Zadanie to da się rozwiązać wyznaczając przedewszystkiem ślady h, h_1, v', v_1' prostych danych i kreśląc proste hh_1, $v'v'_1$, które łączą z sobą ślady tegoż samego nazwiska, proste te są właśnie szukanemi śladami płaszczyzny. Jeżeli wykreślenie jest dokładnem, to te dwie proste winny się przecinać w jednym punkcie na osi rzutów.

62. Zadanie IV. — *Znaleźć ślady płaszczyzny, danej przez trzy punkta nie leżące na jednej linii prostej.* — Przypadek ten sprowadza się do poprzedzającego, łącząc jeden z punktów danych z dwoma pozostałemi.

63. Zadanie VII. — *Przez prostę daną* D *poprowadzić płaszczyznę równoległą do innej prostej* D_1. — Przez jakikolwiek punkt dowolnie obrany na prostej D należy nakreślić prostę D_2 równoległą do

prostej D_1 i sposobem podanym powyżej (§ 61), znaleźć ślady płaszczyzny przechodzącej przez prostę D, D_2.

64. Twierdzenie. — *Ślady tegoż samego nazwiska, dwu płaszczyzn równoległych, są równoległe i odwrotnie.* — Ślady dwu płaszczyzn na każdej z płaszczyzn rzutów są przecięciem się dwu płaszczyzn równoległych z trzecią, a zatem muszą one być także równoległe.

Twierdzenie odwrotne poprzedzającemu jest prawdziwe, gdyż przypuszczając na chwilę, że punkta przecięcia się śladów każdej z płaszczyzn nie znajdują się w odległości nieskończenie wielkiej, w takim razie ślady te utworzą dwa kąty, których boki będą odpowiednio równoległe, muszą więc one być równoległe pomiędzy sobą. Samo dowodzenie odwrotności wskazuje, że jest ona prawdziwą tylko wtenczas, kiedy płaszczyzny dane nie są równoległe do osi rzutów; dla tego szczególnego przypadku podamy wkrótce warunki równoległości płaszczyzn.

65. Zadanie VIII. — *Przez punkt dany przesunąć płaszczyznę równoległą do płaszczyzny danej.*

Rozwiązanie ogólne. — *Należy na płaszczyźnie danéj nakreślić dowolnie dwie proste nierównoległe i przez punkt dany poprowadzić do tych prostych równoległe, które wyznaczą właśnie płaszczyznę szukaną.* Jeżeli płaszczyzna dana jest wyznaczona przez swe ślady, daleko korzystniej obrać na każdym ze śladów płaszczyzny szukanej jeden punkt i przezeń nakreślić dwie proste odpowiednio równoległe do śladów danych (§ 64), które, jeżeli rysunek jest wykonany z dokładnością, winny się przeciąć w jednym punkcie na osi rzutów. Każdy punkt na śladzie szukanym wyznacza się, kreśląc na płaszczyźnie danej prostę jakąkolwiek, przez punkt dany prowadząc do niej równoległą i oznaczając ślady tej ostatniej. Zastosujmy tę metodę do kilku ważnych przypadków.

1° *Kiedy płaszczyzna dana jest wyznaczona przez dwie proste* (d, d'), (d_1, d'_1) *przecinające się* (*fig.* 68, tab.IV). — W tym przypadku, płaszczyzna szukana jest natychmiast wyznaczoną przez dwie proste (δ, δ'), (δ_1, δ'_1), nakreślone z punktu danego o, o', równolegle do prostych danych.

2° *Kiedy płaszczyzna dana jest wyznaczona przez swe ślady* $P\alpha P'$ (*fig.* 69, tab. IV). — W tym przypadku zadanie może być rozwiązane za pomocą metody ogólnej, która nie przedstawia żadnych trudności, lecz jeżeli położenie linij wchodzących do rysunku zezwala na to, wykreślenie ogólne może być skróconem, gdyż wówczas, zamiast kreślić, na płaszczyźnie danej, prostę jakąkolwiek użyjmy np. jednego ze śladów $\alpha P'$ tej płaszczyzny i przez punkt dany o, o' nakreślmy do niej równoległę (d, d'), której poziomy h będzie zarazem jednym z punktów śladu poziomego płaszczyzny szukanej, na płaszczyźnie poziomej rzutów; kreśląc więc obecnie przez punkt h prostę Q równoległą do αP, otrzymamy ślad poziomy płaszczyzny szukanej, a przedłużając go do osi rzutów oznaczymy punkt β, który należeć będzie do śladu pionowego tej płaszczyzny; jeżeli więc teraz nakreślimy przez punkt β prostę $\beta Q'$ równoległą do śladu płaszczyzny danej $\alpha P'$, otrzymamy drugi ślad płaszczyzny szukanej.

3° *Kiedy płaszczyzna dana jest wyznaczona przez jednę ze swych normalnych* n, n' *i przez jej spodek* p, p' (*fig.* 70, tab. IV). — Przez punkt dany o, o' nakreślmy prostę obrazu płaszczyzny szukanej, rzut poziomy tej prostej przechodzącej przez punkt o jest równoległy do osi rzutów, a rzut jej na drugiej płaszczyźnie rzutów jest prostą prostopadłą do normalnej n', poprowadzoną przez punkt o' (§ 42). Kreśląc więc ślad poziomy h tej prostej pomocniczej, znajdziemy jeden z punktów śladu poziomego płaszczyzny szukanej; jeżeli teraz z tego punktu spuścimy prostopadłę Q do prostej n znajdziemy : najprzód ślad poziomy płaszczyzny szukanej (§ 40), a następnie w punkcie β przecięcia tej prostej z osią rzutów, jeden z punktów jej śladu pionowego; kreśląc obecnie z punktu β prostę Q' prostopadłą do n', otrzymamy ślad pionowy płaszczyzny szukanej.

66. Zadanie IX. — *Oznaczyć wspólne przecięcie dwu płaszczyzn* P i Q.

Rozwiązanie ogólne (*fig.* 71, tab. IV). — *Żeby znaleźć wspólne przecięcie dwu płaszczyzn* P i Q *należy przeciąć je płaszczyzną pomocniczą* R, *wybraną w ten sposób, żeby przecięcia jej* I i I_1 *z płaszczyznami danemi były łatwe do przedstawienia rysunkiem; punkt* A *wspólnego przecięcia prostych* I i I_1 *jest jednym z punktów linii wspólnego przecięcia płaszczyzn danych; drugi jej punkt otrzymuje się zapomocą drugiej płaszczyzny pomocniczej.* — Zadanie, którem się w tej chwili zajmujemy jest jednem z zasadniczych zadań Geometryi wykreślnej, niezbędnem więc jest żeby czytelnik umiał doskonale stosować go do rozmaitych przypadków, na które w praktycznem zastosowaniu bezustannie natrafić może. Postaramy się rozebrać go tutaj po szczególe.

67. 1° *Kiedy płaszczyzny dane są oznaczone przez swe ślady przecinające się w granicach rysunku* (*fig.* 72, tab. IV). — Niech będą $P\alpha P'$, $Q\beta Q'$ dwie płaszczyzny dane; przyjmując płaszczyznę poziomą rzutów za płaszczyznę pomocniczą, znajdziemy na płaszczyznach danych proste αP i βQ i punkt h, h' ich wspólnego przecięcia, który jest właśnie śladem poziomym szukanej prostej wspólnego przecięcia; przyjmując obecnie płaszczyznę pionową rzutów za płaszczyznę pomocniczą, znajdziemy również ślad pionowy prostej szukanej w punkcie v, v'; łącząc więc obecnie tak znalezione punkta linijami prostemi vh, $v'h'$ otrzymamy właśnie szukaną prostę wspólnego przecięcia.

68. 2° *Kiedy płaszczyzny dane są oznaczone przez swe ślady przecinające się po za granicami rysunku, to jest w punktach oddalonych.*

Sposób pierwszy (*fig.* 73, tab. IV). — Płaszczyzny pomocnicze użyte poprzednio, dając tutaj na przecięcie punkta oddalone, winny być zastąpione innemi, zazwyczaj zastępuje się je płaszczyznami równoległemi do płaszczyzn rzutów i w naszym przypadku przyjmiemy za płaszczyznę pomocniczą, płaszczyznę poziomą której śladem pionowym jest R′, która daje, na przecięcie z płaszczyznami danemi $P\alpha P'$, $Q\beta Q'$ proste (i, i'), (i_1, i'_1) przecinające się w punkcie m, m' należącym do prostej szukanej. Drugi punkt wspólnego przecięcia wyznaczy się za pomocą drugiej płaszczyzny poziomej pomocniczej, prosta więc wspólnego przecięcia będzie daną przez swe dwa punkta. Sposób wykreślania, który tutaj podajemy, wymaga bardzo często kolejnych prób, albowiem płaszczyzna pozioma pomocnicza R′, wzięta w sposób dowolny, może obejmować punkt wspólnego przecięcia położony w taki sposób, że drugi rzut jego znajduje się po za granicami rysunku; dla sprowadzenia go więc w dane obręby należałoby zmieniać, czasem nawet kilkakrotnie, położenie płaszczyzny R′ równolegle do swego pierwotnego położenia; wkrótce zobaczymy, w jaki sposób można uniknąć kolejnych prób o których tylko co mówiliśmy.

Sposób tu podany może być zastosowany do znalezienia wspólnego przecięcia płaszczyzn danych, kiedy takowe są oznaczone każda przez trzy punkta lub każda przez dwie proste przecinające się. Wykonanie rysunków odnoszących się do tych dwu przypadków zalecamy czytelnikowi jako ćwiczenie.

Sposób drugi (*fig.* 74, tab. IV). — Jeżeli ślady płaszczyzn danych przecinają się pod kątem bardzo ostrym, sposób postępowania podany powyżej nie może być zastosowanym, gdyż poziome lub proste obrazu dwu płaszczyzn nie przecinają się prawie nigdy w granicach rysunku, a gdyby nawet się przecinały w tych granicach, to punkt ich przecięcia byłby tak niewyraźny, że niepodobna byłoby wykonać rysunku z dokładnością dla osiągnienia której, jak wiemy, potrzeba: 1° żeby przecięcia prostych, które wyznaczają ważniejsze punkta figury, nie miały miejsca pod kątami ostremi i 2° żeby proste niewiadome były oznaczane punktami dostatecznie od siebie odległemi.

W przypadku którym się zajmujemy, użycie płaszczyzn równoległych do płaszczyzn rzutów za płas-

czyzny pomocnicze, nie czyni zadość pierwszemu z warunków podanych powyżej, użyć zatem należy płaszczyzny pomocniczej R, któraby przechodziła przez oś rzutów i przez punkt a, a', którego wzniesienie jest małe a oddalenie jakiekolwiek i wykreślić najprzód linię wspólnego przecięcia płaszczyzny R z płaszczyzną daną $P\alpha P'$; jednym z punktów należących do linii wspólnego przecięcia tych płaszczyzn jest punkt α, drugim zaś będzie punkt b, b' otrzymany z użycia nowej płaszczyzny pomocniczej H', która przecinając się z płaszczyznami R i $P\alpha P'$ daje poziome $(ad, a'd')$ i $(vf, v'f')$, mające ten punkt za punkt spotkania; rzutem więc pionowym prostej wspólnego przecięcia płaszczyzn R i $P\alpha P'$ będzie prosta i'. W sposób zupełnie podobny do podanego powyżej znaleźlibyśmy rzut pionowy i'_1 prostej wspólnego przecięcia drugiej płaszczyzny danej $Q\beta Q'$ z płaszczyzną pomocniczą przesuniętą przez oś rzutów i przez punkt a, a'. Znając obecnie rzuty pionowe i', i'_1 otrzymamy punkt m' ich wspólnego przecięcia, który jest zarazem jednym z punktów rzutu pionowego szukanej prostej wspólnego przecięcia dwu płaszczyzn danych. Sposób postępowania, który tu podaliśmy, daje z łatwością tylko jeden rzut jednego z punktów należących do linii wspólnego przecięcia płaszczyzn danych, winien on więc być stosowanym jedynie tylko do przypadków, dla których oznaczenie punktów spotkania przedstawia nadzwyczajne trudności.

Sposób trzeci (*fig.* 75, tab. IV). — Przetnijmy jednę z płaszczyzn danych $P\alpha P'$ płaszczyzną pomocniczą $R\gamma R'$ równoległą do drugiej płaszczyzny danej $Q\beta Q'$ i szukajmy: 1° kierunku prostej $v'_1h'_1, v'h_1$ wspólnego ich przecięcia i 2° jej rzutu pionowego; widzimy, że przyszliśmy do wykreślenia prostej równoległej do $v'_1h'_1$ przechodzącej przez punkt oddalony prostych P' i Q'; dla uskutecznienia tego wykreślenia, poprowadźmy prostę ab prostopadłą do $v'_1h'_1$, która zatem będzie prostopadłą do prostej szukanej; nakreślmy trójkąt, którego wierzchołkiem jest punkt oddalony prostych P' i Q', a podstawą prosta ab; ponieważ prosta szukana jest także jedną z wysokości, możemy więc ją wykreślić prowadząc przedewszystkiem wysokości ac, bd, które wyznaczają punkt zbiegu f trzech wysokości trójkąta, ztąd więc znajdziemy tę trzecią wysokość fg, która jest właśnie szukanym rzutem pionowym prostej wspólnego przecięcia płaszczyzn danych; w taki sam sposób znajdziemy jej drugi rzut.

Sposób czwarty (*fig.* 76, tab. IV). — Zadanie, którem się zajmujemy, może być jeszcze rozwiązane, jak wreszcie wszystkie zadania dotyczące punktów oddalonych, za pomocą figur *podobnych;* niech będą $P\alpha P'$ i $Q\beta Q'$ dwie płaszczyzny dane, obierzmy dowolnie na osi rzutów xy jakikolwiek punkt β, i przyjmując za środek figury *podobnej* punkt α, a za stosunek podobieństwa $\frac{\alpha\beta}{\alpha\beta_1}$, nakreślmy figurę *podobną* do figury szukanej; proste Q_1, Q'_1, równoległe do śladów Q, Q', wyprowadzone z punktu β_1, będą *odpowiednemi* śladom Q, Q', a ponieważ proste αP, $\alpha P'$, przechodzące przez środek figury *podobnej* są swemi własnemi *odpowiednemi*, otrzymamy, stosując sposób ogólny do znalezienia prostej wspólnego przecięcia dwu płaszczyzn, których ślady przecinają się w granicach rysunku (§ 67), *odpowiedne* $h'_1v'_1$, h_1v_1 prostych szukanych.

Dla wykreślenia samych prostych szukanych, obierzmy dowolnie na Q' punkt jakikolwiek a, którego przeciwległy znajduje się w punkcie a_1 spotkania prostych Q'_1 i αa i nakreślmy proste $a_1v_1, a_1h'_1$ i proste do nich równoległe av, ah' przechodzące przez punkt a; te ostatnie proste są *odpowiedne* pierwszym i wyznaczają w punktach przecięcia się z osią rzutów punkta v i h' *odpowiedne* punktom v_1, h'_1, wypada więc ztąd, że proste i, i' wyprowadzone z tych ostatnich punktów i równoległe do prostych $h'_1v'_1$, h_1v_1 są właśnie rzutami szukanej prostej wspólnego przecięcia płaszczyzn danych.

Sposób piąty (*fig.* 77, tab. IV). — Niech będą jak poprzednio $P_\alpha P'$, $Q_\beta Q'$ ślady płaszczyzn danych i xy oś rzutów. Przesuńmy oś rzutów równolegle do swego pierwotnego położenia do x_1y_1, wiadomo jest (§ 23), że podczas takiej zmiany, rzuty prostych pozostają niezmienne, a ślady płaszczyzn danych, podobnie jak płaszczyzny rzutów, zmienią swe położenie zachowując zawsze kierunek pierwotny; wykreślenie więc ich nie przedstawi żadnej trudności jak tylko wykreślimy jeden z ich punktów. Dla wyznaczenia rysunkiem punktów o których mowa, zauważmy: 1° że w obu systematach uważanych płaszczyzn spółrzędnych ślad pionowy płaszczyzny $Q_\beta Q'$ ma za rzuty: prostę Q_β i oś rzutów xy; 2° że w skutek tego ślad h tej prostej na nowej płaszczyznie poziomej rzutów jest właśnie jednym z punktów szukanych; kreśląc więc przez ten punkt równoległę $Q_1\beta_1$ do prostej Q znajdziemy nowy ślad poziomy jednej z płaszczyzn danych, a kreśląc obecnie przez punkt przecięcia się β, tego nowego śladu poziomego z osią rzutów x_1y_1, równoległę Q'_1 do prostej Q' otrzymamy nowy ślad pionowy płaszczyzny danej.

W sposób podobny do powyższego znaleźlibyśmy nowe ślady $P_1\alpha_1P'_1$ płaszczyzny danej $P_\alpha P'$, biorąc zatem obecnie, w tym nowym systemacie płaszczyzn spółrzędnych, prostę spotkania $v'_1h'_1$, v_1h_1 płaszczyzn $Q_1\beta_1Q'_1$, $P_1\alpha_1P'_1$, otrzymamy rzuty i, i' prostej wspólnego przecięcia płaszczyzn danych należącej do obu systematów płaszczyzn spółrzędnych.

69. Zadanie X. — *Znaleźć punkt spotkania prostej* D *z płaszczyzną daną* P.

Rozwiązanie ogólne (*fig* 78, tab. IV). — *Przez prostę daną należy przesunąć płaszczyznę pomocniczą* Q *obraną w ten sposób, żeby jej przecięcie* I *z płaszczyzną daną* P *było łatwe do wykreślenia, a następnie szukać punktu przecięcia prostych* D *i* I; *punkt* A *ich wspólnego przecięcia będzie właśnie punktem szukanym*, gdyż leży on na obu prostych D i I, a zatem leży na prostej D i na płaszczyznie P. Dla ułatwienia wykreślenia przyjmuje się zazwyczaj za płaszczyznę pomocniczą, płaszczyznę rzucającą prostę daną na jednę z płaszczyzn rzutów.

Zastosujmy to ogólne prawidło do kilku przykładów najczęściej używanych.

70. — 1° *Kiedy płaszczyzna jest dana przez swe ślady* (*fig.* 79, tab. IV).—Niech będą $P_\alpha P'$ i (d, d') ślady płaszczyzny danej i rzuty prostej. Weźmy za płaszczyznę pomocniczą płaszczyznę rzucającą prostę daną na płaszczyznę poziomą rzutów; ślady tej płaszczyzny $Q\beta Q'$ przecinają ślady płaszczyzny danej podług prostej, której rzutami są proste vh, $v'h'$ (§ 67); widzimy, że na płaszczyznie poziomej rzutów, rzuty vh i d, prostej wspólnego przecięcia i prostej danej, zchodzą się z sobą, nie mogą więc one oznaczyć szukanego punktu przecięcia, tymczasem rzuty pionowe odpowiednie $v'h'$ i d', przecinając się z sobą w punkcie a', wyznaczają rzut pionowy punktu szukanego, którego rzut poziomy a oznaczy się z łatwością kreśląc liniję rzutów z punktu a' aż do jej spotkania się z rzutami poziomemi obu prostych, które, jak to powiedzieliśmy, zchodzą się z sobą na rysunku. Punkt a, a' w ten sposób znaleziony jest właśnie punktem w którym prosta (d, d') spotyka płaszczyznę $P_\alpha P'$.

Jeżeli ślady płaszczyzn prostopadłych do płaszczyzn rzutów, poprowadzonych przez prostę daną, spotykają ślady płaszczyzny danej $P_\alpha P'$ w punktach oddalonych (§ 56), w tym przypadku uciec się należy do płaszczyzny pomocniczej jakiejkolwiek $Q_\beta Q'$ (*fig.* 80. tab. IV) obejmującej ślady $0'$, t' prostej danej d, d' a tem samem i samą prostę, a następnie, stosując rozwiązanie ogólne, nakreślić prostę wspólnego przecięcia vh, $v'h'$ płaszczyzn $Q_\beta Q'$ i $P_\alpha P'$; biorąc następnie punkt w którym ta prosta przecina prostę daną (d, d') otrzymamy właśnie punkt szukany a, a', w którym prosta dana (d, d') spotyka płaszczyznę daną $P_\alpha P'$.

71. — 2° *Kiedy płaszczyzna dana jest wyznaczona przez dwie proste przecinające się* (*fig.* 81, tab. IV). — Niech będą (δ, δ'), (δ_1, δ'_1) rzuty dwu prostych wyznaczających płaszczyznę daną i (d, d') rzuty prostej danej. Przyjmijmy jak zawsze, płaszczyznę pionową rzucającą prostę D, za płaszczyznę pomocniczą i szukajmy przecięcia się jej z prostemi wyznaczającemi płaszczyznę daną; ponieważ wszystkie punkta płaszczyzny pomocniczej rzucają się poziomo na prostę d, wspólne przecięcie się tej płaszczyzny z prostą δ, δ', rzuci się także na tę płaszczyznę rzutów w punkcie np. m, którego rzut pionowy znajdzie się na przecięciu linii rzutów przechodzącej przez punkt m, z rzutem pionowym δ' prostej. W podobny sposób otrzymamy na wspólne przecięcie płaszczyzny pomocniczej z prostą δ_1, δ'_1, punkt m_1, m'_1, zatem, przecięciem się dwu płaszczyzn będzie prosta $mm_1, m'm'_1$. Stosując dalej prawidło ogólne, znajdziemy na przecięciu się prostej (d, d') z prostą $(mm_1, m'm'_1)$ punkt, którego rzutem pionowym jest punkt a', a rzutem poziomym punkt a wspólnego przecięcia linii rzutów przechodzącej przez punkt a' z rzutem poziomym d prostej danej, który to punkt a jest wspólny obu prostym wziętym pod uwagę; punkt a, a' jest więc punktem szukanym.

72. **Zadanie XI.** — *Znaleźć prostę wspólnego przecięcia dwu płaszczyzn danych każda przez dwie proste przecinające się* (*fig.* 82, tab. V). — Niech będą (d, d'), (d_1, d'_1), (δ, δ'), (δ_1, δ'_1) rzutami dwu par prostych przedstawiających dwie płaszczyzny dane, których szukamy wspólnego przecięcia; to wspólne przecięcie dałoby się otrzymać z całą łatwością, używając płaszczyzn pomocniczych, jakeśmy to już dawniej powiedzieli, równoległych do jednej z płaszczyzn rzutów; dla skrócenia jednakże wykreśleń, postaramy się podać tu rozwiązanie nieco krótsze. Wogóle, stosując sposób postępowania podany w poprzedzającym paragrafie, moglibyśmy znaleźć wspólne przecięcie dwu płaszczyzn, szukając przedewszystkiem wspólnego przecięcia jakichkolwiek prostych z płaszczyzną, na której one nie leżą; jednakże dla uczynienia wykresu więcej interesującym, oznaczmy jeden punkt wspólnego przecięcia sposobem o którym mowa, a drugi, stosując metodę ogólną i przyjmując za płaszczyznę pomocniczą płaszczyznę dzielącą na dwie równe części kąty dwuścienne 2 i 4. Zgodnie z tem cośmy powiedzieli powyżej i ze sposobem postępowania podanym w poprzedzającym paragrafie, zacznijmy wykreślenie, szukając punktu w którym prosta (δ_1, δ'_1) spotyka płaszczyznę wyznaczoną przez proste $(d, d'), (d_1, d'_1)$; jeżeli do tego wykreślenia użyjemy płaszczyzny pionowej rzucającej prostę Δ_1, znajdziemy na punkta spotkania punkta dwu płaszczyzn $(a, a'), (a_1, a_1')$, zaś na punkt spotkania prostej z płaszczyzną punkt o, o'. Drugi punkt szukany, stosownie do tego cośmy powiedzieli powyżej, wyznaczy się przecinając płaszczyzny dane, płaszczyzną pomocniczą dzielącą na dwie równe części kąty dwuścienne 2 i 4, albowiem przedewszystkiem biorąc punkta przecięcia rzutów tegoż samego nazwiska, otrzymamy na każdej z prostych danych jeden punkt spotkania, a łącząc tak znalezione punkta, odpowiednio każdej płaszczyźnie, linijami prostemi, otrzymamy proste $(mm_1, m'm'_1)$, $(nn_1, n'n'_1)$ wspólnego przecięcia płaszczyzn danych z płaszczyzną pomocniczą. Punkt wspólnego przecięcia p, p' tak znalezionych prostych, będzie właśnie drugim punktem szukanym, a zatem prosta $op, o'p'$ będzie właśnie szukaną prostą wspólnego przecięcia płaszczyzn danych.

73. **Zadanie XII.** — *Znaleźć punkt wspólnego przecięcia trzech płaszczyzn* (*fig.* 83, tab. V). — Dla rozwiązania tego zadania należy przedewszystkiem szukać prostych wspólnego przecięcia płaszczyzn danych branych po dwie, a trzy proste w ten sposób otrzymane, jeżeli rysunek został wykonany z dokładnością, winny się zbiegać w jednym punkcie a, a', który jest właśnie punktem szukanym. Figura 83, tab. V dostatecznie objaśnia użyty sposób postępowania.

Można byłoby, dla rozwiązania tej kwestyi, postąpić jeszcze w inny sposób, a mianowicie : znaleźć prostę wspólnego przecięcia dwu płaszczyzn danych i szukać następnie punktu, w którym ona spotyka trzecią płaszczyznę.

74. Zadanie XIII. — *Przez punkt dany a, a' nakreślić prostę, któraby dotykała dwu prostych danych (d,d'), (d_1, d'_1) (fig. 84, tab. V).*

Rozwiązanie ogólne. — *Prosta szukana jest prostą wspólnego przecięcia dwu płaszczyzn, z których każda przechodzi przez punkt dany a, a' i przez jednę z prostych danych.*

Wykreślenie. — Usuńmy oś rzutów (§ 23) i przez punkt dany a, a' nakreślmy proste (δ, δ'), (δ_1, δ_1') odpowiednio równoległe do prostych danych; każda para prostych (D, Δ), (D_1, Δ_1) wyznacza jednę z płaszczyzn których przecięcia szukamy. Przyjmijmy za płaszczyznę pomocniczą płaszczyznę dzielącą na dwie równe części kąty dwuścienne 2 i 4 i postarajmy się wyznaczyć przecięcie szukane. Płaszczyzna pomocnicza o której mowa, wyznacza, na płaszczyznach przesuniętych przez każdą parę prostych równoległych, proste wspólnego przecięcia $(mn, m'n')$, $(m_1n_1, m'_1n'_1)$ (§ 31), spotykające się w punkcie p, p', który jest jednym z punktów szukanego wspólnego przecięcia płaszczyzn danych; drugim punktem tego wspólnego przecięcia jest punkt a, a'; widzimy więc, że prosta wspólnego przecięcia, której szukamy, ma za rzuty proste ap, $a'p'$ zaś punkta wspólnego przecięcia (o, o'), (o_1, o'_1) tej prostej z każdą z prostych danych winny, jako sprawdzenie rysunku, leżeć, brane po dwa, na jednych i tych samych linijach rzutów. Zadanie to mogłoby być jeszcze rozwiązane, łącząc punkt a, a' z punktem w którym jedna z prostych danych spotyka płaszczyznę nakreśloną przez drugą prostę i przez punkt a, a'.

75. Zadanie XIV. — *Nakreślić prostę, równoległą do prostej danej (δ, δ') i dotykającą dwu innych prostych danych (d, d'), (d_1, d_1') (fig. 85, tab. V).*

Rozwiązanie ogólne. — *Przez każdą z prostych (d, d'), (d_1, d_1') należy przesunąć płaszczyznę równoległą do prostej (δ, δ') i znaleźć wspólne przecięcie tych płaszczyzn, a prosta w ten sposób otrzymana jest właśnie prostą szukaną.* — Żeby otrzymać prostę wspólnego przecięcia, sposobem uproszczonym nakreślmy przez punkt obrany na prostej (d, d') równoległę do (δ, δ'); znajdźmy następnie przecięcie płaszczyzny przechodzącej przez prostę (d, d') i przez równoległę do niej z prostą (d_1, d'_1), i nakreślmy w końcu, przez tak otrzymany punkt przecięcia, równoległę do (δ, δ'); tak otrzymana prosta będzie właśnie prostą szukaną.

Wykreślenie. — Przez punkt m, m' dowolnie obrany na prostej d, d' nakreślmy równoległę (δ_1, δ_1') do prostej (δ, δ') i za pomocą płaszczyzny pomocniczej pionowej rzucającej prostę (d_1, d_1') wykreślmy, sposobem powyżej podanym, przecięcie się prostej (d_1, d'_1) z płaszczyzną utworzoną przez proste (d, d'), (δ_1, δ'_1); prosta oc, $o'c'$ równoległa do (δ, δ') i przechodząca przez punkt o, o' da nam właśnie prostę szukaną. Jako sprawdzenie dokładności rysunku winniśmy znaleźć punkt c, c' na jednej i tej samej linii rzutów.

ĆWICZENIA NALEŻĄCE DO TRZECH PIERWSZYCH ROZDZIAŁÓW

76. Zadanie I. — *Znaleźć na obu płaszczyznach rzutów, rzuty zbieżne, lub cień rzucony przez punkt świecący, odcinka prostej w przypadkach następujących :*

1° *Kiedy prosta $(ab, a'b')$, jest ukośna względem płaszczyzn rzutów (fig. 86, tab. V).* Należy na dwu płaszczyznach rzutów znaleźć ślady $(\alpha v', \alpha h)$ płaszczyzny wyznaczonej przez punkt świecący f, f' i przez

prostę $(ab, a'b')$ i ograniczyć je na promieniach świecących $(fa, f'a')$, $(fb, f'b')$ przechodzących przez koniec odcinka prostej. W ten sposób otrzymamy linije αA_1, αB_1 które należy wykreślić.

2° *Kiedy prosta dana jest prostą obrazu* (do rozwiązania).

3° *Kiedy prosta dana jest prostą poziomą* (do rozwiązania).

4° *Kiedy prosta dana jest prostą profilu* (do rozwiązania).

5° *Kiedy prosta dana jest prostopadłą do płaszczyzny poziomej rzutów.*

Niech ab, $a'b'$ będą rzutami odcinka prostej, którego cienia szukamy na płaszczyznach spółrzędnych; przypuśćmy że punkt świecący znajduje się w punkcie f, f' (*fig.* 87, tab. V), proste szukane są śladami płaszczyzny przechodzącej przez prostę ab, $a'b'$ i przez punkt f, f' i zawartej w granicach promieni świecących nakreślonych przez końce prostej danej. Ślady płaszczyzny dadzą się otrzymać uważając, że prosta AB będąc prostopadłą do płaszczyzny poziomej rzutów, płaszczyzna przez nią przechodząca jest także prostopadłą do płaszczyzny poziomej rzutów, a w skutek tego że ślad jej poziomy będzie fa zaś ślad pionowy otrzyma się kreśląc z punktu przecięcia prostych fa i xy prostopadłę do tej ostatniej. Linije cienia będą więc ograniczone śladami A_1, B_1 promieni świecących $(fa, f'a')$, $(fb, f'b')$ nakreślonych, jakeśmy to już powiedzieli powyżej, przez koniec odcinka danego prostej.

77. Zadanie II. — *Znaleźć na obu płaszczyznach rzutów, cień słoneczny lub rzuty ukośne odcinka prostej, w pięciu przypadkach podanych powyżej.* — Zajmiemy się tu tylko rozbiorem przypadku 2go, w którym prosta dana jest prostą obrazu (*fig.* 88, tab. V) a promienie świecące mają kierunek jakikolwiek np. l, l'. Promienie świecące biegnąc po prostej ab, $a'b'$ opisują płaszczyznę przechodzącą przez prostę daną i przez prostę aA_1, $a'A'_1$ równoległą do promienia świecącego l, l', której ślad poziomy odpowiada prostej $A_1\theta$ łączącej ślady prostych $(ab, a'b')$, $(aA_1, a'A'_1)$ na tejże płaszczyznie spółrzędnych. Drugi ślad szukany tej płaszczyzny znajdziemy, zważywszy że punkt α, przecięcia się osi rzutów xy z prostą θA_1, jest właśnie jednym z jego punktów i że prosta obrazu ab, $a'b'$ jest jego kierunkiem; kreśląc zatem przez punkt α prostę równoległą do $a'b'$, otrzymamy ślad szukany. Części użyteczne tych śladów znajdują się w granicach zawartych pomiędzy promieniami świecącemi przechodzącemi przez ostateczne punkta a, a' i b, b' prostej danej i odpowiadają punktom A_1 i B_1.

78. Zadanie III. — *Znaleźć cień rzucony przez jakąkolwiek linię na inną.*

1° W przypadku punktu świecącego.

2° W przypadku słońca.

Przedewszystkiem znajdziemy cień rzucony przez proste na jakąkolwiek płaszczyznę; następnie, w przypadku punktu świecącego, z punktu przecięcia się linij cienia, nakreślimy prostę łączącą punkt cienia z punktem świecącym; w przypadku słońca, nakreślmy prostę łączącą punkta przecięcia się linij cienia z punktem leżącym w odległości nieskończenie wielkiej, a otrzymamy w ten sposób, w punktach przecięcia się tej prostej z linijami danemi, punkt cienia na jednej z nich i punkt który rzuca ten cień na drugą linię.

79. Zadanie IV. — *Sprawdzić czy dwie proste dane leżą na jednej płaszczyznie, jeżeli rzuty ich przeciwnego nazwiska, brane po dwa, zlewają się z sobą.* — Niech będą $(ab, a'b')$ $(cd, c'd')$ rzuty zlewające się z sobą, brane po dwa, prostych danych (*fig.* 89, tab. V). Figura przedstawiona na naszym rysunku wskazuje, że rzuty prostych danych spotykają się z sobą, a zatem same proste przecinają się w punkcie m, m' płaszczyzny dzielącej na dwie równe części kąty dwuścienne 2 i 4; w przypuszczeniu

przeciwnem proste dane byłyby równoległe do płaszczyzny dzielącej na dwie równe części kąty dwuścienne 2 i 4 i równoległe względem siebie; wypada więc ztąd, że w każdym możliwym przypadku proste dane leżą na jednej płaszczyznie.

80. Zadanie V. — *Znaleźć ślady i oznaczyć części widzialne krzywej, której rzuty c, c' zlewają się z sobą* (*fig.* 90, tab. V). — Uważmy linije rzutów 1, 2, 3 i 4; linija 1 wyznacza następujące punkta krzywej : (a, a'), (a, b'), (a, c'), (a', b), (a', c), (b, b'), (b, c') i t. d.; linija 2 wyznacza jeden tylko punkt d, d'; linije 3 i 4 wyznaczają każda kilka punktów; wnosić więc z tego należy, że krzywa w przestrzeni składa się z rozmaitych części, których rzuty pokrywają się wzajemnie i dają, stosując metodę podaną w (§ **30**), ślady v'_1, v'_2, v'_3, v'_4, v'_5, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5. Co się tyczy części widzialnych, uważmy, że mając dane dwie linije, z których jedna jest widzialną a druga niewidzialną i których rzuty przykrywają się wzajemnie, tylko części wspólne obu linijom znaczą się na rysunku liniją ciągłą, inne zaś części linij danych, które na linijach rzutów nie przedstawiają punktów leżących po obu stronach osi rzutów xy, winny być oznaczone liniją kropkowaną.

81. Zadanie VI. — *Narysować czterdzieści trzy możliwe położenia prostej w przestrzeni względem płaszczyzn rzutów.*

Tu należą :

1° Cztery położenia, prostych pochyłych do osi rzutów i do płaszczyzn rzutów;

2° Sześć położeń prostych prostopadłych do jednej z płaszczyzn rzutów;

3° Sześć położeń prostych równoległych do jednej z płaszczyzn rzutów i pochyłych do drugiej;

4° Sześć położeń prostych równoległych do obu płaszczyzn rzutów w dowolnej od nich odległości;

5° Pięć położeń prostych równoległych do osi rzutów i leżących na jednej z płaszczyzn dzielących na dwie równe części kąty dwuścienne utworzone przez płaszczyzny rzutów;

6° Cztery położenia prostych leżących na jednej z płaszczyzn dzielących na dwie równe części kąty dwuścienne utworzone przez płaszczyzny rzutów;

7° Cztery położenia prostych prostopadłych do jednej z płaszczyzn dzielących na dwie równe części kąty dwuścienne;

8° Cztery położenia prostych przecinających oś rzutów;

9° Cztery położenia prostych prostopadłych co do kierunku do osi rzutów.

82. Zadanie VII. — *Narysować dwadzieścia trzy możliwych położeń płaszczyzny względem płaszczyzn rzutów.*

Tu znów należą :

1° Dwa położenia w których płaszczyzna jest pochyłą względem płaszczyzn rzutów i względem osi rzutów;

2° Dwa położenia w których płaszczyzna jest prostopadłą do jednej z płaszczyzn rzutów i pochyłą względem drugiej;

3° Cztery położenia w których płaszczyzna jest równoległą do osi rzutów i pochyłą względem płaszczyzn rzutów.

4° Cztery położenia w których płaszczyzna jest równoległą do osi rzutów i prostopadłą do jednej z płaszczyzn dzielących na dwie równe części kąty dwuścienne utworzone przez płaszczyzny rzutów;

5° Dwa położenia w których płaszczyzna przechodzi przez oś rzutów;

6° Dwa położenia w których płaszczyzna zlewa się z jedną z płaszczyzn dzielących na dwie równe części kąty dwuścienne utworzone przez płaszczyzny rzutów;

7° Cztery położenia w których płaszczyzna jest równoległą do osi rzutów i prostopadłą do jednej z płaszczyzn dzielących na dwie równe części kąty dwuścienne płaszczyzn rzutów;

8° Dwa położenia w których płaszczyzna jest prostopadłą do płaszczyzny dzielącej na dwie równe części kąty dwuścienne płaszczyzn rzutów;

9° Jedno położenie w którem płaszczyzna jest prostopadłą do osi rzutów.

83. **Zadanie VIII.** — *Znaleźć, w granicach rysunku, rzuty drugiego punktu prostej profilu, przechodzącej przez punkt dany a, a' i spotykającej drugą prostę d, d' w punkcie oddalonym* — Rzućmy prostę profilu, równolegle do prostej d, d' (*fig.* 91, tab. V) na płaszczyznę dzielącą na dwie równe części kąty dwuścienne 2 i 4. Punkt oddalony, w którym ta prosta spotyka prostę d, d', ma za rzuty punkt s, s' spotkania tej ostatniej prostej z płaszczyzną dzielącą na dwie równe części kąty dwuścienne o których mowa (§ 31). Rzucająca pochyła punktu a, a' jest równoległą do prostej d, d' i przechodzi przez ten punkt, a punkt spotkania tej prostej równoległej z płaszczyzną dzielącą na dwie równe części kąty dwuścienne 2 i 4, na której wykonywamy rzut pomocniczy, da nam rzut pochyły α, α' drugiego punktu prostej profilu; łącząc więc obecnie punkt α, α' z punktem s, s' linią prostą, otrzymamy pomocniczy rzut szukany prostej, na którym biorąc dowolnie jakikolwiek punkt β, β' i przenosząc go, za pomocą prostej równoległej do kierunku rzucających d, d', otrzymamy punkt szukany b, b'.

84. **Zadanie IX.** — *Znając jeden rzut punktu leżącego na płaszczyznie, wyznaczonej przez rzuty (pn, p'n') jednej z jej normalnych i przez rzuty (p, p') spodka tej normalnej, znaleźć drugi rzut tego punktu* (*fig.* 92, tab. V). — Przypuśćmy że danym rzutem punktu danego jest rzut pionowy m'; aby znaleźć jego drugi rzut t. j. poziomy, nakreślmy przez punkt p, p' na płaszczyznie danej prostę obrazu której rzutem poziomym będzie prosta równoległa do osi rzutów i przechodząca przez punkt p, a rzutem pionowym prostopadła $p'n'$ przechodząca przez punkt p' (§ 42). Nakreślmy przez punkt M poziomę płaszczyzny danej, rzut jej pionowy jest znany natychmiast, gdyż leży on na prostej równoległej do osi rzutów przechodzącej przez punkt m', rzut zaś jej poziomy musi się znajdować w punkcie A wspólnego przecięcia prostych pomocniczych t. j. w punkcie a' przecięcia się rzutów pionowych prostych wyznaczających punkt A; jeżeli więc z punktu a' poprowadzimy liniję rzutów, to rzut poziomy znaleźć się musi na tej linii rzutów i na rzucie odpowiednim prostej obrazu t. j. na ich przecięciu. Szukany rzut prostej poziomej jest prostą prostopadłą do pn wyprowadzoną z punktu a, a punkt przecięcia, linii rzutów wyprowadzonej z punktu m' z tą prostopadłą, wyznaczy właśnie szukany drugi rzut punktu danego.

85. *Linija największego spadku* jakiejkolwiek płaszczyzny względem płaszczyzn rzutów, nazywamy prostopadłę do śladu tej płaszczyzny leżącą na płaszczyznie rzutów wziętej pod uwagę.

Zadanie X. — *Znając, względem płaszczyzny poziomej rzutów, rzuty d, d' linii największego spadku jakiejkolwiek płaszczyzny, znaleźć jej ślady* (*fig.* 93, tab. V).—Ponieważ ślady płaszczyzny szukanej winny przechodzić przez ślady prostej danej, oznaczmy więc najprzód te ostatnie w punktach v', h, następnie zwróćmy uwagę że kąt prosty utworzony przez liniję największego spadku ze śladem poziomym płaszczyzny pozostaje prostym w rzucie poziomym (§ 42) to jest, że ślad poziomy P płaszczyzny szukanej musi być prostopadły do rzutu poziomego d prostej i przechodzić przez punkt h. Tak

znaleziony ślad poziomy płaszczyzny, przedłużony do osi rzutów x, y, wyznaczy punkt α należący do drugiego śladu płaszczyzny szukanej, który, połączony z punktem v' prostą $\alpha v'$ da nam drugi ślad P' płaszczyzny szukanej t. j. ślad jej pionowy.

86. Zadanie XI. — *Znając, względem płaszczyzny pionowej rzutów, rzuty d, d' linii największego spadku jakiejkolwiek płaszczyzny i rzut poziomy m punktu leżącego na tej płaszczyznie, znaleźć drugi rzut punktu* (*fig.* 94, tab. V). — Nakreślmy przez punkt M liniję obrazu płaszczyzny, rzut jej poziomy jest prostą równoległą do osi rzutów przechodzącą przez punkt m, drugi zaś jej rzut znajdziemy pamiętając, że prosta obrazu przecinając się z prostą d, d' wyznacza w przestrzeni punkt, którego rzutem poziomym jest punkt a rzutem zaś pionowym punkt a' leżący na przecięciu linii rzutów przechodzącej przez punkt a z rzutem pionowym d' prostej; zatem dla prostej obrazu, która musi być prostopadłą do D drugi rzut znajdzie się, kreśląc przez punkt a' prostopadłę do d' (§ 42). Znalazłszy w ten sposób prostę obrazu i pamiętając że punkt M na niej leży, znajdziemy jego drugi rzut m' w punkcie przecięcia się linii rzutów, przechodzącej przez punkt m, z rzutem pionowym prostej obrazu.

87. Zadanie XII. — *Znaleźć ślady płaszczyzny oznaczonej przez dwie proste równoległe do osi rzutów* (*fig.* 95, tab. V). — Na prostych danych (d, d'), (d_1, d'_1) obierzmy dowolnie punkta (a, a') i (b, b'), szukajmy śladów h i v' prostej łączącej z sobą te punkta i nareszcie nakreślmy przez nie dwie proste równoległe do osi rzutów, które będą właśnie szukanemi śladami płaszczyzny.

88. Zadanie XIII. — *Podać warunki niezbędne i dostateczne wzajemnej równoległości dwu płaszczyzn z których każda jest równoległą do osi rzutów.* — Przecinając płaszczyzny dane płaszczyzną profilu, widzimy że warunkiem niezbędnym i dostatecznym ich równoległości jest równoległość dwu linij wspólnego przecięcia, lub, co na jedno wychodzi, *żeby odległości, osi rzutów od śladów płaszczyzn, liczone w tym samym porządku, były proporcyonalne.*

89. Zadanie XIV. — *Przez punkt dany m, m' nakreślić płaszczyznę równoległą do płaszczyzny danej przez swe ślady, w następujących szczególnych przypadkach:*

1° *Kiedy ślady* P, P' *płaszczyzny tworzą jedną liniję prostą i rzuty m, m' punktu zlewają się z sobą na rysunku* (*fig.* 96, tab. VI). — Kreśląc przez punkt m, m' poziomę płaszczyzny, której rzut poziomy jest równoległy do osi rzutów xy i przechodzi przez punkt m, a rzut pionowy równoległy do śladu P' płaszczyzny znajdziemy, po oznaczeniu śladu pionowego v' tej prostej, prostę QQ' równoległą do PP', która obejmuje właśnie ślady zlewające się z sobą płaszczyzny szukanej.

2° *Kiedy płaszczyzna dana przechodzi przez oś rzutów i przez punkt a, a'* (*fig.* 97, tab. VI). — Przyjmując punkt dany m, m' w jakiemkolwiek położeniu połączmy punkt (b, b'), dowolnie obrany na osi rzutów, z punktem (a, a') liniją prostą. Prosta ab, $a'b'$ musi leżeć na płaszczyznie danej a zatem, kreśląc do niej przez punkt m, m' równoległę i oznaczając jej ślady h, v' otrzymamy dwa punkta śladów szukanych płaszczyzny, a kreśląc nareszcie przez te dwa punkta proste równoległe do osi rzutów xy, znajdziemy ślady szukane płaszczyzny P, P'.

90. Zadanie XV.—*Znaleźć wspólne przecięcie dwu płaszczyzn, których ślady* (P, P'), (Q, Q') *są na jednej prostej* (*fig.* 98, tab. VI). – Ponieważ ślady prostej wspólnego przecięcia zlewają się z sobą w punkcie h, v' prosta więc sama leży na płaszczyznie profilu i jest wyznaczoną przez punkta h, v', przyczem dodać winniśmy także, że jest ona równoległą do płaszczyzny dzielącej na dwie równe części kąty dwuścienne 1, 3.

Wyższa Szkoła Pedagogiczna BIBLIOTEKA GŁÓWNA w Krakowie

91. Zadanie XVI. — *Znaleźć prostę wspólnego przecięcia dwu płaszczyzn, których ślady przeciwnego nazwiska zlewają się z sobą na rysunku* (*fig.* 99, tab. VI). — Niech będą ($\alpha P'$, αQ), (αP, $\alpha Q'$) ślady płaszczyzn odpowiednio leżące na sobie; przypuśćmy że te dwie płaszczyzny zostały sprowadzone do swego naturalnego położenia i zauważmy, że proste oddzielone ($\alpha P'$, αQ), (αP, $\alpha Q'$) są odpowiednio symetryczne względem płaszczyzny dzielącej na dwie równe części kąty dwuścienne 2 i 4, a zatem, że i same płaszczyzny są także symetryczne względem tejże płaszczyzny, przecięcie więc ich wspólne winno się znajdować na płaszczyźnie symetryi t. j. że będzie niem linija prosta, której rzuty zlewają się z sobą (§ 34). Wiemy, zkąd innąd, że punkt α należy do szukanej prostej wspólnego przecięcia, wypada więc znaleźć tylko jej drugi punkt. W tym celu, weźmy prostę ab, $a'b'$ płaszczyzny $P\alpha P'$ i szukajmy punktu m, m', w którym ona spotyka płaszczyznę dzielącą na dwie równe części kąty dwuścienne (§ 31) a ten punkt będzie właśnie drugim punktem szukanego wspólnego przecięcia. Połączywszy wreszcie punkt α z punktem m, prosta tak otrzymana wyznaczy rzuty prostej i, i' zlewające się i przedstawiające szukane przecięcie płaszczyzn danych.

92. Zadanie XVII. — *Znaleźć wspólne przecięcie dwu płaszczyzn symetrycznych względem osi rzutów, których ślady zlewają się z sobą na rysunku,* (*fig.* 100. tab, VI). — Niech będą $P\alpha P'$, $Q\alpha Q'$ dwie płaszczyzny dane; w przypadku którym się zajmujemy, płaszczyzny te są nietylko symetryczne względem płaszczyzny dzielącej na dwie równe części kąty dwuścienne 2 i 4, lecz nadto są one symetrycznie położone względem płaszczyzny profilu, przechodzącej przez punkt α; rzuty więc prostej ich wspólnego przecięcia leżą na śladach płaszczyzny profilu i jeden z jej punktów znajduje się w punkcie α, drugi zaś punkt d niezbędny do jej zupełnego wyznaczenia, może być otrzymanym biorąc dowolnie na śladzie płaszczyzny profilu punkt a, a', którego rzuty zlewają się.

93. Zadanie XVIII. — *Znaleźć wspólne przecięcie dwu płaszczyzn wyznaczonych przez dwie pary prostych, których rzuty przeciwnego nazwiska zlewają się z sobą na rysunku* (do rozwiązania).

94. Zadanie XIX. — *Znaleźć wspólne przecięcie dwu płaszczyzn których ślady pionowe są równoległe* (*fig.* 101, tab. VI). — Niech będą $P\alpha P'$ i $Q\beta Q'$ dwie płaszczyzny dane; ponieważ ślady ich pionowe są równoległe, prosta ich wspólnego przecięcia będzie równoległa do każdego z nich i będzie miała za ślad poziomy h, h' a za rzut poziomy prostę hi równoległą do osi rzutów xy przechodzącą przez punkt h, zaś rzut jej pionowy będzie równoległy do $\alpha P'$ i przejdzie przez punkt h', to jest będzie nim prosta $h'i'$.

95. Zadanie XX. — *Znaleźć wspólne przecięcie dwu płaszczyzn równoległych do osi rzutów* (*fig.* 102, tab. VI). — Niech będą (P, P'), (Q, Q') ślady płaszczyzn danych; ponieważ płaszczyzny te są równoległe do osi rzutów xy, zatem prosta ich wspólnego przecięcia będzie także do niej równoległą. Dla wyznaczenia tej prostej użyjmy płaszczyzny pomocniczej pionowej $R\beta R'$ i oznaczmy rzuty a, a' jednego z punktów tej prostej, a poprowadziwszy przez nie równoległe do osi rzutów xy, prosta i, i' jest właśnie szukanem wspólnem przecięciem.

96. Zadanie XXI. — *Znaleźć wspólne przecięcie dwu płaszczyzn, z których jedna przechodzi przez punkt dany m, m' i przez oś rzutów, a druga jest równoległą do tejże osi* (*fig.* 103, tab. VI). — Niech będą P, P' ślady płaszczyzny równoległej do osi rzutów; dla wykreślenia prostej wspólnego przecięcia tych płaszczyzn, która i w tym przypadku będzie równoległą do osi rzutów xy, użyjmy płas-

czyzny pomocniczej pionowej RβR′, która oznaczy jeden punkt należący do szukanej prostej wspólnego przecięcia, gdyż mamy : na płaszczyznie P, P′ prostę $h'v'$, $h\beta$, wspólnego przecięcia tej płaszczyzny z płaszczyzną pomocniczą, na płaszczyznie zaś przechodzącej przez oś rzutów prostę $m'\beta$, $m\beta$; wspólne przecięcie tych dwu prostych wyznacza punkt a, a', który jest właśnie punktem szukanym. Kreśląc obecnie przez punkt a, a' dwie równoległe i, i' do osi rzutów xy, otrzymamy prostę szukaną.

97. Zadanie XXII. — *Znaleźć przecięcie jakiejkolwiek prostej d, d' z płaszczyzną przechodzącą przez oś rzutów i przez punkt dany p, p'* (*fig.* 104, tab. VI). — Przyjmując punkt p, p' za punkt zbiegu rzutów, nakreślmy na płaszczyznie poziomej rzutów rzut zbieżny płaszczyzny danej i prostej danej. Rzut zbieżny płaszczyzny będzie miał miejsce na osi rzutów xy, prostej zaś otrzymamy, odrzucając przedewszystkiem jeden z jej punktów a, a' do punktu α; po dokonaniu tego wyznaczmy ślad poziomy h prostej danej i zauważmy, że on jest zarazem swym własnym rzutem zbieżnym, a zatem, że prosta łącząca punkta α i h jest rzutem prostej danej. Punkt spotkania się ω prostych obecnie wyznaczonych jest rzutem zbieżnym punktu szukanego, a zatem, rzucająca $p\omega$ tego punktu wyznaczy w punkcie przecięcia się z prostą d, d', punkt o, o', którego szukamy; jako sprawdzenie dokładności rysunku punkta o, o' winny się znajdować na jednej i tej samej linii rzutów. Za płaszczyznę pomocniczą rzutów możemy jeszcze przyjąć, zachowując ten sam punkt zbiegu p, p', płaszczyznę dzielącą na dwie równe części kąty dwuścienne 2 i 4, a i w tym przypadku, rzut zbieżny płaszczyzny danej znajdzie się na xy. Dla znalezienia rzutu zbieżnego prostej w tym nowym przypadku, dostatecznem będzie znaleźć go dla dwu jakichkolwiek jej punktów; w tym celu obierzmy naprzód za punkt spotkania prostej z płaszczyzną pomocniczą, punkt δ, δ', który jest zarazem swym własnym rzutem zbieżnym, następnie przyjmijmy za drugi punkt prostej punkt a, a', którego rzutem zbieżnym jest punkt α_1, α'_1, a łącząc z sobą tak znalezione punkta liniją prostą, otrzymamy szukany rzut zbieżny prostej. Punkt w którym ta ostatnia prosta przecina oś rzutów xy, wyznaczy rzut zbieżny ω punktu szukanego, którego rzut ortogonalny o, o' otrzymamy w sposób podany w pierwszem wykreśleniu. Zadanie to mogłoby być jeszcze rozwiązane za pomocą płaszczyzny pionowej rzucającej prostę daną i postępując podług metody ogólnej podanej powyżej, jednakże woleliśmy rozwiązać go tym sposobem szczególnym dla oswojenia czytelnika z jego zasadą.

98. Zadanie XXIII. — *Znaleźć wspólne przecięcie jakiejkolwiek płaszczyzny z prostą której rzuty zlewają się z sobą* (*fig.* 105, tab. VI). — Niech będą PαP′ ślady płaszczyzny a d, d' rzuty zlane z sobą prostej danej. Przyjmując za płaszczyznę pomocniczą, płaszczyznę dzielącą na dwie równe części kąty dwuścienne 2 i 4, użyjmy sposobu ogólnego służącego do znalezienia wspólnego przecięcia płaszczyzny z prostą daną. Dla znalezienia prostej wspólnego przecięcia płaszczyzny danej PαP′ z płaszczyzną pomocniczą zauważmy że punkt α jest już jednym z jej punktów, kreśląc więc prostę vh, $v'h'$ na płaszczyznie danej, otrzymamy, w punkcie spotkania m, m' jej rzutów drugi punkt szukany (§ 31), a prosta wspólnego przecięcia dwu płaszczyzn będzie miała za rzuty linije αm, $\alpha' m'$ zlewające się. Punkt o, o', w którym prosta αm, $\alpha' m'$ spotyka prostę daną d, d', jest właśnie punktem szukanym.

99. Zadanie XXIV. — *Znaleźć wspólne przecięcie prostej d, d' równoległej do osi rzutów z płaszczyzną wyznaczoną przez jednę ze swych linij p, p' największego spadku względem płaszczyzny pionowej rzutów* (*fig.* 106, tab. VI). — Przyjmijmy za płaszczyznę pomocniczą płaszczyznę obrazu przechodzącą przez prostę d, d', a ta spotyka prostę p, p' w punkcie a, a', zaś płaszczyznę daną podług jej prostej obrazu przechodzącej przez punkt a, a'. Tak znaleziona prosta ma za rzut pionowy prostę $a' f'$ prostopadłą

do $a'p'$ i przechodzącą przez punkt a' (§42), a za rzut poziomy prostę af leżącą na śladzie d płaszczyzny pomocniczej. Punkt spotkania o, o', prostych (d, d') i $(af, a'f')$, jest właśnie punktem szukanym.

100. Zadanie XXV. — *Przez punkt dany* m, m' *nakreślić prostę, któraby spotykała dwie proste dane* (d, d'), (d_1, d'_1), *w następujących szczególnych przypadkach*:

1° *Kiedy proste* (d, d'), (d_1, d'_1) *leżą jedna na jednej druga na drugiej z płaszczyzn rzutów* (*fig.* 107, tab. VI). — Nakreślmy np. rzut zbieżny prostych danych na płaszczyznie pionowej rzutów, przyjmując za punkt zbiegu rzutów punkt m, m', albowiem w tym przypadku rzucająca wspólna będzie właśnie prostą szukaną; d' jest swym własnym rzutem zbieżnym; rzut zaś zbieżny prostej d_1 znajdziemy uważając że ślad pionowy v' tej prostej, już jest jednym punktem jej rzutu zbieżnego, a drugi punkt otrzymamy, biorąc, jak na rysunku, rzut α punktu w nieskończoności a_∞ prostej uważanej. Prosta $v'\alpha$ łacząca punkta v' z α spotyka prostę d' w punkcie o', rzucająca więc wspólna mo, $m'o'$ jest prostą szukaną i rysunek powinien przedstawić to sprawdzenie swej dokładności, że rzuty prostej znalezionej winny spotykać prostę w przestrzeni D_1 w punktach h, h' leżących na jednej linii rzutów.

2° *Kiedy proste dane* (d, d'), (d_1, d'_1) *leżą na płaszczyznie profilu i są wyznaczone przez swe ślady poziome* (h, h'), (h_1, h'_1) *i przez jeden ze swych punktów* (a, a'). (a_1, a'_1) (*fig.* 108, tab. VI). — Sposobem podanym powyżej, rzućmy dwie proste dane na płaszczyznę poziomą rzutów, przyjmując za punkt zbiegu rzutów punkt m, m'. Punkta h, h_1 są swemi własnemi rzutami zbieżnemi, punkta zaś (a, a'), (a_1, a'_1) mają rzuty odpowiednie w punktach α, α_1, proste więc rzucają się podług linij αh, $\alpha_1 h_1$. Tak znalezione rzuty spotykają się w punkcie ω, którego rzutem pionowym jest punkt ω', leżący na osi rzutów xy; łącząc więc punkt ω, ω' z punktem m, m', otrzymamy rzuty ωm, $\omega' m'$ wspólnej prostej rzucającej, która będzie właśnie prostą szukaną.

ROZDZIAŁ IV

O METODACH

101. — Dane jakiegokolwiek zadania, odniesione do płaszczyzn spółrzędnych, mogą przybierać najrozmaitsze położenia. Pomiędzy temi rozmaitemi położeniami znajduje się przynajmniej jedno takie — wyjąwszy tylko małej liczby zadań — dla którego wielkości niewiadome przedstawiają się odrazu na płaszczyznach rzutów. I tak, jeżeli chcemy np.:

1° *Znaleźć odległość dwu punktów*, otrzymamy ją natychmiast, nadając prostej łączącej je pomiędzy sobą położenie równoległe do jednej z płaszczyzn rzutów i biorąc na tej płaszczyznie odległość rzutów tych punktów.

2° *Znaleźć przecięcie się dwu płaszczyzn.* — Weźmy jednę z nich za płaszczyznę rzutów, a ślad drugiej płaszczyzny na niej, wyznaczy prostę, która właśnie odpowiada zadaniu.

3° *Znaleźć przecięcie prostej z płaszczyzną.* — Połóżmy tę prostę na jednej z płaszczyzn rzutów, a przecięcie jej ze śladem odpowiednim płaszczyzny danej, będzie właśnie punktem szukanym.

4° *Znaleźć odległość punktu od płaszczyzny.* — Nadajmy płaszczyznie danej $P\alpha P'$, położenie prostopadłe do płaszczyzny pionowej rzutów (*fig.* 109, tab. VI), a punktowi położenie jakiekolwiek m, m';

niewiadoma wyznaczy się odrazu, kreśląc przez rzuty punktu i prostopadle do śladów płaszczyzny, proste $mq, m'q'$, zakończone : z jednej strony w punkcie m, m', a z drugiej, na śladzie pionowym płaszczyzny danej, i to dla rzutu pionowego prostej szukanej, na śladzie zaś poziomym płaszczyzny danej w punkcie q przecięcia linii rzutów przechodzącej przez punkt q' z tym śladem, dla rzutu poziomego prostej szukanej. Prosta mq, $m'q'$ w ten sposób otrzymana, będąc równoległą do płaszczyzny pionowej rzutów, przedstawia się na tej płaszczyznie w naturalnej wielkości w $m'q'$.

5° *Znaleźć odległość punktu od prostej.* —Jeżeli, obrawszy punkt m, m' gdziekolwiek nadamy prostej położenie d, d' prostopadłe do płaszczyzny poziomej rzutów (*fig.* 110, tab. VI), odległość szukana będzie odrazu przedstawiona przez prostę łączącą rzut poziomy m punktu z rzutem poziomym prostej w punkcie d.

6° *Znaleźć naturalną wielkość figury płaskiej.* — Nadajmy tej figurze położenie równoległe do jednej z płaszczyzn spółrzędnych, a rzut jej na tę płaszczyznę da nam wielkość szukaną (§ **25**).

7° *Znaleźć kąt utworzony przez dwie płaszczyzny.* — Nadajmy ich wspólnemu przecięciu położenie prostopadłe do jednej z płaszczyzn spółrzędnych, a ślady ich na tej płaszczyznie utworzą kąt płaski mierzący kąt dwuścienny szukany, i t. d.

Roztrząsając powyższe zagadnienia dochodzimy do tego przekonania, że niemal wszystkie kwestye dają się sprowadzić do czterech zasadniczych zadań, za pomocą których danym zagadnienia możemy nadać takie szczególne położenia, że wielkości niewiadome staną się natychmiast widocznemi na płaszczyznach rzutów. Te cztery zadania zasadnicze są następujące :

Zadanie I. — *Uczynić prostę daną równoległą do jednej lub obu płaszczyzn rzutów.*

Zadanie II — *Uczynić prostę daną prostopadłą do jednej płaszczyzny rzutów.*

Zadanie III. — *Uczynić płaszczyznę daną prostopadłą do jednej z płaszczyzn rzutów.*

Zadanie IV. — *Uczynić płaszczyznę daną równoległą do jednej z płaszczyzn rzutów.*

Dla rozwiązania tych czterech kwestyj zasadniczych możemy, albo zostawiając figury dane w spoczynku, zmienić położenie płaszczyzn rzutów i w ten sposób dojść do metody zwanej «*metodą zmiany płaszczyzn rzutów*», lub też, nie naruszając pierwotnego położenia płaszczyzn rzutów, możemy nadać ruch obrotowy około pewnych osi figurom danym i w ten sposób dojść do metody znanej pod nazwą «*metody ruchu obrotowego*»; lub też jeszcze, jeżeli figura dana jest płaską, możemy obrócić ją naokoło *poziomej* lub naokoło *prostej obrazu* i uczynić ją równoległą jużto do płaszczyzny poziomej rzutów, już też do płaszczyzny pionowej rzutów ; po dopełnieniu tego ruchu powiadamy, żeśmy zrobili *kład* figury danej na jedną lub drugą płaszczyznę rzutów, ztąd powstała metoda znana pod nazwą «*metody kładów*».

ZMIANA PŁASZCZYZN RZUTÓW

102. Znakowanie. — Linije ziemne lub osie rzutów będą, jak poprzednio, oznaczane głoskami x, y, z dodaniem do nich skaźników odpowiadających liczbie zmian, którym uległa pierwotna oś rzutów. Głoski zachowają zawsze, względnie do obserwatora, który się znajduje w kącie dwuściennym 1 i w położeniu określonem w § **15**, swe położenie zwyczajne; rzuty zaś punktów i ślady płaszczyzn będą oznaczane temi samemi głoskami co na figurze pierwotnej, z dodaniem do nich skaźników wyrównywających liczbie zmian dokonanych.

103. Zadanie I. — *Zmienić położenie płaszczyzny pionowej rzutów względem jakiegokolwiek punktu* (*fig.* 111 i 112, tab. VI). Niech m, m' będą rzutami punktu w pierwotnym układzie płaszczyzn rzu-

tów i x_1y_1 nowa oś rzutów, która, jeżeli przyjmiemy układ prostokątny płaszczyzn rzutów, określa nowe położenie płaszczyzny pionowej.

W tym nowym układzie płaszczyzn rzutów, rzut poziomy m punktu danego pozostanie niezmiennym, kierunek i wielkość wzniesienia jego $m'\mu$, nad płaszczyznę poziomą pozostaną także też same, nowy więc rzut pionowy szukany znajdzie się na prostopadłej do nowej osi rzutów x_1y_1, przechodzącej przez punkt m i ponad nią w punkcie m'_1, który otrzymamy odcinając na nowej linii rzutów długość $m'_1\mu_1$ równą $m'\mu$. W zastosowaniach, przy wyborze płaszczyzny rzutów której położenie mamy zmienić, zwrócić należy uwagę, która z figur 111 lub 112 przedstawi wykreślenie prostsze.

104. Zadanie II. — *Zmienić położenie płaszczyzny poziomej rzutów względem jakiegokolwiek punktu* (do rozwiązania).

105. Zadanie III. — *Zmienić położenie płaszczyzny pionowej rzutów względem jakiejkolwiek prostej.*

Rozwiązanie ogólne. — Dla rozwiązania zadania dosyć będzie zmienić płaszczyzny rzutów względem dwu jakichkolwiek punktów prostej danej. W danym razie, dla uproszczenia rysunku, ślad poziomy prostej danej może być uważany za jeden z tych punktów.

Niech d, d' będą rzutami prostej danej (*fig.* 113, tab. VI) i x_1y_1 nowa oś rzutów; oznaczmy najprzód ślad poziomy h, h' prostej danej d, d' w pierwotnym układzie płaszczyzn rzutów i rzućmy go na nową płaszczyznę pionową rzutów w punkcie h'_1; obierzmy następnie dowolny punkt m, m' na prostej danej i rzućmy go w sposób podany w paragrafie 103 do punktu m'_1 na nową płaszczyznę pionową; łącząc punkta h'_1 z m'_1 otrzymamy prostę $h'_1m'_1$, która będzie właśnie prostą szukaną.

106. Zadanie IV. — *Zmienić położenie płaszczyzny poziomej rzutów względem jakiejkolwiek prostej* (do rozwiązania).

107. Zadanie V. — *Zmienić położenie płaszczyzny pionowej rzutów względem jakiejkolwiek płaszczyzny.*

Rozwiązanie ogólne. — Dostatecznem będzie, dla rozwiązania tej kwestyi zmienić położenie płaszczyzny pionowej rzutów względnie do trzech punktów, lub względem jednego punktu i prostej, lub też względem dwu prostych leżących na danej płaszczyznie.

Pierwsze wykreślenie (*fig.* 114, tab. VI). — Niech będzie $P\alpha P'$ płaszczyzna dana przez swe ślady i x_1y_1 nowa oś rzutów; zmienimy płaszczyzny rzutów względnie do dwu prostych płaszczyzny danej. Przyjmując za jedną z prostych ślad poziomy P płaszczyzny danej, a za drugą prostę jedną z poziomych płaszczyzny danej, widzimy, że ślad P płaszczyzny danej jest wspólny obu układom płaszczyzn rzutów, druga zaś prosta jest wyznaczoną przez swój rzut poziomy h. Przedewszystkiem oznaczmy ślad pionowy v' prostej, w pierwotnym systemacie płaszczyzn rzutów, a znając go, postarajmy się wyznaczyć jej ślad pionowy t' w systemacie nowym; w tym celu, zauważmy że ślad pionowy t' znajduje się na prostopadłej do nowej osi rzutów x_1 y_1 przechodzącej przez punkt t przecięcia się osi rzutów x_1y_1 z prostą h, odcinając więc na tej prostopadłej długość tt' równą vv', która jest wspólną dla wszystkich punktów prostej poziomej płaszczyzny danej w obu systematach płaszczyzn spółrzędnych otrzymamy rozwiązanie szukane. Łącząc obecnie punkt t' z punktem β, przecięcia się prostych P i x_1y_1, otrzymamy ślad pionowy płaszczyzny danej w nowym systemacie płaszczyzn rzutów.

Drugie wykreślenie (*fig.* 115, tab. VI). — Niech będą $P\alpha P'$ i x_1y_1, płaszczyzna dana i nowa oś rzutów; ponieważ ślad poziomy P płaszczyzny danej jest wspólny obu systematom płaszczyzn spółrzędnych i punkt β przecięcia się osi rzutów x_1y_1 ze śladem P wyznacza jeden z punktów śladu pionowego szukanego, idzie więc tylko o wyznaczenie drugiego punktu tegoż śladu. Dla znalezienia go, korzystnem będzie, jeżeli na to zezwalają warunki zadania, zauważyć punkt przecięcia się dwu śladów pionowych płaszczyzny danej, czyli punkt spotkania się trzech płaszczyzn t. j. pierwotnej płaszczyzny pionowej rzutów, nowej płaszczyzny pionowej rzutów i płaszczyzny danej $P\alpha P'$. Punkt o którym mowa da się wyznaczyć biorąc, w pierwotnym układzie płaszczyzn rzutów, przecięcie się śladów pionowych płaszczyzny danej $P\alpha P'$ z nową płaszczyzną pionową rzutów; ślad pierwszej z tych płaszczyzn rysuje się podług prostej $\alpha P'$, ślad zaś nowej płaszczyzny pionowej podług prostej vv' przechodzącej przez punkt przecięcia się obu osi rzutów, punkt więc v' jest w pierwotnym układzie płaszczyzn spółrzędnych, punktem wspólnym obu śladom pionowym płaszczyzny $P\alpha P'$ danej. Jeżeli więc, względem tego punktu, zrobimy zmianę płaszczyzny pionowej rzutów znajdziemy na prostopadłej do x_1y_1 poprowadzonej przez punkt v i w odległości, od tego ostatniego punktu, równej vv', nowy rzut v'_1 punktu należącego do śladów pionowych płaszczyzny danej, a łącząc tak znaleziony punkt v'_1 z punktem β prostą $\beta v'_1$, otrzymamy nowy ślad pionowy P'_1 płaszczyzny danej który należało wykreślić.

108. Zadanie VI. — *Zmienić położenie płaszczyzny poziomej rzutów względem jakiejkolwiek płaszczyzny* (do rozwiązania).

109. Zadanie VII. — *Uczynić prostę daną d, d' równoległą do płaszczyzny pionowej rzutów* (*fig.* 116, tab. VII). Dostatecznem jest nakreślić nową oś rzutów równolegle do rzutu poziomego prostej danej d (§ **34**, 3°) i szukać sposobem wskazanym w (§ **105**) nowego rzutu d'_1 prostej danej; w tym celu znalazłszy ślad poziomy h prostej danej d, d', należy rzucić go pionowo na x_1y_1 do h'_1 i zmienić położenie płaszczyzny względem punktu jakiegokolwiek m, m' prostej danej, a prosta łącząca punkta h'_1 z m'_1 będzie właśnie rzutem $h'_1m'_1$ prostej równoległej do płaszczyzny pionowej rzutów.

110. Zadanie VIII. — *Uczynić prostę daną d, d' prostopadłą do płaszczyzny poziomej rzutów* (*fig.* 117, tab. VII). Przedewszystkiem, sposobem podanym w poprzedzającym paragrafie, uczyńmy prostę daną równoległą do płaszczyzny pionowej rzutów, i dla uproszczenia wykreślenia przenieśmy wypadek z poprzedniego rysunku na rysunek którym się w tej chwili zajmujemy. Niech więc będzie x_1y_1 nowa oś rzutów i d, d'_1 rzuty prostej danej w położeniu równoległem do płaszczyzny pionowej rzutów. Przyjmijmy teraz za nową oś rzutów prostę x_2y_2 prostopadłą do d'_1 i zmieńmy położenie płaszczyzny poziomej rzutów; rzut pionowy d'_1 i oddalenia wszystkich punktów prostej danej od płaszczyzny pionowej rzutów pozostaną niezmienne, czyli nowy rzut poziomy d_2 prostej D, (który będzie punktem) otrzymamy, odcinając na przedłużeniu prostej d'_1, odległość $h_1h'_1$ równą δd_2.

111. Zadanie IX. — *Uczynić płaszczyznę daną $P\alpha P'$ prostopadłą do płaszczyzny pionowej rzutów* (*fig.* 118, tab. VII). — Należy nakreślić nową oś rzutów prostopadle do śladu poziomego $P\alpha$ płaszczyzny danej (§ **49**) i jednym ze sposobów podanych w (§ **107**) zmienić położenie płaszczyzn rzutów.

112. Zadanie X. — *Uczynić płaszczyznę daną równoległą do płaszczyzny poziomej rzutów* (fig. 119, tab. VII). — Przedewszystkiem należy uczynić sposobem podanym w poprzedzającym paragrafie, płaszczyznę daną prostopadłą do płaszczyzny pionowej rzutów; po tej pierwszej zmianie nowa oś

rzutów przyjmie położenie x_1y_1 a ślady płaszczyzny danej położenie $P_\beta P'_1$. Obecnie, żeby uczynić płaszczyznę daną równoległą do nowej płaszczyzny rzutów, zmieńmy położenie tej ostatniej kreśląc nową oś rzutów x_2y_2 równolegle do P'_1; śladami płaszczyzny danej będą w tem nowem położeniu : na płaszczyznie pionowej rzutów, prosta P'_1 wspólna obu układom płaszczyzn rzutów, na płaszczyznie zaś poziomej rzutów, prosta (w nieskończoności płaszczyzny danej) śladu nie ma.

Uwaga. — Jeżeli zmieniamy płaszczyznę poziomą rzutów, lub jeżeli po dokonaniu tej zmiany zmieniamy płaszczyznę pionową rzutów, nowe płaszczyzny rzutów przestają być odpowiednio prostopadłe lub równoległe do linii pionu; jednakże przez analogiję i dla uniknienia powtarzania się przyjętem zostało raz na zawsze uważać nowe płaszczyzny rzutów za płaszczyznę poziomą i za płaszczyznę pionową rzutów.

Jako przykład zastosowania metody zmiany płaszczyzn rzutów, weźmy następujące zadanie :

113. Ćwiczenie. — *Znaleźć kąt utworzony przez dwie płaszczyzny oznaczone przez prostę ich wspólnego przecięcia i przez jeden punkt leżący na każdej z nich.* — Niech będą i, i' rzutami prostej wspólnego przecięcia płaszczyzn danych, a (m, m') (n, n') rzutami punktów danych (*fig.* 120, tab. VII). Ażeby uwidocznić na płaszczyznie poziomej rzutów, kąt płaski jako miarę dwuściennego szukanego, uczyńmy prostę wspólnego przecięcia i, i' prostopadłą do tej płaszczyzny spółrzędnych (§ **101**, 7° i § **110**); w tym celu, sprowadźmy prostę i, i' na płaszczyznę pionową rzutów, przyjmując za oś rzutów prostę x_1y_1 przechodzącą przez rzut poziomy i tej prostej, następnie zaś sposobem znanym zmieńmy położenie płaszczyzny pionowej rzutów. Nowy rzut pionowy i'_1 prostej danej otrzymamy pamiętając, że jej ślad poziomy h jest jej własnym rzutem na nowej płaszczyznie pionowej rzutów, a tylko zmieniając położenie jej śladu pionowego v', który teraz znajdzie się w punkcie v'_1. Rzuty punktów (m, m') (n, n') znajdą się, kreśląc przez każdy z ich rzutów poziomych prostopadłe do x_1y_1 i odcinając na nich długości $\mu_1 m'_1 = \mu m'$ i $\nu_1 n_1' = \nu n'$; punkta m'_1, n'_1 będą właśnie nowemi rzutami pionowemi punktów danych.

Przesuńmy obecnie oś rzutów x_1y_1 do położenia x_2y_2 prostopadłego do i'_1 i zmieńmy położenie płaszczyzny poziomej rzutów; prosta dana, w tym nowym układzie płaszczyzn rzutów, leży na płaszczyznie pionowej i jest prostopadłą do płaszczyzny poziomej, rzut więc jej poziomy będzie punktem i_2 leżącym na przecięciu się i'_1 z x_2y_2, rzuty zaś punktów danych kreśląc przez punkta m'_1, n'_1 proste prostopadłe do osi rzutów x_2y_2 znajdziemy w punktach m_2, n_2, których odległości $\mu_2 m_2$, $\nu_2 n_2$ od tej osi rzutów są odpowiednio równe oddaleniom $m\mu_1$, $n\nu_1$ tych punktów od osi x_1y_1.

Widzimy więc w tej chwili, że płaszczyzny dane mają swe ślady pionowe na prostej wspólnej i'_1, a ślady poziome na prostych i_2m_2, i_2n_2, kąt więc α zawarty pomiędzy temi dwiema ostatniemi prostemi ma tęż samą wielkość, co kąt zawarty pomiędzy dwiema płaszczyznami danemi.

RUCH OBROTOWY

114. Podczas ruchu obrotowego jakiejkolwiek figury na około osi, każdy punkt jej opisuje, na płaszczyznie prostopadłej do osi obrotu, łuk koła, którego środkiem jest spodek prostopadłej do osi obrotu wyprowadzonej z tego punktu, promieniem zaś długość tej prostopadłej zawarta pomiędzy osią obrotu i punktem uważanym. Dla uniknienia wielkiego zawikłania rysunku wybierać należy bezzmiennie na osie obrotu takie proste, które są prostopadłe do jednej z płaszczyzn rzutów a równoległe do drugiej; w tem

bowiem tylko jedynem położeniu jeden rzut łuków opisanych przez rozmaite punkta figury obróconej przedstawia się na jednej z płaszczyzn rzutów w naturalnej wielkości, drugi zaś rzut jest liniją prostą.

115. Zadanie I. — *Obrócić jakikolwiek punkt naokoło osi pionowej i w kierunku danym o wielkość kątową* α (*fig.* 121, tab. VII). — Niech (z, z') i (m, m') będą rzutami: osi obrotu i punktu danego; u strzałką oznaczającą kierunek w którym ruch obrotowy winien być dokonany. Podczas ruchu punkt dany opisuje łuk koła, którego rzuty pokażą się: 1° w naturalnej wielkości na płaszczyznie poziomej rzutów i 2° podług prostej równoległej do osi rzutów xy na płaszczyznie pionowej rzutów. Oba te rzuty dadzą się przedstawić z łatwością kreśląc ze środka z, promieniem równym zm, łuk koła na płaszczyznie poziomej rzutów i prowadząc przez punkt m' prostę równoległą do osi rzutów na płaszczyznie pionowej. Ostateczne położenie punktu m, po dokonaniu obrotu, przedstawi się na płaszczyznie poziomej w punkcie m_1 przecięcia się łuku opisanego w kierunku strzałki u z promieniem zm_1, który tworzy z zm kąt równy kątowi danemu α; a rzut pionowy znajdzie się na przecięciu linii rzutów przechodzącej przez punkt m_1 z rzutem pionowym łuku koła; rzuty więc szukane są m_1 i m'_1.

116. Zadanie II. — *Obrócić o kąt* α *jakąkolwiek prostę naokoło osi pionowej w kierunku danym* (*fig.* 122, tab. VII).—Niech (d, d') będą rzutami prostej danej i (z, z') rzutami osi obrotu. Żeby obrócić prostę daną, należy sposobem podanym w poprzedzającym paragrafie obrócić dwa jakiekolwiek jej punkta.

Pierwsze wykreślenie. — Obracajmy dwa punkta prostej jednakowo oddalone od osi obrotu, i w tym celu, z punktu z jako środka opiszmy promieniem dostatecznie dużym, łuk koła na płaszczyznie poziomej; stosując obecnie sposób wykreślenia podany powyżej do punktów A i B prostej D, których rzuty poziome leżą na łuku, punkta $(a, a')(b, b')$ przejdą do (a_1, a'_1), (b_1, b'_1) zatem, po dokonaniu ruchu, prosta dana będzie miała za rzuty proste (d_1, d'_1) łączące punkta (a_1, b_1), (a'_1, b'_1).

Drugie wykreślenie. — Drugie wykreślenie polega na wyznaczeniu najkrótszej odległości dwu prostych w szczególnym przypadku bardzo ważnym; zajmiemy się więc przedewszystkiem rozwiązaniem tej ostatniej kwestyi, a następnie podamy drugie wykreślenie niniejszego zadania.

117. Zadanie.—*Znaleźć najkrótszą odległość dwu prostych* (d, d'), (d_1, d'_1), *z których jedna jest prostopadłą do jednej z płaszczyzn rzutów* (*fig.* 123, tab. VII). — Najkrótsza odległość dwu prostych musi być prostopadłą do każdej z prostych danych, a ponieważ ona jest prostopadłą do prostej d_1, d'_1, musi więc być poziomą i tworzyć z prostą d_1, d_1' kąt prosty, którego jeden bok jest równoległy do płaszczyzny poziomej rzutów, zaś rzut jego na tę płaszczyznę musi być w rzeczywistej wielkości (§ 42); z drugiej strony, najkrótsza odległość opierając się koniecznie o prostę d_1, d'_1, ma za rzut poziomy prostę przechodzącą przez punkt d_1, zatem ten rzut jest prostą prostopadłą do prostej d, a przechodzącą przez punkt d_1 t. j. prostą d_1a. Linija rzutów nakreślona przez punkt a wyznaczy w punkcie przecięcia się z prostą d' rzut pionowy a' punktu a, a zatem drugim rzutem najkrótszej odległości będzie prosta $a'b'$ równoległa do osi rzutów i przechodząca przez punkt a'. Obecnie więc znaleźliśmy i rzuty ab, $a'b'$ najkrótszej odległości i jej naturalną wielkość ab.

Gdyby prosta d, d' była prostą obrazu, zadanie dałoby się rozwiązać w taki sam zupełnie sposób; nie powtarzając więc rozumowania, przedstawiliśmy wykreślenie odnoszące się do tego przypadku na

figurze 124, tab. VII, na której najkrótsza odległość jest przedstawiona przez prostę $d_1 a$ na płaszczyznie poziomej rzutów, a na płaszczyznie pionowej przez punkta a', b' schodzące się z sobą; naturalna jej wielkość znajduje się na płaszczyznie poziomej t .j. $d_1 a$.

Wróćmy obecnie do naszego zadania dotyczącego ruchu obrotowego prostej (d, d') naokoło osi obrotu (z, z'), w kierunku oznaczonym przez strzałkę u (*fig.* 125, tab. VII). Znajdziemy przedewszystkiem najkrótszą odległość za, $a'b'$ prostych danych i następnie obrócimy o kąt α spodek a, a' tej linii na prostej $d\ d'$ i ślad poziomy $0, 0'$ tej ostatniej (§ 115). Ponieważ podczas całego ruchu, najkrótsza odległość zachowuje swą długość niezmienną, zatem rzuty poziome prostej ruchomej w rozmaitych jej położeniach pozostaną ciągle styczne do okręgu koła opisanego przez punkt a; rzut więc nowy d_1 prostej D da się znaleźć, biorąc położenia a_1, a'_1 punktu a, a' po dokonaniu obrotu, sposobem wskazanym w paragrafie poprzedzającym i kreśląc następnie przez punkt a_1 styczną do łuku koła opisanego przez punkt a, a'. Co się zaś tyczy rzutu pionowego prostej d, d' w tem nowem położeniu, widzimy, że punkt a'_1 jest jednym z punktów jego i że ślad poziomy θ prostej d, d' przypada w punkcie θ_1 na łuku koła, którego środkiem jest punkt z i który przechodzi przez θ i przez prostę d_1; kreśląc zatem rzut pionowy θ'_1 tego śladu, prosta $\theta'_1 a'_1$ łącząca punkta θ'_1 z a'_1 będzie właśnie szukanym rzutem pionowym.

118. Zadanie III. — *Obrócić o kąt α i w kierunku danym, płaszczyznę jakąkolwiek* PβP′ *naokoło osi pionowej* (z, z') (*fig.* 126, tab. VII). — Dostatecznem będzie dla rozwiązania tego zadania obrócić trzy punkta na płaszczyznie, lub prostę i punkt na niej leżące lub nareszcie dwie proste na niej obrane. Obierzmy więc np. ślad poziomy P i punkt spotkania osi obrotu z, z' z płaszczyzną PβP′; dla wyznaczenia punktu spotkania o którym mowa, nakreślmy poziomę płaszczyzny PβP′, której rzut poziomy h przechodzi przez punkt z, zaś ślad pionowy v' tej prostej znajduje się w punkcie przecięcia śladu pionowego P′ płaszczyzny danej z liniją rzutów przechodzącą przez punkt przecięcia prostych h i xy; rzut zaś pionowy h' otrzymamy kreśląc przez v' prostę równoległą do xy; punkt spotkania tej ostatniej prostej poziomej z osią obrotu z, z' daje punkt z, a', w którym oś obrotu spotyka płaszczyznę daną PβP′.

Obecnie należy obrócić prostę βP w kierunku oznaczonym przez strzałkę u o kąt α naokoło osi obrotu z, z'. Podczas tego ruchu prosta βP pozostaje ciągle styczną do okręgu koła opisanego z punktu z jako środka promieniem zp równym odległości punktu z od prostej βP, a skoro punkt p opisze całkowity łuk odpowiedni kątowi α i dojdzie do punktu p_1, prosta βP przypadnie na styczną P_1 do okręgu koła. Zadanie nasze sprowadzonem zostało w tej chwili do nakreślenia śladów płaszczyzny przechodzącej przez prostę P_1 i przez punkt stały z, a'; w tym celu, przez punkt z, a' nakreślmy poziomę płaszczyzny szukanej, to rzut jej poziomy jest równoległy do prostej P_1 i przechodzi przez punkt z, rzut zaś jej pionowy pada na h'; kreśląc więc ślad pionowy t' tej prostej, otrzymamy jeden z punktów należących do śladu szukanego płaszczyzny; że zaś przecięcie się β_1 prostych P_1 i xy daje drugi punkt, zatem prosta łącząca punkt β_1 z t' tworzy ślad P'_1 który należało znaleźć.

119. Zadanie IV. — *Uczynić prostę daną równoległą do płaszczyzny pionowej rzutów* (*fig.* 127, tab. VII). — Niech d, d' będą rzutami prostej danej; przyjmijmy prostę pionową z, z' za oś obrotu, i dla rozwiązania zadania znajdźmy najkrótszą odległość $z\,a$, $a'o'$ prostej od osi obrotu. Podczas ruchu rzut poziomy prostej danej pozostanie stycznym do okręgu koła zakreślonego z punktu z promie-

niem za, znajdziemy więc ostateczne jego położenie kreśląc styczną d_1 do okręgu koła równoległe do osi xy. Po dokonaniu ruchu punkt a, a' przejdzie do a_1, a'_1 a ślad poziomy θ, θ' prostej d, d' przypadnie na θ_1, θ'_1 (§ 117); łącząc więc punkta θ'_1 z a'_1, znajdziemy prostę $\theta'_1 a'_1$, która jest właśnie szukanym rzutem pionowym prostej szukanej d'_1.

120. Zadanie V. — *Uczynić prostę daną prostopadłą do płaszczyzny poziomej rzutów* (*fig.* 128, tab. VII). — Przedewszystkiem, sposobem podanym w poprzedzającym paragrafie uczyńmy prostę daną równoległą do płaszczyzny pionowej rzutów; niech d_1, d'_1 będą rzutami prostej danej po dokonaniu tego pierwszego ruchu; obecnie obróćmy prostę daną, dla nadania jej rzutowi pionowemu położenia prostopadłego do osi rzutów, naokoło osi $z_1 z'_1$ prostopadłej do płaszczyzny pionowej rzutów, podczas obrotu rzut pionowy o którym mowa, zostaje bezustannie styczny do łuku koła zakreślonego z punktu z'_1 promieniem równym prostopadłej $z'_1 p'_1$ spuszczonej z punktu z'_1 na prostę d'_1; prosta więc d'_2, którą się otrzyma kreśląc styczną pionową do łuku koła, o którym mowa, przedstawi jego ostateczne położenie, a ponieważ oddalenie rozmaitych punktów prostej pozostaje niezmiennem, zatem nowy rzut jej poziomy d_2 otrzymamy z przecięcia się prostej przedłużonej d'_2 z prostą d_1.

121. Zadanie VI. — *Uczynić płaszczyznę daną prostopadłą do płaszczyzny pionowej rzutów* (*fig.* 129, tab. VII). — Niech będzie $P\alpha P'$ płaszczyzną daną; przyjmijmy za oś obrotu prostę z, z' prostopadłą do płaszczyzny poziomej i obracajmy około niej płaszczyznę daną dopóty, dopóki ślad jej nie przypadnie na prostej P_1 prostopadłej do osi rzutów xy a stycznej do okręgu koła opisanego przez spodek p prostopadłej wyprowadzonej z punktu z na αP. Prosta P_1 będzie nowym śladem poziomym płaszczyzny szukanej, która będzie w zupełności wyznaczona, skoro wyznaczymy rzut jednego z jej punktów nie leżących na śladzie poziomym. Dla wyznaczenia rzutów punktu, o którym mowa, oznaczmy przecięcie się osi obrotu $z z'$ z płaszczyzną daną za pomocą poziomej tej płaszczyzny spotykającej oś obrotu; rzut poziomy tej linii jest prostą równoległą h do P przechodzącą przez punkt z, a ślad jej pionowy v' znajduje się na przecięciu prostej prostopadłej do osi rzutów xy przechodzącej przez punkt spotkania v linii rzutów z prostą h i na śladzie P' płaszczyzny; wskutek tego rzut pionowy poziomej, o której mowa, jest prostą równoległą do xy przechodzącą przez punkt v'; w punkcie spotkania o' tej prostej z osią obrotu z' znajdziemy rzut pionowy punktu szukanego, którego rzut poziomy leży w punkcie z.

W tej chwili płaszczyzna dana jest wyznaczoną przez prostę P_1 i przez jeden ze swych punktów o, o'; punkt zaś α_1 spotkania się P_1 z osią rzutów xy jest jednym z punktów należących do śladu pionowego; wreszcie płaszczyzna dana będąc prostopadłą do płaszczyzny pionowej rzutów, wszystkie rzuty jej punktów na tej płaszczyznie spółrzędnych należą do szukanego śladu, a zatem prosta łącząca punkt α_1 z o' jest właśnie śladem pionowym P'_1 płaszczyzny po dokonanym obrocie.

122. Zadanie VII. — *Sprowadzić jakąkolwiek płaszczyznę do położenia równoległego do płaszczyzny poziomej rzutów* (*fig.* 130, tab. VII).—Sposobem podanym w poprzedzającym paragrafie, sprowadźmy najprzód płaszczyznę daną, za pomocą stosownego obrotu, do położenia prostopadłego do płaszczyzny pionowej rzutów. Niech więc będzie $P_1\alpha_1 P'_1$ płaszczyzna po dokonaniu pierwszego obrotu; nadajmy jej drugi ruch obrotowy naokoło osi obrotu z_1, z'_1 prostopadłej do płaszczyzny pionowej rzutów; w tym ruchu, ślad jej pionowy będzie się poruszał zostając zawsze stycznym do okręgu koła mającego za środek z' a za promień długość równą odległości prostej P'_1 od środka; jeżeli wstrzymamy ruch obrotowy

w chwili gdy ślad P'_1 zajmie położenie P'_2 stycznej równoległe do osi rzutów, otrzymamy ślad pionowy płaszczyzny w położeniu równoległem do płaszczyzny poziomej rzutów, ślad zaś jej poziomy przedstawi prosta w nieskończoności płaszczyzny danej.

123. Ćwiczenia. — *Znaleźć najkrótszą odległość jakiejkolwiek prostej d, d' od osi rzutów* (*fig.* 131, tab. VII). — Żeby można było zastosować do rozwiązania tego zadania, wykreślenie podane powyżej (§ 117), sprowadźmy oś rzutów do położenia prostopadłego do płaszczyzny pionowej rzutów, obracając ją na około osi z, z' prostopadłej do płaszczyzny poziomej rzutów a przechodzącej przez ślad pionowy t' prostej d, d'; oś ta obrotu ma tę szczególną własność, że opiera się naraz na obu prostych danych, a zatem, że podczas ruchu, punkta wspólne t', z i z' są stałe, czyli, że po dokonaniu tegoż, współcześnie linija ziemna zy_1 będzie prostopadłą do xy i przejdzie przez punkt z. Rzutem więc poziomym prostej d, d' będzie prosta d_1 prostopadła do d, albowiem prosta ta tak samo jak oś rzutów musi się obrócić o 90°, rzut zaś jej pionowy otrzymamy zważając, że ślad jej poziomy θ, θ' dokonywa jednę czwartą obrotu i ma swoje rzuty w punktach θ_1, θ'_1; ponieważ nadto t' pozostaje stałem, zatem rzut pionowy szukany jest prostą łączącą punkt θ'_1 z punktem t'.

Stosując więc obecnie wykreślenie podane w paragrafie wskazanym powyżej i kreśląc przez punkt z prostopadłę za'_1 do prostej d'_1, otrzymamy i rzut pionowy najkrótszej odległości i jej rzeczywistą wielkość. Rzut poziomy najkrótszej odległości otrzymuje się bardzo łatwo, kreśląc przez punkt a'_1 liniję rzutów, która wyznaczy punkt a_1 i przez tak znaleziony punkt prowadząc prostę a_1b_1 równoległą do osi rzutów xy.

Gdybyśmy życzyli znać nietylko rzeczywistą wielkość najkrótszej odległości, lecz nadto jej rzuty, należałoby sprowadzić całą figurę do pierwotnego jej położenia, wciągając do tego ruchu prostę a_1b_1, $a'_1b'_1$; wówczas bowiem punkta $b_1b'_1$ i $a_1a'_1$ opisałyby ćwiartki okręgu koła i przypadłyby w punktach b, b' i a, a'. Jeżeli rysunek został wykonany z dokładnością, z uwagi, że najkrótsza odległość jest prostopadłą do osi rzutów, winniśmy znaleźć dla prostopadłej wspólnej ab, $a'b'$, prostę profilu.

METODA KŁADÓW

124. Jak to już powiedzieliśmy powyżej, głównym zadaniem metody kładów jest : 1° podanie sposobów rysunkowych do oznaczenia figur płaskich w rzeczywistej wielkości i 2° odwrotnie, jakakolwiek byłaby płaszczyzna figury danej, podać sposób znalezienia rzutów figury, której wykreślenie jest podane w geometryi płaskiej.

Cała metoda kładów sprowadza się do małej tylko liczby zastosowań, które postaramy się podać jak następuje.

125. Zadanie. — *Zrobić kład punktu danego na około osi poziomej, lub przeciwnie, znając kład punktu danego, znaleźć jego rzuty.*

Rozwiązanie ogólne. — Mając dany punkt M i oś daną H (*fig.* 132, tab. VII); przesuńmy przez oś H płaszczyznę poziomą P. Dla zrobienia kładu punktu M na tę płaszczyznę, nakreślmy prostę Mm prostopadłą do P, z punktu zaś m jako spodka tej prostej nakreślmy prostę $m\mu$ prostopadłą do osi kładu H; ponieważ prosta łącząca punkt M ze spodkiem μ ostatniej prostopadłej będzie, na zasadzie twierdzenia trzech prostopadłych, także prostopadłą do osi kładu H, zatem po dokonaniu kładu prosta Mμ

padnie na przedłużeniu $M_1\mu$ prostej $m\mu$ a mianowicie punkt M padnie w M_1 t. j. w odległości od punktu μ równej przeciwprostokątni trójkąta, którego boki kąta prostego są $m\mu$ i różnica Mm wzniesień punktu danego od osi kładu naokoło której robimy kład figury.

Uwaga. — Jeżeli oś kładu nie znajduje się na jednej z płaszczyzn rzutów, w takim razie nie robimy rzeczywistego kładu lecz tylko jego rzut, który, dla uniknienia omówień, zwykliśmy przyjmować za sam kład, gdyż w rzeczywistości, jest on zupełnie równy kładowi i skierowany w tęż samą stronę. Jest to kład tylko przeniesiony równolegle do siebie samego w kierunku prostopadłym do swej płaszczyzny.

126. Powinowactwo.—Powiadamy że dwie figury ABC...*abc*... są z sobą w powinowactwie, jeżeli dla jednej i tej samej odciętej rzędne punktów tych figur są w stosunku stałym (*fig.* 133, tab. VII) W skutek tego określenia, przyjmując za osie spółrzędnych jakiekolwiek osie *xoy* winniśmy mieć zawsze:

$$\frac{A\alpha}{a\alpha}=\frac{B\beta}{b\beta}=\frac{C\gamma}{c\gamma}=\ldots=k.$$

Stała k jest stosunkiem powinowactwa, punkt zaś rzędnych leżący w nieskończoności jest jego środkiem.

127. Twierdzenie. — *Rzut ortogonalny jakiejkolwiek figury płaskiej i jej kład na płaszczyznę rzutów są z sobą w powinowactwie.* — Przypuśćmy (fig. 132), że punkt M jest punktem jakiejś figury, którą bierzemy pod uwagę, a otrzymamy:

$$\frac{m\mu}{M\mu}=\frac{m\mu}{M_1\mu}=\cos\alpha.$$

Otóż, kąt α utworzony przez płaszczyznę figury uważanej z płaszczyzną rzutów jest stały a ztąd wypada, że dla jednej i tej samej odciętej liczonej na osi kładu, rzędne $m\mu$ i $M_1\mu$ jakiegokolwiek punktu leżącego na rzucie i na kładzie, liczone na prostopadłej do osi kładu są w stosunku stałym, a więc są one z sobą w powinowactwie i stosunek powinowactwa równa się dostawie kąta zawartego pomiędzy płaszczyzną figury w przestrzeni i płaszczyzną rzutów. Środek zaś powinowactwa leży, jak widzimy, w nieskończoności na prostopadłej do osi kładu.

WYKRESY PRZEDSTAWIAJĄCE KŁAD PUNKTU.

128. Pierwsze wykreślenie —Niech będą m, m' rzuty punktu, którego chcemy zrobić kład naokoło osi kładu h, h' (*fig.* 134, tab. VII). Wyznaczmy odległość punktu M od osi kładu, to jest odległość daną (§ **125**, Rozw. ogól.) przez przeciwprostokątnię trójkąta mającego za boki kąta prostego różnicę wzniesień $m'n'$ punktu M od osi kładu H i odległość $m\mu$ punktu m od prostej h; dla znalezienia wielkości tej przeciwprostokątni zróbmy kład pomocniczy, obracając trójkąt prostokątny $Mm\mu$ w przestrzeni naokoło prostej $m\mu$ jako osi obrotu; kreśląc z punktu m prostopadłę do $m\mu$ i odcinając na niej $M''_1m=m'n'$, prosta łącząca punkta M''_1 z μ będzie właśnie rzutem w naturalnej wielkości kładu przeciwprostokątni. Mając to, zróbmy kład główny obracając punkt M na około osi kładu H; rzut poziomy tego punktu w kładzie przypadnie na przedłużeniu prostej $m\mu$ (§ **126**. Rozw. ogól.) i w odległości od punktu μ równej μM_1, której rzut przypadnie na $\mu M''_1$ zakreślając łuk koła; punkt M_1 tak znaleziony jest właśnie punktem szukanym.

Uwaga. — W zadaniach należących do zastosowań prawie zawsze wypada robić kłady kilku punktów razem, można więc za pomocą następujących uwag uprościć wykreślenia.

1° Prosta $M''_1\mu$ tworzy z $m\mu$ kąt płaski równy kątowi dwuściennemu utworzonemu przez płaszczyznę której robimy kład, z płaszczyzną poziomą rzutów. Tak utworzony kąt płaski zachowuje swą wielkość we wszystkich punktach osi obrotu, ztąd wnosić należy że proste takie jak $\mu M''_1$ są względem siebie równoległe.

2° W trójkącie równoramiennym $M_1\mu M''_1$ kąt $M_1\mu M''_1$ zachowując bezustannie swą pierwotną wielkość dla wszystkich punktów których kład robimy, pozostałe kąty trójkąta zachowują także swą pierwotną wielkość, a w skutek tego proste takie jak $M_1M''_1$, które łączą kłady pomocnicze punktów z ich kładami głównemi, są względem siebie równoległe.

129. Zadanie odwrotne (*fig*, 134, tab. VII). — Przypuśćmy, że sposobem podanym w poprzedzającym paragrafie, kład M_1 punktu M figury danej został dokonany i niech będzie O_1 kładem punktu, którego życzymy poznać rzuty, skoro płaszczyzna w kładzie będąca przyjmie swe pierwotne położenie. Dla znalezienia rzutów szukanych nakreślmy prostopadłę $O_1\omega$ do osi obrotu i nakreślmy przez punkta O_1 i ω proste równoległe do $M_1M''_1$ i $\mu M''_1$; przez punkt przecięcia się tych prostych z O''_1 nakreślmy równoległę do M''_1m, a ta przecinając się z prostą $O_1\omega$ przedłużoną, wyznaczy punkt o przedstawiający rzut poziomy punktu przywiedzionego do swego pierwotnego położenia. Wzniesienie tego punktu nad płaszczyznę poziomą rzutów, na którą kład był zrobiony, jest równe oO''_1; odcinając więc na linii rzutów przechodzącej przez punkt o tak znalezioną długość od p' do góry znajdziemy punkt o', który będzie właśnie rzutem pionowym szukanym punktu danego.

Inne Rozwiązanie. — Uwagi przytoczone powyżej odnieśmy do figury 135, tab. VIII, i przedewszystkiem sprowadźmy do pierwotnego swego położenia prostę łączącą punkta M_1 z O_1; prosta ta przetnie oś obrotu w punkcie, którego rzut poziomy znajduje się w a, rzut zaś pionowy w a' t. j. w punkcie przecięcia się linii rzutów przechodzącej przez punkt a z prostą h'; łącząc wreszcie punkta mm' z aa' znajdziemy, że prosta przeniesiona do pierwotnego swego położenia będzie miała za rzuty, proste $ma, m'a'$.

Prostopadła do osi obrotu wyprowadzona z punktu O_1 przecina prostę ma w punkcie o; że zaś linija rzutów przechodząca przez punkt o przecina znów prostę $m'a'$ w punkcie o'; zatem punkta o, o' są właśnie rzutami szukanemi.

130. Drugie wykreślenie.—*Zadanie właściwe* (*fig*. 136, tab. VIII).—Niech będzie punkt m, m', którego chcemy zrobić kład około osi kładu poziomej h, h', przyjętej za oś obrotu. Przez punkt m, m' nakreślmy prostę obrazu ma, $m'a'$ na płaszczyznie której robimy kład, następnie z uwagi, że ta prosta obrazu zachowuje swą długość niezmienną tak w swym rzucie pionowym jako też w kładzie, wnosimy, że punkt szukany leżeć musi na łuku koła zakreślonego z punktu a jako środka promieniem równym $m'a'$; ponieważ zaś nadto, punkt ten musi się znajdować na prostopadłej $m\mu$ do osi obrotu przechodzącej przez punkt m, będzie on się więc znajdował w punkcie przecięcia się tych dwóch linij, t. j. w punkcie M_1.

Zadanie odwrotne. — Niech punkt do podniesienia z kładu będzie O_1 (*fig*. 136); dla wykonania tego wykreślenia postąpimy według sposobu podanego w *zadaniu właściwem*, zmieniając tylko porządek postępowania. W tym celu, nakreślmy przez punkt O_1 dwie proste równoległe do M_1a, M_1m; pierwsza z tych linij przecina oś obrotu w punkcie ω, którego rzutem pionowym jest punkt ω' leżący na odpowiedniej linii rzutów i na prostej h'. Z punktu ω, ω' nakreślmy prostę obrazu płaszczyzny, na której leży figura dana, to rzut poziomy tej linii, w punkcie o przecięcia się jej z prostopadłą do osi

obrotu, wyznaczy nam szukany rzut poziomy, a następnie rzut pionowy tej linii spotyka liniję rzutów przechodzącą przez punkt o w punkcie o', który jest właśnie drugim rzutem podniesionego z kładu punktu O_1.

131. Kład na płasczyznę poziomą rzutów. — Często wypada zrobić kład figury danej na płasczyznę poziomą rzutów, przypadek ten jest tylko szczególnym przypadkiem ogólnego zadania rozebranego powyżej. Wykreślenia odnoszące się do tego szczególnego przypadku, zupełnie podobne do wykreśleń ogólnego zadania znajdują się na *fig.* 134 *bis*, 135 *bis* i 136 *bis*.

132. Kład linii prostej. — Żeby zrobić kład lub podnieść z kładu do swego pierwotnego położenia jakąkolwiek prostę, wystarczającem jest, za pomocą sposobów ogólnych, zrobić kład dwu jakichkolwiek jej punktów lub dwa dowolne jej punkta podnieść z kładu; zwrócić tylko należy uwagę, że jeżeli punkt przecięcia prostej danej z osią obrotu, który jest punktem stałym, leży w granicach rysunku lub w nieskończoności, dostatecznem będzie zrobić kład lub podnieść z kładu tylko drugi punkt obrany na prostej danej.

133. Porządek wykreśleń. — Częstokroć się zdarza, że użycie metody kładów prowadzi do wykreśleń odnoszących się do znacznej liczby punktów, dla uniknienia więc zawiłości rysunku i uczynienia go łatwo czytelnym, należy nietylko wprowadzić wszelkie możliwe uproszczenia, lecz nadto uporządkować stosownie wykreślenia z prostemi i punktami. Uporządkowanie to zmienia się wraz z rysunkiem i czytelnik winien w każdym przypadku wynaleźć najstosowniejszy porządek.

Ponieważ w dalszym ciągu niniejszego dzieła znajdzie czytelnik dość znaczną liczbę przykładów dotyczących tej ważnej kwestyi, w tej chwili zatem zajmiemy się tylko wskazaniem zasad prowadzących do zrobienia kładów pewnej liczby punktów wziętych razem i leżących na jednej płasczyznie, zostawiając na boku wykreślenia, które winny poprzedzać znalezienie kładu lub winny następować po nim.

Niech będzie (*fig.* 137, tab. VIII) $P\alpha P'$ płasczyzną, której chcemy zrobić kład naokoło αP, wraz z punktami na niej leżącemi A, B, C, D; punkta te są wyznaczone przez jeden ze swych rzutów, przyjmiemy, że są one wyznaczone przez rzuty poziome a, b, c, d.

Zanim przystąpimy do zrobienia kładu, obróćmy przedewszystkiem płasczyznę pionową rzutów tak, żeby płasczyzna dana była do niej prostopadłą. Nowa oś rzutow x_1y_1 będzie prostopadłą do αP, a posługując się punktem wspólnym dwu śladom pionowym płasczyzny danej, znajdziemy nowy ślad pionowy $\alpha_1P'_1$ tej płasczyzny (§ **111**). Odpowiednio do zmiany, którą obecnie otrzymaliśmy, znajdziemy natychmiast rzuty pionowe a'_1, b'_1, c'_1, d'_1 punktów danych i ich odległości $\alpha_1a'_1$, $\alpha_1b'_1$, $\alpha_1c'_1$, $\alpha_1d'_1$.... od osi obrotu, gdyż te rzuty znajdują się w punktach przecięcia linij rzutów przechodzących przez punkta a, b, c, d z nowym śladem pionowym $\alpha_1P'_1$ płasczyzny. Obecnie więc przygotowaliśmy wszystko w ten sposób, iż za pomocą bardzo łatwego rysunku i z całą prostotą będziemy mogli otrzymać kład danych punktów, albowiem podczas ruchu całej figury rzuty pionowe a'_1, b'_1, c'_1, d'_1 punktów danych opiszą łuki kół współśrodkowych, których środek znajduje się w punkcie α_1 i które przecinają oś rzutów x_1y_1 w punktach a''_1, b''_1, c''_1, d''_1.

Prostopadłe wyprowadzone z tych ostatnich punktów na oś x_1y_1 są kładami linij rzutów tych punktów, i te proste przecinają odpowiednio prostopadłe do osi obrotu αP poprowadzone, przechodzące przez punkta a, b, c, d, w punktach A_1, B_1, C_1, D_1, które są właśnie punktami szukanemi.

134. Kład za pomocą zmiany skali. — Jeżeli figura wzięta pod uwagę wymaga do zrobienia jej

kładu lub jej podniesienia, robienia kładu lub podnoszenia znacznej liczby jej punktów, można przejść od jednego z jej rzutów do kładu na płaszczyznę rzutów uważaną, lub przeciwnie, od kładu do rzutów, zachowując odcięte punktów liczone na osi obrotu i biorąc za rzędne, wielkości odcięte na prostopadłych do osi obrotu, za pomocą cyrkla zmniejszającego lub za pomocą zmiany skali; w samej rzeczy, w skutek bowiem powinowactwa istniejącego pomiędzy rzutem figury danej na płaszczyznie i kładem jej na tejże płaszczyznie, dostatecznem będzie dla rozwiązania: już to właściwego zadania, jużteż jego odwrotności, któremi się w tej chwili zajmujemy, narysować długości rzędnych punktów uważanych figury niewiadomej mnożąc rzędne figury danej przez stosunek powinowactwa.

Wykreślenie skali rzędnych (*fig.* 138, tab. VIII).—Niech będą $P\alpha P'$ śladami płaszczyzny, której chcemy zrobić kład na płaszczyznę poziomą rzutów. Przyjmijmy za płaszczyznę pionową rzutów nową płaszczyznę prostopadłą do płaszczyzny danej, to nowa oś rzutów x_1y_1 jest prostopadłą do śladu αP, a nowy ślad pionowy $\alpha_1P'_1$ kreśli się sposobem podanym w (§ 133); odcinając więc na x_1y_1 jednostkę długości u równą α_1b, prostopadła do x_1y_1 przechodząca przez punkt b wyznaczy na $\alpha_1P'_1$ punkt d, długość zaś α_1d będzie jednostką długości u' nowych rzędnych; skala więc odpowiadająca tej jednostce długości da się nakreślić sposobem zwyczajnie używanym.

Po nakreśleniu skali, nakreślimy na tej samej figurze kład C_1 krzywej C leżącej na płaszczyznie $P\alpha P'_1$, której to krzywej rzut poziomy znajduje się w c.

ZASTOSOWANIE METODY KŁADÓW.

135. Zadanie.—*Przez punkt dany m, m' nakreślić prostę, któraby z prostą daną d, d' utworzyła kąt α* (*fig.* 139, tab. VIII).—Należy zrobić kład płaszczyzny przechodzącej przez prostę d,d' i przez punkt m,m', na tym kładzie nakreślić prostę szukaną i podnieść ją.

W tym celu nakreślmy najprzód przez punkt m, m' prostę poziomą mn, $m'n'$ płaszczyzny przechodzącej przez punkt (m, m') i przez prostę (d, d'), i zróbmy kład naokoło tej poziomej wziętej za oś obrotu; ponieważ punkt n, n' przecięcia się osi obrotu z prostą (d, d') pozostaje stałym, a punkt a, a' dowolnie obrany na prostej danej, stosując doń znane wykreślenie podane w (§ **128**), przypada na kładzie w punkcie A_1, prosta zatem łącząca punkt n z A_1 przedstawia kład D_1 prostej danej.

Widzimy nadto, że punkt m, m' leżący na osi obrotu pozostaje także nieruchomym, że zatem, kreśląc przezeń prostę mB_1 tworzącą z prostą D_1 kąt równy kątowi danemu α, znajdziemy najprzód kład prostej odpowiadającej zadaniu, a podnosząc punkt B_1 do b, b', prosta łącząca ten punkt z punktem m, m' będzie właśnie prostą szukaną.

Zadanie to ma jeszcze drugie rozwiązanie które nie zostało wykreślone na figurze.

136. Zadanie. — *Nakreślić rzuty okręgu koła leżącego na danej płaszczyznie, znając rzut poziomy jego środka i rzeczywistą wielkość promienia.* — Wiemy, że rzutem okręgu koła jest elipsa, zanim tedy rozwiążemy zadanie, podajmy niektóre własności tej krzywej.

Twierdzenie. — *Jeżeli elipsa jest wynikiem rzutu prostokątnego okręgu koła, to jej osie są rzutami systematu średnic prostokątnych, z których jedna jest równoległą do płaszczyzny rzutów.*

Rzeczywiście, ponieważ stosunek dwu odcinków jakiejkolwiek prostej jest równy stosunkowi ich rzutów, zatem dwie średnice prostokątne okręgu koła mają za rzuty dwie osie elipsy takie, że

każda z nich dzieli na dwie równe części cięciwy równoległe do drugiej, lub innemi słowy, że rzuty dwu średnic prostokątnych okręgu koła są średnicami sprzężonemi elipsy; otóż, jeżeli jedna z takich średnic jest równoległą do płaszczyzny rzutów, a jak wiemy kąt tych prostych nie zmienia się w rzucie (§ 42), zatem w tym przypadku średnice sprzężone są prostokątne i są osiami elipsy.

Jednem słowem, widoczną jest rzeczą, że osie elipsy są rzutami dwu średnic okręgu koła, z których jedna jest równoległą do płaszczyzny rzutów druga zaś zlewa się z linią największego spadku płaszczyzny koła względem płaszczyzny rzutów, na którą rzut robimy.

137. Koło ściśle-styczne. — Kołem ściśle-stycznem do jakiejś krzywej nazywamy granicę koła stycznego w danym punkcie do tej krzywej i przechodzącego przez drugi punkt krzywej, znajdujący się w odległości nieskończenie małej od punktu styczności, gdy odległość ta zdąża do zera. Za pomocą rachunku można dowieść, że środek koła ściśle-stycznego jest granicą przecięcia się normalnej do krzywej danej w punkcie uważanym poprowadzonej z normalną ruchomą, która zdąża do pierwszej.

138. *Promień koła ściśle-stycznego w wierzchołku elipsy* (*fig.* 140, tab. VIII). — Niech będzie elipsa odniesiona do swych osi xoy; wziąwszy podnormalnę PN w punkcie M dowolnie obranym na elipsie i przypuściwszy, że punkt M zdąża do wierzchołka A, granicą AP będzie zero, a wskutek tego, promień koła ściśle stycznego w wierzchołku A będzie granicą podnormalnej PN. W ogólności mamy

$$\mathrm{PN} = -yy';$$

a biorąc pochodnę y' równania elipsy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

otrzymamy

$$y' = -\frac{f'x}{f'y} = -\frac{b^2x}{a^2y},$$

zkąd

$$\mathrm{PN} = \frac{b^2x}{a^2}.$$

Przypuśćmy obecnie, że punkt M dąży do wierzchołka A, to odcięta x punktu M zdążać będzie do a, a oznaczając przez ρ_1 promień koła ściśle stycznego w wierzchołku A, otrzymamy

$$\rho_1 = \frac{b^2}{a^2}.$$

Oznaczając przez ρ_2 promień koła ściśle stycznego w wierzchołku B małej osi elipsy, i zmieniając w poprzedzającym wzorze a na b, b na a i ρ_1 na ρ_2 otrzymamy

$$\rho_2 = \frac{a^2}{b^2}.$$

Wykreślmy obecnie środki tych kół. W tym celu nakreślmy (*fig.* 141, tab. VIII) styczne do danej elipsy w wierzchołkach A i B, połączmy punkt A z punktem B linią prostą AB, następnie zaś przez punkt D przecięcia się stycznych poprowadźmy prostopadłę do AB i oznaczmy przez C_1, C_2 punkta przecięcia się

tej prostopadłej z osiami elipsy. a tak znalezione punkta będą właśnie środkami szukanemi; z podobieństwa bowiem trójkątów C_1DA, OBA, których boki są odpowiednio prostopadłe wypada:

$$\frac{C_1A}{DA} = \frac{OB}{OA} \quad \text{zkąd} \quad C_1A = \frac{b^2}{a};$$

a zatem punkt C_1 jest właśnie środkiem koła ściśle stycznego w punkcie A. W sposób zupełnie podobny znaleźlibyśmy że C_2 jest środkiem koła ściśle stycznego do elipsy w punkcie B.

139. *Praktyczny sposób kreślenia elipsy, której osie są znane* (*fig.* 141, tab. VIII). — Jeżeli osie elipsy nie różnią się bardzo pomiędzy sobą pod względem długości, możemy nakreślić samą krzywę z dostateczną ścisłością, opisując z punktów C_1 i C_2 i ich symetrycznych C'_1, C'_2 poprzednio znalezionych, łuki *mn*, *pq*, *rs*, *tu* kół ściśle stycznych w wierzchołkach elipsy i dopełniając je łukami *np*, *qr*, *st*, *um* nakreślonemi od ręki.

140. *Wykreślenia rzutów koła.*—Zajmijmy się teraz rozwiązaniem głównego zadania. Niech będzie *o* (*fig.* 142, tab. VIII) rzutem poziomym środka i O_1 jego kładem naokoło śladu poziomego P płaszczyzny danej, wyznaczonym za pomocą jednego ze sposobów podanych wyżej.

Dokończmy wykreślenia kładu opisując z punktu O_1 jako środka, promieniem danym, okrąg koła i kreśląc równolegle do P_1 kład A_1B_1 średnicy poziomej i średnicy C_1D_1 która ma nachylenie największego spadku płaszczyzny koła i jest prostopadłą do A_1B_1. Żeby wykreślić obecnie elipsę będącą rzutem poziomym koła za pomocą jej wierzchołków, dostatecznem będzie znaleźć (§ **136**) rzuty punktów A_1, B_1, C_1, D_1 po sprowadzeniu uprzedniem koła do swego pierwotnego położenia; podczas tego ruchu prosta A_1B_1 przychodzi do położenia *ab*, a ta ostatnia prosta jest równoległą do P, przechodzi przez punkt *o* i jest ograniczoną dwoma prostopadłemi, wyprowadzonemi z punktów w kładzie A_1,B_1 leżących na osi obrotu P; dalej punkt C_1 przypada w punkcie *c* przecięcia się prostopadłej C_1o do osi obrotu z prostą łączącą punkta A_1 i C_1 w pierwotnem ich położeniu, która to prosta w rzucie rozciąga się od punktu nieruchomego α do punktu *a*; wreszcie czwarty wierzchołek elipsy otrzymamy albo sposobem praktycznym, wyznaczając środki ω_1, ω_2 kół ściśle stycznych i stosując metodę podaną w paragrafie **139**, albo jednym ze sposobów podanych w Geometryi analitycznej.

141. *Kreślenie rzutów rozmaitych punktów leżących na okręgu koła.* — Chcąc wyznaczyć rzut koła za pomocą rzutów rozmaitych punktów leżących na jego okręgu, przenieśmy na figurę 143, tab. VIII dane poprzedzającego wykreślenia i na okręgu koła w kładzie obierzmy jakikolwiek punkt M_1; dla podniesienia tego punktu do pierwotnego położenia połączmy go ze środkiem powinowactwa, kreśląc przez punkt M_1 prostopadłę do osi obrotu, która będzie miejscem geometrycznem punktu szukanego; drugie miejsce geometryczne znajdziemy, podnosząc prostę łączącą punkt M_1 z O_1, która przetnie oś obrotu w punkcie nieruchomym μ i przyjmie położenie μo; punkt przecięcia się tych dwu prostych jest właśnie punktem szukanym *m*.

142. *Kreślenie stycznej w jakimkolwiek punkcie rzutu.*

Twierdzenie. — *Rzut stycznej w jakimkolwiek punkcie krzywej jest styczną do rzutu krzywej, poprowadzoną przez rzut punktu styczności* (*fig.* a_3).—Niech będą: S i P środek krzywej i płaszczyzna rzutów, C, *c* krzywa i jej rzut, M, *m* punkt dany i jego rzut, M_1, m_1 punkt bardzo bliski pierwszego i jego rzut. Rzutem

prostej łączącej punkt M z punktem M_1 jest prosta łącząca rzuty tych punktów t. j. punkta m z m_1 jeżeli obecnie będziemy posuwać punkt M_1 na krzywej C zbliżając go coraz więcej do M, to punkt m_1 posuwać się będzie w tym samym czasie po krzywej c i zbliżać bezustannie do punktu m, a ponieważ sieczna mm_1 pozostaje bezustannie rzutem siecznej MM_1, będzie więc nią jeszcze w granicy t. j. wtedy gdy punkta M_1, m_1 zejdą się jednocześnie jeden z punktem M, drugi z punktem m; czyli innemi słowy, rzut stycznej do krzywej C w punkcie M jest styczną do rzutu c tejże krzywej w punkcie m.

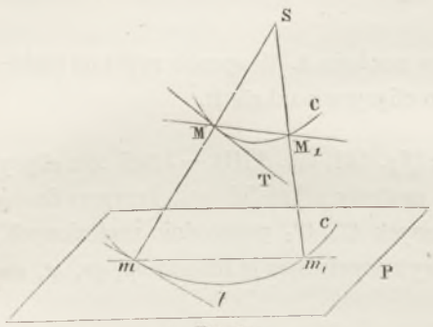

Fig. 83.

Przejdźmy obecnie do wykreślenia podanego na (*fig.* 143) i tamże nakreślmy styczną do rzutu koła w punkcie m, ponieważ styczna szukana jest rzutem stycznej do okręgu koła, rozwiązanie zadania sprowadza się do zrobienia kładu tak okręgu koła, jakoteż i punktu styczności sposobem już znanym, i następnie, do nakreślenia w punkcie M_1, stycznej do okręgu koła w kładzie. Że zaś styczna ta $M_1\theta$ przecina oś obrotu w punkcie θ wspólnym rzutowi i kładowi stycznej, zatem łącząc punkt m z punktem θ otrzymamy styczną szukaną w rzucie.

143. *Rzut punktu najwyższego i najniższego, punkt najwyższy i najniższy w rzucie.* — Punktem najwyższym i najniższym jakiejkolwiek krzywej jest punkt, w którym styczna do krzywej jest poziomą. W wykreśleniu którem się zajmujemy, punkta te znajdują się, według samego ich określenia, w wierzchołkach małej osi, którą sposobem podanym na figurze 142 wykreślić umiemy. Znalezienie punktu najwyższego i punktu najniższego w rzucie i znalezienie kierunku stycznych, otrzymuje się więc bardzo łatwo. I tak, nakreślmy przez punkt o prostę poziomą $o\omega$, której kład znajduje się na $O_1\omega$, to proste równoległe do $O_1\omega$ na kładzie, będą na figurze podniesionej równoległemi do $o\omega$, zkąd wypada, że kreśląc styczne $C_1\gamma_1$, $C_2\gamma_2$ do okręgu koła w kierunku $O_1\omega$, otrzymamy i punkta szukane i styczne przez te punkta przechodzące, a podnosząc te proste do położenia prostych poziomych przechodzących przez punkta γ_1, γ_2, a tem samem podnosząc także punkta styczności, które przypadną na przecięciu stycznych podniesionych i prostopadłych do osi obrotu, poprowadzonych przez punkta C_1 i C_2 otrzymamy punkta szukane c_1, c_2.

144. *Punkta ostateczne w kierunku poprzecznym.*—Punktami ostatecznemi jakiejkolwiek krzywej w jakimkolwiek kierunku zwykliśmy nazywać takie punkta, w których styczne do krzywej są prostopadłe do tego kierunku. Punkta których obecnie szukać będziemy a które otrzymują się w sposób podany poprzednio, są na mocy ich określenia punktami, w których styczne do krzywej są pionowe.

Ponieważ więc prosta pionowa $o\alpha$ jest przedstawiona w kładzie przez prostę $O_1\alpha$, za pomocą więc stycznych $B_1\beta_1$, $B_2\beta_2$ do okręgu koła w kładzie poprowadzonych w kierunku prostej $O_1\alpha$, i po ich podniesieniu wraz z punktami styczności B_1, B_2, otrzymamy styczne $\beta_1 b_1$, $\beta_2 b_2$ i punkta styczności b_1, b_2, które są właśnie ostatecznemi punktami szukanemi krzywej.

145. *Kreślenie stycznej przez punkt dany zewnątrz koła.* — Żeby otrzymać wprost styczne szukane nie kreśląc rzutów samejże krzywej, robimy kład punktu zewnętrznego i z tego punktu na kładzie kreślimy styczne do okręgu koła, które po podniesieniu będą właśnie stycznemi szukanemi.

146. *Styczne równoległe do prostej danej.* — Jestto tylko szczególny przypadek poprzedzającego

gdyż punkt zewnętrzny w tym razie jest tu przedstawiony w odległości nieskończenie wielkiej w danym kierunku, a więc wykreślenie w przypadku, którym się zajmujemy, nie przedstawi żadnej trudności; dość bowiem nakreślić styczne do okręgu koła w kładzie równolegle do kładu danego kierunku i podnieść te styczne a te będą żądanemi. Użyliśmy już tego sposobu postępowania mówiąc o stycznych poziomych i pionowych przechodzących przez ostateczne punkta krzywej (§§ **143** i **144**).

147. *Punkta spotkania prostej danej z krzywą.* — Dla wyznaczenia tych punktów należy zrobić kład prostej i krzywej i podnieść punkta przecięcia znalezione w kładzie.

Uwaga. — Trzy ostatnie zadania podane w (§§ **145**, **146** i **147**) będą w dalszym ciągu tego dzieła niezmiernej wagi, a mianowicie przy rozwiązywaniu zadań odnoszących się do kreślenia stycznych do rzutów krzywej, lub do szukania punktów przecięcia się prostej danej z krzywą nie potrzebując bynajmniej kreślić rzutów tejże krzywej.

148. Połączenie powyższych metod. — Jeżeli chcemy dokonać zmiany obu płaszczyzn rzutów w żądanym kierunku, jużto dla nadania jakiejś prostej kierunku prostopadłego do jednej z płaszczyzn rzutów, jużteż dla nadania jakiejś płaszczyznie położenia równoległego do jednej z płaszczyzn rzutów; lub, jeżeli dla osiągnięcia tegoż samego rezultatu, nadajemy jakiejś figurze podwójny ruch obrotowy naokoło dwu osi odpowiednio prostopadłych do każdej z płaszczyzn rzutów, zastosowanie powyższych metod przedstawia wielkie niedostatki. I tak, jeżeli tylko płaszczyzna pozioma rzutów jest zmienioną, lub co na jedno wychodzi, jeżeli tylko jakaś figura została obróconą naokoło osi prostopadłej do płaszczyzny pionowej rzutów, linija pionu, względnie do obserwatora lub względnie do figury uważanej, traci swój kierunek naturalny, wskutek czego pogląd na wykreślenie staje się nader trudnym. Nadto w zastosowaniach, jak np. przy rysunku jakiejś maszyny, sklepienia, gruntu, należy postępować bez przypuszczalnego ruchu tych przedmiotów z ich położenia. Niedostatki podobne do powyżej podanych nie istnieją, jeżeli zmieniamy położenie tylko płaszczyzny pionowej rzutów, albowiem, w tym przypadku, kierunek pionowej pozostaje stałym i położenie naturalne figury jest przedstawione w rzucie poziomym z dostateczną dokładnością. Widzimy więc, iż położenie płaszczyzny pionowej może być zawsze zmienione bez żadnej z tego powodu niedogodności.

Zrozumienie wykresu teoretycznego może być tylko o tyle utrudnionem, o ile linija pionu się zmienia, to jest, o ile położenie płaszczyzny poziomej rzutów zostało zmienione. Kierunek naturalny pionu względnie do figury przedstawionej ma bardzo mały wpływ i nie ma potrzeby nim się zajmować.

Zadanie więc, odnoszące się do sprowadzenia prostej danej lub płaszczyzny do położenia prostopadłego lub równoległego do jednej z płaszczyzn rzutów, może być sprowadzonem, dla wykresów teoretycznych, do zmiany przedewszystkiem płaszczyzny pionowej rzutów; w ten sposób bowiem sprowadzamy zadanie do użycia tylko dwu pierwszych metod. W innych przypadkach może się zdarzyć, że należy używać innych metod w połączeniu z sobą; i tak np. wiemy, że dla ułatwienia wykreślenia kładu danej płaszczyzny, możemy przedewszystkiem zrobić zmianę płaszczyzny pionowej rzutów tak, żeby ta nowa płaszczyzna rzutów znalazła się w położeniu prostopadłem do płaszczyzny, której chcemy zrobić kład, a w ten sposób połączymy z sobą metodę kładów z metodą zmiany płaszczyzn rzutów.

149. Zastosowanie.—*Ustawić, za pomocą połączenia metod, płaszczyznę daną równolegle do płaszczyzny poziomej rzutów* (*fig.* 144, tab. VIII). — Niech będzie płaszczyzną daną $P\alpha P'$. Najprzód, stosując się do

wniosków poprzedzającego artykułu, uczyńmy płaszczyznę daną prostopadłą do płaszczyzny pionowej rzutów, przyjmując za nową oś rzutów prostę x_1y_1, której kierunek jest prostopadły do śladu poziomego αP płaszczyzny (§ 111); kierunek tej nowej linii ziemnej winien dla każdego szczególnego przypadku być obieranym w taki sposób, żeby wykreślenie rysunku mogło być jak najprostsze. W tym nowym układzie płaszczyzn rzutów, płaszczyzna dana jest przedstawioną przez swe ślady $P\alpha P'_1$, które z łatwością zostały wyznaczone na rysunku, posługując się metodą ogólną odnoszącą się do zmiany płaszczyzn rzutów względem danej płaszczyzny (§ **107**, 2ie wykreślenie). Następnie, dla sprowadzenia płaszczyzny danej do położenia oznaczonego w zadaniu, obróćmy ją naokoło osi zz' prostopadłej do płaszczyzny pionowej rzutów tak, żeby ślad jej pionowy przypadł na prostej P'_2 równoległej do osi rzutów x_1y_1. Położenie osi obrotu na naszym rysunku jest dowolne, lecz zawsze jest ono doskonale oznaczone przez warunki szczególne odnoszące się do zadania. W tej chwili już płaszczyzna dana znajduje się w położeniu oznaczonem przez zadanie, gdyż ślad jej pionowy jest P'_2, a ślad poziomy jest prostą, która spotyka płaszczyzny poziome w odległości nieskończenie wielkiej, t. j. jest prostą równoległą do nich (§ 3).

150. Zadanie.—*Zastąpić płaszczyzny rzutów dwiema płaszczyznami jakkolwiek położonemi lecz prostopadłemi względem siebie.* — Chcąc rozwiązać niniejsze zadanie za pomocą dwóch pierwszych metod, należy jużto płaszczyzny dane jużteż płaszczyzny rzutów, przedstawić w trzech rozmaitych położeniach a mianowicie: 1° Jednę z płaszczyzn danych uczynić prostopadłą do jednej z płaszczyzn rzutów; 2° uczynić ją następnie równoległą do drugiej z płaszczyzn rzutów i 3° w końcu, przyjąć drugą płaszczyznę daną za drugą z płaszczyzn rzutów.

Zazwyczaj zadanie to, zkądinąd bardzo ważne, pod względem swych zastosowań w *ciesiołce* daje się rozwiązać w sposób bez porównania łatwiejszy, stosując metodę kładów poprzedzoną ruchem obrotowym, lub też, co dogodniejsza, stosując metodę kładów i dopełniając ją zmianą płaszczyzn rzutów.

Przed zaczęciem wykreślenia odnoszącego się do ostatniego sposobu zmiany płaszczyzn rzutów, oznaczmy nowe płaszczyzny spółrzędnych podając: 1° położenie płaszczyzny $P\alpha P'$, którą uważać będziemy za płaszczyznę poziomą, względem dawnych płaszczyzn rzutów (*fig.* 145, tab. IX) i 2° położenie nowej linii ziemnej vh, $v'h'$; znając to, dla zupełnego oznaczenia także innych danych zadania, nakreślmy rzuty m, m' jednego z punktów figury F, który mamy odnieść do nowego układu płaszczyzn rzutów.

Dane rzeczy w zadaniu mając obecnie we właściwych miejscach, weźmy za nowe położenie linii ziemnej prostę x_1y_1 prostopadłą do śladu poziomego płaszczyzny $P\alpha P'$, wyprowadzoną z punktu v, i uczyńmy płaszczyznę pionową rzutów prostopadłą do tej ostatniej płaszczyzny; w tym nowym układzie płaszczyzn rzutów, płaszczyzna dana zajmie położenie $P\beta P'_1$, a jej ślady $P\beta$ i $P'_1\beta$ oznaczą się z całą łatwością, postępując w sposób podany przez nas w (§ **107**, 2ie wykreś.). Rzut pionowy linii ziemnej vh, $v'h'$, w tym nowym układzie płaszczyzn rzutów, zchodzi się ze śladem pionowym $\beta P'_1$ płaszczyzny prostopadłej do płaszczyzny pionowej rzutów, na której to płaszczyznie prosta ta leży, rzut zaś poziomy jej pozostaje ten sam co poprzednio t. j. vh; w końcu nowy rzut pionowy m'_1 punktu danego M figury F da się otrzymać z łatwością, zmieniając płaszczyznę pionową rzutów względnie do punktu m,m' (§ **103**).

Zajmijmy się obecnie drugą częścią wykreślenia o którem mowa, t. j. kładem naokoło βP płaszczyzny $P\beta P'_1$, którą podczas tego ruchu winniśmy podnieść dla podniesienia wraz z nią figury F

stale z nią połączonej; w tych warunkach punkt h pozostanie na miejscu, punkt zaś v'_1 przejdzie do punktu v'_2, który jest punktem przecięcia łuku koła opisanego przez punkt v'_1 na drugiej płaszczyznie pionowej z linią ziemną x_1y_1, a ztąd widzimy że linija ziemna vh, $v'_1\beta$ po zrobieniu kładu padnie na prostej x_2y_2. Podczas ruchu, który staramy się wykonać, cóż się stało z punktem $m'm$ należącym do figury F? Otóż zauważmy, że punkt ten znajduje się na prostopadłej do płaszczyzny $P\beta P'_1$ poprowadzonej przezeń, która to prostopadła jest linią obrazu względem płaszczyzn rzutów odpowiadających linii ziemnej x_1y_1, a której rzutem pionowym jest prosta $m'_1\mu'_1$, otrzymana kreśląc z punktu m'_1 prostopadłę do śladu pionowego P'_1 płaszczyzny, zaś rzutem poziomym jest prosta zchodząca się z prostopadłą $m\gamma$ do osi obrotu αP poprowadzonej przez punkt m, i która daje: 1° w punkcie m_2, który jest kładem jej spodka, jeden z rzutów szukanych punktu M, i 2° znamię ostateczne $m'_1\mu'_1$ w naturalnej wielkości tegoż punktu, za pomocą którego znajdziemy drugi rzut m'_2 punktu szukanego, odcinając w należytym kierunku na prostopadłej do osi rzutów x_2y_2 poprowadzonej przez punkt m_2, długość $m'_2\mu'_2$ równą $m'_1\mu'_1$.

Jednem słowem mówiąc, cóżeśmy znaleźli? Znaleźliśmy rzuty $m_2m'_2$ punktu M odniesionego do układu płaszczyzn rzutów utworzonego przez kład naokoło osi kładu αP płaszczyzny poziomej nowej $P\alpha P'$ na dawną, i płaszczyzny pionowej rzucającej prostę vh, $v'h'$, która to prosta w kładzie znajduje się także na tejże samej płaszczyznie poziomej i zchodzi się z prostą x_2y_2. Wykreślenie podane dla punktu M może być bez zmiany powtórzonem dla każdego jakiegokolwiek punktu figury F, możemy go więc uważać za ostateczne, a zatem zadanie nasze, jako w zupełności rozwiązane.

151. Zastosowania. — *Wyznaczyć najkrótszą odległość dwóch prostych jakichkolwiek* — Przedewszystkiem zwrócić należy uwagę na przypadek, w którym dwie proste $(dd')(d_1d'_1)$ są równoległe do jednej z płaszczyzn rzutów np. do płaszczyzny poziomej; rzuty najkrótszej odległości takich prostych i jej naturalna wielkość otrzymuje się bardzo prosto (*fig.* 146 tab. IX), kreśląc prostę pionową ab, $a'b'$ przez punkt przecięcia się rzutów poziomych d,d_1, i ograniczając ją w rzucie pionowym rzutami pionowemi d', d'_1. Widocznem jest bowiem, że prosta ab, $a'b'$ spotyka proste dane prostopadle do ich kierunku, zatem odrazu wyznacza ona rzuty ich najkrótszej odległości; naturalna zaś wielkość tejże przedstawioną jest na płaszczyznie pionowej rzutów na $a'b'$, gdyż prosta w przestrzeni AB jest równoległą do tej płaszczyzny.

W jakikolwiek sposób będą leżały, względem płaszczyzn rzutów, proste dane, których szukamy najkrótszej odległości, zawsze sprowadzić będziemy mogli przypadek dany do przypadku powyższego bardzo prostego, przyjmując za płaszczyznę rzutów płaszczyznę równoległą do obu prostych danych i na niej liniję ziemną, której ostatecznie kreślić nie ma potrzeby.

Zajmijmy się obecnie rozwiązaniem ogólnego zadania (*fig.* 147, tab IX), w którem położenie prostych danych jest jakiemkolwiek np. (d,d') i (d_1,d'_1). Dla otrzymania nowej płaszczyzny rzutów nakreślmy przez pierwszą z prostych danych płaszczyznę równoległą do drugiej prostej; płaszczyzna ta wyznaczoną będzie przez prostę (d, d') i przez równoległę do drugiej prostej, poprowadzoną przez jeden z punktów pierwszej. Żeby ułatwić rozwiązanie, przyjęliśmy tu punkt a, a', którego rzut pionowy znajduje się na przecięciu prostych (d', d'_1), a w ten sposób, nowa płaszczyzna rzutów wyznaczona jest przez prostę (d, d') i przez prostę równoległą (δ_1, d'_1) do drugiej prostej (d_1, d'_1), które to dwie ostatnie proste mają rzut pionowy wspólny. Oznaczywszy w ten sposób położenie nowej płaszczyzny rzutów i zachowując bezzmiennie sposób postępowania wskazany powyżej, przyjmijmy za nową liniję ziemną prostę x_1y_1 prostopadłą do śladu poziomego $0\theta_1$ płaszczyzny rzutów, i zmieńmy położenie płaszczyzny pionowej. W tym nowym układzie płaszczyzn rzutów punkt a, a' będzie miał za rzuty a, a'_1,

prosta zaś $\beta a'_1$ wyznaczy ślad pionowy płaszczyzny poprowadzonej przez proste (d, d') i (δ_1, d'_1). Zmieniając dalej płaszczyzny rzutów znajdujemy, że nowy ślad pionowy prostej (d_1, d'_1) ma za rzut w dawnym układzie punkt m, m', a w nowym punkt m, m'_1 i że rzut tego punktu na płaszczyznie $(\theta_1\beta a'_1)$ odpowiada spodkowi μ'_1 prostopadłej, wyprowadzonej z punktu m'_1 na ślad $\beta a'_1$. Po przygotowaniu w ten sposób całego zadania, mając na celu zrobienie kładu płaszczyzny $(\theta_1\beta a'_1)$, wykonajmy ten kład naokoło osi obrotu $\theta\theta_1$, wprowadzając do tego ruchu także i prostę (d_1, d'_1), leżącą poza obrębem tej płaszczyzny. Najprzód otrzymamy kład A_1 punktu a, a', a ponieważ punkta 0 i 0_1 zostają podczas ruchu stałemi, proste (d, d') i (δ_1, d'_1) przyjmą położenie $A_1 0$, $A_1\theta_1$; następnie punkt μ'_1 przechodzi do M_1 i wyznacza po wykonaniu przez prostę (d_1, d'_1) ruchu nadanego jej przez płaszczyznę $(\theta_1\beta\mu'_1)$, rzut jednego z jej punktów. Rzut poziomy prostej w tem nowem położeniu otrzymuje się, kreśląc przez punkt M_1 równoległę D_1 do prostej $A_1\theta_1$. W tej chwili więc figura nasza znajduje się w warunkach podanych na początku niniejszego zadania, a zatem odniesiona do ostatecznego układu płaszczyzn rzutów; najkrótsza odległość prostych danych ma jeden ze swych rzutów B_1C_1 t. j. w punkcie przecięcia się nowych rzutów θA_1, M_1D_1 prostych danych, a znamię $m'_1\mu'_1$ prostej d_1, d'_1 względem ostatniej płaszczyzny rzutów przedstawia jej naturalną wielkość. Obecnie zatem wracając do pierwotnego układu płaszczyzn rzutów, znajdziemy z całą łatwością rzuty cb i $c'b'$ szukanej najkrótszej odległości dwóch prostych danych.

ĆWICZENIA NALEŻĄCE DO ROZDZIAŁU IV

152. Zadanie I. — *Ustawić płaszczyznę daną prostopadle do linii ziemnej.*

Sposób pierwszy. — *Zmiana płaszczyzn rzutów* (*fig.* 148, tab. IX). — Wziąwszy pierwszą oś rzutów x_1y_1 prostopadłą do śladu poziomego P płaszczyzny $P\alpha P'$ i zmieniwszy położenie płaszczyzny pionowej, następnie znów zmieniwszy położenie płaszczyzny poziomej, i przyjmując x_2y_2 prostopadłę do nowego śladu pionowego P'_1 za nową oś rzutów, znajdziemy płaszczyznę profilu $P_2P'_1$.

Sposób drugi. — *Ruch obrotowy* (do rozwiązania).

153. Zadanie II. — *Ustawić jakąkolwiek płaszczyznę równolegle do osi rzutów.*

Sposób pierwszy. — *Zmiana płaszczyzn rzutów* (*fig.* 149, tab. IX). — Należy nakreślić liniję x_1y_1 równolegle do jednego ze śladów płaszczyzny $P\alpha P'$ np. do śladu poziomego P i następnie zmienić położenie płaszczyzny rzutów przeciwnego nazwiska t. j. pionowej. Otrzymana w ten sposób płaszczyzna PP' będzie równoległą do linii ziemnej x_1y_1.

Sposób drugi. — *Ruch obrotowy* (do rozwiązania).

154. Zadanie III. — *Obrócić prostę daną d, d' o kąt dany α naokoło poziomej osi obrotu zz'* (*fig.* 150, tab. IX). — Zmieniwszy położenie płaszczyzny pionowej rzutów i biorąc nową liniję ziemną x_1y_1 w położeniu prostopadłem do rzutu poziomego osi obrotu i w tym nowym układzie płaszczyzn rzutów dokonawszy ruchu obrotowego punktów $(c_1c'_1)$, $(m_1m'_1)$, a po uskutecznieniu tegoż powróciwszy do pierwotnego układu, prosta $\gamma'\mu'$, $\gamma_1\mu_1$ przedstawi położenie prostej d, d' po obrocie.

155. Zadanie IV.—*Obrócić płaszczyznę daną o kąt dany naokoło prostej obrazu jako osi* (do rozwiązania).

156. Zadanie V. — *Obrócić prostę daną o kąt dany naokoło jakiejkolwiek osi obrotu* (do rozwiązania).

157. Zadanie VI. — *Pomiędzy dwiema prostemi jakiemikolwiek nakreślić prostę równoległą do płaszczyzny danej i mającą długość znaną* (*fig.* 151, tab. IX). — Należy przedewszystkiem zrobić kład płaszczyzny danej naokoło jej śladu poziomego, wciągając do tego ruchu dwie proste dane. Niech będą, po dokonaniu kładu, (d, d') *i* (d_1, d_1') dwie proste dane, to pamiętając, że rzut ukośny prostej równoległej do płaszczyzny rzutów jest zawsze w naturalnej wielkości należy rzucić dwie proste dane w kierunku jednej z nich na płaszczyznę poziomą rzutów; przypuśćmy, że rzucono je w kierunku prostej (d_1, d'_1), a otrzymamy punkt o jako ślad poziomy prostej (d_1, d'_1), dla prostej zaś (d, d') prostę łączącą jej ślad poziomy θ z rzutem ukośnym α jakiegokolwiek punktu a, a' tej prostej. Po dokonaniu wskazanych wykreśleń, należy zakreślić z punktu o jako środka, promieniem danym łuk koła, a w punktach β, β_1 przecięcia się tego łuku z prostą $\theta\alpha$, otrzymamy rzut ukośny punktu należącego do każdej z prostych i odpowiadającego zadaniu. Nareszcie należy podnieść do pierwotnego położenia punkt β, który przypadnie w punkcie b, b' i przez ten punkt nakreślić prostę poziomą bc, $b'c'$, która spotka dwie proste dane, a po podniesieniu płaszczyzny danej do pierwotnego położenia, wciągając do tego ruchu prostę tak otrzymaną, znajdzie się jedno rozwiązanie naszego zadania; w podobny zupełnie sposób otrzymać można drugie rozwiązanie. Dokładność rozwiązania będzie sprawdzona w ten sposób, że rzut prostokątny bc prostej BC winien być równy i równoległy do swego rzutu ukośnego $o\beta$.

158. Zadanie VII. — *Oznaczyć na prostej danej punkt, którego odległość od drugiej prostej jest znaną* (do rozwiązania).

159. Zadanie VIII. — *Uczynić równoległemi rzuty pionowe dwóch prostych danych* (*fig.* 152, tab. IX).

Sposób pierwszy. — *Zmiana płaszczyzn rzutów.* — Widzimy przedewszystkiem, że w nowym układzie płaszczyzn rzutów, płaszczyzny rzucające proste (d, d'), (δ, δ') są prostopadłe do płaszczyzny pionowej rzutów i równoległe względem siebie, a zatem także równoległe do tychże prostych danych. Żeby wyznaczyć łatwym sposobem jedną z takich płaszczyzn, należy nakreślić z punktu a, a', którego rzut pionowy znajduje się na przecięciu rzutów pionowych prostych danych (d', δ'), prostę równoległą (d_1, δ') do drugiej z prostych danych (δ, δ'); następnie wynaleźć ślad poziomy θ_1, θ płaszczyzny wyznaczonej przez dwie proste (d, d') i (d_1, δ'), a ślad ten tak otrzymany należeć będzie do płaszczyzny rzucającej, prostopadłej do płaszczyzny pionowej rzutów nowo oznaczonej. Mając to, należy nakreślić nową liniję ziemną x_1y_1 prostopadłą do tej płaszczyzny, a w ten sposób, po dokonaniu zmiany płaszczyzny pionowej rzutów względnie do prostych danych, otrzymamy rzuty równoległe szukane d'_1, δ'_1.

160. Zadanie IX. — *Uczynić równoległemi ślady pionowe dwóch płaszczyzn* (*fig.* 153, tab. IX).

Sposób pierwszy. — *Zmiana płaszczyzn rzutów.* — Żeby ślady pionowe dwóch płaszczyzn były równoległe, potrzeba i dostatecznem jest, żeby te płaszczyzny przecinały się z sobą podług prostej obrazu. Zadanie to da się więc rozwiązać szukając rzutu poziomego vh prostej wspólnego przecięcia płaszczyzn danych $P_\alpha P'$ i $Q_\beta Q'$ i kreśląc następnie liniję ziemną x_1y_1 równolegle do tej prostej. Po dokonaniu zmiany płaszczyzny pionowej rzutów, śladami płaszczyzn szukanych będą $P_{\alpha_1} P'_1$, $Q_{\beta_1} Q'_1$.

161. Zadanie X. — *Rozwiązać dwa powyższe zadnia, używając ruchu obrotowego* (do rozwiązania).

162. Zadanie XI. — *Dopełnić wykreślenia rzutu pionowego kąta prostego, znając jego rzut poziomy i rzut pionowy jednego z jego boków* (*fig.* 154, tab. IX). — Niech δ, δ'_1, d, będą rzutami danemi. Nakreśliwszy rzut pomocniczy na płaszczyznie pionowej rzucającej prostę (δ, δ'), w celu uwydatnienia na niej kąta prostego (§ **42**), linija ziemna x_1y_1 tej nowej płaszczyzny pionowej zejdzie się z prostą δ i po wykonaniu zmiany płaszczyzn rzutów, znajdzie się nowy rzut δ'_1 prostej i rzut s'_1 wierzchołka ss', zkąd będzie można wynaleźć rzut d'_1 drugiego boku kąta prostego na płaszczyznie pionowej pomocniczej, kreśląc przez punkt s'_1 prostopadłę do δ'_1. Drugi więc bok wyznaczony przez rzuty d'_1, d w tym układzie płaszczyzn rzutów, z którego przechodząc do pierwotnego układu otrzyma się najprzód rzuty t, t' śladu poziomego tej prostej, a następnie i rzut pionowy szukany d'.

163. Zadanie XII. — *Dwie płaszczyzny przecinające się pod kątem prostym, doprowadzić za pomocą trzech ruchów obrotowych do takiego położenia, żeby one zeszły się z płaszczyznami rzutów* (*fig.* 155, tab. IX). — Daną jest jedna z płaszczyzn $P\alpha P'$ przez swe ślady, druga zaś za pomocą prostej $(vh, v'h')$ ich wspólnego przecięcia. Należy tu: 1° sprowadzić płaszczyznę daną $P\alpha P'$, przez obrót jej naokoło osi obrotu pionowej (z_1, z'_1) do położenia prostopadłego do płaszczyzny pionowej rzutów t. j. do położenia $P_1\theta_1P'_1$ a następnie wciągając do tego ruchu prostę $(vh, v'h')$, która po obrocie będzie wyznaczona przez swe ślady v' i h_1, 2° obrócić tak otrzymaną płaszczyznę naokoło osi obrotu z_2, z'_2, wciągając znowu do tego ruchu prostę, której trzeciem położeniem będzie prosta $h_1v'_1$, leżąca na płaszczyznie poziomej rzutów; 3° w końcu wykonawszy trzeci ruch obrotowy naokoło osi z_3, z'_3 prostopadłej do płaszczyzny poziomej rzutów sprowadzimy prostę wspólnego przecięcia vh, $v'h'$ na oś rzutów xy, a tem samem drugą płaszczyznę daną na płaszczyznę pionową rzutów.

164. Zadanie XIII. — *Dwie płaszczyzny przecinające się pod kątem prostym, doprowadzić przez potrójną zmianę płaszczyzn rzutów do takiego położenia, żeby one zchodziły się z płaszczyznami rzutów* (do rozwiązania).

165. Zadanie XIV. — *Znając rzut poziomy kąta trójściennego prostokątnego i znamię jego wierzchołka, znaleźć jego rzut pionowy* (*fig.* 156, tab. IX). — Niech sa, sb, sc, będą rzutami poziomemi krawędzi kąta trójściennego, mamy oznaczyć rysunkiem położenie wierzchołka s' według znamienia danego. Żeby wyznaczyć rzuty pionowe jednego z punktów leżących na każdej krawędzi, należy oznaczyć ślady ścian kąta trójściennego na płaszczyznie poziomej jakiejkolwiek; że zaś ślady te, jak wiemy, są prostopadłe do rzutów krawędzi (§ **40**), wystarczy więc do ich nakreślenia, obrać dowolnie jakikolwiek punkt α leżący na rzucie poziomym sa jednej z krawędzi, a z tego punktu nakreślić dwie proste prostopadłe do rzutów poziomych krawędzi pozostałych sb i sc kąta trójściennego, połączyć następnie z sobą punkta przecięcia śladów ścian z rzutami krawędzi β i γ liniją prostą $\beta\gamma$, która, jako sprawdzenie dokładności rysunku, winna być prostopadłą do rzutu poziomego pierwszej krawędzi $s\alpha$. Znając obecnie ślady $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$, $\alpha\beta$ płaszczyzny poziomej pomocniczej na ścianach kąta trójściennego, znaleźć należy znamię tej płaszczyzny, przecinając kąt trójścienny, ograniczony płaszczyzną poziomą pomocniczą, płaszczyzną pionową rzucającą prostę SA; ponieważ przecięcie to jest trójkątem prostokątnym, którego podstawą jest prosta αd a wierzchołkiem punkt leżący w wierzchołku kąta trójściennego, otrzymamy go zatem w kładzie naokoło osi obrotu αd, w punkcie przecięcia S_1, półokręgu koła zakreślonego na αd jako średnicy, z prostopadłą do podstawy, nakreśloną z punktu s. Wzniesienie więc wierzchołka kąta trójściennego ponad płaszczyznę poziomą rzutów jest równe sS_1; odcinając je od punktu s' na $s'\sigma'$, prosta równoległa do linii ziemnej poprowadzona przez punkt σ_1, wyznaczy ślad pio-

nowy H′ płaszczyzny pomocniczej, a odrzucając na tę ostatnią punkta α, β i γ za pomocą prostopadłych do linii ziemnej, otrzyma się rzuty pionowe α', β', γ', śladów oznaczonych przez krawędzie kąta trójściennego na płaszczyznie H′. Łącząc obecnie tak otrzymane punkta z wierzchołkiem s' linijami prostemi $s'\alpha'$, $s'\beta'$, $s'\gamma'$, otrzymamy właśnie proste szukane, które odpowiadają zadaniu. Żeby zadanie, którem się zajmujemy, mogło być rozwiązanem, potrzebnem i dostatecznem jest, żeby kąty $\alpha s\beta$, $\beta s\gamma$, $\alpha s\gamma$ utworzone przez rzuty poziome krawędzi, zawartych pomiędzy wierzchołkiem i płaszczyzną H′, miały od 90° do 180°. Weźmy bowiem kąt prosty, leżący na płaszczyznie poziomej rzutów i obracajmy go naokoło osi poziomej przecinającej jego boki a znajdziemy, że rzuty poziome jego wierzchołka ruchomego będą leżeć jużto w trójkącie utworzonym przez oś obrotu z bokami kąta pierwotnego, jużteż w trójkącie symetrycznym pierwszemu, odpowiednio do osi obrotu, zatem rzut kąta będzie zawarty w granicach od 90° do 180°, czyli że warunek ten jest potrzebnym. Powiadamy że on jest dostatecznym, bo jeżeli kąty $\alpha s\beta$, $\beta s\gamma$, $\gamma s\alpha$ są rozwarte, prostopadłe $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\beta\gamma$ spotykają boki $s\beta$, $s\gamma$, $s\alpha$ przedłużone z drugiej strony wierzchołka, i punkt s znajduje się w trójkącie $\alpha\beta\gamma$; okrąg koła pomocniczy przecina w tym razie, prostopadłę spuszczoną z punktu s do αd, a zatem możemy nakreślić kąt trójścienny.

166. Zadanie XV. — *Przesunąć, względem punktu, prostej lub płaszczyzny, jednę z płaszczyn rzutów równolegle do jej pierwotnego położenia* (do rozwiązania).

167. Zadanie XVI. — *Przez punkt dany poprowadzić prostę przecinającą inną prostę i koło nie leżące na tej samej płaszczyznie* (*fig.* 157, tab. X). — Niech będą : PαP′ śladami płaszczyzny, (d, d') rzutami prostej, m, m' rzutami punktu danego, o rzutem poziomym środka koła i R jego promieniem.

Rozwiązanie ogólne. — 1° Nakreślić należy przez punkt dany m, m' i przez prostę (d, d') płaszczyznę Q; 2° poszukać prostej wspólnego przecięcia płaszczyzny PαP′ z płaszczyzną Q; 3° wynaleźć punkta spotkania tej prostej z kołem danem, a łącząc je z punktem m, m' otrzymamy właśnie proste odpowiadające zadaniu.

Wykreślenie. — Zamiast szukać śladów płaszczyzny Q i kreślić je, wystarcza oznaczyć przecięcie się jej płaszczyzną PαP′, posługując się rzutami (d, d') prostej i rzutami m, m' punktu, przez które ta płaszczyzna jest wyznaczoną. W tym celu przyjąwszy za płaszczyznę pomocniczą płaszczyznę obrazu przechodzącą przez punkt m, m', która przecina płaszczyznę PαP′ podług prostej $(tf, t'f')$ a płaszczyznę Q podług prostej $(mn, m'n')$, punkt a, a' wspólnego przecięcia tych dwóch prostych będzie właśnie jednym punktem szukanego przecięcia płaszczyzn PαP′ i Q; drugi punkt tegoż przecięcia otrzyma się, biorąc pod uwagę ślady poziome płaszczyzn i korzystając zawsze, dla wykreślenia śladu płaszczyzny Q, z prostej $(mn, m'n')$, znalezionej przy oznaczeniu punktu przecięcia a, a'. I tak, żeby znaleźć ten drugi punkt, dosyć jest połączyć liniją prostą ślady poziome (h, h_1) prostych $(mn, m'n')$ i (d, d'), a prosta h, h_1, wyznaczy w punkcie swego przecięcia z prostą αP, ślad poziomy 0 przecięcia się płaszczyzn. Znając w ten sposób prostę I wspólnego przecięcia obu w mowie będących płaszczyzn, należy dla znalezienia punktu spotkania się tejże prostej i koła, podług znanej metody podanej w (§ 147), t. j. nie kreśląc rzutów koła, zrobić kład, płaszczyzny PαP′, prostej i koła naokoło osi obrotu αP korzystając z linii obrazu $(t'a', ta)$. Dokonanie kładu tego i powrót z niego do pierwotnego położenia tyle już razy były powtarzane, że czytelnik z łatwością sam będzie je mógł wyczytać z figury.

168. Zadanie XVII. — *Znając długość sześciu krawędzi czworościanu, płaszczyznę jednej jego ściany i położenie jednej krawędzi tej ściany, nakreślić jego rzuty* (*fig.* 158, tab. X). — Niech $P_\alpha P'$ i (ab, ab') będą śladami płaszczyzny podstawy i rzutami jednej z krawędzi tej podstawy, które przyjmujemy jako dane naprzód. Zróbmy kład płaszczyzny $P_\alpha P'$, wciągając do tego ruchu czworościan, naokoło jej śladu poziomego, i na tym kładzie nakreślmy sposobem znanym, w należytem położeniu bok podstawy $(ab, a'b')$, który przypadnie w A_1B_1; samą podstawę $B_1A_1C_1$, otrzymamy, z trzech boków znanych kreśląc na kładzie trójkąt.

Jak tylko czwarty wierzchołek po dokonanym ruchu przyjmie położenie należyte, zróbmy kład jego z każdym kolejno trójkątem, tworzącym jedną ze ścian bocznych czworościanu, na płaszczyznę poziomą rzutów w punktach D_1, D_2, D_3; kład ten otrzymuje się z przecięcia łuków kół, zakreślonych z wierzchołków podstawy A_1, B_1, C_1, jako środków, promieniami równemi długościom krawędzi bocznych, dążących do odpowiednich środków. Po dokonaniu powyższych wykreśleń, gdybyśmy chcieli wystawić w przestrzeni czworościan, dostatecznem byłoby, zostawiając podstawę jego nieruchomą, obrócić punkta D_1, D_2, D_3 naokoło odpowiednich im krawędzi podstawy, aż do ich wzajemnego zejścia się w jednym punkcie D w przestrzeni.

Żeby zatem znaleźć rzut wierzchołka czworościanu na płaszczyznie podstawy, należy wykreślić punkt D_4, który jest punktem spotkania się trzech prostopadłych do odpowiednich osi obrotów nakreślonych z punktów D_1, D_2, D_3, a figura w ten sposób nakreślona winna, jako sprawdzenie dokładności rysunku przedstawić ten wynik, że te trzy prostopadłe powinny się przeciąć w jednym i tym samym punkcie. Dla dopełnienia wykreślenia odnoszącego się do czwartego wierzchołka D czworościanu, należy oznaczyć odległość tego wierzchołka od podstawy, t. j. wysokość samego czworościanu; w tym celu należy zrobić naokoło śladu δD_4, kład trójkąta w przestrzeni $D\delta D_4$, którego jeden bok δD_4 kąta prostego jest znany i którego przeciwprostokątnia δD_1 znajduje się w naturalnej wielkości na kładzie. Wykonawszy kład ten t. j. wykreśliwszy trójkąt $D_4\delta D_5$ otrzymamy wysokość czworościanu D_4D_5, a za pomocą elementów właśnie wyznaczonych, możemy sprowadzić płaszczyznę podstawy na płaszczyznę $P_\alpha P'$, wciągając do tego ruchu wierzchołek D.

Inne rozwiązanie (*fig.* 159, tab. X). — Niech trójkąt $A_1B_1C_1$, po dokonaniu kładu płaszczyzny podstawy czworościanu naokoło jej śladu poziomego, przedstawia tęż podstawę; wyobraźmy sobie, dla oznaczenia wierzchołka przeciwległego podstawie, trzy kule, których środki leżą w punktach A_1, B_1, C_1 należących do podstawy, a których promienie są odpowiednio równe danym krawędziom bocznym czworościanu, to jeden z punktów przecięcia się tych kul wyznaczy właśnie po zrobieniu kładu podstawy, wierzchołek szukany czworościanu.

Dla wyznaczenia tych trzech kul, przedstawmy tylko ich ślady poziome, które przedstawią się na płaszczyznie poziomej rzutów pod postacią trzech kół wielkich, mających środki w punktach A_1, B_1, C_1, zaś promienie równe krawędziom czworościanu; następnie nakreślmy proste przecięcia tych powierzchni, branych po dwie, a w ten sposób otrzymamy punkt, w którym trzy kule przecinają się z sobą. Po stosownem umieszczeniu prostych wspólnego przecięcia kul na pierwotnych płaszczyznach wyznaczających też kule, znajdziemy rzuty poziome *ef*, *gh*, *lk*, które są właśnie osiami pierwotnemi kół wielkich nakreślonych na figurze, a ponieważ proste te powinny przechodzić przez wierzchołek szukany, ich rzuty poziome, t. j. trzy osie pierwotne *ef*, *gh*, *lk* powinny, jako sprawdzenie dokładności rysunku, przecinać się w jednym punkcie D_4, który będzie rzutem na płaszczyznę podstawy czworościanu jego czwartego wierzchołka szukanego.

Żeby oznaczyć naturalną wielkość znamienia tego punktu, można dla uproszczenia rysunku opisanego powyżej zauważyć, że jest ona równą połowie cięciwy objętej przez jedną z kul na ich wspólnej osi pierwiastnej, która w naszem zadaniu zchodzi się z pionową przechodzącą przez punkt D_4. Obecnie więc, naokoło prostej łączącej punkta C_4D_4, robiąc kład koła wielkiego kuli C_4 nakreślonego na osi pierwiastnej trzech kul, znajdzie się właśnie ślad poziomy kuli C_4; a ponieważ oś pierwiastna kul znajdzie się w kładzie na prostopadłej do osi obrotu C_4D_4 poprowadzonej przez punkt D_4, prostopadła ta D_5D_4, ograniczona z jednej strony spodkiem D_4 osi pierwiastnej, a z drugiej strony kołem wielkiem w kładzie, przedstawi znamię szukane w naturalnej wielkości. Zostaje więc obecnie, jak to już miało miejsce w poprzedzającym przypadku, powrócić do pierwotnego położenia podstawę czworościanu, wciągając do tego ruchu i wierzchołki jego. Zauważyć należy, że oba rozwiązania, prowadzące do znalezienia rzutu D_4 wierzchołka czworościanu na jego płaszczyznę podstawy, posługują się jednem i temże samem wykreśleniem.

METODA PRZEMIANY FIGUR (§ 1).

169. Każdy wykres geometryi wykreślnej odpowiada twierdzeniu geometrycznemu. — W samej rzeczy, własności jakiejkolwiek figury w przestrzeni mają dokładnie im odpowiadające własności jej rzutów, t. j. że każdej własności figury w przestrzeni odpowiada podobna własność jej rzutów i odwrotnie. Ta prosta uwaga pozwala, zasadzając się na niej, dowieść wielkiej liczby własności geometrycznych i służy za podstawę metody przemiany figur.

170. Metoda Mongea. — Głównym celem metody MONGEa jest nadanie własnościom geometrycznym, dowiedzionym za pomocą metody przemiany figur, większej ogólności od tej, którąby one miały wprowadzając dopiero w rezultatach pewne zastrzeżenia, wymagane przez sam rysunek tych figur. Dla osiągnięcia tego celu, MONGE przyjmował następującą zasadę:

Wszelki dowód przeprowadzony na figurze ogólnej złożonej z cząsteczek rzetelnych (*punktów, linij, lub powierzchni*) **lecz mogących stać się urojonemi, jest zawsze i bezwarunkowo prawdziwy.** — Ostatnie zadanie podane przez nas (§ 168 rozwiązanie 2°), przedstawia jedno z piękniejszych zastosowań teoryi MONGEa. W samej rzeczy, stosując metodę przemiany figur do rysunku przedstawionego na fig. 159 w przypadku kół lub kul przecinających się w punktach rzeczywistych, dochodzimy do następujących twierdzeń:

Twierdzenie I. — *Osie pierwiastne trzech kół, łączone z sobą po dwie, zbiegają się w jednym punkcie, który jest środkiem pierwiastnym tych kół.*

Twierdzenie II. — *Płaszczyzny pierwiastne trzech kul, łączone z sobą po dwie, spotykają się z sobą w jednej prostej, która jest osią pierwiastną tych kul.* — Wiedząc to i przyjmując zasadę metody MONGEa za dowiedzioną, możemy uważać dwa powyżej podane twierdzenia za ogólne.

Zasada ciągłości. — MONGE stosował swą metodę w sposób domyślny, nie nadając jej kształtu reguły ogólnej i nie dowodząc jej. Znajomość praktyczną metody MONGEa, zawdzięczyć winniśmy dopiero PONCELETOWI, który jej, w swem dziele pod tytułem *Wykład własności rzutowych figur* (*Traité des proprietés projectives des figures*), nadał charakter ogólny, nie podając wszelako ścisłego jej dowodzenia i zamieniając ją na zasadę geometryczną bardzo obfitą niemal niewyczerpaną, którą zwie *zasadą ciągłości*, a która w następujący sposób da się wysłowić:

Jeżeli jakaś figura przedstawia kilka przypadków mających jeden i ten sam charakter ogólności, wszelka własność uznana za prawdziwą dla jednego z nich, stosuje się do wszystkich pozostałych. Dla wykazania słuszności metody Mongea lub zasady ciągłości, dostatecznem będzie zauważyć, że rachunek zastosowany do zadań geometrycznych, z małemi tylko wyjątkami, prowadzi do wypadków zupełnie niezależnych od położenia części składowych figury, byleby wszakże te położenia były ogólnemi.

Uwaga. — Dla uczynienia zupełnie ogólnemi założeń wynikających z zastosowania metody przemiany figur, konieczną jest rzeczą zastąpić figurę daną w zadaniu jej rzutem zbieżnym na jakąkolwiek płaszczyznę, gdyż po wprowadzeniu tej zamiany linije równoległe rysunku a szczególniej prostopadłe do osi rzutów staną się zbieżnemi (§ 13).

171. **Zadanie XVIII.** — *Wyprowadzić, stosując metodę przemiany figur, z rysunku przedstawiającego przecięcie się trzech płaszczyzn danych przez swe ślady (fig. 83, tab. V), następujące twierdzenie:*

Twierdzenie. — *Jeśli na danej płaszczyznie, boki dwóch trójkątów brane po dwa zbiegają się w trzech punktach leżących na jednej linii prostej* D, i *jeżeli, z punktu dowolnie obranego na płaszczyznie figury, nakreślimy* 1° *proste przechodzące przez wierzchołek jednego z trójkątów,* 2° *weźmiemy następnie punkta spotkania tych prostych z prostą* D *i połączymy te punkta z odpowiedniemi wierzchołkami drugiego trójkąta, to te trzy ostatnie proste zbiegną się w jednym punkcie.* — Figura 83 (§ 73) przedstawia punkt zbiegu prostych w których trzy płaszczyzny brane po dwie spotykają się z sobą, t. j. punkt wspólnego przecięcia się a, a' trzech płaszczyzn danych.

Dla nadania większej ogólności, a zasadzając się na uwadze umieszczonej na końcu poprzedzającego paragrafu, narysujmy na jakiejkolwiek płaszczyznie rzut zbieżny figury o której mowa. Umieszczając punkt zbiegu rzutów w położeniu dowolnem i robiąc rzut : 1° trójkątów $h_1h_2h_3$, $v'_1v'_2v'_3$; 2° prostopadłych do linii ziemnej $h_1h'_1$, $h_2h'_2$, $h_3h'_3$; 3° rzutów pionowych przecięć płaszczyzn branych po dwie $h'_1v'_1$, $h'_2v'_2$, $h'_3v'_3$, i 4° linii ziemnej xy (*fig.* 83, tab. V) otrzymamy (*fig.* 160, tab. X) : 1° dwa trójkąty $H_1H_2H_3$, $W'_1W'_2W'_3$, 2° rzuty prostopadłych do linii ziemnej $H_1H'_1$, $H_2H'_2$, $H_3H'_3$, które winny mieć punkt zbiegu w punkcie β_∞, oznaczonym przez rzut punktu leżącego w nieskończoności na prostopadłych do linii ziemnej w pierwotnem jej położeniu (§ 13), 3° proste $H'_1W'_1$, $H'_2W'_2$, $H'_3W'_3$, przechodzące przez punkt α', który jest rzutem zbieżnym punktu a', i nakoniec 4° rzut zbieżny D linii ziemnej, która winna przejść przez trzy punkta spotkania się boków branych po dwa w trójkątach $H_1H_2H_3$, $W'_1W'_2W'_3$. Jednem słowem, warunki które w tej chwili wyliczyliśmy, dla należytego wykonania rysunku, są też same, które podaliśmy w osnowie zadania.

172. **Zadanie XIX.** — *Wyprowadzić z rysunku przedstawiającego przecięcie trzech płaszczyzn, danych przez swe ślady (fig.* 83, tab. V), *twierdzenie* Desarguesa.

Twierdzenie Desarguesa. — *Jeżeli dwa trójkąty leżące na jednej płaszczyznie lub znajdujące się w przestrzeni, mają wierzchołki swe brane po dwa, na trzech prostych zbiegających się wjednym punkcie, boki ich brane po dwa, spotkają się w trzech punktach leżących na jednej linii prostej* (do rozwiązania).

173. **Zadanie XX.** — *Wyprowadzić z rysunku przedstawiającego ślady płaszczyzny przesuniętej przez dwie proste przecinające się, twierdzenie odwrotne twierdzeniu* Desarguesa (do rozwiązania).

174. **Zadanie XXI.** — *Nakreślić rzut ostrokręgowy okręgu koła podług innego okręgu koła o znanym*

promieniu (*fig.* 161, tab. X). — Wyliczmy własności, układu złożonego z dwóch okręgów kół, służące do rozwiązania zadania :

1° *Dwa okręgi kół winny przecinać się z sobą w punktach albo rzeczywistych, albo urojonych.* — W samej rzeczy, ponieważ dwa okręgi kół, o których mowa, muszą się znajdować na powierzchni ostrokręgu rzucającego i to jeden pod drugim, zatem jeżeli na jakiejkolwiek powierzchni nakreślimy dwie linije, te spotykają się zawsze w punktach albo rzeczywistych albo urojonych.

2° *Okręgi kół winny leżeć na jednej i tej samej kuli.* — W samej rzeczy, uczynić iżby kula przechodziła przez dwa okręgi kół przecinające się, jestto to samo, co przeprowadzić tę kulę przez dwa punkta przecięcia się tych kół i przez trzeci punkt każdego z nich t. j. razem przez cztery punkta leżące na kuli, a wskutek tego zaś, że te cztery punkta leżą na płaszczyznach kół, w naszym przypadku zupełnie różnych, widocznem jest, że dwa okręgi kół mogą zawsze leżeć na jednej i tej samej kuli.

3° **Twierdzenie.** — *Na dwóch okręgach kół leżących na jednej kuli, można wystawić dwa ostrokręgi* (*fig.* 161, tab. X). — Niech będzie $abh\theta$ koło wielkie kuli prostopadłe do płaszczyzny kół danych i niech będą, przyjmując za płaszczyznę figury płaszczyznę tego koła wielkiego, *ab i* $h\theta$ rzuty na nią kół danych. Nakreślmy dwie pary cięciw (ah, $b\theta$) i ($a\theta$, bh), to punkta ich przecięcia się S i Σ będą wierzchołkami dwóch ostrokręgów szukanych; w samej rzeczy, ponieważ równość kątów α i β wypływa z ich wspólnej miary na okręgu koła $abh\theta$, a zatem wnosimy, że płaszczyzny prostopadłe do płaszczyzny figury, przechodzące przez cięciwy *ab* i $h\theta$, wyznaczają w ostrokręgu mającym za wierzchołek S lub Σ a za podstawę wspólną jeden z okręgów kół danych, dwa przecięcia przeciwrównoległe (antiparallèles), a ponieważ jedno z nich jest kołem, drugie musi być także kołem.

Wykreślenie rysunku. — Sprowadźmy najprzód płaszczyznę koła danego do położenia $P\alpha P'$ prostopadłego do płaszczyzny pionowej rzutów (fig. 162, tab. X); niech będą następnie ($a'b'$), (o, o') rzut pionowy koła i rzuty jego środka. Postarajmy się zrobić rzut ostrokręgowy tego koła o znanym promieniu na jedną z płaszczyzn rzutów np. na płaszczyznę poziomą. Okręgi kół winny się przeciąć w punktach rzeczywistych lub urojonych na prostej wspólnego przecięcia αP ich płaszczyzn; albowiem, jeżeli zrobimy kład płaszczyzny $P\alpha P'$ wraz z okręgiem koła który na niej leży, naokoło prostej αP wziętej za oś obrotu, punkta przecięcia pierwotnych okręgów kół nie naruszą się, zatem sprowadzając koło przedstawione na kładzie w ω_1 (podług znanej metody) do spotkania się na prostej αP z kołem szukanem zobaczymy, że te koła w naturalnem swem położeniu przecinają się także. Otóż, żeby dwa okręgi kół przecinały się z sobą na jednej prostej, prosta ta musi być ich osią pierwiastną.

Gdy na rysunku, koło ω_1 i prosta αP przecinają się z sobą w punktach rzeczywistych, wyznaczenie szukanego okręgu koła nie przedstawi żadnej trudności, albowiem ten ostatni będzie oznaczony przez dwa punkta i przez promień.

Przypuśćmy teraz, że w skutek odpowiedniej dyspozycyi naszego rysunku, punkta przecięcia są urojonemi, i rozwiążmy zadanie zasadzając się na twierdzeniu następującem.

Twierdzenie. — *Oś pierwiastna dwóch kół jest miejscem środków kół, które przecinają się z pierwszemi pod kątem prostym.* — Według tego twierdzenia, jakikolwiek punkt ω wzięty na osi pierwiastnej αP jest środkiem koła przecinającego prostokątnie ω_1 jakoteż koło szukane, i w tym przypadku promień koła pomocniczego równa się długości ωd_1, t. j. jednej ze stycznych wyprowadzonej z punktu ω do okręgu koła ω_1.

Jeżeli z drugiej strony zauważymy styczną do szukanego okręgu koła, która przechodzi przez ten sam

punkt ω, dostrzeżemy, że styczna ta jest równa pierwszej, jako promienie jednego i tego samego koła, a zatem, że odległość środka szukanego okręgu koła od punktu ω jest przeciwprostokątnią trójkąta, którego boki kąta prostego są odpowiednio równe ωd_1 i są promieniami tegoż okręgu; przedłużając więc $O_1 d_1$ o długość $d_1 c_1$ równą promieniowi koła, którego położenia nie znamy, i kreśląc z punktu ω promieniem ωc_1 okrąg koła, otrzymamy pierwsze miejsce środka koła, którego zajmujemy się wykreśleniem; a nadto prostopadła wyprowadzona z punktu O_1 do osi pierwiastnej wyznaczy drugie miejsce tegoż punktu, wskutek czego znajdziemy na przecięciu się tych dwóch miejsc geometrycznych dwa punkta odpowiadające zadaniu.

Obrawszy jeden z nich np. γ nakreślmy promieniem danym odpowiedni okrąg koła, a następnie rzućmy pionowo tę liniję na $h't'$; uważając teraz, że płaszczyzna obrazu poprowadzona przez dwa środki (γ, γ'), (o, o') jest właśnie płaszczyzną naszego rysunku (*fig.* 161), wywnioskujemy, że robiąc powtórnie bez zmiany rysunek już zrobiony raz, który się powtarza w rzucie na płaszczyznie pionowej rzutów, znajdziemy wierzchołki szukane (s, s') i (σ, σ').

ROZDZIAŁ V

ZASTOSOWANIE PODANYCH METOD DO ROZWIĄZYWANIA ZADAŃ

ODNOSZĄCYCH SIĘ DO PUNKTU, PROSTEJ I PŁASZCZYZNY

MIERZENIE ODLEGŁOŚCI

175. Zadanie I. — *Znaleźć prawdziwą długość prostej łączącej dwa punkta dane przez rzuty* (a, a') i (b, b') (*fig.* 163, tab. X).

Metoda zmiany płaszczyzn rzutów. — Nakreślmy rzuty $(ab, a'b')$ prostej mierzącej w przestrzeni odległość dwóch danych punktów; przyjmując za nową liniję ziemną prostę $x_1 y_1$ równoległą do ab, uczyńmy płaszczyznę pionową rzutów równoległą do prostej w przestrzeni AB. Rzuty punktów A i B, na tej nowej płaszczyznie pionowej rzutów, znajdziemy (§ **103**), odcinając na prostopadłych do linii ziemnej $x_1 y_1$, poprowadzonych z punktów a i b, długości $a'_1\alpha_1$, $\beta_1 b'_1$ równe $a'\alpha$, $\beta b'$. W tym nowym układzie płaszczyzn rzutów znajdziemy prostę obrazu ab, $a'_1 b'_1$, której rzut pionowy $a'_1 b'_1$, wyznaczy właśnie prawdziwą wielkość szukanej odległości dwóch punktów.

Metoda kładów (*fig.* 163, tab, X). — Zróbmy kład poziomy trapezu AB ab, którego dwa kąty są proste, naokoło boku ab; po dokonaniu kładu, rzucające Aa, Bb przypadną na prostopadłych aa_2, bb_2 wyprowadzonych z punktów a, b do osi obrotu, a długości ich będą odpowiednio równe wzniesieniom $\alpha a'$, $\beta b'$ punktów danych, zaś prosta $a_2 b_2$ łącząca kłady tych punktów danych będzie właśnie ich odległością szukaną w rzeczywistej wielkości.

Dodać winniśmy, że można jednocześnie i uprościć to rozwiązanie, i zmniejszyć obszary rysunku.

I tak, robiąc kład prostej AB naokoło poziomej $a'\beta'_1$, ab płaszczyzny pionowej rzucającej tę prostę (*fig.* 163, tab. X), to podczas tego ruchu punkt a, a' pozostanie nieruchomy, a rzut poziomy drugiego punktu, po zrobieniu kładu, przypadnie na prostopadłej do osi obrotu wyprowadzonej z punktu b a w odległości od osi obrotu równej różnicy wzniesień $\beta'_1 b'$ obu punktów danych; jeżeli więc, po odcięciu na bb_3 odległości $\beta'_1 b'$, nakreślimy prostę ab_3, ta ostatnia będzie kładem a zatem i prawdziwą wielkością odległości szukanej.

Metoda ruchu obrotowego (*fig.* 163, tab. X). — Za pomocą ruchu obrotowego naokoło pionowej przechodzącej przez punkt A, sprowadźmy prostę AB na płaszczyznę obrazu. Podczas tego ruchu, punkt A i jego rzuty a, a' pozostaną nieruchome, orosta ab przypadnie na prostej równoległej do linii ziemnej xy, t. j. na ab_4 nie zmieniając swej długości; również, ponieważ wzniesienie punktu B pozostało temże samem, nowy rzut pionowy tego punktu otrzyma się w punkcie b'_4 przecięcia się prostej równoległej do linii ziemnej xy, nakreślonej przez punkt b', z prostopadłą do linii ziemnej przechodzącą przez punkt b_4. Rzut pionowy prostej, której położenie zostało zmienione, otrzymamy, łącząc punkta a', b'_4 linią prostą, która przedstawi nam właśnie odległość szukaną w rzeczywistej wielkości.

176. Zadanie odwrotne. — *Na prostej danej, od pewnego punktu i w kierunku oznaczonym, odciąć długość daną* (*fig.* 164, tab. X). — Niech d i d' będą rzutami prostej danej i a, a' rzutami punktu danego; załóżmy, że chcemy odciąć na tej prostej od punktu danego i w kierunku strzałki f, długość daną l. Dla rozwiązania niniejszego zadania, sprowadźmy ruchem obrotowym naokoło pionowej przechodzącej przez punkt a, a', prostę daną na płaszczyznę obrazu ; ponieważ podczas tego ruchu punkt a, a' zostanie niezmiennym, drugi zaś punkt jakikolwiek b, b' dowolnie obrany na prostej ruchomej, postępując w ten sam sposób jak w poprzedniem zadaniu, przypadnie w punkcie b_1, b'_1, zatem rzutami prostej danej w tem nowem położeniu będą ab_1, $a'b'_1$; jeżeli więc obecnie odetniemy na tej prostej długość $a'o'_1 = l$, znajdziemy, po sprowadzeniu prostej do jej pierwotnego położenia d, d' a wraz z nią punktu, którego rzutem pionowym jest o'_1, rzuty szukane ao, $a'o'$.

177. Zadanie II. — *Znaleźć odległość punktu danego od płaszczyzny.*

Rozwiązanie ogólne. — 1° Przez punkt dany należy nakreślić prostę prostopadłą do płaszczyzny (§ **40**); 2° wyznaczyć punkt przecięcia się tej prostopadłej z płaszczyzną (§ **69**) i 3° postępując w ten sam sposób jak w paragrafie **175**, oznaczyć w naturalnej wielkości odległość punktu danego od spodka prostopadłej, czyli odległość szukaną.

Jakkolwiek rozwiązanie tego zadania sprowadza się do trzech rozwiązań znanych już czytelnikowi, jednakże z uwagi na jego wielką ważność powtórzymy ogólny bieg postępowania dla dwóch szczególnych przypadków: 1° kiedy płaszczyzna dana jest wyznaczoną przez swe ślady i 2° kiedy płaszczyzna dana jest wyznaczoną przez dwie proste lub przez trzy punkta na niej leżące.

1° *Płaszczyzna dana jest wyznaczoną przez swe ślady* (*fig.* 165, tab. X). — Niech $P\alpha P'$ przedstawia ślady płaszczyzny zaś a, a' rzuty punktu. Poprowadźmy, zgodnie z rozwiązaniem ogólnem, przez punkt a, a' prostę prostopadłą do płaszczyzny, to rzuty tej prostej am, $a'm'$ będą, jak wiadomo, odpowiednio prostopadłe do śladów płaszczyzny; dla znalezienia spodka jej na tej płaszczyźnie, przesuńmy przez nią płaszczyznę pomocniczą pionową rzucającą ją na płaszczyznę daną, to ta płaszczyzna pomocnicza przetnie płaszczyznę daną podług prostej, której rzuty są vh, $v'h'$, a punkt przecięcia się p, p' tej ostatniej prostej z prostą am, $a'm'$ będzie właśnie punktem szukanym. Jeżeli więc obecnie, zawsze zgodnie z rozwiązaniem

ogólnem, przyprowadzimy prostę ap, $a'p'$, nadając jej ruch obrotowy naokoło pionowej przechodzącej przez punkt a, a', do położenia ap, $a'p'_1$ otrzymamy nietylko rzeczywistą wielkość $a'p'_1$ odległości punktu a, a' od płaszczyzny $P\alpha P'$, lecz nadto w ap, $a'p'$ rzuty prostej prostopadłej do płaszczyzny $P\alpha P'$ spuszczonej z punktu a, a' na tę płaszczyznę, których znajomość często jest użyteczną.

2° *Płaszczyzna dana jest wyznaczoną przez trzy punkta* (*fig.* 166, tab. X). — Niech będą (a, a'), (b, b'), (c, c') punkta wyznaczające płaszczyznę i niech będzie czwarty punkt dany (o, o'), (linija ziemna została usuniętą) (§ 23). Dla wyznaczenia przedewszystkiem kierunku prostopadłej do płaszczyzny danej, która mierzy odległość punktu danego od tej płaszczyzny, nakreślmy kierunek śladu poziomego płaszczyzny danej; w tym celu połączmy punkta (a, a'), (b, b') liniją prostą $(ab, a'b')$ i przetnijmy płaszczyznę daną płaszczyzną pomocniczą poziomą przechodzącą przez punkt (c, c'), to rzuty prostej wspólnego przecięcia się tych dwóch płaszczyzn przypadną na $(cm, c'm')$, zaś rzut poziomy prostopadłej szukanej znajdzie się, kreśląc przez punkt o prostopadłę oq do prostej cm.

Po dokonaniu tego, przyjmując za nowy układ płaszczyzn rzutów płaszczyznę poziomą przechodzącą przez prostę $(mc, m'c')$ i płaszczyznę pionową rzucającą prostopadłę oq, wykreślmy jednocześnie spodek prostopadłej oq i odległość szukaną w naturalnej wielkości; w tym celu zauważmy, że nowa oś rzutów x_1y_1 zchodzi się z prostą oq, a ponieważ płaszczyzna pozioma rzutów zmienia swe położenie równolegle do siebie samej, więc nie ma żadnej zmiany w rzutach poziomych, co się zaś tyczy pionowych znajdujemy dla prostej $(cm, c'm')$ punkt c'_1, a dla punktów (o, o') (b, b') znajdujemy rzuty o_1', b_1', odcinając $co_1' = \omega' o'$, $\beta_1 b'_1 = \beta b'$; otrzymana w ten sposób prosta $(c'_1 b'_1)$ wyznaczy nowy ślad pionowy P'_1 płaszczyzny danej.

W tej chwili więc zadanie sprowadza się do następującego : znaleźć w nowym układzie płaszczyzn rzutów odległość punktu o, o'_1 od płaszczyzny $P_1C'_1P'_1$. W tych warunkach możemy wykreślić bez żadnej trudności rzuty $(o'_1p'_1, op)$ prostej służącej za miarę odległości szukanej, a rzut jej na tę nową płaszczyznę pionową rzutów pokaże nam prawdziwą jej wielkość. Dla znalezienia rzutów tej prostopadłej w pierwotnym układzie płaszczyzn rzutów uważmy, że rzut pionowy punktu (p, p'_1) znajdziemy odcinając w należytym kierunku na prostopadłej do osi rzutów przechodzącej przez punkt p, długość $(\pi' p')$ równą (pp'_1), poczem kreśląc prostę $o'p'$ znajdziemy: 1° naturalną wielkość $o'_1p'_1$ prostej służącej za miarę odległości szukanej; 2° rzuty tej prostej $(op, o'p')$ w pierwotnym układzie płaszczyzn rzutów.

178. *Odległość jakiejkolwiek liczby punktów danych* (aa') (bb') (cc') i t. d. *od danej płaszczyzny* $P\alpha P'$ (*fig.* 167, tab. X). — W przypadku którym się zajmujemy, dla uproszczenia wykreślenia, uczynimy płaszczyznę daną prostopadłą do płaszczyzny pionowej rzutów w sposób już znany (§ **111**). Nowa linija ziemna x_1y_1 będzie prostopadłą do śladu poziomego αP płaszczyzny danej, a nowy jej ślad pionowy $\alpha_1 P'_1$ w nowym układzie płaszczyzn rzutów otrzymamy łącząc punkt α_1 z punktem v'_1 prostej vv'_1 przecięcia się dwóch płaszczyzn pionowych rzutów z płaszczyzną daną $P\alpha P'$. Kilkakrotnie powtórzone wykreślenie wyznaczy nam rzuty a'_1, b'_1, c'_1 ..., na płaszczyznie pionowej pomocniczej, punktów (a, a'), (bb'), (c, c')... Dla zupełnego rozwiązania zadania, dostatecznem będzie następnie w nowym układzie płaszczyzn rzutów, znaleźć odległości punktów (a, a'_1), (b, b'_1), (c, c'_1)..., od płaszczyzny $P\alpha P'_1$ a ponieważ odległości te są raz dane przez proste obrazu, a drugi raz, przez punkta przecięcia się ich z płaszczyzną $P\alpha P'_1$, których rzuty pionowe znajdują się na śladzie $\alpha_1 P'_1$ płaszczyzny, otrzymamy więc je w naturalnej wielkości odcinając odległości a'_1a_2, b'_1b_2, c'_1c_2... punktów a'_1, b'_1, c'_1... od śladu płaszczyzny $\alpha_1 P'$.

179. Zadanie III. — *Przez punkt dany przesunąć płaszczyznę prostopadłą do prostej danej*, (*fig.* 168, tab. XI). — Niech (m, m') i (d, d') będą rzutami punktu danego i prostej danej. Ślady płaszczyzny winny być odpowiednio prostopadłe do rzutów prostej (§ 40), dadzą się zaś one wyznaczyć za pomocą prostej obrazu i prostej poziomej leżących na płaszczyznie szukanej i przecinających się w punkcie (m, m'). Prosta pozioma ma rzut pionowy $m'h'$ równoległy do linii ziemnej, a rzut poziomy na prostopadłej mh do prostej danej d, poprowadzonej przez punkt m; podobnież, prosta obrazu ma rzut poziomy mv równoległy do linii ziemnej, a rzut pionowy $m'v'$ prostopadły do d'. Płaszczyzna więc w ten sposób wyznaczona przez dwie proste $(mv, m'v')$ i $(mh, m'h')$ jest płaszczyzną szukaną.

180. Zadanie IV. — *Przez punkt dany poprowadzić prostopadłę do prostej danej* (*fig.* 169, tab. XI).

Rozwiązanie ogólne. — Rozwiązanie tego zadania polega na dwóch poprzednich, a mianowicie: 1° Przez punkt dany należy nakreślić płaszczyznę prostopadłą do prostej danej (§ 179), i 2° punkt przecięcia się tej płaszczyzny z prostą daną połączyć z punktem danym (§ 69). Dla zrobienia wykreślenia zastosowaliśmy rozwiązanie ogólne podane w paragrafie 179 i w ten sposób znaleźliśmy płaszczyznę przedstawioną przez proste równoległe do jej śladów $(mh, m'h')(mv, m'v')$, a przecinające się z sobą w punkcie (m, m'), i przez prostopadłę do prostej danej, następnie przyjęliśmy płaszczyznę pomocniczą pionową rzucającą prostę D, i znaleźliśmy punkt spotkania się (p, p') płaszczyzny prostopadłej i prostej danej (d, d') z połączenia którego z punktem danym oznaczyliśmy rzuty mp, $m'p'$ prostopadłej szukanej.

181. Zadanie V. — *Znaleźć odległość punktu danego m, m' od prostej danej* (d, d') (*fig.* 169, tab. XI). W tym celu należy nakreślić w sposób podany w (§ 180) prostopadłę mp, $m'p'$ wyprowadzoną z punktu m, m' na prostę (d, d') i za pomocą ruchu obrotowego naokoło pionowej przechodzącej przez punkt m, m', sprowadzić tę prostopadłę na płaszczyznę obrazu do położenia mp_1, $m'p_1'$, a ta ostatnia prosta $m'p'_1$ wyznaczy właśnie odległość szukaną w naturalnej wielkości.

182. Zadanie VI. — *Znaleźć najkrótszą odległość dwóch prostych nie leżących na jednej płaszczyznie.*

Rozwiązanie ogólne. — Przedewszystkiem zwrócić należy uwagę, że kierunek najkrótszej odległości otrzymuje się z łatwością za pomocą prostej wspólnego przecięcia się dwóch płaszczyzn odpowiednio prostopadłych do dwóch prostych danych, albowiem wiadomem jest, że wszelka płaszczyzna prostopadła do jednej z prostych danych musi być równoległą do ich wspólnej prostopadłej, a zatem, że prosta wspólnego przecięcia dwóch płaszczyzn odpowiednio prostopadłych do dwóch prostych danych, musi być także równoległą do najkrótszej odległości tych prostych. Znając kierunek najkrótszej odległości, znajdziemy jej położenie kreśląc prostę taką, któraby będąc równoległą do tego kierunku, opierała się jednocześnie na dwóch prostych danych. Zadanie to zostało rozwiązane w (§ 75).

Wykreślenie (*fig.* 170, tab, XI). — Niech (d, d') i (d_1, d_1') będą rzutami prostych danych. Obierzmy dowolnie na xy dwa punkta α i β, lecz dla większej jasności rysunku oddalmy je od prostych danych (d, d') i (d_1, d'_1), i nakreślmy przez te punkta proste (P, P'), (Q, Q') odpowiednio prostopadłe do rzutów prostych danych; te ostatnie proste będą śladami płaszczyzn $P\alpha P'$, $Q\beta Q'$, których prosta wspólnego przecięcia (δ, δ') wyznaczy właśnie kierunek szukany najkrótszej odległości. Żeby zaś oznaczyć położenie najkrótszej odległości, postępując podług metody podanej w powyżej przytoczonym paragrafie, nakreślmy przez jakikolwiek punkt o, o', obrany dowolnie na jednej z prostych danych,

prostę $(\delta_1\delta_1')$ równoległą do kierunku prostej (δ, δ') i zauważmy, że punkt spotkania m, m' płaszczyzny poprowadzonej przez proste przecinające się w punkcie o,o' z tą z prostych danych, która leży nazewnątrz tej ostatniej płaszczyzny, należy do najkrótszej odległości, nadto, że ta prosta będzie cząstką prostej $mn, m'n'$ równoległej do (δ, δ') poprowadzonej przez punkt m, m' i zakończonej na prostych danych.

Tak dokonane wykreślenie winno przedstawić sprawdzenie takie, że punkta n, n' muszą leżeć na jednej prostej prostopadłej do linii ziemnej. Znając to, z łatwością znajdziemy naturalną wielkość najkrótszej odległości. Chociaż rzecz którą się w tej chwili zajmujemy, była już rozbieraną w poprzedzających paragrafach, wskutek jednakże nadzwyczajnej jej wagi, uważaliśmy za rzecz konieczną podać tu jej rozwiązanie ze wszystkiemi szczegółami.

KĄTY UTWORZONE PRZEZ PROSTE I PŁASCZYZNY

183. Zadanie I. — *Znaleźć kąt utworzony przez dwie proste dane* (*fig.* 171, tab. XI). — Jeżeli dwie proste $(ab, a'b')$, $(cd, c'd')$ nie leżą na jednej płaszczyznie, kąt utworzony przez nie jest z określenia równy kątowi utworzonemu przez jedną z prostych danych z prostą równoległą do drugiej prostej danej, a przechodzącą przez jeden z punktów pierwszej prostej. Dla wykonania wykreślenia, poprowadźmy przez punkt s, s' prostej $(ab, a'b')$, którego rzut pionowy s' znajduje się na przecięciu prostych $a'b'$, $c'd'$, równoległę do drugiej prostej danej, to jej rzut pionowy wskutek wyboru punktu s, s' zchodzi się z $c'd'$, zaś poziomy otrzymamy kreśląc przez punkt s równoległę $s\delta$ do prostej cd. Obecnie, dla znalezienia kąta utworzonego przez dwie proste $(ab, a'b')$ $(c'd', s\delta)$ w naturalnej wielkości, nakreślmy rzuty prostej poziomej $ef, e'f'$ leżącej na płaszczyznie tych prostych i zróbmy kład ich naokoło tejże poziomej; ponieważ podczas tego ruchu dwa punkta (e, e'), (f, f') nie zmienią swego położenia, a wierzchołek s, s' przyjmie położenie na kładzie w punkcie S_2 (§ 128) zatem, łącząc punkt S_2 z punktami f i e linijami prostemi S_2f i S_2e, otrzymamy kąt fS_2e, który jest właśnie kątem szukanym w prawdziwej wielkości, a rzutami jego są fSe, $f'S'e'$.

Rzuty prostej dzielącej na dwie równe części kąt między dwiema prostemi przecinającemi się w punkcie s, s' znajdują się, kreśląc prostę S_2g dzielącą na dwie równe części kąt fS_2e w kładzie przyprowadzając następnie wszystko do pierwotnego położenia; prosta S_2g przyjmie położenie sg, $s'g'$, gdyż podczas ruchu wierzchołek wraca do położenia s, s' a punkt g, g' przecięcia się dwójsiecznej z osią obrotu zostaje na swem miejscu.

184. Zadanie II. — *Znaleźć kąt między prostą i płaszczyzną.*

Rozwiązanie ogólne (*fig.* 172, tab. XI). — Niech będą dane: P płaszczyzna i D prosta; mamy znaleźć kąt między niemi, który z określenia jest równym kątowi jaki tworzy prosta dana D z CB t. j. ze swym rzutem na płaszczyznę P. Ponieważ szukanie tego kąta wprost jest dość długie, z tego więc powodu upraszcza go się zważając, że kąt CAB utworzony przez prostę daną i przez rzucającą jednego z jej punktów na daną płaszczyznę, jest dopełnieniem kąta szukanego. Ten sposób zapatrywania się na rzecz, sprowadza nasze zadanie do szukania kąta zawartego pomiędzy dwiema prostemi. Czyli krótko mówiąc, żeby znaleźć kąt jaki tworzy prosta dana z płaszczyzną, dosyć jest znaleźć kąt między tą prostą a prostopadłą do płaszczyzny danej przechodzącą przez jeden z jej punktów i wziąć jego dopełnienie.

Wykreślenie (*fig.* 173, tab. XI). — Oznaczmy przez $P_\alpha P'$ ślady płaszczyzny danej; przez (d,d') rzuty prostej danej, zaś przez s, s' rzuty jednego z jej punktów. Przez punkt s, s' nakreślmy prostopadłę do płaszczyzny, t. j. poprowadźmy dwie proste (δ, δ') odpowiednio prostopadłe do śladów płaszczyzny, i stosownie do reguły podanej w paragrafie 183, nakreślmy, robiąc kład prostych (d, d'), (δ, δ') naokoło śladu poziomego $t\theta$ ich płaszczyzny, kąt przez nie utworzony w rzeczywistej wielkości $tS_2\theta$, a nakoniec wyznaczmy, za pomocą prostopadłej S_2k do prostej $S_2\theta$, kąt β który jest właśnie kątem szukanym.

185. Zadanie III. — *Znaleźć kąty, jakie tworzy prosta dana z płaszczyznami rzutów* (*fig.* 174, tab. XI). — Zadanie to jest tylko szczególnym przypadkiem poprzedzającego; ponieważ jednak rzuty prostej są znane, łatwiej więc będzie szukać kątów prostej ze swemi rzutami na płaszczyznach rzutów t. j. postąpić wprost przeciwnie jak w przypadku ogólnym.

I tak, chcąc znaleźć najprzód kąt prostej danej (d, d') z płaszczyzną poziomą rzutów, t. j. kąt prostej D z jej rzutem poziomym d, w tym celu wyznaczmy ślady (v,v') (h,h') prostej danej i zróbmy kład płaszczyzny pionowej rzucającej ją naokoło śladu pionowego (v, v') tej płaszczyzny; podczas tego ruchu punkt (v, v') zostanie niezmiennym, zaś punkt h opisze na płaszczyźnie poziomej okrąg koła zakreślonego ze środka v promieniem równym vh i przyjdzie do h_1 na linii ziemnej; to uczyniwszy, widzimy, że rzut poziomy d ma kład na linii ziemnej xy, zaś prostę w przestrzeni po zrobieniu jej kładu pionowego otrzyma się, kreśląc $v'h_1$, zkąd wypada, że kąt prostej D z jej rzutem poziomym jest oznaczony wprost i jest równy $\widehat{v'h_1v} = \alpha$. W sposób zupełnie podobny do poprzedzającego, znajdziemy kąt β utworzony przez prostę daną z płaszczyzną pionową rzutów, a to robiąc kład jej na płaszczyznę poziomą rzutów.

Gdyby ślady prostej danej wychodziły poza granice rysunku, wtedy można byłoby zastąpić ją przez inną prostę do niej równoległą, której ślady znajdują się w oznaczonych granicach, lub też, kreśląc przez punkt prostej i prostopadle do płaszczyzn rzutów takie osie, któreby ją uczyniły równoległą raz do jednej a drugi raz do drugiej z płaszczyzn rzutów.

186. Zadanie IV. — *Znaleźć rzuty prostej przechodzącej przez punkt dany i tworzącej z płaszczyznami rzutów kąty dane* (*fig.* 175, tab. XI). — Niech będą m, m' rzuty punktu danego i α, β kąty dane (linija ziemna została usuniętą).

Znajdzmy najprzód, obracając prostę nieznaną naokoło osi obrotu przechodzącej przez punkt M dopóty, dopóki ona nie będzie równoległą do płaszczyzny poziomej rzutów a prostopadłą do pionowej, kąt β jaki ona tworzy z płaszczyzną pionową. W tem położeniu rzutem prostej szukanej na płaszczyznę pionową rzutów będzie prosta $m'\delta'$ równoległa do osi rzutów, zaś na płaszczyznę poziomą prosta $m\delta$, która tworzy z mm' kąt równy dopełnieniu $\frac{\pi}{2} - \beta$ kąta, jaki ta prosta nieznana winna utworzyć z płaszczyzną pionową rzutów. Podobnież znajdźmy, obracając prostę nieznaną naokoło osi pionowej przechodzącej przez punkt M w ten sposób, żeby ona znalazła się w płaszczyźnie obrazu tego punktu, kąt α, który ona tworzy z płaszczyzną poziomą rzutów. W tem położeniu rzutami prostej będą : na płaszczyźnie poziomej rzutów, prosta md przechodząca przez punkt m i równoległa do linii ziemnej, zaś na płaszczyźnie pionowej rzutów, prosta $m'd'$ nachylona do mm' pod kątem równym dopełnieniu $\frac{\pi}{2} - \alpha$ drugiego kąta danego.

Punkt dowolnie obrany na prostej nieznanej w przestrzeni, został więc zastąpiony przez dwa

punkta; obierzmy dlań na prostej dd' położenie jakiekolwiek a_1, a'_1, w skutek tego przyjmie on na drugiej prostej dwa położenia odpowiadające rzutom poziomym a_2, a_3, które otrzymamy odcinając $ma_2 = ma_3 = m'a'_1$. Idzie obecnie o znalezienie położenia punktu zastąpionego przez dwa, skoro proste $(\delta, \delta'), (d, d')$ zejdą się napowrót w jednę, a to pierwsza obracając się naokoło osi prostopadłej do płaszczyzny pionowej przechodzącej przez punkt m, m', zaś druga naokoło osi pionowej przechodzącej przez tenże punkt. Podczas tego ruchu każdy z punktów powstałych z rozdzielenia na dwa opisze łuk koła, który dla punktu a_1, a'_1 leżącego na prostej (d, d'), będzie miał za rzut pionowy liniję prostą $a'_1b'_1$ równoległą do linii ziemnej poprowadzoną przez punkt a'_1, a za rzut poziomy łuk koła, którego środkiem jest punkt m a promieniem długość ma_1. Dla punktu leżącego na prostej $(\delta_1\delta')$, którego rzuty przed dokonaniem obrotu były a_2, a_3, znajdziemy po obrocie dwa okręgi kół równoległe do linii ziemnej i przechodzące odpowiednio przez każdy z tych punktów; punkta przecięcia się okręgów kół t. j. punkta, o których mowa, c, d, e, f w rzucie poziomym, pozwolą oznaczyć rzuty tegoż nazwiska czterech punktów dających szukane rozwiązanie, zaś rzuty pionowe tych punktów, w skutek symetryi, znajdą się biorąc je po dwa w punktach przecięcia się prostopadłych cf, eg do linii ziemnej z rzutem pionowym $a'_1b'_1$ łuku koła służącego do oznaczenia punktów szukanych. Na mocy powyższego wykreślenia i zważywszy, że punkt m leży na prostych łączących punkta c z e i g z f i kreśląc te proste i proste wychodzące z punktu m' do punktów np. g' lub f' jako też otrzymamy dwa rzuty czterech prostych odpowiadających zadaniu, t. j. $(m'd', md)$, $(me, m'e')$, $(mc, m'c')$, $(mf, m'f')$.

Rozbiór. — Żeby zadanie którem się zajmujemy, przedstawiało cztery rozwiązania, potrzebnem i wystarczającem jest, żeby okręgi kół się przecinały, lub też, żeby mp było mniejsze od promienia ma_1; ponieważ jednak mamy:

$$mp = ma_2 \text{ wst } \beta \quad \text{a} \quad ma_1 = \mu a'_1 = m'a'_1 \text{ dos } \alpha,$$

warunek podany powyżej da się wyrazić przez następującą nierówność:

$$ma_2 \text{ wst } \beta < m'a'_1 \text{ dos } \alpha;$$

a ponieważ z wykreślenia

$$ma_2 = m'a'_1$$

zatem warunek poprzedni sprowadza się do

$$\text{wst } \beta < \text{dos } \alpha,$$

lub

$$\text{wst } \beta < \text{wst } \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right),$$

albo jeszcze do

$$\beta < \frac{\pi}{2} - \alpha,$$

którą to nierówność możemy napisać także:

$$\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}.$$

Gdyby $\alpha + \beta$ było równe $\frac{\pi}{2}$, t.j. $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, okręgi kół brane po dwa byłyby styczne do siebie i zadanie przedstawiłoby tylko dwa rozwiązania, których wynikiem byłyby dwie proste profilu.

Gdyby wreszcie $\alpha + \beta > \frac{\pi}{2}$ dwa okręgi kół nie przecinałyby się i zadanie stałoby się niemożliwem do rozwiązania.

Streszczając więc: 1° Jeżeli summa kątów danych jest mniejsza od $\frac{\pi}{2}$, zadanie przedstawia cztery rozwiązania, które brane po dwa są symetryczne względem płaszczyzny obrazu i względem płaszczyzny profilu punktu danego; 2° Jeżeli kąty dane są dopełniającemi, zadanie jest rozwiązanem przez dwie proste profilu; i 3° Zadanie jest niepodobnem do rozwiązania jeżeli summa kątów danych jest większą od $\frac{\pi}{2}$.

187. **Zadanie V.** — *Znaleźć kąt między dwiema płaszczyznami.* — Zadanie to, za pomocą każdej z dwóch następujących metod, sprowadza się do oznaczenia kąta między dwiema prostemi.

1° Metoda pośrednia. — Z jakiegokolwiek punktu w przestrzeni nakreślmy dwie proste prostopadłe do płaszczyzn danych, a punkt tak obrany musi się znaleźć w jednym z czterech kątów dwuściennych, utworzonych przez dwie płaszczyzny dane.

Wiemy, że kąt zawarty między prostopadłemi jest spełnieniem tego z kątów dwuściennych, w którym się znajduje punkt dowolnie obrany, nadto wiemy, że kąty utworzone przez dwie płaszczyzny są także spełniającemi brane po dwa, ztąd więc wywnioskować możemy, że kąt ostry utworzony przez dwie płaszczyzny ma tęż samą miarę, co kąt zawarty między prostemi prostopadłemi do tych płaszczyzn.

2° Metoda bezpośrednia. — Nakreślmy przez jakikolwiek punkt prostej wspólnego przecięcia dwóch płaszczyzn danych, płaszczyznę prostopadłą do tej prostej, to płaszczyzna ta pomocnicza przecinając się z płaszczyznami danemi, da nam dwie proste, przez które utworzony kąt płaski będzie miarą kąta dwuściennego szukanego. Pomimo korzyści, które przedstawia metoda pośrednia, gdyż ona prowadzi do znanego już wykreślenia, metoda bezpośrednia ma pierwszeństwo w zastosowaniu, nietylko dla tego, że ona jest bezpośrednią, lecz nadto i nadewszystko dla tego, że ona prowadzi do rozwiązania pewnych zagadnień, które nie dałyby się rozwiązać z łatwością z pomocą metody pośredniej. I tak np., dla znalezienia płaszczyzny dzielącej na dwie równe części kąt dwuścienny utworzony przez dwie płaszczyzny dane, należy, jak to wkrótce zobaczymy, nakreślić wprost kąt przez nie utworzony. Wykreślenie służące do rozwiązania tego zadania za pomocą metody pośredniej nie przedstawia nic nowego, czytelnik wykona go bez żadnej trudności, tymczasem metoda bezpośrednia prowadzi najprzód do znalezienia linij wspólnego przecięcia się płaszczyzn danych z płaszczyzną pomocniczą prostopadłą do prostej ich wspólnego przecięcia, następnie do oznaczenia kąta zawartego pomiędzy temi linijami. Chociaż tak jedno jak drugie wykreślenie są jednakowo znane czytelnikowi, należy pomimo to powtórzyć je, odrzucając tak w jednem jak w drugiem linije niepotrzebne do uformowania całości, a zostawiając z nich te w pierwszem, które mogą ułatwić rozwiązanie drugiego.

Po tem krótkiem rozbiorze zadania, zajmijmy się jego wykreśleniem. Mając dane ślady płaszczyzn $P_\alpha P'$ i $Q_\beta Q'$ (*fig.* 176, tab. XI), których nachylenia szukamy, nakreślmy najprzód rzut poziomy *vh* ich wspólnego przecięcia, następnie wyobraźmy sobie, że przez jeden z punktów tego wspólnego przecięcia prowadzimy doń płaszczyznę prostopadłą; ślad poziomy tej płaszczyzny przedstawi prosta *ab* prostopadła do *vh*, poprowadzona przez jakikolwiek punkt *p* tej prostej, a kąt szukany będzie w wierzchołku trójkąta, którego podstawą jest *ab* a zaś wierzchołek S leży na przecięciu się płaszczyzny trójkąta z krawędzią szukanego kąta dwuściennego. Dla zupełnego wykreślenia trójkąta, uważmy prostę w przestrzeni *Sp*, należącą jednocześnie do płaszczyzny trójkąta i do płaszczyzny pionowej rzucającej krawędź szukaną; prosta ta jest prostopadłą do podstawy *ab* i do krawędzi

kąta dwuściennego, albowiem płaszczyzny które ją wyznaczają, są odpowiednio prostopadłe do krawędzi kąta dwuściennego i do podstawy *ab*. Z tego rozumowania wyprowadzić możemy następujące wnioski: że linija S*p* jest wysokością trójkąta szukanego, że punkt *p* jest jej spodkiem, i że ta wysokość jest także prostopadłą do krawędzi szukanego kąta dwuściennego. Znając obecnie podstawę trójkąta *ab* i spodek jego wysokości *p*, dosyć jest dla wyznaczenia go w zupełności, znaleźć rzeczywistą wielkość tej wysokości; w tym celu obierzmy prostę x_1y_1 za nową liniję ziemną, weźmy za nową płaszczyznę pionową rzutów płaszczyznę rzucającą poziomo krawędź kąta dwuściennego i odnieśmy tę krawędź do tej nowej płaszczyzny. Jednym z punktów rzutu szukanego będzie *h*, drugi zaś punkt otrzymamy przenosząc długość vv' do vv_1' na prostopadłę do linii ziemnej x_1y_1 za pomocą okręgu koła, a z połączenia tych dwu punktów prostą hv_1' otrzymamy właśnie rzut szukany. Wysokością trójkąta jest więc prosta, która, jak widzimy, przechodzi przez punkt *p*, jest prostopadłą do krawędzi kąta dwuściennego i leży na nowej płaszczyznie pionowej rzutów, a zatem, rzut tej prostej na nowej płaszczyznie przedstawi się w rzeczywistej wielkości na prostopadłej pS_1 do prostej hv'_1 przechodzącej przez punkt *p*.

Teraz zróbmy kład trójkąta S*ab* w przestrzeni naokoło jego podstawy *ab*. Wysokość jego po dokonaniu ruchu padnie na prostopadłę *pv* do osi obrotu *ab* zaś kład S_2 jego wierzchołka otrzyma się przenosząc pS_1 za pomocą łuku koła na pS_2; ponieważ w czasie ruchu podstawa *ab* jest nieruchomą, zatem kład trójkąta otrzyma się kreśląc proste aS_2, bS_2, kąt zaś aS_2b zawarty pomiędzy temi dwiema ostatniemi prostemi ma tęż samą miarę co kąt zawarty między płaszczyznami. Jeżeli obecnie chcemy wyznaczyć płaszczyznę dzielącą na dwie równe części kąt zawarty między płaszczyznami danemi, dosyć będzie nakreślić prostę $S_2\theta$ dzielącą na dwie równe części kąt $\widehat{aS_2b}$ w kładzie, a powracając ją do pierwotnego położenia i zważając, że punkt θ zostaje nieruchomym, otrzymamy płaszczyznę dzielącą kąt na dwie równe części, będzie ona bowiem wyznaczoną przez krawędź kąta dwuściennego leżącą na tej płaszczyznie i przez punkt θ leżący na płaszczyznie poziomej rzutów, zatem ślad jej poziomy R przedstawi prosta $h\theta$ a ślad pionowy R' otrzymamy, łącząc punkt v' z punktem γ przecięcia się śladu poziomego z osią rzutów.

188. Zadanie VI. — *Znaleźć kąty między płaszczyzną* $P\gamma P'$ *a płaszczyznami rzutów* (*fig.* 177, tab. XI). — Zadanie to jest tylko szczególnym przypadkiem poprzedzającego. I tak, szukając kąta płaszczyzny danej z płaszczyzną poziomą rzutów, przetnijmy, stosując się do wykreślenia podanego w metodzie bezpośredniej, obie płaszczyzny dane płaszczyzną pomocniczą $Qv Q'$ prostopadłą do ich wspólnego przecięcia γP, to ta płaszczyzna pomocnicza wyznaczy na płaszczyznie poziomej rzutów prostę vh, na płaszczyznie zaś $P\gamma P'$ prostę w przestrzeni, której ślady znajdują się w punktach *h* i *v'*, wreszcie na płaszczyznie pionowej rzutów prostę wspólnego przecięcia vv', tworzącą z dwiema poprzedzającemi trójkąt prostokątny w punkcie *v*, którego kąt przeciwny bokowi vv' ma tęż samą wielkość co szukany kąt dwuścienny. Żeby znaleźć w rzeczywistej wielkości trójkąt powyżej opisany, zróbmy kład płaszczyzny $Qv Q'$ naokoło prostej vv', podczas tego ruchu oś obrotu vv' zostanie niezmienną, zaś punkt *h* opisze ze środka *v* na płaszczyznie poziomej rzutów łuk koła, aż do spotkania się z linią ziemną w punkcie h_1; poczem kreśląc prostę $v'h_1$, otrzymamy trójkąt $vv'h_1$, w którym kąt α ma tęż samą wielkość, co kąt utworzony przez płaszczyznę $P\gamma P'$ z płaszczyzną poziomą rzutów. W podobny zupełnie sposób oznaczonym został na figurze kąt β, t. j. kąt nachylenia płaszczyzny danej do płaszczyzny pionowej rzutów.

189. Zadanie VII. — *Przez punkt jakikolwiek nakreślić płaszczyznę, któraby z płaszczyznami rzutów*

tworzyła kąty dane. — Rozwiązanie bezpośrednie tego zagadnienia podamy dopiero po wyczerpaniu wiadomości o płaszczyznach stycznych, tymczasem jednakże podamy rozwiązanie pośrednie, kreśląc przedewszystkiem prostopadłę do płaszczyzny nieznanej a przechodzącej przez punkt dany. Okażmy dla wyznaczenia tej linii, że kąty utworzone przez płaszczyznę i przez jedną z jej normalnych z jedną z płaszczyzn rzutów są dopełniającemi.

I tak, niech będą (*fig.* 178, tab. XI) P, AB, H, płaszczyzna, jedna z jej normalnych i jedna z płaszczyzn rzutów, oznaczmy rzut punktu A w punkcie np. a, to płaszczyzna przesunięta przez proste Aa, AB będąc jednocześnie prostopadłą i do płaszczyzny P i do płaszczyzny H będzie prostopadłą i do ich wspólnego przecięcia EF, zkąd wypada, że przecięcia się jej BC i AC z płaszczyznami P i H tworzą pomiędzy sobą kąt dopełniający jeden z kątów danych.

Zasadzając się na zadaniu podanem (§ 187), możemy wykreślić tę prostę, a następnie, dla dopełnienia wykreślenia, przesunąć przez punkt dany płaszczyzny prostopadłe do linii pomocniczej.

zatrzymując się nad tą konstrukcyą, która przedstawi czytelnikowi doskonałe ćwiczenie, zajmiemy się rozbiorem zadania.

Rozbiór. — Niech α i β będą kątami danemi; prosta pomocnicza winna tworzyć z płaszczyznami rzutów kąty $\frac{\pi}{2}-\alpha$, $\frac{\pi}{2}-\beta$, a że każdemu rozwiązaniu z prostą pomocniczą odpowiada rozwiązanie z płaszczyzną szukaną zatem, na zasadzie wniosków rozbioru podanego w końcu paragrafu 186, napotkamy przypadki następujące:

1° Jeżeli $\frac{\pi}{2}-\alpha+\frac{\pi}{2}-\beta<\frac{\pi}{2}$ lub krócej, jeżeli $\alpha+\beta>\frac{\pi}{2}$, zadanie będzie miało cztery rozwiązania, i płaszczyzny zadosyć czyniące zadaniu, będą, brane po dwie, symetryczne względem płaszczyzny obrazu i płaszczyzny profilu punktu danego.

2° Jeżeli $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$, zadanie będzie miało dwa rozwiązania, a płaszczyzny zadosyć czyniące warunkom zadania, będą równoległe do osi rzutów i symetrycznie położone względem płaszczyzny obrazu przechodzącej przez punkt dany.

3° Jeżeli $\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$, zadanie nie ma rozwiązania.

ĆWICZENIA NALEŻĄCE DO ROZDZIAŁU V.

190. Zadanie I. — *Znaleźć najkrótszą odległość rzutów jakiejkolwiek prostej* (*fig.* 179, tab. XI). — Niech d, d' będą rzutami danemi prostej. Chcąc przedewszystkiem oznaczyć kierunek najkrótszej odległości, zauważmy, że prosta najkrótszej odległości tworzy z prostemi d, d' dwa kąty proste, których jeden z boków leży na jednej z płaszczyzn rzutów, bądźto na poziomej, bądźteż na pionowej, czyli że kąty te ukazują się w prawdziwej wielkości na jednej z płaszczyzn rzutów; kierunek zatem najkrótszej odległości szukanej będzie odrazu wyznaczony przez prostę, której rzuty są odpowiednio prostopadłe do prostych danych d, d', a których kreślenie na rysunku zdaje się być zbytecznem. Znając obecnie kierunek najkrótszej odległości łatwo znajdziemy samą prostę, jeżeli poznamy jeden przynajmniej z jej punktów. Punkt o którym mowa, da się wyznaczyć, szukając punktu spotkania

się prostej d' z płaszczyzną przechodzącą przez prostę d i równoległą do najkrótszej odległości; płaszczyznę tę zaś wykreślimy, biorąc dowolnie na prostej d punkt h, h', kreśląc przezeń równoległę do najkrótszej odległości, której rzuty δ, δ' są odpowiednio prostopadłe do d i d', i wyznaczając ślad pionowy v' tej prostej, pozem łącząc punkt v' z punktem α przecięcia się prostej d z osią rzutów xy, otrzymamy ślad pionowy $\alpha v'$ szukanej płaszczyzny pionowej. Punkt $v_1 v'_1$ będzie punktem spotkania tej płaszczyzny pomocniczej z prostą d', a równoległa $v_1 h_1$, $v'_1 h'_1$ do kierunku prostej najkrótszej odległości, przechodząca przez punkt $v_1 v'_1$ i zakończona na prostych danych, wyznaczy rzuty $v_1 h_1$, $v'_1 h'_1$ prostej szukanej.

Rzeczywistą wielkość najkrótszej odległości otrzymamy robiąc kład tej prostej naokoło pionowej $v_1 v'_1$ przechodzącej przez jeden z jej punktów; że zaś podczas tego ruchu punkt h_1, h'_1 przypadnie w punkcie h_2 t. j. w punkcie przecięcia się osi rzutów z łukiem koła zakreślonego z punktu v_1 jako środka promieniem $v_1 h_1$, zaś punkt v'_1 zostanie na swojem miejscu, a zatem prostą w rzeczywistej wielkości po zrobieniu kładu będzie prosta $v'_1 h_2$.

191. Zadanie. II. — *Znaleźć wielkość boku sześcianu znając:*

1° *Rzuty d, d' (fig. 180, tab. XI) prostej utworzonej przez przedłużenie jednego z jego boków;*

2° *Rzut poziomy δ przedłużenia drugiego boku lecz nie leżącego na tej samej płaszczyznie co pierwszy;*

3° *Dwa rzuty a, a' punktu leżącego na prostej Δ.* — Zauważmy przedewszystkiem, że ilości dane w zadaniu są dostateczne do wyznaczenia prostej Δ, gdyż prosta ta mając kierunek prostopadły do D, znajdzie się na przecięciu płaszczyzny pionowej przechodzącej przez δ z płaszczyzną przechodzącą przez punkt a, a', i prostopadłą do D.

Jakkolwiek wykreślenie rzutu pionowego drugiej krawędzi przedłużonej sześcianu, nie przedstawia żadnej trudności, możemy jednakże, nie powtarzając go, wykonać odrazu wykreślenie odnoszące się do znalezienia szukanego boku t. j. znaleźć rzut pionowy drugiej krawędzi. I tak, zważając, że jeden z boków sześcianu jest zarazem prostopadły do każdej z prostych D, Δ, zadanie sprowadza się do znalezienia najkrótszej odległości pomiędzy temi dwiema prostemi, a ta może być otrzymaną w sposób łatwiejszy od podanego w przypadku ogólnym, gdyż proste D, Δ są wzajemnie prostopadłe co do kierunku, najkrótsza ich odległość będzie przedstawioną przez prostę wspólnego przecięcia dwu płaszczyzn, z których każda przechodzi odpowiednio przez jedną prostę i jest prostopadłą do drugiej.

Wiedząc to i dla uproszczenia wykreślenia, wyznaczmy odrazu i obie płaszczyzny prostopadłe przechodzące przez proste dane i prostę ich wspólnego przecięcia. W tym celu, przecinając te płaszczyzny prostopadłe trzecią płaszczyzną pomocniczą przechodzącą przez punkt a, a' i równoległą do płaszczyzny poziomej rzutów, znajdziemy przedewszystkiem dwie proste poziome płaszczyzn prostopadłych, które przechodząc przez punkta (a, a'), (b, b'); będą miały swe rzuty pionowe $h'h'_1$ zchodzące się z sobą, zaś poziome h, h_1 przechodzące przez punkta a i b będą odpowiednio prostopadłe do prostych d, δ; otrzymany ztąd punkt przecięcia się i, i' tych dwu prostych poziomych jest właśnie jednym z punktów prostej wspólnego przecięcia się dwu płaszczyzn prostopadłych, drugi zaś punkt i_1, i'_1 wyznaczy się za pomocą płaszczyzny pomocniczej, która będzie płaszczyzną obrazu punktu a, a'. Rzuty poziome prostych wspólnego przecięcia się płaszczyzny obrazu z płaszczyznami prostopadłemi, zejdą się z sobą na prostej ff_1, a rzuty pionowe będą linijami prostemi, z których jednę f', otrzymany prowadząc od punktu a' prostopadłę na prostę d', zaś drugę f'_1, otrzymamy łącząc punkta spotkania (m, m'), (μ, μ') płaszczyzny obrazu z prostemi (d, d'), (h_1, h'_1),

które wyznaczają jedną z płaszczyzn prostopadłych. Wreszcie kreśląc proste $(i', i'_1), (i, i_1)$ i ograniczając je w punktach ich przecięcia się (p, p'), (q, q') z rzutami prostych danych otrzymamy przeciecię się dwu płaszczyzn, t. j. najkrótszą odległość.

Rrzeczywista wielkość najkrótszej odległości pq, $p'q'$ znajdzie się bez trudności za pomocą jednej z powyżej podanych metod (§ 175). Ostatecznie więc, rzut pionowy δ drugiej krawędzi sześcianu otrzyma się, łącząc punkta q', a' liniją prostą, a jako sprawdzenie dokładności rysunku, prosta ta winna być prostopadłą do rzutu pionowego $m'v'$ prostej obrazu leżącej na płaszczyznie prostopadłej do $\delta_1\delta'$.

192. Zadanie III. — *Nakreślić w odległości równej l, płaszczyznę równoległą do płaszczyzny danej* P αP (*fig.* 181, tab. XI). — Na płaszczyznie pionowej rzutów, której oś rzutów x_1y_1 jest prostopadłą do αP, uczyńmy widoczną odległość l. Ślad pionowy płaszczyzny danej otrzymamy, dokonywając zmiany płaszczyzn rzutów i robiąc wykreślenie sposobem zwyczajnie używanym (§ 107), t. j. oznaczając punkt spotkania się v' dwu płaszczyzn pionowych rzutów z płaszczyzną PαP', następnie odnosząc tak znaleziony punkt do nowego układu płaszczyzn rzutów t. j. do punktu v_1'. Łącząc punkt v'_1 z punktem α_1 przecięcia się prostych x_1y_1 i αP, liniją prostą, otrzymamy nowy ślad pionowy płaszczyzny danej. Ponieważ w nowym układzie płaszczyzn spółrzędnych, płaszczyzna PαP'$_1$ i płaszczyzna szukana jako równoległe do siebie są prostopadłe do płaszczyzny pionowej rzutów, zatem odległość ich śladów pionowych jest takaż sama co samych płaszczyzn, zkąd wypada, że kreśląc $Q'_1\beta_1$ równolegle do $\alpha_1P'_1$, w odległości równej l od tej ostatniej prostej, otrzymamy ślad Q'_1 płaszczyzny szukanej na płaszczyznie pionowej rzutów. Wreszcie ponieważ ślad poziomy Q płaszczyzny szukanej będzie równoległy do α_1P i przejdzie przez punkt przecięcia się β_1 prostych x_1y_1 i Q'_1, kreśląc więc przez punkt β przecięcia się prostych Q i xy, równoległę Q' do prostej P'_1, otrzymamy właśnie drugi ślad płaszczyzny szukanej.

193. Zadanie IV. — *Wyznaczyć odległość dwu prostych równoległych* (do rozwiązania).

194. Zadanie V. — *Znając ślady płaszczyzny* PαP' *i rzut pionowy m' punktu danego, oznaczyć rzut jego poziomy w ten sposób, ażeby odległość jego od płaszczyzny* PαP' *była równą prostej danej l* (*fig.* 182, tab. XII). — W celu uwidocznienia długości danej l przyjmując prostopadłę do αP' za oś rzutów x_1y_1 zmieńmy płaszczyznę poziomą rzutów; ztąd sposobem znanym otrzymamy nowy ślad poziomy P_1, zaś w punkcie przecięcia się prostej równoległej do P_1 nakreślonej w odległości l, z liniją rzutów przechodzącą przez punkt m' i prostopadłą do x_1y_1, znajdziemy nowy rzut poziomy m_1 punktu szukanego. Odcinając obecnie na linii rzutów prostopadłej do xy długość $m'm_1$ równą μm, otrzymamy ostatecznie szukany rzut poziomy m punktu.

195. Twierdzenie I. — *Jeżeli prosta dana tworzy z płaszczyznami rzutów kąty równe, dwa jej rzuty tworzą także kąty równe z osią rzutów i odwrotnie.* — Przez punkt A dowolnie obrany na osi rzutów (*fig.* 183, tab. XII) nakreśliwszy prostę AB równoległą do prostej danej, przyjmijmy, że prosta ta z płaszczyznami rzutów tworzy kąty równe. Zróbmy rzut na płaszczyzny rzutów V, H jednego z punktów tej prostej np. punktu B i rzut samej prostej; niech będą b, b' rzutami punktu, zaś Ab, A'b' rzutami prostej. Ponieważ trójkąty prostokątne BAb', BAb, mające po kącie ostrym równym, a których przeciwprostokątnia jest wspólną są sobie równe, zatem wzniesienie Bb punktu B musi być równe jego oddaleniu Bb', lub innemi słowy, tak punkt B jako i punkt A muszą leżeć na płaszczyznie dzielącej na dwie równe części kąt dwuścienny utworzony przez płaszczyzny rzutów, a więc, dwa

rzuty prostej AB i prostych do niej równoległych, muszą tworzyć z osią rzutów kąty równe (§ 34). Twierdzenie odwrotne może być dowiedzione w sposób zupełnie podobny.

196. Zadanie VI. — *Zrobić wszelkie możliwe wykreślenia linii prostej jednakowo nachylonej do płaszczyzn rzutów* (*fig.* 184, tab. XII).

Według twierdzenia poprzedzającego, prosta dana winna być równoległą do płaszczyzny dzielącej na dwie równe części kąt zawarty między płaszczyznami rzutów, może więc ona zajmować jedno z następujących położeń :

1° a_1b_1, $a'_1b'_1$ prosta leżąca na płaszczyznie dzielącej na dwie równe części kąty dwuścienne 2 i 4.

2° a_2b_2, $a'_2b'_2$ prosta równoległa do płaszczyzny dzielącej na dwie równe części kąty dwuścienne 2 i 4.

3° a_3b_3, $a'_3b'_3$ prosta leżąca na płaszczyznie dwójsiecznej kątów dwuściennych 1 i 3.

4° a_4b_4, $a'_4b'_4$ prosta równoległa do płaszczyzny dwójsiecznej kątów dwuściennych 1 i 3.

5° a_5b_5, $a'_5b'_5$ prosta profilu leżąca na płaszczyznie dzielącej na dwie równe części kąty dwuścienne 1 i 3.

6° a_6b_6, $a'_6b'_6$ prosta równoległa do poprzedzającej.

7° a_7b_7, $a'_7b'_7$ prosta profilu leżąca na płaszczyznie dzielącej na dwie równe części kąty dwuścienne 2 i 4

8° a_8b_8, $a'_8b'_8$ prosta równoległa do poprzedzającej.

9° a_9b_9, $a'_9b'_9$
10° $a_{10}b_{10}$, $a'_{10}b'_{10}$ } proste równoległe do osi rzutów.

11° $a_{11}b_{11}$, $a'_{11}b'_{11}$ prosta leżąca na osi rzutów.

197. Twierdzenie II. — *Jeżeli płaszczyzna dana tworzy z płaszczyznami rzutów kąty równe, jej ślady tworzą także kąty równe z osią rzutów i odwrotnie.* — Ponieważ jakakolwiek prosta prostopadła do płaszczyzny danej winna tworzyć z płaszczyznami rzutów kąty równe, rzuty więc tej prostej według twierdzenia I (§ 195), winny także tworzyć kąty równe z osią rzutów i odwrotnie.

198. Zadanie VII. — *Zrobić wszelkie możliwe wykreślenia płaszczyzny jednakowo nachylonej płaszczyzn rzutów*

Znajdziemy siedm następujących położeń :

1° P_1, P'_1 płaszczyzna prostopadła do płaszczyzny dzielącej na dwie równe części kąty dwuścienne 2 i 4.

2° P_2, P'_2 płaszczyzna prostopadła do płaszczyzny dzielącej na dwie równe części kąty dwuścienne 1 i 3.

3° (P_3, P'_3), (a, a') płaszczyzna dzieląca na dwie równe części kąty dwuścienne 2 i 4 i wyznaczona przez oś rzutów i przez punkt a', a.

4° (P_4, P'_4), (a, a') płaszczyzna dzieląca na dwie równe części kąty dwuścienne 1 i 3 i wyznaczona przez oś rzutów i przez punkt a, a', którego wzniesienie jest równe oddaleniu.

5° P_5, P'_5 płaszczyzna równoległa do płaszczyzny dzielącej na dwie równe części kąty dwuścienne 1 i 3.

6° P_6, P'_6 płaszczyzna równoległa do płaszczyzny dzielącej na dwie równe części kąty dwuścienne 2 i .

7° P_7, P'_7 płaszczyzna profilu.

199. Zadanie VIII. — *Przez punkt dany a, a' nakreślić prostę tworzącą z płaszczyznami rzutów jeden i ten sam kąt dany* α (*fig.* 186, tab. XII). — Uważmy przedewszystkiem, że cztery proste zadosyć

czyniąc zadaniu, według wyników podanych w § 186, winny, brane po dwie, być równoległe do płaszczyzn dzielących na dwie równe części kąty dwuścienne utworzone przez płaszczyzny rzutów; następnie, że zmieniając położenie osi rzutów równolegle do niej samej, jedna z płaszczyzn dzielących na dwie równe części kąty dwuścienne utworzone przez płaszczyzny rzutów pozostanie niezmienną, gdy tymczasem druga przyjmie położenie równoległe do pierwotnego; a zatem, jeżeli przyjmiemy za nową oś rzutów x_1y_1 prostę równoległą do xy, a przechodzącą przez punkt a_1 środek odległości punktów a, a', punkt a, a' znajdzie się na płaszczyznie dzielącej na dwie równe części kąt dwuścienny płaszczyzn rzutów w tem nowem położeniu, zkąd wypływa, że dwa z rozwiązań naszego zadania znajdą się na płaszczyznie dzielącej na dwie równe części kąty dwuścienne 1 i 3 nowego układu płaszczyzn rzutów.

Dla znalezienia tych dwu prostych, sprowadźmy je najprzód, przez obrót naokoło pionowej przechodzącej przez punkt a, a', na płaszczyznę obrazu tego punktu. W tem położeniu rzuty ich pionowe będą wyznaczone przez prostę $a'\theta'_1$ przechodzącą przez punkt a' i nachyloną do osi rzutów x_1y_1 pod kątem danym α, a rzuty poziome przez prostę $a\theta_1$ równoległą do osi rzutów i przechodzącą przez punkt a.

Sprowadźmy następnie prostę $a\theta_1, a'\theta'_1$ do położenia prawdziwego obracając ją naokoło prostej pionowej przechodzącej przez punkt a, a'; podczas tego ruchu ślad poziomy θ_1 opisze na płaszczyznie poziomej rzutów łuk koła, którego środkiem jest punkt a a promieniem $a\theta_1$, a ponieważ proste szukane leżą na nowej płaszczyznie dzielącej na dwie równe części kąty dwuścienne 1 i 3, więc punkt ten padnie na oś rzutów x_1y_1 albo w punkcie $t_1t'_1$ albo też w punkcie $t_2t'_2$; kreśląc zatem rzuty prostych wychodzących z punktu a, a' i przechodzących przez znalezione ślady, otrzymamy dwa pierwsze rozwiązania t. j. proste $(at_1, a't'_1)$, $(at_2, a't'_2)$ w nowym układzie płaszczyzn rzutów, które przy przejściu do pierwotnego układu nie zmienią się. Dwie drugie proste szukane wyznaczą się pamiętając, że cztery rozwiązania są symetryczne względem płaszczyzny obrazu punktu a, a' (§ 186), a mianowicie znajdziemy proste, których rzutami będą $(at_1, a't'_2)$, $(at_2, a't'_1)$.

Rozbiór. — Dla otrzymania czterech rozwiązań naszego zadania wystarcza, żeby oś rzutów x_1y_1 przecinała okrąg koła opisany przez punkt θ_1, to jest, żeby odległość aa_1 była mniejszą od promienia $a\theta_1$ tego koła; ponieważ zaś

$$aa_1 = a_1a', \quad \text{zaś} \quad a\theta_1 = a_1\theta'_1,$$

warunek więc powyższy sprowadza się do następującego

$$a'a_1 < a_1\theta'_1,$$

lub też do

$$\alpha < \frac{\pi}{4}.$$

Jeżeli $\alpha = \frac{\pi}{4}$, prosta i koło będą stycznemi i zadanie będzie miało tylko dwa rozwiązania przedstawione przez proste profilu.

Jeżeli nareszcie $\alpha > \frac{\pi}{4}$, zadanie nie da się rozwiązać.

200. Zadanie IX. — *Przez punkt dany a, a' wykreślić bezpośrednio płaszczyznę, któraby z płaszczyznami rzutów tworzyła kąty równe kątowi α.*

Pierwsze rozwiązanie. (*fig* 187, tab. XII). — Zmieniając obie płaszczyzny rzutów, przenieśmy oś rzutów równolegle do jej pierwotnego położenia tak, żeby przechodziła przez punkt a, a'; i przy-

puśćmy, że x_1y_1 przedstawia oś rzutów w tem nowem położeniu, któremu odpowiada płaszczyzna pionowa obejmująca punkt dany a, a'. Sprowadźmy obecnie na płaszczyznę obrazu liniję największego spadku płaszczyzny szukanej, przechodzącą przez punkt a, a' i uważaną względnie do płaszczyzny poziomej rzutów, obracając ją naokoło prostej pionowej przechodzącej przez punkt a, a'.

W tem nowem położeniu linija największego spadku będzie miała za rzut poziomy oś rzutów x_1y_1, a za rzut pionowy prostę $a't_1$ tworzącą z nową osią rzutów kąt dany α. Powracając ją teraz do jej rzeczywistego położenia, ślad t_1 opisze na płaszczyznie poziomej rzutów okrąg koła, którego środkiem jest punkt a, zaś promieniem prosta t_1a, a który musi być stycznym do śladu poziomego płaszczyzny szukanej; w skutek symetryi, ślad pionowy tej płaszczyzny będzie także stycznym do tegoż okręgu koła, a ponieważ musi on przechodzić przez punkt a', zatem kreśląc z tego punktu styczne P'_1 i R'_1 do okręgu koła rzeczonego, otrzymamy w punktach β i γ przecięcia się tych stycznych z osią rzutów x_1y_1, punkta należące do śladów poziomych szukanych. Jeżeli więc teraz z punktów β i γ nakreślimy jeszcze dwie styczne do okręgu koła, otrzymamy ślady poziome P_1, R_1, które z poprzedniemi t. j. S_1, czyli R'_1 i Q_1 czyli P'_1 będą należeć do płaszczyzn czyniących zadość zadaniu, to jest do płaszczyzn $P_1\beta P'_1$, $Q_1\beta P'_1$, $R_1\gamma R'_1$, $S_1\gamma R'_1$.

Wróćmy obecnie do pierwotnego układu płaszczyzn rzutów pamiętając, że przenosząc oś rzutów równolegle do jej pierwotnego położenia, rzuty punktów i prostych pozostają też same, zaś ślady płaszczyzn przenoszą się także równolegle do ich pierwotnego położenia; wskutek tego, ślad P'_1 zachowa swe rzuty, któremi są P'_1 na płaszczyznie pionowej, zaś oś rzutów x_1y_1 na płaszczyznie poziomej rzutów, poczem wyznaczywszy ślad poziomy t tej prostej, otrzymamy jeden z punktów szukanego śladu poziomego i ślady (P, P'), (Q, Q') dwu pierwszych rozwiązań; nareszcie wykreślenie zupełnie takie samo jak powyżej, wyznaczy najprzód punkt θ, θ' a następnie ślady (R, R') i (S, S') dwu ostatnich płaszczyzn odpowiadających zadaniu.

201. Drugie rozwiązanie (*fig.* 188, tab. XII).—Ponieważ wszelka płaszczyzna tworząca z płaszczyznami rzutów kąty równe, jest prostopadłą do jednej z płaszczyzn dzielących na dwie równe części kąty dwuścienne utworzone przez też płaszczyzny (§ 198 i 48), kreśląc zatem przez punkt a, a' proste prostopadłe do tych płaszczyzn dwójsiecznych, otrzymamy dwie proste, przez które przechodzą dwie pary płaszczyzn zadosyć czyniących warunkom zadania. Żeby wykreślić te dwie prostopadłe należy pamiętać, że one leżą na płaszczyznie profilu punktu danego a, a', i tworzą z płaszczyznami rzutów kąty równe $\frac{\pi}{4}$ więc, że ich ślady na płaszczyznie poziomej rzutów wyznaczą się, odcinając z jednej i z drugiej strony punktu a, na prostopadłych przechodzących przezeń, długości at, $a\theta$ równe wzniesieniu $a'\omega$ tego punktu.

Widoczną jest rzeczą, że punkta t i θ tak wyznaczone należą do śladów poziomych płaszczyzn szukanych. Żeby więc wykreślić te ślady, uczyńmy cztery linije największego spadku płaszczyzn szukanych względem płaszczyzny poziomej rzutów, równoległemi do płaszczyzny pionowej rzutów, obracając je naokoło prostej pionowej przechodzącej przez punkt a, a'. W tem nowem położeniu znajdujemy dla tych czterech linij jednę prostę, której rzut poziomy jest równoległy do osi rzutów i przechodzi przez punkt a, zaś rzut pionowy przechodzi przez punkt a' i tworzy z osią rzutów xy kąt dany α.

Wykreślmy obecnie ślad poziomy h tak przeniesionej linii największego spadku i zauważmy, że ślady poziome płaszczyzn szukanych winny być styczne do okręgu koła zakreślonego z punktu a promieniem ah, wykreśliwszy więc takowe, nakreślmy doń z punktów t i θ dwie pary stycznych, a otrzymamy ślady szukane P, Q, R, S. Ślady pionowe tych płaszczyzn znajdziemy bardzo łatwo, wiedząc

1° że ślady P′ i R′ płaszczyzn przechodzących przez punkt t, które według powyżej podanej własności są prostopadłe do płaszczyzny dzielącej na dwie równe części kąty dwuścienne 1 i 3, są prostemi symetrycznie położonemi śladom P, R względem osi rzutów (§ 48); 2° że dla płaszczyzn przechodzących przez punkt θ, a prostopadłych do płaszczyzny dzielącej na dwie równe części kąty dwuścienne 2 i 4, ślady te S′ i Q′ winny leżeć na przedłużeniu śladów poziomych S i Q.

202. Zadanie X. — *Wyznaczyć najkrótszą odległość dwóch prostych, których rzuty poziome są równoległe* (*fig.* 189, tab. XII). — Niech (d, d'), (d_1, d'_1) będą rzutami prostych danych. Dla oznaczenia kierunku najkrótszej odległości, uważmy płaszczyznę pionową rzucającą jednę z prostych danych, to ponieważ płaszczyzna ta jest równoległą do obu prostych, zatem prosta najkrótszej odległości musi być do niej prostopadłą, i kierunek najkrótszej odległości będzie przedstawiony przez prostę, której nie kreślimy na rysunku, lecz której rzut poziomy jest prostopadły do d, zaś pionowy równoległy do osi rzutów. Znając więc ten kierunek, wyznaczmy teraz przynajmniej jeden punkt na nim leżący; w tym celu uważmy, że rzuty poziome poziomej ruchomej, która spotyka obie proste dane przechodzić muszą wszystkie przez jeden i ten sam punkt. Jeżeli bowiem proste ruchome leżą na płaszczyznach równoległych, płaszczyzny te i proste na nich leżące dzielą proste dane na części proporcyonalne, nawzajem rzuty poziome prostych ruchomych dzielą także proste równoległe d, d_1 na części proporcyonalne, czyli muszą one zbiegać się w jednym punkcie.

Własności tej można jeszcze dowieść daleko łatwiej pamiętając, że rzuty poziomych ruchomych tworzą na prostych danych d, d_1 dwa podziały jednakowokreślne, których punkt zbiegu leży w nieskończoności, że więc wskutek tego proste łączące punkta odpowiednie, to jest rzuty prostej ruchomej, zbiegają się w jednym punkcie. Punkt ten należy do prostej szukanej, albowiem należy ona do układu prostych poziomych, które opierają się na prostych danych, a więc kreśląc dwa promienie wiązki uważanej, otrzymamy punkt szukany. Nakreślmy przedewszystkiem dwie proste dane (d, d'), (d_1, d'_1) i przetnijmy je płaszczyzną poziomą rzutów, to płaszczyzna ta wyznaczy dwa ślady θ, θ_1, zaś prosta $\theta\theta_1$ łącząca je z sobą wyznaczy jeden z promieni wiązki; drugi promień tej wiązki otrzymamy zważając, że prostopadła do płaszczyzny pionowej przechodzącej przez punkt przecięcia się prostych d', d'_1 należy do układu poziomych, a więc, że rzut jej poziomy ab jest właśnie drugim promieniem szukanym, a punkt s przecięcia się tych dwóch promieni jest rzutem poziomym jednego z punktów należących do prostej najkrótszej odległości. Kreśląc więc z tego punktu prostopadłę do prostych d, d_1, otrzymamy rzut poziomy pp_1 wspólnej prostopadłej, który zarazem jest jej prawdziwą wielkością, a linije rzutów wystawione z punktów p, p_1 wyznaczą rzuty pionowe p', p'_1 ostatecznych punktów tej prostej łącząc, zatem punkta p', p'_1 liniją prostą, otrzymamy rzut pionowy prostej szukanej. Dokładność rysunku zależy na tem, że punkta p', p'_1 winny być na prostej równoległej do osi rzutów xy.

203. Zadanie XI.—*Z poprzedzającego rysunku wyprowadzić sposób kreślenia najkrótszej odległości dwu prostych jakichkolwiek* (*fig.* 190, tab. XIII). — Sposobem już znanym (§ 159) uczyńmy rzuty pionowe prostych D i Δ równoległemi; prosta δ_1, δ'_1 równoległa do prostej δ, δ' a przechodząca przez punkt tej ostatniej, którego rzutem pionowym jest punkt a' przecięcia się prostych d', δ', wyznacza z prostą d, d' płaszczyznę prostopadłą do nowej płaszczyzny pionowej rzutów, której ślad pionowy $t\theta$ jest prostopadły do nowej osi rzutów x_1y_1, nieznanej dotąd i daje możność nakreślenia tej ostatniej; robiąc więc rzut θ'_1, h'_1 punktów θ, h sposobem znanym, na nową płaszczyznę pionową rzutów, jakoteż rzut a'_1, punktu a, a' na tęż płaszczyznę, i kreśląc prostę $\theta'_1a'_1$ jakoteż do niej równoległę δ'_1 przechodzącą

przez punkt h'_1 otrzymamy proste dane (d, d'_1), (δ, δ'_1) odniesione do nowego układu płaszczyzn rzutów. W ten sposób dochodzimy do rysunku podanego na figurze poprzedzającej i powtórzonego na ostatniej, na której z całą łatwością czytelnik rozpozna przyjęty sposób postępowania. Cała różnica pomiędzy temi dwoma rysunkami polega na tem, że pierwszy promień wiązki, otrzymany na poprzedzającym rysunku za pomocą śladów prostych danych, został zastąpiony na nowym rysunku przez rzut pionowy $h'_1 f'_1$ prostej obrazu, leżącej na płaszczyznie hf i spotykającej proste dane. W ten sposób znaleźlibyśmy rzeczywistą wielkość $p'_1 q'_1$ wspólnej prostopadłej pq, $p'q'$ na pierwotnych płaszczyznach rzutów.

204. Zadanie XII. — *Mając dane rzuty jednej prostej, rzut poziomy drugiej do niej równoległej i odległość pomiędzy niemi, znaleźć rzut pionowy drugiej prostej.* — Niech d, d' będą rzutami pierwszej prostej (*fig.* 191, tab. XIII), δ rzutem pionowym drugiej prostej, zaś l odległością pomiędzy niemi (oś rzutów została zniesioną). Nakreślmy na płaszczyznie prostopadłej do prostej d, d' okrąg koła, przyjmując za jego środek spodek tej prostej a za promień odległość l, i szukajmy punktów, w których płaszczyzna pionowa rzucająca drugą prostę przecina koło, a otrzymamy punkta należące do prostej szukanej; następnie przez te punkta poprowadźmy proste równoległe do prostej danej, znajdziemy dwie proste odpowiadające warunkom zadania.

Zajmijmy się obecnie wykreśleniem rysunku, przyjmując układ pomocniczy płaszczyzn rzutów utworzony 1° przez płaszczyznę poziomą H' przechodzącą przez punkt b, b' dowolnie obrany na prostej d, d', i 2° przez płaszczyznę pionową rzucającą tę prostę. W tym nowym układzie płaszczyzn rzutów oś rzutów $x_1 y_1$ zchodzi się z prostą d, oba rzuty punktu b, b' zchodzą się w punkcie b, zaś rzut punktu a, a' na nową płaszczyznę pionową znajduje się w punkcie a'_1, który otrzymamy odcinając odległość aa'_1 równą wzniesieniu $\alpha\iota'$, wreszcie nowy rzut pionowy prostej d, d' znajduje się na ba'_1, a ślady płaszczyzny przechodzącej przez punkt B i prostopadłej do prostej D_1 znajdują się na $P_1 P'$.

Dla znalezienia teraz przecięcia się koła pomocniczego nakreślonego na płaszczyznie $P_1 P'_1$ z płaszczyzną pionową Q rzucającą prostę Δ, zróbmy kład płaszczyzny $P_1 P'_1$ wraz z kołem na niej leżącem na nową płaszczyznę poziomą rzutów. Kład okręgu koła otrzymamy, kreśląc ze środka b promieniem równym l okrąg koła, a ponieważ co się tyczy płaszczyzny pionowej Q wszystkie jej punkta znajdują się w kładzie na jej śladzie poziomym, otrzymamy więc w punktach przecięcia się tego śladu poziomego Q z okręgiem koła w kładzie, t. j. w punktach E_1, F_1 kłady punktów szukanych, które po zrobieniu kładu mają swe rzuty pionowe w punktach e'_2, f'_2, zaś po podniesieniu z kładu przypadają w punktach (e, e'_1), (f, f'_1), poczem odcinając z jednej i z drugiej strony H' odległości $\varepsilon e'$, φf równe $\varepsilon_1 e'_1$, $\varphi_1 f'_1$ przyjdziemy do pierwotnego układu płaszczyzn rzutów. Wykreśliwszy obecnie przez punkta e', f' proste δ'_1, δ'_2 równoległe do d', otrzymamy ostatecznie proste $\delta, \delta'_1, \delta, \delta'_2$ zadość czyniące warunkom zadania.

205. Zadanie XIII. — *Znaleźć wprost kąt utworzony przez płaszczyznę, której ślady przedstawiają jednę linię prostą, z daną prostą, której rzuty zchodzą się ze śladami płaszczyzny.* — Niech $P\alpha P'$ (*fig.* 192, tab. XIII) będą śladami danemi płaszczyzny, zaś ab, $a'b'$ rzutami prostej.

Uważmy przedewszystkiem, że prosta dana znajduje się na płaszczyznie dzielącej na dwie równe części kąty dwuścienne 2 i 4, że więc płaszczyzna $P\alpha P'$ jest właśnie prostopadłą do płaszczyzny dzielącej na dwie równe części kąty dwuścienne, a wskutek tego prosta dana jest właśnie przecięciem się tych dwu płaszczyzn. Obecnie zatem zadanie nasze sprowadzonem zostało do znalezienia kąta zawartego między dwiema prostemi, z których jedna $ab, a'b'$ jest daną, a dwa punkta drugiej znajdziemy łatwo biorąc najprzód punkt μ a następnie punkt n, n' przecięcia się płaszczyzny dzielącej na dwie równe części kąty dwuścienne z jakąkolwiek prostą poziomą np., h, h' płaszczyzny danej (§ 31).

W szczególnym przypadku, którym się tutaj zajmujemy, proste pomiędzy któremi szukamy kąta przez nie utworzonego, należąc do płaszczyzny dzielącej kąty dwuścienne 2 i 4 na dwie równe części, dadzą rozwiązanie zadania po zrobieniu ich kładu wraz z tą ostatnią płaszczyzną, naokoło osi rzutów wziętej za oś obrotu, na płaszczyznę pionową rzutów.

Dla uproszczenia rysunku wykreślmy kład prostej mn, $m'n'$, to ponieważ punkt m, m' padnie na punkt M_1 na prostej mv i w odległości od punktu v równej przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego i równoramiennego, którego jeden z boków kąta prostego jest mv, a którego kład naokoło tego boku jest przedstawiony na rysunku przez vm_ρ, zatem kład prostej mn, $m'n'$ otrzymamy, kreśląc z punktu M_1 prostę równoległą do osi rzutów, gdyż w punkcie spotkania tej równoległej z prostą łączącą punkt n, n' ze środkiem powinowactwa, znajdziemy kład N_1 punktu n, n'. Nadto, ponieważ punkt α pozostaje nieruchomym, zatem boki kąta szukanego w kładzie wyznaczą się, kreśląc proste $M_1\alpha$, $N_1\alpha$, których β jest właśnie rozwiązaniem zadania.

206. Zadanie XIV. — *Znaleźć wprost kąt zawarty pomiędzy prostą profilu ab, $a'b'$ a płaszczyzną wyznaczoną przez oś rzutów i przez jeden z jej punktów o, o'* (*fig.* 193, tab. XIII). — Stosując do rozwiązania niniejszego zadania zasadę, na której polega rozwiązanie zadania poprzedzającego, oznaczymy przedewszystkiem prostę wspólnego przecięcia się płaszczyzny danej z płaszczyzną profilu, przechodzącą przez prostę ab, $a'b'$, a w ten sposób znajdziemy najprzód punkt α, który jest jednym z punktów szukanych, następnie drugi punkt ω, ω', który jest punktem spotkania się prostej łączącej punkt o, o' z punktem c dowolnie obranym na osi rzutów. Robiąc obecnie kład prostych (ab, $a'b'$), ($\alpha\omega$, $\alpha'\omega'$) na płaszczyznę poziomą rzutów, i obracając je naokoło prostej αb jako osi obrotu, otrzymamy 1° proste A_1B_1, $\alpha\Omega_1$ i 2° kąt β przez nie utworzony, który należało wyznaczyć.

207. Zadanie XV. — *Znaleźć kąt prostej profilu ab, $a'b'$ z płaszczyzną jakąkolwiek* $P\alpha P'$ (*fig.* 194, tab. XIII). — Stosując tu ogólny sposób postępowania, t. j. robiąc kład płaszczyzny przechodzącej przez prostę daną ab, $a'b'$ i przez prostopadłę bc, $b'c'$ do płaszczyzny $P\alpha P'$, a przechodzącą przez punkt b, b', naokoło prostej poziomej am, $a'm'$ uważanej za oś obrotu, znajdziemy dwie proste bA_2, mA_2 tworzące pomiędzy sobą dopełnienie kąta szukanego, a kreśląc przez punkt A_2 prostę prostopadłą do bA_2 otrzymamy kąt β, który jest właśnie kątem prostej z płaszczyzną.

208. Zadanie XVI. — *Wyznaczyć odległość punktu o, o' od prostej profilu ab, $a'b'$* (*fig.* 195. tab. XIII). — Sposób ogólny wykreślenia nie może być użytym w tym szczególnym przypadku, gdyż prosta pozioma i prosta obrazu przechodzące przez punkt o, o' na płaszczyznie prostopadłej do prostej ab, $a'b'$, która także przechodzi przez ten punkt, zchodzą się z sobą. Dla rozwiązania więc tego zadania nakreśliwszy przez punkt o, o' prostę prostopadłą $c\omega$, $a'\omega'$ do płaszczyzny profilu, na której leży prosta dana, zaś ze spodka ω, ω' tej prostopadłej nakreśliwszy prostopadłę do prostej ab, $a'b'$, której spodek w kładzie jest na punkcie p_1 a podniesiony z kładu znajduje się w p, p', prosta łącząca punkta o, o' z p, p', na zasadzie twierdzenia trzech prostopadłych, jest właśnie prostą szukaną. Rzeczywistą wielkość tej prostej da się otrzymać, obracając ją naokoło prostej prostopadłej do płaszczyzny pionowej rzutów przechodzącej przez punkt o, o' dopóty, dopóki ona nie przyjmie położenia równoległego op do płaszczyzny poziomej rzutów, lub kreśląc w rzeczywistej wielkości trójkąt prostokątny w przestrzeni $o\omega p$, $o'\omega'p'$, a to odcinając długość o_1p_1 równą $o\omega$ i kreśląc następnie prostę $o_1\Omega_2$, która przedstawi rzeczywistą wielkość szukaną.

209. Zadanie XVII. — *Znaleźć, za pomocą metody kładów, odległość punktu o, o' od prostej d, d'* (*fig.* 196, tab. XIII). — Przez punkt o, o' nakreślmy prostę poziomą ao, $a'o'$ płaszczyzny przechodzącej

przez prostę ab, $a'b'$ i przez punkt o, o', a następnie zróbmy kład tej płaszczyzny w B_2 naokoło poziomej przechodzącej przez punkt b, b'; podczas tego ruchu punkta a, a' i o, o' nie zmienią swego położenia, aB jest kładem prostej danej, zaś kreśląc przez punkt o prostę op_1, znajdziemy prostopadłę szukaną do prostej aB_2, w prawdziwej wielkości, podniosłszy wreszcie z kładu punkt p_1 ten przypadnie w punkcie p, p', a kreśląc proste op, $o'p'$, otrzymamy rzuty szukanej odległości.

210. **Zadanie XVIII.** — *Nakreślić ślady płaszczyzny przechodzącej przez prostę obrazu w odległości znanej od punktu danego* (do rozwiązania).

211. **Zadanie XIX.** — *Nakreślić cztery płaszczyzny równoległe i równooddalone znając jeden punkt każdej z nich.* — Niech punktami danemi będą A, B, C, D, a płaszczyznami szukanemi α, β, γ, δ (fig. a_4).

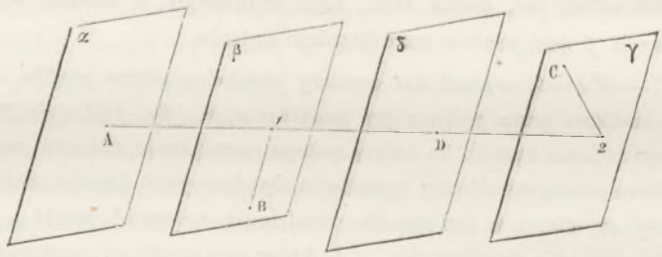

Fig. a_4.

Uważmy jednę z prostych łączących punkta dane brane po dwa, np. prostę AD; płaszczyzny β i γ winny dzielić prostę AD w punktach 1 i 2 na odcinki równe, które albo się do siebie dodają albo od siebie odejmują. Punkta te są więc łatwe do wyznaczenia, a ztąd proste C2, B1, które muszą być równoległe do płaszczyzn szukanych dadzą się także wykreślić; kreśląc więc przez punkta dane płaszczyzny równoległe do prostych C2 i B1 otrzymamy płaszczyzny szukane.

Rozbierzmy obecnie rozmaite możliwe położenia punktów 1 i 2 względem punktów A i D.

Kładąc te punkta wewnątrz odcinka AD otrzymamy dwie figury a_5 i a_6 podane poniżej.

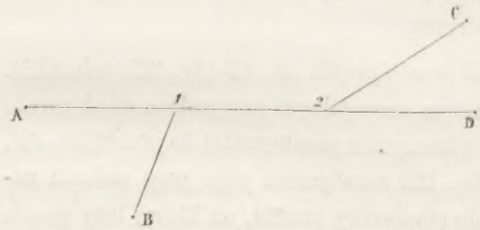

Fig. a_5.

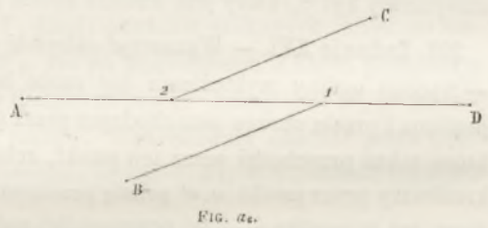

Fig. a_6.

Kładąc zaś jeden z tych punktów wewnątrz odcinka AD a drugi zewnątrz niego i po stronie prawej prostej AD, otrzymamy dwie figury następujące :

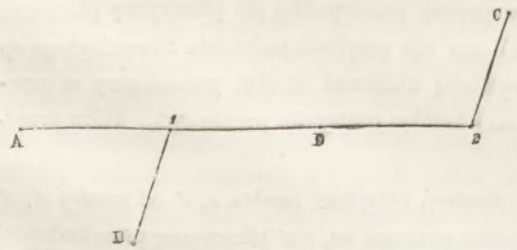

Fig. a_7.

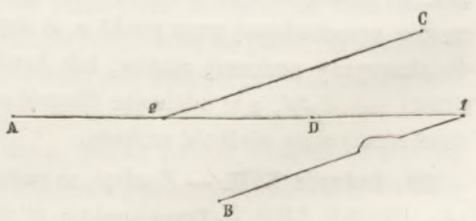

Fig. a_8.

Ustawmy teraz punkta podziału zewnątrz i po stronie prawej prostej AD, a otrzymamy figury następujące:

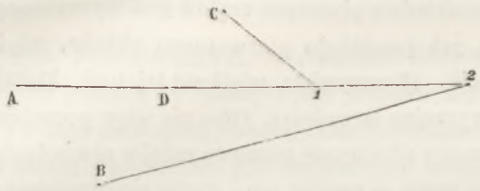

Fig. a_9.

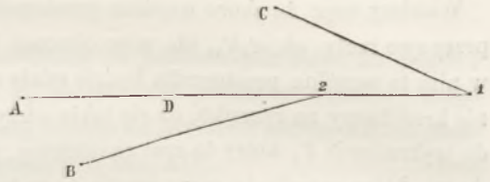

Fig. a_{10}.

Przypuszczając zaś że jeden z punktów podziału znajduje się wewnątrz a drugi zewnątrz i po lewej stronie odcinka AD, otrzymamy dwie figury następujące:

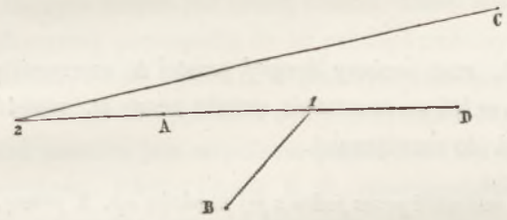

Fig. b_1.

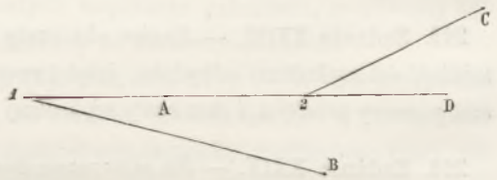

Fig. b_2.

W końcu ustawiając oba punkta podziału po lewej stronie i zewnątrz odcinka AD, znajdziemy dwa ostatnie układy, czyli razem dziesięć rozwiązań odnoszących się do połączenia dwu punktów; a ponieważ cztery punkta dane łączone po dwa, tworzą liczbę prostych równą

$$C_4^2 = \frac{4.3}{2} = 6,$$

zatem zadanie nasze przedstawia 60 rozwiązań.

Figura 197 tab. XIII przedstawia, jako jedno rozwiązanie, cztery płaszczyzny wyznaczone każda przez jednę parę prostych równoległych.

212. Zadanie XX. — *Znając ślady poziome dwóch płaszczyzn tworzących pomiędzy sobą kąt dany i rzut poziomy prostej ich wspólnego przecięcia, znaleźć ich ślady pionowe.* — Odwracając porządek wykreślenia, zróbmy rysunek przedstawiający kąt zawarty między dwiema płaszczyznami.

213. Zadanie XXI. — *Przez prostę leżącą na danej płaszczyźnie przesunąć inną płaszczyznę, któraby tworzyła z pierwszą kąt dany* (do rozwiązania).

214. Zadanie XXII. — *Znając oba rzuty d, d' jednej prostej, rzut poziomy δ drugiej i rzut ab najkrótszej odległości* D od Δ, *znaleźć rzuty pionowe prostych* AB i Δ, *jakoteż rzeczywistą wielkość tejże odległości* (*fig.* 198, tab. XIII). — Przyjmijmy za nową płaszczyznę pionową rzutów, płaszczyznę rzucającą prostę D na pierwotną płaszczyznę poziomą rzutów zachowując tę ostatnią. Oś rzutów x_1y_1 w tym przypadku zejdzie się z rzutem poziomym d prostej; rzuty d'_1 i a'_1 prostej D i punktu A na nowej płaszczyznie pionowej rzutów umiemy już znaleźć, na zasadzie zaś dobrze znanego twierdzenia (§ 42) wiemy, że najkrótsza odległość będzie miała za rzut prostę prostopadłą do d'_1 przechodzącą przez punkt a'_1, i będzie zakończoną z jednej strony w punkcie a'_1 z drugiej zaś w punkcie b'

spotkania się rzutu obecnie znalezionego, z linią rzutów prostopadłą do osi rzutów x_1y_1 przechodzącą przez punkt b.

Widzimy więc, że skoro wspólna prostopadła w nowym układzie płaszczyzn rzutów jest wyznaczoną przez swe rzuty ab, $a'_1b'_1$, nic więc obecnie łatwiejszego, jak przejść do pierwotnego układu, gdyż w nim ta wspólna prostopadła będzie miała za rzuty ab, $a'b'$. (Rzeczywista wielkość tej linii, której nie kreśliliśmy na rysunku, da się także otrzymać z nadzwyczajną łatwością). Obecnie więc pozostaje do wykreślenia δ', który to rzut znajdziemy, przyjmując nową płaszczyznę pionową rzutów równoległą do tej, która przechodzi przez prostę Δ; w tym przypadku nowa oś rzutów x_2y_2, stanie się równoległą do δ, nowy rzut wspólnej prostopadłej będzie $a'_2b'_2$ rzut zaś prostej Δ na zasadzie twierdzenia podanego w § 42 przypadnie na prostopadłej δ'_2 przechodzącej przez punkt b'_2 do prostej $a'_2b'_2$. Ślad poziomy prostej δ, δ'_2 znajduje się w punkcie t'_2, t w układzie płaszczyzn rzutów obecnie użytym, zaś rzut jego t' na poprzednią płaszczyznę pionową rzutów, daje możność nakreślenia rzutu δ' prostej, który dokończa zupełnego rozwiązania zadania.

215. Zadanie XXIII. — *Znając oba rzuty prostej* D, *rzut poziomy drugiej prostej* Δ, *rzeczywistą wielkość ich najkrótszej odległości, jakoteż rzuty punktu w którym ta ostatnia spotyka prostę* D, *znaleźć rzut pionowy prostej* Δ *i dwa rzuty najkrótszej odległości* (do rozwiązania).

216. Zadanie XXIV. — *Na płaszczyznie danej* $P\beta P'$ *nakreślić przez jeden z jej punktów np.* A *prostę, tworzącą z kierunkiem osi rzutów kąt* α *dany* (*fig.* 199, tab. XIII). — Przypuśćmy, że punkt dany A jest wyznaczonym przez jeden ze swych rzutów np. przez rzut pionowy a'. Nakreślmy przedewszystkiem przez punkt β prostę równoległą do prostej szukanej; w tym celu narysujmy kąt α utworzony przez tę równoległę z osią rzutów obracając ją naokoło osi xy, gdyż w ten sposób otrzymamy jej kład d'_1 na płaszczyznie pionowej rzutów, przechodzący przez punkt β i nachylony pod kątem α do osi rzutów. Obecnie należy podnieść z kładu jeden z punktów prostej d'_1. W tym celu znów przetnijmy płaszczyznę $P\beta P'$ i rozmaite położenia prostej ruchomej, płaszczyzną profilu $R\gamma R'$ jakąkolwiek, to płaszczyzna ta profilu wyznaczy na płaszczyznie $P\beta P'$ prostę, której ślady leżą w punktach t', θ, na prostej zaś ruchomej punkta leżące na okręgu koła mającego za środek punkt γ a za promień długość $\gamma m'$, których punkt spotkania, t. j. tak znalezionej prostej i rzeczonego okręgu koła będzie właśnie punktem szukanym. Dla znalezienia tego punktu, zróbmy kład naokoło γR, 1° okręgu koła pomocniczego, zakreślając z punktu γ promieniem $\gamma m'$ okrąg koła, i 2° prostej wspólnego przecięcia się płaszczyzn $P\beta P'$ i $R\gamma R'$, to łącząc, po zrobieniu kładu punktu t' na t'_1, punkt t'_1 z punktem θ linią prostą, punkta B_1, B_2 przecięcia się tych linij będą właśnie kładem dwu punktów odpowiadających zadaniu.

Zajmijmy się obecnie wyznaczeniem punktu B_1 nie zwracając uwagi na punkt B_2, który się wyznaczy następnie w sposób taki sam, jak punkt B_1, a więc podnieśmy z kładu punkt B_1 do b, b' i nakreślmy proste βb, $\beta b'$, to w ten sposób otrzymamy prostę równoległą do prostej szukanej, a kreśląc przez punkt a' prostę równoległą do $\beta b'$, znajdziemy rzut pionowy δ' prostej odpowiadającej zadaniu. Rzut jej poziomy otrzymamy zważając, że prosta szukana leży na płaszczyznie $P\beta P'$, więc ślad jej pionowy znajduje się w punkcie v', v; jeżeli zatem z punktu v nakreślimy prostę δ równoległą do d, znajdziemy rzut poziomy szukany.

217 Zadanie XXV. — *Znając jeden z rzutów prostej, oba rzuty jednego z jej punktów i kąt jaki ona tworzy z jakąkolwiek płaszczyzną, znaleźć drugi rzut tej prostej* (do rozwiązania).

218. **Zadanie XXVI.** — *Wykreślić odległość punktu o, o' od prostej obrazu d, d'* (*fig.* 200, tab. XIII). — Z punktu o, o' należy nakreślić prostę prostopadłą $po, p'o'$ do prostej danej (§ 42) i za pomocą metody znanej (§ 175) wyznaczyć jej rzeczywistą wielkość.

219. **Zadanie XXVII.** — *Nakreślić ślady płaszczyzny nachylonej do poziomu pod kątem 45° znając :* 1° *rzut pionowy a'b' jednej z jego prostych obrazu i* 2° *rzut c', na tęż samą płaszczyznę rzutów, jednego z punktów płaszczyzny szukanej, którego oddalenie jest dwa razy większe od oddalenia prostej* AB. — Rozwiązanie tego zadania jest dostatecznie wyjaśnione na figurze 201, tab. XIV.

220. **Zadanie XXVIII.** — *Wykreślić, w następujących szczególnych przypadkach, kąt utworzony przez dwie płaszczyzny* (P, P'), (Q, Q'), *jakoteż ślady płaszczyzny dzielącej na dwie równe części jeden z kątów dwuściennych, które one tworzą pomiędzy sobą.*

1° *Kiedy ślady pionowe są równoległe* (*fig.* 202, tab. XIV). — W tym przypadku przecięcie się obu płaszczyzn danych jest prostą obrazu, której rzutem pionowym jest prosta $h'f'$. Jeżeli przetniemy je płaszczyzną prostopadłą do tej prostej i zrobimy kład prostych wspólnego przecięcia, znajdziemy kąt szukany $a'h_1b'$, i ślady B, B' płaszczyzny dzielącej kąt dwuścienny na dwie równe części.

2° *Kiedy ślady poziome obu płaszczyzn zchodzą się z sobą* (*fig.* 203, tab. XIV). — W tym przypadku ślad poziomy jest wspólnem przecięciem się płaszczyzn, co wiedząc, kład kąta $a'h_1b'$ w rzeczywistej wielkości, jakoteż i ślady B, B' płaszczyzny dzielący na dwie równe części kąt dwuścienny przez nie utworzony znajdziemy z łatwością.

3° *Kiedy płaszczyzny dane są równoległe do osi rzutów* (*fig.* 204, tab. XIV). — W tym przypadku, ponieważ prosta wspólnego przecięcia się jest równoległą do osi rzutów, otrzymamy kąt szukany robiąc na płaszczyznę poziomą rzutów kład prostych wspólnego przecięcia się płaszczyzn danych z płaszczyzną profilu pomocniczą. Na naszym rysunku nachylenie się prostych Vh, V'_1h_1 jest równe nachyleniu płaszczyzn, a ślady płaszczyzny dwójsiecznej znajdują się na B, B'.

4° *Kiedy jedna jest prostopadłą do osi rzutów a druga jakąkolwiek* (*fig.* 205, tab. XIV). — W tym przypadku za pomocą metody ogólnej znajdziemy kąt płaski aS_α kąta szukanego i ślady B, B' płaszczyzny dwójsiecznej.

5° *Kiedy jedna z płaszczyzn danych jest jakąkolwiek, a druga przechodzi przez oś rzutów i przez punkt znany* (*fig.* 206, tab. XIV). —Niech $P_\alpha P'$ będą śladami jednej płaszczyzny i o, o' punktem, który wraz z osią rzutów wyznacza drugą płaszczyznę. Ponieważ punkt α należy do prostej wspólnego przecięcia się płaszczyzn danych, a płaszczyzna pozioma przechodząca przez punkt o, o' wyznacza jego drugi punkt a, a', rzut więc poziomy prostej wspólnego przecięcia znajduje się na $a\alpha$; jeżeli zatem nakreślimy prostę hh_1 prostopadłą do $a\alpha$, otrzymamy ślad poziomy płaszczyzny tworzącej kąt płaski kąta dwuściennego szukanego. Po zrobieniu kładu aA_1 prostej wspólnego przecięcia się obu płaszczyzn, otrzymamy wysokość θS_1 trójkąta, w którym się znajduje kąt szukany, a ztąd znajdziemy kład hS_2h_1 tego trójkąta, w którym kąt hS_2h_1 jest właśnie kątem płaskim szukanym. Nakreśliwszy teraz prostę $S_2\beta$ dzielącą tak znaleziony kąt na dwie równe części, płaszczyzna dwójsieczna będzie wyznaczoną przez punkta α, (a, a'), β, a kreśląc poziomę av, $a'v'$, znajdziemy ślady B, B' tej płaszczyzny.

6° *Kiedy oba ślady każdej z płaszczyzn tworzą jednę liniję prostą* (*fig.* 207, tab. XIV). — Ponieważ w tym przypadku obie płaszczyzny (P, P'), (Q, Q') są prostopadłe do płaszczyzny dzielącej na dwie równe części kąty dwuścienne 2 i 4 (§ 46), przetnijmy więc je tą płaszczyzną dwójsieczną, a otrzymamy najprzód na płaszczyznach danych dwa punkta spotkania α i β, następnie zaś na krawędzi kąta dwuściennego wierzchołek kąta, którego rzuty na obu płaszczyznach rzutów przypadają

w punkcie s, s' to jest w środku prostej vh, $v'h'$, a kład w punkcie S_1. Kąt płaski w kładzie i w naturalnej wielkości jest więc $\alpha S_1 \beta$, a ślady płaszczyzny dwójsiecznej zchodzą się na B, B'.

7° *Kiedy ślady przeciwnego nazwiska zchodzą się z sobą na rysunku* (§ 91) (do rozwiązania).

221. **Zadanie XXIX.** — *Przez punkt dany, nakreślić płaszczyznę jednakowo nachyloną do obu płaszczyzn spółrzędnych, a którejby ślady w przestrzeni tworzyły kąt dany* (do rozwiązania).

222. **Zadanie XXX.** — *Znając rzeczywistą wielkość jakiegokolwiek kąta, dwa rzuty jednego z jego boków i rzut poziomy drugiego boku, nakreślić rzut pionowy tegoż boku* (*fig.* 208, tab. XIV). — Niech d, d' będą rzutami jednego boku, δ rzutem poziomym drugiego i α rzeczywistą wielkością kąta. Drugi bok, którego tutaj szukamy, znajduje się współcześnie na płaszczyznie pionowej wyznaczonej przez prostę δ i rzucającej takowę, i na ostrokręgu obrotowym znanym, bo mającym za oś prostę d, d', za wierzchołek punkt s, s', a którego połowa kąta w wierzchołku równa się kątowi α; całe więc zadanie sprowadza się do znalezienia wspólnego przecięcia się tej płaszczyzny z ostrokręgiem. Przecięcie to zaś otrzymamy, zmieniając płaszczyznę pionową rzutów w ten sposób, iżby oś rzutów przypadła na prostej d, skutkiem czego w tym nowym układzie płaszczyzn rzutów prosta d, d' przyjmie położenie d, d'_1; a ponieważ prosta ta leży na nowej płaszczyznie pionowej rzutów dwie tworzące ostrokręgu leżą także na tej płaszczyznie i tworzą z nią kąt α dany, przeto z łatwością wykreślić możemy przynajmniej jednę z nich np. $S'_1 g'_1$. Przez ślad poziomy h prostej d, d'_1 nakreślmy płaszczyznę P_1, P'_1 prostopadłą do tej prostej i szukajmy przecięcia się tej płaszczyzny z ostrokręgiem i z płaszczyzną pionową przechodzącą przez δ, to ponieważ pierwsze z tych przecięć jest okręgiem koła, zakreślonym z punktu h jako środka promieniem równym hb'_1, drugie zaś jest prostą wspólnego przecięcia się dwu płaszczyzn, z których jedna P, P'_1 jest prostopadłą do nowej płaszczyzny pionowej rzutów, a druga jest prostopadłą do płaszczyzny poziomej rzutów i przechodzi przez prostę δ, wynika więc ztąd, że rzutami prostej są δ i P'_1.

Należy obecnie wyznaczyć w kładzie na płaszczyznę poziomą rzutów punkt spotkania się prostej i koła, obracając je naokoło prostej hP_1 jako osi obrotu. Podczas tego ruchu ślad poziomy prostej t. j. punkt θ pozostaje nieruchomym, kład zaś innego punktu np. a, a' otrzymamy bardzo łatwo w punkcie A_1; łącząc więc punkt A_1 z punktem θ, otrzymamy kład $A_1\theta$ samej prostej, zaś okrąg koła w kładzie jest właśnie ten, który obecnie nakreśliliśmy promieniem hb'_1 z punktu h jako środka.

Punkt M_1 jest kładem jednego z punktów wspólnego przecięcia, którego szukamy (nie zwracaliśmy uwagi na drugi punkt wspólnego przecięcia, który daje drugie rozwiązanie zadania).

Znając wreszcie punkt M_1, i podniosłszy go z kładu, otrzymamy jego rzuty m, m'_1 w nowym układzie, a robiąc względem punktu m, m'_1 stosowną zmianę płaszczyzn rzutów, otrzymamy rzuty m, m' w pierwotnym układzie płaszczyzn rzutów. Łącząc obecnie punkt m' z s', otrzymamy prostę $s'm'$, która jest właśnie szukanym rzutem pionowym δ' drugiego boku kąta danego rozwiązującego ostatecznie zadanie.

223. **Zadanie XXXI.** — *Wykreślić kąt pomiędzy dwiema prostemi, których rzuty przeciwnego nazwiska zchodzą się z sobą* (*fig.* 209, tab. XIV). — Niech (d, d'), (δ, δ') będą rzutami prostych danych. Dla wyznaczenia kąta utworzonego przez te dwie proste, użyć należy sposobu ogólnego, który polega na zrobieniu ich kładu na płaszczyznę poziomą rzutów, przyjmując za oś obrotu ślad poziomy $0t$ płaszczyzny przez nie wyznaczonej i na zwróceniu uwagi na wierzchołek s, s' leżący na płaszczyznie dzielącej na dwie równe części kąty dwuścienne 2 i 4, a którego kład znajduje się w punkcie S_2. Kąt $0S_2t$ jest właśnie kątem szukanym.

224. Zadanie XXXII. — *Przez prostę daną dwoma rzutami spotykającemi się w jednym punkcie na osi rzutów, przesunąć płaszczyznę, którejby ślady, po podniesieniu ich z kładu, utworzyły pomiędzy sobą kąt podzielony przez prostę daną na dwie równe części* (*fig.* 210, tab. XIV). — Niech d, d' będą rzutami prostej danej, zaś α punktem spotkania się ich na osi rzutów xy.

Przez punkt dowolnie obrany na prostej danej nakreśliwszy do niej prostopadłę leżącą na płaszczyznie szukanej, prosta ta znajdzie się koniecznie na jakiejś płaszczyznie prostopadłej do prostej d, d', której ślady $R\beta R'$ umiemy nakreślić; nadto musi ona przejść przez punkt m, m', w którym prosta dana spotyka płaszczyznę $R\beta R'$, i który znajdziemy posługując się płaszczyzną pomocniczą $Q\alpha Q'$, a następnie część tej prostopadłej szukanej zawarta pomiędzy śladami winna być podzielona w punkcie m, m' na dwie równe części, gdyż stosunek odcinków prostej nie zmienia się w rzucie kiedy środek rzutów znajduje się w nieskończoności, zatem rzut pionowy części prostopadłej, o której mowa, jest odcinkiem prostej wpisanej w kąt $R'\beta x$, przechodzącej przez punkt m' i podzielonej w tym punkcie na dwie części równe. Wiemy, zasadzając się na zadaniu geometrycznem, że prosta ta da się otrzymać, kreśląc przez punkt m' prostę $m'a'$ równoległą do osi rzutów, następnie zaś odcinając długość $a't'$ równą $a'\beta$, łącząc punkt t' z m' liniją prostą $t'm'$ i przedłużając ją do punktu θ; znalazłszy więc w ten sposób rzut pionowy $\theta't'$ prostopadłej do prostej danej, znajdziemy jej ślad poziomy θ, a łącząc punkt α z punktami θ i t', otrzymamy ślady $P\alpha P'$ płaszczyzny szukanej.

225. Zadanie XXXIII. — *Przez trzy punkta dane* A, B, C *nakreślić równoległe do prostej* D *trzy płaszczyzny takie, żeby kąt dany φ utworzony przez dwie pierwsze był podzielony na dwie równe części przez trzecią* (*fig.* 211, tab. XIV). — Przypuścić możemy przedewszystkiem, że zrobioną została zmiana płaszczyzny pionowej rzutów w ten sposób, żeby prosta D znalazła się na płaszczyznie obrazu. Niech x_1y_1 i d, d' będą więc nową osią rzutów i rzutami prostej D w nowym układzie płaszczyzn rzutów; przypuściwszy oprócz tego, że punkta dane mają za rzuty (a, a'_1), (b, b'_1), (c, c'_1) w tymże układzie, to kreśląc przez każdy z nich prostę równoległą do prostej d, d', i oznaczając ich ślady w punktach $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, otrzymamy jednę prostę dla każdej z płaszczyzn szukanych i jeden punkt dla każdego śladu poziomego.

Ponieważ wspólne przecięcie trzech płaszczyzn szukanych będzie w tym razie prostą równoległą do prostej d, d'_1, zatem płaszczyzna P, P'_1 nakreślona prostopadle do tej prostej, wyznaczy na płaszczyznach, których szukamy, proste tworzące pomiędzy sobą kąty płaskie mierzące kąty dwuścienne tychże płaszczyzn, a jedna z tych prostych podzieli kąt, utworzony przez dwie pozostałe, na dwie równe części. Jeden punkt należący do każdej z tych prostych wyznaczy się z przecięcia każdej z nich z płaszczyzną P, P'_1, a rzuty pionowe tych punktów znajdą się w punktach $\alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1$, zaś kłady w punktach α_2, β_2, γ_2, na płaszczyznie poziomej rzutów, przyjmując za oś obrotu prostę P; rzuty zaś poziome jako nieużyteczne nie zostały podane na rysunku. Dla otrzymania obecnie kładu prostych wspólnego przecięcia się płaszczyzny P, P'_1 z trzema płaszczyznami szukanemi, należy rozwiązać bardzo proste zadanie geometryczne, a mianowicie, należy nakreślić na $\alpha_2\beta_2$ łuk $\alpha_2\omega\beta_2$ równy miarze kąta φ, złączyć jego środek m z punktem γ_2 i oznaczyć punkt S przecięcia się tej prostej z łukiem, poczem łącząc punkt S z punktami α_2 i β_2 linijami prostemi, otrzymamy kąt $\alpha_2S\beta_2$ równy kątowi danemu φ, i podzielony na dwie równe części przez prostę $S\gamma_2$, zkąd następuje wniosek, że trzy proste wychodzące z punktu S są właśnie kładami prostych leżących odpowiednio na płaszczyznach szukanych.

Podnosząc obecnie tak wykreśloną figurę z kładu, ponieważ punkta h_1, h_2, h_3 pozostaną nieruchome, zatem proste łączące te punkta z punktami $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ są właśnie śladami poziomemi płaszczyzn szukanych. i jeżeli rysunek został wykonany z dokładnością, te trzy proste winny się zbiegać w jednym punkcie θ,

Płaszczyzny szukane są więc obecnie wyznaczone przez dwie proste; nakreślenie ich śladów na pierwotnej płaszczyźnie pionowej rzutów nie przedstawi żadnej trudności.

226. Zadanie XXXIV. — *Znając jeden punkt każdej z czterech prostych* A, B, C, D *i punkt* O *ich wspólnej prostopadłej, nakreślić cztery proste, któreby brane po dwie, nie leżały na jednej płaszczyźnie, były równooddalone i miały jednę prostopadłę wspólną* (*fig.* 212, tab. XIV). — Niech (a, a'), (b, b'), (c, c'), (d, d'), (o, o') będą rzutami punktów danych (oś rzutów została zniesioną).

Wystawmy sobie cztery płaszczyzny przechodzące przez proste szukane i prostopadłe do ich wspólnej prostopadłej, to widoczną jest rzeczą, że te płaszczyzny są równooddalone i równoległe pomiędzy sobą, a więc ich wykreślenie uskuteczni się według § **211**. W tym celu, usuwając z rysunku wszelkie linije niepotrzebne, nakreślmy rzuty ad, $a'd'$ jednej z prostych łączących punkta A, B, C, D brane po dwa, i podzielmy tę prostę na trzy równe części w punktach (β, β'), (γ, γ'), to kreśląc rzuty prostych łączących dwie pary punktów (c, c'), (γ, γ') i (b, b'), (β, β'), otrzymamy jako jedno z sześćdziesięciu rozwiązań tego zadania (§ **211**), dwie proste równoległe $(c\gamma, c'\gamma')$, $(b\beta, b'\beta')$ do kierunku ogólnego czterech płaszczyzn zwyż rzeczonych, w skutek czego kierunek ten mamy wyznaczony. Ponieważ kreśląc przez punkt o, o' prostopadłę do znalezionego kierunku, otrzymamy prostopadłę wspólną do czterech prostych szukanych, zatem, znów w tym celu, poprowadźmy przez punkt γ, γ' prostę równoległą $\gamma f, \gamma' f'$ do prostej $\beta b, \beta' b'$, następnie prostę poziomą $cf, c'f'$ i prostę obrazu $cg, c'g'$ płaszczyzny przechodzącej przez proste $(c\gamma, c'\gamma')$, $(\gamma f, \gamma' f')$, to kreśląc wreszcie przez punkt o, o', proste $op, o'p'$ odpowiednio prostopadłe do $cf, c'f'$, otrzymamy rzuty szukanej wspólnej prostopadłej.

Drugi punkt każdej z prostych szukanych, otrzymamy w punkcie przecięcia się tej wspólnej prostopadłej $op, o'p'$ z każdą z czterech płaszczyzn równoległych.

Szukajmy więc punktu przecięcia się prostej $op, o'p'$ z płaszczyzną oznaczoną przez proste wychodzące z punktu $\gamma, {}'\gamma$. Przyjmując płaszczyznę OP za płaszczyznę pomocniczą, znajdujemy przedewszystkiem dwa punkta (k, k'), (m, m') przecięcia się płaszczyzn, a więc prostę $km, k'm'$ wspólną tym dwu płaszczyznom, która służy do wyznaczenia punktu $\gamma_1, {}'\gamma_1$ spotkania się prostej z płaszczyzną, i z połączenia którego z punktem c, c' otrzymamy jednę z prostych szukanych, t. j. $c\gamma_1, c'\gamma'_1$.

Drugą prostę otrzymamy szukając także wspólnego przecięcia się płaszczyzny przechodzącej przez punkt β, β' i równoległej do ogólnego kierunku czterech płaszczyzn równooddalonych; to wspólne przecięcie otrzymamy zaś wyznaczając przecięcie się płaszczyzny, o której mowa, z płaszczyzną pomocniczą już wykreśloną przez prostę $o'p'$, która to płaszczyzna spotyka prostę $\beta b, \beta' b'$ w punkcie n, n'. Kreśląc więc z tego punktu prostę równoległą do $mk, m'k'$, otrzymamy na płaszczyźnie poziomej rzutów prostę nl, za pomocą której znajdziemy rzut poziomy β_1 punktu wspólnego przecięcia się prostej z płaszczyzną, a prowadząc z punktu β_1 liniję rzutów, znajdziemy punkt β'_1. Jeżeli wreszcie nakreślimy dwie proste $b\beta_1$ $b'\beta'_1$, otrzymamy rzuty drugiej prostej, zadosyć czyniącej warunkom zadania.

Dwa pozostałe punkta dadzą się wyznaczyć w sposób zupełnie podobny do podanego powyżej; lecz dla uproszczenia wykreślenia uważmy, że z założenia odcinki prostej $op, o'p'$ zawarte pomiędzy prostemi szukanemi muszą być sobie równe, że zatem odcinając $\beta'_1\alpha'_1 = \delta'_1\gamma'_1 = \gamma'_1\beta'_1$, otrzymamy punkta szukane α'_1 i δ'_1, a następnie ich rzuty poziome α_1 i δ_1.

Kreśląc obecnie proste $(a\alpha_1, a'\alpha'_1)$ i $(d\delta_1, d'\delta'_1)$, zadanie nasze będzie w zupełności rozwiązanem.

ROZDZIAŁ VI

ZADANIA DOTYCZĄCE KĄTÓW TRÓJŚCIENNYCH

227. Każdy kąt trójścienny składa się z sześciu części, to jest trzech ścian a, b, c i trzech kątów dwuściennych A, B, C, przeciwległych odpowiednim ścianom. Wiemy z geometryi, że znając trzy jakiekolwiek części kąta trójściennego, możemy zawsze wyznaczyć trzy pozostałe.

Niniejszy rozdział został poświęcony rozwiązywaniu kątów trójściennych za pomocą rysunku, t. j. znając trzy jakiekolwiek z sześciu części składowych kąta trójściennego, wyznaczyć rysunkiem trzy pozostałe. Zadanie to prowadzi do rozwiązania sześciu następujących i różnych pomiędzy sobą pytań, a mianowie jak :

	Znając			Znaleźć		
1°	a,	b,	c	A,	B,	C
2°	c,	b,	A	B,	C,	a
3°	b,	c,	C	A,	B,	a
4°	A,	B,	c	a,	b,	C
5°	A,	C,	c	a,	b,	B
6°	A,	B,	C	a,	b,	c

Trzy ostatnie przypadki dadzą się rozwiązać pośrednio za pomocą trzech pierwszych, opierając się na własnościach kąta trójściennego spełniającego. I tak, wiemy z geometryi, że ściany kąta trójściennego spełniającego są spełniającemi kątów dwuściennych kąta trójściennego danego i odwrotnie, że kąty dwuścienne trójściennego spełniającego, są spełniającemi ścian kąta trójściennego danego. Jeżeli więc dane są trzy kąty dwuścienne A, B, C kąta trójściennego; to ściany kąta trójściennego spełniającego $a = 180 - A$, $b = 180 - B$, $c = 180 - C$ będą wiadome odrazu, a sposób wykreślenia podany dla pierwszego przypadku posłuży do wykreślenia kąta trójściennego spełniającego i wyznaczy jego trzy kąty dwuścienne, poczem biorąc ich spełnienie znajdziemy trzy ściany kąta trójściennego danego.

Chociaż za pomocą wykreślenia kąta trójściennego spełniającego moglibyśmy wyznaczyć rysunkiem trzy pierwsze przypadki podane powyżej, jednakże podamy tu rozwiązanie bezpośrednie czterech pierwszych przypadków odkładając dwa ostatnie do chwili, w której poznamy płaszczyzny styczne, wówczas bowiem będziemy mogli podać ich rozwiązanie wprost.

228. **Zadanie ogólne.** — *Wyznaczyć części nieznane kąta trójściennego, znając jednę jego ścianę c, rzut o na tę ścianę punktu leżącego na krawędzi przeciwległej i wzniesienie tego punktu względem płaszczyzny tej ściany* (*fig.* 213, tab. XV).

Dla uproszczenia wykreślenia przypuśćmy, że ściana dana leży na płaszczyznie poziomej rzutów; niech ASB będzie tą ścianą, o rzutem poziomym trzeciej krawędzi i l jego wzniesieniem. Kąty dwu-

ścienne B, A otrzymamy, przyjmując dwie płaszczyzny pionowe odpowiednio prostopadłe do krawędzi SB, SA i przechodzące przez punkt o; dwie osie rzutów x_1y_1, x_2y_2 przechodzą przez punkt o i są także odpowiednio prostopadłe do tychże krawędzi. Punkt O ma swe rzuty jużto w punktach o, o_1, jużteż w punktach o, o_2, na prostopadłych do osi rzutów, przechodzących przez punkt o, a w odległościach oo_1, oo_2 od osi rzutów równych wzniesieniu l. Proste więc łączące punkta o_1 z B, zaś o_2 z A, są śladami płaszczyzn ścian BSO, ASO, a zatem dwa kąty płaskie szukane są przedstawione kątami A_1, B_1.

Kład na płaszczyznę poziomą rzutów naokoło odpowiednich krawędzi SA, SB, uważanych za osie obrotu trójkątów prostokątnych SAO, SBO, daje rzeczywiste wielkości ASo_3, BSo_4 ścian a i b. W końcu, dla nakreślenia kąta płaskiego równego kątowi dwuściennemu C, przesuńmy płaszczyznę prostopadłą do jego krawędzi, to ślad jej poziomy pq będzie prostopadłą do rzutu So poprowadzoną przez jakikolwiek punkt tej krawędzi. Płaszczyzna ta przetnie kąt trójścienny podług trójkąta, którego jednym bokiem jest prosta pq, a dwa pozostałe boki są prostopadłe w przestrzeni do krawędzi So, i leżą po dokonaniu poprzednio wspomnianego kładu ścian SBO, SAO, na prostopadłych $p\Sigma_1$, $q\Sigma_2$ wyprowadzonych z punktów p, q podstawy na trzecią krawędź, która w kładzie zajmuje dwa położenia. W tej chwili więc znamy trzy boki $pq, p\Sigma_1$, $q\Sigma_2$ trójkąta, którego jeden kąt jest właśnie kątem płaskim szukanym; kład $p\Sigma_3 q$ tego trójkąta na płaszczyznę poziomą rzutów, przyjmując za oś obrotu prostę pq, otrzymamy z całą łatwością za pomocą rzeczywistej wielkości tych boków, a kąt ztąd otrzymany C_1 wyznaczy nam w rzeczywistej wielkości kąt płaski trzeciego kąta dwuściennego C.

Sprawdzenie. — Rysunek nasz winien zadość czynić trzem sprawdzeniom a mianowicie :

1° Proste So_3, So_4, które są kładem jednej i tej samej krawędzi SO ale rozdwojonej, winny być sobie równe.

2° Dla tejże samej przyczyny winno być $S\Sigma_1 = S\Sigma_2$.

3° Punkt Σ_3 t. j. kład wierzchołka kąta płaskiego, który jest miarą kąta dwuściennego C, przypadać winien na So, gdyż robiąc rzut wierzchołka Σ kąta płaskiego na płaszczyznę poziomą rzutów, znajdujemy jeden z punktów rzutu krawędzi SO, czyli mówiąc innemi słowy, jeden z punktów prostej So; nadto prosta ta So jest z wykreślenia prostopadłą do osi obrotu pq, a ponieważ rzuty jakiegokolwiek punktu i jego kład na tęż samą płaszczyznę rzutów leżą zawsze na jednej i tej samej prostopadłej do osi obrotu, wnosimy ztąd, że punkt Σ_3 musi się znajdować na So.

229. Pierwszy przypadek. — *Znając ściany a, b, c, kąta trójściennego znaleźć kąty płaskie jego kątów dwuściennych.* — W tym przypadku geometrya wskazuje warunki, w których zadanie może być rozwiązane. Warunki te są następujące : $a < b + c$ i $a + b + c < 2\pi$, w których a oznacza największą z trzech ścian kąta trójściennego. Przypuszczając, że warunki te są dopełnione, nakreślmy największą ścianę CSB *fig.* 214 kąta trójściennego na płaszczyznie poziomej rzutów i zróbmy kład pozostałych ścian na tęż płaszczyznę, obracając je naokoło odpowiednich osi obrotu SB, SC, a otrzymamy w ten sposób dwie powierzchnie kątowe CSA_1 i BSA_2, odpowiednio równe ścianom danym b, c.

Obierzmy następnie na krawędzi rozdwojonej punkta A_1, A_2 jednakowo oddalone od punktu S, to jeżeli będziemy obracać, celem odbudowania kąta trójściennego, krawędź rozdwojoną naokoło odpowiednich krawędzi SC, SB jako osi obrotu, punkta te opiszą okręgi kół, których rzutami na płaszczyznie poziomej rzutów będą proste prostopadłe wyprowadzone z punktów A_1, A_2 do osi obrotu SC, SB, punkt zaś α przecięcia się tych prostopadłych będzie rzutem poziomym punktu leżącego na trzeciej krawędzi.

Wzniesienie punktu α, o którym mowa, jest równe wzniesieniu jakiegokolwiek punktu mającego tenże sam rzut poziomy i leżącego na kuli, której środek znajduje się w punkcie S, a promień jest właśnie równym promieniowi okręgu koła podanego na rysunku.

W samej rzeczy, przetnijmy kulę pomocniczą płaszczyzną pionową rzucającą krawędź SA, a otrzymamy na przecięcie koło wielkie, którego kładem na płaszczyznę poziomą rzutów, naokoło osi obrotu $S\alpha$, będzie koło nakreślone na naszym rysunku. Jeżeli wraz z kołem obracać będziemy prostę rzucającą punktu A, znajdziemy dla tej linii w kładzie, prostę αA_3 prostopadłą do osi obrotu, która właśnie mierzy szukane wzniesienie punktu α.

Obecnie więc zadanie nasze zostało sprowadzone do przypadku ogólnego, którego rozwiązanie podaliśmy powyżej, gdyż znamy nietylko ścianę a daną, lecz nadto rzut α punktu leżącego na krawędzi przeciwległej i jego wniesienie αA_3.

230. Drugi przypadek. — *Znając dwie ściany kąta trójściennego i kąt dwuścienny pomiędzy niemi zawarty, wykreślić pozostałe części nieznane* (*fig.* 215, tab XV). — Nakreślmy w położeniu dowolnem jednę ścianę daną ASB na płaszczyznie poziomej rzutów, i zróbmy kład drugiej na tęż płaszczyznę obracając ją naokoło krawędzi SA jako osi obrotu; kład ten daje się wykonać łatwo kreśląc prostę SC_1 tworzącą z SA kąt równy kątowi drugiej ściany danej.

Uwydatnijmy teraz trzeci element dany t. j. kąt dwuścienny A na płaszczyznie pionowej rzutów, prostopadłej do jego krawędzi SA; w tem położeniu oś rzutów będzie przedstawiona przez prostę x_1y_1 prostopadłą do krawędzi SA a ślad P'_1 ściany CSA otrzymamy, kreśląc przez punkt A prostę tworzącą z x_1y_1 kąt płaski równy dwuściennemu danemu. Podnieśmy teraz z kładu ścianę C_1SA dla odbudowania kąta trójściennego, to ściana ta przypadnie na płaszczyznę P_1AS, a punkt C_1 opisze podczas obrotu na płaszczyznie pionowej rzutów łuk koła, którego środkiem jest A, a promieniem AC_1 i przypadnie sam w punkcie c'_2, c.

Znowu więc obecnie zadanie nasze zostało sprowadzone do przypadku ogólnego, gdyż znamy ścianę ASB, rzut c na jej płaszczyznę jednego z punktów przeciwległej krawędzi, i wzniesienie cc'_2 tego punktu. Z samego wykreślenia wypada, że rozwiązanie kąta trójściennego w przypadku tym jest zawsze możliwe.

231. Trzeci przypadek. — *Znając dwie ściany a i c kąta trójściennego jakoteż kąt dwuścienny* C *przeciwległy jednej z nich, znaleźć pozostałe części niewiadome* (*fig.* 216, tab. XV).—Nakreślmy na płaszczyznie poziomej rzutów ścianę CSA przyległą kątowi dwuściennemu danemu SC w ten sposób, żeby jedna jej krawędź SA była prostopadłą do osi rzutów; wielkość drugiej ściany danej może być przedstawioną na naszym rysunku, robiąc jej kład na płaszczyznę poziomą rzutów naokoło krawędzi SA, gdyż zajmie ona wówczas powierzchnię kątową ASB równą ścianie danej c. Ustawmy obecnie trzeci element dany w należytem położeniu, przyjmując w tym celu drugą płaszczyznę pionową rzutów prostopadłą do krawędzi SC; nowa oś rzutów x_1y_1 będzie teraz prostopadłą do tejże krawędzi, a w tym nowym układzie płaszczyzn rzutów ściana nieznana BSC ma za ślad poziomy P prostę SC już nakreśloną, ślad jej zaś pionowy otrzyma się kreśląc przez punkt α prostę P'_1 nachyloną do osi rzutów x_1y_1 pod kątem danym C. Oznaczenie położenia tej płaszczyzny względem pierwotnego układu płaszczyzn rzutów, wymaga li tylko zmiany płaszczyzny pionowej względem płaszczyzny $P\alpha P'_1$, które to wykreślenie otrzymamy sposobem podanym w (§ 107) i dobrze znanym już czytelnikowi; ślad P' jest właśnie tem szukanem położeniem w pierwotnym układzie płaszczyzn rzutów. Sprowadźmy ścianę ASB_1 do należytego położenia, obracając ją naokoło krawędzi SA, to podczas tego ruchu punkt B opisuje na płaszczyznie pionowej rzutów łuk koła, którego środkiem jest

punkt A, a promieniem AB_1, i przypada na śladzie pionowym P' płaszczyzny ściany nieznanej, jużto w punkcie B'_1, β_1, jużteż w punkcie B'_2, β_2; zadanie więc nasze przedstawia dwa rozwiązania.

Wykreślenie podane tutaj prowadzi do tego rezultatu, że dla każdego rozwiązania otrzymujemy rzut β_1 lub β_2 na płaszczyznę ściany znanej CSA jednego punktu przeciwległej krawędzi, i wzniesienie tego punktu $B'_1\beta_1$ lub $B'_2\beta_2$, a w ten sposób zadanie sprowadza się do przypadku ogólnego. Żeby można rozwiązać niniejsze zadanie, niezbędną i dostateczną jest rzeczą, żeby płaszczyzna PCP' przecinała ostrokrąg opisany ruchem krawędzi SB_1 naokoło SA. Za pomocą elementów znanych, wyznaczmy odległość punktu A tak od płaszczyzny PCP', jakoteż od jednej z tworzących ostrokręgu; pierwszą z nich otrzymamy, robiąc rzut punktu A w a'_1 na płaszczyznę pionową pomocniczą i kreśląc z tego punktu prostopadłę $a'_1 p'_1$ do prostej P'_1, która to prostopadła da nam w rzeczywistej wielkości odległość punktu A, a'_1 od płaszczyzny $P_\alpha P_1$, drugą zaś otrzymamy kreśląc prostopadłę aq z punktu A do tworzącej SB_1.

Widzimy więc, że żeby płaszczyzna o której mowa spotykała stożek, dostatecznem jest i potrzebnem, żeby

$$Aq \geqq a'_1 p'_1,$$

lecz z figury czytamy, że

$$Aq = AS \operatorname{wst} c,$$

$$a'_1 p'_1 = a'_1 \alpha \operatorname{wst} C = AS \operatorname{wst} b \operatorname{wst} C.$$

Podstawiając więc w powyższy warunek te wartości mamy

$$\operatorname{wst} c \geqq \operatorname{wst} b \operatorname{wst} C.$$

Nadto, żeby zadanie przedstawiało dwa rozwiązania trzeba, żeby B'_2 przypadało pomiędzy C i B'_1 to jest, żeby było

$$AB_1 < AC \quad \text{lub} \quad c < b.$$

232. Czwarty przypadek. — *Znając ścianę c kąta trójściennego i dwa kąty dwuścienne* A i B *jej przyległe, znaleźć trzy jego pozostałe części* (*fig.* 217, tab. XV). — Ustawmy na płaszczyznie poziomej rzutów ścianę daną ASB, dla ułożenia zaś kątów płaskich służących za miarę dwuściennych danych, obierzmy dwie osie rzutów x_1y_1, x_2y_2 odpowiednio prostopadłe do krawędzi SA, SB tych kątów dwuściennych; płaszczyzny PAP'_2, QBQ'_1, których ślady są nachylone do odpowiednich osi rzutów pod kątami danemi A i B, wyznaczą właśnie płaszczyzny ścian CSA, CSB.

Teraz więc, znalezienie punktu leżącego na krawędzi przeciwległej ścianie danej i jego wzniesienia ponad płaszczyznę tej ściany, nie przedstawi żadnej trudności, albowiem dosyć będzie znaleźć punkt wspólnego przecięcia się płaszczyzn PAP'_2 i QBQ'_1, a ten znajdzie się za pomocą płaszczyzny poziomej pomocniczej, wyznaczonej w każdym układzie płaszczyzn rzutów przez swe ślady pionowe H'_1, H'_2, nakreślone równolegle do odpowiednich osi rzutów i w odległości dowolnej od nich. Płaszczyzna ta pomocnicza daje nam na płaszczyznach, z któremi przecięcia jej szukamy, dwie poziome (h_1, h'_1), (h_2, h'_2), które wyznaczają szukany punkt przecięcia c_1, c'_1. Zadanie nasze zostało więc znowu sprowadzone do przypadku ogólnego, gdyż znamy jednę ścianę ASB, rzut c punktu leżącego na przeciwległej krawędzi i wzniesienie $\gamma c'_1$ tego punktu. Dodać tu winniśmy, że jak z samego wykreślenia widocznem jest, zadanie to może być zawsze rozwiązanem i że ono ma tylko jedno rozwiązanie a nie więcej.

233. Zastosowanie. — **Sprowadzenie kąta do poziomu.** — Zadanie tego rodzaju napotykamy przy zdejmowaniu planów wtedy, kiedy za pomocą kątomierza zmierzyliśmy kąt utworzony przez dwie

proste i kąty utworzone przez te proste z liniją pionu jakoteż, jeżeli chcemy oznaczyć płaszczyznę tego kąta, lub, mówiąc innemi słowy, oddalenie kątowe rzutów poziomych jego boków. Ponieważ w tych warunkach linija pionu, przechodząca przez wierzchołek, z dwoma bokami kąta tworzy kąt trójścienny, którego znamy trzy ściany a szukamy jednego z kątów dwuściennych, zatem moglibyśmy w tym przypadku jak poprzednio uciec się, dla rozwiązania zadania, do sposobu podanego (§ 229), lecz ponieważ tutaj idzie tylko o znalezienie jednego kąta dwuściennego, zadanie da się więc uprościć rozwiązując go wprost sposobem następującym :

Oznaczywszy przez a, b kąty utworzone przez kierunek linii pionu z bokami kąta danego α, ustawmy, dla wskazania naturalnego położenia danych, jeden z boków kąta danego w położeniu BC (*fig.* 218, tab. XV) na płaszczyźnie pionowej rzutów, a pochylając tę prostę względem linii pionu AB o kąt a; po dokonaniu tego, dla uwydatnienia pozostałych części znanych, zróbmy kład na płaszczyznę pionową rzutów trzeciej krawędzi, obracając ją naokoło prostych AB, BC jako osi obrotu, a w ten sposób otrzymamy proste BD, BE tworzące z odpowiedniemi osiami obrotu kąty dane b i a. Żeby następnie otrzymać rzut poziomy, który jest właśnie głównym celem naszego zadania, złóżmy nanowo kąt trójścienny, to jest podnieśmy z kładu do punktu przecięcia się prostej BD z osią rzutów ten punkt leżący na krawędzi rozdwojonej, którego pierwszy kład znajduje się w punkcie D_1, zaś drugi jego kład jest w punkcie D_2, otrzymanym przez odcięcię długości BD_1 do BD_2 na drugim kładzie BE krawędzi rozdwojonej. Podczas obrotu naokoło odpowiednich krawędzi, punkta D_1, D_2 opiszą łuki kół, których rzuty pionowe znajdą się na prostopadłych D_1A_1, $D_2\omega$ do osi obrotu, wyprowadzonych z odpowiednich punktów, a punkt ich przecięcia się d' będzie właśnie rzutem pionowym punktu szukanego, podczas gdy rzut poziomy będzie na przecięciu się łuku koła opisanego przez punkt D_1 z liniją rzutów przechodzącą przez punkt d'. Ponieważ okrąg koła opisany przez punkt D_1 znajduje się na płaszczyznie poziomej rzutów, zaś środek leży w punkcie A a promień jego jest równy AD_1, nakreśliwszy więc tenowy otrzymamy punkt d.

Rzut więc poziomy jak widzimy jednego z boków kąta jest prostą łączącą punkta A i d; a że rzut drugiego boku zchodzi się z osią rzutów xy, zatem oddalenie kątowe α_1 rzutów poziomych xy, AD_2 przedstawi nam kąt α sprowadzony do poziomu.

ROZDZIAŁ VII

O WIELOŚCIANACH

234. Nauka dotycząca wielościanów jest wielkiej wagi z dwóch względów : 1° gdyż sama przez się jest bardzo użyteczną i 2° gdyż daje sposobność licznego zastosowania wykreśleń odnoszących się do linii prostej i do płaszczyzny, które stanowią niejako podstawę geometryi wykreślnej. W celu bliższego zapoznania czytelnika z wykreśleniami, o których mowa, postaramy się podać tutaj nieco obszerniejsze rozwiązanie odnoszące się do zadań geometryi wykreślnej, a należących do wielościanów.

Główne działy objęte niniejszym rozdziałem są następujące :

1° Przedstawienie wielościanów za pomocą dwu rzutów prostokątnych.

2° Przecięcie płaskie wielościanów.

3° Przecięcie wielościanu liniją prostą.

4° Przecięcie się dwu wielościanów.

5° Rozwinięcie. Linija najmniejsza.

6° Wyznaczenie kul wpisanych i opisanych na wielościanach.

235. Sposób kreślenia wielościanów. — Dla przedstawienia wielościanu za pomocą rzutów na dwu płaszczyznach spółrzędnych, należy wyznaczyć rzuty jego krawędzi, używając sposobów podanych w ciągu niniejszego dzieła i służących do wyznaczenia rzutów całego układu prostych, zadość czyniących warunkom wskazanym tak przez oddalenie wzajemne, jakoteż przez ich długość i t. p. Po dokonaniu tego, należy się zająć oznaczeniem krawędzi widzialnych wielościanu, przyczem notujemy, że obwód ograniczający rzut uważany bryły, jest zawsze widzialny w zupełności.

Krawędzie natomiast, które nie wchodzą do obwodu ograniczającego bryłę, dadzą się podzielić na trzy odrębne działy w razach następujących :

1° Kiedy wielościan uważany jest wypukły i zamknięty ze wszystkich stron.

2° Kiedy wielościan jest wypukły lecz niezamknięty i uzupełniony co do swej powierzchni.

3° Kiedy wielościan nie jest wypukły.

236. Wielościan wypukły zamknięty ze wszech stron. — Niech ABCD, etc. (fig, b_3) przedstawia jeden z rzutów wielościanu ([1]). Uważmy obwód zewnętrzny ABCDEFG, obwód ten jak to powiedzieliśmy powyżej, jest zawsze widzialny, a nadto ponieważ, wielościan jest wypukłym i zamkniętym

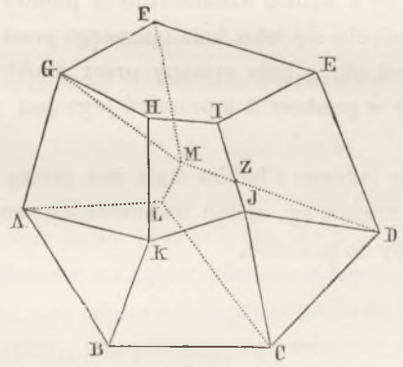

Fig. b_3.

ze wszech stron, zatem wszelka prostopadła do płaszczyzny rzutów poprowadzona, a której spodek na tę płaszczyznę przypada wewnątrz obwodu ograniczającego bryłę, spotyka powierzchnię wielościanu w dwóch punktach, z których jeden znajduje się na powierzchni górnej od strony patrzącego, a zatem jest widzialny, drugi zaś na powierzchni dolnej czyli jest niewidzialny. Z tego co poprzedza wnosimy, że obwód, którego rzut znajduje się w ABCDEFG dzieli dany wielościan na dwie części, z których jedna leżąca od strony patrzącego jest widzialną w zupełności, gdy tymczasem druga jest w zupełności zakrytą.

Wystarczy więc oznaczyć z dokładnością, czy punkt leżący na powierzchni wielościanu jest wi-

([1]) Warunki którym zadość czynić winny wierzchołki, ściany i kąty wielościanu wypukłego przedstawione na figurze, znajdzie czytelnik w doskonałem dziele pp. Rouché i Comberousse pod tytułem : *Traité de géométrie*, 4° wydanie, 1879, część druga, str. 105.

działny lub nie. Przypuśćmy bowiem, że punkt K jest widzialny, to ponieważ w tym razie wszelki punkt ruchomy wychodząc z tego punktu i przebiegając krawędzie, lecz nie przechodząc poza granicę obwodu, znajdzie się zawsze na krawędziach widzialnych, zatem obwody KHIE, KJD, KBCJ etc. są widzialne. Jednem słowem, możemy powiedzieć, że części widzialne figury danej odpowiadają jednemu z jej wierzchołków, leżącemu na zewnątrz obwodu ograniczającego i są widzialne lub nie, stosownie czy ten wierzchołek jest także widzialny lub nie.

Przyjęliśmy powyżej, że sam kontur ograniczający oddziela część widzialną od niewidzialnej wielościanu; otóż twierdzimy, że inaczej być nie może dla następujących przyczyn:

1° Żeby krawędź wewnętrzna np. HK (fig. b_4), mogła oddzielić część widzialną od niewidzialnej, potrzebnem byłoby, żeby jedna ze ścian przechodzących przez krawędź HK t. j. ściana ABHK była widzialną, zaś ściana jej przyległa PQKH była niewidzialną, a więc żeby bryła miała ściany położone

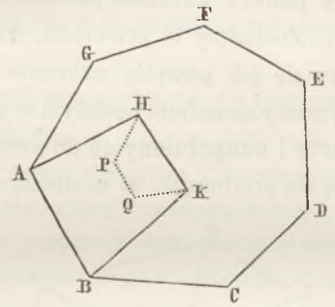

Fig. b_4.

pod pierwszemi i służące do połączenia ściany HPQK z obwodem granicznym ABCDEFG. W tych zaś warunkach, jakakolwiek rzucająca, przyległa do HK i przecinająca ściany, które się dotykają wzdłuż tej krawędzi, i to każdę w jednym punkcie, przecinałaby nadto przynajmniej jednę ze ścian łącznych o których mowa, a to jest niemożliwe w przypadku wielościanu wypukłego.

2° Żeby punkt V leżący na krawędzi RS (fig. b_5) mógł służyć do oddzielenia części widzialnej od niewidzialnej, należałoby, żeby pionowa ruchoma wzdłuż RV wyznaczyła przedewszystkiem dwa punkta

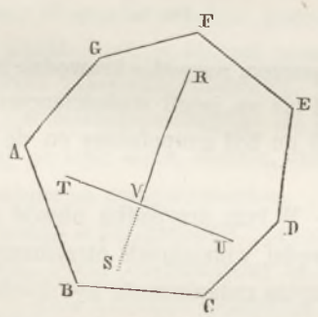

Fig. b_5.

przecięcia na wielościanie, następnie zaś, ponieważ te dwa punkta przecięcia nie zchodzą się z sobą w jednym punkcie, aby ona przecięła wielościan po raz trzeci w punkcie leżącym na krawędzi górnej TU, co znów jest niemożliwe w przypadku wielościanu wypukłego i zamkniętego ze wszech stron.

Powróćmy obecnie do punktu wyjścia i szukajmy sposobu, w jaki moglibyśmy wyznaczyć widzialność jakiegokolwiek punktu wielościanu.

237. Kiedy jakikolwiek punkt obrany na powierzchni wielościanu jest widzialny?

Sposób pierwszy. — Dla przekonania się czy wierzchołek np. K jest widzialnym (fig. b_3), przesuńmy przezeń prostę pionową i oznaczmy punkta jej przecięcia się z wielościanem; jeżeli po zrobieniu odpowiedniego wykreślenia punkt K jest na prostej pionowej najwyżej położony ze wszystkich punktów przecięcia się jej z wielościanem, powiadamy, że punkt ten jest widzialnym, inaczej jest on niewidzialnym.

Sposób drugi. — Bardzo często zadanie daje się uprościć, szukając, czy punkta leżące na dwu krawędziach i mające jeden rzut wspólny na płaszczyznie rzutów uważanej, jak np. punkta, których rzuty znajdują się w punkcie Z (fig. b_6), są widzialne. W tym przypadku bowiem rzeczywiście, bardzo jest łatwo oznaczyć punkta przecięcia się pionowej przechodzącej przez punkt Z z wielościanem, gdyż znamy ich rzut poziomy t. j. Z ponieważ zaś punkta te spotkania są wyznaczone przez przecięcie się linii rzutów przechodzącej przez punkt Z z rzutami pionowemi krawędzi, przedstawionych przez proste IC, MD w rzucie poziomym. Znalazłszy te przecięcia, widzialność punktów, których rzuty znajdują się w punkcie Z, oznaczy się jak powyżej wskazano w sposobie pierwszym, części zaś widzialne samego wielościanu otrzymamy sposobem podanym w paragrafie 236.

238. Wielościan wypukły otwarty i uzupełniony co do swej powierzchni. — Części widzialne tego rodzaju wielościanu wyznaczają się przyjmując, że wielościan jest zamknięty (§ 236 i 237) i odej-

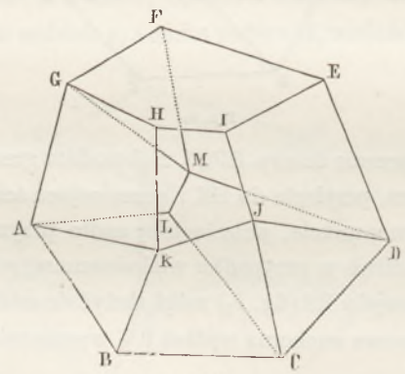

Fig. b_6.

mując mu następnie ściany dodane, poczem wszystkie krawędzie znajdujące się pod ścianami odjętemi winny być uważane za widzialne. I tak np. jeżeli wielościanowi przedstawionemu na (fig. b_3) odejmiemy ścianę HIJK, to w razie jeżeli on był uzupełniony co do swej powierzchni znajdziemy wielościan przedstawiony na figurze b_6.

239. Wielościan niewypukły. — W tym przypadku obwód graniczny jest zawsze w zupełności widzialny. Oznaczenie innych krawędzi widzialnych otrzymamy za pomocą jednego ze sposobów powyżej podanych (§ 237). Bardzo często zadanie może być bardzo uproszczonem przez uważne rozpatrzenie samej figury i jej rzutów, tym bowiem sposobem w wielu przypadkach odrazu, z samego kształtu ciała, krawędzie widzialne i niewidzialne wyznaczyć można.

240. Przedstawienie ostrosłupa. — Żeby wyznaczyć rzuty ostrosłupa danego, należy wyznaczyć rzuty jego podstawy sposobem znanym (§ 60), następnie rzuty jego wierzchołka a wreszcie połączyć rzuty wierzchołka z odpowiedniemi rzutami wierzchołków podstawy.

241. Części widzialne. — W przypadku odnoszącym się do ostrosłupa, sposób podany do wyznaczenia części widzialnych wielościanu może być bardzo uproszczonym, gdyż płaszczyzna podstawy dzieli

przestrzeń na dwie części, z których w jednej znajduje się oko patrzącego; jeśli więc chcemy wyznaczyć widzialność tej części, w której leży wierzchołek ostrosłupa, napotykamy dwa przypadki następujące:

1° *Kiedy wierzchołek ostrosłupa i patrzący znajdują się po tej samej stronie podstawy.* — W tym przypadku powierzchnia podstawy ostrosłupa jest w zupełności zakrytą przez jej ściany boczne, oprócz jednakże jej krawędzi te bowiem leżą na obwodzie granicznym rzutu uważanego ostrosłupa, i jedynie tylko są widzialne na tej podstawie. Krawędzie boczne ostrosłupa, są tylko o tyle widoczne o ile one dochodzą do wierzchołków widzialnych podstawy.

2° *Kiedy wierzchołek ostrosłupa i patrzący znajdują się jeden z jednej a drugi z drugiej strony płaszczyzny podstawy.* — W tym przypadku podstawa jest widzialną w zupełności, krawędzie zaś boczne są albo zupełnie ukryte albo w zupełności widzialne, stosownie do tego, czy w rzucie na płaszczyznę uważaną i nieprzedłużoną przecinają one rzut odpowiedni podstawy, lub nie.

Jednem słowem, całe zadanie sprowadza się do znalezienia czy wierzchołek względnie do płaszczyzny podstawy, jest widzialnym lub nie, a to potrafimy rozwiązać za pomocą jednego z dwu sposobów podanych powyżej (§ 237).

Dla uczynienia zadania, którem się zajmujemy, więcej zrozumiałem, podamy tutaj wykreślenie ostrosłupa, oznaczając jego części widzialne.

242. **Zastosowanie.** — *Wykreślić rzuty ostrosłupa czworościennego.* — Niech będą s, s' (*fig.* 219, tab. XV) rzutami wierzchołka, zaś $abcd$, $a'b'c'd'$ rzutami podstawy, wyznaczonemi sposobem znanym czytelnikowi (§ 60). Łącząc punkta s, s' z rzutami odpowiedniemi wierzchołków podstawy, otrzymamy rzuty krawędzi ostrosłupa, a tem samem rzut całego wielościanu. Pozostaje nam tylko wyznaczyć części widzialne. Zacznijmy od rzutu poziomego i nakreślmy w tym celu sposobem znanym, punkt spotkania pionowej przechodzącej przez wierzchołek s, s', z płaszczyzną podstawy.

Posługując się płaszczyzną pomocniczą pionową przechodzącą przez as, znajdziemy jako jej przecięcie się z płaszczyzną podstawy proste af, $a'f'$, które przecinając się z prostą pionową uważaną, wyznaczą na przecięcie punkt s, σ'. Ponieważ na naszym rysunku punkt s' leży ponad punktem σ', wnosić więc wypada, że wierzchołek ostrosłupa leży także ponad płaszczyzną podstawy, a zatem, że i wierzchołek s, s' i patrzący znajdują się oba z jednej i tej samej strony płaszczyzny podstawy, a na mocy tego, jako też pamiętając na wnioski ostatniego paragrafu, znajdziemy w rzucie poziomym części widzialne takie jak je przedstawiliśmy na figurze. W sposób zupełnie podobny do podanego postąpić należy z rzutem pionowym, t. j. wyznaczyć punkt σ'_1, s', w którym prostopadła do płaszczyzny pionowej, przechodząca przez punkt s, s', spotyka płaszczyznę podstawy, a zważając, że w skutek położenia punktu σ'_1 na rysunku, wierzchołek s, s' ostrosłupa znajduje się przed płaszczyzną podstawy, t. j. że ten wierzchołek i patrzący znajdują się po tejże samej stronie, otrzymamy w rzucie pionowym części widzialne takie, jakie zostały przedstawione na naszym rysunku.

Zastosowanie drugiego sposobu podanego w paragrafie 237, prowadzi do znalezienia strony, w której leży wierzchołek, bezporównania łatwiej. I tak, przypuściwszy że idzie o rzut poziomy, to ponieważ rzuty poziome sa, cb (*fig.* 219, tab. XV) dwu krawędzi przecinają się w punkcie f, odpowiadającym dwu punktom w przestrzeni, których rzuty pionowe znajdują się w punktach f' i φ', ostatni z tych punktów leży ponad pierwszym, zatem wierzchołek ostrosłupa znajduje się także ponad płaszczyzną podstawy, czyli w stronie, w której się znajduje patrzący, zkąd, stosując prawidła podane w paragrafie 241, otrzymamy części widzialne w rzucie poziomym. W sposób tenże sam należy postąpić dla oznaczenia części widzialnych w rzucie pionowym.

Nareszcie winniśmy dodać, że postępowanie podane tutaj dla ostrosłupa, stosuje się w zupełności do

graniastosłupa, który uważać możemy za ostrosłup mający swój wierzchołek na krawędziach bocznych, ale w odległości nieskończenie wielkiej.

243. Przecięcie płaskie wielościanów. — Wielokąt przecięcia się płaszczyzny z wielościanem można wykreślić w dwojaki sposób, albo wyznaczając jego boki, które są przecięciem się płaszczyzny siecznej ze ścianami wielościanu i mają długości ograniczone obwodem jego ścian odpowiednich, albo też wyznaczając wierzchołki wielokąta, które są przecięciem się płaszczyzny siecznej z krawędziami wielościanu.

Żeby użycie drugiego sposobu było dogodnem, należy płaszczyznę sieczną uczynić prostopadłą do jednej z płaszczyzn rzutów, gdyż w tym razie rzuty, na tę płaszczyznę rzutów, wierzchołków wieloboku powstałego z przecięcia, są dane odrazu w punktach spotkania się rzutów krawędzi wielościanu ze śladami płaszczyzny, zaś linije rzutów przechodzące przez tak znalezione punkta, przecinając się z drugim rzutem krawędzi wielościanu, wyznaczają odrazu rzuty wierzchołków przecięcia na drugiej płaszczyznie rzutów. Robiąc wreszcie kład płaszczyzny siecznej na jednę z płaszczyzn rzutów, otrzymamy rzeczywistą wielkość wieloboku przecięcia.

Części widzialne wieloboku przecięcia, w razie gdy wielościan jest wypukły, otrzymają się pamiętając, że każdy bok, którego wierzchołek pada na krawędzi niewidzialnej wielościanu, jest niewidzialnym, a zatem, że z boków wielokąta te tylko będą widzialne, które dotykają do dwu krawędzi widzialnych wielościanu.

Zanim przystąpimy do wykładu przecięć płaskich ostrosłupa i graniastosłupa, przypomnijmy kilka własności geometrycznych bezustannie używanych w geometryi wykreślnej.

244. Jednokładność. — Podług Ponceleta powiadamy, że dwie figury płaskie są jednokładne jeżeli one przystają do siebie we wszystkich bez wyjątku punktach i w ten sposób: 1° że punkta odpowiednie leżą na prostych zbiegających się w jednym punkcie, zwanym *środkiem jednokładności*, i 2° że proste odpowiednie przecinają się na jednej linii prostej, zwanej *osią jednokładności*.

245. Twierdzenie. — *Jeżeli jeden z warunków określających jednokładność jest dopełnionym, drugi musi być także dopełnionym.* — Przypuśćmy przedewszystkiem, że punkta odpowiednie leżą na dwu prostych wychodzących ze środka jednokładności, i okażmy, że proste te przecinają się na jednej prostej, która jest właśnie osią jednokładności.

Widoczną jest rzeczą, że aby dowieść tego warunku, wystarcza dowieść własności, że trzy pary prostych odpowiadających, lub co na jedno wychodzi, że w dwóch trójkątach których wierzchołki leżą na trzech prostych zbiegających się w jednym punkcie, boki ich odpowiednie przecinają się na jednej prostej.

Własność ta atoli znów staje się widoczną, jeżeli przypuścimy, że dwa trójkąty uważane są rzutami dwu przecięć płaskich ostrosłupa, którego wierzchołek ma za rzut środek jednokładności, a zaś krawędzie boczne mają za rzuty proste łączące punkta odpowiednie figury pierwotnej.

Jakoż rzeczywiście, boki trójkątów pomocniczych, są w ten sposób, prostemi wynikającemi z przecięcia ścian bocznych z płaszczyznami siecznemi, to jest prostemi, które brane po dwie przecinają się na prostej wspólnego przecięcia się płaszczyzn siecznych, i których rzuty zatem spotykają się w trzech punktach leżących na rzucie tej prostej wspólnego przecięcia.

Następnie dowiedźmy, że dwie figury mające oś jednokładności, mają także środek jednokładności. Dla dowiedzenia tego, dostatecznem jest dowieść, że trzy proste jakiekolwiek nakreślone przez trzy pary punktów odpowiednich są zbieżnemi, lub co na jedno wychodzi, dowieść dla dwu trójkątów odwrotności powyżej podanego wniosku.

Przedstawmy sobie w tym celu dwa trójkąty w przestrzeni, i to takie, iżby ich rzuty przypadły na

trójkącie uważanym, a nadto żeby ich płaszczyzny przecinały się podług jednej prostej mającej za rzut oś jednokładności. Boki tych trójkątów, jako też ich rzuty, przetną się w trzech punktach leżących na jednej linii prostej i wyznaczą zatem trzy płaszczyzny przecinające się w wierzchołku ostrosłupa, którego krawędzie boczne, będące prostemi łączącemi wierzchołki odpowiednie trójkątów pierwotnych, przejdą przez jeden i ten sam punkt czyli przez środek jednokładności.

246. Twierdzenie. — *Rzuty na jakąkolwiek płaszczyznę dwu przecięć płaskich dokonanych na ścianach bocznych ostrosłupa, są jednokładnemi.* — W samej rzeczy, dwa boki wielokątów przecięcia się płaszczyzny tej ściany i prostej wspólnego przecięcia się płaszczyzn siecznych, wreszcie proste łączące wierzchołki odpowiednie przecięć, przecinają się z sobą w jednym punkcie, który jest wierzchołkiem ostrosłupa. Ponieważ dwie własności, które podaliśmy powyżej służą także i dla rzutów, t. j. mają miejsce dla każdego rzutu figur uważanych, zatem dwa rzuty dwu przecięć płaskich ostrosłupa są jednokładnemi.

Widzimy nadto, że oś jednokładności jest rzutem prostej wspólnego przecięcia dwu płaszczyzn siecznych, zaś środek jednokładności rzutem wierzchołka ostrosłupa.

247. Twierdzenie powyższe może być jeszcze wysłowione w sposób następujący:

Jeżeli dwie figury płaskie są perspektywą jedna drugiej, rzuty ich na jakąkolwiek płaszczyznę są jednokładnemi.

248. *Żeby wyznaczyć dla figury danej jej jednokładnę, dostatecznem jest znać środek c, oś jednokładności x i parę a, a' punktów odpowiednich* (fig. b_7). — Postarajmy się w samej rzeczy, za pomocą

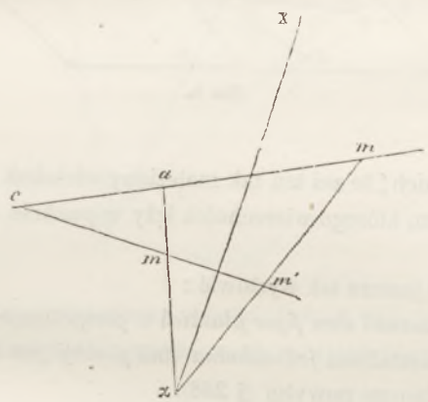

Fig. b_7.

tych danych wyznaczyć punkt odpowiedni punktowi m figury danej. W tym celu nakreślmy prostę am przecinającą oś w punkcie α, połączmy punkta (α, a'), (c, m) linijami prostemi, a punkt m' przecięcia się tych prostych będzie koniecznie punktem odpowiednim punktowi m.

249. Odwrotność twierdzenia podanego w końcu paragrafu 246 jest prawdziwą i daje się wysłowić w sposób następujący:

Dwa wieloboki jednokładne, leżące na jednej płaszczyznie, mogą być uważane za rzuty na tęż płaszczyznę dwu przecięć płaskich jednego ostrosłupa.

Oznaczmy przez o, x, (a, a'), $abcd$ i t. d., i P, środek jednokładności, jej oś, parę punktów odpowiednich, wierzchołki jednego z wieloboków uważanych i płaszczyznę wieloboków jednokładnych. Oznaczmy nadto przez X, Q i A', jakąkolwiek prostę, której rzut na P znajduje się w punkcie x,

jakąkolwiek płaszczyznę przechodzącą przez tę prostę i jakikolwiek punkt, którego rzutem P jest punkt a'.

Uważmy nadto płaszczyznę R przechodzącą przez prostę X i przez punkt A'; niech będą jeszcze punkta A, B, D,... płaszczyzny Q, a których rzutami są punkta $a, b, d,...$, i punkt B przecięcia się prostopadłej do płaszczyzny Pa, przechodzącej przez punkt c, z prostą AA'.

Zobaczmy obecnie jakie jest przecięcie A'B'D' i t. d. ostrosłupa, którego wierzchołkiem jest punkt C a podstawą ABD i t. d., z płaszczyzną Q. Rzutem tego przecięcia na płaszczyznę P będzie wielobok $a'b'd'$ i t. d. jednokładny z wielobokiem abd i t. d., a który otrzymamy sposobem podanym w paragrafie 248 tak, jak jeden z dwu wieloboków danych, znając środek c jednokładności, jej oś X, jednę z figur abd. .

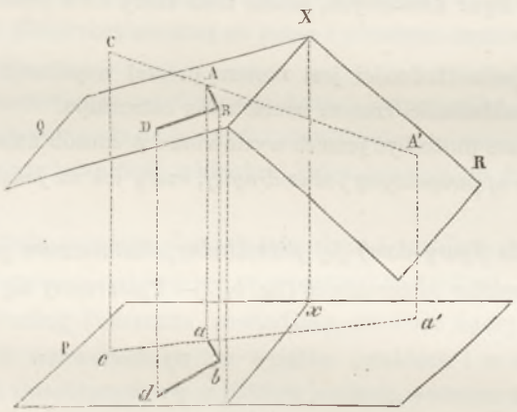

Fig. b_8.

i parę a, a' punktów odpowiednich; że zaś ten tak znaleziony wielobok zejdzie się z jednym z wielobo-ków danych a mianowicie z tym, którego wierzchołek leży w punkcie a, zatem to dowodzi własności w mowie będącej.

Twierdzenie niniejsze da się jeszcze tak wysłowić :

Dwie figury jednokładne są rzutami dwu figur płaskich w perspektywie.

250. Twierdzenie. — *Przekształcona jednokładna linii prostej jest linią prostą.* — Twierdzenie to jest wynikiem wykreślenia podanego powyżej (§ 248).

Prosta w nieskończoności (§ 3) jednej z figur ma za przekształconę jednokładną, według twierdzenia ostatniego, linię prostą, którą nazywamy *prostą graniczną* figury drugiej.

251. Zadanie. — *Znając środek* C, *oś* X *jednokładności i parę a, a' punktów odpowiednich, znaleźć dwie proste graniczne* (fig. b_9). — Ponieważ prosta w nieskończoności płaszczyzny przecina oś jednokła-dności w odległości nieskończenie wielkiej, zatem jej odpowiednia winna także przeciąć tę oś X w nieskończoności, czyli, że *proste graniczne są równoległe do osi jednokładności.*

Żeby znaleźć jeden punkt prostej granicznej odnoszącej się do figury, na której leży punkt a, na-kreślmy przez jego punkt sprzężony a' prostę mającą kierunek jakikolwiek np. $\alpha a'$ i szukajmy punktu b'_∞ odpowiedniego punktowi w nieskończoności leżącemu na tej prostej; ponieważ punkt ten winien się znajdować na prostej łączącej punkt c z punktem b'_∞, t. j. na prostej równoległej do prostej $\alpha a'$ nakreślonej przez punkt c, i winien nadto leżeć na prostej αa odpowiedniej prostej $\alpha a'$, zatem będzie to punkt b wspólnego przecięcia się tych prostych. Prosta L równoległa do X i przechodząca przez

punkt b jest właśnie szukaną prostą graniczną. — W sposób podobny nakreślimy drugą prostę graniczną.

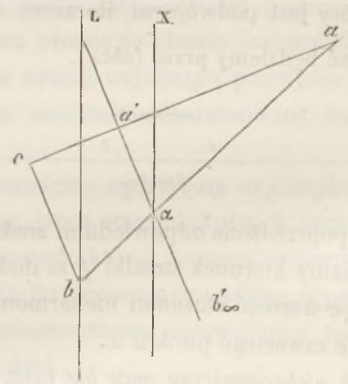

Fig. b_9.

252. Uwaga. — *Jeżeli środek jednokładności znajduje się w nieskończoności, wówczas zachodzi powinowactwo* (§ 126). Rzeczywiście, biorąc pod uwagę figurę b_7 i umieściwszy środek jednokładności c w od-

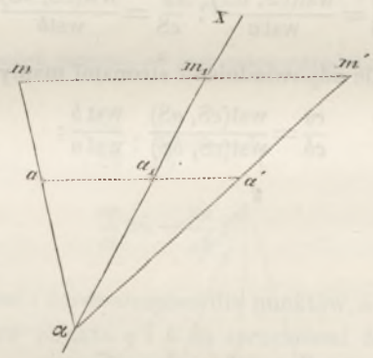

Fig. b_7 bis.

ległości nieskończenie wielkiej a w kierunku strzałki f (fig b_7 bis), proste aa', mm' staną się równoległemi, a oznaczając przez a_1, m_1 punkta spotkania się prostych (aa', X), (mm', X) otrzymamy:

$$\frac{a_1 a}{a_1 a'} = \frac{m_1 m}{m_1 m'},$$

t. j. rzędne punktów odpowiadające jednej i tej samej odciętej są proporcyonalne, a ztąd, według zacytowanego powyżej paragrafu, mamy powinowactwo.

STOSUNEK NIEHARMONICZNY

253. Stosunkiem nieharmonicznym czterech punktów leżących na jednej linii prostej, nazywa p. Challes stosunek odległości jednego z nich od dwu innych, podzielony przez stosunek odległości czwartego punktu od tychże. Niech będą cztery punkta (fig. b_{10}) a, b, c, x leżące na jednej linii prostej; ponieważ przez punkt c wyznaczonym jest na ab stosunek podziału $\frac{ca}{cb}$, zaś przez punkt x

wyznaczonym jest stosunek podziału $\frac{xa}{xb}$, zatem podzieliwszy pierwszy stosunek przez drugi, otrzymamy $\frac{ca}{cb} : \frac{xa}{xb}$, t. j. stosunek który jest podwójnym ilorazem albo stosunkiem nieharmonicznym czterech punktów, a który oznaczać będziemy przez $(abcx)$.

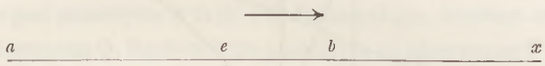

Fig. b_{10}.

Uwaga. — Odcinki winny być poprzedzone odpowiednim znakiem, stosownie do reguł przyjętych w geometryi, t. j, że jeżeli przyjmiemy kierunek strzałki f za dodatny, odcinek ca będzie odjemny, zaś cb dodatny i t. d. Znając więc wartość stosunku nieharmonicznego i położenie trzech punktów a, b, c, możemy znaleźć położenie czwartego punktu x.

254. **Twierdzenie.** — *Stosunek nieharmoniczny może być także dowiedzionym i dla rzutów* (fig. c_1). — Niech będzie danym stosunek $(abcx)$, S środek rzutów, P płaszczyzna rzutów, zaś A, B, C, X rzuty punktów a, b, c, x; chcemy dowieść, że $(abcx) = (ABCX)$.

Trójkąty aSc ,cSb dają

$$\frac{ca}{cS} = \frac{\text{wst}(cS, aS)}{\text{wst}\, a}; \quad \frac{cb}{cS} = \frac{\text{wst}(cS, bS)}{\text{wst}\, b};$$

dzieląc jedno równanie przez drugie odpowiedniemi stronami mamy :

$$\frac{ca}{cb} = \frac{\text{wst}(cS, aS)}{\text{wst}(cS, bS)} \cdot \frac{\text{wst}\, b}{\text{wst}\, a};$$

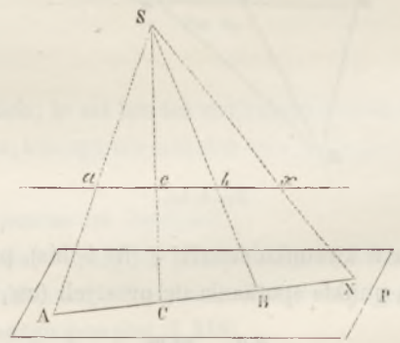

Fig. c_1.

podobnież, dla drugiego stosunku podziału, mamy znów

$$\frac{xa}{xb} = \frac{\text{wst}(xS, aS)}{\text{wst}(xS, bS)} \cdot \frac{\text{wst}\, b}{\text{wst}\, a},$$

zkąd, biorąc podwójny iloraz otrzymamy

$$\frac{ca}{cb} : \frac{xa}{xb} = \frac{\text{wst}(cS, aS)}{\text{wst}(cS, bS)} : \frac{\text{wst}(xS, aS)}{\text{wst}(xS, bS)}.$$

A że stosunek ten zależy jedynie od nachylenia rzucających, wartość więc jego dla rzutu pozostanie tąż samą.

Twierdzenie to da się jeszcze wysłowić w sposób następujący : *Stosunek nieharmoniczny wyznaczony na siecznej przez promienie jednej wiązki, jest stałym przy jakiemkolwiek położeniu siecznej.*

Płaszczyzny przechodzące przez jednę prostę tworzą tak zwaną *księgę płaszczyzn*, a płaszczyzny przechodzące przez jeden punkt tworzą tak zwaną *wiązkę płaszczyzn.*

255. Twierdzenie. — *Przecięcia płaskie księgi czterech płaszczyzn, są w stosunku nieharmonicznym stałym.* — W samej rzeczy, gdyż dwa przecięcia płaskie jakiekolwiek tworzą dwie wiązki czterech prostych mające za wspólną sieczną prostę wspólnego przecięcia się płaszczyzn tych wiązek, a ponieważ ta sieczna wspólna wyznacza stosunek nieharmoniczny każdej wiązki, zatem stosunek ten jest stałym.

256. Wniosek. — *Stosunek nieharmoniczny wyznaczony na jakiejkolwiek siecznej przez księgę czterech płaszczyzn, jest stałym.* — Rzeczywiście, jeżeli przez jakąkolwiek sieczną przesuniemy płaszczyznę, otrzymamy na księdze wiązkę czterech prostych, której stosunek nieharmoniczny jest równym stosunkowi nieharmonicznemu utworzonemu na tejże siecznej przez księgę, a ponieważ stosunek nieharmoniczny wiązki jest stałym, więc stosunek nieharmoniczny siecznej musi być także stałym. Stosunek ten nosi nazwę stosunku nieharmonicznego księgi.

Podział harmoniczny. — Powiadamy, że odcinek ab (fig. c_2) jest podzielony harmonicznie w punktach c i x, jeżeli stosunek nieharmoniczny $(abcx)$ jest równy -1.

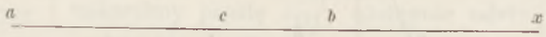

Fig. c_2.

Podział harmoniczny jakiejkolwiek prostej ab jest więc przedstawiony analitycznie przez związek następujący :

$$\frac{ca}{cb} : \frac{xa}{xb} = -1, \tag{1}$$

czyli pisząc inaczej

$$\frac{ca}{cb} = -\frac{xa}{xb};$$

punkta c i x zowią się *sprzężonemi i harmonicznemi* dla punktów a i b.

Dowiedźmy, że i nawzajem znów punkta a i b są *sprzężonemi harmonicznemi* dla punktów c i x. W istocie, ponieważ jak wiemy :

$$ca = -ac, \quad cb = -bc, \quad xa = -ax, \quad xb = -bx,$$

zatem podstawiając te wartości w równaniu (1) otrzymamy :

$$\frac{ac}{bc} : \frac{ax}{bx} = -1,$$

czyli

$$\frac{ac}{ax} = -1,$$

zkąd widzimy że punkta a i b dzielą harmonicznie odcinek cx.

257. Twierdzenie. — *Punkt leżący w nieskończoności na prostej, jest sprzężonym harmonicznym jej środka.* — Rzeczywiście, jeżeli bowiem punkt c leży we środku prostej ab, wówczas $ca = -cb$, zaś związek (1) daje

$$-1 : \frac{xa}{xb} = -1, \quad \text{lub} \quad \frac{xa}{xb} = 1,$$

a zapomocą tak otrzymanej wartości stosunku podziału określonym jest punkt leżący w nieskończoności na prostej.

Twierdzenie jest więc dowiedzionem, jego odwrotność jest także prawdziwą i dowieść jej można bez trudności.

Powiadamy, że wiązka czterech prostych lub księga czterech płaszczyzn jest harmoniczną, kiedy ich stosunek nieharmoniczny jest równy jedności ujemnej.

258. **Twierdzenie.** — *Kąt dwuścienny i jego płaszczyzny dwójsieczne, lub kąt płaski i jego dwójsieczne tworzą księgę płaszczyzn lub wiązkę harmoniczną.* — Dostatecznem będzie uważać tu wiązkę, gdyż w przypadku księgi zawsze możemy zastąpić jej cztery płaszczyzny przez wiązkę czterech prostych, otrzymanych z przecięcia się ich z płaszczyzną prostopadłą do ich krawędzi wspólnej.

Widoczną jest rzeczą, że w przypadku wiązki wszelka prosta równoległa do jednej z dwójsiecznych jest przeciętą przez promienie tej wiązki w czterech punktach, z których jeden leży w nieskończoności na tej dwójsiecznej podczas gdy odcinek utworzony przez dwa drugie punkta jest podzielonym na dwie równe części przez czwarty, jak to widzimy na figurze c_3.

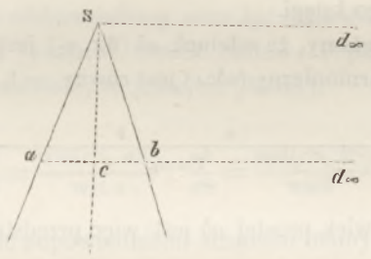

Fig. c_3.

Twierdzenie jest więc dowiedzionem, gdyż środek prostej i jej punkt w nieskończoności są jak wiemy sprzężonemi harmonicznemi jej końców (§ 251).

259. **Przecięcie płaskie graniastosłupa.** — Dla uzasadnienia naszych wykreśleń na wykreśleniach figur jednokładnych, będziemy uważali graniastosłup za ostrosłup, którego wierzchołek znajduje się w nieskończoności na krawędziach bocznych graniastosłupa. Wskutek tego, przecięcie płaskie graniastosłupa lub jego rzut na jednę z płaszczyzn spółrzędnych, będzie jak w ostrosłupie jednokładnem do podstawy lub do jej rzutu na tęż płaszczyznę rzutów; że zaś nadto w graniastosłupie, środek jednokładności znajduje się w nieskończoności, możemy więc powiedzieć poprostu, że pomiędzy rzutami podstawy i jakiegokolwiek przecięcia płaskiego graniastosłupa na tęż samą płaszczyznę rzutów, zachodzi powinowactwo.

260. **Zastosowanie.** — *Znając płaszczyznę podstawy* PpP′ *graniastosłupa, jej rzut poziomy abcdef i kierunek* δ, δ' *krawędzi bocznych, wyznaczyć wspólne przecięcie płaszczyzny jakiejkolwiek* QqQ′ *z tym graniastosłupem* (*fig.* 220, tab. XV). — Posługując się prostemi (vh, $v'h'$), ($b0$, $b'0'$) nakreślmy przedewszytkiem rzuty pionowe a', b', c' trzech wierzchołków podstawy, a następnie rzuty d', e', f' pozostałych wierzchołków tejże podstawy, lecz posługując się dla tych ostatnich wykreśleniem już wytłomaczonem (§ 60).

Po dokonaniu tych pierwszych wykreśleń i po nakreśleniu przez rzuty wierzchołków podstawy w kierunku δ, δ' rzutów krawędzi bocznych graniastosłupa, szukajmy przecięcia żądanego w zadaniu. Moglibyśmy wyznaczyć to przecięcie szukając punktów, w których płaszczyzna QβQ′ spotyka krawędzie boczne graniastosłupa, lecz wykreślenie to powtarzane tyle razy i doskonale znane czytelnikowi zastąpmy innem, zasadzającem się na teoryi powinowactwa, gdyż w ten sposób wskażemy natychmiast zastosowanie teoryj nowych podanych powyżej. I tak, dla znalezienia rzutu

pionowego szukanego przecięcia, dostatecznem będzie znaleźć rzut jego na płaszczyznie poziomej rzutów, a następnie z punktów tak znalezionych nakreślić linije rzutów przechodzące przez te punkta aż do spotkania z rzutami pionowemi krawędzi bocznych graniastosłupa.

Zajmijmy się obecnie, podawszy te wiadomości wstępne, samem zadaniem i oznaczmy przedewszystkiem oś powinowactwa X szukanego rzutu poziomego; otóż ta oś jest poprostu rzutem poziomym prostej wspólnego przecięcia się płaszczyzn PpP', QqQ', którą to prostę znaleźć umiemy.

Stosunek powinowactwa otrzymamy: 1° kreśląc za pomocą płaszczyzny pionowej rzucającej krawędź boczną przechodzącą przez punkt c, c', zkąd znajdziemy punkt γ, γ' przecięcia się tej krawędzi z płaszczyzną sieczną QqQ', a następnie 2° biorąc stosunek $\frac{\gamma\gamma_2}{c\gamma_2} = K$, który jest właśnie stosunkiem szukanym.

Rzędne wierzchołków wieloboku szukanego, liczone na rzucie poziomym krawędzi graniastosłupa są więc $Ka\alpha_2$, $Kb\beta_2$, $Kd\delta_2$, $Ke\varepsilon_2$, $Kf\varphi_2$. Wielkości te mogłyby być jużto obliczone, jużteż można je otrzymać bardzo łatwo za pomocą cyrkla redukcyjnego; lecz ponieważ w Geometryi wykreślnej należy zawsze przekładać sposób rysunkowy nad analityczny, a cyrkiel redukcyjny nie daje dostatecznego przybliżenia, postaramy się więc rozwiązać zadanie sposobem czysto geometrycznym.

Na prostych oy_1, oy_2 (*fig.* 221, tab. XV), tworzących pomiędzy sobą dowolny kąt, odetnijmy długości $oc_1 = c\gamma_2$, $o\gamma_1 = \gamma\gamma_2$ i nakreślmy prostę $c_1\gamma_1$; następnie odetnijmy oa_1, ob_1, od_1, oe_1, of_1 równe odpowiednio rzędnym $a\alpha_2$, $b\beta_2$, $d\delta_2$, $e\varepsilon_2$, $f\varphi_2$ rzutu poziomego wierzchołków podstawy i nakreślmy przez punkta a_1, b_1, d_1, e_1, f_1 proste równoległe do prostej $c_1\gamma_1$. Proste te przecinając się z oy_2 wyznaczą nam najprzód punkta α_1, β_1, δ_1, ε_1, φ_1, a następnie rzędne $o\alpha_1$, $o\beta_1$, $o\delta_1$, $o\varepsilon_1$, $o\varphi_1$ wierzchołków wieloboku szukanego. Otóż dla dokończenia poprzedniego wykreślenia dostatecznem będzie przenieść teraz rzędne znalezione na $\alpha_2\alpha$, $\beta_2\beta$, $\delta_2\delta$, $\varepsilon_2\varepsilon$, $\varphi_2\varphi$ a wreszcie nakreślić proste $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, i t. d., zkąd otrzymany wielobok $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\varphi$ będzie właśnie wielobokiem szukanym.

Rzut pionowy $\alpha'\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'\varphi'$ wieloboku otrzymamy obecnie, jak to powiedzieliśmy powyżej, za pomocą linij rzutów przechodzących przez punkta α, β, γ, δ, ε, φ.

Na figurze przedstawiliśmy graniastosłup ścięty zawarty pomiędzy podstawą na płaszczyznie PpP' i wielobokiem jego przecięcia płaszczyzną QqQ'; dla oznaczenia części widzialnych, ponieważ graniastosłup leży częściowo w kącie dwuściennym 2, znaleźliśmy jego ślad pionowy, biorąc ślady na tę płaszczyznę $\gamma'_3\delta'_3\varepsilon'_3$ krawędzi bocznych nie przedłużonych poza granicę podstaw graniastosłupa ściętego, i ślady $0'_3$, $0'_4$ na tęż samą płaszczyznę boków $(\varphi'\varepsilon', \varphi\varepsilon)$, $(\beta'\gamma', \beta\gamma)$.

W ten więc sposób znaleźliśmy ślad pionowy $0'_3\,\gamma'_3\,\delta'_3\,\varepsilon'_3\,0'_3$ graniastosłupa ściętego. Rzeczywistą wielkość przecięcia otrzymamy zaś robiąc kład płaszczyzny QqQ' i figury na niej leżącej na jednę z płaszczyzn rzutów; aby jednak uniknąć zamieszania na figurze naszej, to ostatnie wykreślenie, które czytelnik z łatwością sam wykonać może, zostało usunięte.

PRZECIĘCIA PŁASKIE OSTROSŁUPA.

261. Zadanie. — *Nakreślić przecięcie się ostrosłupa z płaszczyzną* (*fig.* 222, tab. XVI). — Niech będzie na płaszczyznie podstawy rzut *abcd* wieloboku podstawy, s rzut wierzchołka ostrosłupa, zaś x rzut prostej przecięcia się płaszczyzny podstawy z płaszczyzną sieczną. Do rozwiązania niniejszego zadania nie wykreśliliśmy na figurze rzutu pionowego jedynie dla uniknienia linij niepotrzebnych i zaciemniających rysunek, lecz czytelnik z łatwością sam będzie mógł dopełnić figury za pomocą linij rzutów.

Przypuściwszy, że za pomocą uprzedniego wykreślenia dobrze nam już znanego, punkt α, w którym jedna z krawędzi bocznych ostrosłupa spotyka płaszczyznę przecinającą, został wyznaczony, to zostanie nam tylko jeszcze zastosować wykreślenie odnoszące się do figur jednokładnych, gdyż znamy obecnie : oś x i środek s jednokładności, pierwszą figurę *abcd* i jeden punkt α drugiej, który jest punktem odpowiednim punktowi a pierwszej, mamy zaś tylko wykreślić figurę drugą. Zadanie to jest znane (§ 248), a wykreślenie tam użyte, zastosujemy do niniejszego zadania.

Połączmy w tym celu punkt n spotkania się osi x z prostą ab z punktem α, prosta $n\alpha$ będzie właśnie odpowiadającą prostej ab, a oznaczywszy teraz punkt β spotkania się prostej $n\alpha$ z krawędzią ostrosłupa sb, punkt ten będzie odpowiednim punktowi b, poczem postępując dalej w ten sam sposób, wykreślimy rzut poziomy $\alpha\beta\gamma\delta$ wieloboku szukanego.

262. Zadanie. — *Nakreślić przecięcie ostrosłupa płaszczyzną, która z płaszczyzną podstawy wyznacza oś oddaloną jednokładności* (*fig.* 223, tab. XVI).—Niech będzie s rzutem wierzchołka, zaś *abcdef* rzutem podstawy ostrosłupa na płaszczyznę poziomą rzutów. Jeżeli przypuścimy, że oś jednokładności leży poza granicami rysunku, musimy ją zastąpić, jako odpowiadającą dwu warunkom, przez dwa punkta wieloboku przecięcia. Rzuty poziome α, β, φ trzech punktów przecięcia się trzech krawędzi dowolnie obranych z płaszczyzną przecinającą, wyznaczymy wprost.

Zadanie więc nasze zostało sprowadzone w ten sposób do czysto geometrycznego, albowiem, znając środek s jednokładności, trzy pary (a, α), (b, β), (f, φ) punktów odpowiednich i jednę z figur *abcdef*, mamy nakreślić drugą. W tym celu, połączmy linijją prostą dwa punkta β i φ figury szukanej i nakreślmy prostę jej odpowiednią bf; mając to, poprowadźmy proste łączące punkt a odpowiedni punktowi danemu α, z innemi wierzchołkami c, d, e podstawy i oznaczmy punkta m, m_1, m_2 przecięcia się tych prostych z prostą bf; ponieważ punkta im odpowiednie μ, μ_1, μ_2 znajdują się na $\beta\varphi$ i na prostych sm, sm_1, sm_2, a zatem prostemi odpowiedniemi przekątniom podstawy będą proste $\alpha\mu$, $\alpha\mu_1$, $\alpha\mu_2$, których znów punkta przecięcia się z krawędziami ostrosłupa wyznaczą nareszcie wierzchołki nieznane γ, δ, ϵ wieloboku szukanego.

263. Zadanie. — *Przez punkt dany przesunąć płaszczyznę przecinającą ściany boczne ostrosłupa czworościennego podług równoległoboku.* — Ponieważ przekroje jednego ostrosłupa płaszczyznami pomiędzy sobą równoległemi są figurami podobnemi, wyznaczmy przeto najprzód kierunek takich płaszczyzn, które przecinając ściany boczne przeciwległe ostrosłupa dają na przecięcie dwie pary prostych równoległych, poczem kreśląc przez punkt dany płaszczyznę równoległą do tak znalezionego kierunku (§ 65), otrzymamy właśnie płaszczyznę szukaną.

Rozwiązanie pierwsze (*fig.* 224, tab, XVI). — Niech będzie ABCD podstawą ostrosłupa danego, zaś s rzutem jego wierzchołka na płaszczyznę poziomą rzutów.

Zadanie to możemy rozwiązać wprost i nadzwyczaj łatwo, zważywszy, że żeby jakaś płaszczyzna przecinała dwie inne podług prostych równoległych, potrzeba i dostatecznem jest, żeby ona była równoległą do prostej ich wspólnego przecięcia; że zaś dwie pary płaszczyzn (ASB, DSC), (ASD, BSC), utworzone przez przedłużenie ścian ostrosłupa, dają na przecięcie dwie proste, których ślady znajdują się w punktach t i 0, a płaszczyzna przez nie utworzona wyznacza kierunek szukany, jest więc to płaszczyzna, której ślad poziomy P przechodzi przez punkta t, 0 i nadto przez wierzchołek S ostrosłupa.

Wiedząc to, wyznaczmy ślad poziomy P_1 płaszczyzny przechodzącej przez punkt dany i równoległe do kierunku znalezionego powyżej, stosując do tego sposób wykreślenia podany w paragrafie 65; ślad ten przetnie ślady poziome dwóch par płaszczyzn podanych powyżej w dwóch parach

punktów (K, H), (F, G), które są śladami poziomemi boków równoległoboku szukanego przecięcia. Kreśląc więc przez pierwszą parę punktów proste równoległe do prostej *st*, a przez drugą parę proste równoległe do prostej mającej za rzut $s\theta$, otrzymamy rzuty poziome tych boków, które, jeżeli rysunek jest wykonany z dokładnością, winny się przecinać w czterech punktach *a*, *b*, *c*, *d* leżących na rzutach poziomych krawędzi bocznych ostrosłupa.

Rozwiązanie drugie (*fig.* 225, tab. XVI). — Rozwiązanie podane powyżej jest niedostatecznem, jeżeli dwa boki przeciwległe czworoboku podstawy przecinają się z sobą poza granicami rysunku; lecz w tym przypadku zauważyć należy, że punkt spotkania się przekątni równoległoboku winien dzielić te boki na dwie równe części i znajdować się na prostej łączącej wierzchołek ostrosłupa z punktem przecięcia się przekątni czworoboku jego podstawy.

Uważmy więc jak wyżej rzut poziomy *s*ABCD ostrosłupa, i nakreślmy przekątnie AC, BD jego podstawy, punkt ich zbiegu O i prostę *s*O powstałą z przecięcia się rzutu poziomego płaszczyzn przekątnich. Na tej ostatniej prostej obierzmy dowolnie punkt *o* i szukajmy rzutu równoległoboku przecięcia, którego środkiem jest ten punkt. Przekątnie tego równoległoboku są odcinkami prostych, zawartych pomiędzy parami prostych utworzonych przez rzuty krawędzi przeciwległych (*s*A, *s*C), (*s*B, *s*D), i przechodzących nadto przez punkt *o*, w którym są one podzielone na dwie równe części. Wykreślenie powyżej wspomnianych odcinków jest bardzo prostem zadaniem geometrycznem, które podajemy na naszym rysunku dla jednego z nich; i tak nakreśliwszy przez punkt *o* prostę równoległą do *sd*, która przecina SB w punkcie *m*, odcinamy $mb = sm$ i prowadzimy prostę *bo*, w przedłużeniu aż do punktu *d*, a prosta *bd* tak znaleziona jest właśnie jedną z przekątni szukanych.

Drugą przekątnię znajdziemy sposobem zupełnie podobnym do poprzedzającego, obie zaś one wyznaczą kierunek ogólny płaszczyzn szukanych, poczem kreśląc przez punkt dany płaszczyznę równoległą do wyznaczonej przez przekątnie, zadanie nasze będzie w zupełności rozwiązane.

Rozwiązanie trzecie. — Zasadzając się wyłącznie na teoryi jednokładności możemy dojść, nie korzystając nic z dwóch poprzednich rozwiązań, do rozwiązania naszego zadania w sposób następujący.

Przedewszystkiem jednak przypomnijmy kilka określeń geometrycznych. — Nazywamy czworobokiem zupełnym figurę ABCDθt (*fig.* 224. tab. XVI), otrzymaną z przedłużenia boków przeciwnych czworoboku aż do punktów *t*, θ; figura ta ma sześć wierzchołków A, B, C, D, θ, *t* i trzy przekątnie AC, BD, θt.

Ślad poziomy ostrosłupa winien być jednokładnym z rzutem równoległoboku przecięcia i dla tego znów czworobok zupełny ABCDθt winien być jednokładnym z drugim czworobokiem zupełnym, którego wierzchołki odpowiednie wierzchołkom θ, *t* leżą w nieskończoności, t. j. że prosta θt winna być i jest prostą graniczną odnoszącą się do podstawy danej.

Niech θ_1 będzie jednym punktem śladu poziomego szukanej płaszczyzny siecznej; ponieważ ten ślad jest osią jednokładności, która winna być równoległą do prostej granicznej, przeto kreśląc przez punkt θ_1 prostę P_1 równoległą do θt, otrzymamy właśnie tę oś. Znając takowę, szukajmy boku odpowiedniego bokowi DA podstawy; otóż ponieważ bok ten winien 1° przechodzić przez punkt F przecięcia się boku DA z osią jednokładności P_1, i 2° spotykać prostę graniczną w punkcie θ na prostej $s\theta$, którego odpowiednim jest punkt θ_∞ w nieskończoności, zatem kreśląc przez punkt F prostę równoległą do $s\theta$, znajdziemy bok odpowiedni szukany. Bok tak znaleziony winien być zakończonym w punktach *a* i *d* jego przecięcia się z prostemi, łączącemi wierzchołek *s* jednokładności z wierzchołkami A i D podstawy. W taki sam sposób możemy wykreślić pozostałe wierzchołki równoległoboku szukanego.

264. Metoda przemiany figur. — Rysunek podany na figurze 224 wskazuje, że wszelki czworobok zupełny może być przedstawiony w rzucie przez równoległobok; w tym przypadku bowiem potrzeba wziąć tylko za płaszczyznę rzutów płaszczyznę sieczną, za środek rzutów wierzchołek ostrosłupa, a za figurę w rzucie podstawę tego wielościanu, którego śladem jest P_1. Wypływa ztąd, że wszelka własność rzutowi równoległoboku przysługująca, odnosi się także do czworoboku zupełnego.

Otóż widzieliśmy, że punkt sprzężony harmoniczny środka o przekątni ac, znajduje się na tej prostej w nieskończoności (*fig.* 224, tab. XVI). Ponieważ zaś własność ta jest prawdziwą w rzucie, dochodzimy do twierdzenia następującego:

Twierdzenie. — *W czworoboku zupełnym, każda przekątnia jest podzieloną harmonicznie przez dwie pozostałe.* — Liczne twierdzenia wypływające z przekształcenia czworoboku za pomocą metody rzutów należą do geometryi, a jako takie pomimo swej wielkiej wagi nie mogą znaleźć miejsca w niniejszem dziele; jednakże, pomiędzy ćwiczeniami w tym rozdziale, podamy niektóre zastosowania tego sposobu przekształcania.

265. Przecięcie wielościanu z prostą. — Punkta, w których prosta spotyka wielościan, można wyznaczyć przesuwając najprzód przez prostę płaszczyznę sieczną pomocniczą i wyznaczając przecięcia tej ostatniej z wielościanem, a wreszcie szukając punktów, w których tak znaleziona linija przecięcia wielościanu płaszczyzną, przecina prostę daną. Jedyną trudnością, jaką przedstawia ten sposób postępowania, jest wybór płaszczyzny siecznej pomocniczej, który nie może być ujęty w ogólne prawidła i reguły; powiedzieć tu tylko możemy, że w każdym szczególnym przypadku należy zwrócić uwagę na dane zadania i przesunąć płaszczyznę sieczną tak, żeby przecięcie jej z wielościanem było jak najłatwiejszem do wykreślenia. To co tu mówimy zostanie okazanem na kilku przykładach.

266. Zastosowanie. — *Wyznaczyć punkta spotkania prostej z graniastosłupem.*—Przypuściwszy że podstawa ABCDE graniastosłupa leży na płaszczyznie poziomej rzutów (*fig.* 226, tab. XVI), nakreślmy rzuty graniastosłupa na obydwóch płaszczyznach rzutów za pomocą kierunku jego krawędzi bocznych, które przyjmujemy za znane i oznaczmy przez δ, δ' rzuty prostej, której życzymy znaleźć punkta spotkania z graniastosłupem.

W przypadku tym wybór płaszczyzny siecznej pomocniczej jest bardzo łatwy, gdyż przecinając graniastosłup płaszczyzną przechodzącą przez prostę δ, δ' a równoległą do jego krawędzi bocznych, jako przecięcie szukane otrzymamy dwie proste równoległe do tychże krawędzi. I tak, wykonywując wskazane wykreślenie, poprowadźmy przez punkt g, g', dowolnie obrany na prostej δ, δ', proste równoległe gh, $g'h'$ do rzutów krawędzi bocznych graniastosłupa, i wyznaczmy ślad poziomy h tej prostej, jakoteż ślady t, t' prostej δ, δ' danej; następnie połączmy punkt t z h, to prosta th, ztąd otrzymana wyznaczy nam ślad poziomy płaszczyzny siecznej pomocniczej, przecinającej graniastosłup podług dwu prostych, których ślady poziome znajdują się w punktach θ_1, θ_2. Jeżeli wreszcie przez tak znalezione punkta θ_1, θ_2 nakreślimy proste (i_1, i'_1), (i_2, i'_2) równoległe do krawędzi bocznych graniastosłupa, to wyznaczając punkta (m_1, m'_1), (m_2, m'_2) ich spotkania się z prostą daną δ, δ', otrzymamy właśnie punkta szukane. Rzuty (m_1, m'_1), (m_2, m'_2), jeżeli rysunek został wykonany z dokładnością, winny się znajdować na odpowiednich linijach rzutów.

267. Części widzialne prostej względnie do graniastosłupa. — Zadanie to jest ważnem z tego względu, że ono służy do wyznaczenia części widzialnych krawędzi graniastosłupa, przy szukaniu przecięcia się jego z wielościanem. Dla rozwiązania tego zadania należy przedewszystkiem, sposobem podanym w poprzedzającym paragrafie, oznaczyć punkta spotkania się prostej z graniasto-

słupem, w którym to celu wróćmy do figury poprzedzającej (*fig.* 226, tab. XVI) i szukajmy części widzialnych prostej δ, δ'.

Rozpatrując kolejno odcinki, na które prosta dana została podzieloną przez graniastosłup, znajdziemy:

1° odcinek m_1m_2, $m'_1m'_2$, który znajduje się wewnątrz graniastosłupa, oba więc jego rzuty są zawsze niewidzialne;

2° odcinki, których rzuty na płaszczyznie spółrzędnych uważanej, leżąc zawsze zewnątrz prostych tworzących obwód graniczny graniastosłupa, nie są nigdy dla niego ukryte jak np. odcinki μ_1, t, μ'_1, t', czyli są zawsze widzialne;

3° odcinki takie, których rzuty przypadając na częściach m_1n_1, m_2n_2, $m'_1\mu'_1$, $m'_2\mu'_2$, leżących nazewnątrz graniastosłupa, lecz których rzuty na płaszczyznę uważaną są wewnątrz graniastosłupa na tejże płaszczyznie, są więc one jużto widzialne jużteż ukryte stosownie do tego, czy ich punkta spotkania (m_1, m'_1), (m_2, m'_2) z graniastosłupem przypadają na jego ścianach widzialnych lub ukrytych na płaszczyznie rzutów odpowiadającej. Otóż widzimy np. że, ponieważ punkt m_2, m'_2 przypada na ścianie widzialnej w rzucie poziomym a na ukrytej w rzucie pionowym, odcinek $m_2\mu_2$ będzie widzialnym, a $m'_2\mu'_2$ ukrytym.

268. Przecięcie się prostej z ostrosłupem (*fig.* 227, tab. XVI). — Oznaczmy przez ABCDE podstawę ostrosłupa na płaszczyznie poziomej rzutów, przez s, s' rzuty jego wierzchołka, zaś przez d, d' rzuty prostej danej. Nakreślmy przez prostę d, d' i przez wierzchołek s, s' ostrosłupa płaszczyznę sieczną pomocniczą; ślad jej poziomy th otrzymamy, szukając przedewszystkiem śladów t, t' prostej d, d' i śladów h, h' prostej łączącej punkt s, s' z jednym z punktów g, g' prostej d, d'. Ponieważ ślad th płaszczyzny siecznej pomocniczej wyznacza w punktach (θ_1, θ'_1), (θ_2, θ'_2) ślady prostych, wzdłuż których płaszczyzna sieczna spotyka ostrosłup, kreśląc więc proste $(s\theta_1, s\theta'_1)$, $(s\theta_2, s'\theta'_2)$, otrzymamy rzuty przecięcia płaszczyzny z ostrosłupem a z nich wyprowadzimy rzuty (m_1, m'_1), (m_2, m'_2), których szukamy.

Dwa ostatnie zadania moglibyśmy byli rozwiązać, nie zmieniając bynajmniej figur 226 i 227, w sposób następujący. Przedstawmy na płaszczyznie poziomej rzutów, rzut zbieżny ostrosłupa (graniastosłup jest tylko szczególnym przypadkiem ostrosłupa) i prostej d, d', przyjmując punkt s, s', leżący w nieskończoności na krawędziach bocznych (gdy idzie o graniastosłup) za punkt zbiegu rzutów i szukajmy punktów wspólnych obu rzutom. Rzut ostrosłupa nie jest niczem innem tylko jego podstawą, rzut zaś prostej d, d', przechodzi najprzód przez punkt t, który jest sam swym rzutem zbieżnym, a następnie przez punkt h rzut zbieżny punktu g, g', czyli jest to prosta th. Ztąd wypada, że nieznane punkta spotkania mają za rzuty zbieżne punkta θ_1, θ_2, a podnosząc takowe z kładu znajdziemy szukane punkta (m_1, m'_1), (m_2, m'_2).

269. Części widzialne prostej względem ostrosłupa. — Zadanie to jest zupełnie podobnem do podanego w paragrafie 267, czytelnik więc z łatwością rozwiązanie jego sam wyczyta z figury 227.

270. Przecięcie się dwu wielościanów. — Rozwiązanie niniejszego zadania sprowadza się do wyznaczenia przecięć rozmaitych płaszczyzn przechodzących przez ściany wielościanu; sposób ten jest doskonale znany czytelnikowi, lecz zastosowanie jego bez żadnej reguły prowadziłoby do licznych prób, które jeżeli nie w zupełności usunąć, to przynajmniej zmniejszyć ich liczbę należy. W tym celu wyliczymy i podamy rozwiązanie różnych zadań, które połączone z sobą wytkną pewną drogę postępowania.

271. Zadanie. — *Znaleźć prostę przecięcia się dwu ścian wielościanów* (fig. c_4 i c_5). — Niech ABCDEF, GHIJKL (fig. c_4) będą ścianami, których szukamy wspólnego przecięcia. Należy znaleźć prostę PQ prze-

cięcia się płaszczyzn ścian danych (§ 66) i ograniczyć się w punktach M, N, zachowując jako użyteczną tę część prostej wspólnego przecięcia, która leży wewnątrz obwodu ścian uważanych. Jeżeli na prostej PQ nie ma części wspólnej obu ścianom, powiadamy, że ściany uważane nie przecinają się z sobą (fig. c_5).

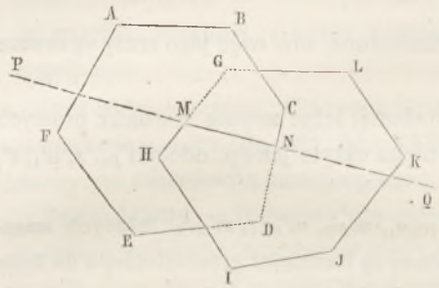

Fig. c_4.

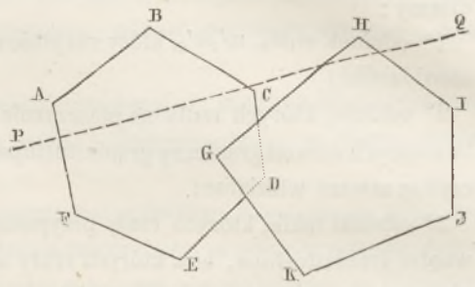

Fig. c_5.

Możemy jeszcze napotkać ten przypadek, że cała część użyteczna MN prostej wspólnego przecięcia PQ jest zawarta w obwodzie jednej ściany (fig. c_6) t. j. wprost przeciwnie, aniżeli to miało miejsce na (*fig.* c_4).

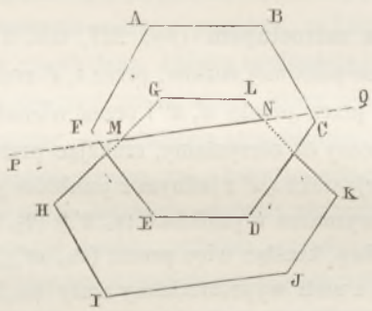

Fig. c_6.

272. Zadanie. — *Znaleźć punkt użyteczny przecięcia się dwu wielościanów.*

Metoda przecięć. – Sposobu ogólnego, za pomocą którego moglibyśmy wyznaczyć punkt użyteczny przecięcia się dwu wielościanów, t. j. punkt leżący jednocześnie wewnątrz obwodu dwu ścian na

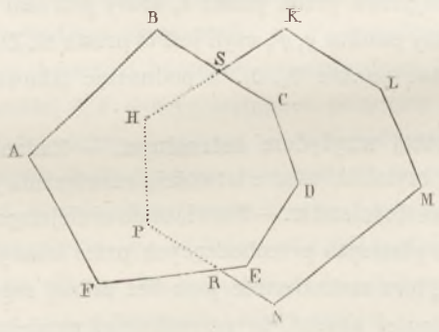

Fig. c_7.

których on winien się znajdować, dotąd w zupełności nieznamy, i w poszukiwaniach tego rodzaju, drogą najpewniejszą, którą postępować należy, jest uważny rozbiór położenia i kształtu wielościanów danych. Jeżeli droga, którą tutaj wskazujemy nie prowadzi do pożądanego celu, w takim razie

uciec się należy do metody zwanej metodą przecięć, która polega na użyciu płaszczyzny pomocniczej przecinającej oba wielościany i na szukaniu następnie punktów przecięcia się R, S obwodów ABCDEF, HKLMNP (fig. c_7) tych dwu przecięć.

Punkta R i S są punktami użytecznemi wieloboków wspólnego przecięcia. Gdyby obwody wieloboków powstałych z przecięcia się wielościanów płaszczyzną sieczną pomocniczą, nie dawały żadnego punktu spotkania, wówczas należy zmieniać położenie płaszczyzny siecznej pomocniczej dopóty dopóki punkt szukany znalezionym nie zostanie. Jak widzimy, i ta metoda nie prowadzi do rozwiązania zadania wprost, lecz tylko przez kolejne probowanie.

273. Zadanie. — *Znając punkt użyteczny* M *wspólnego przecięcia się dwóch wielościanów, wyznaczyć w zupełności jego obwód* (fig. c_8). — Punkt M leży na dwóch ścianach ABCDE, FGHIJ, które przecinają się z sobą użytecznie; niech częścią użyteczną prostej wspólnego przecięcia się tychże ścian będzie PQ, to biorąc pod uwagę jeden z jej końców np. Q znajdziemy, że ten punkt należy do krawędzi ED, która jest wspólnem przecięciem się ścian ABCDE, EDKL, a zastępując ścianę ABCDE przez jej przyległą EDKL, zaś przybierając ścianę FGHIJ już uważaną drugiego wielościanu, znaj-

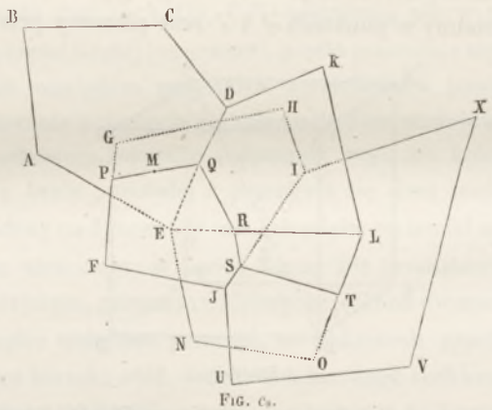

Fig. c_8.

dziemy nowy bok użyteczny QR szukanego wspólnego przecięcia się tych dwu ścian. Jeżeli obecnie weźmiemy pod uwagę punkt R, t. j. koniec tylko co znalezionej linii wspólnego przecięcia się, to spostrzeżemy, że leży on na krawędzi EL należącej do ściany EDKL już uważanej, a zastępując znów podobnież tę ostatnią ścianę przez jej przyległą ELON, znajdziemy następne części wieloboku wspólnego przecięcia się dwu wielościanów i t. d.

W ten sposób postępując i to w razie gdy oba dane wielościany są zamknięte, dojdziemy w końcu napowrót do punktu P już znalezionego, a tem samem wyznaczymy jednę z linij szukanego wspólnego przecięcia się wielościanów.

Znalazłszy w ten sposób jednę z linij wspólnego przecięcia się wielościanów,, należy sprawdzić, czy nie istnieją inne podobne linije. W tym celu i sposobem wyż podanym, szukać należy istnienia linii użytecznej, podobnej do poprzedzającej oprócz tej ostatniej, a postępując tak samo jak z punktem M pierwotnie uważanym, znajdziemy inne linije łamane, które należeć będą do szukanego przecięcia wielościanów.

Ważna uwaga. — Metoda, którą wyłożyliśmy powyżej do znalezienia wieloboku wspólnego przecięcia się dwu wielościanów, może być jeszcze użyteczną w przypadku, kiedy znając w sposób jakikolwiek wierzchołki takiego wieloboku, zechcemy połączyć je z sobą linijami w należytym porządku.

274. Zastosowanie. — *Nakreślić przecięcie się dwu sześcianów mających jednę przekątnię pionową wspólną* (fig. c_9). — Przedewszystkiem podajmy zasady kreślenia rzutów sześcianu, którego jedna z przekątni jest pionową. Niech tą przekątnią będzie prosta AB, zaś ACDBEHGF odpowiednim sześcianem.

Ponieważ obwód ACEB składa się z trzech prostych równych i jednakowo nachylonych do przekątni AB, więc rzuty tych prostych na przekątnię AB są równe, zrobiwszy więc rzut punktu C w punkcie γ i rzut punktu E w punkcie ε widzimy, że przekątnia AB jest podzieloną w punktach γ i ε na trzy części równe. Dodajmy nadto, że proste AC, AH, AF jako także równe pomiędzy sobą i jednakowo nachylone do przekątni AB, będą miały rzuty punktów C, H, F na tę przekątnię w jednym punkcie γ, zaś rzuty wierzchołków G, E, D będą w punkcie ε na tejże przekątni. Widzimy więc, że sześć wierzchołków, o których wykreślenie chodzi, tworzą dwie grupy trzech punktów, leżących odpowiednio na dwu płaszczyznach prostopadłych do przekątni AB i przechodzących przez punkta γ i ε, w których ta przekątnia jest podzieloną na trzy równe części.

Zajmijmy się obecnie wykreśleniem takiego sześcianu. Niech ab, $a'b'$ (*fig.* 228, tab. XVII) będą rzutami przekątni danej, a dla dopełnienia wykreślenia tej bryły dajmy jeszcze rzut bm jednej z jego krawędzi przedłużonej. Podzielmy w punktach γ' i ε' rzut pionowy przekątni danej na trzy równe

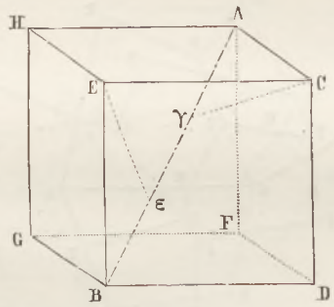

Fig. c_9.

części i przez te punkta nakreślmy dwie płaszczyzny poziome P' i Q'. Z powyższego wiedząc, że każda z tych płaszczyzn winna zawierać trzy punkta, postarajmy się oznaczyć położenie tych dwu grup wierzchołków sześcianu.

W tym celu nadajmy sześcianowi ruch obrotowy taki, żeby bok BM przyjął położenie w płaszczyźnie obrazu; po dokonaniu tego obrotu, ściana prostopadła do boku BM będzie miała za rzut pionowy jednę prostę tworzącą z rzutem pionowym tego boku kąt prosty, którego wierzchołek daje się wyznaczyć z łatwością, gdyż musi on leżeć 1° na okręgu koła nakreślonym na $a'b'$ jako średnicy, i 2° na Q'. Tym więc szukanym punktem będzie punkt δ' mający za rzut poziomy δ, którego sprowadzenie do pierwotnego położenia d, d' nie przedstawi żadnej trudności.

Ponieważ figura jest symetryczną, rzuty poziome krawędzi wychodzących z punktu b, b', znajdziemy natychmiast, albowiem należy tylko nakreślić na tej płaszczyźnie rzutów, rzuty bd, be, bg tych krawędzi równe sobie i tworzące pomiędzy sobą kąty 120°. Znając te dwa warunki, znając nadto jednę z prostych bd, możemy nakreślić dwie pozostałe be, bg, a rzuty ich pionowe odpowiadające otrzymamy, kreśląc z punktów e, g linije rzutów do punktów e', g' na Q'.

Widząc dalej, że ściany sześcianu w rzucie na każdę z płaszczyzn rzutów winny przedstawiać równoległoboki, na parach boków (bd, be), (be, bg), (bg, bd) nakreślmy równoległoboki, a otrzymamy w punktach c, f, h rzuty trzech pozostałych wierzchołków sześcianu; postępując zaś w sposób podobny

powyższemu, otrzymamy rzuty pionowe tychże wierzchołków w punktach c', f', h', które, jeżeli figura została wykreśloną z dokładnością, winny się znaleźć, na linijach rzutów przechodzących przez punkta c, f, h i na P'. Nareszcie, dla dopełnienia wykreślenia, należy połączyć punkt a' z punktami c', f', h' i punkt a z punktami odpowiedniemi c, f, h.

Powyższe wykreślenie wskazuje, że rzut poziomy sześcianu składa się z boków sześciokąta foremnego i z tych samych przekątni, które przechodzą przez jego środek. Przenieśmy obecnie tak nakreślony sześcian (*fig.* 228, tab. XVII) na figurę 229 tejże tablicy, i połączmy go z drugim sześcianem mającym tęż samą przekątnię AB, lecz dla nadania figurze większej regularności ustawmy je w ten sposób, żeby sześciany były symetrycznie położone względem płaszczyzny obrazu, przechodzącej przez ich wspólną przekątnię, i żeby wierzchołki sześcioboków przedstawiających ich rzuty poziome względnie siebie były równooddalone.

Żeby wyznaczyć obecnie wielobok wspólnego przecięcia się tych sześcianów zpożytkujmy symetryję tych figur i wyznaczmy część ściętą kąta trójściennego w wierzchołku f, f' przez ścianę $a'u'v'w', auvw$. Otóż przypatrując się bliżej figurze dostrzegamy, że proste $(fd, f'd')$, $(uv, u'v')$ symetrycznie położone względem płaszczyzny profilu przechodzącej przez przekątnię ab, $a'b'$, przecinają się w punkcie k, k' tej płaszczyzny, nadto, że proste $(vw, v'w')$, $(fg, f'g')$ przecinają się w punkcie m, m', a ponieważ punkt a, a' należy do trójkąta części ściętej (*troncature*), przeto przecięcie się szukane będzie $amk, a'm'k'$. Postępując w podobny sposób względem wszystkich wierzchołków pozostałych lecz nie wspólnych obu bryłom, znajdziemy ostatecznie przecięcie się całkowite dwu wielościanów danych.

Dla wyczerpania rzeczy podaliśmy rozmaite połączenia brył, na które natrafić możemy i tak: figura 229 przedstawia rzuty bryły powstałej z przecięcia się dwu sześcianów; figura 230 przedstawia sześcian pierwotnie podany na figurze 228 tak, jak gdyby on istniał sam i był pełnym, odrzucając część jego zawartą w drugim sześcianie; w końcu figura 231 przedstawia bryłę wspólną dwu sześcianom pełnym i nieprzezroczystym, przyczem widzimy, że jest ona dwunastościanem równościennym.

275. Cieniowanie. — Części widzialne przecięć, w wykresach przedstawiających przecięcie się brył, są cieniowane za pomocą kresek; otóż, aczkolwiek kierunek tych kresek jest zazwyczaj dowolny, jednakże jeżeli części widzialne, o których mowa, są złożone z kilku powierzchni a nadewszystko, jeżeli te powierzchnie mają linije wspólne, kierunek kresek winien być zmieniany. Figura 230 daje wyjaśnienie zasady postępowania, o której tutaj mówimy.

276. Przecięcie się ostrosłupów. — Jeżeli jakikolwiek graniastosłup uważać będziemy jako ostrosłup, którego wierzchołek leży w nieskończoności, będziemy mieli do wyznaczenia:

1° Przecięcie się dwu ostrosłupów,

2° — ostrosłupa z graniastosłupem,

3° — dwu graniastosłupów.

Zanim przystąpimy do rozwiązania tych trzech zadań, winniśmy zwrócić uwagę, że one się dają rozwiązać odrazu, nie zaś za pomocą kolejnych przybliżeń jak to ma miejsce dla wielościanów jakichkolwiek.

277. Zadanie I. — *Nakreślić przecięcie się dwu ostrosłupów.* — Rzuty pionowe jako nieużyteczne do wytłomaczenia wykresu, a które otrzymać możemy z łatwością za pomocą linij rzutów, usuniemy, i we wszystkich wykreśleniach, które nastąpią mówić tylko będziemy o rzutach poziomych. Niech (*abcde*, *ghklm*) przedstawiają rzuty podstaw ostrosłupów i s, σ rzuty ich wierzchołków (*fig.* 232, tab. XVI); przypuśćmy nadto, że rzuty pq prostej wspólnego przecięcia płaszczyzn, na których leżą podstawy, jakoteż rzuty t, θ śladów na tęż płaszczyznę prostej łączącej wierzchołki S i Σ, są znane.

Szukając przecięcia się dwu wielościanów jakichkolwiek, wyznaczaliśmy boki wielokątów przecięcia, tutaj zaś szukać będziemy wierzchołków wielokąta a następnie połączymy tak znalezione punkta brane po dwa i w należytym porządku, linijami prostemi. Wierzchołki szukane wieloboku przecięcia otrzymamy, kreśląc przez krawędzie każdego ostrosłupa płaszczyzny przechodzące zarazem przez wierzchołek drugiego z nich, a dla ujednostajnienia wykreślenia obierzemy płaszczyzny pomocnicze w ten sposób, żeby one przechodziły przez każdą z krawędzi ostrosłupów i przez prostę $S\Sigma$ łączącą ich wierzchołki. W tych warunkach płaszczyzny pomocnicze utworzą księgę płaszczyzn, a rzuty ich śladów na płaszczyzny podstaw dwie wiązki prostych, których wierzchołki znajdują się w punktach t i θ, a odpowiednie promienie przetną się na prostej pq i przejdą kolejno przez wszystkie wierzchołki obu podstaw.

Zanim przystąpimy do wyznaczenia jednego z wierzchołków wielokąta przecięcia, dla uniknienia wszelkich bezużytecznych prób, należy nakreślić płaszczyzny ograniczające to jest te, które obejmują pomiędzy sobą wszystkie płaszczyzny sieczne pomocnicze użyteczne do wyznaczenia zupełnego wielokąta przecięcia.

278. Płaszczyzny ograniczające. — Śladami jednej z płaszczyzn szukanych na płaszczyzny dwu podstaw są proste mające za rzuty $0\rho_1$, $t\rho_1$, z których jedna $\theta\rho_1$ przecina rzut podstawy jej odpowiadającej w jednym punkcie b, gdy tymczasem druga $t\rho_1$ przecina rzuty drugiej podstawy dowolnie; w sposób podobny poprzedzającemu znajdziemy drugą płaszczyznę ograniczającą $t\theta\rho_7$. Tak znalezione dwie płaszczyzny są rzeczywiście płaszczyznami szukanemi, albowiem wszelka płaszczyzna, przesunięta przez $S\Sigma$ i zawarta pomiędzy temi dwiema płaszczyznami, przetnie oba ostrosłupy, podczas gdy każda inna płaszczyzna przechodząca przez tęż prostę lecz nazewnątrz otwartości kątowej objętej płaszczyznami ograniczającemi, będzie tylko mogła spotkać jeden z ostrosłupów danych.

279. Sposób wyznaczenia jednego jakiegokolwiek punktu wieloboku przecięcia. — Promienie składające wiązki muszą kolejno przechodzić przez każdy z wierzchołków a, b, c, h, k, l, m dwóch podstaw, zawartych pomiędzy dwiema płaszczyznami ograniczającemi.

Zróbmy wykreślenie dla jednego z tych promieni θa; promień ten przecina prostę pq w punkcie ρ_4, jego więc promień sprzężony otrzymamy łącząc punkt ρ_4 z t prostą $\rho_4 t$. Płaszczyzna sieczna odpowiadająca, której ślady na płaszczyznach podstaw są linijami prostemi, mającemi za rzuty właśnie promienie które nakreśliliśmy, przecina ostrosłup o wierzchołku S podług dwóch prostych, z których jedna jest krawędzią mającą za rzut prostę sa, a druga jako nieużyteczna nie została wykreśloną, drugi zaś ostrosłup podług dwóch prostych mających za rzuty prostę σv_4 i σw_4; punkta spotkania się tych prostych z prostą sa t. j. i_4 i j_4, wyznaczą dwa wierzchołki rzutu wieloboku przecięcia. Powtarzając wykreślenie podane tutaj dla wszystkich pozostałych wierzchołków podstaw, znajdziemy łatwo inne wierzchołki wieloboku przecięcia.

280. Przenikanie. — Przenikanie wzajemne. — Wycięcie. — Powiadamy, że jest *przenikanie*, jeżeli dwie płaszczyzny ograniczające odnoszą się do jednego ostrosłupa, to jest obie przecinają tę powierzchnię podług jednej krawędzi, gdyż wówczas ten ostrosłup przenika drugi, wchodząc weń podług pierwszej linii a wychodząc zeń podług drugiej. *Przenikanie wzajemne* jest tylko szczególnym przypadkiem poprzedzającego, gdyż każda z płaszczyzn ograniczających może spotkać oba ostrosłupy podług jednej krawędzi, a w takim razie znajdziemy dwa wieloboki przecięcia, spotykające się z sobą w dwóch punktach leżących odpowiednio na przecięciu się krawędzi zawartych w płaszczyznach ograniczających. Nareszcie mówimy że jest *wycięcie*, jeżeli jedna z płaszczyzn ograniczających przecina jeden ostrosłup podług wieloboku, a druga przecina drugi także podług wieloboku. Przypadek ostatni został przedstawiony na figurze 232.

. 281. **Łączenie punktów.** — Zadanie to wymaga tylko uwagi, lecz dla uniknienia błędów można zawsze uciec się do jednego ze sposobów podanych poniżej.

282. **Sposób ogólny.** — Chociaż sposób podany powyżej (§ 273. Uw.) do łączenia punktów przecięcia się dwu wielościanów jakichkolwiek, może być stosowanym bez trudności do przypadku, którym się w tej chwili zajmujemy, jednakże podamy tu jeszcze inny sposób mający tę zaletę, że stosuje się, jak to zobaczymy dalej, do łączenia także punktów przecięcia się powierzchni stożkowych jakichkolwiek, a co jest tylko uogólnieniem niniejszego zadania, gdyż wszelki ostrosłup może być uważany za ostrokrąg, którego kierownica jest wielobokiem.

283. **Sposób rzutów zbieżnych.** — Uważmy jakikolwiek punkt, opisujący wielobok szukany ruchem ciągłym wychodząc z jednego z jego wierzchołków, i oznaczmy rzut zbieżny tego punktu ruchomego na każdą z płaszczyzn podstawy, przyjmując za punkt zbiegu rzutów wierzchołek odpowiadający ostrosłupowi w ten sposób, żeby wielobok szukany był raz rzucony na jednę, drugi raz na drugą podstawę. Widoczną jest rzeczą, że te rzuty opiszą także obie podstawy ruchem ciągłym, postępując wstecz na płaszczyznach ograniczających. Nareszcie jeżeli znajdziemy rzuty punktów ruchomych opisujących podstawy na prostę PQ, przyjmując za punkt zbiegu rzutów, dla podstawy leżącej po prawej stronie, punkt θ, zaś punkt t dla podstawy leżącej po stronie lewej, znajdziemy jeden i tenże sam ruch ciągły ze zwrotem na płaszczyznach ograniczających w punktach mających za rzuty ρ_1, ρ_2.

Zastępując każdy z tych ruchów jego rzutem poziomym i uważając je w kierunku wstecznym, znajdziemy w jaki sposób postępuje punkt kreślący, który ma połączyć z sobą wierzchołki wieloboku przecięcia.

Jeden z rzutów wstecznych na płaszczyznach ograniczających może być usuniętym, wychodząc z punktu leżącego na jednej z płaszczyzn ograniczających, w tym przypadku otrzymamy następujące ruchy jednoczesne : 1° na pq, najprzód $\rho_1\ \rho_2\ \rho_3 \ldots \rho_7$ w kierunku strzałki π_1, następnie w kierunku strzałki π_2 droga przebieżona będzie $\rho_7\ \rho_6\ \rho_5 \ldots \rho_1$; 2° na wieloboku leżącym z prawej strony, drogi przebieżone odpowiadające w kierunku strzałek $f_1, f_2, f_3 \ldots f_8$; 3° na drugim wieloboku oznaczonym przez strzałki $F_1, F_2, F_3, \ldots F_{10}$; 4° w końcu ruch punktu opisującego obwód szukany a oznaczony przez strzałki $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots \varphi_{14}$. W tej chwili zastosowaliśmy więc sposób rzutów zbieżnych do *wycięcia* w dalszym zaś ciągu podamy jego zastosowanie do *przenikania.*

284. Na tablicy XVI przedstawione zostały rozmaite kombinacye ostrosłupów. Pierwsza z nich (*fig.* 232) przedstawia rzut bryły utworzonej ze złożenia ich razem w jedno ciało, druga (*fig.* 233) przedstawia rzut jednego ostrosłupa wyciętego przez drugi, a figura została wycieniowaną kreskami odpowiednio zasadzie podanej w paragrafie 275, wreszcie ostatnia (*fig.* 234) przedstawia rzut poziomy bryły wspólnej obu ostrosłupom.

285. **Części widzialne wieloboku przecięcia.** — Żeby bok uważany był widzialnym, trzeba i wystarcza, żeby on się znajdował na przecięciu dwu ścian widzialnych ostrosłupa, jeżeli tak jak na figurze 232 przedstawiamy razem oba ostrosłupy. Jeżeli jeden z dwóch ostrosłupów został usuniętym jak na figurze 233, obwód $a_1b_1c_1d_1e_1f_1g_1h_1k_1j_1m_1$, leżąc na ścianach widzialnych ostrosłupa przedstawionego, będzie także widzialnym; druga część przecięcia będzie zakrytą, oprócz jednakże odcinków o_1p_1, q_1p_1, r_1a_1, które leżą nazewnątrz obwodu przedstawionego powyżej, a które stają się w samej rzeczy widzialnemi wskutek odjęcia części wielościanu przedstawionego, zawartej w wielościanie usuniętym.

Co się tyczy bryły wspólnej (*fig.* 234) widzimy, że te części, które były widzialnemi na figurze 232,

pozostają widzialnemi, a pozostałe części widzialne znajdzie się za pomocą sposobu podanego w paragrafie 236 przez punkt ruchomy.

286. Widzialność krawędzi bocznych ostrosłupa. — Dla oznaczenia jej uciec się należy do sposobu podanego w paragrafie 269.

287. Punktowanie. — Przy wykonaniu rysunku, gdy pewne części bryły zostały usunięte, należy je przedstawić w ten sposób, żeby one nie zaciemniały rysunku części zatrzymanych, w tym celu przedstawia się je linijami przerywanemi i złożonemi z kresek cieniutkich oddzielonych punktem, jak to ma miejsce na figurze 233, tab. XVI.

288. Zadanie II. — *Nakreślić przecięcie się graniastosłupa z ostrosłupem.* — Prosta wspólna rozmaitym płaszczyznom pomocniczym, przechodzi w tym przypadku przez wierzchołek ostrosłupa i przez punkt leżący w nieskończoności krawędzi bocznych graniastosłupa, czyli jestto prosta równoległa do krawędzi graniastosłupa, a przechodząca przez wierzchołek ostrosłupa. Oprócz tej uwagi nic więcej nie mamy do nadmienienia tutaj.

289. Zadanie III. — *Nakreślić przecięcie się dwu graniastosłupów.* — Użyjemy tutaj sposobu podanego w zadaniu pierwszem z tą tylko różnicą, że zmienimy części znane, żeby w ten sposób przedstawić zadanie w nowem świetle. W tym to właśnie celu dwie podstawy dolne graniastosłupów ABCDEG, HIJKL (*fig.* 235, tab. XVIII) zostały umieszczone na płaszczyźnie poziomej rzutów i obrany został przypadek *przenikania*, a dla większej regularności rysunku, graniastosłupy zostały zamknięte przez swe podstawy górne, których rzuty poziome przedstawione na $a_1b_1c_1d_1e_1g_1$, $h_1i_1j_1k_1l_1$ są naturalnie równe podstawom dolnym nakreślonym poprzednio. Dla wyznaczenia rzutów poziomych krawędzi bocznych każdego graniastosłupa, nakreślmy proste łączące wierzchołki odpowiednie. Ponieważ płaszczyzny sieczne pomocnicze winny przechodzić przez punkta leżące w nieskończoności i w kierunku krawędzi bocznych każdego graniastosłupa, t. j. ponieważ płaszczyzny sieczne pomocnicze winny być równoległe do kierunku krawędzi bocznych, zatem dla dokończenia wykreślenia przypuśćmy, że śladem poziomym jednej z nich jest prosta R.

290. Wyznaczenie jednego jakiegokolwiek punktu wieloboku przecięcia. — Szukajmy np. punktów leżących na krawędzi, której rzutem jest prosta Aa_1. Śladem poziomym płaszczyzny siecznej przechodzącej przez tę krawędź jest prosta R_1 równoległa do R i przechodząca przez ślad A tej krawędzi; płaszczyzna ta przecina ściany drugiego graniastosłupa podług prostych równoległych do krawędzi, bocznych tego wielościanu przechodzących przez punkta θ_1, θ_2, a w punktach b_6, b_4 przecięcia się rzutów θ_1t_1, θ_2t_2 z prostą Aa_1, znajdujemy rzuty dwu punktów wieloboku szukanego.

291. Płaszczyzny ograniczające. — Rodzaj przecięcia. — Ponieważ ślady poziome P, Q punktów ostatecznych spotykają w jednym punkcie podstawę graniastosłupa pięciokątnego, wnosimy więc ztąd, że ten graniastosłup przenika drugi.

292. Łączenie punktów. — Łączenie punktów w przypadku przenikania jest daleko łatwiejsze niż w przypadku wycięcia, którem zajmowaliśmy się poprzednio, albowiem zważając, że w tym razie mamy dwa wieloboki, jeden wejścia, drugi wyjścia, kreślimy je każdy oddzielnie. Porządek, w jakim punkta należące do jednej z linij wspólnego przecięcia winny być łączone, będzie tenże sam co dla punktów przecięcia się płaszczyzn siecznych po sobie następujących gdy przebiegamy jednocześnie całkowitą podstawę graniastosłupa pięciokątnego w kierunku strzałek φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, φ_5 jakoteż odcinek podstawy drugiego graniastosłupa, zawarty pomiędzy płaszczyznami ograniczającemi w kierunku strzałek f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6. W ten sposób znajdziemy wielobok wejścia $a_1a_2a_3a_4\ldots a_8a_9$.

Wielobok wyjścia znajdziemy z połączenia punktów doń należących, a to postępując po podstawie

graniastosłupa pięciokątnego zawsze w kierunku strzałek powyżej podanych, a następnie zastępując ten kierunek przez inny oznaczony strzałkami $F_1, F_2, \ldots F_6$; w ten sposób otrzymamy wielobok $b_1b_2b_3\ldots b_8b_9$.

Wykres przedstawia graniastosłup sześciokątny pełny i nieprzezroczysty po usunięciu części odciętej przez graniastosłup pięciokątny, lub mówiąc innemi słowy, bryła otrzymana będzie graniastosłupem sześciokątnym z otworem graniastosłupowym pięciokątnym.

ROZWIJANIE WIELOŚCIANÓW. — LINIJA NAJMNIEJSZA

293. Rozwijanie wielościanów. —Żeby rozwinąć wielościan dany przez swe rzuty, dostatecznem będzie oznaczyć na tych rzutach elementa niezbędne do przedstawienia ścian w rzeczywistej ich wielkości, następnie nakreślić te ściany łącząc je z sobą w takim porządku, w jakim one były połączone na bryle i odpowiednio do krawędzi rozdwojonych. Ponieważ rozdwojenie krawędzi może się odbywać w rozmaity sposób, zatem także rozwinięcie wielościanu może przyjąć rozmaite kształty odpowiednie.

294. Linija najmniejsza. — Postarajmy się znaleźć liniję łączącą dwa punkta leżące na powierzchni wielościanu, którejby długość, nie opuszczając nic z tej powierzchni, była najmniejszą. Rozwiązanie tego zadania jest zastosowaniem natychmiastowem twierdzenia następującego.

295. Twierdzenie. — *Pomiędzy rozmaitemi rozwinięciami powierzchni wielościanu wypukłego znajduje się zawsze jedno takie, że linija najmniejsza, łącząca dwa punkta tej powierzchni nie opuszczając nic z takowej, zamienia się na liniję prostą.*

1° Przypuśćmy, że wierzchołki linii najmniejszej nie przypadają w wierzchołkach wielościanu, i uważmy dwa boki po sobie idące MN, NP (fig. c_{10}) tej linii i dwie ściany ABCDE, EFGHD, na których

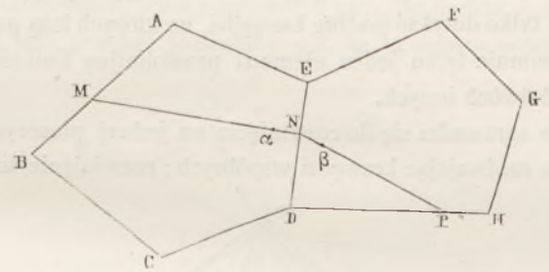

Fig. c_{10}.

one leżą, okażemy, że boki MN, NP są przedłużeniem jeden drugiego, jeżeli rozwiniemy wielościan nie rozdwajając krawędzi ED na której leży punkt N.

W tym celu, obierzmy na MN i NP dwa punkta α i β tak do siebie zbliżone, żebyśmy mogli po rozwinięciu wielościanu połączyć punkta im odpowiadające z sobą liniją prostą, nie wychodząc z wieloboku rozwiniętego. Linija prosta w ten sposób otrzymana będzie, jak widzimy, przekształconą linii najmniejszej łączącej z sobą punkta α i β na tej powierzchni, a ponieważ każda część linii najmniejszej musi być także najmniejszą, wnosimy ztąd, że ta prosta musi być także przekształconą linii łamanej $\alpha N\beta$, czyli, że trzy punkta α, N, β, znajdują się po rozwinięciu na jednej linii prostej, albo wreszcie, że MN i NP będą także linijami prostemi po rozwinięciu.

Okażmy obecnie, że na ścianie *abcd*, na której leży bok MN linii najmniejszej (fig. d_1), nie może

leżeć żaden więcej punkt tej linii. Rzeczywiście, żeby oprócz linii MN znajdował się jeszcze punkt np. V, musielibyśmy przypuścić, że na tej ścianie znajduje się linija łamana VMN, która byłaby drugą liniją najmniejszą, a wskutek tego krótszą od prostej łączącej punkta N i V, co jest niemożebnem, czyli że na ścianie uważanej może tylko leżeć linija MN.

Dla dopełnienia dowodu pierwszej części niniejszego twierdzenia, zachowując tęż samą figurę, uważmy jakąkolwiek część MNPQ linii najmniejszej jakoteż ściany *abcde, cdfgh, hgklm*, na których ona leży; każda z tych ścian winna obejmować jeden bok prostolinijny linii najmniejszej, a nie więcej, na zasadzie dowodzenia podanego powyżej.

Obecnie dowieść należy, że rozwinięcie może mieć miejsce nie rozdwajając krawędzi *ae, cd, hg, ml*, i t.d., które przechodzą przez rozmaite wierzchołki linii najmniejszej. Ponieważ nic nie przeszkadza roz-

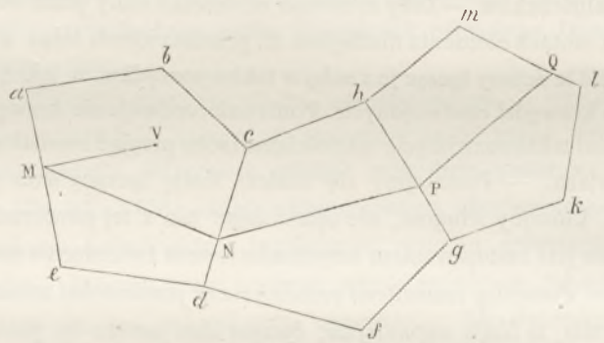

Fig. d_1.

dwojeniu krawędzi, na których nie przypadają wierzchołki linii najmniejszej, możemy więc pominąć ściany nie obejmujące tej linii i uważać je za usunięte, nadto, nic nie staje na przeszkodzie, żeby rozdwoić krawędzie wspólne ścianom pozostałym, a nie zawierające punktów należących do linii najmniejszej. Ściany mogą się tylko dotykać podług krawędzi, na których leżą punkta linii najmniejszej, a ponieważ każda ściana obejmuje tylko jeden element prostolinijny linii najmniejszej, zatem każda ściana może tylko dotykać dwóch innych.

Ostatecznie całe zadanie sprowadza się do rozwinięcia na jednej płaszczyznie ścian połączonych po dwie jedną krawędzią, nie rozdwajając krawędzi wspólnych; rozwinięcie to może się dokonać przez

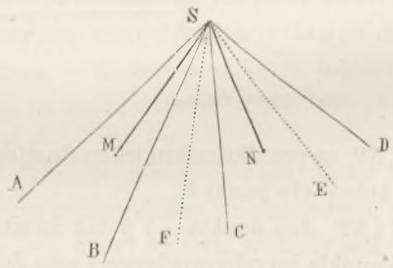

Fig. d_2.

obroty po sobie następujące naokoło krawędzi wspólnych, którymto obrotom nic nie może przeszkodzić. Nadto widzimy, że w tych warunkach boki linii najmniejszej po sobie idące, układają się na jednej prostej; zatem dla przypadku którym się zajmujemy twierdzenie nasze jest dowiedzionem.

2° Zobaczmy obecnie czy obwód linii najmniejszej może przechodzić przez wierzchołek S wielościanu (fig. d_2).

Niech będzie ASBCDEF kąt trójścienny odpowiadający części MSN linii najmniejszej, przechodzącej przez punkt S; ponieważ część ta powinna być najmniejszą, możemy jej więc użyć tylko do dowodu t. j. nie zwracając uwagi na części, które ją poprzedzają lub po niej następują. Otóż, ponieważ wielościan a więc i kąt S jest także wypukłym, zaś summa jego ścian jest mniejszą od czterech kątów prostych, zatem proste MS, NS dzielą ściany tego kąta na dwie grupy, z których jedna daje summę kątów mniejszą od czterech kątów prostych, lecz która może stać się większą lub równą dwu kątom

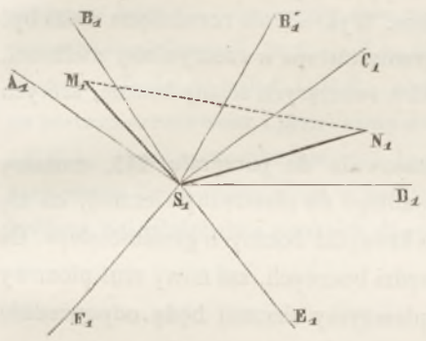

Fig. d_3.

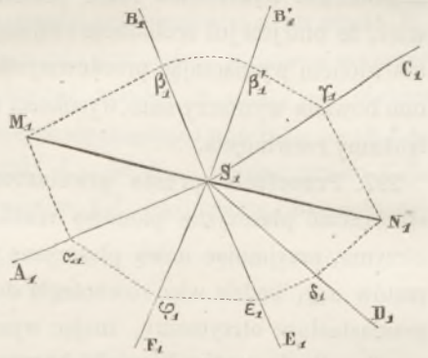

Fig. d_4.

prostym, gdy tymczasem druga tworzy summę mniejszą od dwu kątów prostych; wypada ztąd, że jeżeli rozwiniemy kąt trójścienny podług jednej krawędzi, znajdziemy jedno z trzech położeń przedstawionych poniżej (fig. d_3, d_4, d_5).

Na figurze d_3 prosta łącząca punkta M_1 i N_1 przechodzi na przestrzeni kątowej $B_1S_1B'_1$ zewnątrz rozwinięcia i nie daje żadnej skazówki, lecz uważając figurę d_5, która przedstawia rozwinięcie tegoż samego kąta bryłowego tylko zrobione inaczej, dostrzegamy, że linija najmniejsza będzie daną przez nawinięcie prostej M_1N_1 nie przechodzącej przez wierzchołek kąta. Na figurze d_4, na której M_1S_1 jest przedłużeniem N_1S_1 w jednej linii prostej, zdawałoby się, że ta prosta powinna przedstawiać liniję

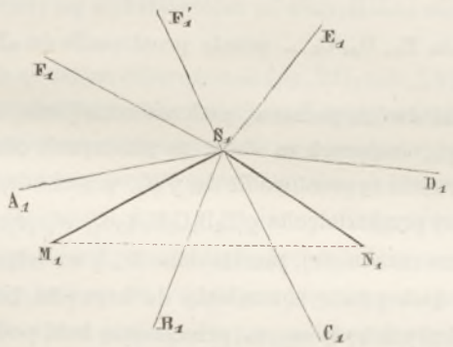

Fig. d_5.

najmniejszą; lecz żeby rzeczywiście tak było, potrzeba, żeby $M_1S_1N_1$ było mniejsze od linij, które toż przedłużenie poprzedzają i od tych, które po niem następują, wychodząc zawsze z punktów M_1 i N_1. Gdy zaś już z figury widzimy, że z jednej strony M_1N_1, dla linii $M_1\alpha_1\varphi_1\varepsilon_1\delta_1N_1$ warunek ten nie ma miejsca z tego powodu, że linije te są przerwane na krawędzi rozdwojonej, należy więc uciec się do figury sprzężonej d_5, na której znajduje się linija M_1N_1 zadość czyniąca warunkowi i przedstawiająca przez swe nawinięcie drogę najmniejszą, lecz nie przechodząca przez wierzchołek wielościanu. Możemy więc

powiedzieć jednem słowem, że linija najmniejsza nie może przechodzić przez którykolwiek wierzchołek wielościanu, i jeżeli napotkamy w zastosowaniach przypadek podobny do przedstawionego na figurze d_4, należy zrobić nowy kład, o czem się przekonamy z następującego przykładu.

296. Ćwiczenie. — *Znając rzuty poziome* ABCDEG, $a_1b_1c_1d_1e_1g_1$ *podstaw graniastosłupa, wysokość* h *i rzuty poziome* m, n *dwu punktów leżących na ścianach, których śladami są* GE, AB, *wyznaczyć oba rzuty linii najmniejszej łączącej punkta* M, N, *nie wychodząc poza obręb graniastosłupa* (*fig.* 236, tab. XVIII). — Ponieważ wykreślenie rzutu poziomego graniastosłupa dokonywa się z łatwością, przypuścimy więc, że ono jest już zrobionem i zajmiemy się jego rozwinięciem. Wykreślenie rozwinięcia może być ułatwionem wyznaczając przedewszystkiem przecięcie proste graniastosłupa w rzeczywistej wielkości, ono bowiem wyznaczy nam wysokości różnych równoległoboków tworzących ściany boczne, których szukamy rozwinięcia.

297. Przecięcie proste graniastosłupa ukośnego. — Stosownie do paragrafu 243, możemy sprowadzić płaszczyznę pionową rzutów do położenia prostopadłego do płaszczyzny siecznej, co się otrzyma, przyjmując nową płaszczyznę pionową równoległą do krawędzi bocznych graniastosłupa. Oś rzutów x_1y_1 będzie więc równoległą do rzutu poziomego krawędzi bocznych, zaś nowy rzut pionowy graniastosłupa otrzymamy, znając wysokość h, a ślady $P_\alpha P'$ płaszczyzny siecznej będą odpowiednio prostopadłe do rzutów krawędzi bocznych.

Rzuty pionowe wierzchołków przecięcia prostego znajdują się w punktach a'_3, b'_3, c'_3, d'_3, e'_3, g'_3, nie szukając więc jego rzutu poziomego, jako niepotrzebnego, przechodzimy natychmiast do oznaczenia rzeczywistej wielkości $A_3B_3C_3D_3E_3G_3$ tego przecięcia prostego, robiąc jego kład $A_3B_3C_3D_3$ naokoło śladu $_\alpha P$ jako osi obrotu. Sposób postępowania, który tutaj przyjęliśmy, ułatwia rzecz nietylko w tem wykreśleniu lecz we wszelkich następnych.

Obecnie doszliśmy do samego rozwinięcia; otwórzmy więc graniastosłup podług krawędzi Gg_1, $g'g'_1$ i połóżmy go na płaszczyznie obrazu przechodzącej przez tę krawędź. Przecięcie proste rozwinie się na śladzie P', a jego wierzchołki przypadną w punktach, które otrzymamy odcinając

$$g'_3E_4 = G_3E_3, \quad E_4D_4 = E_3D_3, \quad D_4C_4 = D_3C_3, \text{ i t. d.}$$

Kreśląc obecnie przez punkta E_4, D_4, C_4 ... proste prostopadłe do $_\alpha P'$, otrzymamy po rozwinięciu, położenie krawędzi bocznych.

Nadto ponieważ, wierzchołki dwóch podstaw, podczas rozwijania, zmieniają położenie na płaszczyznach prostopadłych do $g'g'_1$, mających za ślady, na płaszczyznie obrazu zawierającej rozwinięcie, proste, których rzutami pionowemi są prostopadłe do $g'g'_1$, przechodzące przez punkta a', b', c',..., zatem w ten sposób znajdujemy przekształcone $g'E_2D_2C_2B_2A_2G_2$, $g'_1e_2d_2c_2b_2a_2g_2$ obu podstaw.

Umieśćmy obecnie, na figurze rozwiniętej, punkta dane M, N we właściwych im miejscach, a w tym celu nakreślmy przez każdy z nich prostę równoległą do krawędzi bocznych graniastosłupa; rzuty poziome tych prostych równoległych będą $m\mu$, $n\nu$ przecinające boki podstawy górnej w punktach μ, ν, których rzutami pionowemi są μ', ν'. Znając to, znajdziemy przedewszystkiem na rozwinięciu punkta μ_2, ν_2, a następnie w rzucie pionowym punkta m', n' odpowiadające punktom danym, wreszcie zaś za pomocą wykreślenia ogólnego tyle razy używanego, położenie M_2, N_2 punktów danych po rozwinięciu graniastosłupa.

Przekształcona przez rozwinięcie jednej z linij najmniejszych, jest prostą łączącą punkta M_2, N_2 i nawija się na graniastosłupie podług linii $m'n't's'r'u'$, $mntsru$ bez trudności, przyczem dodać tu winniśmy, że prosta M_2N_2 przedstawia liniję najmniejszą w rzeczywistej wielkości.

Żeby podać drugie rozwiązanie, należy dwie ściany na których ono się znajduje uczynić przyległemi; w tym celu należy ścianę rozwiniętą $E_2e_2g'_1g'$ położyć w przedłużeniu ściany $A_2a_2g_2G_2$ wraz z punktem M_2, lecz łatwiej będzie przenieść punkt M_2 do drugiego położenia na rozwinięciu, odcinając na przedłużeniu $m'M_2$ do punktu M_3 długość ω_3M_3 równą ω_2M_2.

Druga linija najmniejsza rozwinięta w rzeczywistej wielkości będzie więc liniją M_3N_2, której nawinięcie nie przedstawi trudności, a rzuty jej znajdziemy na $m'v'w'n'$, $mvwn$.

Na końcu poprzedzającego paragrafu zauważyliśmy przypadek szczególny, w którym linija najmniejsza łączy po rozwinięciu dwa punkta B_2, L_2, leżące na prostej przechodzącej przez punkt B_2; potrzeba nam dowieść, że linija B_2L_2 nie jest najmniejszą. W tym celu przenieśmy podstawę w rzeczywistej wielkości na $A_2B_2C_2D_3E_3G_3$, następnie uważmy ściany boczne $A_2B_2b_2a_2$, $A_2a_2g_2G_2$ jako ułożone na nowem rozwinięciu, i przenieśmy dwie ściany boczne, na których się znajduje linija B_2L_2, na $\lambda B_2C_3\lambda_1$, $\lambda_1C_3D_4\lambda_2$. Przenosząc obecnie, jak to przedstawia figura, punkt L_2 do L_3 i kreśląc prostę K_2L_3, otrzymamy liniję najmniejszą w rzeczywistej wielkości, a nawijając K_2L_2 znajdziemy oba rzuty najkrótszej odległości dwu punktów danych na graniastosłupie.

KREŚLENIE KUL WPISANYCH I OPISANYCH NA WIELOŚCIANACH

298. Jeżeli wielościan uważany jest foremnym, z łatwością znajdziemy środek kuli wpisanej lub opisanej, gdyż w tym razie dosyć nakreślić dwie prostopadłe w środku dwu ścian nierównoległych wielościanu a punkt spotkania się tych prostopadłych będzie właśnie punktem szukanym. Promienie tych kul oznaczają się za pomocą rzeczywistej wielkości odległości tego środka jużto od jednej ze ścian, jeżeli kula jest wpisaną, jużteż od wierzchołka wielościanu, dla kuli opisanej.

Jeżeli wielościan jest nieforemnym, zadanie nasze jest zazwyczaj niemożliwem do rozwiązania, oprócz jednakże czworościanu, na którym zawsze może być kula wpisaną lub opisaną. Dla bliższego poznania tego zadania, zajmijmy się wykreśleniem ze wszystkiemi szczegółami rysunku odnoszącego się do czworościanu.

299. **Zadanie.**—*Opisać kulę na danym czworościanie* (*fig.* 237, tab. XVIII).—Ustawmy podstawę ABC czworościanu na płaszczyźnie poziomej rzutów i niech s, s' będą rzutami jego wierzchołka. Środek niewiadomy kuli jest miejscem geometrycznem punktów równooddalonych od wierzchołków podstawy, to jest na prostopadłej do płaszczyzny pionowej rzutów, przechodzącej przez środek koła opisanego na trójkącie ABC; oznaczmy ten środek przez o i opiszmy okrąg koła. Z tego cośmy powiedzieli, środek szukany znajduje się na pionowej przechodzącej przez punkt o, a zatem przez rzut poziomy środka kuli; nakreślmy cięciwę obrazu kuli np. $s\theta$, $s'\theta'$, to jest cięciwę przechodzącą przez wierzchołek dany i spotykającą okrąg koła, a płaszczyzna prostopadła przesunięta przez środek tej cięciwy, przejdzie przez środek kuli i wyznaczy takowy. W samej rzeczy, płaszczyzna ta będąc prostopadłą do płaszczyzny pionowej rzutów, będzie wyznaczoną przez ślad pionowy P' poprowadzony przez punkt m' to jest przez środek prostej $s'\theta'$ i prostopadle do tej ostatniej. Punkt przecięcia się prostej P' z pionową przechodzącą przez punkt o, wyznaczy nam szukany rzut pionowy o' środka kuli.

Znając rzuty środka kuli, rzeczywistą wielkość promienia wyznaczymy z łatwością, kreśląc liniję obrazu przez punkt o, o' do punktu θ_1, θ'_1 okręgu koła, gdyż rzut pionowy tej prostej $o'\theta'_1$ będzie właśnie promieniem szukanym w rzeczywistej wielkości. Gdyby prosta równoległa do xy, a

przechodząca przez punkt s, nie przecinała okręgu koła, w takim razie należy zmienić położenie płaszczyzny pionowej rzutów, żeby w ten sposób sprowadzić oś rzutów do położenia należytego.

300. Zadanie. — *Nakreślić kule styczne do czterech ścian czworościanu danego.* — Środki kul szukanych są punktami równooddalonemi od czterech płaszczyzn otrzymanych z przedłużenia ścian czworościanu, czyli są to punkta zbiegu płaszczyzn dwójsiecznych, w kątach dwuściennych utworzonych przez te płaszczyzny, a punkta te otrzymamy, biorąc punkta spotkania płaszczyzn dwójsiecznych trzech kątów dwuściennych nie należących do jednego kąta trójściennego, gdyż płaszczyzny dwójsieczne tegoż samego kąta trójściennego zbiegają się na jednej linii prostej.

Niech będą α_1, α_2, α_3, płaszczyzny dwójsieczne kątów dwuściennych AB, BC, AC czworościanu danego ABCD zaś β_1, β_2, β_3 płaszczyzny dwójsieczne kąta trójściennego spełniającego. Środki szukane wyznaczy się, kombinując z sobą trójkami te płaszczyzny, lecz w ten sposób, żeby nigdy dwie płaszczyzny przechodzące przez tęż samą krawędź, nie wchodziły razem do jednej kombinacyi; postępując w ten sposób, otrzymamy trzy następujące połączenia.

1° α_1, α_3, α_3, które daje kulę wpisaną w czworościan.

2° $(\alpha_1, \alpha_3, \beta_2)$, $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_3)$, $(\alpha_2, \alpha_3, \beta_1)$, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ a więc razem cztery kombinacyje, wyznaczające

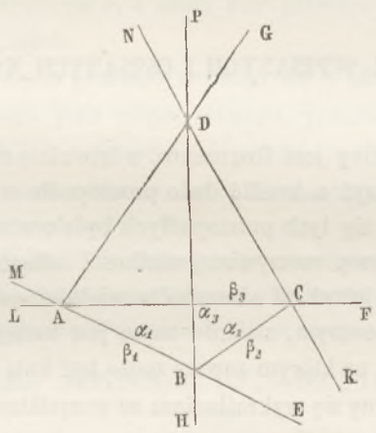

Fig. 60.

kule styczne zewnętrznie do jednej ściany i dotykające wewnętrznie trzech pozostałych ścian przedłużonych. Kombinacya zatem np. $(\alpha_1, \alpha_3, \beta_2)$ przedstawia kulę styczną do ścian figury EBCDGF.

3° $(\beta_1, \beta_3, \alpha_2)$, $(\beta_1, \beta_2, \alpha_3)$, $(\beta_2, \beta_3, \alpha_1)$. Pierwsze z tych połączeń wyznacza środek kuli stycznej do jednego ze szczytów HBEKCF, LAMNDP, toż samo ma miejsce dla innych. Co do tego ostatniego przypadku zauważymy, że każda z sześciu krawędzi przedstawia jeden szczyt, lecz z tych sześciu szczytów mamy tylko trzy kule, gdyż, jak to właśnie widzieliśmy, szczyty mające za krawędzie BC, AD dają tylko jednę kulę, albowiem krawędzie te są przeciwległemi czworościanu. Widzimy ostatecznie, że zadanie to przedstawia wogóle ośm rozwiązań, a mianowicie : jednę kulę wpisaną, której środek leży na przecięciu się płaszczyzn dwójsiecznych wewnętrznych; cztery kule *wpisane zewnętrznie* (*ex-inscrite*), których środki leżą na przecięciu się dwu płaszczyzn dwójsiecznych wewnętrznych i jednej zewnętrznej, lub trzech płaszczyzn dwójsiecznych zewnętrznych, a w końcu trzy kule styczne do szczytów, których środki leżą na przecięciu się dwu płaszczyzn dwójsiecznych zewnętrznych i jednej wewnętrznej.

Zajmijmy się wykreśleniem rysunku. Niech będzie ABC podstawą czworościanu na płaszczyznie pozio-

mej rzutów, d rzutem poziomym wierzchołka, zaś h wysokością (*fig.* 238, tab. XX). Żeby wykreślić sześć płaszczyzn dwójsiecznych α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3, przedstawmy kąt płaski, każdego z kątów dwuściennych odpowiadających, za pomocą trzech płaszczyzn pionowych prostopadłych do ich krawędzi AB, BC, AC, a których osie rzutów x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3, są odpowiednio prostopadłe do tychże krawędzi.

Rzuty pionowe d'_1, d'_2, d'_3 wierzchołka D wyznaczy się, odcinając na trzech linijach rzutów, wychodzących z punktu d i odpowiednio prostopadłych do trzech osi rzutów, od tych osi i do góry, długości równe h.

Nakreśliwszy proste $a'_1 d'_1$, $a'_2 d'_2$, $a'_3 d'_3$, otrzymamy ślady pionowe płaszczyzn trzech ścian bocznych, a kąty utworzone przez te ślady z odpowiedniemi osiami rzutów, będą miarą kątów utworzonych przez ściany boczne czworościanu z jego podstawą. Przez dwójsieczne tych kątów i ich spełniających wyznaczone zostaną ślady pionowe $(\alpha'_1 a'_1, \beta'_1 a'_1)$, $(\alpha'_2 c'_2, \beta'_2 c'_2)$, $(\alpha'_3 a'_3, \beta'_3 a'_3)$ sześciu płaszczyzn dwójsiecznych; te płaszczyzny są odpowiednio prostopadłe do trzech płaszczyzn pionowych rzutów, i mają swe ślady poziome na krawędziach AB, BC, CA podstawy. Punkta spotkania tych płaszczyzn otrzymamy, przecinając je płaszczyzną poziomą pomocniczą, mającą za ślady pionowe proste H'_1, H'_2, H'_3 odpowiednio równoległe do osi rzutów, a w odległościach od tych osi dowolnych lecz równych. Płaszczyzna pomocnicza wyznacza na płaszczyznach dwójsiecznych wewnętrznych proste spotkania (γ'_1, γ_1), (γ'_2, γ_2), (γ'_3, γ_3), a na płaszczyznach dwójsiecznych zewnętrznych proste, których rzutami są (δ_1, δ'_1), (δ_2, δ'_2), (δ_3, δ'_3). Mając obecnie wszystko przygotowane do wyznaczenia rozmaitych środków, zajmijmy się wykreśleniem kul odpowiadających każdej z trzech powyżej wspomnianych kombinacyj.

Kula wpisana. — Środkiem tej kuli jest punkt wspólnego przecięcia się płaszczyzn dwójsiecznych wewnętrznych, których ślady pionowe oznaczymy przez α'_1, α'_2, α'_3.

Obecnie wyznaczając przedewszystkiem proste wspólnego przecięcia się płaszczyzn branych po dwie, otrzymamy trzy proste, których jeden punkt będzie dany przez A, B, C, a drugi przez przecięcie (γ_1, γ'_1), (γ_2, γ'_2), (γ_3, γ'_3) płaszczyzny poziomej pomocniczej z płaszczyznami dwójsiecznemi wewnętrznemi; rzuty więc poziome tych prostych szukanych będą a_1, b_1, c_1, a nakreśliwszy proste Aa_1, Bb_1, Cc_1, znajdziemy rzuty poziome prostych wspólnego przecięcia uważanych płaszczyzn dwójsiecznych.

Rysunek powinien przedstawiać to sprawdzenie, że trzy proste, o których mowa powyżej, winny się przecinać w jednym punkcie o, który jest rzutem poziomym środka szukanego. Ponieważ punkt o należy do trzech płaszczyzn dwójsiecznych wewnętrznych, a więc rzut jego na jednę z płaszczyzn pionowych winien przypaść na śladzie pionowym odpowiedniej płaszczyzny dwójsiecznej, zatem w ten sposób znajdziemy punkt o'_1, który z punktem o wyznacza środek szukany.

Dokończymy obecnie wykreślenia kuli wpisanej zważając, że winna ona być styczną do płaszczyzny poziomej, a zatem że znamię (wzniesienie) $p'_1 o'_1$ jej środka jest równe jej promieniowi.

Kule wpisane zewnętrznie (*ex-inscrite*). — Weźmy pod uwagę połączenia z sobą płaszczyzn dwójsiecznych, których ślady pionowe przypadają na α'_1, α'_2, β'_3. Żeby znaleźć ich punkt wspólnego przecięcia, postąpmy w ten sam sposób jak poprzednio, a więc, zachowując zawsze też samą płaszczyznę sieczną pomocniczą H_1, H_2, H_3, wyznaczy ona nam trzy proste wspólnego przecięcia (γ_1, γ'_1), (γ_2, γ'_2), (γ_3, γ'_3), za pomocą których otrzymamy znów rzuty poziome trzech punktów a_5, b_4, c_5 wspólnego przecięcia się płaszczyzn dwójsiecznych branych po dwie, a ponieważ punkta A, B, C należą, jak poprzednio, do prostych wspólnego przecięcia, łącząc więc je z sobą, otrzymamy proste Aa_5, Bb_4, Cc_5, które winny się zbiegać w jednym punkcie ω_3 przedstawiającym rzut poziomy środka kuli; jeden rzut pionowy tego punktu znajduje się w punkcie ω'_3, zaś promień kuli wyznaczonym

będzie przez prostę $\omega'_3\pi'_3$. W sposób zupełnie podobny podanemu obecnie znaleźć można wreszcie na rysunku środki (ω'_1, ω_1), (ω'_2, ω_2), (ω'_4, ω_4) jakoteż promienie $\omega'_1\pi'_1$, $\omega'_2\pi'_2$, $\omega'_4\pi'_4$ trzech pozostałych kul wpisanych zewnętrznie.

Kule styczne do szczytów. — Jedną z tych kul wyznaczyliśmy, kombinując płaszczyzny dwójsieczne, których ślady pionowe są β'_1, β'_2, α'_3. Płaszczyzna pozioma pomocnicza, już używana poprzednio, wyznacza na każdej z tych płaszczyzn dwójsiecznych proste (δ_1, δ'_1), (δ_2, δ'_2), (δ_3, δ'_3), które wyznaczają znowu rzut poziomy punktów b_6, a_7, c_6, t. j. po jednym dla każdej z prostych wspólnego przecięcia płaszczyzn dwójsiecznych branych po dwie, na mocy czego rzuty poziome tych prostych będą przedstawione przez proste Bb_6, Aa_7, Cc_6; rzut więc poziomy środka znajdzie się w punkcie ich wspólnego przecięcia ω_5, zaś rzut pionowy na jednej z płaszczyzn pionowych będzie ω'_5, a promieniem w rzeczywistej wielkości kuli szukanej będzie $\omega'_5\pi'_5$.

Rozbiór. — Oznaczmy przez r, $(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4)$, $(\rho'_1, \rho'_2, \rho'_3)$ promień kuli wpisanej, promienie kul wpisanych zewnętrznie, i promienie kul wpisanych w szczyty; oznaczmy nadto przez a, b, c, d, e i V powierzchnie ścian i bryłowatość czworościanu.

Jeżeli rozdzielimy czworościan na trzy inne, mające za podstawy ściany boczne pierwszego a za wierzchołek wspólny środek kuli wpisanej, otrzymamy :

$$V = \frac{1}{3} r(a+b+c+d),$$

zkąd

$$(1) \qquad r = \frac{3V}{a+b+c+d}.$$

Wzór (1) stosuje się do innych promieni z tym tylko warunkiem, że jeżeli środek kuli zmieni swe położenie odpowiednio do ściany uważanej, znak powierzchni winien być także zmienionym.

W ten sposób mamy więc dla innych promieni wyrażenia następujące :

$$(2) \qquad \rho_1 = \frac{3V}{b+c+d-a}, \qquad \rho_2 = \frac{3V}{a+c+d-b}, \qquad (3)$$

$$(4) \qquad \rho_3 = \frac{3V}{a+b+d-c}, \qquad \rho_4 = \frac{3V}{a+b+c-d}, \qquad (5)$$

$$\rho'_1 = \pm\frac{3V}{a+b-c-d}, \qquad \rho'_2 = \pm\frac{3V}{a+c-b-d}, \qquad \rho'_3 = \pm\frac{3V}{a+d-b-c}.$$

Trzy ostatnie wzory, przypuszczając że

$$a < b < c < d,$$

dadzą się napisać w ten sposób :

$$(6)\,(7)\,(8) \qquad \rho'_1 = \frac{3V}{c+d-a-b}, \qquad \rho'_2 = \frac{3V}{b+d-a-c}, \qquad \rho'_3 = \pm\frac{3V}{a+d-(b+c)}.$$

Wzór (1) wskazuje, że kula wpisana istnieje zawsze.

Kule wpisane zewnętrznie istnieją także zawsze, gdyż we wzorach (2), (3), (4) i (5) mianowniki są dodatne, wiemy wreszcie, że w każdym czworościanie powierzchnia jednej ściany jest zawsze mniejsza od summy powierzchni trzech ścian pozostałych.

Jeżeli ściany są różne, wzory (6) i (7) wyznaczają promienie dwóch kul stycznych do szczytów, a jeżeli nadto $a+d \lesseqgtr b+c$, zadanie dostarcza ośm rozwiązań; będzie zaś ich tylko siedm, jeżeli

summa dwóch ścian jest równa summie dwóch pozostałych, gdyż w tym przypadku ósmy środek będzie leżał w nieskończoności. Jeżeli zaś jednocześnie $a=b$, $c=d$, będzie $\rho'_2=\infty$, $\rho'_3=\infty$, a zadanie przedstawi sześć rozwiązań.

Jeżeli wreszcie $a=b=c=d$, trzy szczyty nie mają kul stycznych i zadanie ma tylko pięć rozwiązań.

ĆWICZENIA NALEŻĄCE DO ROZDZIAŁU VI I VII

301. Zadanie I. — *Wyznaczyć środki kul stycznych do czterech płaszczyzn, opierając wykreślenie na następującem twierdzeniu:*

Twierdzenie. — *Jeżeli kula jest wpisaną w czworościan i jeżeli zrobimy kład wewnętrznie trzech ścian na czwartę, to cztery punkta styczności kuli z czworościanem zejdą się w jeden, nadto punkt wspólny zetknięcia jest środkiem koła opisanego na trójkącie utworzonym przez trzy kłady czwartego wierzchołka.* (HERMARY, *Korespondencya matematyczna*, t. V.)

Dowiedźmy przedewszystkiem twierdzenia. W tym celu, oznaczywszy przez ABCD czworościan dany (fig. d_7) a przez O środek kuli weń wpisanej, nakreślmy przez ten punkt proste prostopadłe do ścian, to one wyznaczą punkta dotknięcia γ_1, γ_2, γ_3, γ_4.

Płaszczyzna $\gamma_1 O \gamma_2$ prostopadła do krawędzi AB przecina tę ostatnią w punkcie α takim, że proste $\alpha\gamma_1$, $\alpha\gamma_2$ są także prostopadłe do prostej AB; nadto, te proste są równe jako styczne do kuli wycho-

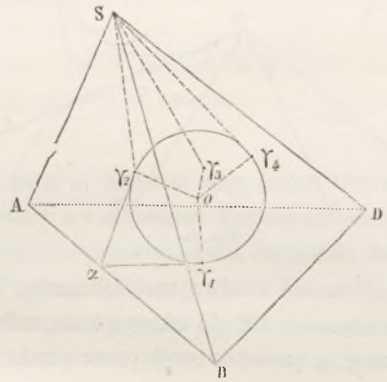

FIG. *d*.

dzące z jednego punktu, zkąd wynika, że zrobiwszy kład wewnętrznie ściany ASB, punkt γ_2 przypada na γ_1 a zaś punkt γ_3 na γ_4; pierwsza część twierdzenia jest więc dowiedzioną.

Nakreśliwszy proste $S\gamma_2$, $S\gamma_3$, $S\gamma_4$ widzimy, że one są styczne do kuli a więc równe sobie, zkąd wypływa natychmiast druga część twierdzenia.

Obecnie przejdźmy do zadania; niech będą dane na płaszczyźnie poziomej rzutów: podstawa ABD czworościanu (*fig.* 239bis, tab. XVIII), rzut poziomy s wierzchołka i wysokość h ostrosłupa.

Obierzmy oś rzutów xy prostopadłą do AB, i oznaczmy w punkcie s', stosownie do wysokości danej, rzut pionowy wierzchołka, oznaczmy nadto ślad pionowy $\alpha s'$ ściany SAB i zróbmy jej kład wewnętrzny; wierzchołek s, s' przypadnie w punkcie S_1. Żeby zrobić kład wewnętrzny wierzchołka naokoło prostej BD jako osi obrotu, zauważmy, że odległość wierzchołka S od punktu B powinna się

przedstawić w rzeczywistej wielkości tak na jednym jak na drugim kładzie; że zaś jeden z nich jest na BS_1, kreśląc więc z punktu B jako środka promieniem równym BS_1 okrąg koła, ten ostatni powinien przejść przez drugi kład wierzchołka s, s', a ponieważ ten wierzchołek leży na prostopadłej do osi obrotu BD przechodzącej przez punkt s, zatem kład szukany musi się znaleźć na przecięciu się S_2 tychże linij. W sposób zupełnie podobny otrzymamy kład S_3 tegoż wierzchołka naokoło osi obrotu AD. Środek kuli znajdziemy, biorąc środek o koła opisanego na trójkącie, którego wierzchołkami są S_1, S_2, S_3, gdyż ten punkt jest rzutem poziomym środka kuli, pionowy zaś o' znajduje się na śladzie pionowym $\alpha\alpha'$ płaszczyzny dwójsiecznej wewnętrznej kąta dwuściennego AB i na linii rzutów przechodzącej przez punkt o, więc na ich wspólnem przecięciu. Promień tej kuli równa się wzniesieniu $\omega o'$ jej środka.

Zachęcamy cytelnika do wykreślenia środków kul wpisanych zewnętrznie lub kul stycznych do szczytów, w tym bowiem przypadku dostatecznem będzie, jak kula zmieni swe położenie względem jakiej ściany, zmienić poprostu kierunek kładu tej ściany i powtórzyć tę zmianę tyle razy, ile razy kula zmieni swe położenie względem płaszczyzny podstawy.

Uwaga. — Twierdzenie poprzedzające, w przypadku ostrosłupa, który może być opisanym na kuli, daje możność znalezienia środka i promienia tej ostatniej i prowadzi do bardzo prostego twierdzenia geometrycznego.

302. Zadanie II. — *Mając dane trzy punkta, nakreślić przez jeden z nich prostę oddaloną od dwu pozostałych o dwie długości znane.* — Niech A i B będą dwoma punktami danemi (fig. d_8) i D trzecim punktem danym; nakreślmy proste AD, BD i przypuśćmy, że zrobionym został na płaszczyznę trzech

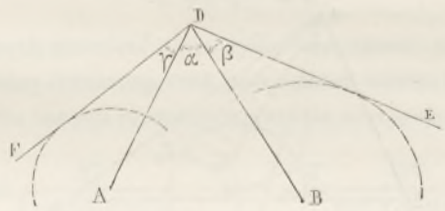

Fig. d_8.

punktów, trzykrotny kład prostej nieznanej rozdwojonej, obracając ją naokoło osi obrotu BD, AD. Prosta ta przypadnie najprzód na stycznej DE do okręgu koła, zakreślonego z punktu B promieniem równym jednej długości znanej, a przechodzącej przez punkt D; drugi kład DF otrzymamy w sposób zupełnie podobny poprzedzającemu, czyli zadanie sprowadzi się do nakreślenia kąta trójściennego, którego ściany α, β, γ są znane. Rysunek ten wykonamy z łatwością.

303. Zadanie III. — *Przez punkt dany* A *w przestrzeni nakreślić prostę, której znamy odległość od prostej danej* B *i od punktu* D (fig. d_9). — Zadanie to może być sprowadzone do rozwiązania jednego z przypadków kąta trójściennego.

Rzeczywiście, nakreślmy przez punkt A prostę $A\beta$ równoległą do prostej danej B i prostę AD; przyjmijmy za płaszczyznę figury, płaszczyznę wyznaczoną przez proste $A\beta$ i AD, a następnie szukajmy elementów potrzebnych do wykreślenia kąta trójściennego, którego krawędziami są proste AB, AD i prosta szukana. W tym celu przypuśćmy, że kład prostej szukanej został zrobiony na płaszczyznę figury, obracając ją naokoło prostej AD; że zaś w tem położeniu prosta szukana przypadnie na stycznej AE do okręgu koła, zakreślonego z punktu D jako środka promieniem równym jednej z odległości danych, a przechodzącej przez punkt A, zatem w ten sposób znajdziemy rzeczywistą wielkość α jednej ze ścian

kąta trójściennego. Drugi warunek dany, to jest, żeby prosta szukana leżała w odległości znanej od prostej B, wyznaczy nam nowy element szukanego kąta trójściennego.

Ponieważ najkrótsza odległość dwu prostych ma za miarę odległość jednego z punktów jednej prostej, od płaszczyzny przechodzącej przez drugą ale równolegle do pierwszej, zatem płaszczyzna przesunięta przez $A\beta$ i przez prostę szukaną, sprowadzoną do należytego położenia, winna się znajdować w odległości znanej od prostej B. Dla przedstawienia tego, przetnijmy tę płaszczyznę płaszczyzną P prostopadłą do prostej B, to ta ostatnia wyznaczy nam na prostej B punkt o, a na prostej β punkt F_1; dalej, na płaszczyznie P nakreślmy ze środka o promieniem równym drugiej odległości okrąg koła, i przesuńmy przez F styczną FG do tego okręgu, a otrzymamy liniję największego spadku FG, względem płaszczyzny ściany niewiadomej kąta trójściennego; kąt zaś A_1, utworzony przez prostę FG z prostą FK wspólnego przecięcia się płaszczyzny figury z płaszczyzną P, będzie kątem płaskim kąta

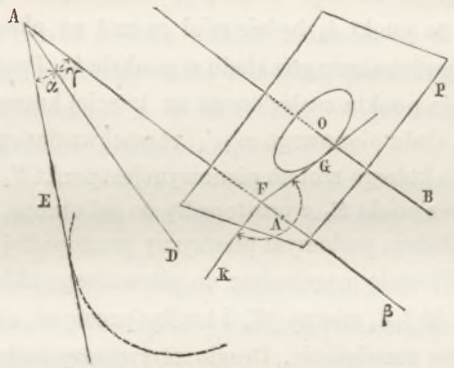

Fig. d_9.

dwuściennego przeciwległego ścianie α. Zadanie więc nasze sprowadza się do nakreślenia kąta trójściennego, znając jego dwie ściany α i γ jakoteż kąt dwuścienny A_1 przeciwległy jednej z nich. Wykreślenie samego kąta trójściennego przedstawi dla czytelnika doskonałe ćwiczenie.

304. Zadanie IV. — *Nakreślić prostę opierającą się na dwu prostych danych nie leżących na jednej płaszczyznie, i tworzącą z temi prostemi kąty odpowiednio równe kątom danym* (*fig.* 239, tab. XVIII). — Niech (d, d') i (δ, δ') będą prostemi danemi; gdyby te proste przecinały się z sobą, to kreśląc trzecią krawędź kąta trójściennego, którego znamy trzy ściany, znaleźlibyśmy prostę szukaną.

W jakikolwiek atoli sposób leżałyby proste dane w przestrzeni, zawsze można będzie wystawić kąt trójścienny, kreśląc przez jeden z punktów jednej prostej, prostę równoległą do drugiej; kreśląc następnie prostę równoległą do trzeciej krawędzi tego kąta trójściennego, a opierającą się na dwu prostych danych (§ 75), znaleźlibyśmy prostę zadosyć czyniącą warunkom zadania. Ponieważ kreślenie trzeciej krawędzi kąta trójściennego prowadzi do dwu prostych, symetrycznie położonych względem płaszczyzny ściany znanej kąta bryłowego, zatem znajdziemy tu dwa rozwiązania.

Zajmijmy się tem wykreśleniem. Obierzmy w tym celu dla ułatwienia rysunku, punkt a, a' prostej d, d', którego rzut pionowy a' leży na przecięciu się rzutów pionowych δ', d' prostych danych, i przez ten punkt nakreślmy prostę δ', δ_1 równolegle do prostej δ, δ'.

Żeby zrobić kład płaszczyzny przedstawionej przez dwie proste $(d, d'), (\delta, \delta')$, nakreślmy jednę z jej poziomych, którejby rzut pionowy $m'n'$ był równoległy do kierunku osi rzutów, to rzut jej po-

ziomy mn znajdziemy szukając przecięć linij rzutów przechodzących przez punkta m i n z prostemi d, δ_1.

Za pierwszą płaszczyznę rzutów przyjmijmy płaszczyznę poziomą przechodzącą przez prostę mn, $m'n'$, a za drugą, płaszczyznę przechodzącą przez prostę x_1y_1 w położeniu dowolnem, lecz prostopadłą do mn; płaszczyzna ta będzie prostopadłą do prostej mn, $m'n'$.

Zróbmy obecnie kład płaszczyzny oznaczonej przez proste (d, d'), (δ, δ') na płaszczyznę poziomą rzutów; podczas tego ruchu, ponieważ punkta m, n zostają nieruchome a punkt a, a' przypada w punkcie A_1, zatem te dwie proste przypadają na A_1n, A_1m. Wyznaczmy następnie kąt trójścienny; trzecia krawędź rozdwojona i w kładzie na płaszczyznę poziomą rzutów, przyjmuje położenie A_1B_1, A_1B_2 (§ 228), które z osiami obrotu A_1n, A_1m tworzą kąty dane. Stosując sposób podany w poprzedzającym paragrafie, znajdziemy rzut b_2 punktu trzeciej krawędzi na płaszczyznie ściany nA_1m i jego wzniesienie b_2B_1. Przypuśćmy teraz, że punkt znaleziony znajduje się w położeniu naturalnem względem ściany nA_1m, i podnieśmy tę ścianę wciągając do tego ruchu, sposobem podanym w paragrafie 150, trzecią krawędź kąta trójściennego, to punkt b_2 będzie miał za rzut na płaszczyznie pionowej pomocniczej punkt b'_2, który przypadnie po podniesieniu go z kładu w punkcie b'_3. Prosta prostopadła do ściany nA_1m, na której mierzymy wzniesienie punktu znalezionego na trzeciej krawędzi, względem ściany, ma za rzut $b'_1b'_3$ na prostopadłej do śladu pionowego $m'_1a'_1$, równej wzniesieniu b_2B_1. Rzut poziomy punktu leżącego na trzeciej krawędzi, a którego rzutem pionowym jest punkt b'_1, znajdziemy na przecięciu się b linii rzutów przechodzącej przez punkt b'_1 z prostopadłą do osi obrotu, przechodzącą przez punkt b_2, przyczem prostopadła ta jest śladem poziomym płaszczyzny prostopadłej do prostej mn, $m'n'$, opisanej ruchem punktu szukanego. Wreszcie przechodząc do pierwotnego układu płaszczyzn rzutów, t. j. dla punktu b, b'_1, odcinając długość $\beta_1b'_1$ równą $\beta b'$, i kreśląc prostę ab, $a'b'$, znajdziemy trzecią krawędź kąta trójściennego, jako jedno rozwiązanie. Drugie otrzymamy zastępując punkt b'_1 przez jemu symetryczny c'_1 względem prostej $m'_1a'_1$. Rozwiązanie zadania dokończymy sposobem podanym w paragrafie 76.

305. Zadanie V. — *Znając kąty utworzone przez jednę z krawędzi ostrosłupa z bokami podstawy, którą ta krawędź spotyka, długość tej krawędzi i rzuty podstawy, nakreślić rzuty ostrosłupa.* — Rozwiązanie tego zadania jest zupełnie podobne do poprzedzającego.

306. Zadanie VI. — *Nakreślić rzuty pięciu wielościanów foremnych i rozwinąć ich powierzchnię, znając długość ich krawędzi.*

1° Czworościan foremny. — Figura 240, tab. XIX przedstawia rzuty czworościanu, którego podstawa ABC leży na płaszczyznie poziomej. Rzut poziomy s wierzchołka leży w środku okręgu koła opisanego na trójkącie podstawy, zaś wysokość jest wyznaczoną przez trójkąt prostokątny S_3Cs w kładzie CS_4s. Rozwinięcie czworościanu otwartego podług krawędzi CS, AS, BS, dla zrobienia kładu ścian bocznych na płaszczyznę poziomą rzutów, jest przedstawionem na figurze 241, tab. XIX.

2° Ośmiościan foremny. — Wielościan ten składa się z dwu ostrosłupów czworościennych (fig. 242, tab. XIX), których rzuty kreślą się łatwo uważając, że $s'_1s'_2 = \sigma'_1\sigma'_2 = sa$. Rozwinięcie tego wielościanu (fig. 243, tab. XIX), znajdziemy rozwijając dwa ostrosłupy czworościenne.

3° Dwudziestościan foremny (fig. 244, tab. XIX). — Geometrya uczy, że ten wielościan jest utworzony z dwu ostrosłupów pięciościennych foremnych o podstawach równoległych, których ściany boczne są trójkątami równobocznemi, a połączonych z sobą obrączką złożoną z dziesięciu trójkątów równobocznych i równych poprzednim.

Wiedząc to, postarajmy się nakreślić rzut poziomy wielościanu; w tym celu nakreślmy na płaszczyznie

poziomej pierwszy pięciobok foremny *abcde*, któregoby boki były równe danej krawędzi wielościanu; następnie uważmy okrąg koła opisany na tym pięciokącie i połączmy środki łuków tego okręgu koła, zawartych pomiędzy wierzchołkami pięciokąta, linijami prostemi, czyli w ten sposób nakreślmy nowy pięciokąt *fghij*, to łącząc środek dwu pięciokątów z ich wierzchołkami znajdziemy rzut poziomy dwu ostrosłupów foremnych, łącząc zaś linijami prostemi każdy z wierzchołków jednego pięciokąta z dwoma wierzchołkami najbliższemi drugiego, otrzymamy rzut poziomy całego wielościanu. Rzut pionowy znajdziemy, znalazłszy wysokości ostrosłupów i wysokość obrączki; pierwsze z nich są częścią trójkąta prostokątnego, mającego za jeden bok kąta prostego *sc*, a za przeciwprostokątnię rzeczywistą wielkość *cb* krawędzi dwudziestościanu; kład tego trójkąta znajduje się na sS_1c, a zatem wysokość ostrosłupów jest równą sS_1. Druga zaś, to jest wysokość obrączki, jest znów częścią trójkąta prostokątnego, którego jednym bokiem kąta prostego jest rzut poziomy *ej* jednego z boków obrączki, a przeciwprostokątnią tenże bok w rzeczywistej wielkości t. j. *ea*; kład tego trójkąta ejJ_1 wyznacza wysokość jJ_1 obrączki w rzeczywistej wielkości.

Wysokości wyznaczone przed chwilą posłużą nam do umieszczenia w miejscach należytych punktów σ', s', i płaszczyzn poziomych pomiędzy niemi leżących; pozostaną więc tylko do wyznaczenia rzuty pionowe wierzchołków wielościanu a te otrzymamy za pomocą linij rzutów nakreślonych do $a', b' \ldots i', j'$ i t. d. i za pomocą rzutów krawędzi odpowiednich.

Rozwinięcie (fig. 245, tab. XIX) składa się z dwu części sześcioboków foremnych $S_2A_1B_1C_1D_1E_1A_2$, $\Sigma_2F_2G_2H_2I_2J_2F_1$, powstałych z rozwinięcia korony przedstawionej na figurze przez dwa trójkąty $A_2I_1J_1$, ... $J_2E_1F_1$.

4° Sześcian lub sześciościan foremny. — Rzuty tego wielościanu otrzymują się bardzo łatwo, jeżeli ustawimy jednę jego ścianę na płaszczyznie poziomej rzutów (*fig.* 246, tab. XIX); rozwinięcie jego przedstawione jest na figurze 247 tejże tablicy.

5° Dwunastościan foremny (*fig.* 248, tab. XIX).—Wiemy z geometryi, że ten wielościan jest utworzonym z jednego pięcioboku foremnego połączonego w ten sposób z pięcioma innemi jemu i sobie równemi, że w każdym z wierzchołków pierwszego wieloboku utworzonym jest kąt trójścienny, i że po rozdzieleniu tak utworzonej figury na dwie, dwa dziesięcioboki skośne które je zakończają, przystają do siebie po odwróceniu.

Dla nakreślenia rzutów tego wielościanu (*fig.* 248, tab. XIX), ustawmy jeden z pięciokątów ABCDE na płaszczyznie poziomej rzutów i szukajmy rzutów pięciu pięciokątów, które go dotykają. Jeżeli przypuścimy, że pięciokąt nakreślony na płaszczyznie poziomej rzutów, przedstawia jednę ze ścian wielościanu i kład naokoło odpowiednich osi obrotu AB, BC pięciokątów w przestrzeni dotykających pierwszego podług tychże osi obrotu, całe zadanie sprowadzi się do podniesienia z kładu dwu pięciokątów, za których kład przyjęliśmy figurę ABCDE, a ono zostało już rozwiązanem mówiąc o pierwszym przypadku kąta trójściennego. Rozwiązanie tam podane może być jeszcze uproszczonem jeżeli zwrócimy uwagę na to, że ten kąt trójścienny jest równościennym, i że wskutek symetryi punkt C podniesiony z kładu naokoło krawędzi AB, winien leżeć w rzucie na prostej łączącej punkt B z punktem ω czyli środkiem pięciokąta ABCDE, to jest w punkcie h przecięcia się tejże prostej z prostopadłą do osi obrotu, przechodzącą przez punkt C. Dla łatwego znalezienia wzniesień wierzchołków podniesionych z kładu, przyjmijmy za płaszczyznę pionową rzutów płaszczyznę prostopadłą do osi obrotu AB, której oś rzutów x_1y_1 jest także prostopadłą do tejże osi.

Podnosząc z kładu pięciokąt ABCDE, naokoło AB, rzut pionowy c'_1 punktu C porusza się na okręgu koła, którego środkiem jest punkt α, a nakreślonym na płaszczyznie rzutów, i przypada

w punkcie h'_1 przecięcia się tego okręgu koła z linią rzutów, przechodzącą przez punkt h; ztąd znajdziemy ślad pionowy $\alpha h'_1$ płaszczyzny ściany pięciokąta podniesionego z kładu, i rzut pionowy g'_1 punktu D, d'_1 także podniesionego z kładu; linija rzutów poprowadzona przez punkt g'_1 wyznacza na prostopadłej $D\omega$ do osi obrotu AB rzut poziomy g szukanego wierzchołka.

Znając obecnie rzuty poziome g, h dwu wierzchołków jednego z pięciokątów w przestrzeni i wzniesienia $h_2h'_1$, $g_2g'_1$ tych punktów, dokończenie wykreślenia nie przedstawi trudności.

Mając na widoku późniejsze zastosowanie, zauważmy natychmiast, że wskutek równości prostych DC, wv, prosta Ch winna przechodzić przez punkt v.

Rozwinięcie dwunastościanu (*fig.* 249, tab. XIX) daje się wykonać bez trudności.

307 Zadanie VII. — *Nakreślić kąty płaskie kątów dwuściennych w pięciu wielościanach foremnych.*— Zadanie to sprowadza się łatwo do znalezienia jednego z kątów dwuściennych kąta trójściennego, którego ściany są znane (§ **229**).

308. Zadanie VIII. — *Znając rzut poziomy podstawy ostrosłupa, rzuty pionowe trzech jej wierzchołków, rzut poziomy spodka wysokości i jej długość, wykreślić pozostałe rzuty ostrosłupa.* — Dla rozwiązania tego zadania możemy przyjąć za płaszczyznę pionową rzutów płaszczyznę prostopadłą do podstawy, w ten bowiem sposób umieścimy w należytem położeniu wysokość ostrosłupa i zarazem znajdziemy wzniesienia wierzchołków podstawy, których znamy tylko jeden rzut.

309. Zadanie IX. — *Sprowadzić do poziomu kąt zawarty pomiędzy prostą poziomą i prostą jakąkolwiek.* — Stosownie do rozwiązania ogólnego podanego w paragrafie **233**, ustawmy wierzchołek s, s' jakoteż bok poziomy sd, $s'd'$ kąta danego na płaszczyznie poziomej rzutów (*fig.* 250, tab. XX) i zróbmy kład, jeden po drugim, drugiego boku tegoż kąta naokoło dwu osi obrotu sd' i ss'. W tym celu nakreślmy przez punkt s dwie proste pochylone do dwu osi obrotu o kąty odpowiednio równe pozostałym dwu kątom A i α; jedna z tych prostych będzie miała za ślad punkt h_1, którego rzut odpowiedni h' na drugiej prostej znajdziemy, biorąc $s'h' = s'h_1$. Jeżeli obecnie podniesiemy z kładu proste $s'h'$, $s'h_1$ dla znalezienia w przestrzeni drugiego boku kąta, otrzymamy w punkcie przecięcia się okręgu koła, opisanego przez punkt h_1 na płaszczyznie poziomej rzutów, z płaszczyzną profilu w której porusza się punkt h', ślad poziomy h drugiego boku kąta szukanego, a kreśląc prostę sh, znajdziemy sam kąt szukany hsd.

310. Zadanie X. — *Przez punkt obrany na jednej z krawędzi bocznych czworościanu, nakreślić płaszczyznę, któraby wyznaczyła na powierzchni bocznej tegoż przecięcie trójkątne o obwodzie najmniejszym* (*fig.* 251, tab. XX). — Przypuśćmy przedewszystkiem, że ściana boczna $a's'b'$, AsB, na której nie leży punkt dany m, m', została sprowadzoną do położenia równoległego do płaszczyzny pionowej rzutów, następnie, zróbmy kład punktu m, m', obracając go kolejno naokoło dwu osi obrotu ($s'b'$, sB), ($s'a'$, sA), a to dla rozwinięcia kąta trójściennego S na płaszczyznie tej ściany. Pierwszy kład punktu m, m' otrzymamy postępując sposobem, podanym w paragrafie **128**, i znajdziemy punkt M_2 za pomocą trójkąta prostokątnego $M_1m'n'$; drugi kład tegoż punktu otrzymamy zważając, że odległość punktów S i M w kładzie naokoło obu osi obrotu przedstawia się w rzeczywistej wielkości, a zatem że ten kład winien się znaleźć na okręgu koła opisanym z punktu s' jako środka promieniem równym $s'M_2$, jakoteż na prostopadłej wychodzącej z punktu m' do osi obrotu $s'a'$, czyli na ich wspólnem przecięciu w punkcie M_3. Łącząc punkt M_2 z punktem M_3 linią prostą, otrzymamy linię najmniejszą w rozwinięciu. Zwracając ściany w kładzie do ich pierwotnego położenia spostrzegamy, że podczas tego ruchu punkta (n, n'), (p, p') pozostaną nieruchome, zaś punkta M_2 i M_3 zejdą się w jednym punkcie (m, m'); ztąd znajdziemy rzuty wierzchołków (n, n'), (p, p'), (m, m') trójkąta szukanego, a w końcu, łącząc te punkta po dwa linijami prostemi, znajdziemy dwa rzuty mnp, $m'n'p'$ samegoż

trójkąta. Ponieważ figura jest symetryczną, łatwo zatem dokończyć jej wykreślenia, jakoteż wykreślenia wielościanu.

311. Zadanie XI. — *Nakreślić kulę styczną do krawędzi kąta trójściennego i do płaszczyzny poziomej rzutów.*

Rozwiązanie ogólne. —Nakreślmy przedewszystkiem kulę styczną jakąkolwiek do trzech krawędzi kąta trójściennego, to po umieszczeniu środka podobieństwa (homothétie) w wierzchołku kąta trójściennego, potrafimy z łatwością wyznaczyć kulę żądaną, t. j. styczną do krawędzi kąta trójściennego i dotykającą płaszczyzny poziomej rzutów. Zadanie dotyczące najprzód kreślenia kuli stycznej do trzech krawędzi kąta trójściennego, rozwiązuje się wyznaczając na tych krawędziach trzy punkta równooddalone od wierzchołka; kreśląc więc na płaszczyznie każdej ściany środek okręgów kół dotykających krawędzi w punktach tak wyznaczonych i oznaczając punkt przecięcia się prostych prostopadłych do płaszczyzn ścian odpowiadających, a przechodzących przez środki kół, otrzymamy punkt, który będzie właśnie środkiem kuli szukanej, zaś odległość tego punktu od którejkolwiek krawędzi jest równą promieniowi kuli.

Wykreślenie rysunku (*fig.* 252, tab. XX). — Dla wyznaczenia kąta trójściennego przyjmijmy jako rzeczy znane : rzut poziomy s wierzchołka, wzniesienie γ tego punktu i ślady poziome $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ krawędzi.

Żeby wyznaczyć środki okręgów kół stycznych do krawędzi, zróbmy kład ścian $S\theta_1\theta_3$, $S\theta_1\theta_2$ na płaszczyznę poziomą rzutów, a dla ułatwienia tego kładu przyjmijmy za płaszczyznę pionową rzutów płaszczyznę prostopadłą do prostej $\theta_1\theta_3$; w tych warunkach oś rzutów x_1y_1 będzie także prostopadłą do tej prostej i może przejść, jak to ma właśnie miejsce na naszym rysunku, przez punkt s, zaś wierzchołek kąta trójściennego będzie miał za rzut punkt S'_1, którego wzniesienie jest równe γ, a ślad pionowy ściany $S\theta_1\theta_3$ otrzymamy, kreśląc prostę $\alpha S'_1$. To mając widzimy, że kład punktu S naokoło osi obrotu $\theta_1\theta_3$ przypada w punkcie S_2, t. j. na okręgu koła zakreślonego z punktu α jako środka promieniem równym $\alpha S'_1$ i na osi rzutów x_1y_1.

Kład tegoż wierzchołka naokoło osi obrotu $\theta_1\theta_2$ przypada w punkcie S_3, t. j. na prostej łączącej punkt s ze środkiem powinowactwa, i na okręgu koła zakreślonego z punktu θ_1 jako środka promieniem θ_1S_2. Nakreślmy teraz cztery proste $S_2\theta_3$, $S_2\theta_3$, $S_3\theta_1$, $S_3\theta_2$ i odetnijmy na nich długości S_2A_1, S_2B_1, S_3A_2, S_3D_1 jakiekolwiek, lecz równe pomiędzy sobą, wyznaczmy następnie środki Ω_1, Ω_2 kół dotykających w punktach A_1, B_1, A_2, D_1 krawędzi w kładzie, to tak znalezione punkta będą właśnie kładami rzutów środka kuli szukanej, na płaszczyznie ścian $S\theta_1\theta_3$, $S\theta_1\theta_2$.

Obecnie należy podnieść z kładu ściany wraz z ich prostopadłemi ; podczas tego ruchu punkt Ω_1 będzie miał rzut pionowy w punkcie ω'_2, a kład w punkcie ω'_3 leżącym na śladzie pionowym $\alpha S'_1$ płaszczyzny ściany $S\theta_1\theta_3$, prostopadła zaś do płaszczyzny tej ściany, wyprowadzona ze środka, będzie miała rzut pionowy na prostopadłej $\omega'_3 g'$ do śladu $\alpha S'_1$, wyprowadzonej z punktu ω'_3, a rzut jej poziomy zejdzie się ze śladem poziomym Q płaszczyzny prostopadłej do osi obrotu $\theta_1\theta_3$, na której porusza się środek koła odpowiedniego.

Znając więc miejsce geometryczne Q rzutu poziomego środka kuli, drugie miejsce P tegoż punktu znajdziemy na prostopadłej do drugiej osi obrotu $\theta_1\theta_2$, a przechodzącej przez punkt Ω_2, w skutek więc czego rzut poziomy środka będzie w punkcie c przecięcia się tych dwóch miejsc, zaś rzut jego pionowy otrzymamy, kreśląc przez c liniję rzutów do przecięcia się jej w punkcie c'_1 z prostą ω'_3g'.

Promień kuli otrzymamy zważając, że on jest równym przeciwprostokątni trójkąta prostokątnego, którego jednym bokiem kąta prostego jest odległość $c'_1\omega'_3$ środka kuli od płaszczyzny ściany $S\theta_1\theta_3$ drugim zaś odległość Ω_1A_1 punktu Ω_1 od jednej z krawędzi ściany $\theta_1S_2\theta_3$ na kładzie. Odciąwszy więc $\omega'_3e'_1 = \Omega_1A_1$ otrzymamy tę przeciwprostokątnię, a kreśląc prostę $c'_1e'_1$ znajdziemy wreszcie promień kuli, mającej rzuty środka w punktach c, c'_1.

Zajmijmy się obecnie wykreśleniem kuli odpowiadającej zadaniu; wtym celu zakreślmy, z punktu c'_1 jako środka, promieniem pierwszej kuli $c'_1e'_1$, półokrąg koła, który wyznaczy na pionowej jej środka dwa punkta f'_1, f'_2 tworzące z punktem c 1° rzuty e, f'_1 punktu najniższego kuli pomocniczej i 2° rzuty e, f_2 punktu najwyższego tejże kuli.

Ponieważ wszelka kula *podobna* (homothétique) do kuli mającej za środek punkt c, c'_1, jest styczną do krawędzi kąta trójściennego i do dwu płaszczyzn poziomych, przechodzących przez punkta *podobne* do (f'_1, c), (f'_2, c), wystarczy więc przenieść w sposób podobny te ostatnie punkta na płaszczyznę poziomą rzutów, żeby otrzymać punkta styczności z tą płaszczyzną dwu kul, odpowiadających warunkom zadania. Punkta te styczności φ_1, φ_2 są śladami prostych łączących punkta (f'_1, c), (f'_2, c) ze środkiem podobieństwa S'_1, s.

Ponieważ punkta styczności φ_1, φ_2 są nadto rzutami poziomemi środków szukanych, a te środki figur *podobnych* leżą na jednej prostej przechodzącej przez środek *podobieństwa*, otrzymamy więc na $S'_1c'_1$ rzuty pionowe φ'_1, φ'_2 środków szukanych. Ponieważ promienie są odrazu wyznaczone przez wzniesienia $\varphi'_1\psi'_1$, $\varphi'_2\psi'_2$ tych dwu środków, czytelnik zatem może dopełnić wykreślenia, wyznaczając środki kul stycznych do płaszczyzny poziomej i do przedłużonej jednej lub kilku krawędzi kąta trójściennego.

Zadanie to mogłoby być także rozwiązanem wprost uważając, że środek kuli leży 1° w miejscu geometrycznem punktów równooddalonych od ścian, a któreto miejsce znajduje się na przecięciupłaszczyzn prostopadłych do dwu ścian i przechodzących przez ich dwójsieczne, 2° w miejscu geometrycznem punktów równooddalonych od płaszczyzny poziomej i od jednej z krawędzi bocznych. Pierwszem z tych miejsc jest linija prosta, drugie zaś wyznaczy się zważając, że jeżeli znajdziemy te tylko jego punkta, które leżą na płaszczyznie przechodzącej przez krawędź uważaną i przez prostę przedstawiającą pierwsze miejsce, to otrzymamy z łatwością układ dwu prostych przechodzących przez ślad poziomy tejże krawędzi. Wykonanie rysunku będzie dla czytelnika użytecznem ćwiczeniem.

312. Zadanie XII. — *Przez punkt dany nakreślić kulę styczną do trzech ścian kąta trójściennego* (do rozwiązania).

313. Zadanie XIII. — *Mając dane w przestrzeni dwie proste przecinające się i dwa punkta, nakreślić przez te dwa punkta kulę styczną do prostych danych* (do rozwiązania).

314. Zadanie XIV. — *Mając dane trzy punkta i prostę, nakreślić przez te trzy punkta kulę styczną do prostej danej* (do rozwiązania).

315. Zadanie XV. — *Przez punkt dany nakreślić płaszczyznę, któraby przecinała ściany boczne graniastosłupa danego podług wieloboku dającego się wpisać w koło.* — Przypuśćmy, że zadanie jest rozwiązanem i uważmy wielobok przecięcia i okrąg koła na nim opisany; wystawmy sobie nadto, że graniastosłup został przecięty płaszczyzną prostopadłą do jego krawędzi bocznych, to w tym razie jest jasną rzeczą, że to ostatnie przecięcie będzie rzutem przecięcia szukanego na płaszczyznę przecięcia prostego, i że na tej płaszczyznie okrąg koła uważany będzie miał za rzut elipsę, którą przedewszystkiem potrzeba nam wyznaczyć. Ponieważ ta krzywa winna przechodzić li tylko przez wierzchołki wieloboku przecięcia prostego, zatem zadanie to nie da się rozwiązać dla graniastosłupa mającego więcej jak pięć ścian, wiemy bowiem, że krzywa stopnia drugiego nie może przechodzić przez więcej jak pięć punktów. Natomiast zadanie to da się wogóle zawsze rozwiązać, jeżeli graniastosłup dany ma tylko pięć ścian lub mniej. W przypadku graniastosłupa pięciościennego, żeby zadanie było rozwiązalnem, potrzeba, żeby krzywa stopnia drugiego przechodząca przez pięć wierzchołków przecięcia prostego, była elipsą. Jeżeli warunek powyższy ma miejsce, rozwiążemy zadanie, kreśląc osie elipsy $2a$, $2b$, i przesuwając przez oś wielką dwie płaszczyzny symetryczne względem

płaszczyzny przecięcia prostego, a nachylone do tej ostatniej pod kątami, których dostawy są równe $\frac{b}{a}$, gdyż wówczas dostatecznem będzie nakreślić przez punkt dany płaszczyzny równoległe do tych ostatnich. Widzimy więc, że w tym przypadku zadanie ma dwa rozwiązania.

Jeżeli graniastosłup dany ma mniej jak pięć ścian, zadanie staje się niewyznaczonem, wyjąwszy jeżeli wielobok przecięcia podlega nowemu warunkowi, jak np., warunkowi, *żeby przecięcie równoległościanu płaszczyzną przechodzącą przez punkt dany, było kwadratem.* Ponieważ w tym przypadku przekątnie kwadratu są prostopadłe, zatem rzutami ich na płaszczyznę przecięcia prostego będą dwie średnice sprzężone elipsy (§ **136**), a że te dwa rzuty są znane jako przekątnie równoległoboku przecięcia prostego, zatem całe zadanie sprowadzi się do znalezienia osi elipsy, której znamy dwie średnice sprzężone, a to ostatnie zadanie czytelnik potrafi rozwiązać.

316. Zadanie XVI. — *Nakreślić rzuty równoległościanu, którego trzy krawędzie przypadają na trzech prostych danych w przestrzeni.* — Zadanie to można rozwiązać, kreśląc poprostu przez każdą z prostych danych płaszczyznę równoległą do dwu pozostałych.

317. Zadanie XVII. — *Nakreślić rzuty równoległościanu prostokątnego, znając rzut pionowy o' jego wierzchołka, dwa rzuty d, d' jednej z jego krawędzi przedłużonej, rzuty jednego punktu a, a' drugiej krawędzi przedłużonej i w końcu rzut poziomy δ tej ostatniej* (*fig.* 253, tab. XXI). — Ponieważ krawędź mająca za rzut poziomy δ, winna przechodzić przez punkt a, a' i być zarazem prostopadłą do prostej d, d', więc winna ona, mówiąc innemi słowy, leżeć na płaszczyznie pionowej przechodzącej przez δ i na płaszczyznie prostopadłej do prostej d, d' a przechodzącej przez punkt a, a', skutkiem czego zadanie dotyczące wyznaczenia tej linii sprowadza się do wyznaczenia wspólnego przecięcia się tych dwu płaszczyzn. Otóż płaszczyznę prostopadłą, o której mowa, wyznaczymy kreśląc prostę poziomą wychodzącą z punktu a, a', której rzut pionowy $a'b'$ jest równoległy do osi rzutów, zaś rzut poziomy ab jest prostą prostopadłą do prostej d a przechodzącą przez punkt a, i przez prostę obrazu ae, $a'e'$, którą znajdziemy jak powyżej.

Szukajmy obecnie punktu wspólnego przecięcia się prostych δ i d, którego rzutem poziomym jest punkt e, lub, innemi słowy, szukajmy rzutu pionowego punktu leżącego na płaszczyznie prostopadłej, a mającego za rzut poziomy punkt e; dla rozwiązania tego ostatniego zadania, weźmy na tejże płaszczyznie prostę, której rzut poziomy jest d, zaś pionowy znajdziemy, podnosząc punkt g do g', punkt f do f' i kreśląc prostę $f'g'$. Ponieważ na tak znalezionej prostej $f'g'$ winien koniecznie leżeć rzut pionowy szukany, a zatem kreśląc przez punkt e liniję rzutów aż do spotkania się jej z prostą $f'g'$, znajdziemy punkt e', który jest właśnie szukanym rzutem pionowym, zaś prosta łącząca punkta a' z e' prostą szukaną δ'. Wyznaczywszy krawędź δ, δ', mamy teraz wykreślić prostę jednocześnie prostopadłą do prostych (δ, δ') i (d, d'), ona bowiem wyznaczy właśnie trzecią krawędź równoległościanu.

Tę ostatnią atoli prostę otrzymamy zważając, że proste (d, d') i (δ, δ') są prostopadłe co do kierunku, w skutek czego wykreślenie daje się uprościć, a uproszczenie to będzie tem większe, jeżeli zwrócimy uwagę, że płaszczyzna prostopadła do prostej (d, d'), a przechodząca przez (δ, δ'), może tu być użytą z korzyścią, gdyż ona już jest wyznaczoną i w punkcie przecięcia się jej z prostą d, d' wyznaczonym jest jeden ze spodków wspólnej prostopadłej. Szukajmy więc jeszcze tylko wspólnego przecięcia się płaszczyzny prostopadłej wyznaczonej przez proste $(ab, a'b')$, $(ac, a'c')$ z prostą d, d'.

Przyjmując w tym celu za płaszczyznę pomocniczą płaszczyznę pionową rzucającą prostę d, d', ta znów da nam z przecięcia się swego z płaszczyzną uważaną, prostę fg, $f'g'$ już znaną, która wy-

znaczy na prostej d, d' punkt i, t. j. spodek najkrótszej odległości; rzut pionowy i' tego punktu znajdziemy, kreśląc liniję rzutów przez punkt i. Obecnie zostaje do znalezienia kierunek wspólnej prostopadłej, tej atoli rzutami są proste prostopadłe do śladów płaszczyzny, przechodzącej przez prostę δ, δ', a równoległej do prostej d, d'.

Przez punkt a, a' nakreśliwszy prostę d_1, d'_1 równoległą do d, d', ta prosta z prostą δ, δ' wyznaczy kierunek płaszczyzny, dla znalezienia zaś prostopadłej do tej płaszczyzny, a któraby przechodziła przez punkt i, i', nakreślmy wprost, nie szukając śladów, rzuty prostej obrazu $kj, k'j'$ tej płaszczyzny, tudzież z punktu i prostopadłę do $k'j'$, zakończoną w punkcie l' na prostej δ', to w ten sposób znaleziona prosta $i'l'$ będzie rzutem pionowym wspólnej prostopadłej, zkąd wreszcie znajdziemy jej rzut poziomy.

Rzut środka o' jest zarazem środkiem rzutu, albowiem stosunek odcinków prostej jest prawdziwym w rzucie; jeżeli więc wprowadzimy tę uwagę dotyczącą środka o' do zadania, to znajdziemy rzuty dwu pozostałych wierzchołków wielościanu, biorąc tylko punkta i'_1, l'_1 symetryczne dla punktów i', l', względem środka o' rzutu.

Nic łatwiejszego obecnie jak dopełnić wykreślenia rzutu pionowego bryły, a następnie znaleźć jej rzut poziomy.

318. Zadanie XVIII. — *Znając długość jednego boku sześcianu, i rzuty trzech punktów leżących na jego trzech krawędziach przyległych, nakreślić* 1° *rzuty sześcianu,* 2° *jego przecięcie płaszczyzną dającą sześciobok foremny, jakoteż znaleźć rzuty i rzeczywistą wielkość tego przecięcia.*

1° Wyznaczenie wierzchołka kąta trójściennego, którego krawędzie przechodzą przez punkta dane, jest zadaniem już rozwiązanem w paragrafie **165**, które uczy nakreślić krawędzie kąta trójściennego trójprostokątnego znając przecięcie tego kąta płaszczyzną. Po dokonaniu tego wykreślenia, znalezienie rzutów sześcianu nie przedstawia żadnej trudności.

2° Szukana płaszczyzna sieczna przechodzi przez środki trzech krawędzi nierównoległych i nieprzyległych, jak się o tem można przekonać z bardzo łatwego dowodu geometrycznego.

319. Zadanie XIX. — *Nakreślić rzuty czworościanu, znając jeden punkt każdej z jego krawędzi.* — Niech A, B, C, D, E, F (fig. d_{10}) będą sześcioma punktami danemi. Dla wyznaczenia ścian połączmy

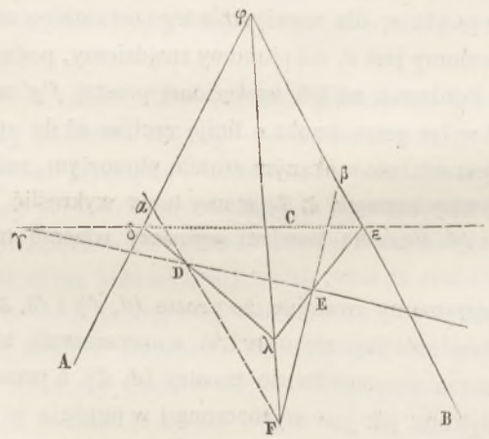

Fig. d_{10}.

je z sobą trzy po trzy, i grupy tak otrzymane niech będą ACB, ADF, BEF, CDE; żeby nakreślić czworościan żądany, połączmy po dwa punkta leżące zewnątrz jednej z płaszczyzn; przyjmijmy więc naprzykład punkta D, E, F zewnętrzne względem płaszczyzny ABC, a otrzymamy proste DF, DE, FE

przecinające płaszczyznę ACB w punktach α, β, γ, i z połączenia których z A, B, C, linijami prostemi $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, otrzymamy krawędzie leżące na płaszczyznie ABC. Krawędzie leżące zewnątrz tej płaszczyzny znajdziemy, łącząc wierzchołki δ, ε, φ ściany leżącej na płaszczyznie ABC, z odpowiedniemi punktami zewnętrznemi D, E, F.

Znajdźmy obecnie liczbę rozwiązań tego zadania. Ponieważ dla utworzenia ściany ABC wzięliśmy trzy punkta, zatem będziemy mogli otrzymać tę ścianę tyle razy, ile jest kombinacyj z sześciu punktów branych po trzy t. j: $C_6^3 = \frac{6.5.4}{1.2.3} = 20$. Że zaś znając pierwszą ścianę możemy utworzyć inne, kreśląc płaszczyzny przez dwa punkta zewnętrzne i trzeci należący do ściany znalezionej, ta kombinacya więc da nam tyle brył, ile jest kombinacyj z trzech punktów branych po dwa t. j: $C_3^2 = \frac{3.2}{1.2} = 3$; zatem razem $20 \times 3 = 60$ czworościanów. Szukajmy teraz, ile razy jeden z czworościanów $\delta\varphi\varepsilon\lambda$ był liczonym, postępując sposobem podanym. Biorąc do znalezienia pierwszej ściany punkta A, C, B liczymy czworościan raz, następnie liczymy go po raz drugi, wychodząc z punktów C, D, E leżących na drugiej jego ścianie i t. d., czyli jest on liczony tyle razy, ile ma ścian t. j., cztery razy; dzieląc więc 60 przez 4 znajdziemy ostatecznie, że zadanie przedstawia 15 różnych od siebie rozwiązań.

320. Zadanie XX. — *Nakreślić rzuty triakontaedru o ścianach czworokątnych.* — Ten wielościan pół-foremny drugiego rzędu (1), który napotykamy w krystalografii, otrzymuje się wystawiając na ścianach dwunastościanu foremnego, dwanaście ostrosłupów pięciościennych foremnych, równych sobie a nadto takich, iżby ich dwa trójkąty dotykające się podług jednej krawędzi dwunastościanu, leżały na jednej płaszczyznie.

Niech *abcdefghijklmnopqrst*, *a'b'c'd'e'f'g'h'i'j'k'l'm'n'o'p'q'r's't'* będą rzutami dwunastościanu foremnego (*fig.* 254, tab. XXI), wykreślmy odpowiedni *triakontaeder*.

Wykreślenie rzutu poziomego triakontaedru. — Nakreślmy przedewszystkiem rzut poziomy ostrosłupa należącego do ściany poziomej górnej *fghij*, *f'g'h'i'j'*, łącząc po prostu środek ω pięciokąta *fghij* z jego wierzchołkami. Następnie, dla wyznaczenia rzutu poziomego ostrosłupa należącego do ściany *ghqpo* dwunastościanu, uważmy, że dwa trójkąty tworzące ścianę nowego wielościanu daną przez krawędź *gh* dwunastościanu, tworzą w przestrzeni równoległobok ukośny, którego rzut otrzymamy, kreśląc przez punkta *h* i *g* proste równoległe do prostych ωg, ωh; że zaś na zasadzie uwagi zrobionej w końcu paragrafu **306**, ta z prostych równoległych, która przechodzi przez punkt *h*, przechodzi także przez punkt *p*, więc druga prosta równoległa przejdzie w skutek symetryi figury, przez tenże sam punkt *p*; zkąd wynika dalej, że punkt *p* jest rzutem poziomym wierzchołka ostrosłupa, należącego do ściany uważanej. W podobny sposób znajdziemy, że punkt *q* jest rzutem poziomym wierzchołka ostrosłupa należącego do ściany przyległej i t. d.

Dowiodłszy tych własności, nie ma nic łatwiejszego jak dopełnić rzutu poziomego, znamy bowiem rzuty wierzchołków wszystkich ostrosłupów, łącząc więc te wierzchołki z odpowiedniemi podstawami, otrzymamy rzuty trzydziestu ścian ωgph, *phrq*, *qrsb* i t. d., nowego wielościanu.

Wykreślenie rzutu pionowego triakontaedru. — Nakreślmy jednocześnie dwa równoległoboki

---

(1) «Nazywamy *wielościanem półforemnym*, albo wielościan, którego ściany są wielobokami foremnemi a kąty wielościenne równe lub symetryczne, albo też wielościan, którego ściany są równe a kąty wielościenne foremne. W każdym wielościanie *półforemnym*, drugiego rodzaju, kąty wielościenne tego samego gatunku są równe.» Catelan, *Théorèmes et problèmes de géométrie élémentaire*, 5e édition, p. 403.

ukośne dotykające dwunastościanu podług krawędzi, których rzutami są proste $f'g'$, $g'o'$; rzut poziomy $\varphi\omega fn$ pierwszego z tych równoległoboków ukośnych wskazuje, że dwie z jego krawędzi leżą na płaszczyznach profilu, a zatem, że prostopadłe wyprowadzone z punktów g', f' przedstawiają kierunki rzutów tych krawędzi. Dla ściany przyległej, $g'o'$ jest przekątnią profilu, a prostopadła do tej linii przeprowadzona przez jej środek u' przedstawi drugą przekątnię, która wyznaczy rzut pionowy v' jednego z wierzchołków wspólnych dwu ścianom przyległym wziętym pod uwagę.

Po tych danych, z łatwością dopełnimy rzutu pionowego wielościanu, postępując podług wskazówek danych na figurze.

321. Zadanie XXI. — *Mając równoległościan dowolnie położony względem płaszczyzn rzutów i trzy jego krawędzie* A, B, C *przyległe do siebie, sprowadzić ten równoległościan za pomocą trzech po sobie następujących obrotów, pierwszy naokoło osi pionowej, drugi naokoło prostopadłej do płaszczyzny pionowej a trzeci naokoło osi pionowej, do takiego położenia, żeby jego krawędzie* A *i* B *stały się równoległemi do płaszczyzny poziomej rzutów, zaś krawędź* C *równoległą do płaszczyzny pionowej* (do rozwiązania).

322. Zadanie XXII. — *Znając rzut poziomy równoległościanu prostokątnego i rzut pionowy jednego z jego wierzchołków, nakreślić rzut pionowy równoległościanu* (do rozwiązania).

323. Zadanie XXIII. — *Przeciąć sześcian taką płaszczyzną, żeby przekrój ten był sześciobokiem mającym kąty równe i dwa boki po sobie idące w stosunku jeden do dwóch* (do rozwiązania).

324. Zadanie XXIV. — *Znając rzuty jednej ze ścian czworościanu równościennego, nakreślić : 1° rzuty tego czworościanu, 2° kule styczne do czterech jego ścian.* — (*Czworościanem równościennym*, nazywamy taki czworościan, którego wszystkie ściany są sobie równe).

Dla uproszczenia wykreślenia ustawmy ścianę daną ABC (*fig.* 255, tab. XXI) na płaszczyznie poziomej rzutów i oznaczmy wierzchołek nieznany przez S. Trójkąt SAB w przestrzeni musi być równy trójkątowi ABK, zaś bok SB powinien się różnić od boków AB i BC, inaczej bowiem trójkąty ABS lub ABC byłyby równoramienne, co być nie może, gdyż trójkąt dany ABC jest jakimkolwiek ; bok więc SB musi być równym AC, a że na mocy tego w czworościanie równościennym krawędzie przeciwległe są sobie równe, więc i kąt SBA przeciwległy bokowi SA, jest równy kątowi CAB przeciwległemu bokowi CB. Kład zatem boku SB na płaszczyznę poziomą rzutów ma miejsce podług prostej równoległej do prostej AC, a przechodzącej przez punkt B, i z tego samego powodu, kład tegoż boku na płaszczyznę poziomą rzutów naokoło prostej BC, przypada na przedłużeniu prostej równoległej do boku AC, czyli że odcinając na prostej równoległej $BS_1 = BS_2 = AC$, znajdziemy dwa kłady S_1, S_2 punktu S rozdwojonego. Podnosząc te punkta z kładu, nakreślimy rzut poziomy s czwartego wierzchołka jego zaś wzniesienie znajdziemy z trójkąta prostokątnego SsB, mającego jeden bok sB kąta prostego znany i przeciwprostokątnię BS_2 w rzeczywistej wielkości, a robiąc kład tego trójkąta, znajdziemy punkt S_3 ostrosłupa. To mając, łatwo już dokończymy wykreślenia obu rzutów tego wielościanu.

Dla uproszczenia wykreślenia kul stycznych do ścian czworościanu, weźmy pod uwagę wzory podane w paragrafie **300** :

$$r = \frac{3V}{a+b+c+d}, \quad \rho_1 = \frac{3V}{b+c+d-a}, \quad \rho_2 = \frac{3V}{a+c+d-b},$$

$$\rho_3 = \frac{3V}{a+b+d-c}, \quad \rho_4 = \frac{3V}{a+b+c-d},$$

które służą do wyznaczenia promieni kuli wpisanej i kul wpisanych zewnętrznie; co się zaś tyczy kul stycznych do szczytów, to wiemy już, że takowe nie istnieją dla czworościanu równościennego.

Wzory te dadzą się uprościć dla naszego zadania. Oznaczywszy bowiem przez h wysokość ostrosłupa, otrzymamy

$$a=b=c=d, \qquad V=\frac{ah}{3},$$

a podstawiając te wartości we wzorach znajdziemy:

$$r=\frac{ah}{4a}, \qquad \rho_1=\rho_2=\rho_3=\rho_4=\frac{ah}{2a};$$

czyli

$$r=\frac{h}{4}, \qquad \rho_1=\rho_2=\rho_3=\rho_4=\frac{h}{2}.$$

Powróćmy teraz do wykreślenia kul. Dla kuli wpisanej, pierwszy wzór wskazuje, że jej środek znajduje się na przecięciu czterech płaszczyzn równoległych do ścian, a dzielących odpowiednie wysokości na dwa odcinki w stosunku $\frac{1}{3}$, że zaś punkt zbiegu tych płaszczyzn jest środkiem ciężkości czworościanu, a tem samem leży w środku prostej łączącej środki dwu krawędzi przeciwległych czworościanu, znajdziemy więc ztąd następujący sposób wykreślania środka kuli wpisanej.

Nakreślmy prostę m_1m_2 łączącą środki prostych AB, SC i podzielmy ją na dwie równe części w punkcie o, dla podniesienia zaś tego punktu nakreślmy przez punkt o liniję rzutów i odetnijmy na niej, licząc od osi rzutów i do góry długość $o\,o'=\frac{s'c'}{4}$; punkta o, o' będą rzutami środka kuli, a wzniesienie $o\,o'$ będzie jej promieniem w rzeczywistej wielkości.

Żeby dowieść, że środek kuli przypada w środku ciężkości czworościanu, dostatecznem jest zauważyć, że środek ciężkości przypada w tejże samej odległości od ścian, gdyż odległość ta jest równą $\frac{1}{4}$ wysokości czworościanu, która pozostaje niezmienną zmieniając jego ściany.

Dla kul wpisanych zewnętrznie uważmy, że promień ich wspólny jest równy podwójnemu promieniowi kuli wpisanej, dalej, że promienie te są równe wzniesieniom odpowiednim środków, a w końcu, że każda z prostych łączących środek kuli wpisanej z wierzchołkami podstawy, winna obejmować środek jednej z kul szukanych (§ 300). Zrobiwszy te zastrzeżenia, nakreślenie kul szukanych nie przedstawi żadnej trudności, dosyć bowiem będzie nakreślić proste $(So, S'o')$, $(Ao, a'o')$, $(Bo, b'o')$, $(Co, c'o')$ i odciąć następnie $o\omega_1=Ao$, $c\omega_2=Bo$, $o\omega_3=Co$, $o\omega_4=So$, a podnosząc punkta $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ za pomocą linij rzutów do punktów $\omega'_1, \omega'_2, \omega'_3, \omega'_4$, punkta (ω_1, ω'_1), (ω_2, ω'_2), (ω_3, ω'_3), (ω_4, ω'_4) będą właśnie środkami czterech kul szukanych.

Jako niezbędne sprawdzenie znajdujemy, że cztery wzniesienia środków kul muszą być sobie równe, ta zaś długość wspólna wzniesień wyznacza wspólną wielkość promienia czterech kul wpisanych zewnętrznie. Nadto dokładność rysunku sprawdza się jeszcze tem, że dwa punkta ω_2, ω_1 winny leżeć odpowiednio na prostych sS, sS_2; i rzeczywiście też dla punktu np. ω_3, znajdujemy, w skutek równości i równoległości prostych CA i BS jakoteż zważając, że prosta łącząca punkta C i S_1 przechodzi przez punkt m_1 i jest w tym punkcie podzielona na dwie równe części, że prosta m_1m_2 jest równoległą do prostej S_1s a nadto jest ona równooddaloną od tejże prostej i od punktu C. Widzimy więc, że umieszczając punkt ω_3 na przecięciu się prostych Co, sS_1, będzie właśnie $Co=c\omega_3$, co było do okazania.

325. Zadanie XXV. — *Znając rzuty podstawy i rzeczywistą wielkość wysokości czworościanu o krawędziach przeciwległych prostokątnych, wyznaczyć* 1° *rzuty czworościanu,* 2° *najkrótsze odległości krawędzi przeciwległych,* 3° *kulę przechodzącą przez środki dwu krawędzi przeciwległych i przez spodki ich najkrótszej odległości.* — Dowodzenie tego zadania należy oprzeć na następujących własnościach czworościanu o krawędziach prostokątnych:

I. *Cztery jego wysokości przecinają się w jednym punkcie.*

II. *Najkrótsze odległości krawędzi przeciwległych przecinają się w tymże samym punkcie, w którym się przecinają wysokości czworościanu.*

III. *Środki sześciu krawędzi i spodki najkrótszych odległości krawędzi przeciwległych leżą na jednej kuli, której środek przypada w środku ciężkości czworościanu.*

326. Zadanie XXVI. — *Znając rzuty czworościanu, którego podstawa leży na płaszczyźnie poziomej rzutów, znaleźć* 1° *rzuty prostej przechodzącej przez wierzchołek ostrosłupa i równo nachylonej do jego ścian bocznych,* 2° *taki punkt tej prostej, z któregoby można zobaczyć powierzchnię boczną ostrosłupa w rzeczywistej wielkości na płaszczyźnie poziomej rzutów .* — Niech ABC będzie podstawą poziomą czworościanu, zaś S jego wierzchołkiem (fig. e_1). Ponieważ prosta łącząca wierzchołek S ze środ-

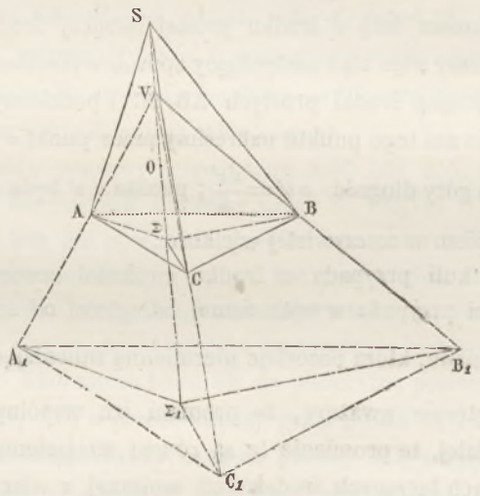

Fig. e_1

kiem O kuli wpisanej w ostrosłup, odpowiada naturalnie warunkom podanym w pierwszej części zadania, zajmijmy się więc drugą jego częścią.

Niech Σ będzie śladem prostej SO na płaszczyźnie podstawy a V punktem nieznanym patrzącego; nakreślmy proste ΣA, ΣB, ΣC, a w ten sposób utworzymy trzy trójkąty ΣAB, ΣBC, ΣAC, widzialne z punktu V podług takichże samych trójkątów, jak ściany boczne odpowiadające. Ponieważ więc te trójkąty widzimy w taki sam sposób jak ściany boczne, oznaczmy ich perspektywy $\Sigma_1A_1B_1$, $\Sigma_1B_1C_1$, $\Sigma_1A_1C_1$ (§ 6) i nadajmy im powierzchnie odpowiednio równe ścianom bocznym; w tym celu porównajmy ostrosłupy mające za wierzchołek punkt S a za podstawy ΣAB, ΣBC, ΣAC, to te ostrosłupy jako mające wysokości równe, są pomiędzy sobą w stosunku podstaw. Ale że też same ostrosłupy, uważając w nich punkt Σ zawierzchołek są w stosunku podstaw SAB, SBC, SAC, zatem powierzchnie trójkątów podstawy, których wspólny wierzchołek znajduje się w punkcie Σ, są proporcyonalne do

powierzchni ścian bocznych, a ponieważ nadto są one proporcyonalne do powierzchni swych perspektyw, dostatecznem więc będzie umieścić oko patrzącego V na prostej SΣ w ten sposób, iżby było

$$\frac{\Sigma AC}{\Sigma_1 A_1 C_1} = \frac{\Sigma AC}{ASC}. \quad (1)$$

Ponieważ zkądinnąd mamy

$$\frac{\Sigma AC}{\Sigma_1 A_1 C_1} = \frac{V\Sigma}{V\Sigma_1},$$

podstawiając więc tę wartość w równaniu (1) otrzymamy :

$$\frac{V\Sigma}{V\Sigma_1} = \frac{\Sigma AC}{ASC},$$

t. j. równanie, które wskazuje, że należy tylko podzielić długość $\Sigma\Sigma_1$ w stosunku powierzchni trójkątów ΣAC, SAC, czyli ponieważ te trójkąty mają podstawę wspólną, należy podzielić $\Sigma\Sigma_1$ w stosunku ich wysokości, które to zadanie jest doskonale znanem w geometryi płaskiej.

327. **Zadanie XXVII.** — *Znając rzuty czworościanu mającego podstawę na płaszczyznie poziomej rzutów, nakreślić najkrótsze odległości krawędzi przeciwległych branych po dwie, dalej najkrótsze odległości wysokości czworościanu także branych po dwie, i nareszcie najkrótsze odległości prostopadłych wspólnych ztąd znalezionych również branych po dwie* (do rozwiązania).

328. **Zadanie XXVIII.** — *Nakreślić rozwinięcie czterosześciościanu* (tétrahéxaèdre). — Dla utworzenia czterosześciościanu należy podzielić każdę krawędź czworościanu foremnego na trzy równe

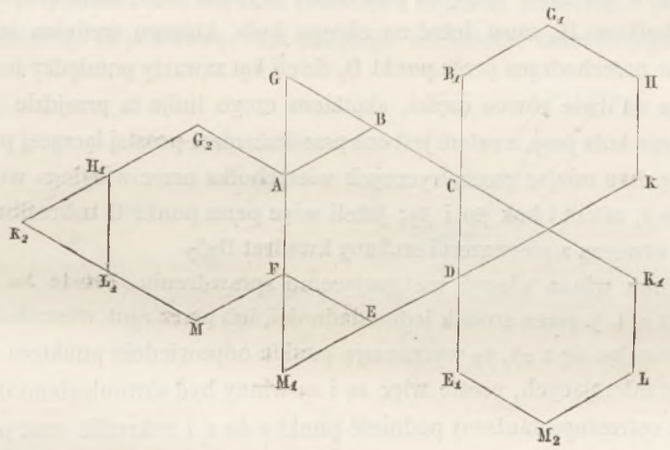

Fig. e_2.

części, i pościnać ostrosłupy utworzone płaszczyznami przesuniętemi przez trzy punkta leżące najbliżej wierzchołka. Figura e_2 przedstawia dostatecznie jasno kształt rozwinięcia tej bryły, a litery też same tylko z różnemi skaźnikami wskazują punkta, które należy z sobą połączyć dla jej wystawienia.

329. **Zadanie XXIX.** — *Mając dane na płaszczyznie poziomej rzutów 1° jednę z podstaw* ABCD *ostrosłupa czworokątnego ściętego, 2° jeden punkt p śladu płaszczyzny drugiej podstawy, nakreślić rzut poziomy drugiej podstawy w ten sposób, żeby on był prostokątem, i dokończyć wykreślenia rzutu poziomego danego ostrosłupa ściętego* (*fig.* 256, tab. XXI). — Ponieważ rzut poziomy podstawy leżącej zewnątrz płas-

czyzny poziomej rzutów winien być jednokładnym do rzutu na tej płaszczyznie leżącego, żeby więc ten rzut był równoległobokiem, potrzeba, żeby trzecia przekątnia *rt* czworoboku danego była linią ograniczającą jednej z figur (§ **263**, 3^{e} rozwiązanie), a ponieważ, z drugiej strony, znamy jeden punkt *p* osi jednokładności, znajdziemy ją więc, kreśląc przez punkt *p* prostę *pq* równoległą do *rt*. Według właśnie przytoczonego paragrafu, proste łączące rzut poziomy wierzchołka ostrosłupa, którego uważany pień jest częścią, z punktami *r*, *t*, winny wyznaczać kierunek dwóch bobów po sobie idących rzutu równoległoboku, zkąd wypływa, że umieszczając rzut tego wierzchołka w jednym z punktów *s* okręgu koła zakreślonego na *rt* jako średnicy, równoległobok będzie prostokątem. Dokończenie wykreślenia odbywa się w sposób podany w powyżej wskazanym paragrafie.

330. Zadanie XXX. — *Znając podstawę i wysokość ostrosłupa czworościennego takiego, że równoległoboki oznaczone na ścianach bocznych mają za rzuty na płaszczyznę podstawy, kwadraty, nakreślić rzuty wierzchołka tego ostrosłupa* (*fig.* 257, tab. XXI). — Ustawmy czworobok podstawy ABCD, $a'b'c'd'$ na płaszczyznie poziomej rzutów i dopełnijmy go w punktach *v*, i *m*. Szukajmy obecnie rzutu poziomego jednego z równoległoboków nakreślonych na powierzchni bocznej wielościanu, np. tego, którego wierzchołek przypada w punkcie D. Ponieważ rzut ten winien być kwadratem jednokładnym, jak to widzieliśmy w paragrafie **263**, zaś prosta *n*, jak wskazuje tenże paragraf, jest prostą ograniczającą jednej z figur, a punkt D jest znów swym własnym odpowiednim jako należący do obu figur, wypada więc ztąd, że prosta x_1 równoległa do *vm*, a przechodząca przez punkt D, jest osią jednokładności.

Ponieważ następnie punkta *p* i *q* leżące na osi jednokładności, leżą zarazem na dwu bokach po sobie idących wieloboku podstawy, i są swemi własnemi odpowiedniemi, czyli, mówiąc innemi słowy należą do dwu boków po sobie idących kwadratu, wypada ztąd, że wierzchołek tego kwadratu odpowiedni wierzchołkowi D, musi leżeć na okręgu koła, którego średnicą jest prosta *pq*. Nadto, przekątnia kwadratu przechodząca przez punkt D, dzieli kąt zawarty pomiędzy bokami wychodzącemi z drugiego jej końca na dwie równe części, skutkiem czego linija ta przejdzie przez punkt *m* czyli przez środek półokręgu koła *pmq*, a zatem jest ona przedłużeniem prostej łączącej punkt D z punktem *m*. Punkt spotkania się dwu miejsc geometrycznych wierzchołka przeciwległego wierzchołkowi D, wyznaczy go w punkcie β, zatem i bok βp i βq; jeżeli więc przez punkt D nakreślimy proste równoległe do βp i βq, to one utworzą z pierwszemi szukany kwadrat $D\alpha\beta\gamma$.

Dokładność rysunku winna ulegać następującemu sprawdzeniu. Proste $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ winny przechodzić przez punkt *s*, t. j. przez środek jednokładności, lub przez rzut wierzchołka ostrosłupa, nadto proste *sn*, *sv* przecinając się z $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ wyznaczają punkta odpowiednie punktom *n*, *v*, a że te ostatnie leżą na prostych ograniczających, proste więc *sv* i *sn* winny być równoległemi do boków $\beta\gamma$, $\beta\alpha$.

Znając wysokość ostrosłupa możemy podnieść punkt *s* do *s'* i nakreślić rzut pionowy wielościanu. Na figurze przedstawiliśmy pień ostrosłupa, zawarty pomiędzy płaszczyzną poziomą rzutów i płaszczyzną przecięcia $D\alpha\beta\gamma$, $D'\alpha'\beta'\gamma'$.

331. Zadanie XXXI. — *Mając dane płaszczyzny dwu ścian bocznych i podstawę ostrosłupa czworościennego, postąpić w taki sposób, żeby rzut na płaszczyznę podstawy równoległoboków nakreślonych na ścianach bocznych, był kwadratem ukośnym* (*fig.* 258, tab. XXI). — Ustawiwszy podstawę ABCD na płaszczyznie poziomej rzutów, a dla wyznaczenia płaszczyzn dwu ścian bocznych danych, nakreśliwszy rzuty *f*, *f'* punktu wspólnego ścianom mającym BC, DC za ślady, wypada ztąd, że prosta *f*C jest rzutem poziomym jednej z krawędzi bocznych.

Zasadzając się na paragrafie **263** spostrzegamy, że trzecia przekątnia *vm* czworoboku zupełnego,

otrzymana z przedłużenia boków podstawy, jest prostą ograniczającą, a ponieważ przecięcia płaszczyznami równoległemi są jednokładne, weźmy więc prostę x_1 równoległą do vm, a przechodzącą przez punkt A, za oś jednokładności. Obecnie przypuśćmy, że zadanie jest rozwiązane i uważmy kwadrat ukośny $A\delta\gamma\beta$; boki $\gamma\delta$, $\gamma\beta$ winny odpowiednio przechodzić przez punkta p i q, spotkania się osi x_1 z bokami CD i CB podstawy, a nadto przekątnia $A\gamma$ winna dzielić kąt $q\gamma p$ na dwie równe części, przyczem uważmy również dwójsieczną zewnętrzną $u\gamma$ tegoż kąta.

Ponieważ dwa boki kąta $q\gamma p$ z dwójsiecznemi $A\gamma$, $u\gamma$ tworzą wiązkę harmoniczną (§ **258**), wyznaczającą podział $qpAu$ także harmoniczny, nadto, ponieważ przekątnie BD, AC czworoboku zupełnego ADCB przecinają harmonicznie trzecią przekątnię vm, zatem podział $vmut$ jest harmonicznym, i wiązka $C.vmut$ jest nią także, a punkta jej przecięcia się z osią jednokładności x_1 brane po dwa, są sprzężonemi harmonicznemi; a ponieważ trzy punkta p, q, A tego podziału przypadają w punktach podziału harmonicznego już wskazanego powyżej, zatem czwarte punkta obu podziałów muszą się zchodzić, czyli że punkt u leży na przecięciu się prostej Ct z x_1.

Obecnie wykreślenie może być dopełnionem bez trudności, albowiem dosyć będzie w tym celu nakreślić półokrąg koła na prostej uA jako średnicy i oznaczyć punkt γ przecięcia się jego z prostą daną fC, poczem kreśląc proste $q\gamma$, $p\gamma$ i do nich równoległe, przechodzące przez punkt A znajdziemy kwadrat ukośny $A\delta\gamma\beta$; a rzuty poziome krawędzi bocznych ostrosłupa dadzą się łatwo wyznaczyć, a jeżeli figura została dokładnie wykonaną, winny one przechodzić przez jeden i ten sam punkt s.

Na figurze przedstawiliśmy ostrosłup ścięty zawarty pomiędzy podstawą a wielobokiem przecięcia, cieniując części przecięcia widzialne odpowiednio do reguł podanych (§ **275**).

332. *Zastosować sposób przemiany figur do trzech ostatnich wykreśleń.* — Dla każdego z tych trzech wykreśleń możemy przypuścić, że czworobok powstaje z rzutu na płaszczyznie poziomej rzutów, przecięcia ostrosłupa mającego za podstawę, rzut drugiego wieloboku nakreślonego. W tych warunkach

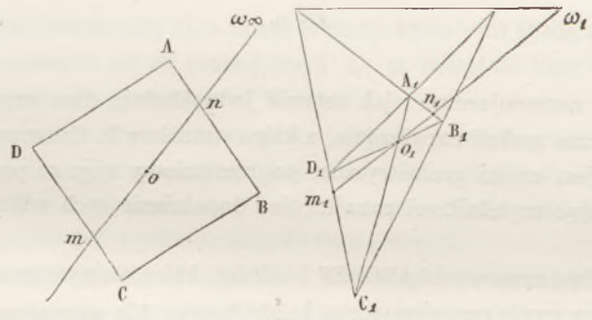

FIG. e_3.

czworobok może być zarówno dobrze przemieniony, za pomocą metody rzutów, na równoległobok, prostokąt, kwadrat lub kwadrat ukośny, pamiętając zawsze, że należy dodać dla każdej z figur przemienionych prostę w nieskończoności należącą do płaszczyzny, na której wykreślenie ma miejsce.

Te ostatnie figury przedstawiają wielką liczbę własności rzutowych, które dostrzegamy odrazu z poglądu na nie, i z każdej z nich możemy wyprowadzić twierdzenie dotyczące czworoboku.

Uważając np., figurę tworzącą kwadrat ABCD (fig. e_3), prostę w niekończoności jego płaszczyzny i jakąkolwiek prostę, przechodzącą przez jego środek, to dwa jego boki przeciwległe AB, DC wyznaczą punkta przecięcia m, n na prostej jakiejkolwiek, i punkt ω_∞ na jego przekątniej w nieskończoności; otóż wiemy, że punkta $mno\omega_\infty$ są sprzężonemi harmonicznemi.

Uważajmy teraz kwadrat jako powstały z przekształcenia odpowiedniego czworoboku, to punkta m, n, o, ω_∞, będą odpowiadać punktom m_1, n_1, o_1, ω_1, drugiej figury, które to ostatnie punkta winny przedstawiać podział harmoniczny ; a ztąd wyprowadzimy następujące twierdzenie :

Dwa boki przeciwległe czworoboku wyznaczają na prostej jakiejkolwiek, przechodzącej przez punkt zbiegu dwu jego przekątni, odcinek podzielony harmonicznie przez tenże punkt zbiegu i przez trzecią przekątnię.

Postępując tą samą drogą czytelnik mógłby dowieść wielkiej liczby własności czworoboku, z pomiędzy których podamy tu dwie najważniejsze :

I. *Środki przekątni czworoboku zupełnego leżą na jednej linii prostej.*

II. *Wszelka prosta poprzeczna (transversale) przecina cztery boki i dwie przekątnie czworoboku w sześciu punktach będących w inwolucyi.*

333. Zadanie XXXII. — *Mając podstawę ostrosłupa czworościennego, postąpić w ten sposób, żeby jedno z przecięć płaskich tego ostrosłupa miało za rzut na płaszczyznę podstawy, drugi czworobok dany.* —

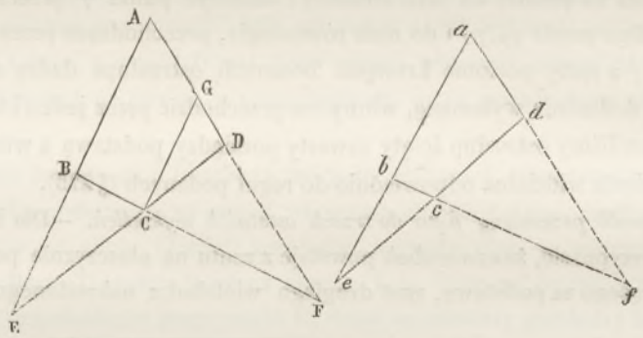

FIG. e_4.

Zadanie to odpowiada następującemu : jak ustawić jednokładnie dwa czworoboki dane, na które Starożytni przez długi czas szukali rozwiązania, a które winniśmy P. CHASLES.

Ponieważ zadanie to jest czysto geometryczne, poprzestaniemy więc na podaniu tylko zasady jego rozwiązania, pozostawiając czytelnikowi rozwinięcie i dopełnienie tych wskazówek, jakoteż wykreślenie rysunku.

Niech będą (fig. e_4) dwa czworoboki ABCDEF i *abcdef*, które mamy ustawić jednokładnie. Przedewszystkiem wyznaczmy proste ograniczające na każdej figurze. Ale wyznaczenie to prostej ograniczającej sprowadza się, nakreśliwszy dwie równoległe na jednej z figur, do wyznaczenia im odpowiednich na drugiej ; kreśląc więc CG równolegle do AB, pozostaje tylko znaleźć na drugiej figurze punkt odpowiedni punktowi G. Punkt ten znajdziemy bardzo łatwo pamiętając, że stosunek nieharmoniczny jest prawdziwy w rzucie, albowiem, jeżeli oznaczymy przez *g* punkt szukany, to będzie (ADGF)=(*adgf*) (§ **253**), i w ten sposób zadanie zostało sprowadzone do tego, jak mając trzy punkta i stosunek nieharmoniczny, wykreślić punkt czwarty podziału. Teraz szukać należy rozdwojonego środka jednokładności. W zasadzie wystarcza wiedzieć, jak się wyznacza dwie pary punktów odpowiednich, któreto zadanie znajduje się w przypadku poprzedzającym, a my nie mamy bynajmniej zamiaru podawania tutaj ani porządku w jakim wykreślenia mają postępować, ani też wskazywać korzyści wynikających z miejsca prostych ograniczających, gdy idzie o wyznaczenie środka jednokładności, lecz chcemy się

ograniczyć li tylko na wskazaniu zasady tej metody. Jeżeli zatem umiemy nakreślić proste ograniczające i środek rozdwojony, całe zadanie sprowadza się do położenia środków jeden na drugim, czyniąc zarazem proste graniczne równoległemi, a to ostatnie zadanie nie przedstawia żadnej trudności.

Ostatni punkt, który należy rozwiązać, jest znalezienie osi jednokładności; otóż widoczną jest rzeczą, że znajomość przecięcia się prostych odpowiednich wyznaczy odrazu oś jednokładności, jednakże niezbędnem jest oznaczyć szczególne położenie tejże osi względem elementów już wyznaczonych.

Dowiedźmy, że odległość od osi jednej jakiejkolwiek z prostych granicznych, jest właśnie równą odległości środka jednokładności od drugiej prostej granicznej.

Dwie figury jednokładne, leżące na jednej płaszczyznie, mogą być uważane jako rzuty prostokątne dwu przecięć płaskich jednego ostrosłupa (§ 249).

Niech P i Q (fig. e_5) będą płaszczyznami siecznemi, S wierzchołkiem ostrosłupa; nakreślmy przez ten punkt płaszczyznę równoległą do Q, to ta przetnie P podług prostej II_1 która jest prostą sprzężoną

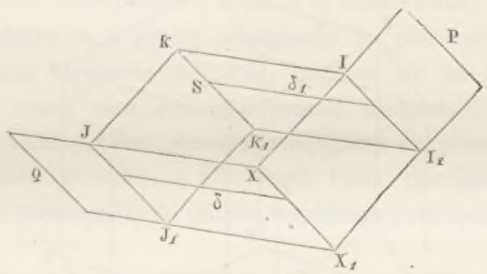

Fig. e_5.

punktów w nieskończoności płaszczyzny Q, a zatem w rzucie będzie ona jedną z prostych granicznych; wyznaczmy odległość punktu S od tej prostej, czyli δ_1, ta odległość liczy się na prostopadłej δ_1 wyprowadzonej z tego punktu do prostej II_1.

Płaszczyzna równoległa do P a przechodząca przez punkt S, przecina płaszczyznę równoległą do Q podług prostej KK_1, a płaszczyznę Q podług prostej JJ_1, której rzut jest drugą prostą graniczną; wreszcie prosta XX_1 przecięcia się płaszczyzn P i Q ma za rzut oś jednokładności, a jej odległość JJ_1 mierzy się na prostej δ prostopadłej jednocześnie do tych prostych.

Proste JJ_1, XX_1 i proste KK_1, II_1 są naturalnie równoległe pomiędzy sobą i odległość δ dwu pierwszych, jest równą odległości δ_1 dwu drugich, a ponieważ ta obopólna własność jest prawdziwą w rzutach prostokątnych, więc twierdzenie jest dowiedzionem.

334. **Twierdzenie.** — *Jeżeli na płaszczyznie* B *nakreślimy perspektywę figury danej na płaszczyznie* A, *to na tych płaszczyznach znajdują się dwa punkta odpowiednie b* i *a takie, że wszelki odcinek figury* B *jest widzialnym z punktu b pod tym samym kątem, pod jakim jest widzialnym odcinek odpowiedni figury* A *z punktu a* (Abel Transon, *Nouvelles annales*, t. VIII, druga serya, str. 426) [do dowiedzenia].

335. **Zadanie XXXIII.** — *Nakreślić rzuty dwunastościanu romboidalnego.* — Utwórzmy przedewszystkiem kąt trójścienny, mający wierzchołek w punkcie A (fig. e_6) a za ściany kąty rozwarte trzech kwadratów ukośnych ABGD, ACED, ABFG, następnie przez punkt A nakreślmy prostę $A\alpha$ równą bokom kwadratów ukośnych, leżącą wewnątrz kąta trójściennego A i jednakowo nachyloną do jego krawędzi. Dołączmy dalej do prostej $A\alpha$ dwa boki kąta trójściennego A i na tej grupie

prostych (Aα, AD, AB), (Aα, AD, AC), (Aα, AC, AB) wystawmy równoległościany ABGDHKNα, ADECJHIα, ABFCJαNL, to te dopełnione czwartym αHIJLMKN, wystawionym na αH, αJ, αN, utworzą dwunastościan romboidalny. Bryła tak utworzona składać się będzie z czterech równoległościanów, w których cztery krawędzie wewnętrzne αA, αH, αJ, Nα nakreślone są na figurze linijami przerywanemi jako niewidzialne.

Możnaby także tak ułożyć dane zadanie, żeby kwadrat ukośny DACE tworzył kąt rozwarty, skutkiem czego będzie dwunastościan równościennym, a zadanie stanie się zadaniem geometrycznem łatwem do rozwiązania i prowadzącem do dwunastościanu romboidalnego napotykanego w naturze; lecz nie uważaliśmy za rzecz użyteczną zajmować się tą kwestyą, i uważać będziemy nadal kąt rozwarty kwadratu ukośnego za jakikolwiek.

Wykreślenie rysunku (*fig.* 259, tab. XXII). — Niech P, P′ będą śladami płaszczyzny ściany danej; ustawmy jeden z boków kwadratu ukośnego danego t. j. *ac*, *a′c′* na śladzie poziomym tej płaszczyzny,

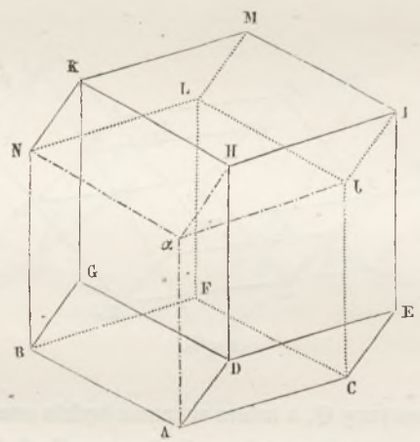

Fig. 260.

a dla dopełnienia wykreślenia tegoż kwadratu przyjmując płaszczyznę pionową pomocniczą, której oś rzutów jest x_1y_1 i kreśląc nowy ślad pionowy $\beta B'_1$ płaszczyzny danej P, P′, wystawmy sobie że zrobionym został kład płaszczyzny $P\beta P'_1$ wraz, z kwadratem ukośnym na niej leżącym, na płaszczyznę poziomą; niech następnie B_1ac przedstawia kład jednego z kątów rozwartych kwadratu ukośnego, to przypuszczając nadto, że $aB_1 = ac$, punkt B_1 będzie w takim razie kładem jednego z wierzchołków kwadratu ukośnego. W dalszym ciągu zastosujemy wykreślenia, jakie zostały podane powyżej dla utworzenia dwunastościanu, t. j. wykreślenie zasadzające się na znajomości kąta trójściennego równościennego, mającego wierzchołek w punkcie A.

Przedewszystkiem więc zajmijmy się wyznaczeniem tego kąta bryłowego. Ponieważ trzy jego ściany są równe, możemy zatem przyjąć, że z dwu z nich został zrobiony kład na płaszczyznę poziomą rzutów, obracając jednę naokoło *ac*, a drugą naokoło aB_1 w ten sposób, że one pokryły przestrzeń kątową B_1ac już wyznaczoną.

Dla wystawienia kąta trójściennego, pozostawmy chwilowo płaszczyznę $P\beta P'_1$ w kładzie, a podnieśmy tylko z kładu dwie ściany, których kład właśnie zrobiliśmy, to podczas tego ruchu punkta B_1, c zmienią swe położenie na płaszczyznach prostopadłych do osi obrotu i zejdą się w jednym punkcie

w przestrzeni, którego rzut przypada w punkcie D_1, przecięcia się prostopadłych do osi obrotu ac, aB_1, przechodzących przez punkta B_1, c. Podnieśmy teraz z kładu płaszczyznę $P\beta P'_1$ wraz z tak wystawionym kątem trójściennym; podczas tego ruchu punkt B_1, b'_2 opisze łuk koła, mającego punkt β za środek, a promień równy $\beta b'_2$ i przyjdzie do punktu b'_1, b, zaś punkt d'_2 przyjdzie do punktu δ'_1, wreszcie prostopadła do płaszczyzny poziomej, przechodząca przez punkt D_1 i przez koniec trzeciej krawędzi odbudowanego kąta trójściennego, ma za rzut na nową płaszczyznę pionową rzutów prostę prostopadłą do śladu P'_1, wychodzącą z punktu δ'_1. Ponieważ wierzchołek D wielościanu porusza się po okręgu koła, który tak w przestrzeni jak w rzucie pionowym zchodzi się z okręgiem koła opisanego przez punkt B_1, b'_2, a któryto okrąg ma za rzut łuk $b'_2\gamma'_1 b'_1$, zatem rzutem wierzchołka D na nowej płaszczyznie rzutów będzie punkt d'_1, przecięcia się prostej prostopadłej do P'_1 przechodzącej przez punkt δ'_1 z okręgiem koła γ'_1; a linija rzutów przechodząca przez punkt d'_1 wyznaczy na przecięciu się jej z prostą $B_1 b$, rzut poziomy d wierzchołka D, ustawionego we właściwem miejscu na wielościanie.

Zajmijmy się teraz wyznaczeniem prostej pomocniczej, jednakowo nachylonej do trzech krawędzi kąta trójściennego A. Ponieważ krawędzie wielościanu są sobie równe, zatem prostę szukaną znajdziemy łatwo, kreśląc z punktu a, β prostę prostopadłą do płaszczyzny przechodzącej przez trzy punkta (c, β), (d, d'), (b, b'), a że prosta bd_1, $b'_1 d'_1$ znajduje się na płaszczyznie obrazu nowego układu płaszczyzn rzutów, zatem rzut pionowy prostej szukanej jest prostą $\beta S'_1$ prostopadłą do $d'_1 b'_1$ i wychodzącą z punktu β, zaś poziomy otrzymamy na przecięciu płaszczyzny, przechodzącej przez trzy punkta dane powyżej, z płaszczyzną $P\beta S'_1$ rzucającą pionowo prostę szukaną, a to kreśląc przez punkt a, β prostopadłę do prostej wspólnego przecięcia, i oznaczając rzut poziomy tej ostatniej.

Dla przedstawienia rysunkiem tego wykreślenia, zróbmy kład płaszczyzny $P\beta S'_1$, naokoło prostej βP, na płaszczyznę poziomą rzutów, i to wraz z prostą jej wspólnego przecięcia się z płaszczyzną przechodzącą przez trzy punkta. Podczas tego ruchu, punkt c należący i do prostej wspólnego przecięcia i do osi obrotu, będzie swym własnym kładem, zaś prosta bd, $b'_1 d'_1$ spotykając płaszczyznę $P\beta S'_1$ w punkcie, którego rzutem pionowym jest punkt ω'_1, a którego drugi rzut leży na prostej bd, przedstawia się w kładzie w punkcie Ω_1, zkąd wypada, że prosta łącząca punkt Ω_1 z c jest kładem szukanym, a prostopadła aS'_1 wychodząca z punktu a jest kładem prostej równo nachylonej do trzech krawędzi kąta trójściennego; ponieważ nadto prosta ta winna mieć długość równą krawędziom dwunastościanu, a jest ona widzialną na kładzie w rzeczywistej wielkości, więc znajdziemy ją, odcinając na aS_1, za pomocą łuku koła już nakreślonego, długość $a\alpha_2$ równą ac.

Zadanie całe zostało obecnie sprowadzone do wyznaczenia prostej $a\alpha_2$ podniesionej z kładu; że zaś α_2 ma za rzut pionowy α'_2, który po podniesieniu z kładu przypada w punkcie α'_1 przecięcia się łuku koła zakreślonego z punktu β promieniem $\beta\alpha'_2$, z rzutem $\beta S'_1$ prostej prostopadłej do płaszczyzny przechodzącej przez trzy punkta, jeżeli więc połączymy punkt α_2 ze środkiem powinowactwa liniją prostą, i oznaczymy punkt α_1 spotkania się tej ostatniej z liniją rzutów przechodzącą przez punkt α'_1, znajdziemy prostę szukaną.

Łatwo więc teraz wykreślić, przechodząc do dawnego układu płaszczyzn rzutów, i odrzucając linije niepotrzebne, rzuty krawędzi czterech równoległościanów, które w całości dadzą nam rzuty dwunastościanu romboidalnego.

336. Zadanie XXXIV. — *Nakreślić wspólne przecięcie dwunastościanu romboidalnego, którego znaleźliśmy rzuty, z graniastosłupem czworościennym prostym, mającym krawędzie równoległe do osi rzutów*

(*fig.* 260, tab. XXII). — Wykreślenie przecięcia się wielościanu z graniastosłupem, którego krawędzie są równoległe do jednej z płaszczyzn rzutów, wykonywa się z łatwością za pomocą rzutu pomocniczego na płaszczyznę prostopadłą do krawędzi bocznych graniastosłupa. Rzeczywiście, na tej nowej płaszczyźnie rzutów rzutem linii szukanej, obwód przecięcia prostego graniastosłupa, zawarty wewnątrz drugiego wielościanu, a którego wierzchołki mają jedne za rzuty wierzchołki przecięcia prostego leżące w granicach wskazanych, inne zaś w punktach spotkania obwodu przecięcia prostego z rzutami krawędzi wielościanu. Sposób postępowania tutaj podany jest tylko szczególnym przypadkiem metody ogólnej, dającej przecięcie jakiegokolwiek ostrosłupa z wielościanem; nakreśliwszy bowiem rzut zbieżny wielościanu i ostrosłupa, i biorąc za środek rzutów wierzchołek tego ostatniego a za płaszczyznę rzutów płaszczyznę podstawy, to w tym przypadku wszystko to, cośmy wskazali dla graniastosłupa, posłuży do nakreślenia rzutów wspólnego przecięcia.

Wróćmy do wykresu podanego (*fig.* 260, tab. XXII) i niech będą $abcdefghijklmn, a'b'c'd'e'f'g'h'i'j'k'l'm'n'$ rzutami dwunastościanu romboidalnego, wyznaczonego w poprzedzającym paragrafie.

Weźmy za oś rzutów prostę x_1y_1 prostopadłą do pierwszej i zmieńmy płaszczyznę pionową rzutów; nowy rzut dwunastościanu przypadnie w $a'_1b'_1 \ldots l'_1m'_1n'_1$, a rzut graniastosłupa będzie wyznaczony przez swe przecięcie proste $u'_1v'_1w'_1z'_1$, które przyjmujemy za znane.

Wyznaczenie wierzchołków wieloboku przecięcia po tem, cośmy powiedzieli, nie przedstawi żadnej trudności, gdyż idzie tylko o sposób łączenia punktów pomiędzy sobą.

Użyjmy w tym celu sposobu podanego w paragrafie **273**. Wyznaczmy przedewszystkiem liniję przecięcia użyteczną, a ponieważ znamy wszystkie wierzchołki wieloboku przecięcia, rzecz ta więc nie przedstawi żadnej trudności; i tak weźmy naprzykład prostę (1, 2), (1′, 2′) wspólnego przecięcia płaszczyzny ściany $hkgd$, $h'_1k'_1g'_1d'_1$ dwunastościanu, ze ścianą graniastosłupa mającą za ślad pionowy $z'_1u'_1$. Ponieważ jeden z końców 2, 2′ prostej (1, 2), (1′, 2′) przypada na jednej z krawędzi, zastąpmy więc ścianę $hkgd$, $h'_1k'_1g'_1d'_1$ ścianą jej przyległą $gknb$, $g'_1k'_1n'_1b'_1$, prosta bowiem gk, $g'_1k'_1$ jest ich krawędzią wspólną, a na niej leży punkt 2, 2′; zachowując ścianę graniastosłupa, wyznaczmy przecięcie $2k_2$, $2'k'_2$, płaszczyzn tych ścian, i ograniczmy ją na części użytecznej $2'_1$, $3'_1$, 2, 3 (§ 273). Podobnież punkt 3, 3′ leży na krawędzi wspólnej dwu ścian, zastąpmy więc znów ścianę $z'_1u'_1$ właśnie użytą ścianą $u'_1v'_1$, zachowując zawsze ścianę $gknb$, $g'_1k'_1n'_1b'_1$; płaszczyzny te spotykają się podług prostej $3k_3$, $3'_1k'_3$, a zatrzymując tylko część użyteczną tej prostej (§ 273), znajdziemy bok (3, 4), ($3'_1$, $4'_1$) szukanego wspólnego przecięcia. Punkt 4, 4′ leży na jednej krawędzi, zastąpmy ścianę odpowiadającą i t. d. Postępując tak dalej sposobem podanym w paragrafie wspomnianym, dokończymy wykreślenia rzutów (1, 2, 3, 4 ... 19, 20, 1), ($1'_1$, $2'_1$, $3'_1$, $4'_1$ ... $19'_1$, $20'_1$, 1) wspólnego przecięcia, a za pomocą linij rzutów znajdziemy rzut 1′2′3′4′... 19′20′1′ wieloboku na pierwotną płaszczyznę rzutów.

Figura 260 przedstawia dwunastościan romboidalny z jego liniją przecięcia, po usunięciu części graniastosłupa leżących zewnątrz dwunastościanu.

Części widzialne wieloboku przecięcia otrzymamy łatwo pamiętając, że krawędzie są jużto widzialne jużto niewidzialne stosownie do tego, czy leżą na ścianach widzialnych lub niewidzialnych. Na figurze 261, tab. XXIII, przedstawionym został dwunastościan pełny, po odjęciu graniastosłupa z częścią dwunastościanu w nim zawartą.

Części widzialne figury 261 zostały wyznaczone sposobem podanym w paragrafie **239**; są one takież same jak na figurze 260, z tą tylko różnicą, że dla niektórych krawędzi ukrytych wieloboku przecięcia pewne ich części stały się, po odjęciu części dwunastościanu zawartych w graniastosłupie, widzialnemi, jak np. rzut 1′2′ stał się w zupełności widzialnym, rzuty zaś 2′3′, 3′4′ stały się widzialne czę-

ściowo i t. d. Zauważyć należy, że części krawędzi graniastosłupa (3, 14), (3′, 14′), (20, 16), (20′, 16′), (6, 10), (6′, 10′) winny być rysowane linijami pełnemi lub punktowane, nie zaś linijami przerywanemi, gdyż te krawędzie przedstawiają ślad pozostawiony na dwunastościanie przez graniastosłup, czyli mówiąc inaczej, linije te są krawędziami otworu zrobionego w dwunastościanie przez graniastosłup. Cieniowanie zostało dokonanem stosownie do przepisów podanych w paragrafie 275.

Figura 262 przedstawia bryłę wspólną obu wielościanom, części widzialne wypadają ze ścian obu wielościanów, pamiętając na części ścian odrzucone, jako nie należące do bryły wspólnej.

Figura 263 przedstawia rzuty bryły utworzonej przez oba wielościany razem. Dla otrzymania ich należy nakreślić rzuty wielościanów i rzuty ich wspólnego przecięcia, przedstawiając na rysunku linijami przerywanemi części krawędzi każdego z wielościanów, a zawarte wewnątrz drugiego. Wyznać tu winniśmy, że na naszym rysunku odstąpiliśmy nieco od tej reguły, i przedstawiliśmy tak na tej figurze jak na dwu poprzedzających części odrzucone dwunastościanu linijami punktowanemi, a to dla odróżnienia ich od podobnych części krawędzi graniastosłupa, które zostały przedstawione linijami przerywanemi.

Części widzialne oznaczają się bardzo łatwo pamiętając, że żeby jakiś bok wieloboku przecięcia był widzialnym, potrzeba i dostatecznem jest, żeby on leżał na dwu ścianach widzialnych; jeżeli zaś jedna ze ścian na których on leży jest ukryta, bok jest także ukryty.

KSIĘGA II

OSTROKRĘGI, WALCE I POWIERZCHNIE OBROTOWE

ROZDZIAŁ PIERWSZY

WIADOMOŚCI WSTĘPNE

337. Określenia. — *Linią krzywą* lub *krzywą* nazywamy miejsce po sobie następujących położeń punktu, poruszającego się w przestrzeni podług pewnego oznaczonego prawa.

Krzywa jest *płaską*, jeżeli punkt porusza się na płaszczyznie, w razie przeciwnym jest ona *skośną*. *Powierzchnią* geometryczną nazywamy miejsce położeń krzywej ruchomej, zwanej *tworzącą*, która porusza się w przestrzeni podług pewnego oznaczonego prawa i może zmienić zarazem tak swój kształt jakoteż i położenie.

Prawa ruchu tworzącej tak pod względem zmiany miejsca jako też i kształtu, wyznaczają się zazwyczaj, zmuszając ją do posuwania się po pewnych linijach stałych zwanych *kierownicami*. W paragrafach 8 i 9 podaliśmy określenie *powierzchni ostrokręgowych i walcowych*.

338. Powierzchnie obrotowe. — Powierzchnie takie są utworzone całkowitym obrotem jakiejś linii *prostej* lub *skośnej* G naokoło prostej stałej Z, zwanej *osią* powierzchni (fig. e_7).

Podczas ruchu obrotowego linii G, jakikolwiek punkt m na niej obrany, opisuje okrąg koła mający za środek punkt przecięcia się prostopadłej mo, wyprowadzonej z tego punktu do osi Z, a za promień długość tejże prostopadłej; okrąg koła tak opisany, nosi nazwę *równoleżnika*. *Równoleżnik*, którego promień jest najmniejszym, zwie się *naszyjnikiem* lub *kołem szyjnem* (collier ou cercle de gorge), ten zaś, którego promień jest największym, nazywamy *równikiem* powierzchni.

Wszelka krzywa nakreślona na powierzchni obrotowej i przecinająca wszystkie jej równoleżniki, odbywszy całkowity ruch obrotowy naokoło osi powierzchni, opisze bardzo naturalnie tę powierzchnię, a tym sposobem zastąpić może jej tworzące; zasadzając się na tem, zastąpić możemy tworzącę jakąkolwiek przez krzywę powstałą z przecięcia powierzchni danej płaszczyzną przechodzącą przez jej oś. Widoczną jest rzeczą, że wszystkie takie krzywe są identyczne co do kształtu i przystają do siebie. Krzywe, o których mowa, noszą nazwę *południków* lub *krzywych południkowych powierzchni*.

Jeżeli oś powierzchni obrotowej jest równoległą do jednej z płaszczyzn rzutów, wówczas posiada ona jeden *południk* równoległy do tej płaszczyzny, zwany *południkiem głównym*.

Podajmy tu jeszcze inny sposób tworzenia się powierzchni obrotowych, a to w tym celu : 1° żeby przedstawić te powierzchnie z punktu widzenia użytecznego do rozwiązywania pewnych zadań i 2° żeby wskazać na przykładzie sposób tworzenia powierzchni przez krzywę nietylko zmieniającą swe położenie podług pewnego ściśle określonego prawa, lecz nadto przekształcającą się podczas ruchu. Według tego nowego sposobu uważamy powierzchnię jako utworzoną ruchem koła ruchomego mającego płaszczyznę prostopadłą do osi, którego środek opisuje tę oś, a który sam posuwa się p tworzącej zamienionej na kierownicę i regulującej zarazem zmiany promienia tej nowej tworzącej.

Rysunki, przedstawiające rozwiązanie zadań dotyczących powierzchni obrotowych, wykonywane

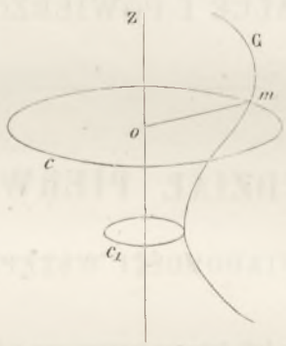

Fig. 67.

tylko będą w zastosowaniu do tych powierzchni, których najczęściej używają w sztukach, t. j. do powierzchni obrotowych drugiego rzędu, zajmujących w tej dziedzinie najpierwsze miejsce.

Powierzchnia obrotowa drugiego rzędu tworzy się obrotem krzywej drugiego rzędu naokoło jednej ze swych osi.

Powierzchniami obrotowemi drugiego rzędu są :

1° *Elipsojda obrotowa*, czyli powierzchnia utworzona zupełnym obrotem elipsy naokoło jednej ze swych osi.

Jeżeli oś obrotu zchodzi się z wielką osią elipsy południkowej, elipsojda tak utworzona jest *przedłużoną*, jeżeli zaś oś obrotu zchodzi się z małą osią elipsy, wówczas elipsojda jest *spłaszczoną*. Nareszcie jak elipsa stanie się kołem powierzchnia stanie się *kulą*.

2° *Hiperbolojda obrotowa jednopowłokowa*, czyli powierzchnia utworzona zupełnym obrotem hiperboli naokoło swej osi urojonej.

3° *Hiperbolojda obrotowa dwupowłokowa*, czyli powierzchnia utworzona zupełnym obrotem hiperboli naokoło swej osi rzeczywistej. Jeżeli hiperbola zamieni się na dwie proste, to obie hiperbolojdy obrotowe staną się dwoma ostrokręgami obrotowemi.

4° *Parabolojda obrotowa*, czyli powierzchnia utworzona zupełnym obrotem paraboli naokoło swej osi. Jako szczególny przypadek parabolojdy obrotowej podamy *walec obrotowy*, który otrzymamy, jak parabola zamieni się na dwie proste równoległe do osi obrotu.

Oprócz powierzchni obrotowych drugiego stopnia wyżej podanych, używaną jeszcze bywa powierzchnia *pierścieniowa kołowa*, utworzona obrotem koła naokoło osi leżącej na jego płaszczyznie. W następstwie będziemy jednakże mówili o powierzchni *pierścieniowej ogólnej*, utworzonej obrotem

krzywej drugiego stopnia naokoło prostej leżącej na jej płaszczyznie, lecz nie przechodzącej przez jednę z jej osi.

339. Powierzchnie prostokreślne. — Powierzchnia utworzona przez prostę ruchomą poruszającą się podług pewnego oznaczonego prawa, nosi nazwę *prostokreślnej*.

Zwiemy *ostrokręgiem kierującym* powierzchni prostokreślnej ostrokrąg, otrzymany przez zmianę położenia wszystkich kierownic powierzchni równolegle do ich pierwotnego położenia lecz tak, żeby one wszystkie przechodziły przez jeden i ten sam punkt dowolnie obrany w przestrzeni.

Płaszczyzną kierującą powierzchni prostokreślnej nazywamy ostrokrąg kierowniczy, otrzymany w przypadku, gdy wszystkie kierownice prostolinijne powierzchni są równoległe do jednej płaszczyzny.

Twierdzenie. — *Dla wyznaczenia powierzchni prostokreślnej potrzeba i dostatecznem jest znać trzy kierunki* D_1, D_2, D_3 (fig. e_8) *jej kierownic*. — Aby tego dowieść, obierzmy punkt M leżący na D_1, i

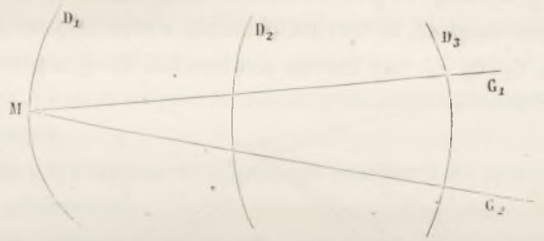

Fig. e_8.

okażmy, że zadanie, żeby prosta przechodząca przez punkt M dotykała dwu krzywych D_2, D_3, przedstawia liczbę rozwiązań ograniczoną. Proste szukane są przecięciami dwu ostrokręgów, mających wierzchołek w punkcie M, za kierownicę zaś jeden ma krzywę D_2, a drugi krzywę D_3; ostrokręgi te przecinają się z sobą podług prostych, których liczba jest ograniczoną, wyjąwszy przypadku, w którym te ostrokręgi są odpowiedniemi, gdyż wówczas zchodzą się one z sobą i stają się częścią powierzchni, której wyznaczenia dokończylibyśmy zmieniając tylko położenie punktu M na krzywej D_1.

Możemy jeszcze napotkać przypadek szczególny, w którym dwa ostrokręgi nie przecinają się z sobą, powiadamy wówczas, że punkt M jest punktem *przysposobionym* lub *nieużytecznym*.

Zdarza się często, że jednę z krzywych kierujących zastępujemy przez ostrokrąg kierujący, a w tym razie powierzchnia jest dobrze wyznaczoną. Dla przekonania się o tem, przenieśmy ostrokrąg kierujący, równolegle do swego pierwotnego położenia, do jednego z punktów jednej kierownicy i oznaczmy przecięcie się jego z ostrokręgiem pomocniczym, mającym z nim wspólny wierzchołek a opierający się na drugiej kierownicy, to przecięcie to składać się będzie z ograniczonej liczby tworzących, odpowiadających warunkom danym w zadaniu.

Powierzchnie prostokreślne dzielą się na *powierzchnie skośne i powierzchnie rozwijalne*. Te ostatnie są powierzchniami dającemi się rozwinąć na jednej płaszczyznie i przystającemi do niej bez rozdarcia się i tworzenia fałdów, pierwsze zaś nie posiadają tej własności. Powierzchnie stożkowe i walcowe, które uważać możemy jako granice ostrosłupa lub graniastosłupa, są powierzchniami rozwijalnemi.

Hiperbolojdą jednopowłokową nazywamy powierzchnię prostokreślną, której trzy kierownice są prostolinijne.

Paraboloidą hiperboliczną nazywamy powierzchnię prostokreślną o płaszczyznie kierującej, a której dwie kierownice są prostolinijne, lub innemi słowy, powierzchnię utworzoną ruchem linii prostej, opierającej się na dwu innych prostych i zostającej bezustannie równoległą do płaszczyzny stałej.

Konojdą nazywamy powierzchnię prostokreślną o płaszczyznie kierującej, a której jedna tylko kierownica jest prostolinijną; jeżeli kierownica prostolinijna jest prostopadłą do płaszczyzny kierującej, to powierzchnia utworzona nosi nazwę *konojdy prostej*. Wreszcie, podług powyżej podanego określenia, konojda zamienia się na parabolojdę hiperboliczną lub *konojdę drugiego stopnia*, jeżeli jej dwie kierownice są prostolinijne.

PŁASZCZYZNA STYCZNA W OGÓLNOSCI

340. Twierdzenie zasadnicze. — *Jeżeli kilka krzywych nakreślonych na danej powierzchni przecinają się z sobą w jednym punkcie, styczne do nich w tym punkcie leżą wszystkie na jednej płaszczyznie, która nosi nazwę płaszczyzny stycznej do powierzchni.* — Żeby dowieść, że wszystkie styczne leżą na jednej płaszczyznie, dosyć jest dowieść, że trzy jakiekolwiek z nich leżą na jednej płaszczyznie. W tym celu, oznaczmy przez C_1, C_2, C_3 (fig. e_9) trzy krzywe powierzchni danej, a przecinające się w jednym jej

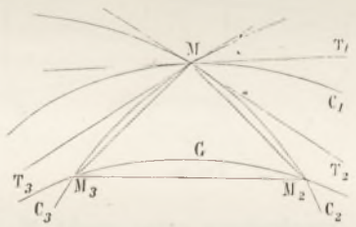

Fig. e_9.

punkcie M. Powierzchnia dana może być utworzoną przez krzywę spotykającą krzywe C_2, C_3, a która zmienia zarazem swój kształt i swe położenie zbliżając się do krzywej C_1.

Uważmy jedno z położeń tworzącej np. G i przypuśćmy, że ona spotyka krzywe C_2, C_3 w punktach M_2, M_3; nakreślmy proste MM_2, MM_3, M_2M_3 tworzące trójkąt, te trzy proste są koniecznie zawarte na jednej płaszczyznie, i to ma miejsce zawsze chociażby tworząca G miała położenie najbliższe swej granicy C_1, z czego wnosić należy, że własność ta jest prawdziwą i przy osiągnięciu tejże granicy.

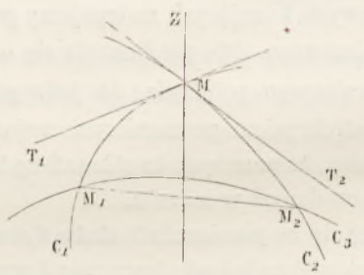

Fig. e_{10}.

W czasie ruchu punkt M_3 zdąża ku punktowi M, zaś MM_3 zdąża ku stycznej MT_3 do krzywej C_3 a przechodzącej przez punkt M; z tejże samej przyczyny MM_2 zdąża ku stycznej MT_2 do krzywej C_2.

Granicą cięciwy M_2M_3 krzywej ruchomej G, która może zmieniać swój kształt a której punkta przecięcia M_2, M_3 są obydwa ruchome, jest styczna MT_1 do krzywej C_1; w tym przypadku możemy jednakże napotkać wyjątki.

Jako przypadek szczególny podać tu należy ten, który ma miejsce na osi Z (fig. e_{10}) powierzchni obrotowej, utworzonej ruchem krzywej C_1 i przecinającej tę oś obrotu w punkcie M; rzeczywiście, uważając dwa położenia C_1, C_2 tworzącej, kierującej ruchem krzywej ruchomej C_3, znajdziemy, że skoro C_3 przejdzie przez punkt M, cięciwa M_1M_2 przyjmie położenie nieoznaczone na płaszczyznie stycznych MT_1, MT_2, które nie może wskutek tego wyznaczyć stycznej do granicy krzywej C_3, a dowodzenie twierdzenia również jak samo twierdzenie jest fałszywem, albowiem styczne do krzywych południkowych tworzą ostrokrąg styczny a nie płaszczyznę styczną do powierzchni uważanej.

Podajemy tu kilka wyników tego twierdzenia, które są bezustannie używane w licznych zastosowaniach.

Wynik I. — *Płaszczyzna styczna w jakimkolwiek punkcie powierzchni danej, wyznaczoną jest przez dwie proste styczne do dwu krzywych tej powierzchni, a przechodzących przez jeden punkt.*

Wynik II. — *Płaszczyzna styczna powierzchni prostokreślnej obejmuje tworzącę prostolinijną, przechodzącą przez punkt styczności;* i rzeczywiście, bo ta prosta jest swą własną styczną.

Wynik III. — *Jeżeli przez punkt styczności jakiejś powierzchni z jej płaszczyzną styczną, nakreślimy jakąkolwiek płaszczyznę sieczną, linije przecięcia tak powierzchni jakoteż płaszczyzny stycznej tą płaszczyzną, są stycznemi w punkcie uważanym.*

Własność ta jest widoczną, gdyż styczna do wspólnego przecięcia na powierzchni musi leżeć zarazem na jednej i na drugiej płaszczyznie.

Normalną w jakimkolwiek punkcie powierzchni, nazywamy prostę prostopadłą do płaszczyzny stycznej do tejże powierzchni, a przechodzącą przez punkt styczności.

PRZEDSTAWIENIE POWIERZCHNI

341. Obwód pozorny. — Oznaczmy przez O punkt, w którym się znajduje oko patrzącego (fig. f_1), przez P uważaną płaszczyznę rzutów, a przez S powierzchnię. Nakreślmy promień widzenia V przecinający powierzchnię, i oznaczmy przez a_1, a_2 i t. d. punkta przecięcia się jego z powierzchnią, to jeden tylko punkt a_1 jako najbliższy punktu O, będzie widzialny; oznaczmy następnie przez C liniję oddzie-

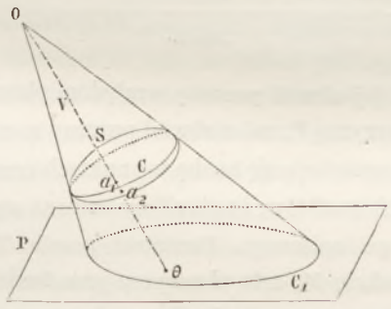

Fig. f_1.

lającą punkta widzialne jak a_1 od niewidzialnych jak a_2 i t. d. i szukajmy sposobu jej wyznaczenia. Linija C nosi nazwę *obwodu pozornego powierzchni*. Ponieważ punkta a_1 i a_2 winny się wzajemnie pokrywać na tym obwodzie, a więc promień widzenia winien być stycznym do powierzchni, zatem możemy to wysłowić w następujący sposób : *Obwód pozorny powierzchni jest krzywą, podług której okrąg*

styczny do powierzchni, a mający wierzchołek w punkcie widzenia, spotyka tę powierzchnię, lub innemi słowy : *Obwód pozorny powierzchni jest krzywą utworzoną przez spotkanie się płaszczyzn stycznych tej powierzchni, a przechodzących przez punkt widzenia, z tąż powierzchnią.*

Krzywa C_1, wynikająca z przecięcia się ostrokręgu opisanego na powierzchni z płaszczyzną rzutów P, nosi nazwę *obwodu pozornego powierzchni w rzucie*, lub mówiąc inaczej : *obwód ten jest śladem ostrokręgu opisanego na powierzchni, którego wierzchołek leży w punkcie widzenia.*

Uważając (fig. f_1) promień widzenia V spotykający płaszczyznę P w punkcie θ, widzimy, że punkt θ jest pod krzywą C_1, czyli, że *obwód pozorny* C_1 obejmuje rzuty wszystkich punktów powierzchni, pod warunkiem jednak że środek rzutów leży w punkcie widzenia O.

Ponieważ w rysunku przyjmujemy, że patrzący znajduje się w odległości nieskończenie wielkiej na prostopadłej do płaszczyzny rzutów (§ 20), z tego więc powodu to, co powiedzieliśmy powyżej, da się wysłowić w następujący sposób :

1° *Obwód pozorny powierzchni względem jednej z płaszczyzn rzutów, jest krzywą dotknięcia tej powierzchni płaszczyznami stycznemi, prostopadłemi do uważanej płaszczyzny rzutów.*

2° *Obwód pozorny w rzucie jakiejś powierzchni jest rzutem linii w przestrzeni, wyznaczającej obwód pozorny względem uważanej płaszczyzny rzutów.*

342. Twierdzenie. — *Jeżeli na powierzchni nakreślimy liniję, to rzut jej na jakąkolwiek płaszczyznę dotknie obwodu pozornego w rzucie tej powierzchni* (fig. f_2). — Niech będą θ środek, P płaszczyzna

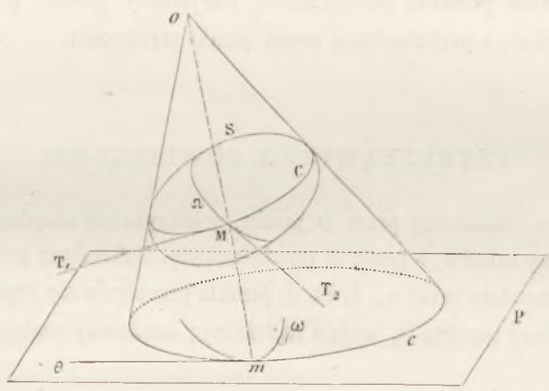

Fig. f_2.

rzutów, S powierzchnia dana, C jej obwód pozorny względem płaszczyzny P, Ω krzywa uważana na powierzchni S, ω rzut jej na płaszczyznę P, zaś *c* obwód pozorny w rzucie na płaszczyznę P. Krzywe Ω i C nakreślone na powierzchni S, spotykają się z sobą w punktach rzeczywistych lub urojonych.

Oznaczmy przez M jeden z tych punktów, i nakreślmy przezeń styczne T_1, T_2 do krzywych C i Ω, jakoteż tworzącę OM ostrokręgu opisanego. Ponieważ proste T_1, T_2, OM leżą na płaszczyźnie stycznej do powierzchni S w punkcie M, a ta płaszczyzna przechodzi przez środek rzutów O, zatem płaszczyzna ta jest zarazem rzucającą stycznych T_1, T_2 na płaszczyznę P, a wskutek twierdzenia podanego w paragrafie 142 ślad θ tej płaszczyzny jest wspólną styczną do krzywych *c* i ω, czego należało dowieść. Dodać tu tylko winniśmy, że dotknięcie się krzywych *c* i ω może być urojonem.

Wreszcie zauważmy, że ponieważ zadanie dotyczące wyznaczenia obwodu pozornego powierzchni jest tylko wyznaczeniem ich płaszczyzn stycznych, sposób więc ich przedstawienia znajdziemy w rozdziale odnoszącym się do płaszczyzn stycznych do różnych powierzchni.

ROZDZIAŁ II

PŁASZCZYZNY STYCZNE DO WALCA I DO OSTROKRĘGU

343. Twierdzenie zasadnicze. — *Płaszczyzna styczna do powierzchni stożkowej, jest do niej styczną na całej długości linii tworzącej.* — Niech będzie S wierzchołkiem powierzchni stożkowej (fig. f_3), zaś G jedną z jej tworzących; chcąc dowieść, że płaszczyzna styczna jest styczną w którymkolwiek punkcie tworzącej G, należy dowieść, że dwa jakiekolwiek punkta M_1, M_2 dowolnie obrane na niej, zchodzą się z sobą. Nakreślmy w tym celu tworzącę G′ bardzo zbliżoną do tworzącej G, dwie krzywe powierzchni C_1, C_2 przechodzące odpowiednio przez punkta M_1, M_2, i w końcu cięciwy $M_1M'_1$, $M_2M'_2$, łączące punkta przecięcia się krzywych z tworzącemi; obracając teraz tworzącę G′ tak, żeby zbliżała się do tworzącej G, cięciwy powyższe będą jednocześnie dążyć do zamienienia się na styczne, pozo-

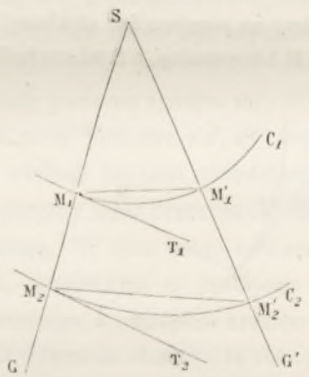

Fig. f_3.

stając zawsze w płaszczyznie tworzących G, G′, a ztąd przy zupełnem zejściu się prostych G i G′ należy wnieść, że styczne M_1T_1, M_2T_2 i tworząca G leżą na jednej płaszczyznie, która dotyka powierzchni w punktach M_1 i M_2, wskutek też czego twierdzenie jest dowiedzionem.

344. *O liczbie warunków potrzebnych do wyznaczenia płaszczyzny stycznej.* — Do wyznaczenia płaszczyzny trzeba znać trzy jej punkta, lub mówiąc innemi słowy, do wyznaczenia płaszczyzny potrzebne są trzy warunki. Styczność płaszczyzny z ostrokręgiem lub walcem odpowiada dwu warunkom, gdyż posuwając płaszczyznę po ostrokręgu, możemy ją zmusić do przejścia przez punkt dany, lub co na jedno wychodzi, płaszczyzna styczna jest wyznaczoną, jeżeli musi przechodzić przez jeden punkt dany, zatem styczność z ostrokręgiem lub walcem wyrównywa dwu punktom lub dwu warunkom.

Równoległość do jednej prostej odpowiada jednemu warunkowi, gdyż wyznaczyć prostę równoległą do płaszczyzny, jest to obrać jeden z jej punktów leżący w nieskończoności płaszczyzny. Równoległość do płaszczyzny odpowiada dwu warunkom, gdyż w tym przypadku znamy prostę w nieskończoności płaszczyzny szukanej i t. d.

345. Zadanie I. — *Znając jeden rzut punktu leżącego na powierzchni stożkowej, wyznaczyć jego rzut drugi* (*fig.* 264, tab. XXIV). — Niech d, d' będą rzutami kierownicy, zaś s, s' rzutami wierzchołka; niech będzie nadto punkt m rzutem poziomym punktu obranego na powierzchni, którego szukamy drugiego rzutu. Nakreślmy rzut poziomy sm tworzącej przechodzącej przez punkt M, i podnieśmy punkt μ przecięcia się jej z rzutem poziomym d kierownicy do punktu μ' na d'; jeżeli teraz nakreślimy rzut pionowy $s'\mu'$ tworzącej uważanej, to znajdziemy szukany punkt m' w punkcie przecięcia się tej tworzącej z linią rzutów, przechodzącą przez punkt m. Zadanie tutaj podane przedstawia tylko jedno rozwiązanie, lecz może ich być także kilka, a mianowicie tyle, ile jest punktów spotkania się prostej sm z rzutem poziomym kierownicy, i jeżeli linije rzutów przechodzące przez te punkta, spotykają odpowiednio d' w jednym punkcie.

346. Zadanie II. — *Znając jeden rzut punktu leżącego na powierzchni walcowej, wyznaczyć jego rzut drugi* (*fig.* 265, tab. XXIV). — Niech d, d' będą rzutami kierownicy a g, g' rzutami prostej wyznaczającej kierunek tworzących; niech będzie nadto danym rzut poziomy m punktu leżącego na powierzchni walca, którego chcemy wyznaczyć rzut pionowy. Wtym celu, jak poprzednio, nakreślmy równolegle do g rzut $m\mu$ tworzącej przechodzącej przez punkt dany, podnieśmy μ do μ' i przez ten punkt nakreślmy prostę równoległą do g', a odrzucając na nią punkt m do m', otrzymamy szukane rzuty punktu m, m' leżącego na walcu.

347. Zadanie III. — *Przez punkt dany na powierzchni stożkowej nakreślić do niej płaszczyznę styczną.*

Rozwiązanie ogólne. — Niech będą D kierownicą, a S wierzchołkiem powierzchni stożkowej (fig. f_4);

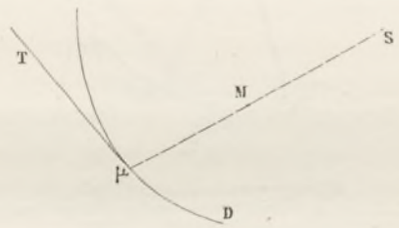

Fig. f_4.

weźmy na niej punkt M i dla wyznaczenia przezeń płaszczyzny stycznej nakreślmy tworzącę SM spotykającą kierownicę D w punkcie μ, to ponieważ na zasadzie twierdzenia zasadniczego, płaszczyzna styczna do ostrokręgu w punkcie M, będzie także doń styczną w punkcie μ, zatem jest ona wyznaczoną przez tworzącę $S\mu$ i przez styczną T do kierownicy D, przechodzącej przez punkt μ.

Wykonanie rysunku (*fig.* 264, tab. XXIV). — Powróćmy do rysunku obejmującego już rzuty m, m' punktu leżącego na powierzchni. Dla wyznaczenia płaszczyzny stycznej w tym punkcie, nakreślmy styczną do kierownicy przez punkt μ, μ', której rzuty t, t' będą styczne do rzutów d, d' kierownicy (§ **142**), a płaszczyzna wyznaczona przez proste (t, t') i $(sm, s'm')$ będzie właśnie płaszczyzną styczną szukaną.

348. Zadanie IV. — *Przez punkt dany na powierzchni walca nakreślić do niej płaszczyznę styczną* (*fig.* 265, tab. XXIV). — Zadanie to jest tylko szczególnym przypadkiem poprzedzającego i rozwiązuje się w taki sam sposób. I tak, wracając do figury 265 znajdziemy, że płaszczyzna styczna przechodząca przez punkt m, m' jest wyznaczoną przez styczną t, t' w punkcie μ, μ' do kierownicy i przez tworzącą $m\mu, m'\mu'$.

349. Zadanie V. — *Znając rzuty wierzchołka i rzuty kierownicy ostrokręgu, nakreślić obwód pozorny*

tej powierzchni na obu płaszczyznach rzutów (*fig.* 266, tab. XXIV). — Niech będą (s, s') rzutami wierzchołka, zaś (d, d') rzutami kierownicy. Obwód pozorny na jednej z płaszczyzn rzutów jest krzywą dotknięcia się płaszczyzn stycznych do powierzchni a prostopadłych do tejże płaszczyzny rzutów, że zaś płaszczyzna styczna do powierzchni w jakimkolwiek z jej punktów jest do niej styczną wzdłuż całej tworzącej, zatem wnosimy, że obwód pozorny jest utworzonym przez tworzące. Wiedząc następnie z twierdzenia podanego w paragrafie 342, że rzuty linij obwodu pozornego winny być stycznemi do rzutów tworzących, obwód pozorny będzie wyznaczonym przez styczne do d lub do d' wyprowadzone z punktów s lub s'. Niezbędną jest rzeczą dodać do linii obwodu pozornego rzuty tworzących przechodzących przez ostateczne punkta (e, e'), (f, f') kierownicy, gdyż rzuty te, chociaż nie należą do obwodu pozornego, służą jednakże do ograniczenia rzutów punktów powierzchni. Na rysunku uważaliśmy ostrokrąg jako ograniczony z jednej strony wierzchołkiem jego, a z drugiej strony jego kierownicą i przedstawiliśmy części widzialne ztąd wypływające różnych linij (§ 237, 2^{gi} Sposób).

Użycie kierownicy płaskiej jest bardzo dogodne, gdyż w tym przypadku kierownicę umieszcza się zwykle na płaszczyznie poziomej rzutów, a skutkiem tego ostrokrąg jest wówczas wyznaczonym przez rzuty s, s' swego wierzchołka (*fig.* 267, tab. XXIV) i przez ślad kierownicy D; obwód pozorny na płaszczyznie poziomej rzutów kreśli się w tym przypadku w sposób podany na poprzedzającym rysunku.

Obwód pozorny w rzucie poziomym nie może być wyznaczonym sposobem podanym powyżej, jednakże zadanie rozwiązuje się bardzo łatwo zważając, że płaszczyzny styczne prostopadłe do płaszczyzny pionowej rzutów mają za ślady poziome styczne aa', bb' do D (§ 347), skierowane prostopadle do osi rzutów xy; wynika ztąd, że rzuty pionowe $s'a'$, $s'b'$ tworzących, wzdłuż których płaszczyzny styczne dotykają powierzchni, są właśnie linijami przedstawiającemi w rzucie pionowym obwód pozorny szukany. Przypuśćmy, że chcemy teraz przez punkt dany wzięty na powierzchni ostrokręgu, nakreślić do niego płaszczyznę styczną. W tym celu, ustawmy przedewszystkiem punkt dany na ostrokręgu w należytem położeniu, przyjmując za rzut jego pionowy punkt dowolny m', leżący wewnątrz pionowego obwodu pozornego, a następnie kreśląc rzut $s'm'$ na płaszczyznie obejmującej tworzące, przechodzące przez punkt dowolnie obrany; że zaś te mają za rzut na płaszczyznie poziomej dwie proste $s\theta$, $s\theta_1$, wyznaczymy więc na przecięciu się tych prostych z linią rzutów przechodzącą przez punkt m' rzuty poziome szukane m, m_1 punktu danego. Jeżeli, znalazłszy w ten sposób dwa punkta odpowiadające punktowi m', obierzemy jeden z nich np. m, m' i nakreślimy płaszczyznę styczną, to ślad poziomy tej ostatniej będzie prostą P styczną do podstawy D i przechodzącą przez punkt θ, która wraz z wierzchołkiem ostrokręgu s, s' posłuży nam do wyznaczenia płaszczyzny stycznej szukanej. Dla znalezienia śladu pionowego P$'$ moglibyśmy użyć śladu pionowego tworzącej $s\theta$, $s\theta'$, lecz wskutek jego wielkiego oddalenia na rysunku, woleliśmy zastąpić go przez ślad v' prostej poziomej płaszczyzny stycznej, przechodzącej przez wierzchołek ostrokręgu.

350. Zadanie VI. — *Znając rzuty d, d' kierownicy, jakoteż rzuty δ, δ' kierunku tworzących, nakreślić obwód pozorny walca na dwu płaszczyznach rzutów* (*fig.* 268, tab. XXIV). — Rozwiązanie tego zadania, w zupełności podobne do poprzedzającego, jest dostatecznie wytłomaczonem na rysunku.

W przypadku zazwyczaj używanym, t. j. kiedy walec jest danym przez swój ślad poziomy i przez kierunek rzutów jego tworzących, należy kreślić go jak powyżej, t. j. sposobem podanym w poprzedzającym paragrafie; figurę 269, tab. XXIV nakreślimy więc bardzo łatwo, postępując w sposób wskazany.

351. Zadanie VII. — *Przez punkt leżący zewnątrz ostrokręgu nakreślić do niego płaszczyznę styczną.*

Rozwiązanie ogólne. — Oznaczmy przez Σ ostrokrąg (fig. f_5), przez S jego wierzchołek i przez M

punkt leżący zewnątrz ostrokręgu. Wiedząc, że szukana płaszczyzna styczna winna przechodzić przez punkt M i przez wierzchołek ostrokręgu S, połączmy punkt M z S prostą MS, i przetnijmy ostrokrąg jakoteż i prostę SM płaszczyzną, a otrzymamy jako przecięcie ostrokręgu krzywę C, zaś na prostej SM punkt μ, przez który styczne do krzywej C poprowadzone należą do nieznanej jeszcze płaszczyzny stycznej ta bowiem jest wyznaczoną przez jednę z tych stycznych t_1 lub t_2 i przez prostę SM. Zadanie to przedstawia tyle rozwiązań ile stycznych poprowadzić można do krzywej C z punktu μ leżącego zewnątrz niej, przyczem uważać należy, żeby płaszczyznę sieczną tak prowadzić, aby następne wykreślenia były jak najłatwiejsze i jak najprostsze.

Jeżeli prosta SM jest równoległą do P, punkt μ znajduje się w nieskończoności, a w tym przypadku nakreślić należy poprostu styczne do podstawy, równolegle do SM, które wraz z nią wyznaczą płaszczyzny styczne szukane.

Wykonanie rysunku. — 1° *Ostrokrąg jest danym przez swój ślad poziomy* D *i przez rzuty* s, s' *swego wierzchołka* (*fig.* 270, tab. XXIV). — Niech m, m' będą rzutami punktu zewnętrznego. Stosownie do sposobu ogólnego wyznaczmy, najprzód rzuty $sm, s'm'$ prostej łączącej punkt M z wierzchołkiem ostrokręgu, następnie przyjmijmy za płaszczyznę sieczną pomocniczą płaszczyznę poziomą rzutów, której

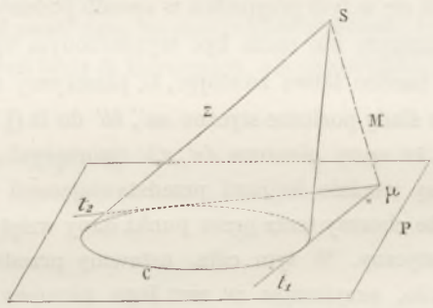

Fig. 270.

przecięcie z ostrokręgiem jest właśnie krzywą daną D, a z prostą $sm, s'm'$ ślad poziomy θ tej prostej. Ponieważ zaś przecięciem jej z płaszczyzną styczną jest jedna ze stycznych do D przechodzących przez punkt θ, przypuściwszy więc że taką styczną jest prosta $\theta\beta$, która jest zarazem śladem poziomym Q płaszczyzny szukanej, będzie płaszczyzna szukana obecnie wyznaczoną przez swój ślad Q i przez prostę $sm, s'm'$. Jeżeli wreszcie znajdziemy ślad pionowy t' prostej $sm, s'm'$, to ten punkt należeć będzie do śladu pionowego płaszczyzny szukanej, a łącząc punkt t' z β prostą $\beta t'$, znajdziemy ostatecznie drugi ślad Q′ płaszczyzny stycznej szukanej.

Drugie rozwiązanie tego zadania znajdziemy w sposób zupełnie podobny poprzedzającemu.

2° *Kiedy ostrokrąg jest danym przez rzuty* s, s' *swego wierzchołka, przez rzut poziomy* c *swej podstawy i przez ślad* $P\alpha P'$ *płaszczyzny podstawy* (*fig.* 271, tab. XXIV). — Nakreśliwszy jak poprzednio prostę $sm, s'm'$, przyjmijmy za płaszczyznę sieczną pomocniczą płaszczyznę $P\alpha P'$ i oznaczmy tylko rzut poziomy przecięcia się jej z prostą $sm, s'm'$ (§ 69); przez tak znaleziony punkt μ nakreślmy styczną do krzywej c, a ta będzie właśnie rzutem poziomym stycznej do podstawy, leżącej na płaszczyznie stycznej szukanej. Ponieważ ta styczna leży na płaszczyznie $P\alpha P'$ śladem, więc jej poziomym będzie punkt θ, że zaś śladem poziomym prostej $sm, s'm'$ jest punkt t, zatem śladem poziomym Q płaszczyzny stycznej będzie prosta θt, łącząca z sobą powyżej znalezione punkta θ i t.

Ślad pionowy płaszczyzny stycznej znajdziemy, kreśląc przez punkt m, m' prostę poziomą płaszczyzny stycznej; że zaś śladem jej jest punkt v', będący zarazem jednym punktem śladu pionowego płaszczyzny stycznej, łącząc zatem punkt β z v', prostą $\beta v'$, otrzymamy szukany ślad pionowy płaszczyzny stycznej $Q\beta Q'$.

352. Zadanie VIII. — *Przez punkt dany zewnątrz walca nakreślić do niego płaszczyznę styczną.*

Rozwiązanie ogólne. — Przypuszczając, że wierzchołek ostrokręgu leży w odległości nieskończenie wielkiej na kierunku tworzących walca, rozwiązanie podane dla ostrokręgu, może być tu w zupełności zastosowanem. W samej rzeczy, dosyć bowiem będzie połączyć punkt dany M z tym punktem w nieskończoności (fig. f_6), t. j. nakreślić przez punkt M prostę równoległą do tworzących walca i przeciąć tak prostę jako też i walec stosownie wybraną płaszczyzną sieczną pomocniczą P, która przetnie walec podług krzywej C, prostę w punkcie θ, zaś nieznaną płaszczyznę styczną podług prostej t, stycznej do krzywej C, a przechodzącej przez punkt θ. Proste $t\theta$ i Mθ wyznaczą płaszczyznę styczną szukaną, t. j. dadzą jedno rozwiązanie zadania, liczba zaś ich zależy od liczby stycznych przez punkt θ do krzywej C poprowadzić się dających.

Wykonanie rysunku. — 1° *Kiedy punkt m, m' leży gdziekolwiek, zaś walec jest dany przez swój ślad poziomy* C *i przez swe obwody pozorne* (*fig.* 272, tab. XXIV). — Przyjmując płaszczyznę poziomą za płaszczyznę sieczną pomocniczą, wyznaczmy sposobem podanym powyżej, ślad poziomy θ prostej

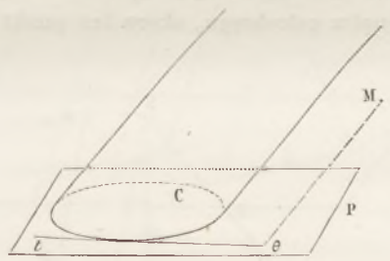

Fig. f_6.

równoległej do tworzących walca i nakreślmy przezeń styczne do jego podstawy. Jeżeli jedną z tych stycznych jest prosta Q to ona wraz z punktem m, m' wystarcza do wyznaczenia płaszczyzny stycznej, dla otrzymania bowiem śladu pionowego tej płaszczyzny dostatecznem będzie wyznaczyć ślad pionowy prostej $m\theta, m'\theta'$ i połączyć go z punktem β. Ponieważ ślad pionowy tej prostej na naszym rysunku leży zadaleko, zatem zastąpiliśmy go przez ślad v' prostej poziomej, przechodzącej przez punkt m, m' a równoległej do Q, i otrzymaliśmy płaszczyznę styczną $Q\beta Q'$, przedstawioną przez swe ślady $Q\beta$ i $Q'\beta'$. Drugie rozwiązanie tego zadania nie zostało podane na rysunku.

2° *Kiedy walec jest dany przez kierunek g, g' swych tworzących i przez swą podstawę na płaszczyźnie* $P\alpha P'$, *a punkt zewnętrzny m, m' leży gdziekolwiek* (*fig.* 273, tab. XXV). — Dla wyznaczenia jednocześnie i wielkości i położenia podstawy, przedstawiamy ją przez B_1 w kładzie wraz z płaszczyzną $P\alpha P'$ na płaszczyźnie poziomej rzutów a to obracając ją naokoło αP jako osi obrotu.

Przez punkt m, m' nakreśliwszy prostę $mk, m'k'$ równoległą do g, g', i przyjąwszy płaszczyznę podstawy $P\alpha P'$ za płaszczyznę sieczną pomocniczą, wyznaczmy przecięcia się jej n, n' z prostą $mk, m'k'$. Znalazłszy w ten sposób punkt n, n', należy nakreślić przezeń proste odpowiednio styczne do rzutów podstawy, lecz dla uniknienia tego wykreślenia wyznaczymy poprostu kład stycznej, który następnie podniesiemy. Otóż punkt n, n' ma za kład punkt N_1; jeżeli więc z tego ostatniego punktu

nakreślimy jednę ze stycznych do B_1, to ślad poziomy tej prostej znajdzie się w punkcie θ na osi obrotu, a więc podczas podniesienia z kładu pozostanie nieruchomym. Obecnie zatem już płaszczyzna styczna jest w zupełności wyznaczoną przez punkt θ i przez prostę mk, $m'k'$, której ślady znajdują się w punktach t i v', gdyż z nich znajdziemy ślady θt lub $\beta\theta$, i $\beta v'$ lub $\beta\theta'$ płaszczyzny stycznej szukanej.

Tworzącą, podług której płaszczyzna styczna dotyka walca, a której znajomość bywa często użyteczną, znajdzie się podnosząc z kładu styczną na $\theta n, \theta n'$ zaś punkt styczności do punktu c, c' i kreśląc przez te punkta proste g_1, g'_1 odpowiednio równoległe do g, g'.

353. Zadanie IX. — *Wyznaczyć obwód pozorny ostrokręgu lub walca dla jakiegokolwiek punktu widzenia.* — Zadanie niniejsze jest właśnie zadaniem prowadzenia płaszczyzny stycznej do walca lub ostrokręgu przez punkt nazewnątrz ich powierzchni leżący; jeżeli bowiem przeniesiemy punkt zewnętrzny do punktu widzenia, to tworzące styczności płaszczyzn stycznych przechodzących przez ten punkt wyznaczą linije obwodu pozornego powierzchni, a ślady tychże płaszczyzn stycznych wyznaczą w rzucie na obie płaszczyzny rzutów linije tego samego obwodu pozornego.

W sposób zupełnie podobny poprzedzającemu należy postąpić, gdy idzie o wyznaczenie cienia rzuconego pod wpływem punktu świecącego (§ 7) przez powierzchnie walca lub ostrokręgu, lub też cienia rzuconego przez jednę z tych powierzchni na jakąkolwiek płaszczyznę.

354. Zadanie X. — *Nakreślić płaszczyznę styczną do ostrokręgu, równolegle do prostej danej.*

Rozwiązanie ogólne. — Chociaż zadanie niniejsze sprowadza się zawsze do kreślenia płaszczyzny stycznej przez punkt dany nazewnątrz ostrokręgu, skoro ten punkt uważamy jako leżący w nieskoń-

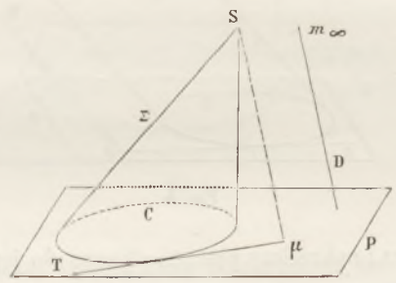

Fig. f_7.

czoności i na kierunku danym, jednakże ze względu na ważność niniejszego zadania podamy tu jego rozwiązanie ze wszystkiemi szczegółami.

Oznaczmy przez Σ ostrokrąg uważany (fig. f_7), przez S jego wierzchołek a przez D prostę daną, i szukajmy płaszczyzny stycznej do ostrokręgu przechodzącej przez punkt m_∞ prostej D, którato płaszczyzna obejmie koniecznie prostę łączącą punkt S z m_∞, to jest prostę równoległą do D a przechodzącą przez wierzchołek ostrokręgu S. Przecinając obecnie płaszczyzną pomocniczą P, znajdziemy na ostrokręgu krzywę C, na prostej równoległej punkt μ, zaś na płaszczyznie stycznej prostę styczną do C a przechodzącą przez punkt μ, t. j. styczną T, która razem z wierzchołkiem S wyznaczy szukaną płaszczyznę styczną.

Jeżeli płaszczyzna sieczna P jest równoległą do prostej D, należy wówczas nakreślić styczną do krzywej C przechodzącą przez punkt przecięcia się płaszczyzny P z prostą równoległą do D, a przechodzącą przez punkt S leżący w nieskończoności na prostej D, czyli wówczas prosta równoległa do D jest

zbyteczną na rysunku, gdyż możemy wprost nakreślić styczną do krzywej C równoległą do D, która wraz z wierzchołkiem S wyznacza szukaną płaszczyznę styczną.

Wykonanie rysunku. — Niech będą danemi : płaszczyzna podstawy $P\alpha P'$ (*fig.* 274, tab. XXV), rzut poziomy c podstawy, rzuty s, s' wierzchołka, i rzuty d, d' prostej równoległej do płaszczyzny stycznej.

Nakreślmy przez punkt s, s' prostę równoległą $sm, s'm'$ do prostej danej d, d', następnie przyjmując za płaszczyznę sieczną pomocniczą $P\alpha P'$, szukajmy rzutu poziomego μ punktu przecięcia się jej z prostą sm, $s'm'$, z którego nakreślmy styczną μt do krzywej c; punkt spotkania się θ tej prostej z płaszczyzną P jest śladem poziomym stycznej, której rzutem jest μt, a któryto ślad wraz ze śladami h, v' prostej sm, $s'm'$ wyznacza ślady $Q\beta Q'$ płaszczyzny stycznej szukanej.

355. Zadanie XI. — *Nakreślić płaszczyznę styczną do walca równolegle do prostej danej* (fig. f_3).

Rozwiązanie ogólne. — Oznaczmy przez Σ walec, przez G jego tworzącę, a przez D prostę daną. Na prostej D obierzmy jakikolwiek punkt M i przezeń nakreślmy prostę równoległą do tworzących walca G, to płaszczyzna wyznaczona przez te dwie proste, przecinające się w punkcie M, jest równoległą do płaszczyzny szukanej. Prowadząc teraz płaszczyznę sieczną pomocniczą P, wybraną tak,

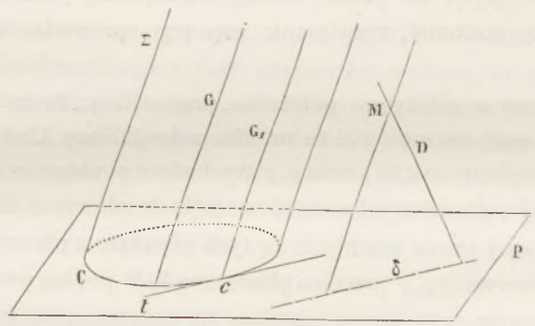

Fig. f_3.

żeby znalezienie krzywej C przecięcia się jej z walcem było jak najłatwiejsze, otrzymamy więc prostę δ na płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny stycznej, zaś na tej ostatniej prostę t styczną do C i równoległą do δ; a kreśląc wreszcie, przez punkt styczności c prostej t z krzywą C, tworzącę walca G_1, płaszczyzna styczna szukana będzie wyznaczoną przez tworzącę styczności G_1 i przez styczną t.

Wykonanie rysunku. — Niech będą dane dwa obwody pozorne walca i ślad poziomy tej powierzchni, należy nakreślić do walca płaszczyznę styczną równoległą do prostej d, d' (*fig.* 275, tab. XXV). — Obierzmy na prostej d, d' punkt dowolny m, m', i nakreślmy przez ten punkt prostę równoległą do tworzących walca, której śladami są punkta h i v'; nakreślmy następnie ślady h_1, v'_1 prostej d, d', jakoteż ślady płaszczyzny $R\gamma R'$, na której leżą proste przecinające się w punkcie m, m', to płaszczyzna ta wyznacza nam kierunek szukanej płaszczyzny stycznej.

Obierzmy teraz za płaszczyznę pomocniczą, płaszczyznę poziomą rzutów, a znajdziemy, na walcu jego podstawę, na płaszczyźnie $R'\gamma R$ prostę γR, zaś na płaszczyźnie stycznej szukanej, styczną βQ do podstawy, nakreśloną równolegle do prostej γR.

Znając więc ślad poziomy βQ płaszczyzny stycznej i kierunek $\gamma R'$ jej śladu pionowego, z łatwością nakreślimy $\beta R'$, którato prosta wyznaczy oba ślady $Q\beta Q'$ szukanej płaszczyzny stycznej.

Dotąd nakreśliliśmy tylko jednę płaszczyznę styczną, chociaż w przypadku, którym się zajmujemy jest ich dwie, a wogóle jest ich tyle, ile można nakreślić stycznych do podstawy równolegle do γR.

356. Zadanie XII. — *Znając płaszczyznę* P$_\alpha$P′ *podstawy ostrokręgu, jej rzut pionowy* c' *i dwa rzuty* s, s' *jego wierzchołka, nakreślić obwód pozorny powierzchni na płaszczyźnie poziomej rzutów* (*fig.* 276, tab. XXV). — Ponieważ należy tu rozwiązać zadanie prowadzenia płaszczyzny stycznej równolegle do prostej pionowej (§ 354), w tym więc celu zastosujmy metodę ogólną postępowania, t. j, przez wierzchołek s, s' nakreślmy prostę pionową i szukajmy, posługując się prostą obrazu f, f' płaszczyzny P$_\alpha$P′, punktu spotkania σ', s tej pionowej z płaszczyzną podstawy; z punktu σ' nakreślmy styczne do c', z których jedną będzie prosta $\sigma'0'$, a jej rzutem poziomym jest prosta $s0$; która będąc rzutem poziomym jednej z linij leżących na jednej z płaszczyzn stycznych pionowych, jest zarazem śladem poziomym tej płaszczyzny, t. j. jedną z linij szukanego obwodu poziomego. W przypadku którym się zajmujemy, obwód pozorny zawiera jeszcze trzy inne proste nie przedstawione na rysunku, które jednakże dadzą się otrzymać z łatwością.

357. Zadanie XIII. — *Znając płaszczyznę* P$_\alpha$P′ *podstawy walca, jej rzeczywistą wielkość i położenie, jakoteż rzuty* g, g' *kierunku tworzących, nakreślić obwód pozorny powierzchni na obu płaszczyznach rzutów* (*fig.* 277, tab. XXV). — Ponieważ zadanie to jest zadaniem odnoszącem się do znalezienia płaszczyzn stycznych równoległych do prostej danej, prostopadłej jużto do płaszczyzny pionowej rzutów, jużteż do płaszczyzny poziomej, rozwiązanie więc jego sprowadza się do podanego powyżej w paragrafie 355.

Celem ustawienia podstawy w należytem położeniu, przypuśćmy, że zrobionym został kład płaszczyzny P$_\alpha$P′ na płaszczyznę poziomą rzutów, i że na nim nakreśliliśmy kład C_1 podstawy danej. Dla ułatwienia wykreślenia przyjęliśmy zaś, że prosta g, g' wychodzi z punktu v, v' dowolnie obranego na P′. Należy więc obecnie wykreślić płaszczyzny styczne równoległe do płaszczyzn rzucających tworzącę g, g', a w tym znów celu, wyznaczmy proste przecięcia się tych płaszczyzn z płaszczyzną podstawy; otóż płaszczyzna rzucająca pionowa tworzącej g, g' przecina płaszczyznę P$_\alpha$P′ podług prostej, której ślady znajdują się w punktach θ i v', płaszczyzna zaś pozioma rzucająca tęż tworzącę przecina płaszczyznę P$_\alpha$P′ podług prostej mającej swe ślady w punktach θ_1, v'. Robiąc kład tych dwu prostych i płaszczyzny P$_\alpha$P′, po zrobieniu poprzednio kładu punktu v' do V_1, znajdziemy dwie proste $V_1\theta$ i $V_1\theta_1$. Nakreślmy obecnie styczne do krzywej C_1, równoległe do tych dwu prostych, to styczne te mają za ślady poziome punkta t, t_1, z których pierwszy po podniesieniu z kładu przypada w rzucie poziomym na równoległej g_1 do g, przechodzącej przez t, zaś drugi w rzucie pionowym na prostej równoległej g'_2 do g', przechodzącej przez rzut pionowy t'_1 punktu t_1. Tak więc znaleźliśmy jednę z linij każdego z szukanych obwodów pozornych, gdyż, prosta np. g'_2 będzie rzutem pionowym jednej ze stycznych, leżących na płaszczyznach stycznych wyznaczających pionowy obwód pozorny, wnosimy więc ztąd, że g'_2 jest rzeczywiście rzutem jednej z linij obwodu pozornego pionowego, tak samo jak g_1 należy do obwodu pozornego poziomego. Każda z płaszczyzn rzutów obejmuje jeszcze drugą prostę odpowiadającą warunkom zadania, którą wyznaczy się w taki sam sposób jak powyżej.

Uwaga. — Rozwiązanie dwu ostatnich zadań podaje sposób wyznaczenia cienia słonecznego (§ 10) rzuconego przez walec lub ostrokrąg.

358. Zadanie XIV. — *Mając daną powierzchnię walcową lub ostrokręgową i płaszczyznę jakąkolwiek, wyznaczyć punkta w których ta płaszczyzna spotyka normalnie powierzchnię daną.* — Ponieważ płaszczyznę nazywamy normalną w jakimkolwiek punkcie do powierzchni, jeżeli ona obejmuje prostę normalną do powierzchni, a przechodzącą przez tenże punkt, zatem nakreślmy do powierzchni płaszczyzny styczne równoległe do prostej prostopadłej do płaszczyzny danej i oznaczmy punkta spotkania się tej płaszczyzny z tworzącemi dotknięcia, a punkta tak znalezione, będą właśnie punktami szukanemi.

359. Zadanie XV. — *Przez punkt dany nakreślić prostę styczną jednocześnie do dwu powierzchni stożkowych lub walcowych.*—Przez punkt dany należy nakreślić płaszczyzny styczne do obu powierzchni, a oznaczając proste wspólnego przecięcia się płaszczyzn stycznych do jednej powierzchni z płaszczyznami stycznemi do drugiej, otrzymamy proste szukane.

360. Zadanie XVI. — *Oznaczyć warunek, na mocy którego można byłoby nakreślić płaszczyznę styczną do walca lub ostrokręgu równolegle do płaszczyzny danej, a przypuszczając, że ten warunek ma miejsce nakreślić płaszczyznę styczną.* — Wiemy że styczna do walca lub ostrokręgu wymaga dwu warunków, równoległość do płaszczyzny odpowiada także dwu, czyli razem mamy cztery warunki niezbędne, zatem zadanie jest niemożliwem do rozwiązania.

Żeby zadanie dało się rozwiązać, trzeba i wystarcza, żeby płaszczyzna dana podlegała jednemu warunkowi, a ponieważ każda płaszczyzna styczna zawiera jednę z tworzących, więc warunek ten jest następujący :

1° *Dla walca :* płaszczyzna dana winna być równoległą do tworzących powierzchni.

2° *Dla ostrokręgu :* płaszczyzna równoległa do płaszczyzny danej a przechodząca przez wierzchołek ostrokręgu, winna być właśnie styczną do powierzchni.

Dla wskazania wykreślenia, weźmy np. walec; niech (*fig.* 278, tab. XXV) D przedstawia podstawę walca na płaszczyźnie poziomej rzutów, zaś $P\alpha P'$ płaszczyznę uważaną za równoległą do tworzących walca. Śladem poziomym płaszczyzny stycznej jest styczna βQ do podstawy D a równoległa do αP, śladem zaś jej pionowym jest prosta $\beta Q'$ równoległa do $\alpha P'$, a przechodząca przez punkt β.

361. Zadanie XVII. — *Znaleźć warunki niezbędne do nakreślenia płaszczyzny stycznej wspólnej dwu powierzchniom walcowym lub stożkowym.* — Styczność z każdą z powierzchni daje dwa warunki, co czyni razem dla dwu powierzchni cztery warunki, więc zadanie jest niemożliwe do rozwiązania.

Żeby zadanie nasze uczynić rozwiązalnem, należy zamiast czterech warunków obowiązujących, które mamy, mieć tylko trzy, a w tym celu, należy związać z sobą elementa składowe jednym warunkiem, któreto ostatnie zadanie rozwiążemy rozbierając jeden po drugim trzy następujące przypadki :

1° *Kiedy obie powierzchnie są stożkowe.* — Płaszczyzna styczna w tym razie, t. j. wspólna obu ostrokręgom winna zawierać w sobie prostę łączącą ich wierzchołki, jeżeli więc podstawy obu powierzchni dadzą się z łatwością nakreślić na jednej płaszczyźnie, to styczne im wspólne muszą leżeć odpowiednio na wspólnych płaszczyznach stycznych, a zatem muszą one spotkać liniję przechodzącą przez wierzchołki i odwrotnie, wspólne styczne, które spotykają liniję przechodzącą przez wierzchołki, wyznaczą z ostatnią, płaszczyzny styczne wspólne obu powierzchniom. Jednem słowem, żeby zadanie było rozwiązalnem, potrzeba i wystarcza, żeby niektóre ze stycznych wspólnych do obu podstaw leżących na jednej płaszczyźnie, spotykały liniję przechodzącą przez wierzchołki.

W przypadku gdy obie podstawy nie leżą na jednej płaszczyźnie, warunek rozwiązalności jest nieco różny od poprzedzającego. I tak przypuśćmy, że wierzchołki S_1, S_2 i podstawy B_1, B_2 leżą odpowiednio na płaszczyznach P_1, P_2 (fig. f_9).

Ponieważ płaszczyzna styczna wspólna winna obejmować prostę przechodzącą przez wierzchołki S_1S_2, zatem oznaczając ślady tej ostatniej prostej w punktach θ_1, θ_2 na płaszczyznach P_1, P_2 i kreśląc z punktu θ_1 styczną Q_1 do B_1, a z punktu θ_2 styczną Q_2 do B_2, widzimy, że żeby zadanie mogło być rozwiązanem, potrzeba żeby płaszczyzny przechodzące przez liniję wierzchołków i przez każdę ze stycznych, schodziły się z sobą i odwrotnie, a następnie żeby proste Q_1 i Q_2 przecinały się z sobą,

wówczas bowiem, oznaczając przez α punkt ich spotkania się, proste Q_1, Q_2, S_1, S_2 leżeć będą na płaszczyznie $\theta_1\theta_2\alpha$ stycznej do obu powierzchni.

2° *Kiedy jedna z powierzchni jest stożkiem a druga walcem.* — Jeżeli przyjmiemy, że walec jestto ostrokrąg, którego wierzchołek leży na tworzących w odległości nieskończenie wielkiej, to warunek rozwiązalności zadania, znaleziony powyżej, będzie się stosował i tutaj. Będzie więc : *a*) w przypadku, kiedy dwie podstawy leżą na jednej płaszczyznie, pewne styczne wspólne podstawom winny spotykać równoległę do tworzących walca, a przechodzącą przez wierzchołek ostrokręgu; *b*) dla przypadku zaś, kiedy dwie podstawy leżą na dwu płaszczyznach różnych, muszą styczne do podstaw, przechodzące przez punkta spotkania się płaszczyzn tych podstaw z prostą równoległą do tworzących walca a przechodzącą przez wierzchołek ostrokręgu, leżeć na jednej płaszczyznie.

3° *Kiedy obie powierzchnie są walcowe.* — Rozwiązanie ogólne da się zawsze zastosować do tego przypadku, pamiętając jednakże, że prosta przechodząca przez wierzchołki ma jeden punkt w nieskończoności na tworzących każdego walca, lub mówiąc innemi słowy, że prosta wierzchołków jest tu prostą w nieskończoności płaszczyzny jakiejkolwiek, lecz równoległej do dwu kierunków tworzących.

Jeżeli podstawy obu walców leżą na jednej płaszczyznie, wówczas, prosta wierzchołków leżąca całkowicie w nieskończoności, przetnie płaszczyznę podstawy w punkcie leżącym w nieskończoności na

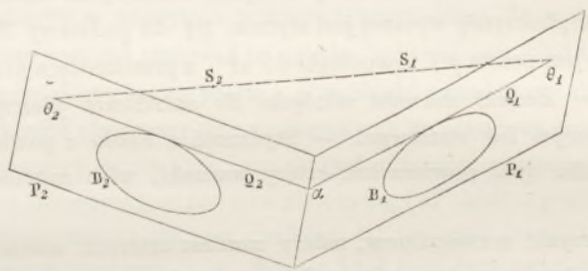

Fig. 9.

tejże płaszczyznie podstawy, i to na śladzie płaszczyzny równoległej do tworzących walca. Wypada ztąd, że pewne styczne wspólne do podstaw, winny przejść przez punkt w nieskończoności, już wyznaczony.

Jednem słowem, żeby zadanie było rozwiązalnem, potrzeba i wystarcza, żeby pewne styczne wspólne do obu podstaw, były równoległe na tejże płaszczyznie podstaw do śladu płaszczyzny pomocniczej nakreślonej przez jakikolwiek punkt, lecz równolegle do tworzących obu walców.

Jeżeli podstawy obu walców leżą na dwu płaszczyznach różnych, wówczas ślady, na płaszczyznach podstaw, płaszczyzny pomocniczej równoległej do tworzących obu walców, mają jeden punkt w nieskończoności prostej wierzchołków, a ztąd wypada, że ślady płaszczyzn stycznych na płaszczyznach podstaw muszą być odpowiednio równoległe do śladów płaszczyzny pomocniczej na tychże płaszczyznach.

Jednem słowem, żeby zadanie było rozwiązalnem, potrzebnem i dostatecznem jest, żeby istniały dwie proste leżące na jednej płaszczyznie, odpowiednio styczne do podstaw i równoległe na płaszczyznach tych podstaw, do śladów płaszczyzny pomocniczej nakreślonej równolegle do tworzących obu walców. Opierając się na podanych tu wiadomościach, wykreślenie płaszczyzny stycznej wspólnej, jeżeli zadanie jest rozwiązalnem, nie przedstawi dla czytelnika żadnych trudności.

362. Zadanie XVIII. — *Nakreślić płaszczyzny styczne wspólne do dwu powierzchni stożkowych lub walcowych, podległych jednemu warunkowi.* — Jeżeli warunek, któremu winny czynić zadość dwie

powierzchnie dane, niweczy jeden z warunków wspólnej styczności, wówczas wykreślenie płaszczyzny jest możliwe. Ma to miejsce w kilku przypadkach; tutaj więc rozbierzemy kilka ważnych zadań powstałych w ten sposób.

1° *Nakreślić wspólną płaszczyznę styczną do dwu ostrokręgów mających wierzchołek wspólny.* — W tym przypadku zadanie jest rozwiązalnem, gdyż styczność z jednym ostrokręgiem, odpowiada dwu warunkom, a płaszczyzna styczna do drugiej powierzchni przechodzi przez jej wierzchołek, więc styczność odpowiada tu tylko jednemu warunkowi, co czyni razem trzy warunki, czyli, że zadanie jest możebne i wyznaczone.

Dla przedstawienia rozwiązania weźmy (*fig.* 279, tab. XXV) dwie podstawy D_1 i D_2 na płaszczyznie poziomej rzutów i ustawmy wierzchołek s, s' jakkolwiek, a ten wierzchołek i jedna ze wspólnych stycznych αP do podstaw, wyznaczają szukaną wspólną płaszczyznę styczną. Zadanie to ma tyle rozwiązań ile można nakreślić wspólnych stycznych do dwu podstaw; na naszym rysunku przedstawiliśmy tylko jednę, wszystkie inne dadzą się otrzymać w sposób zupełnie podobny.

Jeżeli podstawy ostrokręgów nie leżą na jednej płaszczyznie, wówczas dla rozwiązania zadania, należy nakreślić dwie podstawy tak, żeby one leżały na jednej płaszczyznie, oprócz pewnych przypadków,

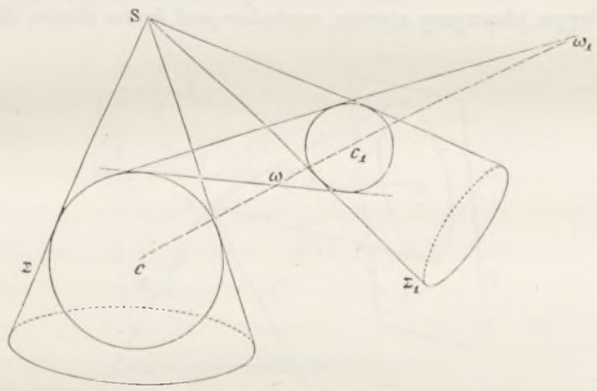

Fig. f_{10}.

dla których szczególne okoliczności pozwalają otrzymać rozwiązanie łatwiejsze. Jednym i najważniejszym z tych przypadków jest następujący :

Nakreślić wspólną płaszczyznę styczną do dwu ostrokręgów obrotowych, mających wierzchołek wspólny. — Oznaczmy przez Σ, Σ_1 dwa ostrokręgi (fig. f_{10}), mające wierzchołek wspólny S. Wiadomą jest rzeczą, że wspólne płaszczyzny styczne do nich istnieją, idzie więc tylko o ich wykreślenie.

W tym celu, wpiszmy odpowiednio w każdą powierzchnię stożkową jednę kulę, to wspólne płaszczyzny styczne do ostrokręgów będą także stycznemi do kul, a więc muszą one przejść przez jeden ze środków *podobieństwa* (homothétie) tych kul, które otrzymamy z przecięcia się ω, ω' linii środków cc_1 powierzchni kulistych, ze wspólnemi stycznemi nakreślonemi wewnętrznie i zewnętrznie do dwu kół wielkich leżących na jednej płaszczyznie.

Żeby ułatwić wyznaczenie środków podobieństwa, Hachette korzysta z nieznajomości promieni kul wpisanych i przypuszcza je równemi sobie, gdyż w tym przypadku środek podobieństwa wprost jest punktem w nieskończoności linii środków. Środek zaś podobieństwa odwrotnego, otrzymuje się, biorąc poprostu środek prostej łączącej środki kul równych. Obecnie więc, znając środki *podobieństwa*,

z łatwością wykreślimy płaszczyzny styczne, przesuwając przez każdy z tych punktów dwie płaszczyzny styczne do jednego z ostrokręgów Σ, Σ_1 (§ 351), a otrzymamy w ten sposób cztery rozwiązania. Wkrótce podamy sposób kreślenia przypadku szczególnego tego zajmującego zadania, stosując go do rozwiązania szóstego przypadku kąta trójściennego, wreszcie czytelnik znajdzie wykreślenie ogólne jak będzie mowa o powierzchniach obrotowych, gdyż wówczas będziemy mogli podać sposób niemniej zajmujący od podanego tutaj, a który ma tę zaletę, że jeszcze więcej ułatwia wyznaczenie szukanych płaszczyzn stycznych.

2° *Nakreślić wspólne płaszczyzny styczne do dwu walców, mających tworzące równoległe.* — Jeżeli w poprzedzającem zadaniu przypuścimy, że wierzchołek wspólny dwu ostrokręgów leży w nieskończoności na tworzących obu walców, to dojdziemy do niniejszego zadania.

3° *Nakreślić wspólne płaszczyzny styczne do dwu ostrokręgów w razie gdy mają podstawę wspólną.* — Należy nakreślić przez wierzchołek jednego ostrokręgu płaszczyzny styczne do drugiego.

4° *Nakreślić wspólne płaszczyzny styczne do ostrokręgu i do walca mających podstawę wspólną.* — Należy poprostu przez wierzchołek ostrokręgu nakreślić płaszczyznę styczną do walca.

5° *Nakreślić wspólną płaszczyznę styczną do dwu walców mających podstawę wspólną.* — Należy nakreślić płaszczyzny styczne do jednego walca równolegle do tworzących drugiego i odwrotnie.

6° *Nakreślić do ostrokręgu płaszczyzny styczne, nachylone pod kątem danym do poziomu lub do jakiejkolwiek płaszczyzny danej.* — Oznaczmy przez Σ ostrokrąg dany, przez S jego wierzchołek, przez P płaszczyznę daną, zaś przez α kąt, jaki ta płaszczyzna winna tworzyć z płaszczyzną styczną (fig. g_1).

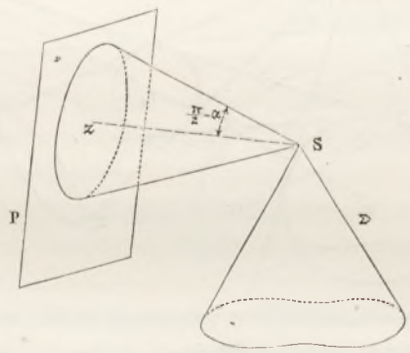

Fig. g_1.

Wszystkie płaszczyzny wychodzące z punktu S i tworzące kąt α z płaszczyzną P są styczne do ostrokręgu obrotowego, mającego za oś prostę SZ prostopadłą do płaszczyzny P a przechodzącą przez punkt S, za wierzchołek punkt S, a za połowę kąta w wierzchołku dopełnienie $\frac{\pi}{2} - \alpha$ kąta danego; nakreśliwszy więc taki ostrokrąg zadanie sprowadza się do nakreślenia wspólnej płaszczyzny stycznej do dwu ostrokręgów, mających wierzchołek wspólny, a któreto zadanie zostało rozwiązane powyżej.

Jeżeli podstawa ostrokręgu Σ nie przypada na płaszczyznie P, rysunek przedstawia trudności, o których mówiliśmy powyżej; jeżeli zaś przeciwnie płaszczyzna P zchodzi się z płaszczyzną podstawy, rysunki są bardzo łatwe do wykonania, jak to także już widzieliśmy powyżej. Okażmy to na przykładzie.

Jeżeli ostrokrąg ma za podstawę jakąkolwiek krzywę B *leżącą na płaszczyznie poziomej rzutów, a za wierzchołek* s, s', *nakreślić doń płaszczyznę styczną tworzącą z poziomem kąt dany* α (*fig.* 280, tab. XXV). — Dla znalezienia śladu poziomego ostrokręgu pomocniczego, nakreślmy rzuty jednej z tworzących

obrazu tej powierzchni; prosta sg, która przedstawia jej rzut poziomy, jest równoległą do osi rzutów, zaś prosta $s'g'$, która jest jej rzutem pionowym odpowiadającym, tworzy z pionową przechodzącą przez punkt s' dopełnienie kąta danego.

Jeżeli obecnie wyznaczymy punkt θ, t. j. ślad poziomy tworzącej sg, $s'g'$, i nakreślimy z punktu s jako środka promieniem $s\theta$ okrąg koła, to otrzymamy podstawę ostrokręgu pomocniczego na płaszczyźnie poziomej rzutów; a kreśląc teraz wspólną styczną P do obu podstaw i wyznaczając ślad pionowy P' płaszczyzny przechodzącej przez prostę P i przez punkt s, s', otrzymamy ślady P_2P' jednej z płaszczyzn szukanych. W przypadku przedstawionym na naszym rysunku napotykamy inne rozwiązania, które kreślą się w sposób zupełnie taki sam, jak rozwiązanie pierwsze.

7° *Nakreślić do walca płaszczyzny styczne, nachylone pod kątem danym do płaszczyzny poziomej rzutów lub do jakiejkolwiek innej płaszczyzny danej.* — Wykreślenie rysunku odnoszącego się do niniejszego zadania jest bardzo łatwem, jakimkolwiek byłby kierunek płaszczyzny danej. W tym celu, oznaczmy przez Σ walec dany (fig. g_2), przez P płaszczyznę daną, zaś przez α kąt nachylenia tej płaszczyzny z szukaną płaszczyzną styczną.

Obrawszy dowolnie punkt S, wystawmy jak poprzednio, ostrokrąg pomocniczy, nakreślmy doń równolegle do tworzących walca, płaszczyznę styczną $S\theta t$, to kreśląc obecnie, jak to jest zawsze

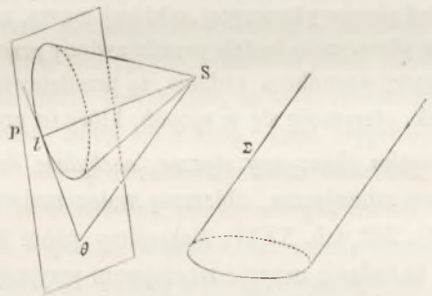

Fig. g_2.

możebnem (§ 360), płaszczyzny styczne do walca, ale równoległe do $S\theta t$, otrzymamy właśnie płaszczyzny odpowiadające warunkom zadania.

Widzimy ztąd, że niniejsze zadanie przedstawia dwa razy tyle rozwiązań jak zadanie odnoszące się do stycznych, kreślonych do podstawy walca równolegle do kierunku danego.

Wykonanie rysunku. — Przypuśćmy, że znamy (*fig.* 281, tab, XXVI) podstawę B i linije obwodu pozornego walca, płaszczyznę P, P', daną przez swe ślady, jakoteż kąt α, utworzony przez płaszczyznę styczną z płaszczyzną P, P'.

Przez jakikolwiek punkt s, s' nakreślmy prostopadłę sk, $s'k$ do płaszczyzny P, P', a za pomocą płaszczyzny pionowej rzucającej tę prostę, oznaczmy jej spodek p, p'; kreśląc następnie prostę sp, $s'p'$, znajdziemy oś ostrokręgu pomocniczego, a punkt p, p' będzie środkiem okręgu koła powstałego z przecięcia tego ostrokręgu płaszczyzną P, P'. Promień tego okręgu koła znajdziemy, odcinając na prostopadłej do sp, przechodzącej przez punkt s, długość sS_1 równą różnicy wzniesień punktów p' i s' i kreśląc S_1p, która to ostatnia prosta jest rzeczywistą odległością punktu S od płaszczyzny P, P'. Jeżeli teraz nakreślimy przez punkt S_1 prostę nachyloną do prostej pS_1 pod kątem α, i z punktu p wystawimy prostopadłę do pS_1, to znajdziemy punkt spotkania się q tych prostych, a odcinek pq, przedstawi nam właśnie promień szukany.

Znając obecnie w zupełności ostrokrąg szukany, należy nakreślić do niego płaszczyznę styczną równolegle do tworzących walca; w tym celu, nakreślmy przez punkt s, s' prostę $sa, s'a'$ równoległą do tworzących walca, i oznaczmy rzut poziomy f punktu spotkania się tej prostej z płaszczyzną P, P'.

Dla dokończenia wykreślenia płaszczyzny stycznej do ostrokręgu, należy nakreślić przez punkt f styczne do rzutu poziomego jego podstawy na płaszczyznie P, P'; jednakże dla uniknienia kreślenia elipsy, zróbmy kład płaszczyzny P, P' naokoło P na płaszczyznę poziomą rzutów, to podczas tego ruchu punkt, którego rzutem jest p, p', przypadnie w punkcie Ω_1, punkt zaś, którego rzutem jest f, przypada w punkcie F_1; kreśląc więc teraz z punktu Ω_1, promieniem równym pq okrąg koła, otrzymamy kład podstawy ostrokręgu.

Po zrobieniu tego kładu, nakreślmy z punktu F_1 styczną do okręgu koła; ta ostatnia przetnie oś obrotu w punkcie θ, który zostając nieruchomym podczas podnoszenia z kładu płaszczyzny, jest jednym z punktów śladu poziomego płaszczyzny stycznej do ostrokręgu, prosta zaś $sa, s'a'$, która winna leżeć na płaszczyznie stycznej, daje w punkcie θ_1, który jest jej śladem poziomym, drugi punkt śladu poziomego płaszczyzny stycznej, zkąd wypada, że prosta łącząca punkta θ, θ_1 jest śladem poziomym płaszczyzny stycznej do ostrokręgu.

Zadanie będzie w zupełności rozwiązanem, kreśląc do podstawy walca styczną βQ równoległą do $\theta\theta_1$, i szukając następnie śladu pionowego płaszczyzny, przechodzącej przez βQ i przez tworzącę dotknięcia $hg, h'g'$. Ponieważ ślad pionowy tworzącej, o której mowa, znajduje się w punkcie v', zatem ślad płaszczyzny stycznej, na tejże płaszczyznie będzie przedstawiony przez prostę $\beta v'$, czyli, że oba ślady płaszczyzny stycznej, odpowiadającej warunkom zadania, są przedstawione na $Q\beta Q'$. Trzy inne rozwiązania, które przedstawia rysunek, otrzymują się w sposób, który tu podaliśmy.

Ćwiczenie. — *Nakreślić do walca płaszczyzny styczne, nachylone do poziomu pod kątem danym.* — W celu uczynienia zadania więcej zajmującem, obierzmy walec mający za ślad poziomy okrąg koła; niech tym śladem będzie C (*fig.* 282, tab. XXVI). Nakreślmy prócz tego obwody pozorne walca, i przyjmijmy je za dane. Aby zaś to zadanie uczynić łatwiejszem przyjmijmy C za podstawę ostrokręgu pomocniczego, którego wierzchołek będzie więc miał za rzut poziomy punkt s, czyli środek podstawy, zaś rzut pionowy otrzymamy, kreśląc przez rzut pionowy θ' śladu poziomego jednej z tworzących obrazu, prostę czyniącą z xy kąt dany α, i oznaczając punkt s' przecięcia się tej prostej z pionową przechodzącą przez punkt s.

Ponieważ ostrokrąg pomocniczy i walec mają podstawę wspólną, będziemy więc mogli nakreślić płaszczyzny styczne wspólne obu powierzchniom, które odpowiadają warunkom zadania.

Dla wyznaczenia wspólnych płaszczyzn stycznych do ostrokręgu i do walca, znajdźmy ślady (v, v'), (h, h') prostej równoległej do tworzących walca, a przechodzącej przez wierzchołek ostrokręgu s, s', i nakreślmy przez ślad poziomy h styczne P_1, P_2 do podstawy wspólnej, a otrzymamy ślady poziome dwu płaszczyzn szukanych. Ślad pionowy P'_1 jednej z nich podaliśmy na rysunku, a takiż ślad drugiej da się znaleźć w sposób zupełnie podobny.

Z tego co się dotąd uczyniło, nie należy wcale sądzić, że zadanie ma tylko dwa rozwiązania, gdyż kreśląc dwie inne płaszczyzny styczne do walca lecz równoległe do powyżej znalezionych, te płaszczyzny będą miały za ślady poziome proste P_3, P_4 styczne do okręgu koła i odpowiednio równoległe do P_1, P_2, a ich ślady pionowe znajdziemy łatwo, przedstawiając dwa inne rozwiązania zadania.

8° *Nakreślić płaszczyzny styczne do dwu ostrokręgów podobnych* (homothétiques). — Ponieważ punkta w nieskończoności są swemi własnemi odpowiedniemi, wnosić możemy, że przecięcie jednej powierzchni płaszczyzną w nieskończoności, należy także i do drugiej, czyli mówiąc inaczej, że dwa

ostrokręgi mają podstawę płaską wspólną w nieskończoności; ten sposób zapatrywania się na rzecz, sprowadza nasze zadanie do trzeciego przypadku tego paragrafu, a stosując tu rozwiązanie tam podane znajdziemy, że przez wierzchołek jednego ostrokręgu należy nakreślić płaszczyznę styczną do drugiego.

363. Zadanie XIX. — *Nakreślić do dwu powierzchni walcowych lub stożkowych płaszczyzny styczne równoległe do siebie.* — Żeby wykreślić systemat dwu płaszczyzn, potrzeba sześciu warunków; otóż, równoległość płaszczyzn daje dwa warunki (§ **344**) i każda styczność daje także dwa warunki, więc mamy sześć warunków potrzebnych, na mocy czego zadanie jest możebnem i wyznaczonem. Rozbierzmy jedno po drugiem trzy zadania wynikające z tego, o którem mówimy.

1° *Nakreślić do dwu walców płaszczyzny styczne równoległe pomiędzy sobą.* — Nakreśliwszy płaszczyznę pomocniczą równoległą do tworzących obu walców, potrzeba nakreślić następnie do każdego walca płaszczyznę styczną równoległą do płaszczyzny pomocniczej.

2° *Nakreślić do walca i do ostrokręgu płaszczyzny styczne równoległe pomiędzy sobą.* — Nakreśliwszy do ostrokręgu płaszczyznę styczną równoległą do tworzących walca, należy następnie nakreślić płaszczyznę styczną do walca równoległą do pierwszej.

3° *Nakreślić do dwu ostrokręgów płaszczyzny styczne równoległe pomiędzy sobą.* — Jeżeli tworzące jednego ostrokręgu przeniesiemy, równolegle do ich pierwotnego położenia, do wierzchołka drugiego ostrokręgu, to i płaszczyzny styczne przesuną się równolegle do siebie samych; płaszczyzna styczna bowiem jest granicą płaszczyzny dwu tworzących, z których jedna zbliża się bezustannie do drugiej, a płaszczyzny utworzone przez dwie proste równoległe, są także równoległemi. To uskuteczniwszy płaszczyzny, które były równoległemi, zejdą się z sobą, zkąd wyprowadzamy sposób postępowania przy wykonaniu rysunku. I tak, należy przedewszystkiem nakreślić płaszczyzny styczne wspólne do ostrokręgu nieruchomego i do ostrokręgu pomocniczego, co się da zawsze wykonać, gdyż te dwa ostrokręgi mają wierzchołek wspólny, następnie zaś należy poprowadzić do ostrokręgu ruchomego w pierwotnem jego położeniu, płaszczyzny styczne równoległe do poprzedzających.

Wykreślenia powyżej wskazane są już znane, oprócz sposobu przenoszenia równolegle do niej samej jednej z powierzchni stożkowych; otóż dla ułatwienia jak największego tego rysunku, podamy tu sposób postępowania.

Oznaczmy przez B ślad poziomy powierzchni stożkowej (*fig.* 283, tab. XXVI), przez s, s' rzuty jej wierzchołka, zaś przez s_1, s'_1 rzuty wierzchołka nowego powierzchni stożkowej w nowem położeniu, t. j. po dokonaniu przeniesienia jej równolegle do pierwotnego położenia. Sposób naturalny wykonania tego przeniesienia jest następujący: należy wyznaczyć rzuty $s\theta$, $s'\theta'$ jednej z tworzących, nakreślić przez s_1, s'_1 równoległę do niej i wyznaczyć jej ślad θ_1. Jest jeszcze inny sposób postępowania dokładniejszy i łatwiejszy. I tak, ponieważ dwa uważane położenia tegoż samego ostrokręgu są bezwątpienia podobnemi (homothétiques), więc i ich przecięcia płaszczyzną poziomą muszą być także podobnemi, zkąd wypada że środek podobieństwa tych przecięć znajdzie się w punkcie ω, t. j. na przecięciu się prostej przechodzącej przez wierzchołki z płaszczyzną poziomą rzutów; ponieważ nadto s, s_1 są odpowiedniemi, otrzymujemy zatem z powyższych uwag następujące wykreślenie: przez punkt ω należy nakreślić jakąkolwiek prostę spotykającą B w punkcie θ, przesunąć prostę $s0$ i do niej równoległę przechodzącą przez punkt s_1, a punkt przecięcia się θ_1 tej ostatniej prostej z prostą rozbieżną (divergente) uważaną, będzie jednym z punktów krzywej szukanej. W takiż sam sposób można wyznaczyć tyle punktów, ile będzie potrzeba do wyznaczenia krzywej całkowitej.

W przypadku powierzchni stożkowej stopnia drugiego, wierzchołki krzywej można wyznaczyć

sposobem tutaj podanym i dopełnić jej wykreślenia jednym ze znanych sposobów. Jeżeli podstawa ostrokręgu jest kołem, znajomość środka i jednego z punktów krzywej jest dostateczną.

364. Zadanie XX. — *Niech będzie danym pierwszy ostrokrąg mający za wierzchołek* S_1 *a za podstawę krzywę* B_1 *leżącą na płaszczyznie* P_1; *przeciąwszy go płaszczyzną* P_2, *przyjmijmy krzywę* B_2 *powstałą z przecięcia, za podstawę drugiego ostrokręgu, mającego za wierzchołek punkt* S_2 *dany; przeciąwszy znówten drugi ostrokrąg płaszczyzną* P_3, *przyjmijmy krzywę* B_3, *powstałą z przecięcia, za podstawę trzeciego ostrokręgu, mającego za wierzchołek punkt* S_3 *dany i t. d. Mamy nakreślić do ostatniego, tak otrzymanego ostrokręgu, płaszczyznę styczną przez punkt* M, *leżący zewnątrz tej powierzchni* (fig. g_3).

Sposób rzutów zbieżnych. — Przypuśćmy np., że ostatnim ostrokręgiem jest ten, którego wierzchołek jest w punkcie S_3, i szukajmy płaszczyzny stycznej do tej powierzchni, przechodzącej przez punkt M.

W tym celu nakreślmy prostę S_3M, a znalazłszy punkt μ_3 przecięcia się tej prostej z płaszczyzną P_3, pozostanie tylko do nakreślenia przez punkt μ_3 styczna $\mu_3 c_3$ do krzywej B_3.

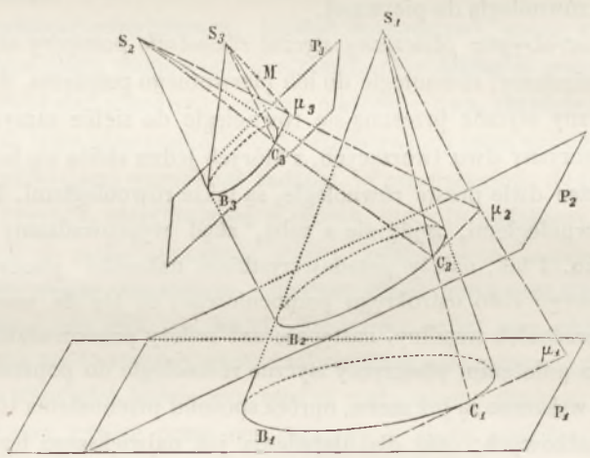

Fig. g_3.

Nie wykreślając tej ostatniej, natomiast przyjmując za środek rzutów punkt S_2, a za płaszczyznę rzutów płaszczyznę P_2, i robiąc rzut krzywej B_3, stycznej $\mu_3 c_3$, punktu μ_3 i punktu dotknięcia c_3, znajdziemy szukaną krzywę B_2, styczną $\mu_2 c_2$, punkt μ_2 i punkt dotknięcia c_2 nowej stycznej (§ **142**).

Rzucając w ten sposób różne styczne na płaszczyzny podstawy i zważając, że μ_3 jest rzutem zbieżnym punktu M na płaszczyznę P_3, kiedy środek rzutów znajduje się w punkcie S_3, przychodzimy do następującej metody w postępowaniu : należy rzucić punkt dany M do μ_3, μ_3 do μ_2, μ_2 do μ_1, biorąc za punkt zbiegu rzutów kolejno punkta S_3, S_2, S_1, a za płaszczyzny rzutów płaszczyzny P_3, P_2, P_1; następnie z punktu μ_1 należy nakreślić styczną do krzywej B_1, i podnieść punkt styczności c_1 do c_2, c_2 do c_3, poczem kreśląc proste $S_3 c_3$, $\mu_3 c_3$, znajdziemy tworzącę dotknięcia i styczną do podstawy, a tem samem wyznaczymy i szukaną płaszczyznę styczną w zupełności.

Rozwiązanie podane może być zastosowanem, kiedy niektóre z ostrokręgów uważanych zostaną zastąpione przez walce, i kiedy punkt M leży w odległości nieskończenie wielkiej na prostej danej.

ZASTOSOWANIE PŁASZCZYZN STYCZNYCH DO OSTROKRĘGÓW LUB WALCÓW, DO ROZWIĄZYWANIA ROZMAITYCH ZADAŃ

365. Zadanie I. — *Przez prostę daną nakreślić płaszczyznę nachyloną pod kątem danym do płaszczyzny jakiejkolwiek, lub do jednej z płaszczyzn rzutów.*

Rozwiązanie ogólne. — Oznaczmy przez D prostę daną, przez P płaszczyznę daną, zaś przez α kąt, jaki ta płaczyzna winna utworzyć z płaszczyzną szukaną.

Obierzmy na prostej, w położeniu dowolnem, punkt jakikolwiek S i wystawmy sobie ostrokrąg obrotowy, mający za oś prostę SZ, prostopadłą do płaszczyzny P i przechodzącą przez punkt S, a któregoby połowa kąta w wierzchołku była dopełnieniem kąta danego α, to kreśląc do tego ostrokręgu płaszczyzny styczne przechodzące przez prostę D, znajdziemy płaszczyzny szukane. Wypada ztąd, że płaszczyzny styczne będą wyznaczone przez prostę D i przez jednę ze stycznych do podstawy ostrokręgu na płaszczyznie P, przechodzących przez punkt θ, przecięcia się prostej D z tą płaszczyzną.

Jeżeli kąt dany α jest większy od kąta utworzonego przez prostę D z płaszczyzną P, t. j. gdy D leży zewnątrz ostrokręgu, zadanie przedstawia dwa rozwiązania; jeżeli kąt dany α jest równym kątowi

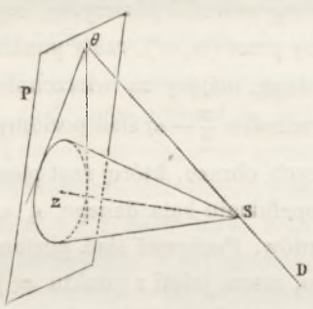

Fig. 91.

utworzonemu przez prostę D z płaszczyzną P, zadanie ma tylko jedno rozwiązanie, i w końcu, jeżeli kąt dany α jest mniejszym od kąta utworzonego przez prostę D z płaszczyzną P, zadanie jest niemożebnem do rozwiązania.

Wykonanie rysunku. — Niech $P\beta P'$ przedstawia płaszczyznę daną (*fig.* 284, tab. XXVI), d, d' rzuty prostej danej, zaś α kąt dany. Ustawmy wierzchołek ostrokręgu w położeniu dowolnem s, s' na prostej d, d', następnie dla skrócenia wykreślenia, przyjmijmy nową oś rzutów x_1y_1 prostopadłą do βP, i zmieńmy płaszczyznę pionową rzutów; nowy rzut pionowy P'_1 płaszczyzny danej, znajdziemy sposobem podanym w paragrafie **107**, zaś nowy rzut s'_1 wierzchołka s, s' znajdziemy, zachowując długość i kierunek wzniesienia $\sigma s'$ tego punktu. Postępując w sposób podobny dla śladu poziomego θ, θ' prostej d, d', znajdziemy punkt θ'_1, który połączony z punktem s'_1 linią prostą, wyznaczy rzut d'_1 prostej d, d' na nowej płaszczyznie pionowej rzutów.

Wyznaczmy obecnie, w nowym układzie płaszczyzn rzutów, oś ostrokręgu pomocniczego, która winna się znajdować na nowej płaszczyznie pionowej rzutów i na prostopadłej $s'_1z'_1$ do prostej P'_1.

Płaszczyzna pionowa nowego układu płaszczyzn rzutów, obejmuje nadto dwie tworzące ostrokręgu, czyniące z osią kąt $\frac{\pi}{2} - \alpha$, a z których jedna jest przedstawiona przez prostę $s'_1 b'_1$; ponieważ oś i tworząca wykreślona, leżą obie na płaszczyźnie pionowej rzutów, zatem znajdziemy natychmiast spodki z'_1, b'_1 tych prostych na płaszczyźnie danej, zkąd wypada, że z'_1 jest środkiem koła podstawy ostrokręgu pomocniczego, zaś b'_1 jest jednym z punktów, przez które ten okrąg koła przechodzi. Znając to, należy teraz nakreślić styczne do tego okręgu koła, wychodzące z punktu a, a', przecięcia się prostej d, d' z płaszczyzną $P\beta_1 P'_1$. W tym celu, zróbmy kład płaszczyzny $P\beta_1 P'_1$ wraz z okręgiem koła i punktem a, a', na płaszczyznę pionową rzutów; to otrzymamy najprzód koło w kładzie, kreśląc z punktu z'_1 jako środka, okrąg koła przechodzący przez punkt b'_1, punkt zaś a, a' będzie miał za kład punkt, leżący na prostopadłej do P'_1 przechodzącej przez punkt a'_1, a w odległości od tego ostatniego punktu równej $A_1 a'_1$, która jest równą oddaleniu $a_2 a$ tego punktu. Kreśląc więc obecnie z punktu A_1 jednę ze stycznych do okręgu koła w kładzie, znajdziemy np. punkt m'_1 spotkania się tej stycznej z osią obrotu, a jeżeli podniesiemy z kładu całą figurę, to punkt m'_1 pozostanie nieruchomym i będzie miał za rzut poziomy punkt m. Obecnie więc płaszczyzna styczna jest wyznaczoną przez prostę (d_1, d'_1) i przez punkt (m, m'_1), wracając zaś do pierwotnego układu płaszczyzn rzutów, będzie ona wyznaczoną przez prostę (d, d') i przez punkt (m, m'), poczem wyznaczymy jej ślady Q, Q', postępując jak wskazano na figurze.

Zadanie przedstawia jeszcze inne rozwiązanie, które znajdziemy w sposób podobny do powyżej podanego.

366. Zadanie II. — *Przez punkt dany nakreślić płaszczyznę, czyniącą kąty dane z płaszczyznami rzutów* (*fig.* 285, tab. XXVI). — Oznaczmy przez (m, m'), rzuty punktu danego zaś przez α i β i kąty dane. Wystawmy najprzód, pierwszy ostrokrąg, mający za wierzchołek punkt dany m, m', za oś prostopadłę Mm, a za połowę kąta w wierzchołku $\frac{\pi}{2} - \alpha$; ślad poziomy tego ostrokręgu znajdziemy, kreśląc z punktu m, m' jednę z jego tworzących obrazu, której rzut pionowy $m'h'$ czyni z pionową przechodzącą przez punkt m' kąt równy dopełnieniu kąta danego α, a rzut poziomy mh przechodzi przez punkt m i jest równoległy do osi rzutów. Ponieważ ślad poziomy h tej tworzącej wyznacza punkt przejścia śladu poziomego ostrokręgu, zatem jeżeli z punktu m jako środka, promieniem mh nakreślimy okrąg koła, otrzymamy ostatecznie szukany ślad poziomy ostrokręgu.

Wyznaczając teraz ostrokrąg o osi prostopadłej do płaszczyzny pionowej rzutów, dla uniknienia użycia płaszczyzny profilu przechodzącej przez tę oś, uczyńmy tę oś równoległą do płaszczyzny pionowej rzutów, to obracając ją naokoło osi poprzedzającego ostrokręgu, przypadnie ona na prostej $mh, m'z'$, równoległej do osi rzutów.

Uważmy obecnie drugą powierzchnię stożkową, mającą za oś, prostę teraz znalezioną, za wierzchołek punkt m, m', a za połowę kąta w wierzchołku $\frac{\pi}{2} - \beta$, i szukajmy płaszczyzn stycznych wspólnych tym dwu ostrokręgom.

Płaszczyzny te styczne będą, po obróceniu ich o kąt 90° naokoło pionowej osi obrotu przechodzącej przez punkt m, m', właśnie płaszczyznami szukanemi; żeby je wyznaczyć, użyjmy sposobu Hachette'a (§ **862**). W tym celu, ustawmy na osiach ostrokręgów środki dwu kul równych i wpisanych odpowiednio w ostrokręgi; oznaczmy przez γ promień wspólny, przez d i d' odległości środków kul od odpowiednich wierzchołków ostrokręgów, a znajdziemy :

$$\gamma = d \operatorname{wst}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = d' \operatorname{wst}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right),$$

lub

$$\frac{d}{d'} = \frac{\text{wst}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)}{\text{wst}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}.$$

Jeżeli chcemy znaleźć parę wartości na d i d' odpowiadających temu warunkowi, to obierzmy dowolnie na prostej $m'h'$ punkt n i nakreślmy przezeń prostę $c'n'$ czyniącą z prostą $m'h'$ kąt $\frac{\pi}{2} - \beta$; z trójkąta $c'nm'$ mamy

$$\frac{c'm'}{c'n} = \frac{\text{wst}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)}{\text{wst}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)},$$

a zatem, jeżeli założymy, że $d = c'm'$, znajdziemy że $d' = c'n$; odcinając więc $m'\omega' = c'n$, punkta c', ω' będą środkami dwu kul równych, czyli że środki podobieństwa kul pomocniczych leżą, jeden na $c'\omega'$, a drugi w nieskończoności na prostej $c'\omega'$. Wiedząc to, należy teraz nakreślić przez każdy z tych środków płaszczyzny styczne do ostrokręgu o osi pionowej, zkąd znajdziemy cztery płaszczyzny symetryczne brane po dwie, względem płaszczyzny obrazu punktu m, m' i względem płaszczyzny profilu tegoż punktu, a znając zaś jednę z tych czterech płaszczyzn, wyznaczymy trzy pozostałe.

Nie szukając środka prostej $c'\omega'$, nakreślmy płaszczyzny styczne równoległe do $(c'\omega', mh)$, a w tym celu, przez punkt m, m' nakreślmy prostę równoległą do prostej $(c'\omega', mh)$, i oznaczmy jej ślad poziomy h_1, przez który winny przejść po dokonaniu obrotu płaszczyzny styczne; jeżeli teraz wrócimy do pierwotnego położenia, to ślad znaleziony przypadnie bez różnicy, albo w punkcie θ albo też w punkcie t, który to fakt stwierdza nanowo istnienie tej symetryi, o której wspomnieliśmy powyżej.

Obecnie, celem znalezienia natychmiast czterech śladów poziomych płaszczyzn szukanych, możemy skorzystać z dwu położeń punktu h_1 w θ i h, gdyż dosyć będzie nakreślić przez punkta θ i t cztery styczne P_1, P_2, P_3, P_4 do podstawy ostrokręgu o osi pionowej. Ślady pionowe odpowiednie znajdziemy zważając, że cztery płaszczyzny przecinają się wzajemnie podług czterech prostych, z których dwie są prostemi obrazu; wyznaczywszy więc rzuty $m\theta_1$, $m'\theta'_1$ jednej z nich, znajdziemy kierunek dwu śladów pionowych szukanych P'_2, P'_4 które, natychmiast możemy wykreślić, dwa zaś pozostałe P'_1, P'_3 znajdziemy się zasadzając na symetryi.

Rozbiór. — Przyjmijmy za płaszczyznę figury, płaszczyznę pionową rzutów (fig. g_5), i przedstawmy przez $m'x'$, $m'z'$ rzuty pionowe osi ostrokręgów po dokonaniu obrotu o kąt 90°, o którym była mowa powyżej; nakreślmy prostę łączącą rzuty c', ω' środków kul równych, jakoteż rzuty pionowe $m'g'$, $m'g'_1$ tworzących każdego z ostrokręgów, które leżąc na płaszczyznie figury, są zawarte w kącie X'Y'Z'.

Trójkąt prostokątny $m'c'\omega'$ daje związek następujący:

$$\frac{m'c'}{m'\omega'} = \frac{\text{wst}\omega'}{\text{wst}c'};$$

lecz znaleźliśmy powyżej związek

$$\frac{m'c'}{m'\omega} = \frac{\text{wst}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)}{\text{wst}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)},$$

zakładając więc, że

$$\frac{\pi}{2}-\beta=\beta', \quad \frac{\pi}{2}-\alpha=\alpha',$$

otrzymamy

$$\frac{m'c'}{m'\omega'}=\frac{\text{wst}\beta'}{\text{wst}\alpha'},$$

lub porównywając pierwszą równość z ostatnią

$$\frac{\text{wst}\omega'}{\text{wst}c'}=\frac{\text{wst}\beta'}{\text{wst}\alpha'}.$$

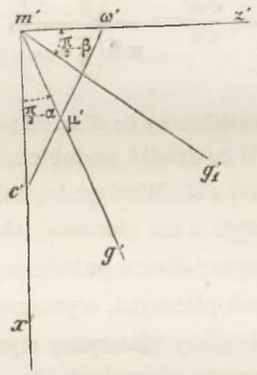

Fig. 92.

Jeżeli $\omega'=\beta'$, to $c'=\alpha'$, a ponieważ $\omega'+c'=\frac{\pi}{2}$, zatem dwa ostrokręgi dotkną się z sobą, i znajdziemy (fig. 96), oznaczając przez k punkt przecięcia się prostych $m'g', c'\omega'$, wskutek równości kątów ω' i β', że boki $\omega'k'$ i $m'k'$ są sobie równe i boki $m'k'$ i $c'k'$ także równe, a ztąd, że punkt k', jes

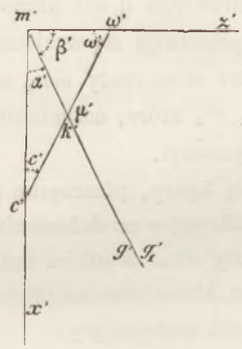

Fig. 96.

właśnie środkiem μ' prostej $c'\omega'$, czyli, że punkt w przestrzeni, mający za rzut punkt μ', leży jednocześnie na obu ostrokręgach, a więc, że one są styczne i że zadanie przedstawia tylko dwa rozwiązania.

W przypadku, którym się zajmujemy, jest $\alpha'+\beta'=\frac{\pi}{2}$, lub $\frac{\pi}{2}-\alpha'+\frac{\pi}{2}-\beta'=\frac{\pi}{2}$, lub jeszcze $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$; wynik ten jest właśnie taki sam, jak wynik podany w paragrafie 186, w którym rozbiór

tego zadania został już podany. Postępując tak dalej, znaleźlibyśmy dwa pozostałe wyniki podane we wskazanym paragrafie.

367. Zadanie III. — *Przez punkt dany nakreślić płaszczyznę, tworzącą kąty dane z dwiema płaszczyznami jakiemikolwiek.* — Jak dla rozwiązania zadania II (§ 366), tak i tutaj należy nakreślić płaszczyzny styczne do ostrokręgu pomocniczego, przez środki podobieństwa dwu kul równych; wykreślenie to zupełnie podobne do powyższego, nie przedstawia żadnych trudności.

368. Zadanie IV. — PIĄTY PRZYPADEK KĄTA TRÓJŚCIENNEGO. — *Znając dwa kąty dwuścienne i ścianę przeciwległą jednemu z nich, znaleźć trzy pozostałe części kąta trójściennego* (*fig.* 286, tab. XXVI). — Niech będą dane A i B dwa kąty dwuścienne i ściana b przeciwległa kątowi dwuściennemu B. Ustawmy na płaszczyźnie poziomej rzutów płaszczyznę ściany nieznanej a przyległej do dwu kątów dwuściennych danych, w ten sposób, żeby krawędź $S\alpha$ kąta dwuściennego A przyległa do ściany danej, była prostopadłą do osi rzutów xy, to płaszczyzna $P\alpha P'$ ściany b będzie miała swój ślad poziomy αP na $S\alpha$, zaś pionowy $\alpha P'$ będzie pochylony pod kątem danym A do osi rzutów.

Jeżeli nakreślimy prostę Sv'_1 nachyloną do αS pod kątem danym b, to otrzymamy kład, naokoło osi αS i na płaszczyznę poziomą rzutów, ściany danej; dla podniesienia jej z kładu, nakreślmy z punktu α, jako środka, łuk koła wychodzący z punktu v'_1, t. j. z punktu spotkania się krawędzi w kładzie z osią rzutów, a kończący się w punkcie σ' na $\alpha P'$; rzut poziomy punktu σ' przypadnie na osi rzutów w punkcie σ, i będzie należał do krawędzi kąta dwuściennego nieznanego.

W tej chwili zadanie sprowadzonem zostało do nakreślenia, płaszczyzny nachylonej do poziomu pod kątem B, przez prostę mającą za ślady S i σ', a to ostatnie zadanie zostało rozwiązanem powyżej (§ 365); więc stosując tutaj to rozwiązanie, nakreślmy z punktu σ' pionowę $\sigma\sigma'$, i prostę $\sigma'\theta'$, której kąt z osią rzutów będzie równy kątowi dwuściennemu B, wreszcie okrąg koła z punktu σ jako środka promieniem $\sigma\theta'$.

Mając to, zostaje tylko do nakreślenia przez prostę, której ślady S, σ' są znane, płaszczyzna styczna do ostrokręgu, mającego wierzchołek w punkcie σ, σ', a za podstawę obecnie wykreślony okrąg koła; że zaś śladem poziomym tej płaszczyzny stycznej będzie styczna ST, wyprowadzona z punktu S do podstawy ostrokręgu, więc teraz znamy, dla wyznaczenia kąta trójściennego, jednę ścianę αST, rzut σ punktu leżącego na krawędzi przeciwległej, i wzniesienie $\sigma\sigma'$ tego punktu, a tym sposobem dochodzimy do zadania zasadniczego.

Druga styczna do okręgu koła przedstawiającego podstawę, wyznaczy jako kąt dwuścienny przeciwległy ścianie znanej, kąt spełniający dwuściennego B, wskutek więc tego należy ją odrzucić.

Żeby kąt bryłowy mógł być rozwiązanym, trzeba i wystarcza, żeby jego spełniający mógł być rozwiązanym, t. j. żeby było (§ 231)

$$\text{wst}(180 - B) \geqq \text{wst}(180 - b)\,\text{wst}(180 - A),$$

lub, żeby

$$\text{wst}\,B \geqq \text{wst}\,b\,\text{wst}\,A;$$

i to jest właśnie warunkiem rozwiązalności kąta bryłowego wziętego pod uwagę.

369. Zadanie V. — SZÓSTY PRZYPADEK KĄTA TRÓJŚCIENNEGO. — *Znając kąty dwuścienne kąta bryłowego znaleźć jego ściany* (*fig.* 287, tab. XXVI). — Jeżeli nakreślimy ślady PAP' płaszczyzny prostopadłej do płaszczyzny pionowej rzutów, a nachylonej do poziomu pod kątem A, t. j. jednym z kątów danych, to obrawszy na płaszczyznie pionowej rzutów jakikolwiek punkt s, s', i umiejąc już przezeń przesunąć płaszczyznę (§367), nachyloną do płaszczyzny PAP' i do płaszczyzny poziomej rzutów pod kątami równemi

dwu pozostałym kątom danym, te trzy płasczyzny t. j. ta ostatnia płasczyzna, płasczyzna PAP′ i płasczyzna pozioma rzutów, wyznaczą kąt trójścienny odpowiadający warunkom zadania.

Idzie więc w tej chwili o wykreślenie płasczyzny przechodzącej przez punkt s, s', a nachylonej do poziomu pod kątem danym B, zaś do płasczyzny PAP′ pod kątem równym trzeciemu kątowi danemu C. Żeby rozwiązać to zadanie, nakreślmy ostrokrąg pomocniczy, mający wierzchołek w punkcie s, s', oś na prostej pionowej s, s', a któregoby jedna tworząca, leżąca na płasczyznie pionowej rzutów i przedstawiona przez prostę $s'\theta$, tworzyła z osią ostrokręgu kąt dopełniający kąta B.

Zajmijmy się teraz drugim ostrokręgiem pomocniczym, mającym za oś prostę $s'q'$ prostopadłą do płasczyzny PAP′, i nie kończąc jego zupełnego przedstawienia, wyznaczmy środki dwu kul równych wpisanych w te ostrokręgi; w tym celu, sposobem podanym w paragrafie **366**, nakreśliwszy przez jakikolwiek punkt a tworzącej $s'\theta$, prostę oo' czyniącą z tą tworzącą kąt dopełniający trzeciego kąta danego C, i przeniosłszy odcinek $o'a$ tej prostej do $s'\omega'$, punkta o, ω' będą właśnie rzutami pionowemi środków szukanych dwu kul.

W środku μ' prostej $\theta'\omega'$, łączącej powyżej znalezione środki dwu kul, przypada środek odwrotnego podobieństwa (homothétie inverse) kul, a jedna z płasczyzn stycznych szukanych ma za ślad pionowy prostę łączącą punkta μ', s'; punkt B śladu poziomego tej płasczyzny znajdziemy natychmiast a tem samem i sam ślad, który jest prostą styczną do okręgu koła przedstawionego na rysunku, a wychodzącą z punktu B.

Prosta wspólnego przecięcia się tej ostatniej płasczyzny z płasczyzną PAP′, ma swe ślady w punktach c', Σ; ten ostatni punkt jest wierzchołkiem kąta bryłowego, którego $A\Sigma B$ jest jedną ścianą, zaś punkt c', należący jednocześnie i do trzeciej krawędzi i do płasczyzny pionowej rzutów, jako właśnie należący do płasczyzny pionowej rzutów, ma swój rzut poziomy w punkcie c na płasczyznie ściany $A\Sigma B$, a wzniesienie liczone ponad tą ścianą równe długości cc'. Obecnie więc znając już ścianę $A\Sigma B$, rzut c jednego punktu krawędzi przeciwległej, leżący na płasczyznie tej ściany i wzniesienie cc' tego punktu, sprowadziliśmy zadanie do przypadku ogólnego (§ 228).

Przez punkt B możnaby nakreślić drugą styczną do okręgu koła przedstawionego na rysunku, lecz w ten sposób otrzymalibyśmy kąt bryłowy symetryczny, względem płasczyzny pionowej rzutów, do kąta bryłowego wyznaczonego, czyli mówiąc zrozumialej, ponieważ kątowi bryłowemu odpowiada tylko jeden symetryczny, więc otrzymalibyśmy symetryczny kąta bryłowego pierwotnie uważanego; ponieważ zaś nie idzie tu o wyznaczenie samego kąta bryłowego tylko o znalezienie jego części składowych, więc kąt bryłowy symetryczny jest nieużyteczny w naszem zadaniu.

Co się tyczy środka podobieństwa to zauważmy, że może on być użytym do zbudowania kąta bryłowego, o kątach dwuściennych A i C i o kącie ostrym B jako spełniającym, nie zmieniając nic w ostrokręgu służącym do wyznaczenia płasczyzny stycznej, czyli że ten środek może służyć zawsze, jeżeli kąt dwuścienny B jest rozwartym, i wyznaczy zawsze dwa kąty bryłowe symetryczne, z których jeden tylko będzie użytecznym.

Żeby kąt bryłowy był możliwym, trzeba i wystarcza, żeby jego spełniający był także możliwym; jeżeli więc oznaczymy przez A, B, C trzy kąty dwuścienne kąta bryłowego uważanego, to ściany kąta bryłowego spełniającego będą $180^\circ - A$, $180^\circ - B$, $180^\circ - C$; a jeżeli nadto najmniejszy z kątów dwuściennych oznaczymy przez A, to warunki szukane będą następujące:

$$180^\circ - A < 180^\circ - B + 180^\circ - C,$$

$$0 < 180 - A + 180 - B + 180 - C < 360;$$

czyli pisząc inaczej

$$180 + A > B + C,$$

$$3.180 > A + B + C > 180.$$

UWAGA. — Ponieważ rozbiór trzeciego i piątego przypadku nie został podany ze wszystkiemi szczegółami, dla dopełnienia więc takowego uważać należy, że przecięcie kąta bryłowego kulą, mającą środek w wierzchołku tego kąta, jest trójkątem kulistym, którego boki służą za miarę ścian kąta bryłowego, zaś kąty są właśnie kątami płaskiemi dwuściennych kąta bryłowego; zrobiwszy tę uwagę cały rozbiór sprowadza się do rozbioru trójkąta kulistego odpowiadającego, które to zadanie rozwiązuje się w geometryi.

ROZDZIAŁ III

WŁASNOŚCI KRZYWYCH PŁASKICH I SKOŚNYCH JAKOTEŻ ICH RZUTY

370. Jak to już powiedzieliśmy (§ 337), krzywą nazywamy miejsce geometryczne po sobie następujących położeń punktu poruszającego się w przestrzeni podług pewnego oznaczonego prawa. Zazwyczaj punkta poruszają się ruchem ciągłym, więc krzywe opisane w ten sposób muszą być

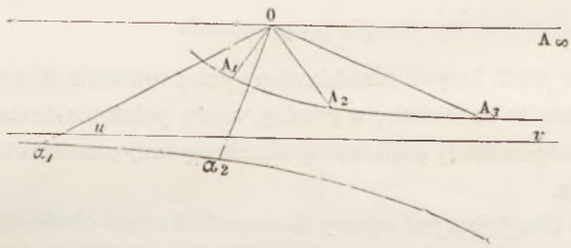

FIG. g_7.

także ciągłe; uwaga ta jest prawdziwą dla krzywych zamkniętych, postaramy się zaś dowieść, że jest ona także prawdziwą dla krzywych o odcinkach nieskończenie wielkich.

Uważmy proste rozbiegające się OA_1, OA_2, OA_3,. ... OA_∞ (fig. g_7), z których ostatnia jest równoległą do asymptoty *uv* krzywej; uważmy nadto inne proste rozbiegające się jak $O\alpha$, $O\alpha_2$... i t. d., a dostrzeżemy, że dla dwu sąsiednich położeń prostej rozbieżnej (divergente), znajdujących się z jednej i z drugiej strony tej, która jest równoległą do *uv*, istnieją dwa punkta bardzo oddalone od punktu O a należące do dwu ramion krzywej uważanej, które to ramiona winny się spotkać tam, gdzie się spotykają końce prostej OA_∞ (§ 2). Jednem słowem, ponieważ dwa punkta w nieskończoności krzywej zchodzą się z punktami w nieskończoności końców prostej OA_∞, możemy więc uważać krzywę o gałęziach nieskończonych, jako krzywę zamkniętą i ciągłą, a nadto, jako krzywę mającą tyle odnóg nieskończonych, ile jest punktów w nieskończoności przyczem gałęzie te składają się z dwu części połączonych z sobą w punktach odpowiednich w nieskończoności.

371. Obwijające i obwinięte. — Punkt ruchomy opisujący krzywę może być uważanym jako

granica po sobie następujących położeń krzywej, zmieniającej swe położenie podług pewnego wyznaczonego prawa, jużto zachowując swój kształt, jużteż odkształcając się także podług wyznaczonego prawa. Krzywa w ten sposób opisana przybiera nazwę *obwijającej*, a rozmaite położenia krzywej ruchomej noszą nazwę *obwiniętych* pierwszej.

Dla usprawiedliwienia tego określenia należy dowieść, że punkta spotkania mają granicę.

Jeżeli równanie krzywej jest funkcyą parametru zmiennego a, wówczas powiadamy, że ona zmienia swe położenie według wyznaczonego prawa, jużto zachowując swój kształt, jużteż odkształcając się podług innego lecz zawsze wyznaczonego prawa. Niech będzie równaniem krzywej zmiennej $f(x, y, a) = 0$; naznaczmy dla parametru wartość szczególną a_1, to równanie krzywej odpowiadającej będzie

$$f(x, y, a_1) = 0; \tag{1}$$

przyjmując tę ostatnią krzywę jako stałą, uważmy inną bardzo do niej zbliżoną, dla której parametr a_1 przybiera wartość $a_1 + \alpha$, przyczem α bardzo małe, to równanie tej ostatniej krzywej będzie następujące :

$$f(x, y, a_1 + \alpha) = 0. \tag{2}$$

Spółrzędne punktów przecięcia się tych krzywych winny zadość czynić równaniom (1) i (2), a zatem winny one także zadość czynić równaniu

$$\frac{f(x, y, a_1 + \alpha) - f(x, y, a_1)}{\alpha} = 0. \tag{3}$$

Jeżeli będziemy nadawali ilości α wartości coraz mniejsze dążące do zera, to zmieniając także krzywę przedstawioną przez równanie (2), zdążać ona będzie do swej granicy, a równanie (3) zamieni się wówczas na

$$f'_{a_1}(x, y, a_1) = 0. \tag{4}$$

Wnosimy więc ztąd, że jeżeli krzywa przedstawiona przez równanie (1) przecina zazwyczaj w kilku punktach krzywe sąsiednie, to te ostatnie, w granicy, zajmą położenia dostatecznie wyznaczone, a te położenia będą właśnie odpowiadały punktom spotkania się linij przedstawionych przez równania (1) i (4), co było do okazania.

372. Twierdzenie. — *Obwijająca jest styczną do wszystkich swych obwiniętych* (fig. g_8). — Oznaczmy przez c jednę z obwiniętych przyjętą za stałą, przez c_1 jedno z położeń obwiniętej ruchomej, które po-

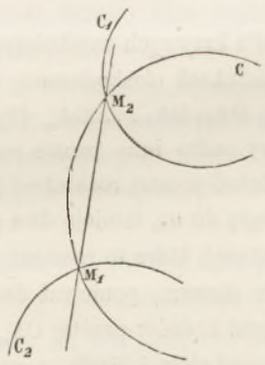

Fig. g_8.

przedza krzywę c, a przez c_2 jedno z tych, które po niej następują. Otóż, ponieważ c_1, c_2 przecinają c w punktach M_1, M_2, więc połączywszy te punkta cięciwą M_1M_2 i zostawiając c stałą, a następnie zbli-

żając c_1, c_2 do c, punkta M_1, M_2 zdążać będą do jednego punktu leżącego na c, dla którego granica cięciwy M_1M_2 będzie styczną: 1° do c, 2° do granicy krzywej przechodzącej przez punkta przecięcia M_1, M_2 i t. d. po sobie następujących i bardzo blizkich obwiniętych, a którato granica jest styczną do obwijającej. Widzimy ztąd, że obwijająca dotyka jednej z obwiniętych w punkcie, którego ona jest miejscem geometrycznem.

373. **Krzywe geometryczne. — Krzywa rysunkowa, krzywa błędna.** — Nazywamy *krzywą geometryczną*, krzywę mającą określenie geometryczne; jeżeli zaś krzywa nie ma określenia geometrycznego wówczas zwie się ona *krzywą rysunkową*.

Krzywemi błędnemi są te, które służą do rozwiązania przybliżonego pewnych zadań. Otrzymujemy je kreśląc rozwiązania przybliżone obejmujące pewne punkta, zmienne podług funkcyi prostej błędu, i łącząc je z sobą liniją krzywą; punkt takiej krzywej, dla którego błąd jest zero, odnosi się do rozwiązania odpowiadającego warunkom zadania.

Dla dokładniejszego określenia rzeczy podajmy tu kilka przykładów.

374. **Zadanie.** — *Przez punkt obrany na krzywej rysunkowej nakreślić do niej styczną* (fig. g_9). — Oznaczmy przez C krzywę daną, zaś przez M punkt dotknięcia stycznej szukanej.

Z punktu M jako środka, promieniem dowolnym zakreślmy okrąg koła C_1, i nakreślmy rozwiązania przybliżone czyli sieczne wychodzące z punktu M. Wykreślenie to winno być zrobionem w ten

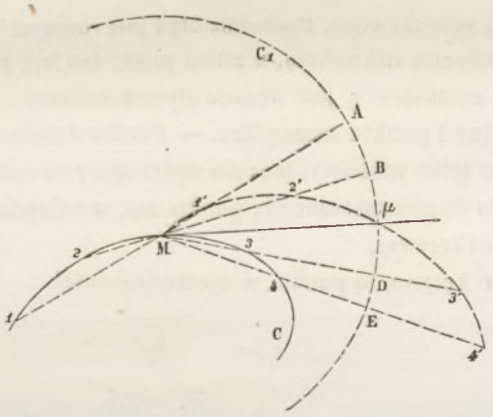

FIG. g_9.

sposób, żeby sieczna odpowiadająca błędowi zero, czyli styczna szukana, przypadała wewnątrz wiązki siecznych uważanych, co jest zawsze łatwem i możliwem. Tak nakreślone sieczne przecinają krzywę w punktach 1, 2, 3, 4, koło zaś w punktach A, B, D, E; przeniosłszy odcinki M1, M2, M3, M4 na odpowiadające sieczne licząc od okręgu koła, i zachowując ich kierunek, znajdziemy punkta 1′, 2′, 3′, 4′, których położenie względem okręgu koła pomocniczego, jest funkcyją popełnionego błędu. Im jest większem oddalenie punktu od okręgu koła, tem więcej drugi punkt siecznej oddala się od punktu M i tem jest większym błąd popełniony.

W miejscu, w którem punkt spotyka okrąg koła, błąd jest równym zeru, a sieczna odpowiadająca jest styczną do krzywej.

Widzimy ztąd, że krzywa łącząca punkta 1′, 2′, 3′, 4′ jest krzywą błędną, kreśląc więc ją i wyznaczając punkt μ spotkania się jej z krzywą C_1, a następnie łącząc punkt μ z punktem M, otrzymamy styczną szukaną.

375. Zadanie. — *Wyznaczyć punkt dotknięcia krzywej rysunkowej ze styczną przechodzącą przez punkt*

zewnątrz krzywej leżący (fig. g_{10}). — Oznaczmy przez C krzywę, zaś przez M punkt zewnątrz niej leżący. Nakreśliwszy przez punkt M sieczne przedstawiające rozwiązania przybliżone, a przez punkta spotkania się tych siecznych z krzywą C, proste równoległe do kierunku dowolnego i na tych równoległych odciąwszy po obu stronach siecznych odpowiednich długości równe błędom odpowiednim, w ten sposób znajdziemy dla pierwszej siecznej M1 długości 1A, 1'E, równe błędowi 11', dla drugiej siecznej, długości 2B, 2'F, równe błędowi 22' i t. d.; łącząc z sobą punkta D, B, A, E, F, G linią krzywą błędu, będzie ona mogła być uważaną, na mocy prawa ciągłości, jako wyznaczona z całą ścisłością

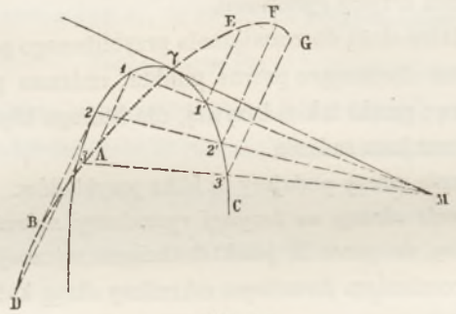

Fig. g_{10}.

możliwą za pomocą sposobu rysunkowego. Ponieważ błąd jest równym zeru w punkcie γ przecięcia się krzywej danej z krzywą obecnie nakreśloną, a zatem punkt ten jest punktem dotknięcia stycznej, zaś prosta łącząca punkt M z punktem γ, jest właśnie styczną szukaną.

376. Punkta nadzwyczajne i punkta szczególne. — *Punktami nadzwyczajnemi* nazywamy punkta mające pewien charakter im tylko właściwy, lecz nie wpływający na ogólne określenie stycznej w ten sposób, żeby ono prowadziło do nieoznaczoności; punkta zaś, w których ma miejsce nieoznaczoność, zwą się *punktami szczególnemi* krzywej.

Punktami nadzwyczajnemi krzywej są punkta w nieskończoności.

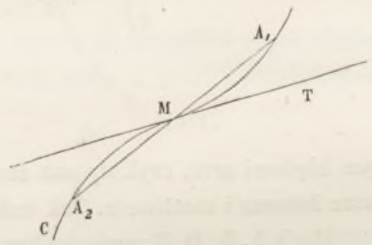

Fig. h_1.

Punkt *najwyższy* i *najniższy* są punktami nadzwyczajnemi, t. j. punkta w których styczna jest poziomą.

Punkta przegięcia. — Jeżeli krzywa leżąca z jednej strony stycznej, przechodzi na jej stronę drugą, to punkt, w którym to przejście ma miejsce, nazywa się *punktem przegięcia* (fig. h_1). Oznaczmy przez C krzywę mającą punkt przegięcia w punkcie M; nakreślmy przezeń sieczną A_1M bardzo zbliżoną do stycznej A_1, A_2, to ta ostatnia przetnie krzywę w dwu punktach, które zejdą się z sobą w punkcie dotknięcia M, skoro tylko sieczna zejdzie się ze styczną. W punkcie przegięcia dotknięcie się stycznej z krzywą jest daleko ściślejsze, aniżeli we wszelkim innym punkcie krzywej, albowiem ta linija przedstawia w punkcie M trzy punkta wspólne z krzywą a zchodzące się z sobą. Przejdźmy teraz do punktów szczególnych.

377. *Punkta zwrotu.* — Punktem zwrotu nazywamy punkt, w którym dwie gałęzie krzywej zatrzymują się, mając zawsze styczną wspólną, zmieniającą się w sposób ciągły.

Dwa są rodzaje punktów zwrotu (fig. h_2, h_3). Pierwszym jest ten, dla którego dwie gałęzie krzywej leżą jedna po jednej, a druga po drugiej stronie stycznej. Jeżeli obie gałęzie krzywej leżą z jednej strony stycznej, to punkt zwrotu jest drugiego rodzaju (fig. h_3).

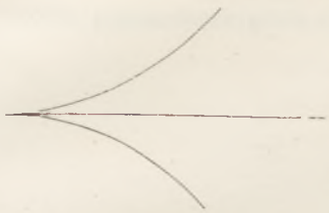

Fig. h_2.

Fig. h_3.

378. *Punkt wielokrotny.* — *Punkt podwójny.* — Zdarzyć się może (fig. h_4), że punkt ruchomy opisujący krzywę, przechodzi kilka razy przez ten sam punkt; w takim razie ten ostatni zwie się *punktem wielokrotnym krzywej*.

Ponieważ zwykle określenie stycznej prowadzi do niewyznaczoności jeżeli stosujemy je do punktów wielokrotnych, zatem punkta te są punktami szczególnemi.

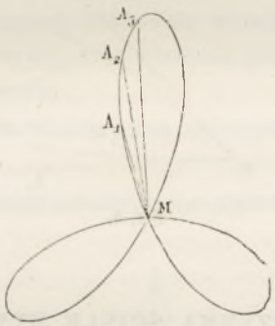

Fig. h_4.

Żeby usunąć niewyznaczoność, należy uważać punkt ruchomy opisujący krzywę, w położeniach A_1, A_2, A_3 i t. d., bardzo blizkich punktu wielokrotnego, i szukać granicy prostych, łączących rozmaite punkta A_1, A_2, A_3 i t. d., z punktem wielokrotnym M. Widzimy więc ztąd, że w punkcie wielokrotnym jest tyle stycznych, ile razy punkt ruchomy przezeń przechodzi (fig. h_5).

Fig. h_5.

Jeżeli punkt ruchomy przechodzi tylko dwa razy przez punkt krzywej, to powiadamy, że ten punkt jest punktem *podwójnym krzywej*.

Zauważyć tu należy jako rzecz bardzo ważną, że jeżeli taż sama rzucająca spotyka krzywę znaną w przestrzeni, w dwu punktach, rzut tej krzywej będzie zawsze miał *punkt podwójny*, jak to przedstawia figura h_6.

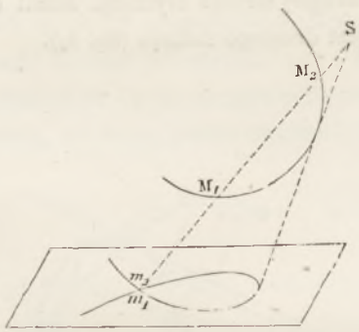

Fig. h_6.

379. *Punkta kątowe.* — Jeżeli punkt ruchomy opisujący krzywę, nagle zmienia swój kierunek (fig. h_7), to krzywa ma wówczas dwie styczne różne w jednym punkcie szczególnym, a ten punkt zwie się *punktem kątowym*.

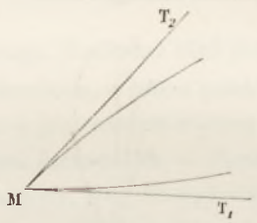

Fig. h_7.

PŁASZCZYZNA ŚCIŚLE STYCZNA

380. **Określenie.** — Uważmy krzywę C (fig. h_8), jeden z jej punktów np. M, i styczną odpowiadającą T, a następnie przedstawmy sobie płaszczyznę przechodzącą przez MT i przecinającą krzywę

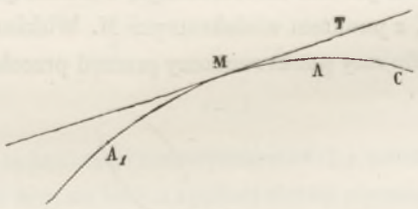

Fig. h_8.

w punkcie A bardzo blizkim punktu M; obracając płaszczyznę i punkt A w ten sposób, żeby ten ostatni ciągle się zbliżał do punktu M, otrzymamy w granicy płaszczyznę dokładnie wyznaczoną, zwaną *płaszczyzną ściśle styczną* do krzywej w punkcie M.

381. **Płaszczyzna ściśle styczna przecina krzywę.** — Ponieważ, na zasadzie praw ciągłości, skoro punkt A przejdzie przez punkt M i przyjmie położenie A_1, płaszczyzna sieczna przechodząca

przez styczną MT i przez punkt ruchomy A przeniesie się na drugą stronę płaszczyzny ściśle stycznej, więc i części krzywej leżące bardzo blizko z jednej i z drugiej strony punktu M, będą leżały z jednej i z drugiej strony płaszczyzny ściśle stycznej, czyli, mówiąc inaczej, *płaszczyzna ściśle styczna przecina krzywę*.

Są jednakże wyjątki, dla których ta ważna własność nie ma miejsca. I tak, jeżeli płaszczyzna sieczna przechodząca przez styczną MT (fig. h_9), przecina krzywę w dwu punktach A, B blizkich

FIG. h_9.

punktu M, a leżących po obu jego stronach, i jeżeli ten wypadek powtarza się dla wszystkich położeń A, A' i t. d. punktu A zdążającego do M, wówczas dwa punkta wspólne płaszczyznie i krzywej, zchodzą się jednocześnie z dwoma punktami, które się już zeszły na stycznej T.

Płaszczyzna ściśle styczna dotyka dokładniej krzywej, gdyż rzeczywiście, jest ona granicą płaszczyzny przechodzącej przez cztery punkta krzywej, które dążą do zejścia się w jeden. Jest rzeczą jasną, że skoro taka płaszczyzna nie przecina krzywej, więc własność podana powyżej może być fałszywą, lecz tylko dla pewnych punktów wyjątkowych.

Twierdzenie następujące przedstawia właśnie jeden z przypadków wyjątkowych, powyżej wzmiankowanych.

382. Twierdzenie I. — *Jeżeli tworząca ostrokręgu jest styczną do jednej z krzywych jego powierzchni*

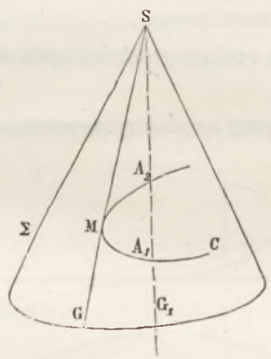

FIG. h_{10}.

to płaszczyzna ściśle styczna tej krzywej w punkcie dotknięcia, dotyka powierzchni w tymże punkcie (fig. h_{10}). — Oznaczywszy przez Σ powierzchnię stożkową, przez S wierzchołek ostrokręgu, przez G jednę z jego tworzących, a przez C krzywę styczną do G w punkcie M, to kreśląc tworzące G i G_1, znajdziemy płaszczyznę, na której bezwarunkowo muszą leżeć punkta spotkania A_1, A_2 prostych G i G_1. Jeżeli G_1 zbliża się do G, to płaszczyzna G_1SG dąży jednocześnie do płaszczyzny stycznej do ostrokręgu w punkcie M, jakoteż do płaszczyzny ściśle stycznej do krzywej w tymże samym punkcie. Twierdzenie to est więc dowiedzionem, i zostaje tylko do zauważenia, że punkt M jest *punktem wyjątkowym* krzywej,

gdyż w nim płaszczyzna ściśle styczna ma cztery punkta wspólne z krzywą, które się zchodzą z sobą, a jednak nie przecina jej.

383. Twierdzenie II. — *Jeżeli rzucająca w jednym z punktów krzywej, leży na płaszczyznie ściśle stycznej, to rzut tej krzywej jest stycznym, na płaszczyznie rzutów uważanej, do śladu płaszczyzny ściśle stycznej, i przedstawia punkt przegięcia w punkcie styczności* (fig. i_1). — Oznaczmy, przez S środek

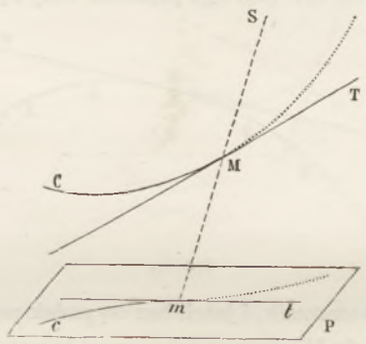

Fig. i_1.

rzutów, przez P płaszczyznę rzutów, przez C i c krzywę i jej rzut, przez M jeden z punktów krzywej C, w którym rzucająca SM leży na płaszczyznie ściśle stycznej, przez m rzut tego punktu, wreszcie przez T i t styczne do C i do jej rzutu w punkcie M.

Ponieważ z określenia płaszczyzna ściśle styczna, obejmuje styczną T, a z założenia rzucająca SM leży także na niej, więc wnieść ztąd należy, że ta płaszczyzna jest płaszczyzną rzucającą styczną T na płaszczyznę rzutów P, a zatem, że śladem jej na płaszczyznie P jest rzut t stycznej, czyli styczna do rzutu w punkcie m. Nadto, ponieważ wogóle płaszczyzna ściśle styczna przecina krzywę, więc rzut c musi leżeć po obu stronach śladu t płaszczyzny ściśle stycznej, który to ślad jest właśnie styczną do krzywej c w punkcie m; zadanie jest więc rozwiązane.

Powyższe twierdzenie, w systemacie rzutów prostokątnych zazwyczaj używanych, da się wysłowić jak następuje :

384. Twierdzenie IIbis. — *Rzut krzywej na płaszczyznę prostopadłą do jednej z jej płaszczyn ściśle styczn-*

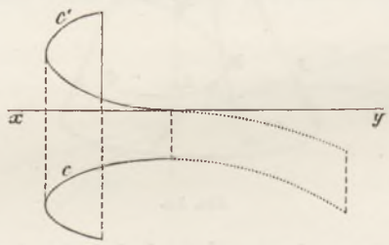

Fig. i_2.

nych, dotyka śladu płaszczyzny ściśle stycznej w punkcie przegięcia. — Jeżeli położymy płaszczyznę ściśle styczną na płaszczyznie poziomej rzutów, to wykreślenie przyjmie kształt przedstawiony na figurze i_2.

385. Twierdzenie III. — *Jeżeli rzucająca jednego punktu krzywej dotyka jej, to rzut jej jest stycznym do śladu odpowiadającej płaszczyzny ściśle stycznej, i przedstawia w punkcie dotknięcia punkt zwrotu pierwszego rodzaju* (fig. i_3). — Oznaczmy przez S środek rzutów, przez P płaszczyznę rzutów

przez C i c krzywę i jej rzut, przez SM rzucającą, która dotyka krzywej a wreszcie przez M, m punkt dotknięcia tej rzucającej i jego rzut.

Ponieważ rzut stycznej SM będąc tylko punktem m, nie daje stycznej do rzutu, więc dowiedziemy, że ta styczna jest śladem t płaszczyzny ściśle stycznej w punkcie M. W tym celu, uważmy rzucającę $S\mu$ bardzo blizką prostej Sm, i płaszczyznę $mS\mu$, której granicą jest płaszczyzna ściśle styczna do krzywej C w punkcie M; ponieważ sieczna $m\mu$ będzie miała za granicę ślad mt płaszczyzny ściśle stycznej, a zatem

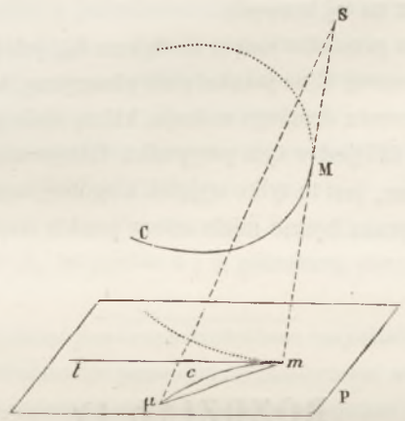

Fig. i_3.

ten ślad wyznacza styczną do części krzywej c, leżącej przed płaszczyzną ściśle styczną. W taki sam sposób okazalibyśmy, że i druga część krzywej jest także styczną do mt.

Ponieważ płaszczyzna ściśle styczna przecina krzywę, więc mt musi ją także przecinać, a ponieważ krzywa C leży cała po jednej stronie swej stycznej SM, więc znajdzie się ona także po jednej stronie płaszczyzny prostopadłej do płaszczyzny ściśle stycznej, przechodzącej przez Sm, zkąd wypada, że rzut jej c znajdzie się z jednej strony śladu płaszczyzny prostopadłej, t. j. na P; a więc przedstawi on rzeczywiście w punkcie m punkt zwrotu pierwszego rodzaju.

Powyższe twierdzenie, w układzie prostokątnym płaszczyzn rzutów zazwyczaj używanym, da się wysłowić jak następuje :

386. **Twierdzenie IIIbis.** — *Rzut krzywej skośnej na płaszczyznę prostopadłą do jednej ze swych stycznych, dotyka śladu płaszczyzny ściśle stycznej przechodzącej przez tę styczną, i przedstawia u spodka tej stycznej punkt zwrotu pierwszego rodzaju* (fig. i_4). — Jeżeli położymy płaszczyznę ściśle styczną na płaszczyznie poziomej rzutów, a styczną na prostopadłej do osi rzutów, to znajdziemy figurę i_4.

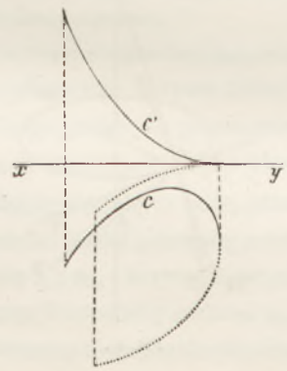

Fig. i_4.

Dwa ostatnie twierdzenia prowadzą do własności następujących : 1° wszelki ostrokrąg, mający jednę tworzącą w płasczyznie ściśle stycznej w jednym z punktów jego kierownicy, przedstawia na tej tworzącej punkt przegięcia, lub inaczej, wszelkie przecięcia płaskie ostrokręgu mają na tej tworzącej punkta przegięcia.

2° Jeżeli jedna z tworzących ostrokręgu jest styczną do kierownicy, to ten ostrokrąg przedstawia na całej długości tworzącej punkta zwrotu pierwszego rodzaju, co znaczy, że wszystkie jego przecięcia płaskie mają jeden punkt zwrotu na tej krawędzi.

387. Uwaga. — W przypadku przedstawionym na figurze h_{10}, jeżeli przyjmiemy punkt S za punkt zbiegu rzutów i zrobimy rzut krzywej C na jakąkolwiek płasczyznę, to znajdziemy, bardzo naturalnie, krzywę przedstawiającą punkt zwrotu drugiego rodzaju, której dwie gałęzie zchodzą się z sobą; wnosimy ztąd, że twierdzenie III (§ 385)jest w tym przypadku fałszywem, jednakże nie trzeba sądzić, że to jest jakaś sprzeczność, owszem, jest to tylko wyjątek z ogólnej reguły, który powtórzy się zawsze, skoro tylko płasczyzna ściśle styczna będzie miała cztery punkta wspólne z krzywą.

ROZDZIAŁ IV

PŁASCZYZNY STYCZNE DO POWIERZCHNI OBROTOWYCH. — OBWÓD POZORNY

388. Twierdzenie. — *Płasczyzna styczna do każdej powierzchni obrotowej jest prostopadłą do płasczyzny południka, przechodzącego przez punkt dotknięcia* (fig. i_5). — Oznaczmy przez Z oś powierzchn przez C punkt dotknięcia płasczyzny stycznej, przez M południk tego punktu, przez ω równoleżnik tegoż punktu i przez *o* środek równoleżnika.

Ponieważ styczna CT do równoleżnika, leżąca na płasczyznie stycznej przechodzącej przez punkt C, jest zarazem prostopadłą do promienia CO i co do kierunku do osi Z, zatem musi być ona także pro-

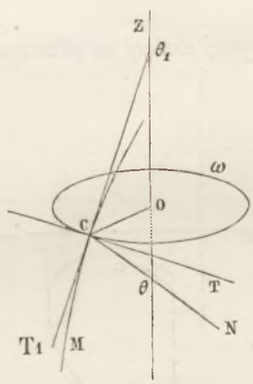

Fig. i_5.

stopadłą do płasczyzny COZ, zkąd wypada, że toż samo więc musi mieć miejsce dla każdej płasczyzny przechodzącej przez tę prostę, a w szczególności dla płaszczyzny stycznej uważanej.

389. Wniosek I. — *Normalna w jakimkolwiek punkcie powierzchni obrotowej, jest normalną południka przechodzącego przez tenże punkt* (fig. i_5). — Jeżeli zachowamy figurę poprzedzającą i nakreślimy

na niej styczną CT_1 do południka M i normalnę CN do powierzchni, to ta ostatnia musi leżeć na płaszczyźnie południka uważanego. I tak, ponieważ południk jest prostopadły do płaszczyzny stycznej, a normalna jest także do niej prostopadłą i wychodzi z punktu C leżącego na płaszczyźnie południka, więc leży ona na jego płaszczyźnie; nadto, ponieważ normalna CN jest prostopadłą do wszystkich prostych leżących na płaszczyźnie stycznej, a w szczególności do stycznej CT do południka w punkcie C, więc prosta CN_1 jest zarazem normalną do powierzchni i do południka, co było do okazania.

W ogóle, żeby nakreślić normalnę w jakimkolwiek punkcie powierzchni, należy wyznaczyć płaszczyznę styczną i przez punkt dotknięcia poprowadzić do niej prostopadłę. — Powierzchnie obrotowe mają tę szczególną własność bardzo ważną, że normalnę do nich wyznaczyć można wprost t. j. bez pomocy płaszczyzny stycznej, a nawet może ona służyć do wyznaczenia tej ostatniej, jak to zobaczymy później.

Uwaga. — *Na całej długości równoleżnika, normalne do powierzchni lub styczne do różnych południków tej powierzchni, tworzą wiązkę, której wierzchołek leży na osi.* — Zachowując figurę i oznaczając przez θ, θ_1 punkta przecięcia się normalnej CN i stycznej CT_1 z osią Z, znajdziemy, nadając prostym CN i CT ruch obrotowy naokoło osi Z, że punkta θ i θ_1 pozostaną nieruchome, co stwierdza prawdziwość powyższej uwagi.

390. Wniosek II. — *Jeżeli jakakolwiek powierzchnia obrotowa ma południk główny prostopadły względem jednej z płaszczyzn rzutów, to jest on obwodem pozornym tej powierzchni względem tejże płaszczyzny rzutów.* — Wniosek ten jest widocznym, lecz stanie się jeszcze widoczniejszym jeżeli zauważymy, że płaszczyzny styczne na całej długości południka uważanego są prostopadłe do jego płaszczyzny (§ 388), a więc także prostopadłe do odpowiedniej płaszczyzny rzutów. — Na zasadzie tego powiemy także, że jeżeli powierzchnia obrotowa, której oś jest pionową, ma *naszyjnik* lub *równik*, to te ostatnie będą jej obwodem pozornym na płaszczyźnie poziomej rzutów.

POWIERZCHNIE OBWIJAJĄCE

391. Określenia. — Krzywa ruchoma tworząca jakąkolwiek powierzchnię, może być wyznaczoną, biorąc granicę po sobie następujących położeń, przecięć się pierwszej z inną powierzchnią, zmieniającą swe położenie według pewnego wyznaczonego prawa, i jużto zachowującą swój kształt, jużteż zmieniającą go podług innego także wyznaczonego prawa.

Powierzchnia w ten sposób utworzona, zwie się *powierzchnią obwijającą* zaś powierzchnię służącą do jej utworzenia nazywamy *powierzchnią obwiniętą*; krzywa, która ją tworzy, nosi nazwę *cechy* (caractéristique). — Istnienia krzywej wspólnego przecięcia powierzchni dowodzimy jak w paragrafie 371.

392. Twierdzenie I. — *Powierzchnia obwijająca dotyka obwiniętej odpowiadającej wzdłuż całej cechy* (fig. i_6). — Oznaczmy przez Σ obwiniętę przyjętą za stałą, przez Σ_1 obwijającę poprzedzającą obwiniętę Σ, a przez Σ_2 drugą obwijającę bardzo blizko pierwszej a następującą po obwiniętej Σ; uważmy nadto krzywę C_1 wspólnego przecięcia się Σ z Σ_1, i krzywę C_2 wspólną powierzchniom Σ i Σ_2. — Przetnijmy powierzchnie Σ, Σ_1, Σ_2 płaszczyzną, i oznaczmy przez σ, σ_1, σ_2 linije powstałe z tego przecięcia. Ponieważ dwie ostatnie z nich mają z pierwszą dwa punkta wspólne M_1, M_2 leżące na C_1, C_2, nakreślmy więc przez punkt M_1 styczną M_1T_1 do C_1, jakoteż cięciwę M_1M_2, i uważmy płaszczyznę $T_1M_1M_2$. Jeżeli teraz przyjmiemy, że powierzchnie Σ_1, Σ_2 są ruchome i zbliżają się do Σ, to M_1M_2, jak to już widzieliśmy, dąży do stycznej wspólnej do obwiniętej σ i do obwijającej krzywych σ, σ_1, σ_2 i t. d., zkąd wynika, że prosta ta będzie i styczną wspólną do powierzchni obwijającej i do jej obwiniętej Σ. Po-

nieważ zaś granica stycznej M_1T_1 ma tęż samą własność, więc dwie powierzchnie mające dwie styczne wspólne, a przechodzące przez jeden i ten sam punkt granicy krzywej C_1, t. j., przez jeden punkt jednej z cech, muszą być styczne pomiędzy sobą w tymże punkcie.

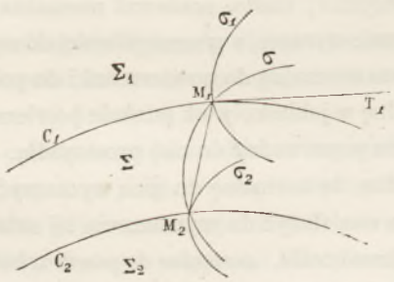

Fig. i_6.

393. Twierdzenie II. — *Powierzchnia obrotowa może być uważaną za obwijającę kuli, ostrokręgu, lub walca* (fig. i_7). — Oznaczmy przez Z oś powierzchni, przez M jeden z jej południków, a przez c_1, c_2, c_3, i t. d. różne jej równoleżniki.

Przez punkta a_1, a_2, a_3, spotkania się równoleżników z południkiem M, nakreślmy normalne $a_1\omega_1$, $a_2\omega_2$, $a_3\omega_3$, do tego ostatniego, i przedstawmy sobie kule mające za środki punkta ω_1, ω_2, ω_3, i t. d., to takowe przedstawią nam powierzchnie zmieniające i miejsce i kształt podług pewnego wyznaczonego prawa. Rzeczywiście, określenie podane w paragrafie **371**, dające się tu w zupełności zastosować wskazuje, że którakolwiek z kul jest wyznaczoną, znając np. odległość płaszczyzny równoleżnika na niej leżą-

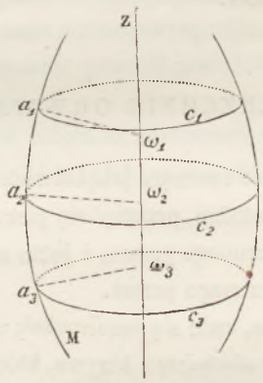

Fig. i_7.

cego od punktu stałego dowolnie obranego na osi Z, którato odległość jest właśnie parametrem zmiennym, wyznaczającym wielkość i położenie kuli ruchomej. — Znając to, widzimy, że kształt i położenie obwiniętej ruchomej zależy tylko od jednego parametru zmiennego, zkąd wniesiemy, że kule mają jednę obwijającą, a że nadto spotykają się one z sobą, przechodząc przez równoleżniki blizko siebie leżące, podług kół zchodzących się w granicy z temi równoleżnikami, więc wnosimy znów ztąd, że powierzchnia obrotowa, o której mowa, jest obwijającą kuli ruchomej.

W sposób zupełnie podobny do poprzedzającego dowiedlibyśmy, że wiązki stycznych do południków, nakreślonych podług rozmaitych równoleżników, tworzą ostrokręgi, których obwijająca jest właśnie powierzchnią obrotową.

W tych dwu sposobach tworzenia powierzchni obrotowych cechy są równoleżnikami; zajmijmy się więc trzecim sposobem, w którym cechy te są południkami. — W tym celu, uważmy jakikolwiek południk i przez punkta spotkania się jego z równoleżnikami, nakreślmy do tych ostatnich styczne, to w ten sposób utworzymy walec prosty, którego kierownicą będzie obrany południk, a zmieniając go, otrzymamy wskutek analogii z tem, cośmy powiedzieli powyżej dla kuli, powierzchnię obrotową, która będzie obwijającą rozmaitych walców prostych, mających za podstawę różne południki powierzchni.

394. Twierdzenie III. — *Obwodem pozornym powierzchni obwijającej, jest miejsce geometryczne punktów spotkania się obwodów pozornych jej obwiniętych z odpowiedniemi cechami* (fig. i_8). — Oznaczmy, przez S oko patrzącego, przez Σ i C powierzchnię obwijającą i jej obwód pozorny, przez Σ_1, C_1 i γ jednę z obwiniętych, jej obwód pozorny i cechę odpowiadającą. — Należy dowieść, że trzy krzywe C, C_1 i γ mają jeden punkt wspólny. W tym celu oznaczmy przez M punkt wspólny krzywych C i γ, i zauważmy, że płaszczyzna styczna do Σ, dla rozmaitych punktów krzywej C, przechodzi przez punkt S,

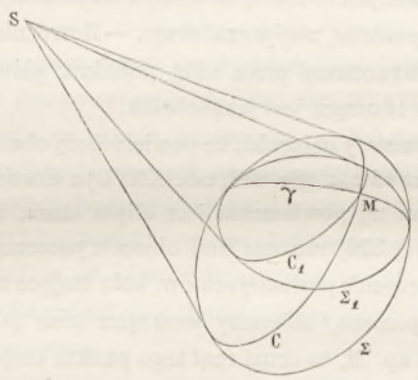

Fig. i_8.

tak znów płaszczyzna styczna do Σ_1, dla punktów krzywej γ, czyli płaszczyzna styczna do Σ w punkcie M jest także styczną do Σ_1 i przechodzi przez punkt S, zkąd wypływa, że punkt M należy także do obwodu pozornego powierzchni Σ_1, a więc i do krzywej C_1, co było do okazania.

395. Wniosek I. — *Jeżeli punkt zbiegu rzutów przypada w punkcie widzenia, to rzut obwodu pozornego powierzchni obwijającej, samże obwód pozorny tej powierzchni, dalej obwód pozorny jej obwiniętej i rzut cechy odpowiadającej, spotykają się w jednym punkcie.* — Zachowując figurę i pamiętając o dowodzie podanym w poprzedzającym paragrafie, znajdziemy, że dwie powierzchnie Σ, i Σ_1 mają płaszczyznę styczną przechodzącą przez punkt M wspólną, która przechodząc także przez punkt S i obejmując styczne do krzywych C, C_1, γ, nakreślone przez punkt M, jest tem samem płaszczyzną rzucającą wspólną stycznych do krzywych przecinających się w punkcie M, zkąd wypada, że rzuty tych trzech krzywych spotykają się także w jednym punkcie, który jest rzutem punktu M.

Z tego wniosku wypływają dwie następujące własności:

395bis. *Rzut obwodu pozornego powierzchni obwijającej, jest obwijającym rzutu obwodów pozornych jej obwiniętych. — Rzut obwodu pozornego powierzchni obwijającej jest obwijającym rzutów rozmaitych cech.* — Dodać tu winniśmy, że ta ostatnia własność da się jeszcze uogólnić, albowiem dowiedliśmy powyżej, że rzut wszelkiej krzywej powierzchni jakiejkolwiek jest stycznym do rzutu obwodu pozornego tejże powierzchni, — czyli, że:

395ter. *Rzut obwodu pozornego jakiejkolwiek powierzchni, jest obwijającym rzutów tworzących tejże*

powierzchni. — Twierdzenia, tu dowiedzione stosują się nietylko do obwodów pozornych przedstawiających powierzchnie w warunkach zwyczajnych, t. j., gdy patrzący znajduje się w odległości nieskończenie wielkiej na prostopadłej do jednej z płaszczyzn rzutów, lecz nadto i wtenczas, kiedy oko patrzącego znajduje się w jakimkolwiek punkcie, a zatem mogą one służyć do wyznaczenia krzywej dotknięcia się ostrokręgu lub walca opisanego na powierzchni, dalej do wyznaczenia śladu poziomego tego ostrokręgu lub walca, do znalezienia cienia rzuconego przez powierzchnię oświeconą przez punkt świecący lub przez słońce, i nareszcie do wyznaczenia cienia rzuconego przez tęż powierzchnię na jednę z płaszczyzn rzutów.

KREŚLENIE PŁASZCZYZN STYCZNYCH I OBWODÓW POZORNYCH POWIERZCHNI OBROTOWYCH

396. Zadanie I. — *Przedstawić powierzchnię obrotową o osi pionowej przez jej obwody pozorne, i znaleźć jeden z rzutów jednego z jej punktów, znając rzut drugi.* — Rozróżnimy tutaj dwa przypadki: pierwszy, kiedy powierzchnia jest utworzoną przez swój południk główny odpowiadający płaszczyźnie pionowej rzutów, a drugi, kiedy tworząca jest jakąkolwiek.

Przypadek pierwszy. — Przypuśćmy najprzód, że powierzchnią obrotową, którą mamy przedstawić, jest elipsoida obrotowa mająca za oś z, z' (*fig.* 288, tab. XXVII) a utworzona ruchem elipsy $a'b'c'd'$, ac. Ponieważ południkiem głównym tej powierzchni jest elipsa dana, a jej równikiem koło zakreślone na małej osi tej elipsy, zatem (§ 390) rzutami linij obwodu pozornego są, na płaszczyźnie pionowej rzutów, elipsa $a'b'c'd'$, zaś na płaszczyźnie poziomej rzutów, koło mające za promień ac, a środek w punkcie z. Wyznaczywszy obwody pozorne, obierzmy wewnątrz nich jakikolwiek punkt m', t. j. rzut jednego z punktów powierzchni np. M, to drugi rzut tego punktu znajdziemy, kreśląc przez punkt m' równoleżnik, mający za rzut pionowy prostę równoległą $e'f'$ do osi rzutów, za drugi zaś rzut okrąg koła, którego środkiem jest punkt z u spodka osi, a przechodzący przez rzut poziomy e punktu $e_1'e$ przecięcia się równoleżnika z południkiem. — Nakreśliwszy więc ten okrąg koła, linija rzutów przechodząca przez punkt m', spotka go w dwu punktach m_1, m_2, i wyznaczy dwa punkta, (m_1, m'), (m_2, m') czyniące zadość zadaniu.

Jako drugi przykład pierwszego przypadku rozwiążemy toż samo zadanie dla powierzchni pierścieniowej.

Oznaczmy w tym celu przez z_1, z' rzuty osi pionowej (*fig.* 289, tab. XXVII), zaś przez ac, $a'b'c'd'$ rzuty koła tworzącego, leżącego na płaszczyźnie obrazu przechodzącej przez oś. Obwody pozorne znajdziemy, kreśląc: 1° okrąg koła $a_1'b_1'c_1'd_1'$ symetryczny do $a'b'c'd'$ względem osi z', i 2° rzuty poziome równika i naszyjnika (koła szyjnego), które są okręgami kół współśrodkowych, mających za środek punkt z, a z których pierwszy przechodzi przez punkt c, drugi zaś przez punkt a; te dwa ostatnie okręgi kół tworzą obwód pozorny powierzchni pierścieniowej na płaszczyźnie poziomej rzutów (§ 390). Na zasadzie tegoż paragrafu, dwa inne okręgi kół będą obwodem pozornym pionowym, albo przynajmniej jego częścią, a tej dopełnimy, dodając do podwójnego koła południkowego proste $b'b_1'$, d', d_1', przedstawiające rzuty poziome dwu okręgów kół, leżących na płaszczyznach dotykających powierzchni pierścieniowej na całej długości okręgów tychże kół, a zatem prostopadłych do płaszczyzny pionowej rzutów.

Kończąc tę ważną uwagę dodamy tu, że części kół przedstawiających południki główne, a oznaczone na figurze punktami okrągłemi, są przysposobione, gdyż trzebaby dla ich dostrzeżenia, żeby pro-

mienie światła przeszły na wskróś powierzchni, co jest niemożliwem; zatem, chociaż te części okręgów kół są częścią miejsca geometrycznego dotknięcia płaszczyzn stycznych z powierzchnią, a prostopadłych do płaszczyzny pionowej rzutów, jednakże nie należą one do obwodu pozornego we właściwem znaczeniu tego wyrazu, i są tylko przedłużeniem linij geometrycznych tworzących ten obwód.

Wykreśliwszy obwody pozorne, możemy z łatwością ustawić we właściwem miejscu jeden z rzutów m' punktu tej powierzchni, gdyż w tym celu wystarcza obrać go wewnątrz pionowego obwodu pozornego. Żeby znaleźć odpowiednie rzuty poziome, szukajmy ich dla dwu równoleżników, których rzuty pionowe zchodząc się z sobą, przechodzą przez punkt m', są równoległe do osi rzutów i spotykają koło południkowe lewe w punktach e' i f', mających rzuty poziome w punktach e i f. Kreśląc obecnie współśrodkowe okręgi kół ze spodka osi z jako środka, tak, żeby one przechodziły, jeden przez punkt e, drugi zaś przez punkt f, znajdziemy rzuty poziome równoleżników szukanych. Linija rzutów przechodząca przez punkt m' przetnie wreszcie te okręgi kół w czterech punktach m_1, m_2, m_3, m_4, skutkiem czego zadanie przedstawi cztery rozwiązania odpowiadające punktom (m', m_1), (m', m_2), (m', m_3), (m', m_4).

Drugi przypadek. — *Kiedy krzywa tworząca powierzchnię, jest jakąkolwiek.* — Oznaczmy przez z, z' rzuty osi pionowej, a przez g, g' rzuty tworzącej (*fig.* 290, tab. XXVII).

Kreślenie obwodu pozornego w rzucie poziomym. — Należy znaleźć koło szyjne i równik powierzchni (§ 390), czyli równoleżniki o promieniu najmniejszym i największym. Ponieważ rzuty równoleżników na płaszczyznie poziomej rzutów ukazują się w rzeczywistej wielkości więc kreśląc dwa koła styczne do g, pomiędzy któremi ta krzywa jest zawartą, otrzymamy obwód pozorny w rzucie poziomym.

Figura wskazuje, że promienie za, zb przechodzące przez punkta styczności krzywej g, a zatem normalne do rzutu poziomego tworzącej, przechodząc przez spodek osi wyznaczają promienie kół obwodu pozornego w rzucie poziomym.

Obwód pozorny w rzucie pionowym. — *Wyznaczenie jednego jakiegokolwiek punktu.* — Południk główny powierzchni jest obwodem pozornym szukanym, że zaś leży on w zupełności na płaszczyznie obrazu P, przechodzącej przez oś, wyznaczy się go więc z przecięcia tej płaszczyzny P z różnemi równoleżnikami powierzchni. I tak, obrawszy równoleżnik przechodzący przez punkt m, m' dowolnie obrany na g, g', którego rzutami są : na płaszczyznie pionowej rzutów, prosta równoległa do osi rzutów, a przechodząca przez punkt m', zaś na płaszczyznie poziomej rzutów, okrąg koła zakreślony z punktu z jako środka, a przechodzący przez punkt m, i szukając następnie przecięcia się tego równoleżnika z płaszczyzną P, znajdziemy dwa punkta, z których jeden ma za rzut poziomy punkt m_1 a za rzut pionowy punkt m'_1 przecięcia się linii rzutów przechodzącej przez punkt m_1, z rzutem pionowym równoleżnika. Drugi punkt tegoż przecięcia znajdziemy w sposób zupełnie podobny poprzedzającemu.

397. Kreślenie stycznej do pionowego obwodu pozornego. — Żeby nakreślić styczną w punkcie m'_1 do rzutu pionowego południka obrazu, należy nakreślić rzut pionowy stycznej w punkcie m'_1, m_1 do odpowiedniej tworzącej powierzchni, gdyż widocznem jest, że rzuty pionowe stycznych do powierzchni w punkcie m_1, m'_1 zchodzą się wszystkie ze styczną w punkcie m'_1 do rzutu południka, punkt ten bowiem należy do obwodu pozornego, a tem samem, jego płaszczyzna styczna jest prostopadłą do płaszczyzny pionowej, zkąd wypada, że wszystkie proste tej płaszczyzny mają swe rzuty pionowe na śladzie tegoż samego nazwiska płaszczyzny.

Celem wykreślenia tej stycznej nakreślmy rzuty mt, $m't'$ stycznej w punkcie m, m' do tworzącej g, g', i obróćmy ją naokoło punktu z, z' tak, żeby punkt m, m' przypadł w punkcie m_1, m'_1; w różnych położeniach, jakie przyjmie styczna ruchoma podczas tego ruchu, rzut jej poziomy dotknie okręgu

koła mającego środek w punkcie z, zaś promień zp równy odległości spodka osi od mt, czyli rzut ten poziomy zatrzyma się na stycznej m_1t_1 do tego okręgu koła, przechodzącej przez punkt m; co się tyczy rzutu pionowego, ten po podniesieniu p do p', i zważywszy, że p, p' przypada na p_1, p'_1, a nadto, że m, m' przypada w m_1, m'_1, leżeć będzie na prostej $m'_1t'_1$ otrzymanej z połączenia punktu m'_1 z punktem p'_1.

398. **Punkt najwyższy i najniższy pionowego obwodu pozornego.** — Kreśląc do g' styczne poziome i biorąc punkta $(h', h), (\beta', \beta)$ dotknięcia, znajdziemy, postępując tak samo jak z punktem m, m', punkt najwyższy i punkt najniższy. I rzeczywiście, płaszczyzny bowiem styczne są prostopadłe do płaszczyzny pionowej rzutów wskróś równoleżników przechodzących przez punkta $(h, h'), (\beta, \beta')$, a zatem, styczne do rozmaitych krzywych powierzchni, kreślone przez punkta, w których one przecinają jeden z równoleżników uważanych, mają swe rzuty na śladzie pionowym płaszczyzny tego równoleżnika, wynika więc ztąd, że na płaszczyznie pionowej rzutów styczne do rzutów krzywych będą poziomemi, czego właśnie należało dowieść.

399. **Ostateczne punkta pionowego obwodu pozornego w kierunku poprzecznym.** — W tych punktach styczna do pionowego obwodu pozornego jest pionową, lub mówiąc inaczej, są to punkta największego i najmniejszego równoleżnika, z których jeden a'_1 jest wyznaczony przez koło szyjne, inne zaś wyznaczą się z łatwością.

400. **Punkta podwójne pionowego obwodu pozornego.** — Punkta te leżą oczywiście na równoleżnikach, mających jeden i ten sam promień i na tejże samej wysokości. Żeby rozwiązać to zadanie w przypadku ogólnym, należy użyć wykreślenia dwu krzywych błędu (§ 373), gdyż, biorąc rzuty poziome szeregu po sobie następujących części poziomych krzywej danej, znajdziemy pomiędzy niemi cięciwę wspólną krzywej g i rzutowi poziomemu równoleżnika podwójnego. Cięciwą szukaną będzie ta, którą prostopadła wychodząca ze spodka osi z, dzieli na dwie równe części.

Szukajmy więc punktu, odpowiadającego tym dwu warunkom: t. j. leżącego 1° na środku cięciwy, i 2° w punkcie przecięcia się tejże cięciwy z prostopadłą do niej, wychodzącej z punktu z. Nie zwracając tu uwagi na drugi warunek, znajdziemy pierwszą krzywę błędu utworzoną przez spodki prostopadłych, wychodzących z punktu z do rzutów poziomych różnych cięciw, nie zwracając zaś uwagi na pierwszy warunek, znajdziemy drugą krzywę błędu, utworzoną przez środki cięciw.

W punkcie przecięcia się tych dwu krzywych błąd będzie równy zeru, łącząc więc ten punkt ze środkiem, znajdziemy prostopadłę do cięciwy, a zatem i samą cięciwę.

W przypadku *powierzchni pierścieniowej ogólnej* (§ 338), gdzie krzywa g_1g' jest drugiego stopnia, powyższe wykreślenie bardzo się upraszcza, gdyż dwie krzywe błędu są tu linijami prostemi, a tworząca krzywą płaską, zaś wszystkie cięciwy poziome i ich rzuty poziome są równoległemi. Wynika więc ztąd raz, że miejsce środków rzutów poziomych tych cięciw jest ich średnicą sprzężoną, a powtóre, że miejsce spodków prostych prostopadłych, wychodzących z punktu z do tychże rzutów poziomych cięciw, jest jedyną prostopadłą do ich kierunku wychodzącą z punktu z. To zaś wiedząc punkt szukany otrzymamy w punkcie przecięcia się tych dwu prostych, poczem wykreślenie dokończy rozwiązania jak w poprzedzającym przypadku.

401. **Styczne w punktach podwójnych pionowego obwodu pozornego.** — Styczne takie znajdziemy, postępując z dwoma punktami tworzącej równoleżnika podwójnego w taki sam sposób, jak poprzednio.

402. **Zadanie II.** — *Przez jakikolwiek punkt powierzchni obrotowej nakreślić do niej płaszczyznę styczną.*

Pierwsze rozwiązanie ogólne. — *Ponieważ równoleżnik punktu danego i tworząca przecinają się z sobą, więc styczne nakreślone przezeń do tych linij, wyznaczą płaszczyznę styczną.*

Drugie rozwiązanie ogólne. — *Kreślimy przez punkt dany normalnę do południka, zaś do tej ostatniej płaszczyznę, która będzie styczną szukaną.*

Trzecie rozwiązanie ogólne. — *Należy sprowadzić punkt dany, obracając go naokoło osi, na południk główny, nakreślić następnie w tym punkcie płaszczyznę styczną, a powracając punkt dany do swego pierwotnego położenia wraz z płaszczyzną styczną, znajdziemy płaszczyznę styczną szukaną.* — Wykreślenie płaszczyzny dotykającej powierzchni w punkcie leżącym na południku głównym, jest bardzo łatwem, wystarcza bowiem nakreślić styczną przez punkt dany na południku, a płaszczyzna przechodząca przez nią, będzie właśnie płaszczyzną styczną szukaną.

Wykreślenie. — 1° *Kiedy powierzchnia jest wyznaczoną przez swą oś pionową i przez swój południk główny.*

403. Pierwsze rozwiązanie. — Weźmy, jako przykład, elipsoidę obrotową, i nakreślmy jej obwody pozorne na obu płaszczyznach rzutów (*fig.* 291, tab. XXVII). — Wyznaczywszy, sposobem podanym w paragrafie **396**, punkt m, m' na powierzchni, nakreślmy, za pomocą pierwszego rozwiązania ogólnego, płaszczyznę styczną w punkcie m, m'; w tym celu, nakreślmy rzuty t, t' stycznej do równoleżnika, a dla znalezienia stycznej do południka, poprowadźmy przez punkt a, a' styczną do południka głównego i oznaczmy punkt ω', z przecięcia się jej z osią, to tak znaleziony punkt będzie wierzchołkiem wiązki stycznych do południka wskróś równoleżnika przechodzącego przez punkt m m', zaś proste zm, $\omega' m'$ będą rzutami stycznej do południka przechodzącego przez punkt dany, a sposobem szukana płaszczyzna styczna jest więc wyznaczona przez prostę (t, t') i $(mz, m'\omega')$. Łatwo teraz wreszcie znaleźć ślady tej płaszczyzny stycznej, albowiem kreśląc przez punkt θ, t. j. przez ślad poziomy stycznej do południka, prostę P równoległą do stycznej t, znajdziemy ślad poziomy płaszczyzny stycznej; ślad jej pionowy otrzymamy, kreśląc przez punkt z, ω' równoległę do P, i biorąc jej ślad pionowy jakoteż i ślad stycznej do równoleżnika, gdyż tutaj P spotyka oś rzutów xy w punkcie oddalonym, a prosta łącząca punkta v'_1 z v' wyznaczy właśnie ślad pionowy P' szukanej płaszczyzny stycznej.

404. Drugie rozwiązanie. — *Powierzchnia pierścieniowa.* — Jeżeli powierzchnia dana jest powierzchnią pierścieniową, w takim razie drugie rozwiązanie podane powyżej (§ **402**) z korzyścią zastosować można, gdyż normalna do powierzchni zchodzi się z promieniem południka przechodzącego przez punkt dany; przedstawmy to rysunkiem.

Oznaczmy przez z, z' rzuty osi (*fig.* 292, tab. XXVII), nakreślmy obwody pozorne powierzchni i wyznaczmy rzuty m, m' punktu danego (§ **396**). Dla wykreślenia normalnej w punkcie m, m', znajdźmy, na przecięciu się rzutu z' osi z promieniem $c'a'$, punkt ω' t. j. wierzchołek wiązki normalnych wzdłuż południka przechodzącego przez punkt m, m'; rzut poziomy tego wierzchołka znajduje się w punkcie z. Normalna szukana ma więc za rzut na płaszczyznie pionowej rzutów prostę $\omega' m'$, a za rzut poziomy prostę łączącą punkt m z punktem z, która nie została przedstawioną na rysunku.

Obecnie należy nakreślić przez punkt m, m' płaszczyznę prostopadłą do normalnej; otóż pozioma tej płaszczyzny ma za rzut pionowy prostę $a'm'$, rzut zaś jej poziomy jest styczną mv do rzutu tegoż nazwiska równoleżnika przechodzącego przez punkt M, a ślad pionowy tej stycznej leży w punkcie v'.

Ślad pionowy P' płaszczyzny stycznej znajdziemy, kreśląc przez punkt v' prostopadłę do prostej $m'\omega'$, a punkt α przecięcia się tej prostopadłej z osią rzutów xy, będzie jedynym punktem śladu poziomego tej płaszczyzny stycznej; kreśląc więc przez punkt α prostę αP równoległą do vm, otrzymamy ślad poziomy szukanej płaszczyzny stycznej.

Jeżeli powierzchnia dana jest kulą sposób polegający na kreśleniu normalnej jest lepszy od innych, albowiem promień w punkcie styczności przedstawia odrazu normalnę do powierzchni, i wykreślenie płasczyzny stycznej dokonywa się z łatwością w taki sam sposób, jak dla powierzchni pierścieniowej.

405. Trzecie rozwiązanie. — Oznaczmy przez z, z' rzuty osi, zaś przez c' rzut pionowy krzywej południka głównego, która może być jakąkolwiek (*fig.* 293, tab. XXVII).

Obrawszy na powierzchni jakikolwiek punkt m, m', sprowadźmy go, przez obrót naokoło osi z, z' na płasczyznę południka głównego, a w tem położeniu rzutem jego pionowym będzie punkt α', zaś śladami odpowiedniej płasczyzny stycznej będą $P'_1\alpha_1P_1$.

Wracając teraz punkt dany do swego pierwotnego położenia m, m', i wciągając do tego ruchu płasczyznę styczną, ślad jej poziomy α_1P_1 przypadnie na αP, zaś ślad pionowy znajdziemy, wyznaczając punkt b'_1, z przecięcia się osi z, z' z płasczyzną $P'_1\alpha_1P_1$, któryto punkt nie zmienia swego położenia podczas ruchu obrotowego, kreśląc następnie przezeń poziomę $zv, b'v'$ płasczyzny stycznej szukanej, i wyznaczając jej ślad pionowy v', który należy zarazem do śladu tegoż nazwiska płasczyzny stycznej, a w końcu kreśląc prostę $\alpha v'$, ta ostatnia przedstawi właśnie drugi ślad P' płasczyzny szukanej.

SPOSÓB KREŚLENIA PŁASCZYZNY STYCZNEJ DO POWIERZCHNI OBROTOWEJ Z OSIĄ PIONOWĄ I O TWORZĄCYCH JAKICHKOLWIEK, PRZEZ JEDEN Z JEJ PUNKTÓW

406. Pierwsze rozwiązanie. — Oznaczmy przez z, z' rzuty osi, przez g, g' rzuty tworzącej (*fig.* 294, tab. XXVII). — Obierzmy punkt m, m' na powierzchni (§ 396), i znajdźmy w tym punkcie płasczyznę styczną. Ponieważ równoleżnik przechodzący przez punkt m, m', spotyka tworzącę w punkcie μ, μ', nakreślmy więc rzuty $\mu\theta, \mu'\theta'$ stycznej do tworzącej w tym punkcie i wyznaczmy jej ślad poziomy θ. Sprowadźmy teraz punkt μ, μ' na m, m', przez obrót tejże stycznej; podczas tego ruchu rzut poziomy $\mu\theta$ stycznej zachowa swą odległość zq od spodka osi, a ponieważ punkt μ ma zejść się z punktem m, więc kreśląc z punktu z jako środka, promieniem równym zq, t. j. odległością punktu z od $\mu\theta$, okrąg koła i kreśląc styczną mq_1 do tego okręgu, znajdziemy rzut poziomy stycznej do tworzącej po dokonaniu obrotu; ślad poziomy tej prostej znajdzie się na przecięciu θ_1 prostej mq_1, z okręgiem koła mającym środek w punkcie z, a przechodzącym przez θ.

Płasczyzna styczna jest więc w tej chwili już wyznaczoną przez punkt θ_1 i przez styczną $mv, m'v'$ do równoleżnika, przechodzącego przez punkt m, m'. Ślady tej płasczyzny znajdziemy, kreśląc przez punkt θ_1 równoległę do mv, która wyznaczy ślad poziomy P, a łącząc punkt v' z punktem α przecięcia się tego śladu P z osią rzutów xy, otrzymamy ślad pionowy P'.

407. Drugie rozwiązanie. — Przeniosłszy na figurę 295, tablicy XXVII wszystkie dane figury poprzedzającej, postarajmy się nakreślić płasczyznę styczną w punkcie m, m' do powierzchni danej, a to za pomocą normalnej w tymże punkcie do niej. W tym celu, wyznaczmy wierzchołek wiązki normalnych do południka przechodzącego przez punkt m, m'; wierzchołek ten leży na przecięciu się osi z, z' z płasczyzną przesuniętą przez μ, μ' prostopadłą względem stycznej t, t' do g, g', a przechodzącej przez tenże punkt μ, μ'.

Dla wyznaczenia punktu przecięcia, o którym mowa, nakreślmy przez punkt μ, μ' poziomę, płasczyzny prostopadłej do t, t'; rzut jej pionowy zchodzi się z rzutem pionowym $\mu'm'$ równoleżnika, rzut zaś jej poziomy jest prostą μh prostopadłą do μt, przechodzącą przez punkt μ. Obecnie więc

dla nakreślenia odrazu i płaszczyzny normalnej i jej śladu na z, z', nakreślmy prostę obrazu płaszczyzny, mającą za rzut poziomy zf, a spotykającą μh w punkcie a, którego rzutem pionowym jest a; kreśląc teraz przez punkt a' prostopadłę $a'f'$ do t', otrzymamy rzut pionowy linii obrazu, która winna spotkać oś z, z', a punkt spotkania w', z przedstawi właśnie rzuty wierzchołka wiązki normalnych, zaś rzuty szukane normalnej znajdziemy, kreśląc prostę $w'm'$, zm. Wykreślenie płaszczyzny stycznej nie przedstawi teraz żadnej trudności. Sposób postępowania tutaj podany, jest przedewszystkiem korzystnym jeżeli chcemy znaleźć rzuty normalnej jużto w celu otrzymania korzyści, jakie ta linija przedstawia sama przez się, jużteż w celu znalezienia płaszczyzny stycznej za pomocą jednej z jej normalnych i jej spodka.

408. **Styczność z powierzchnią obrotową odpowiada jednemu warunkowi.** — Ponieważ wszystkie styczne do przecięć powierzchni obrotowej płaszczyznami, wychodzącemi z jednego jakiegokolwiek punktu, tworzą ostrokrąg styczny zewnętrznie, którego wierzchołkiem jest punkt obrany, więc wnosimy ztąd, że zawsze można przez dwa punkta poprowadzić płaszczyznę styczną do powierzchni obrotowej, a to kreśląc przez jeden z nich ostrokrąg styczny zewnętrznie do powierzchni uważanej, zaś do niego płaszczyznę styczną przechodzącą przez punkt drugi. Jednem słowem, dwa punkta i styczność wyznaczają płaszczyznę, a więc styczność odpowiada jednemu warunkowi.

409. **Zadanie III.** — *Przez punkt leżący zewnątrz powierzchni obrotowej, nakreślić do niej płaszczyznę styczną na równoleżniku danym.*

Sposób obwiniętych stożkowych. — Ponieważ powierzchnia obrotowa jest obwijającą ostrokręgów opisanych na równoleżnikach, można więc za nią podstawić obwiniętę stożkową, której cechą jest równoleżnik dany, i przez punkt obrany zewnątrz nakreślić doń płaszczyznę styczną. Zajmijmy się wykreśleniem. Przypuśćmy, że mamy elipsoidę spłaszczoną, równoleżnik $a'b'$, ab i punkt zewnątrz leżący m, m' (*fig.* 296, tab. XXVIII). Przez punkt a' nakreślmy styczną do rzutu pionowego elipsy południka głównego, i wyznaczmy punkt s' spotkania się jej z osią z'; ponieważ punkt s' jest rzutem pionowym wierzchołka ostrokręgu opisanego na elipsoidzie, a jego rzutem poziomym jest spodek osi z, więc zadanie sprowadza się do wykreślenia przez punkt m, m' płaszczyzny stycznej do ostrokręgu pomocniczego, którego wierzchołek leży w punkcie s', z. Ponieważ dalej płaszczyzna styczna obejmuje prostę łączącą punkt m, m' z punktami s' i z, więc przecinając tak prostę, jakoteż ostrokrąg i płaszczyznę szukaną, płaszczyzną równoleżnika, znajdziemy na prostej punkt μ', μ, na ostrokręgu równoleżnik dany $a'b'$, ab, a na płaszczyznie stycznej szukanej jednę ze stycznych do równoleżnika, przechodzących przez punkt μ, μ' i mających za rzuty poziome μc_1, μc_2, a pionowy na $\mu' a'$.

Płaszczyzna styczna jest więc już wyznaczoną przez jednę ze stycznych powyżej znalezionych i przez prostę $s'\mu'$, $z\mu$,, a zadanie przedstawia dwa rozwiązania i dotknięcie ma miejsce w punktach (c_1, c'_1), (c_2, c'_2). Jeżeli ślady płaszczyzny stycznej są użyteczne, to ich wykreślenie nie przedstawi teraz żadnej trudności.

410. Sposób obwiniętych kulistych. — Weźmy jak poprzednio elipsoidę obrotową, wyznaczoną przez swe dwa obwody pozorne (*fig.* 297, tab. XXVIII), równoleżnik ab, $a'b'$ i punkt zewnętrzny m, m'.

Ponieważ obwinięta kulista, której cechą jest równoleżnik dany, ma środek w punkcie ω', z, t. j. w punkcie przecięcia się normalnej poprowadzonej przez b, b' z osią z, z', zaś promień równy długości $\omega' b'$ tej normalnej, więc z łatwością wykreślimy rzut pionowy kuli. Jeżeli przypuścimy, że punkt widzenia znajduje się w punkcie m, m', to odpowiedni obwód pozorny obwiniętej, obwijającej i cechy zejdą się w jednym punkcie (§ 394), który jest właśnie punktem dotknięcia płaszczyzny stycznej szukanej.

Dla otrzymania w sposób łatwy obwodu pozornego obwiniętej, przenieśmy punkt m, m' do μ, μ', za pomocą obrotu naokoło osi z, z', na płaszczyznę obrazu przechodzącą przez oś.

Jeżeli teraz przyjmiemy punkt μ, μ' za punkt widzenia, to obwód pozorny kuli będzie miał za rzut pionowy *biegunowę* $p'q'$, przechodzącą przez punkt μ', względnie do okręgu koła nakreślonego na płaszczyznie pionowej rzutów. Obwód pozorny spotyka cechę w dwu punktach, leżących na cięciwie prostopadłej do płaszczyzny pionowej rzutów, i mającej punkt γ' za rzut na tejże płaszczyznie, rzut zaś poziomy tej cięciwy jest przedstawiony przez części prostopadłej do osi rzutów xy, a przechodzącej przez punkt γ' i w odległości $z\gamma$ od osi z, z'. Wracając teraz do pierwotnego położenia, punkt γ przypadnie w punkcie γ_1, cięciwa przyjmie w rzucie poziomym położenie c_1c_2 prostopadłe do $z\gamma_1$, a jej końce c_1, c_2 będą rzutami na tęż płaszczyznę punktów, w których płaszczyzny styczne szukane dotykają powierzchni. Rzuty pionowe punktów styczności znajdą się w punktach c'_1, c'_2, na przecięciu linij rzutów przechodzących przez punkta c_1, c_2 z rzutem $a'b'$ równoleżnika danego. Dopełnimy wykreślenia w taki sam sposób, jak to zrobiliśmy w paragrafie **403**.

411. Zadanie IV. — *Przez punkt dany zewnątrz powierzchni obrotowej nakreślić do niej płaszczyznę styczną, dotykającą jej w punkcie leżącym na południku danym.* — Przedstawmy powierzchnię przez oś z, z' i przez jej obwód pozorny γ' na płaszczyznie pionowej rzutów (*fig.* 298, tab. XXVIII); oznaczmy przez P ślad poziomy południka danego, a przez m, m' punkt zewnętrzny dany.

Dla rozwiązania zadania, należy przez punkt dany nakreślić płaszczyznę styczną do walca, dotykającego powierzchni obrotowej wzdłuż południka danego, co otrzymamy, kreśląc przez punkt m, m' prostę równoległą do tworzących walca, która będąc prostopadłą do płaszczyzny podstawy, ma za rzuty dwie proste d, d', z których jedna jest prostopadłą do P, a druga równoległą do osi rzutów xy.

Ponieważ płaszczyzna podstawy spotyka prostę prostopadłą, o której mowa, w punkcie, którego rzutem poziomym jest punkt μ, zatem zadanie sprowadza się do nakreślenia przez ten punkt stycznych do południka danego.

To ostatnie zadanie rozwiązuje się bez kreślenia krzywej a mianowicie sprowadzając południk dany ruchem obrotowym naokoło osi z, z', na południk obrazu, mający za rzut pionowy γ'. Wskutek tego obrotu punkt przecięcia się prostej d, d' z płaszczyzną P przypada w punkcie μ_1, μ'_1, a styczna $\mu'_1c'_1$ do krzywej γ' przechodząca przez punkt μ'_1, wyznacza właśnie rzut pionowy stycznej szukanej; jeżeli więc nadamy tej ostatniej ruch obrotowy w kierunku przeciwnym poprzedzającemu, to punkt c_1, c'_1 przypadnie w punkcie c, c'. Płaszczyzna styczna szukana jest więc wyznaczoną przez jednę ze swych prostych d, d', i przez punkt c, c' dotknięcia się jej z powierzchnią obrotową.

412. Zadanie V. — *Nakreślić, równolegle do prostej danej, płaszczyznę styczną do powierzchni obrotowej na równoleżniku danym.* — Zadanie to jest tylko szczególnym przypadkiem podanego powyżej (§ **409**), gdyż należy tylko przypuścić, że punkt zewnętrzny znajduje się w nieskończoności na prostej danej. Rozwiązanie jego będzie takież samo jak poprzednio z tą tylko różnicą, że należy zwrócić tu uwagę na szczególne położenie punktu zewnętrznego.

Sposób obwiniętych stożkowych. — Niech powierzchnią daną będzie elipsoida obrotowa (*fig.* 299, tab. XXVIII). Oznaczmy przez $a'b'$ rzut pionowy jednego z równoleżników, zaś przez d, d' prostę daną.

Dla wykreślenia płaszczyzny równoległej do prostej danej d, d', i dotykającej elipsoidy na równoleżniku danym, zastąpmy powierzchnię jej obwiniętą stożkową, mającą za cechę równoleżnik, a za wierzchołek punkt s', z przecięcia się osi ze styczną, w punkcie A do elipsy południka głównego poprowadzoną.

Ponieważ prosta δ, δ' równoległa do d, d', a przechodząca przez punkt s', z, leży na płaszczyznie

stycznej do ostrokręgu, dla zupełnego więc wyznaczenia tej ostatniej, obierzmy płaszczyznę sieczną pomocniczą przechodzącą przez koło, utworzone z przecięcia się ostrokręgu z walcem opisanym na elipsoidzie wzdłuż równika.

Ponieważ koło, o którem mowa, jest poziomem, a punkt f' jest rzutem pionowym jednego z jego punktów, więc prosta P' równoległa do xy a przechodząca przez punkt f', jest śladem pionowym płaszczyzny poziomej pomocniczej, która przecina ostrokrąg podług równoleżnika mającego P' za rzut pionowy, zaś poziomy na odpowiednim rzucie poziomym równika, prostę δ, δ' w punkcie μ, μ', a płaszczyznę styczną szukaną podług stycznych $(\mu t_1, \mu' t')$, $(\mu t_2, \mu' t')$ do okręgu koła, powstałego z powyżej wspomnianego przecięcia.

Zadanie więc ma dwa rozwiązania, przedstawione odpowiednio przez dwie pary prostych (δ, δ'), $(\mu t_1, \mu' t')$, i (δ, δ'), $(\mu t_2, \mu' t')$.

Sposób obwiniętych kulistych. — Weźmy elipsoidę obrotową przedstawioną przez jej oś i przez południk obrazu (*fig.* 300, tab. XXVIII), jej równoleżnik $(ab, a'b')$ i prostę δ, δ' przechodzącą, dla ułatwienia rysunku, przez punkt f', z leżący na osi. Jeżeli przyjmiemy za cechę równoleżnik dany, i zastąpimy powierzchnię przez odpowiednią obwiniętę kulistą, to środek tej ostatniej będzie miał za rzut poziomy spodek z osi, a za rzut pionowy punkt ω' przecięcia się osi z' z normalną, przechodzącą przez punkt b' do rzutu pionowego południka głównego; promień obwiniętej kulistej jest dany w rzeczywistej wielkości przez $b'\omega'$.

Dla wyznaczenia punktu styczności, znajdźmy przedewszystkiem koło wielkie powstałe z przecięcia się cechy $ab, a'b'$ z krzywą, wzdłuż której walec równoległy do prostej δ, δ' dotyka zewnętrznie kuli. Płaszczyzna tego koła wielkiego jest prostopadłą do kierunku tworzących walca pomocniczego, a krzywa wyznacza się bardzo łatwo czyniąc prostę δ, δ', za pomocą ruchu obrotowego całej figury naokoło osi z, z', równoległą do płaszczyzny pionowej rzutów. Po dokonanym obrocie, ponieważ ślad θ, θ' prostej δ, δ' przypada na θ_1, θ'_1, a punkt f', z pozostaje niezmiennym, więc rzuty prostej δ, δ' będą $z\theta_1$, $f'\theta'_1$.

Jeżeli teraz przez rzut pionowy ω' środka obwiniętej kulistej nakreślimy prostopadłę $\omega' p'$ do prostej $f'\theta'_1$, takowa będzie rzutem pionowym koła wielkiego dotknięcia. Koło to ma z cechą cięciwę wspólną, której rzutem pionowym jest punkt γ' przecięcia się prostych $a'b'$ i $\omega' p'$, zaś rzutem poziomym część prostopadłej do osi rzutów, wyprowadzonej z punktu γ'. Sprowadźmy cięciwę do jej pierwotnego położenia; ponieważ odległość jej od osi jest równą $z\gamma$, zatem opisując z punktu z jako środka promieniem równym $z\gamma$ łuk koła aż do przecięcia się jego z rzutem poziomym prostej δ, znajdziemy rzut poziomy γ_1 jednego z punktów cięciwy, której rzut także przypada na prostopadłej do δ przechodzącej przez γ, i kończy się w punktach c_1, c_2 na rzucie równoleżnika. Kreśląc obecnie przez te punkta linije rzutów, znajdziemy w punktach ich przecięcia się z $a'b'$ rzuty pionowe c'_1, c'_2 punktów dotknięcia szukanych, a widzieliśmy już powyżej (§ 403), że znajomość punktów styczności jest dostateczną do znalezienia samychże płaszczyzn.

413. Zadanie VI. — *Nakreślić, równolegle do prostej danej, płaszczyznę dotykającą powierzchni obrotowej na południku danym.*

Sposób obwiniętych walcowych. — Weźmy elipsoidę wyznaczoną przez jej oś i południk główny, ślad poziomy P południka dotknięcia i prostę δ, δ', przechodzącą przez jakikolwiek punkt a, a' osi z, z' (*fig.* 301, tab. XXVIII).

Jeżeli zastąpimy elipsoidę przez jej obwiniętę walcową, mającą za przecięcie proste południk dany P, i nakreślimy, równolegle do prostej δ, δ', płaszczyznę styczną do obwiniętej, ta ostatnia będzie właśnie płaszczyzną styczną szukaną.

W tym celu, wyznaczmy kierunek płaszczyzny stycznej za pomocą prostej δ, δ' i prostej równoległej do tworzących walca, przechodzącej przez ślad θ, θ' prostej δ, δ'; ta równoległa jest prostą prostopadłą do płaszczyzny południka, którego śladem jest P, czyli jestto prosta płaszczyzny poziomej, przechodząca przez punkt θ a leżąca na prostopadłej θb do P.

Obierzmy za płaszczyznę sieczną pomocniczą płaszczyznę południka przechodzącego przez P, to takowa spotka walec podług południka danego, płaszczyznę wyznaczoną przez proste (δ, δ'), (θb) podług prostej, której dwa punkta są znane, t. j. jeden a, a' na osi, drugi b na płaszczyznie poziomej rzutów.

Płaszczyzna styczna szukana przecina więc płaszczyznę południka danego podług stycznych do tego ostatniego, skierowanych równolegle do prostej łączącej punkt a, a' z punktem b.

Dla znalezienia tych stycznych, nie kreśląc rzutu pionowego południka danego, sprowadźmy przez obrót naokoło osi z, z', płaszczyznę tegoż południka do położenia równoległego do płaszczyzny pionowej rzutów; ponieważ podczas tego ruchu, punkt a, a' nie zmieni swego położenia, zaś punkt b będzie miał za rzuty b_1, b'_1, łącząc więc punkta a' z b'_1 prostą $a'b'_1$ i kreśląc do południka styczne równoległe do tej ostatniej prostej, znajdziemy punkta styczności (c_1, c'_1), (γ_1, γ'_1) po obrocie.

Powróćmy teraz figurę do jej pierwotnego położenia, to punkt (c_1, c'_1) przypadnie w punkcie (c, c'), a punkt (γ, γ'_1) znajdzie się w punkcie (γ, γ'), poczem już rozwiązanie zadania da się dokończyć bez trudności, gdyż znamy punkt styczności płaszczyzny stycznej dla każdego rozwiązania i jej kierunek, który jest kierunkiem płaszczyzny mającej za ślad poziomy prostę θb i przechodzącej przez punkt a, a'.

414. Powierzchnia pierścieniowa.

Sposób obwiniętych kulistych. — Dla powierzchni pierścieniowej jest jeden sposób tworzenia, a mianowicie za pomocą obwiniętych ruchomych, który chociaż nie jest korzystnym dla innych powierzchni obrotowych, nie jest jednakże bez wartości. Sposób ten polega na uważaniu powierzchni pierścieniowej jako obwijającej kuli, o promieniu stale równym promieniowi koła południka, którego środek zmienia swe położenie opisując okrąg koła, po którym porusza się podczas obrotu naokoło osi powierzchni, środek tegoż, południka. Cechy w tym przypadku są także południkami powierzchni. Używając obwiniętej kulistej, rozwiążemy tak to zadanie jakoteż i podane w paragrafie 411, ograniczymy się atoli tu na wykreśleniu za pomocą tego sposobu płaszczyzny stycznej do powierzchni pierścieniowej, a równolegle do prostej danej.

Wykreślenie. — Przyjmijmy, że powierzchnia pierścieniowa jest wyznaczoną przez swe dwa obwody pozorne, zaś płaszczyzna południka dotknięcia przez swój ślad poziomy P (*fig.* 302, tab. XXVIII); prosta δ, δ' przechodzi przez punkt a, a' leżący zawsze na osi z, z'.

Jeżeli sprowadzimy przez obrót naokoło osi z, z', płaszczyznę południka na płaszczyznę południka obrazu, którego śladem poziomym jest F, wciągając przytem do tego ruchu prostę δ, δ', to znajdziemy, że ta ostatnia będzie miała za rzut poziomy prostę δ_1 tworzącą kąt obrotu α z prostą δ, odcięty w kierunku strzałki f, zaś ślad θ, θ' prostej δ, δ' przypadnie w θ_1, θ'_1 a rzut pionowy tej prostej $\delta_1\delta'$ przypadnie na δ', t. j. na prostej łączącej punkta a' z θ'_1. Południk dany przechodzący przez dwie kule obwinięte, z których jedna po dokonaniu obrotu, będzie przedstawionym na płaszczyznie pionowej rzutów przez koło południka głównego, mającego za środek punkt ω', trzeba więc obecnie znaleźć punkt przecięcia się tego koła z krzywą dotknięcia kuli walcem opisanym na niej w kierunku δ_1, δ'_1.

Chociaż rzutem pionowym koła wielkiego jest elipsa, jednakże rysunek wykonywa się bardzo łatwo, dosyć bowiem nakreślić przez punkt ω' prostę prostopadłą do δ'_1 a ta będzie prostą obrazu

płaszczyzny koła dotknięcia, która zarazem wyznaczy po dokonaniu ruchu, w punktach c'_1, γ'_1 rzuty pionowe punktów przecięcia się cechy z krzywą dotknięcia walca opisanego, lub co na jedno wychodzi, punkta dotknięcia płaszczyzn stycznych szukanych po dokonaniu obrotu całej figury.

Wróciwszy do pierwotnego położenia, punkta (c_1, c'_1), (γ_1, γ'_1) przypadną odpowiednio w punktach (c, c'), (γ, γ'), a płaszczyznę styczną wyznaczy się sposobem podanym w paragrafie **403.**

Zadanie przedstawia jeszcze dwa inne rozwiązania, nie przedstawione na figurze naszej, które otrzyma się za pomocą drugiej obwiniętej kulistej.

415. Zadanie VII. — *Znaleźć rzuty krzywej dotknięcia ostrokręgu opisanego o wierzchołku danym, z powierzchnią obrotową.* — Zadanie to może być rozwiązanem rozmaitemi sposobami, z których najważniejsze są : 1° *Sposób przecięć*, 2° *sposób obwiniętych.*

1° Sposób przecięć. — Sposób przecięć, który może być zastosowanym do wszelkiej powierzchni, polega na przecięciu tej ostatniej płaszczyzną przechodzącą przez wierzchołek ostrokręgu, i na kreśleniu przez tenże wierzchołek stycznych do przecięcia, punkta bowiem dotknięcia tych stycznych należą do krzywej szukanej.

Równolegle do krzywej znalezionej, należy wyznaczyć, za pomocą zmiany kierunku płaszczyzny siecznej pomocniczej, dostateczną liczbę punktów, żeby krzywa dotknięcia mogła być wyznaczoną z całą ścisłością, do jakiej jest zdolny sposób rysunkowy.

Sposób przecięć jako zazwyczaj bardzo żmudny, bywa używanym tylko do wyznaczenia pewnych punktów szczególnych, znajdujących się na dwu płaszczyznach siecznych pomocniczych, których dotknięcie z powierzchnią jest już wyznaczone na rysunku, lub wyznacza się bardzo łatwo.

2° Sposób obwiniętych. — Dla znalezienia punktów dotknięcia nakreślmy równoleżniki i południki dostatecznie do siebie zbliżone, i wyznaczmy tak samo, jakto już robiliśmy dla zadań powyżej rozwiązanych, punkta dotknięcia płaszczyzn stycznych, przechodzących przez wierzchołek ostrokręgu danego, z równoleżnikami i południkami, a łącząc z sobą tak znalezione punkta, otrzymamy krzywę szukaną.

416. Modyfikacye zachodzące w sposobie obwiniętych stożkowych dla cech blizkich naszyjnika i równika. — Przedstawmy powierzchnię obrotową przez jej oś z, z' (*fig.* 303, tab. XXVIII) i przez rzut pionowy μ' jej południka głównego, następnie wierzchołek ostrokręgu s, s', którego szukamy krzywej dotknięcia, sprowadźmy, obracając naokoło osi z, z', na płaszczyznę obrazu przechodzącą przez oś. Uważmy teraz rzut pionowy m' punktu południka głównego a następnie rzut pionowy równoleżnika przechodzącego przez punkt M, przedstawmy przez prostę prostopadłą $m'\omega'$, wyprowadzoną z punktu m' na oś z', a wreszcie szukajmy punktów krzywej dotknięcia, leżących na tym równoleżniku. W tym celu, nakreślmy styczną do μ' przez punkt m', to punkt σ' przecięcia się jej z osią z', wyznaczy rzut pionowy wierzchołka obwiniętej stożkowej, a teraz pozostaje nam tylko jeszcze nakreślić przez punkt s, s' płaszczyznę styczną do obwiniętej.

Jeżeli przyjmiemy za płaszczyznę sieczną pomocniczą płaszczyznę poziomą przechodzącą przez punkt s, s', to przecięciem się jej ze styczną $m'\sigma'$, sz będzie punkt t, t', zaś przecięcie się jej z obwiniętą będzie okręgiem koła, którego rzut poziomy ma za środek punkt z i przechodzi przez punkt t, wreszcie przecięcie się jej z szukanemi płaszczyznami stycznemi jest przedstawione w rzucie poziomym przez układ stycznych sa_1, sa_2, do okręgu koła przed chwilą nakreślonego; ponieważ rzuty punktów dotknięcia się tych stycznych są (a_1, a'), (a_2, a'), nakreśliwszy więc prostę $\sigma'a'$, znajdziemy rzut pionowy wspólny obu tworzącym dotknięcia, który w swym punkcie przecięcia się c' z prostą $m'\omega'$ wyznaczy rzut pionowy jednego z punktów szukanych. Nie szukając rzutu

poziomego punktu dotknięcia, zajmijmy się obecnie wykreśleniem odnoszącem się do wyznaczenia punktu c' niezależnie od punktu σ', a to w tym celu, żeby ono mogło być zastosowanem do równoleżników blizkich koła szyjnego lub równika, dla których punkt ten wychodzi poza granice rysunku.

Oznaczywszy przez p punkt spotkania się prostej a_1, a_2 z prostą sz, z trójkąta prostokątnego sa_1z mamy

$$\frac{zp}{za_1} = \frac{za_1}{zs},$$

lub, podstawiając za każdą liniję jej równą z rzutu pionowego, mamy

$$\frac{o'a'}{o't'} = \frac{o't'}{o's'};$$

że zaś z trójkątów $o't'\sigma'$, $o'a'\sigma'$ jest

$$\frac{o'a'}{o't'} = \frac{\omega'c'}{\omega'm'},$$

dwie ostatnie równości dają więc

$$\frac{o't'}{o's'} = \frac{\omega'c'}{\omega'm'}.$$

Czyli, że prosta $o'\omega'$ i prosta łącząca z sobą dwie pary punktów (s', m'), (t', c'), zbiegają się w jednym i tym samym punkcie α.

Wykreślenie sprowadza się więc, nie ograniczając rzutu pionowego $m'\omega'$ równoleżnika, do nakreślenia przez punkt m' stycznej do południka, którą przedłużamy do spotkania się jej w punkcie t' z prostą równoległą do osi rzutów, wykreśloną przez punkt s'; następnie do nakreślenia prostej $s'm'$, wyznaczającej punkt α na przecięciu się jej z osią z, któryto punkt należy połączyć z punktem t', poczem oznaczając punkt c' przecięcia się tej ostatniej prostej $\alpha't'$ z $m'\omega'$, ten ostatni, t. j. punkt c', będzie właśnie punktem krzywej szukanej.

Wykreślenie tutaj podane, służy nietylko do uczynienia rysunku niezależnym od położenia, które zajmuje wierzchołek obwiniętej, lecz nadto do wykreślenia rzutu pionowego niezależnie od płaszczyzny poziomej rzutów, kiedy punkt s, s' znajduje się w płaszczyznie obrazu przechodzącej przez oś z.

417. Twierdzenie. — *Jeżeli krzywa ma płaszczyznę symetryi prostopadłą do płaszczyzny poziomej rzutów, to jej punkt najwyższy i najniższy leżą na tej płaszczyznie i odwrotnie* (fig. i_9). — Oznaczmy

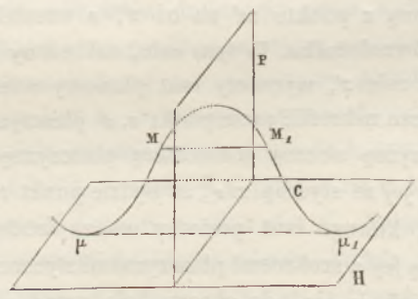

Fig. i_9.

przez H płaszczyznę poziomą rzutów, przez P płaszczyznę symetryi prostopadłą do H, zaś przez C krzywę uważaną. Punktowi M krzywej uważanej odpowiada punkt na niejże M_1, krzywa MM_1 jest prosto-

padłą do P, a tem samem poziomą. Żeby styczna była także poziomą, trzeba, żeby dwa punkta przecięcia M i M_1 leżące na jednej cięciwie poziomej, zchodziły się z sobą, lub innemi słowy, żeby prosta MM_1 była zerem, albo jeszcze, żeby punkta M i M_1 były w jednym punkcie płaszczyzny P.

Twierdzenie wprost jest więc już dowiedzionem.

Odwrotności dowiedziemy zważając, że wszelki punkt płaszczyzny P i krzywej C przedstawia dwa punkta tej krzywej, zchodzące się w jeden na cięciwie prostopadłej do płaszczyzny P, lub inaczej mówiąc, na stycznej poziomej.

Dowodzenie wprost opiera się na tym fakcie, że jeżeli dwa punkta cięciwy poziomej zchodzą się w jeden, to leżą one na jednej płaszczyznie.

Żeby dwa punkta zchodziły się z sobą nazewnątrz płaszczyzny P, potrzebnem jest, żeby krzywa posiadała cztery punkta zchodzące się z sobą, brane po dwa, na jednej cięciwie poziomej takiej jak $\mu\mu'_1$, a wypadek ten zdarzyć się może tylko bardzo rzadko.

Żeby odwrotność przedstawić mogła wyjątek, potrzeba znów, żeby krzywa w jednym z punktów przecięcia się swego z płaszczyzną P nie była w granicy styczną do swej cięciwy poziomej, t. j. żeby na płaszczyznie P znajdowały się punkta szczególne krzywej (§ 376), co może także mieć miejsce, lecz tylko bardzo rzadko.

418. Punkta najwyższe i najniższe. — Przypuśćmy, że powierzchnia dana jest wyznaczoną przez jej oś z, z' (*fig.* 304, tab. XXIX) i przez rzut pionowy μ' swego południka obrazu, przypuśćmy, nadto, że s, s' jest wierzchołkiem ostrokręgu opisanego.

Ponieważ płaszczyzna prostopadła do płaszczyzny poziomej rzutów, której ślad na tej ostatniej jest prostą łączącą punkta s i z, jest płaszczyzną symetryi krzywej dotknięcia (§ 417), punkta zatem krzywej leżące na tej płaszczyznie, są właśnie punktami szukanemi, których znalezienie jest łatwem, stosując sposób przecięć. Rzeczywiście, przetnijmy bowiem powierzchnię daną płaszczyzną pionową przechodzącą przez z, z' i przez s, s', a znajdziemy na przecięcie krzywę południka, do której należy nakreślić styczne przez punkt s, s'. Żeby jednakże nie kreślić rzutu pionowego tej krzywej, uczyńmy ją równoległą do płaszczyzny pionowej rzutów, a to obracając ją naokoło osi z, z' i wciągając do tego ruchu punkt s, s', który przyjmie położenie s_1, s'_1, podczas gdy krzywa południka płaszczyzny symetryi zajmie miejsce krzywej pionowego obwodu pozornego; jeżeli więc teraz nakreślimy przez punkt s' rzutu pionowego μ' tej ostatniej styczną $s'_1 b'_1$, to znajdziemy w punkcie b'_1 dotknięcia się jej, rzut pionowy punktu szukanego w tem nowem położeniu, poczem rzut poziomy b_1 łatwy do znalezienia. Punkt b_1, b'_1 powrócony do swego pierwotnego położenia, w sposób przedstawiony na figurze, przyjdzie do punktu b, b', który jest właśnie punktem najniższym krzywej.

Punkt najwyższy znaleźlibyśmy w sposób zupełnie taki sam jak poprzedni, działając na stycznej wychodzącej z punktu s'_1 do krzywej symetrycznej do β' względem osi z'.

419. Równoleżniki graniczne. — Ponieważ punkta krzywej mogą nie leżeć na równoleżniku obranym dowolnie, zatem należy przedewszystkiem oznaczyć granice, pomiędzy któremi przyjęty równoleżnik może się zmieniać; wszelkie więc wykreślenie powinniśmy rozpoczynać od wyznaczenia punktu najwyższego i najniższego, które leżą właśnie na równoleżniku granicznym i wyznaczają go w zupełności.

420. Punkta zwrotu drugiego rodzaju w rzucie pionowym (*fig.* 304, tab. XXIX). — Jeżeli przypuścimy, że wierzchołek s_1, s'_1 leży na płaszczyznie południka obrazu przechodzącego przez oś z, z', i jeżeli nakreślimy, nie zmieniając położenia wierzchołka, odpowiednią krzywę dotknięcia w rzucie pionowym, to otrzymamy w punktach takich jak (b_2, b'_1) punkta zwrotu drugiego rodzaju. Rzeczy-

wiście, skoro bowiem styczna do krzywej dotknięcia w tym punkcie jest prostopadłą do płaszczyzny pionowej rzutów, zatem, na zasadzie twierdzenia i uwagi umieszczonych w paragrafach 385 i 387, rzut pionowy krzywej przedstawi w punkcie b'_1 punkt zwrotu drugiego rodzaju, lecz wskutek symetryi dwie gałęzie zwrotu przykryją się wzajemnie.

421. Punkta przysposobione na rzucie pionowym. — Zachowując warunki przyjęte w poprzedzającym paragrafie, t. j. że wierzchołek s_1, s'_1 (*fig.* 304, tab. XXIX) leży na płaszczyznie obrazu przechodzącej przez oś z, z', punkta takie jak b'_1 leżą na równoleżniku granicznym.

Lecz wykreślenie, podane w paragrafie 416, prowadzi jeszcze do wyznaczenia pewnych punktów nie leżących pomiędzy równoleżnikami granicznemi, t. j. punktów, które się znajdują zewnątrz powierzchni, a tem samem są nieużyteczne. Sposób tworzenia tych punktów podlega jednakże temu samemu prawu tworzenia geometrycznego co i punkta użyteczne krzywej, a zatem tworzą one przedłużenie tejże krzywej, wskutek czego noszą nazwę *punktów przysposobionych* krzywej.

422. Asymptoty gałęzi przysposobionych na rzucie pionowym. — Na figurę 305, tab. XXIX przenieśmy dane figury 304, i ustawmy wierzchołek s_1, s'_1 ostrokręgu danego na płaszczyznie obrazu przechodzącej przez oś z, z' powierzchni, to stosując wykreślenie podane w paragrafie 416 do równoleżnika największego, którego część ma za rzut pionowy $m'\omega'$, nakreślmy najprzód prostę s'_1m' i oznaczmy przecięcie się jej α' z osią z', następnie nakreślmy styczną przez punkt m', która się zchodzi z rzutem $m'\omega'$ części równoleżnika, a wreszcie przez punkt s'_1 prostę równoległą do osi rzutów i wyznaczmy jej przecięcie. się t'_∞ ze styczną, to łącząc punkt α z t'_∞, lub co na jedno wychodzi, prowadząc przez punkt α prostę równoległą do $c'_1t'_\infty$ i oznaczając punkt c'_∞ przecięcia się jej z $m'\omega'$, otrzymamy punkt c'_∞, który jest właśnie punktem szukanym. Ponieważ punkt c'_∞ leży w odległości nieskończenie wielkiej na $m'\omega'$, i ponieważ każdy inny równoleżnik blizki pierwszemu wyznacza punkt bardzo oddalony od z' lecz bardzo zbliżony do $m'\omega'$, więc wnosimy, że rzut $m'\omega'$ równoleżnika najwyższego jest asymptotą krzywej. Rozumowanie powyższe stosuje się w zupełności i do równoleżnika najwyższego.

423. Południki graniczne. — Weźmy znów oś powierzchni z, z' (*fig.* 306), rzut pionowy μ' południka obrazu i wierzchołek ostrokręgu s, s'.

Wykreślenie podane w paragrafie 412 przedstawia punkta dotknięcia leżące na różnych południkach, gdyż, jak wiemy, wystarcza wyznaczyć płaszczyznę jakiegokolwiek południka przez jej ślad poziomy P, wyprowadzić do tej płaszczyzny prostopadłę sq, $s'q'$, i przez spodek q, q' tej ostatniej nakreślić styczne do południka obranego, a znajdziemy w ten sposób punkta dotknięcia leżące zarazem na krzywej szukanej. Ponieważ miejscem geometrycznem spodka q, q', jest okrąg koła leżący na płaszczyznie poziomej H', przechodzącej przez punkt s, s', a mający za rzut pionowy H', zaś za rzut poziomy okrąg koła opisany na sz jako średnicy, więc kreśląc rzut poziomy równoleżnika na tejże samej wysokości co wierzchołek s, s', i zważając, że on dzieli miejsce geometryczne punktu q na dwie części, z których jedna c_1sc_2 jest rzutem poziomym spodków prostopadłych leżących zewnątrz powierzchni, a druga $c'c_2$ rzutem poziomym spodków prostopadłych leżących wewnątrz tej powierzchni, wnosimy, że dla różnych położeń punktu q znajdujących się na łuku c_1sc_2, każda płaszczyzna południka wyznacza punkta krzywej, podczas gdy płaszczyzny południków nie wyznaczają żadnego jej punktu w granicach punktu q leżącego na łuku c_1zc_2.

Proste zatem P_1, P_2 otrzymane z połączenia spodka osi z z punktami c_1, c_2, są śladami poziomemi płaszczyzn granicznych.

Jeżeli podniesiemy punkta c_1, c_2 do c'_1, c'_2 na H', i weźmiemy pod uwagę punkta (c_1, c'_1), (c_2, c'_2),

leżące odpowiednio na płaszczyznach południków granicznych, to znajdziemy na południkach blizkich każdego z tych punktów, i spotykających krzywę dotknięcia, dwa punkta tej krzywej bardzo blizkie punktów (c_1, c'_1), (c_2, c'_2), które zejdą się z sobą i z punktami (c_1, c'_1), (c_2, c'_2) jak południk na którym leżą przyjmie jedno z położeń granicznych.

Wynika z powyższego rozumowania, że południki płaszczyzn granicznych są odpowiednio stycznemi do krzywej dotknięcia w punktach (c_1, c'_1), (c_2, c'_2), które wskutek tego noszą nazwę punktów granicznych.

424. **Punkta zwrotu drugiego rodzaju na rzucie poziomym.** — Jeżeli powierzchnia jest symetryczną względem płaszczyzny równika lub koła szyjnego, a nadto, jeżeli wierzchołek ostrokręgu opisanego leży na płaszczyznie symetryi, to kreśląc wprost przez ten wierzchołek styczne do równika lub do koła szyjnego, znajdziemy, sposobem przecięć, punkta dotknięcia należące do krzywej szukanej, a styczne do niej, przechodzące przez te punkta, są pionowe; wypada więc ztąd, że mamy w rzucie poziomym punkta zwrotu (§ 385), a wskutek symetryi zwrot jest drugiego rodzaju (§ 387) i dwie gałęzie krzywej przykrywają się wzajemnie.

Jako przykład, weźmy powierzchnię pierścieniową ogólną o osi z, z' (*fig.* 307, tab. XXIX), której południk obrazu jest utworzonym z dwu elips (μ, μ'), (μ_1, μ'_1) symetrycznych względem osi z, z', i mających jednę ze swych osi równoległą do osi powierzchni. Ustawmy przedewszystkiem wierzchołek ostrokręgu opisanego w punkcie s, s' na płaszczyznie poziomej H′, przechodzącej przez środek ω, ω' jednej z elips danych; następnie nakreślmy, jak powyżej, okrąg koła na sz jako średnicy, to tenże okrąg przecinając się z równikiem lub kołem szyjnem, wyznaczy nam punkta zwrotu $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ rzutu poziomego i da możność znalezienia śladów $z\gamma_1, z\gamma_2, z\gamma_3, z\gamma_4$ południka granicznego.

425. **Punkta przysposobione na rzucie poziomym.** — Ponieważ okrąg koła zakreślony na sz jako średnicy jest miejscem rzutów poziomych spodków prostopadłych, nakreślonych z punktu s, s' do rozmaitych południków, i ponieważ kreśląc z każdego punktu tego miejsca styczne do odpowiednich południków, spodki prostopadłych zawartych pomiędzy γ_1 i γ_2 lub pomiędzy γ_3 i γ_4, nie wyznaczają żadnego punktu użytecznego na jednej z odpowiednich elips, szukajmy więc, czy mogą one wyznaczyć punkta przysposobione.

Ponieważ jakikolwiek punkt rzutu poziomego krzywej uważanej, jest (§ 382) śladem poziomym biegunowej jednej z odpowiednich elips południkowych, jeżeli ustawimy biegun u spodka prostopadłej przechodzącej przez punkt s, s' do płaszczyzny uważanego południka, więc jeżeli obierzemy na łuku łączącym punkta γ_3, γ_4, punkt q t. j. spodek jednej z prostopadłych, to południk odpowiedni będzie miał za ślad poziomy prostę P łączącą punkta z i q, zaś punkt odpowiedni przysposobionej będzie miał za rzut poziomy odpowiedni punkt q, t. j. spodek biegunowej elipsy, której rzutem jest uv, jeżeli ustawimy biegun, którego rzutem poziomym jest punkt q, na płaszczyznie H′.

Spodek biegunowej zaś, o której mowa, znajdziemy sprowadzając ruchem obrotowym naokoło osi z, z' elipsę i biegun na płaszczyznę południka głównego, gdyż wówczas elipsa zchodzi się z krzywą μ, μ', a biegun przypada w punkcie q', q'_1.

Ponieważ biegun wszelkiej rozbieżnej względem μ', wychodzącej z punktu q'_1, po dokonanym ruchu, jest punktem rzutu pionowego szukanej biegunowej, przyjmując zatem rozbieżnę pionową, przecinającą μ' w dwu punktach, z których jednym jest punkt a'_1, kreśląc dalej przez tenże punkt styczną do elipsy, i wyznaczając punkt przecięcia się jej z H′ znajdziemy rzut pionowy m'_1, spodka biegunowej na płaszczyznie H′, lecz ponieważ ta biegunowa jest pionową, więc spodek jej na płaszczyznie poziomej rzutów przypada w punkcie m_1.

Teraz pozostaje nam sprowadzić punkt m_1 do należytego położenia, a to otrzymamy, obracając go naokoło punktu z jako środka dopóty, dopóki nie padnie on w punkcie m na płaszczyznie P. Punkt m tak znaleziony, jest właśnie szukanym punktem przysposobionym.

Należy zauważyć tu, że całe powyższe wykreślenie zasadza się na wyjątkowym kształcie południka powierzchni, gdy tymczasem dla punktu użytecznego rzecz się dzieje wprost przeciwnie t. j. że wyznaczenie tego ostatniego punktu jest zupełnie niezależnem od kształtu południka.

426. Gałęzie nieskończone części przysposobionych na rzucie poziomym. — Zajmiemy się tu tylko powierzchnią pierścieniową ogólną, zachowując wykreślenie podane w poprzedzającym paragrafie.

Wiedząc, że żeby punkt m t. j. spodek biegunowej mógł leżeć w nieskończoności, trzeba, żeby ta biegunowa sama leżała w nieskończoności, zatem ponieważ na jakiejkolwiek płaszczyznie powierzchni stożkowej biegun względnie do krzywej, czyli prostej w nieskończoności, jest środkiem stożkowej i odwrotnie, punkt q winien być umieszczonym we środku elipsy południkowej. Wyznaczywszy miejsce geometryczne rzutów poziomych środków różnych południków, które jest okręgiem koła mającym za środek punkt z, zaś punkt ω za punkt przejścia, znajdziemy w punktach q_2, q_3, przecięcia się tego miejsca geometrycznego z miejscem punktu q, szukane biegunowej; nadto przekonamy się, że proste zq_2, zq_3, na których leżą punkta przysposobione w nieskończoności, mają kierunek asymptot gałęzi przysposobionych rzutu poziomego krzywej dotknięcia.

427. Punkta obwodu pozornego. — Punkta te służą do oddzielenia części widzialnych rzutów krzywej dotknięcia, a przytem mają jeszcze tę własność bardzo ważną, że ich rzuty na płaszczyznę rzutów, na której leży uważany obwód pozorny, są punktami dotknięcia obwodu pozornego w rzucie z rzutem krzywej. W tych dwu celach należy kreślić rzuty krzywej nadzwyczaj starannie, żeby ona w tych punktach dotykała obwodu pozornego w rzucie (§ 342).

Zajmijmy się obecnie wykreśleniem, przyjmując, że wierzchołek s, s' ostrokręgu ma położenie jakiekolwiek (*fig.* 308, tab. XXIX). Aby znaleźć przedewszystkiem punkta poziome obwodu pozornego, przypuśćmy, że mamy dwa walce pionowe, których podstawami są równik i koło szyjne powierzchni danej, i że płaszczyzny styczne do tych walców, a przechodzące przez punkt s, s', dotykają koła szyjnego i równika w punktach szukanych, i nakreślmy następnie przez punkt s styczne do rzutu poziomego koła szyjnego i równika, a znajdziemy, w punktach ich dotknięcia, rzuty poziome γ_1, γ_2, γ_3, γ_4 punktów szukanych, rzuty ich zaś pionowe znajdują się w punktach γ'_1, γ'_2, γ'_3, γ'_4 na rzutach pionowych $a'b'$, $d'f'$ koła szyjnego i równika.

Postępując w sposób zupełnie podobny do powyżej podanego, t. j. kreśląc przez punkt s' styczne do rzutu pionowego południka głównego, znajdziemy rzuty pionowe c'_1, c'_2, c'_3, c'_4 punktów leżących na pionowym obwodzie pozornym, a linije rzutów przechodzące przez znalezione rzuty, wyznaczą na przecięciu się swem z df, odpowiednie rzuty poziome c_1, c_2, c_3, c_4.

428. Zadanie VIII. — *Nakreślić ślad poziomy ostrokręgu opisanego na powierzchni obrotowej.* — Znając powierzchnię obrotową i wierzchołek ostrokręgu, możemy wyznaczyć krzywę dotknięcia ostrokręgu z powierzchnią, a łącząc wierzchołek ostrokręgu z rozmaitemi punktami tak znalezionej krzywej, znajdziemy rzuty tworzących ostrokręgu, których ślady poziome będą właśnie punktami krzywej szukanej.

429. Kreślenie stycznej. — Ślad poziomy płaszczyzny stycznej do powierzchni obrotowej, przechodzącej przez punkt odpowiedni krzywej dotknięcia, jest styczną szukaną.

430. Punkta zwrotu pierwszego rodzaju. — Jeżeli przez wierzchołek ostrokręgu opisanego

nakreślimy styczne do krzywej dotknięcia, i znajdziemy ślad poziomy tej krzywej, to otrzymamy punkta zwrotu pierwszego rodzaju (§ 385).

431. Styczne w punktach zwrotu. — Należy, tak, jak dla jakiegokolwiek punktu, znaleźć ślad poziomy płaszczyzny dotykającej powierzchnię obrotową w odpowiednim punkcie krzywej dotknięcia.

432. Części widzialne. — Przyjąwszy dane i wykreślenia podane na (*fig.* 308, tab. XXIX) w paragrafie **427**, widzimy, że styczne $s\gamma_1$, $s\gamma_2$, $s\gamma_3$, $s\gamma_4$ tworzą poziomy obwód pozorny ostrokręgu opisanego, gdyż powierzchnia obrotowa może być uważaną za obwiniętę ostrokręgu, a wiemy, że obwód pozorny obwijającej w rzucie winien być stycznym do obwodu pozornego obwiniętej (§ 395bis), że zatem styczne uważane tworzą rzeczywiście poziomy obwód pozorny ostrokręgu opisanego.

Rzuty pionowe $s'\gamma'_1$, $s'\gamma'_2$, $s'\gamma'_3$, $s'\gamma'_4$ tworzących, które formują poziomy obwód pozorny ostrokręgu opisanego, dadzą się otrzymać bardzo łatwo, jak to widzimy na naszym rysunku.

Wyznaczywszy ślady poziome tworzących $(s\gamma_1, s'\gamma'_1)$, $(s\gamma_2, s'\gamma'_2)$, $(s\gamma_3\ s'\gamma'_3)$ $(s\gamma_4, s'\gamma'_4)$ znajdziemy punkta śladu ostrokręgu na obwodzie pozornym, a części widzialne już teraz dadzą się wyznaczyć łatwo, szukając, czy punkt dowolnie obrany na krzywej jest widzialnym i zważając, że widzialność jego zmienia się zawsze jak tylko ten punkt opisujący krzywę przechodzi przez obwód pozorny odpowiedni rzutowi uważanemu.

Jako ważną uwagę podajemy, że linije $s\gamma_1$, $s\gamma_2$, etc. winny dotykać śladu poziomego ostrokręgu.

433. Punkta ostateczne w kierunku poprzecznym. — Ponieważ punkta te są temi, w których styczna jest prostopadłą do osi rzutów, zatem styczna, o której mowa, jest śladem poziomym płaszczyzny stycznej do ostrokręgu lub do powierzchni obrotowej, a ztąd wnosimy, że punktami szukanemi są właśnie te w których płaszczyzny styczne prostopadłe do płaszczyzny pionowej rzutów dotykają ostrokręgu, lub inaczej, są to punkta odpowiednie pionowemu obwodowi pozornemu ostrokręgu.

Jeżeli więc wrócimy do figury 308, tablicy XXIX, to znajdziemy, że $s'\alpha\Sigma$ przedstawia jednę z płaszczyzn stycznych prostopadłych do płaszczyzny pionowej rzutów, a punkt jej dotknięcia c_1, c'_1 leży na tworzącej sc_1, $s'c'_1$, której ślad poziomy θ znajduje się na krzywej szukanej. Że zaś ślad poziomy $\alpha\Sigma$ tejże płaszczyzny wyznacza styczną do krzywej w punkcie 0, więc ten ostatni punkt jest rzeczywiście punktem ostatecznym w kierunku poprzecznym, trzy zaś inne dadzą się wyznaczyć w sposób zupełnie taki sam.

434. Punkt najwyższy i punkt najniższy. — Dla wyznaczenia tych punktów, należy szukać punktów odpowiednich płaszczyznom stycznym, dotykającym powierzchni na południku profilu, gdyż te płaszczyzny styczne będąc prostopadłe do płaszczyzny południka dotknięcia, a tem samem równoległe do osi rzutów, mają swe ślady poziome równoległe do tejże osi.

Wykreślenie tych punktów odbywa się za pomocą sposobu podanego w paragrafie **411**.

435. Punkta w nieskończoności. — Asymptoty. — Punkta w nieskończoności leżą na tworzących ostrokręgu opisanego, a równoległych do płaszczyzny poziomej rzutów; te wyznaczają się wprost sposobem przecięć, gdyż wystarcza przeciąć powierzchnię obrotową płaszczyzną poziomą H', przechodzącą przez wierzchołek s, s' ostrokręgu (*fig.* 309, tab. XXIX), i nakreślić z tegoż punktu styczne do krzywej przecięcia.

Ponieważ płaszczyzna H' przecinając powierzchnię daje na przecięcie równoleżnik, którego punktem przejścia jest punkt a, a' a środkiem punkt mający za rzut poziomy punkt z, więc kreśląc z tego ostatniego punktu jako środka, a promieniem równym za, okrąg koła, znajdziemy rzut poziomy równoleżnika; rzuty zaś poziome tworzących poziomych będą przedstawione przez styczne sc, sc_1, do rzutu poziomego tego równoleżnika a przechodzące przez punkt s.

Istnienie na naszym rysunku tworzących równoległych do płaszczyzny poziomej rzutów, jest dowodem istnienia gałęzi nieskończonych śladu poziomego ostrokręgu opisanego.

Zajmijmy się obecnie szukaniem asymptot. Ponieważ asymptoty są to styczne w punktach nieskończenie oddalonych, które właśnie wyznaczyliśmy, t. j. ślady poziome płaszczyzn stycznych do powierzchni obrotowej, a przechodzące przez punkta płaszczyzny H', których rzutami poziomemi są punkta c, c_1, i ponieważ nadto te ślady są równoległe do sc, sc_1, będą więc one wyznaczone skoro tylko wyznaczymy jeden z punktów każdej z nich. W tym celu, przez punkt a, a' nakreślmy najprzód styczną do południka obrazu i znajdźmy jej ślad θ; następnie obracajmy ten ślad naokoło z, z' dopóty, dopóki nie znajdzie on się na płaszczyźnie południka przechodzącego przez punkt c lub c_1, a znajdziemy jeden z punktów t lub t_1, poczem kreśląc wreszcie z każdego z tych punktów proste $t\alpha, t_1\alpha_1$ odpowiednio równoległe do sc, sc_1, otrzymamy asymptoty szukane.

436. Sposób rzutów zbieżnych. — Wyznaczenie jakiegokolwiek punktu śladu poziomego ostrokręgu opisanego na powierzchni obrotowej, podane w paragrafie 428, wymaga poprzedniego wyznaczenia krzywej dotknięcia tego ostrokręgu. Wykreślenie to przedstawiając wiele trudności, będąc zbyt długie i bardzo subtelne może być zastąpionem przez wykres mniej ścisły pod względem rysunkowym, lecz dający się wykonać z nadzwyczajną szybkością, a nadewszystko przez wykres mający tę zaletę, że pozwala znaleźć ślad ostrokręgu niezależnie od znajomości krzywej dotknięcia, a tę ostatnią w sposób bardzo szybki.

Oznaczmy przez z, z' rzuty osi powierzchni obrotowej, przez γ' jednę z linij obwodu pozornego w rzucie pionowym, i przez s, s' wierzchołek ostrokręgu opisanego (*fig.* 310, tab. XXIX). Przyjmijmy punkt s, s' za punkt widzenia, a w takim razie krzywa której szukamy, będzie w rzucie poziomym obwodem pozornym powierzchni obrotowej; że zaś rzut obwodu pozornego jest obwijającą rzutów tworzących powierzchni (§ 395ter), więc, jeżeli weźmiemy za tworzące powierzchni jej równoleżniki, a środek ich rzutów leży w punkcie s, s', to dostatecznem będzie nakreślić rzuty zbieżne tych równoleżników na płaszczyźnie poziomej rzutów i wziąć ich obwijającę. Zróbmy np. to wykreślenie dla równoleżnika przechodzącego przez punkt a, a'; otóż jego rzutem zbieżnym jest okrąg koła, którego środek Ω otrzymamy, rzucając stożkowo środek ω', z równoleżnika, a punkt przejścia A robiąc rzut w tymże układzie punktu a, a'. Znając to, możemy nakreślić okrąg koła, o którym mowa.

Można byłoby wykreślić rzut zbieżny równoleżnika, wyznaczając rzut zbieżny środka i promień rzutu, który widocznie przedstawionym jest przez prostę $A'_1\Omega'$, a w ten sposób uniknąć kreślenia prostych AA', sa, aa'. Korzystając z tego skrócenia, znaleźliśmy środki $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ i promienie $\Omega'_1A'_1, \Omega'_2A'_2, \Omega'_3A'_3$ rzutów stożkowych trzech innych równoleżników, wykreśliliśmy te równoleżniki i znaleźliśmy obwijającę μ, μ_1 rzutów zbieżnych różnych równoleżników, która jest śladem poziomym ostrokręgu szukanego.

437. *Zastosowanie sposobu rzutów zbieżnych do kreślenia krzywej dotknięcia powierzchni obrotowej z ostrokręgiem opisanym, którego wierzchołek jest znany.* — Jeżeli zachowamy figurę poprzedzającego paragrafu i weźmiemy punkt dotknięcia M obwijającej z jedną z obwiniętych, to punkt ten może być uważanym jako rzut zbieżny jednego z punktów krzywej dotknięcia. Jeżeli teraz znajdziemy rzut M' punktu M i wykreślimy proste sM, s'M', to otrzymamy rzucającę stożkową tego punktu, a punkt m, m' spotkania się jej z odpowiednim równoleżnikiem przedstawi właśnie szukany punkt potknięcia. Rysunek przedstawia to sprawdzenie, że oba rzuty punktu m, m' winny leżeć na jednej linii rzutów.

Symetryja figury daje możność znalezienia lub sprawdzenia drugiego punktu krzywej, znając

jeden. Wykreślenie tu podane jest wprawdzie bardzo szybkie, jednakże jest ono mało ścisłem wskutek niepewności gdzie się rzeczywiście znajdują punkta dotknięcia obwijającej z rozmaitemi obwiniętemi.

438. Zadanie IX. — *Nakreślić rzuty krzywej dotknięcia powierzchni obrotowej z walcem opisanym a równoległym do kierunku danego.* — Jeżeli nakreślimy, równolegle do prostej danej, płaszczyzny styczne do obwiniętych stożkowych, walcowych lub kulistych, które dotykają powierzchni obrotowej podług równoleżników lub południków, to wyznaczymy rzuty punktów krzywej dotknięcia leżące na równoleżnikach lub południkach wziętych pod uwagę, a tem samem i rzut samej krzywej szukanej.

Przy użyciu sposobu obwiniętych stożkowych wykreślenie odbywa się jak następuje :

Pierwsze wykreślenie. — Oznaczmy przez z, z' rzuty osi powierzchni obrotowej (*fig.* 311, tab. XXX), przez μ' rzut pionowy południka głównego, przez $(ab, a'b')$ i (s, s') rzuty podstawy i wierzchołka obwiniętej stożkowej zaś przez d, d' rzuty prostej równoległej do tworzących walca a przechodzącej przez punkt σ', z leżący na osi.

Przesuńmy obwiniętę równolegle do niej samej tak, żeby wierzchołek s, s' przypadł w punkcie z, σ', to rzutem prostej równoległej do tworzącej $s'a'$, za, będzie prosta $s'h'$, za, a ślad jej poziomy znajdzie się w punkcie h; jeżeli więc teraz, z punktu z jako środka promieniem równym zh zakreślimy okrąg koła, to znajdziemy na tejże płaszczyznie rzutów ślad ostrokręgu. Do tak znalezionego ostrokręgu należy nakreślić przez prostę d, d' płaszczyzny styczne; ponieważ ślad tej prostej znajduje się w punkcie 0, więc zamiast kreślić przez ten punkt styczne do podstawy ostrokręgu, wystarczy nakreślić na prostej $0z$ jako średnicy okrąg koła, a punkta przecięcia się jego z podstawą ostrokręgu wyznaczą ślady t, t_1 tworzących, za pomocą których znajdziemy rzuty zt, zt_1 tych tworzących. Zważywszy obecnie, że podnosząc całą figurę, rzuty poziome tworzących ostrokręgu nie zmienią swego położenia, znajdziemy na przecięciu się rzutu poziomego równoleżnika obranego z rzutami poziomemi tworzących dotknięcia, rzuty m, m_1 punktów szukanych, na tejże płaszczyznie rzutów.

Rzuty pionowe tychże punktów otrzymamy, kreśląc przez m, m_1 linije rzutów do przecięcia się ich z prostą $a'b'$ w punktach m', m'_1.

Ponieważ, pomimo tego uproszczenia, kreślenie rysunku jest zawsze bardzo zmudne, więc dla równoleżników leżących w blizkości równika i koła szyjnego należy szukać sposobu łatwiejszego i więcej dogodnego.

439. Drugie wykreślenie. — *Uproszczenie sposobu obwiniętych stożkowych dla cech blizkich koła szyjnego i równika.* — Postępowanie w tym przypadku jest takież samo jak podane w paragrafie **416**, z tą tylko różnicą, że wierzchołek ostrokręgu znajduje się w nieskończoności w kierunku danym.

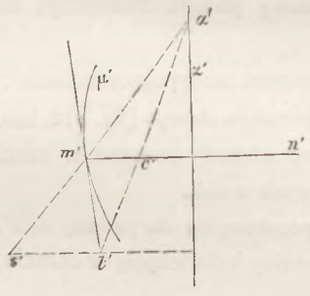

Fig. i_{10}.

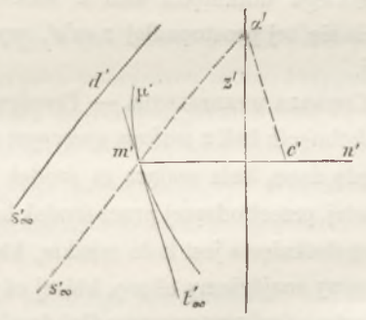

Fig. j_1.

Podamy tu obok siebie oba wykreślenia. Figura i_{10} odnosi się do ostrokręgu opisanego a figura j_1 do walca; — w tem co nastąpi, będzie tylko mowa o rzutach pionowych.

Przypuśćmy, że ruchem obrotowym naokoło osi powierzchni obrotowej, sprowadziliśmy wierzchołek ostrokręgu figury i_{10} i prostę daną figury j_1 na płaszczyznę obrazu, przechodzącą przez oś, przypuśćmy nadto, że s' jest rzutem pionowym wierzchołka zaś d' rzutem pionowym prostej, dla której rzut s'_∞ wierzchołka leży w nieskończoności na prostej d'. Zróbmy na obu figurach rzut $m'n'$ równoleżnika, nakreślmy prostę $s'm'$ lub $s'_\infty m'$, lub jeszcze co na jedno wychodzi dla figury j_1, nakreślmy przez punkt m' równoległę $m's'_\infty$ do d', i wyznaczmy punkt α' przecięcia się tej ostatniej prostej z osią z'; jeżeli teraz nakreślimy styczne $m't'$, $m't'_\infty$ i znajdziemy punkta t', t'_∞ spotkania się ich z prostopadłą do z' przechodzącą przez punkt s' lub s'_∞, a nadto, jeżeli połączymy punkt t' lub t'_∞ z punktem α' linią prostą, i oznaczymy punkt c' przecięcia jej z prostą $m'n'$, to punkt c' tak znaleziony będzie właśnie punktem szukanym.

440. Trzecie wykreślenie. — Oznaczmy przez z' rzut pionowy osi (fig. j_2), przez μ', $m'n'$, d' rzut na tęż płaszczyznę rzutów, południka obrazu, równoleżnika i kierunku danego, sprowadzonego jak poprzednio do położenia równoległego do płaszczyzny pionowej rzutów.

Używając obwiniętej kulistej, dotykającej powierzchni podług cechy mającej za rzut $m'n'$, znajdziemy, że rzut pionowy jej środka leży na przecięciu się ω', osi z' z normalną do μ', przechodzącą przez punkt m'. Jeżeli z punktu ω' wyprowadzimy prostopadłę do d', to otrzymamy rzut pionowy

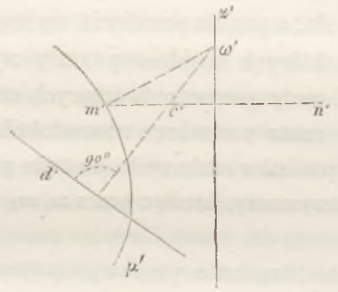

Fig. j_2.

koła wielkiego dotknięcia kuli z walcem opisanym na niej w kierunku danym, zaś punkt c' przecięcia się tej prostopadłej z $m'n'$, wyznaczy nam rzut pionowy punktu należącego do krzywej szukanej.

441. Czwarte wykreślenie. — Przedewszystkiem należy rozwiązać następujące zadanie : *Nakreślić krzywę dotknięcia kuli z walcem opisanym na niej, równoległe do kierunku danego* (*fig.* 312, tab. XXX). — Niech będą dane, kula mająca za środek punkt o, o' przez swe obwody pozorne w rzucie, i rzuty d, d' prostej przechodzącej przez środek kuli w kierunku tworzących walca.

Krzywą dotknięcia jest koło wielkie, którego płaszczyzna jest prostopadłą do prostej d, d', jako jej rzut pionowy znajdziemy elipsę, której oś wielka jest rzutem średnicy koła leżącej w obrazie, zaś mała oś jest rzutem średnicy prostopadłej do pierwszej (§ **136**).

Średnica obrazu ma za rzut prostę $b'c'$, prostopadłą do d', a przechodzącą przez punkt o', i kończy się na obwodzie pozornym w rzucie pionowym kuli; druga zaś oś jest rzutem pionowym średnicy koła dotknięcia, leżącej na płaszczyznie przechodzącej przez punkt o' a prostopadłej do prostej $b'c'$, którato płaszczyzna jest płaszczyzną rzucającą pionowo prostę D; wreszcie średnica, której szukamy rzutu, jest prostopadłą do tejże prostej D.

Jeżeli teraz zrobimy kład na płaszczyznę obrazu, przechodzącą przez środek kuli, płaszczyzny rzucającej prostę D na płaszczyznę pionową rzutów, i figury całej, która na niej leży, to znajdziemy, że punkt o' pozostaje niezmiennym, zaś punkt jakikolwiek a, a' prostej d, d' a w dowolnem na niej położeniu, przypada na prostopadłej do d' przechodzącej przez punkt a' i w odległości $a'A_1$ od tego ostatniego punktu równej $\alpha a'$, skutkiem czego kreśląc prostę $o'A_1$, otrzymamy kład szukany prostej d, d', zaś kład średnicy, której szukamy rzutów, przypadnie na prostej SS_1 prostopadłej do $o'A_1$.

Wracając teraz do pierwotnego położenia znajdziemy, że prosta SS_1 będzie miała swe końce S, S_1 w punktach s', s'_1, które są właśnie wierzchołkami szukanemi.

Znając osie elipsy, potrafimy ją nakreślić.

Części widzialne dadzą się wyznaczyć zważając, że S i A_1, leżąc z jednej strony osi obrotu d' na kładzie, leżą z tejże samej strony w przestrzeni po podniesieniu ich z kładu, a ponieważ rzut poziomy punktu A znajduje się w punkcie a, t. j. w tylnej części rzutu poziomego pq obwodu pozornego pionowego, więc i sam punkt będzie z tyłu tegoż obwodu; w tychże samych warunkach znajduje się także wierzchołek, rzut jego bowiem jest w punkcie s', wreszcie punkta c' i b' są rzutami pionowemi punktów leżących na obwodzie pozornym tegoż samego nazwiska, czyli że części widzialne są właśnie te, które zostały przedstawione na naszym rysunku. Podobne wykreślenie do poprzedzającego, moglibyśmy wykonać na płaszczyznie poziomej rzutów.

Zauważyć także należy, że dwie średnice prostokątne koła mają za rzut dwie średnice sprzężone elipsy odpowiadającej (§ 136), a ztąd wypada, że rzuty poziome dwu średnic uważanych poprzednio wyznaczone są przez dwie średnice sprzężone w rzucie poziomym.

Dla wykreślenia tych średnic sprzężonych, nakreślmy przez punkta b' i c' dwie linije rzutów przecinające prostę pq w punktach ostatecznych b i c, nakreślmy nadto z punktów s', s'_1 linije rzutów, i odetnijmy na nich z jednej i z drugiej strony prostej pq części σs, $\sigma_1 s_1$ równe oddaleniom $s'S$, s'_1S_1 końców średnicy, której kład znajduje się na SS_1 w płaszczyznie obrazu środka o, o', a otrzymamy bc i ss_1 czyli dwie średnice sprzężone w rzucie poziomym.

Części widzialne znaleźliśmy, wyznaczając punkta u i v rzutu poziomego krzywej dotknięcia, które leżą na obwodzie pozornym tegoż samego nazwiska, wyznaczają się zaś za pomocą stycznych do rzutu poziomego obwodu pozornego kuli, branych w kierunku prostej d.

Wróćmy obecnie do czwartego sposobu kreślenia rzutów krzywej dotknięcia powierzchni obrotowej z walcem na niej opisanym.

Oznaczmy przez z, z' oś powierzchni obrotowej (*fig.* 313, tab. XXX), przez μ' rzut pionowy jednej z krzywych tworzących południk obrazu, a przez d, d' kierunek tworzących walca. Przypuśćmy, że rzut pionowy obwodu pozornego ε' kuli, o środku i promieniu dowolnym, jakoteż rzut ε'_1 krzywej dotknięcia z walcem równoległym do d, d', został wykreślonym, w tym celu bowiem wystarcza przenieść na naszą figurę część wykreślenia podaną na figurze poprzedzającej. Wyznaczmy teraz punkt krzywej dotknięcia leżący na równoleżniku ab, $a'b'$ dowolnie obranym na powierzchni danej, za pomocą sposobu obwiniętych kulistych.

Obwijająca, która dotyka powierzchni obrotowej podług obranego równoleżnika, ma za środek punkt, którego rzuty znajdują się jeden w punkcie z, drugi zaś w punkcie ω' przecięcia się z' z normalną do krzywej μ', nakreśloną przez punkt a'.

Jeżeli przedstawimy sobie walec opisany na uważanej obwijającej kulistej w kierunku prostej d, d', to dla znalezienia go dostatecznem będzie wyznaczyć przecięcie się krzywej dotknięcia z cechą ab, $a'b'$ (§ 394).

Ponieważ wiemy, że z powodu podobieństwa (homothétie) dwu kul jakichkolwiek, walce na nich opisane muszą być także podobnemi, że więc i rzuty pionowe krzywych dotknięcia walców opisanych na dwu kulach naszego rysunku, a w kierunku prostej d, d', muszą być takiemiż, zatem należy szukać punktów spotkania się prostej $a'b'$ z elipsą podobną do ε'_1, a odnoszącą się do kuli obwiniętej wybranej.

Dla uniknienia kreślenia nowej elipsy, co uczyniłoby rysunek niepraktycznym, niemal nie do wykonania, znajdźmy bok odpowiedni prostej $a'b'$, kreśląc przez punkt o' promień $o'\alpha'$ równoległy do promienia $\omega'a'$ obwijającej, przez punkt zaś α' prostę $\alpha'\beta'$ równoległą do $a'b'$. Ponieważ punkta γ', γ'_1 przecięcia się linii ε'_1 z $\alpha'\beta'$ są odpowiedniemi punktów szukanych, zatem nakreśliwszy prostę $o'\gamma', o'\gamma'_1$ i do nich równoległe przechodzące przez punkt ω', znajdziemy w punktach przecięcia się tych ostatnich prostych z prostą $a'b'$, rzuty pionowe c', c'_1 dwu punktów krzywej dotknięcia, poczem linije rzutów nakreślone przez każdy z nich, wyznaczą ostatecznie na przecięciu się swem z rzutem poziomym obranego równoleżnika, t. j. w punktach c, c', rzuty poziome punktów dotknięcia.

Równoleżniki graniczne mają za rzuty pionowe proste odpowiednie stycznym poziomym krzywej ε'_1.

Pozostaje nam teraz zająć się wyznaczeniem punktów nadzwyczajnych krzywej dotknięcia walca opisanego na powierzchni obrotowej.

442. Punkt najwyższy i najniższy. — Równoleżniki graniczne. — Chociaż zadanie to zostało już rozwiązane w poprzedzającym paragrafie, podamy tu jednakże rozwiązanie jego wprost to jest niezależnie od czwartego sposobu wykreślenia. I tak oznaczmy przez z, z' oś powierzchni obrotowej (*fig.* 314, tab. XXX), przez μ' rzut pionowy południka obrazu, zaś przez d, d' kierunek dany. Ponieważ możemy przyjąć bez żadnej przeszkody, że prosta d, d' spotyka oś z, z', więc płaszczyzna pionowa rzucająca tę prostą jest płaszczyzną symetryi krzywej dotknięcia, a punkta leżące na tej ostatniej i zarazem na płaszczyźnie, na zasadzie paragrafu 417 będą punktami szukanemi. Dla wyznaczenia ich użyjmy sposobu przecięć, a zatem przetnijmy powierzchnię płaszczyzną pionową rzucającą prostę d, d', i nakreślmy do południka przecięcia styczne równoległe do tej prostej, to w punktach dotknięcia się tych stycznych będą właśnie punkta szukane.

Żeby uniknąć kreślenia nowej krzywej, sprowadźmy płaszczyznę sieczną do położenia równoległego do płaszczyzny pionowej rzutów, a to obracając ją naokoło osi z, z'; wskutek tego południk przecięcia przypadnie na południku danym, zaś prosta d, d', której ślad poziomy θ, θ' przypadnie w θ_1, θ'_1, będzie miała za nowy rzut pionowy prostę $s'\theta'_1$, gdyż punkt s', z pozostaje niezmiennym.

Jeżeli teraz nakreślimy do krzywej μ' styczne równoległe do prostej $s'\theta'_1$, to jeden z punktów dotknięcia m_1, m'_1 przyjdzie, po sprowadzeniu figury do pierwotnego położenia, do punktu m, m', który jest właśnie najwyższym punktem szukanym.

Punkt najniższy znaleźlibyśmy w sposób zupełnie podobny podanemu powyżej, a równoleżniki graniczne są właśnie te, które przechodzą przez dwa punkta właśnie znalezione.

443. Punkta obwodu pozornego. — Wykreślenie podane dla ostrokręgu opisanego na powierzchni obrotowej (§ 427), będąc niezależnem od położenia jego wierzchołka, może być zastosowanem do walca, a więc dla znalezienia punktów szukanych, dostatecznem będzie nakreślić, równolegle do każdego z rzutów prostej danej, styczne do obwodu pozornego w rzucie na płaszczyznę rzutów odpowiadającą.

444. Punkta przysposobione na rzucie pionowym. — Punkta te znajdziemy, jeżeli tworzące walca są równoległemi do płaszczyzny pionowej rzutów, postępując jak dla ostrokręgu opisanego (§ 424 i 425).

445. Zadanie X — *Nakreślić ślad poziomy walca opisanego w kierunku danym na powierzchni*

obrotowej. — Wykreślenie podane w paragrafie 428 dla ostrokręgu opisanego, stosuje się w zupełności do walca. Otóż, nie powtarzając rozumowań tam podanych, zwrócimy uwagę, że sposób *rzutów walcowych* zastosować tu można ze szczególną łatwością, gdyż rozmaite równoleżniki obrane na powierzchni, rzucają się ukośnie na płaszczyznę poziomą rzutów w rzeczywistej wielkości, a że wybierając je w ten sposób, żeby one były równooddalonemi od siebie, środki rzutów ukośnych będą także od siebie równooddalone, zatem dla ich łatwego znalezienia wystarczy zrobić rzut środków ostatecznych równoleżników, i podzielić następnie prostę łączącą te rzuty na tyle równych części, ile ich jest na osi powierzchni obrotowej pomiędzy odpowiedniemi punktami.

446. Zadanie XI. — *Nakreślić rzuty krzywej dotknięcia powierzchni pierścieniowej ogólnej, mającej za oś obrotu prostę równoległą do jednej z osi krzywych południkowych, z walcem opisanym na niej w kierunku danym. — Sposób Dunesme'a.* — Oznaczmy przez z oś powierzchni obrotowej, a przez μ jeden z południków (fig. j_3). Jeżeli przeniesiemy krzywę μ protopadle do z_1

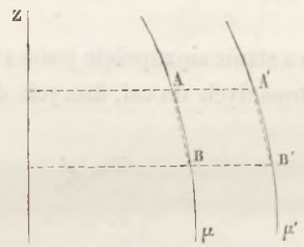

Fig. j_3.

to jest tak, żeby wszystkie punkta krzywej μ przesunęły się o jednę i tęż samą długość prostopadle do z, to znajdziemy dla południka nowe położenie μ'_1 i dowiedziemy, *że styczne do krzywych w dwu punktach* A, A'_1, *odpowiadających sobie są równoległe do siebie*. W tym celu, obierzmy dwa punkta odpowiadające B, B'_1 bardzo blizkie pierwszych, i nakreślmy cięciwy AB, A'B', a znajdziemy, na zasadzie już samego tworzenia się krzywej μ_1, że proste AA'_1, BB'_1 są równe i równoległe, czyli że figura $ABB'_1A'_1$ jest równoległobokiem, ztąd zaś, że cięciwy AB, $A'_1B'_1$ są także równe i równoległe. Ponieważ własność ta jest zawsze prawdziwą, gdy punkt B się zbliża do punktu A, będzie więc ona jeszcze prawdziwą w granicy, to jest, że styczne do krzywych południkowych przechodzące przez punkta A i A'_1 są do siebie równoległe. Widoczną jest rzeczą, że punkta jednej powierzchni tak są połączone z punktami drugiej, jak punkta krzywej μ są połączone z punktami krzywej μ'_1, t. j., że leżą one, brane po dwa, na prostopadłych do z, a w odległości równej długości przebieżonej przez krzywę μ aż do przyjęcia położenia μ'_1.

Okażmy teraz, że w dwu punktach odpowiednich płaszczyzny styczne do powierzchni są równoległe. Rzeczywiście, w punktach bowiem uważanych styczne do równoleżników leżą na jednej płaszczyznie i są prostopadłe do prostej łączącej te punkta z sobą, a która to prosta jest promieniem wspólnym równoleżników, zkąd wypada że styczne te są równoległe, a ponieważ oprócz tego styczne do południków przechodzące przez też punkta są także równoległe, jak to widzimy z poprzedniego dowodzenia, więc i płaszczyzny styczne w tychże punktach muszą być równoległe.

447. *Okażmy teraz, że jeżeli na dwu powierzchniach obrotowych i w tymże samym kierunku, opiszemy dwa walce, to znajdziemy dwie krzywe dotknięcia takie, że każdemu punktowi jednej z nich odpowiada punkt drugiej leżący na prostopadłej do osi, przechodzącej przez pierwszy punkt, a w odległości od tejże osi*

równej przesunięciu się punktów południka.—Rzeczywiście, uważmy bowiem jeden z punktów dotknięcia walca opisanego na jednej powierzchni obrotowej, t. j., punkt dotknięcia płaszczyzny stycznej równoległej do kierunku tworzących walca, to temu punktowi odpowie na drugiej powierzchni, i na prostopadłej do osi nakreślonej przez pierwszy punkt, inny punkt, w którym płaszczyzna styczna do drugiej powierzchni będzie równoległą do pierwszej płaszczyzny stycznej, a tem samem równoległą do tworzących walca, to jest, że punkt odpowiedni punktowi uważanemu na pierwszej powierzchni obrotowej, będzie leżał na krzywej dotknięcia walca opisanego na drugiej.

448. *Okażmy nareszcie, że rzuty krzywych dotknięcia dwu powierzchni obrotowych, wziętych pod uwagę, z walcami opisanemi w jednym kierunku, na płaszczyznę prostopadłą do osi wspólnej, są odpowiednio konchoidami jedna drugiej.* —Mając krzywę C daną (fig. j_4) i kreśląc przez punkt stały o proste rozbieżne, na których odcinamy długości równe z jednej i z drugiej strony punktów spotkania się ich z krzywą C, to jest, na rozbieżnych przedstawionych na figurze biorąc długości $AA_1 = AA'_1 = BB_1 = BB'_1$, etc., otrzymamy z połączenia punktów $A_1B_1D_1$.... A'_1, B'_1, D'_1.... krzywe zwane konchoidami krzywej C.

Własność ta jest niemal widoczną a stanie się zupełnie jasną zważywszy, że krzywe dotknięcia, brane po dwie leżą odpowiednio na prostopadłych do osi, których długości są równe wspólnemu przesu-

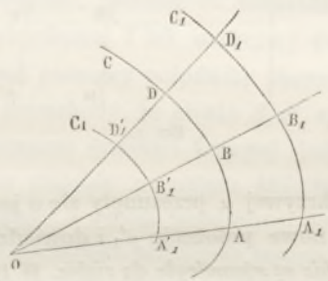

Fig. j_4.

nięciu się punktów południka. Ponieważ przedłużenia tych prostopadłych równe wspólnemu przesunięciu tworzą, w rzucie na płaszczyznę prostopadłą do osi, proste rozbieżne przechodzące przez spodek osi na tejże płaszczyznie, a nadto, ponieważ te prostopadłe do osi są równe sobie i równoległe do płaszczyzny rzutów, więc muszą one być także sobie równe w rzucie, czyli że twierdzenie jest dowiedzionem.

449. **Styczna do konchoidy jakiejkolwiek krzywej.** — Niech będzie C krzywą (fig, j_5), zaś o punktem zbiegu rozbieżnych, na których, dla utworzenia konchoidy, odcinamy długość stałą λ licząc od krzywej C i po obu jej stronach.

Oznaczmy przez o biegun, weźmy za oś biegunową jednę z rozbieżnych ax i dowiedźmy, że w trzech punktach A, A_1, A'_1 jednej rozbieżnej oA, podnormalne krzywych są sobie równe. Ponieważ podnormalna w punkcie A krzywej C jest częścią oN prostopadłej do promienia wodzącego, a przechodzącej przez biegun i zawartej pomiędzy tym biegunem i normalną w punkcie A, więc mamy dowieść, że normalne do krzywych przedstawionych rysunkiem, a przechodzące przez punkta A_1, A'_1 zbiegają się w jednym punkcie N na prostopadłej do promienia wodzącego oA, a przechodzącej przez punkt o.

Niech

$$\rho = f(\omega)$$

będzie równaniem krzywej C, to równanie jej konchoidy przyjmie kształt następujący :

$$\rho = f(\omega) \pm \lambda.$$

Ponieważ równanie podnormalnej jest pochodną ilości ρ, jeżeli przyjmiemy ω za zmienną niezależną, a nadto, ponieważ dwie funkcye ω, które wyznaczają wartości dla ρ różnią się tylko od siebie ilością stałą, więc ich pochodne a tem samem i podnormalne są sobie równe, co należało dowieść.

Własność ta służy do nakreślenia stycznej do konchoidy w punkcie odpowiednim, jeżeli umiemy nakreślić styczną w danym punkcie krzywej.

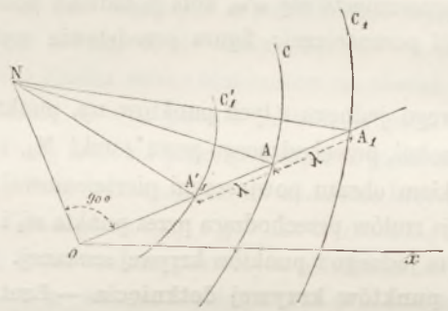

Fig. 33.

450. Zadanie XI. — *Znaleźć rzuty krzywej dotknięcia powierzchni pierścieniowej z walcem opisanym na niej w kierunku danym* (*fig.* 315, tab. XXX). — Jeżeli przyjmiemy, że oś powierzchni pierścieniowej z, z' jest pionową i przedstawimy rysunkiem obwody pozorne tej powierzchni na obu płaszczyznach rzutów, jakoteż rzuty d, d' prostej równoległej do tworzących walca, a przechodzącej przez środek ω', z' powierzchni, to przesuwając południk, który tworzy powierzchnię pierścieniową, tak, żeby środek jego przypadł w środku ω', z powierzchni pierścieniowej, południk ten utworzy, obracając się naokoło osi z, z', kulę i krzywę dotknięcia walca opisanego na niej w kierunku prostej d, d', i będzie miał za rzut poziomy elipsę (§ 441). Jeżeli teraz zastosujemy sposób Dunesme'a tak do powierzchni pierścieniowej jakoteż do kuli, to znajdziemy (§ 447), *że rzut krzywej dotknięcia powierzchni pierścieniowej z walcem opisanym na niej, na płaszczyznę prostopadłą do osi, będzie konchoidą elipsy.*

Zróbmy należne wykreślenie.

Ponieważ rzut poziomy kuli pomocniczej jest okręgiem koła γ, mającym za środek z, a promień równy promieniowi koła południka powierzchni pierścieniowej, więc dla nakreślenia rzutu, na tejże samej płaszczyznie rzutów, krzywej dotknięcia się jej z walcem, zastosujmy wykreślenie podane w paragrafie powyżej podanym. Ponieważ średnica S_1S_2 prostopadła do d jest osią wielką elipsy szukanej, zaś mała jej oś jest rzutem poziomym średnicy kuli, leżącej na płaszczyznie pionowej, rzucającej prostę d, d' i prostopadłej do niej, otrzymamy więc ją robiąc kład, prostej d, d' na płaszczyznę poziomą przechodzącą przez środek ω', z kuli. Kład, o którym mowa, znajdziemy, łącząc punkt nieruchomy z z punktem H_1 otrzymanym z odcięcia od punktu h na prostopadłej do prostej d, długości hH_1 równej znamieniu $\omega'\omega_1$ środka kuli. Jeżeli teraz nakreślimy średnicę S_3S_4 prostopadłą do zH_1, i podniesiemy z kładu punkt S_3 do s_3, zaś punkt S_4 do s_4, to otrzymamy dwa pozostałe wierzchołki elipsy szukanej. Znając w ten sposób cztery wierzchołki elipsy, możemy ją nakreślić sposobem znanym, który daje odrazu rozmaite punkta krzywej i ich normalne; dosyć bowiem będzie w tym celu odciąć na prostej

przedstawionej na rysunku długości bm, am równe połowie osi wielkiej zs_1 i połowie osi małej zs_3 elipsy, a posuwając następnie punkt b na małej osi, zaś punkt a na wielkiej, i zaznaczając dostateczną liczbę położeń punktu m, otrzymamy punkta, które właśnie należeć będą do elipsy.

Jeżeli chcemy nakreślić normalnę w punkcie np. m, to należy zaznaczyć odpowiednie położenia punktów przesuwających się a i b, i na zasadzie twierdzenia P. Chasles'a, które powiada, że prostopadłe nakreślone do odpowiednich osi przez punkta a i b przecinają się w środku chwilowym wirowania c prostej ruchomej, znajdziemy normalnę elipsy w punkcie m, łącząc punkt m z punktem c liniją prostą.

Wykreśliwszy elipsę, należy odciąć na rozbieżnych, wychodzących z punktu z i po obu stronach tej krzywej, długości równe przesunięciu się $\omega'\omega_1$ koła południka powierzchni pierścieniowej, dla utworzenia koła południka kuli pomocniczej; figura przedstawia wykreślenie dwu takich punktów m_1, m_2.

Dla znalezienia rzutu pionowego jednego z tych punktów np. punktu m_2, należy nakreślić rzut poziomy równoleżnika powierzchni, przechodzącego przez punkt M_2, i oznaczyć przecięcie się jego w punktach μ_2, μ'_2 z południkiem obrazu powierzchni pierścieniowej; otrzymamy ztąd rzut pionowy $\mu'_2\mu'_3$ równoleżnika, i linija rzutów przechodząca przez punkta m_2 i m'_2 przetnie $\mu'_2\mu'_3$ w punkcie m'_2, który jest rzutem pionowym jednego z punktów krzywej szukanej.

451. Styczna w jednym z punktów krzywej dotknięcia. — Rzut poziomy stycznej znajdziemy sposobem podanym w paragrafie **449**, to jest, po nakreśleniu normalnej mc do elipsy w punkcie m, należy nakreślić przez punkt z prostopadłę do promienia wodzącego zm, i wyznaczyć punkt jej spotkania się N z mc, a ten da nam drugi koniec podnormalnej zN, wspólnej w trzech punktach m, m_1, m_2, dla krzywej i dla jej konchoidy; kreśląc więc normalne Nm_1, Nm_2 do konchoidy i prostopadłe do nich m_1t_1, m_2t_2, te ostatnie będą właśnie rzutami poziomemi stycznych. Znając rzuty poziome z łatwością znajdziemy rzuty pionowe, dostatecznem bowiem będzie, dla rzutu pionowego stycznej w punkcie m_2, m'_2, nakreślić płaszczyznę styczną $P_1\alpha P'_1$ w punkcie μ_2, μ'_2 i obracać ją naokoło z, z' dopóty, dopóki jej dotknięcie μ_2, μ'_2 nie zejdzie się z punktem m_2, m'_2. Podczas tego obrotu ślad poziomy P_1 pozostanie stycznym do okręgu koła, mającego za środek punkt z, a którego promień jest równym odległości prostej zp_1 od P_1; punkt p_1 przypadnie w punkcie p, zaś P_1 w P; a ponieważ styczna szukana leży na płaszczyznie stycznej w punkcie m_2, m'_2, więc jej ślad poziomy przypadnie na prostej P, i nadto ponieważ musi ona należeć do prostej m_2, zatem musi się znaleźć w punkcie ich wspólnego przecięcia to jest w punkcie θ, θ', czyli, że rzut pionowy stycznej będzie przedstawiony przez prostę łączącą punkt θ' z punktem m'_2.

452. Punkta na obwodzie pozornym. — Punkta te wyznaczają się sposobem ogólnym (§ **443**) a więc dla obwodu pozornego w rzucie poziomym, szukając punktów dotknięcia d, e, f, stycznych do tego obwodu, a równoległych do d; zostały one znalezione na naszym rysunku w sposób łatwy, wyznaczając punkta spotkania się obwodu z prostopadłą do d, przechodzącą przez punkt z, i podnosząc je do punktów d', e', f', g'.

Wreszcie dla obwodu pozornego w rzucie pionowym, szukając punktów przecięcia się południków tego obwodu z prostopadłemi do kierunku d', a przechodzącemi przez ich środki ω'_2, ω'_3; tak znalezione punkta są k', l', n', q', których rzuty poziome przypadają w punktach odpowiednich k, l, n, q.

453. Punkta na południku obrazu. — Rzuty ich poziome w_1, w_2, w_3, w_4, znajdują się sposobem ogólnym, rzuty zaś pionowe odpowiadające winny się zchodzić brane po dwa, i tworzyć tylko dwa punkta w'_1, w'_2, ponieważ elipsa, której rzutem jest $s_1s_3s_2s_4$, ma tylko dwa punkta w płas-

czyznie profilu, a ich odpowiadające na powierzchni pierścieniowej leżą na dwu prostopadłych do z, z', zawierających każda dwa punkta krzywej szukanej; a ponieważ nadto te prostopadłe do osi są także prostopadłe do płaszczyzny pionowej rzutów, więc w rzucie pionowym dają one tylko dwa punkta, dla wyznaczenia których używamy zazwyczaj sposobu ogólnego przyjętego dla jakiegokolwiek punktu m_2, posługując się rzutami poziomemi.

Napotykamy jednakże często przypadek szczególny, dla którego to wykreślenie jest bardzo prostem, a który ma miejsce, wtenczas gdy proste d, d' są nachylone do osi rzutów xy pod kątem 45°.

W tym przypadku wyznaczenie punktów dotknięcia na południku profilu, prowadzi do zrobienia rzutu prostej d, d' na płaszczyznę tego południka, i nakreślenia do niego stycznych równoległych do tego rzutu, a spotkanie się tych stycznych z południkiem wyznaczy punkta szukane. Łatwo dostrzegamy, że rzut uważany prostej d, d' tworzy kąt 45° z płaszczyzną poziomą rzutów, że więc, zrobiwszy kład południka profilu wraz z tym rzutem na obwód pozorny w kładzie, znajdziemy dla tej ostatniej prostej właśnie d' a na punkta dotknięcia punkta q', k', l', u', czyli, że punkta w'_1, w'_2, których szukamy, winny leżeć na przecięciu się z' z prostemi $k'q'$, $l'u'$.

454. Części widzialne. — Żeby wyznaczyć części widzialne krzywej $u'w'_2d'k'w'_1$, należy znaleźć ją dla punktu np. d' dowolnie obranego na niej, a jest ona wyznaczoną za pomocą rzutu poziomego d, gdyż ten ostatni znajduje się przed rzutem poziomym południka obrazu. Wracając więc do krzywej widzimy, że ona jest widzialną po obu stronach punktu d' aż do punktów k', u', leżących na pionowym obwodzie pozornym, dalsze jej części zaś są ukryte. Zkorzystajmy z powyższych uwag dla zwrócenia uwagi na ten fakt, że części widzialne linii danej na jednej z płaszczyzn rzutów, wyznaczają się biorąc przedewszystkiem pod uwagę rzut tejże linii na drugą płaszczyznę rzutów, i obwód pozorny odpowiadający płaszczyznie rzutów, na której chcemy wyznaczyć części widzialne.

OSTROKRĘGI I WALCE OPISANE NA POWIERZCHNIACH OBROTOWYCH DRUGIEGO STOPNIA

455. Twierdzenie. — *Krzywa dotknięcia powierzchni drugiego stopnia z ostrokręgiem opisanym na niej, jest krzywą płaską* (fig. j_6).—Oznaczmy przez S wierzchołek ostrokręgu, zaś przez Σ powierzchnię uważaną. Nakreśliwszy przez punkt S rozbieżnę jakąkolwiek, przecinającą powierzchnię w dwu punktach A_1, A_2, i oznaczywszy sprzężony harmoniczny m punktu S względnie do punktów A_1, A_2, otrzymamy:

$$\frac{SA_1}{SA_2} : \frac{mA_1}{mA_2} = -1$$

lub

$$-\frac{mA_1}{mA_2} = \frac{SA_1}{SA_2}; \tag{1}$$

zkąd wypada, że dla rozbieżnej danej, druga strona przybiera tylko jednę wartość, a zatem, że istnieje na każdej rozbieżnej jeden punkt m a nie więcej. Stopień więc tego punktu jest równym stopniowi mnogości punktu S powiększonemu o jedność, a ponieważ punkt dany nigdy nie jest swym własnym sprzężonym harmonicznym, więc punkt S nie należy do miejsca geometrycznego punktu m, czyli

to miejsce jest pierwszego stopnia a zatem płaszczyzną. Dowiedźmy teraz, że ta płaszczyzna jest płaszczyzną krzywej dotknięcia ostrokręgu opisanego, którego wierzchołkiem jest punkt S; rzeczywiście, jeżeli dwa punkta A_1, A_2 zchodzą się z sobą na jednej rozbieżniej, ta ostatnia staje się styczną a związek (1) przybiera kształt

$$\frac{mA_1}{mA_2} = -1.$$

Równanie to ze względu na znak może mieć tylko miejsce wtenczas, kiedy punkt m zchodzi się z punktami A_1, A_2, a zatem płaszczyzna przedstawiająca miejsce geometryczne punktu m zawiera krzywę dotknięcia, czyli, że ta ostatnia jest krzywą płaską drugiego stopnia.

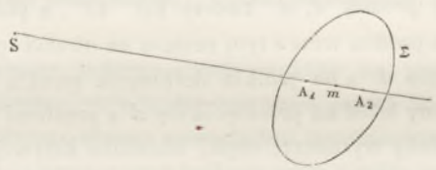

Fig. 56.

Ponieważ dowodzenie tu podane jest niezależnem od położenia wierzchołka, więc wnosimy ztąd, że stosuje się ono także do walca opisanego.

456. Twierdzenie. — *Rzut krzywej drugiego stopnia na jakąkolwiek płaszczyznę i w jakimkolwiek układzie, jest także krzywą drugiego stopnia.* — Rzeczywiście, gdyż wszelka sieczna płaszczyzny, na której leży krzywa, spotyka ją w dwu punktach, a ta własność ma także miejsce w rzucie.

457. Zadanie XII. — *Nakreślić rzuty krzywej dotknięcia powierzchni obrotowej drugiego rzędu z ostrokręgiem opisanym na niej, a którego wierzchołek jest danym* (*fig.* 316, tab. XXXI). — Jako przykład uważmy elipsoidę obrotową przedstawioną na figurze przez swe obwody pozorne, i wyznaczmy krzywę dotknięcia się jej z ostrokręgiem opisanym, którego wierzchołek ma za rzuty punkta s, s'

Ponieważ płaszczyzna przechodząca przez wierzchołek s, s' i przez oś z, z' jest płaszczyzną symetryi krzywej dotknięcia, a rzut tej ostatniej na nią jest prostolinijnym, zatem dla uproszczenia wykreślenia, sprowadźmy ruchem obrotowym naokoło osi z, z' płaszczyznę południkową, przechodzącą przez wierzchołek s, s', na płaszczyznę obrazu przechodzącą przez oś. Podczas tego ruchu, punkt s, s' przypadnie w punkcie s_1, s'_1, jeżeli więc nakreślimy przez punkt s'_1 styczne do elipsy południkowej danej i biegunowę $a'_1b'_1$ tego punktu, to otrzymamy właśnie rzut pionowy krzywej dotknięcia po dokonaniu ruchu.

Żeby teraz znaleźć rzuty krzywej dotknięcia w położeniu rzeczywistem, należy oznaczyć punkta odpowiadające jednemu z punktów np. μ' prostej $a'_1b'_1$. Otóż, równoleżnik, na którym leżą te punkta szukane, ma za rzut pionowy prostę $u'v'$ równoległą do osi rzutów a przechodzącą przez punkt μ', rzut zaś jego poziomy przechodzi przez rzut poziomy u odpowiadający rzutowi u', czyli jestto okrąg koła opisany z punktu z jako środka promieniem równym zu. Ponieważ cięciwa przechodząca przez punkta mające za rzut pionowy punkt μ', znajduje się w odległości zp_1 od osi, ponieważ nadto punkt p_1 po powrocie całej figury do pierwotnego położenia przypada w punkcie p, więc prostopadła do zp, a przechodząca przez punkt p, jest rzutem poziomym prostej łączącej rzuty poziome punktów szukanych, czyli, że rzuty te poziome m, u leżą na przecięciu się prostej prostopadłej, o której mowa, z rzutem tegoż samego nazwiska równoleżnika, na którym znajduje się punkt obrany, zaś rzuty

pionowe m', u' tych punktów przypadną na przecięciu się rzutu pionowego $u'v'$ tegoż równoleżnika z linijami rzutów przechodzącemi przez punkta m i u.

458. Styczna w jednym z punktów krzywej dotknięcia. — Ponieważ prosta ta musi leżeć na płaszczyznie stycznej do powierzchni w punkcie obranym i na płaszczyznie samejże krzywej, a więc na ich wspólnem przecięciu, a kreślenie dwu płaszczyzn i ich wspólnego przecięcia jest nieco zmudnem, więc postaramy się podać tu sposób uproszczony tego wykreślenia, zasadzając się na twierdzeniu następującem :

Jeżeli zmieniamy położenie wierzchołka ostrokręgu opisanego na powierzchni stopnia drugiego posuwając go po prostej stycznej do tej powierzchni, to krzywe dotknięcia dotykają się z sobą w tymże samym punkcie, w którym linija wierzchołków dotyka powierzchni (fig. j_7). — Oznaczmy powierzchnię przez Σ a prostę, która jej dotyka w punkcie M, przez D. Obierzmy na prostej D jakikolwiek punkt S, i uważmy krzywę dotknięcia C powierzchni Σ z ostrokręgiem opisanym na niej, a mającym wierzchołek w punkcie S, to styczna MT do krzywej C będzie przecięciem się płaszczyzny stycznej w punkcie M do powierzchni Σ, z płaszczyzną biegunową względem tejże powierzchni, a przechodzącą przez punkt S, lub mówiąc inaczej, styczna ta będzie biegunową punktu S względem przecięcia się powierzchni Σ ze swą płaszczyzną styczną w punkcie M. Otóż, ponieważ przecięcie się powierzchni drugiego stopnia ze swą płaszczyzną styczną przedstawia układ dwóch prostych, rzeczywistych lub

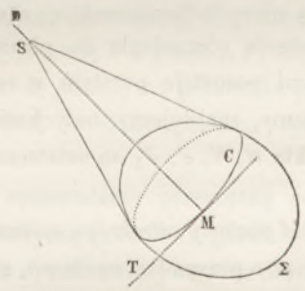

Fig. j_7.

urojonych, a przecinających się wzajemnie w punkcie styczności, który wskutek tego jest ich środkiem, więc biegunowa MT i prosta MS łącząca środek z biegunem, są dwiema średnicami sprzężonemi tej sekcyi konicznej. Jeżeli więc obecnie poruszymy punkt S po prostej D, to ponieważ jedna ze średnic sprzężonych SM i stożkowa nie zmieniają się, więc i sprzężona MT prostej SM także się nie zmieni, czego właśnie należało dowieść.

Dowiodłszy tego, powróćmy obecnie do kreślenia stycznej. W tym celu, połączmy punkt m, m', w którym szukamy stycznej, z wierzchołkiem s, s' linią prostą, i szukajmy przecięcia się jej λ, λ' z płaszczyzną południka głównego; wyznaczmy nadto rzut pionowy krzywej dotknięcia się elipsoidy z ostrokręgiem opisanym na niej i mającym wierzchołek w punkcie λ, λ', to wskutek symetryi rzut ten będzie prostolinijnym, a ponieważ, wskutek twierdzenia dowiedzionego powyżej, rzut ten winien dotykać w punkcie m' rzutu pionowego krzywej którą się zajmujemy, więc rzut ten będzie właśnie styczną szukaną.

Z tego co poprzedza widzimy więc, że dosyć będzie wyznaczyć biegunowę punktu λ' względem elipsy południkowej, tę zaś znajdziemy, kreśląc z punktu λ' dwie styczne do elipsy, i łącząc punkta dotknięcia linią prostą. Lecz wykreślenie to nie jest dostatecznie dokładnem, gdyż punkta dotknięcia

są wyznaczone w sposób niepewny, lepiej więc jest nakreślić przez punkt λ' dwie rozbieżne jakiekolwiek np. $\lambda'\alpha\beta$, $\lambda'\delta\gamma$, połączyć z sobą punkta α i γ, δ i β linijami prostemi i znaleźć punkt ε ich wspólnego przecięcia; ponieważ punkt ε będzie należał do biegunowej i do stycznej szukanej, więc wyznaczymy ją ostatecznie, kreśląc przez punkt ε prostę $\varepsilon m'$. W sposób taki sam wyznaczymy rzut poziomy, kreśląc biegunowę $\varepsilon_1 m_1$ rzutu poziomego λ_1, t. j. punktu przecięcia się prostej sm, $s'm'$ z płaszczyzną równika.

459. Punkta obwodu pozornego. — Punkta te znalezione już sposobem podanym w przypadku ogólnym (§ 427) są : dla obwodu pionowego (c, c'), (d, d'), a dla poziomego (e, e'), (γ, γ').

460. Punkt najwyższy i punkt najniższy. — Są to punkta, które po dokonaniu obrotu mają za rzuty punkta (a_1, a'_1), (b_1, b'_1), a powrócone do naturalnego położenia mają za rzuty (a, a'), (b, b') (§ 419).

461. Rzuty wierzchołków. — Ponieważ krzywa jest elipsą, wskutek symetryi, a wiedząc że ona ma dwa ze swych wierzchołków w punktach (a, a'), (b, b'), więc dla znalezienia jej dwu pozostałych wierzchołków należy postępować ze środkiem o'_1 cięciwy $a'_1 b'_1$ w taki sam sposób, jak to już robiliśmy dla punktu jakiegokolwiek μ' tej cięciwy, a otrzymamy dwa punkta (σ, σ'), (σ_1, σ'_1).

Rzuty dwu osi krzywej stożkowej tworzą zazwyczaj dwie średnice sprzężone rzutu, gdyż w przestrzeni, każda z osi przecina na dwie równe części cięciwy równoległe do drugiej, a ta własność jest prawdziwą w rzucie, jeżeli środek rzutów leży w nieskończoności.

W ogóle rzuty wierzchołków nie są wierzchołkami rzutów; ażeby niemi być mogły, to trzeba i wystarcza, żeby jedna z osi miała położenie równoległe do płaszczyzny poziomej rzutów, gdyż tylko wtenczas kąt prosty pomiędzy osiami pozostaje prostym w rzucie (§ 42 i 44). Stosując więc te uwagi do zadania, którem się zajmujemy, znajdujemy natychmiast, że punkta a, b, σ, σ_1 są wierzchołkami rzutu pionowego, i że punkta a', b', σ', σ'_1 są ostatecznemi punktami średnic sprzężonych rzutu pionowego.

462. Zadanie XIII. — *Nakreślić ślad poziomy ostrokręgu opisanego na powierzchni obrotowej drugiego stopnia.* — Wykreślenia podane mówiąc o przypadku ogólnym, stosują się tutaj w zupełności (§ 428). Podamy więc teraz tylko sposób wyznaczenia wierzchołków i ognisk krzywej.

Dowiedźmy przedewszystkiem twierdzenia : *Ogniska krzywej stożkowej są okręgami kół o promieniach równych zeru, i podwójnie stycznemi do krzywej stożkowej w punktach urojonych dotknięcia się krzywej z odpowiedniemi kierownicami.*

Jeżeli oznaczymy przez α i β spółrzędne jednego z ognisk krzywej stożkowej, odniesionej do spółrzędnych prostokątnych, to równanie ogniskowe tej krzywej jest :

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(mx+ny+t)^2. \tag{1}$$

Przeciąwszy krzywę okręgiem koła mającym za promień R a za środek ognisko uważane, to równaniem koła będzie :

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2, \tag{2}$$

a współrzędne punktów wspólnych zadosyć uczynią równaniom (1) i (2).

Lecz równanie (2) może być zastąpionem przez następującą kombinacyję równań (1) i (2),

$$(my+ny+t)^2=R^2, \tag{3}$$

któreto równanie przedstawia układ dwu prostych równoległych do tworzącej, a gdy R stanie się zerem, to układ ten sprowadzi się do prostej podwójnej

$$(mx + ny + t)^2 = 0,$$

która jest właśnie samą tworzącą.

Z powyższego rozumowania wyprowadzamy ten wniosek, że wszelki okrąg koła mający środek w ognisku krzywej stożkowej, przecina tę ostatnią w czterech punktach leżących na dwu prostych równoległych do kierownicy, a gdy promień tego okręgu koła stanie się zerem, to cztery punkta zejdą się z sobą brane po dwa na tej kierownicy, czyli, że ten okrąg koła dotyka krzywej stożkowej w dwu punktach urojonych dotknięcia się jej z odpowiednią kierownicą.

Wracając teraz do zadania, obierzmy elipsoidę wyznaczoną przez swą oś z, z' (*fig.* 317, tab. XXXI) i przez swój obwód pozorny ϵ' na płaszczyznie pionowej rzutów, niech nadto s, s' będzie wierzchołkiem ostrokręgu opisanego.

Jeżeli zastosujemy sposób rzutów zbieżnych, to znajdziemy, że różne równoleżniki rzucone z punktu s, s' na płaszczyznę poziomą rzutów, przedstawią wszystkie okręgi kół podwójnie styczne do śladu poziomego ostrokręgu, lecz ponieważ, z wszystkich tych kół dwa tylko mogą mieć promień równy zeru, to jest te, które znajdziemy rzucając wierzchołki (a', z), (a'_1, z) do punktu F, F_1, więc tylko te punkta są ogniskami elipsy szukanej.

Chcąc wyznaczyć teraz wierzchołki osi ogniskowej, to ponieważ punkta te są punktami krzywej, leżącemi na płaszczyznie przechodzącej przez z, z' i przez s, s', więc znajdziemy je za pomocą sposobu przecięć. Przetnijmy w tym celu elipsoidę płaszczyzną południka przechodzącą przez s, s', i nakreślmy z tego punktu styczne do powierzchni, to ślady poziome tych stycznych będą właśnie wierzchołkami szukanemi.

Dla wyznaczenia tych stycznych sprowadźmy płaszczyznę południka i wierzchołek ostrokręgu, obracając je naokoło osi z, z' na płaszczyznę południka głównego; ponieważ punkt s, s' przypadnie w punkcie s_1, s'_1, zatem, jeżeli z punktu s'_1 nakreślimy styczne do krzywej ϵ', a któreto styczne po dokonaniu obrotu będą rzutami pionowemi stycznych szukanych, ich rzuty poziome znajdą się na $s_1 z$ zaś ich ślady tego samego nazwiska będą w punktach α, α_1.

Wracając teraz do pierwotnego położenia, punkta α, α_1 opiszą na płaszczyznie poziomej rzutów, dwa łuki kół i przypadną w punktach A, A_1, które są wierzchołkami osi ogniskowej, to jest osi wielkiej elipsy. Oś zaś małą tej elipsy znajdziemy, kreśląc przez środek o prostej FF_1, prostopadłę do osi wielkiej, i opisując z punktu F promieniem równym połowie osi wielkiej Ao, łuk koła, który przetnie prostopadłę właśnie nakreśloną w punktach B, B_1, to jest w wierzchołkach osi małej. To znając potrafimy już nakreślić krzywę szukaną.

463. Zadanie XIV. — *Nakreślić rzuty krzywej dotknięcia i ślad poziomy walca opisanego w kierunku danym, na powierzchni obrotowej drugiego stopnia.* — Obierzmy jako przykład elipsoidę obrotową przedstawioną na figurze 318, tab. XXXI. Oznaczmy przez d, d' rzuty prostej równoległej do tworzących walca, a przechodzącej przez środek powierzchni. Ponieważ rozwiązanie tego zadania jest zupełnie podobnem do rozwiązań podanych dla dwu zadań poprzedzających, zatem przypomnimy tylko tutaj różne wykreślenia tam podane.

Jeżeli ruchem obrotowym naokoło z, z' sprowadzimy prostę d, d' do położenia d_1, d'_1 na płaszczyznie południka głównego, i nakreślimy średnicę $g'_1 i'_1$ łączącą punkta dotknięcia stycznych do elipsy danej, mających kierunek d'_1, to ta średnica jest sprzężoną średnicy d'_1 w elipsie południkowej,

i przedstawia rzut pionowy krzywej dotknięcia po dokonaniu ruchu. Wracając obecnie do pierwotnego położenia, wyznaczymy wierzchołki g, f, i, c rzutu poziomego elipsy szukanej, jakoteż dwie średnice sprzężone $c'f''$, $g'i'$ drugiego rzutu tej krzywej.

Ślad poziomy walca opisanego znajdziemy zważając, że ogniska F, F_1 są rzutami skośnemi w kierunku d, d' równoleżników o promieniu równym zeru (m', z), (u', z), że ślad ω prostej d, d' jest środkiem, dalej że małą osią $\gamma\rho$ jest prostopadła przechodząca przez punkt ω do FF_1 ograniczona przez odcięcie długości $\gamma\omega = \rho\omega = zf$, i wreszcie, że połowa osi wielkiej ma długość równą γF_1; odcinając więc po obu stronach punktu ω na FF_1, tę długość, znajdziemy wierzchołki s, s_1 osi wielkiej. Znając to, wykreślenie krzywej łatwo uskutecznionem być może.

464. Zadanie XV. — *Nakreślić obwody pozorne jakiejkolwiek powierzchni obrotowej na obu płaszczyznach rzutów.* — Ponieważ zadanie to jest toż samo co zadanie dotyczące kreślenia rzutów krzywej dotknięcia powierzchni i walców opisanych na niej, a prostopadłych do płaszczyzn rzutów, więc nie przedstawi ono żadnych trudności, znając podane powyżej dowodzenia.

Jeden z łatwych sposobów wyznaczenia obwodów pozornych, polega na uważaniu powierzchni danej jako obwijającej kuli zmiennej, na wyznaczeniu jej obwodów pozornych na każdej z płaszczyzn spółrzędnych, i na znalezieniu ich obwijających (§ 395bis), gdyż obwinięte ruchome w tym przypadku są kołowemi i kreślą się z łatwością. Niebawem zastosujemy ten sposób postępowania do powierzchni pierścieniowej o osi jakiejkolwiek, przedtem jednakże dowiedziemy tu kilku ogólników.

465. Rozwinięta. — Rozwijająca. — Obwijająca normalnych w rozmaitych punktach krzywej, zwie się *rozwiniętą* tej krzywej, to jest, kreśląc normalne w różnych punktach krzywej A (fig. j_8)

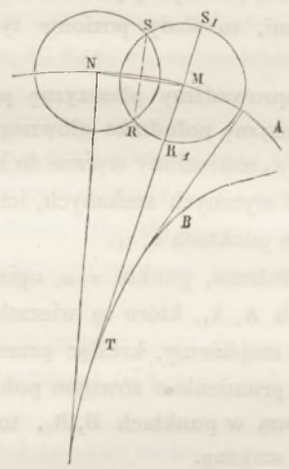

Fig. j_8.

i wyznaczając ich obwijającę, znajdujemy krzywę B, która jest właśnie rozwiniętą krzywej A. Krzywa A nosi nazwę *rozwijającej* krzywej B. Dowodzi się z łatwością, że rozwijająca może być utworzoną ruchem jednego punktu prostej, toczącej się bez posuwania się i bezustannie stycznej do rozwiniętej.

466. Jakakolwiek krzywa posiada kilka rozwijających. — Rzeczywiście, szukajmy bowiem obwijającej koła mającego promień stały, a którego środek opisuje krzywę A (fig. j_8), przyjmijmy w tym celu, że punkta M i N są dwoma położeniami blizkiemi środka, o którym mowa, że cięciwą

obu obwiniętych odpowiednich jest RS, a wreszcie, że MN jest liniją środków. Ponieważ proste MN i RS są do siebie prostopadłemi, więc jeżeli będziemy zbliżać do nieskończoności okrąg koła mający za środek punkt okręgu koła, którego środkiem jest punkt M, granice punktów R i S będą punktami obwijającej szukanej, a że prosta MN zdąża do stycznej do krzywej A, więc cięciwa RS zdąża do normalnej MT, i punkta S i S_1 przypadną w granicy w punktach przecięcia się R_1, S_1 okręgu koła stałego z normalną MT; ponieważ nadto obwijająca jest styczną do swych obwiniętych, więc prosta MT jest normalną do obwijającej, a tem samem krzywa B jest rozwiniętą obwijającej koła ruchomego, czyli obwijająca tworzy dwie rozwijające krzywej B.

Jeżeli teraz będziemy zmieniać promień koła, to znajdziemy dla każdej nowej jego wartości dwie rozwijające, więc liczba ich będzie nieograniczoną.

Własność, której dowiedliśmy tutaj, może być jeszcze wysłowioną w następujący sposób : *Obwijająca kół, których promień jest stałym, a których środek opisuje krzywę, jest układem dwu rozwijających rozwiniętej tej krzywej.*

467. Twierdzenie. — *Punkt przecięcia się rozwijającej ze swą rozwiniętą jest punktem zwrotu.* — Oznaczmy przez α (fig. j_9) jakąkolwiek krzywę, przez β jednę z jej rozwiniętych, zaś przez M punkt przecięcia się tych krzywych. Styczne do α nakreślone przez punkta blizkie punktu M, leżą w zupełności po tejże samej stronie krzywej α, chociażby punkt M nie był ani punktem przegięcia, ani

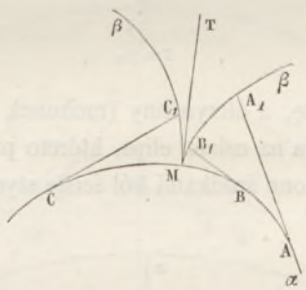

Fig. j_9.

punktem szczególnym, zkąd wynika że i krzywa β w blizkości punktu M leży po jednej i tej samej stronie krzywej α, gdyż punkta jej leżą na stycznych do tejże krzywej. Że zaś prócz tego styczna MT, nakreślona przez punkt M do krzywej β, jest normalną do krzywej α i przecina tę ostatnią, zaś krzywa β, której jeden punkt leży w punkcie M na stycznej MT, nie może mieć jednego punktu poza krzywą α, zatem punkt M musi być punktem zwrotu.

468. Zadanie XVI. — *Przedstawić powierzchnię pierścieniową, której oś jest jakąkolwiek, przez jej obwody pozorne.* — Dla rozwiązania tego zadania, należy nakreślić rzuty okręgu koła, opisanego obrotem środka koła tworzącego powierzchnię pierścieniową; rzuty te będą elipsami, które wyznaczymy sposobem podanym w paragrafie **136** i następnych. Uważając następnie powierzchnię pierścieniową jako obwijającą kuli, o promieniu stałym i równym promieniowi okręgu koła tworzącego, obwijająca rzutów obwodów pozornych tych kul wyznaczy dwa szukane obwody pozorne, a rzuty tych obwodów pozornych będą okręgami kół równych, których środki leżą na dwu elipsach pierwotnie nakreślonych. Rozumowanie to prowadzi nas do następującego wniosku : *Obwody pozorne powierzchni pierścieniowej w dowolnem położeniu, na dwie płaszczyzny rzutów, są rozwijającemi rozwiniętej elipsy.*

Szukajmy rozmaitych kształtów, jakie mogą przybierać te obwody pozorne. Geometrya analityczna podaje sposób znalezienia równania i kształtu rozwiniętej elipsy. Otóż nakreślmy najprzód na trzech figurach, poniżej będących, elipsę ε, którą tworzy rzut okręgu koła opisanego przez środek południka powierzchni. Nakreślmy następnie rozwinięte $\alpha\beta\gamma\delta$ tych krzywych, prowadząc normalne do

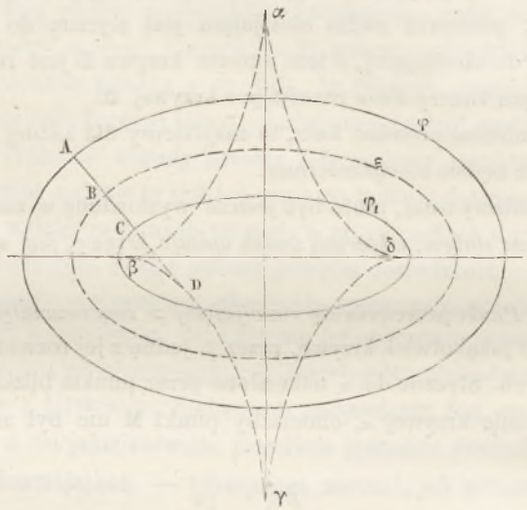

Fig. j_{10}.

tych elips i znajdując ich obwijającę, a otrzymamy (rachunek lub wykreślenie wskazują to) cztery punkta zwrotu leżące, brane po dwa na osiach elips, któreto punkta dadzą się wyznaczyć sposobem podanym w paragrafie **138**, gdyż są one środkami kół ściśle stycznych w wierzchołkach elips.

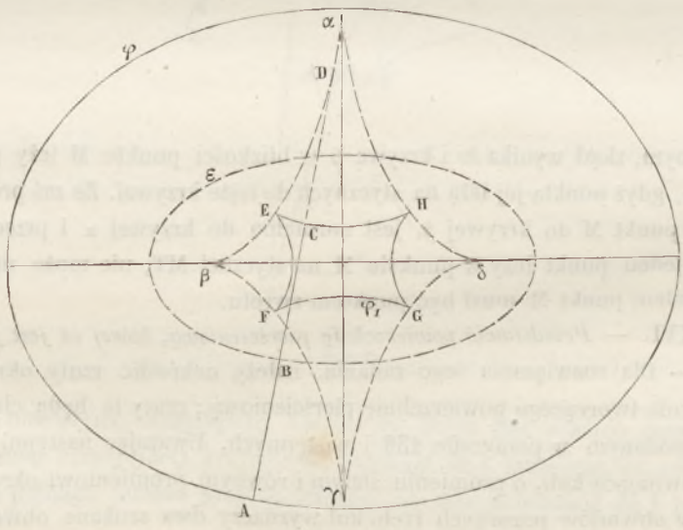

Fig. k_{11}.

Uważmy teraz jakąkolwiek normalnę BD do elipsy ε, i niech będzie punkt B przecięciem się tej normalnej z krzywą ε, zaś punkt D jej punktem spotkania się z rozwiniętą; to jeżeli normalna zmienia swe położenie, odcinek BD ma za najmniejszą wartość promień koła ściśle stycznego w wierzchoł-

kach osi wielkiej, a za największą wartość promień koła ściśle stycznego w wierzchołkach małej osi. Odetnijmy teraz z jednej i z drugiej strony punktu B długości AB, BC równe promieniowi koła tworzącego, i uczyńmy toż samo dla każdego położenia normalnej, to łącząc z sobą tak znalezione punkta liniją krzywą, otrzymamy jako obwód pozorny szukany jednę z krzywych przedstawionych na trzech figurach tu podanych.

Na każdej z tych figur obwód pozorny w rzucie jest przedstawiony przez dwie krzywe φ, φ_1; części rzetelne zostały narysowane liniją ciągłą, zaś części przysposobione punktami okrągłemi. Powierzchnia pierścieniowa jest zawartą pomiędzy częściami krzywych φ, φ_1 przedstawionemi linijami ciągłemi.

Ponieważ na figurze j_{10} długość prostych AB, BC jest przyjętą za mniejszą od wartości najmniejszej BD, więc obwód pozorny nie spotyka normalnie swej rozwiniętej $\alpha\beta\gamma\delta$ i nie przedstawia żadnego punktu zwrotu, lecz składa się tylko z dwu krzywych φ, φ_1, mających kształt elipsy danej.

Ponieważ na figurze k_1 długość prostych AB, BC jest zawartą pomiędzy połową małej osi elipsy i wartością największą prostej BD, krzywa więc φ spotyka normalnie swą rozwiniętę w czterech punktach E, F, G, H, które wskutek tego są punktami zwrotu obwodu pozornego. Wreszcie na figurze k_2, ponieważ długość prostych AB, BC jest zawartą pomiędzy wartością najmniejszą prostej BD

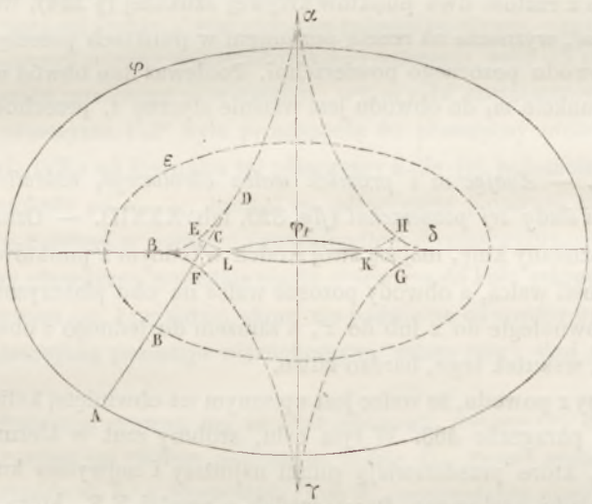

FIG. k_2.

i połową osi małej elipsy, więc cztery punkta zwrotu,[1] o których mowa powyżej, nietylko istnieją lecz nadto krzywa φ_1 ma dwa punkta podwójne K i L, gdyż 1° długości odcinków normalnych elipsy, zawartych pomiędzy krzywą a jej osią wielką, zmieniają się zaczynając od wartości równej promieniowi koła ściśle stycznego w wierzchołku wielkiej osi, aż do wartości równej połowie małej osi, i 2° ponieważ z samego założenia, odległość BC jest zawartą pomiędzy temiż granicami; zatem na osi wielkiej znajdują się dwa punkta, przez które, wskutek symetryi figury, krzywa φ_1 przechodzi dwa razy, czego należało dowieść. Zauważmy jeszcze, że punkta zwrotu odpowiadają promieniom widzenia, stycznym w przestrzeni do obwodu pozornego (§ 430), a punkta podwójne K i L odpowiadają promieniom widzenia podwójnie stycznym do powierzchni pierścieniowej (§ 378). Wykreślenie tych ostatnich punktów zostanie podane w ćwiczeniach należących do tego rozdziału. Zdaje się

niemal zbytecznem dodawać, że dla wartości AB większych od wartości największej dla BD, krzywe φ, φ_1 przybierają jeszcze kształt zupełnie podobny do kształtu elipsy.

469. Zadanie XVII. — *Przedstawić powierzchnię obrotową, której oś jest prostą obrazu, przez jej obwody pozorne* (*fig.* 319, tab. XXXI). — Oznaczmy przez z, z' oś obrazu, a przez μ, μ_1' rzut pionowy południka głównego. Krzywe μ, μ'_1 razem uważane przedstawiają obwód pozorny w rzucie pionowym (§ **390**). Dla znalezienia obwodu pozornego w rzucie poziomym użyjmy sposobu obwiniętych kulistych, a w tym celu obierzmy jakikolwiek równoleżnik, którego rzutem pionowym jest $a'b'$, i wyznaczmy punkt krzywej szukanej na nim leżącej. Ponieważ obwinięta kulista dotyka powierzchni obrotowej podług obranego równoleżnika, więc ma ona jeden z rzutów swego środka w spodku ω normalnej do krzywej μ', przechodzącej przez punkt b', drugi zaś rzut tego środka w punkcie ω przecięcia się z z liniją rzutów przechodzącą przez punkt ω'. Promień obwiniętej w rzeczywistej wielkości jest równym $\omega'b'$.

Obwód pozorny kuli w rzucie poziomym jest okręgiem koła, opisanym z punktu ω jako środka promieniem równym $\omega'b'$, rzut zaś jego pionowy leży na prostej $c'd'$, równoległej do osi rzutów, przechodzącej przez punkt ω', a zawartej pomiędzy linijami rzutów przechodzącemi przez punkta c, d. Ponieważ punkt m' spotkania się rzutu pionowego cechy z rzutem pionowym $c'd'$ obwodu pozornego poziomego, jest jednym z rzutów dwu punktów krzywej szukanej (§ **394**), więc linija rzutów, przechodząca przez punkt m', wyznacza na rzucie poziomym w punktach przecięcia swego z kołem cd, dwa punkta m_1, m_2 obwodu pozornego powierzchni. Ponieważ ten obwód winien dotykać obwodu kuli, zatem styczna w punkcie m_1 do obwodu jest właśnie styczną t, przechodzącą przez tenże punkt do koła cd.

470. Zadanie XVIII. — *Znając oś i promień walca obrotowego, nakreślić na obu płaszczyznach rzutów obwody pozorne i ślady tej powierzchni* (*fig.* 320, tab. XXXII). — Oznaczmy przez z, z' rzuty osi i wpiszmy w walec szukany kulę, mającą swój środek w jednym z punktów na osi, to promień jej będzie równy promieniowi walca, a obwody pozorne walca na obu płaszczyznach rzutów będą przedstawione przez proste równoległe do z lub do z', a zarazem do jednego z obwodów pozornych kuli, dających się wyznaczyć, wskutek tego, bardzo łatwo.

Ślady walca znajdziemy z powodu, że walec jest opisanym na obwiniętej kulistej, stosując tu sposób wykreślenia podany w paragrafie **463**. W tym celu, zróbmy rzut w kierunku tworzących walca punktów (a, a'), (b, b'), które przedstawiają punkt najniższy i najwyższy kuli, do punktów F, F_1, a znajdziemy ogniska śladu poziomego. Przez środek o prostej F_1F, która jest także śladem poziomym prostych z, z', nakreślmy prostę prostopadłą do osi ogniskowej, i odetnijmy na niej, z jednej i z drugiej strony środka, promień walca, a znajdziemy wierzchołki s, s_1 małej osi śladu poziomego; nakreśliwszy teraz prostę od s_1 do F_1 a to dla znalezienia długości s_1F_1 połowy wielkiej osi tegoż śladu, i przeniosłszy ją do os_2 i os_3, otrzymamy wierzchołki s_2, s_3 osi ogniskowej; co mając nakreślenie elipsy da się dokończyć jednym ze sposobów znanych. Postępując w sposób podobny powyższemu znajdziemy wreszcie ślad pionowy.

471. Zadanie XIX. — *Znając oś z, z' ostrokręgu, jego wierzchołek s, s' i jego kąt tworzący α, nakreślić na dwu płaszczyznach rzutów obwody pozorne i ślady powierzchni* (*fig.* 321, tab. XXXII). — Wykreślmy kąt tworzący w rzeczywistej wielkości, a to obracając oś z, z' naokoło pionowej przechodzącej przez punkt s, s', dopóty, dopóki nie przyjmie ona położenia równoległego do płaszczyzny pionowej rzutów; ponieważ wskutek tego ruchu ślad poziomy θ, θ' tej osi przypadnie w punkcie θ_1, θ'_1 zaś punkt s, s' pozostanie niezmiennym, nowemi więc rzutami osi będą $s\theta_1$, $s\theta'_1$. W tem

położeniu figury, jedna z tworzących obrazu ostrokręgu, będzie miała za rzut pionowy prostę $s'g'_1$, nachyloną pod kątem α do prostej $s'\theta'_1$.

Obrawszy na tej ostatniej prostej punkt c'_1 jakikolwiek i nakreśliwszy przezeń prostopadłę $c'a'_1$ do prostej $s'g'_1$, punkt c'_1 będzie rzutem pionowym środka obwiniętej kulistej ostrokręgu przeniesionego, zaś $c'_1a'_1$ będzie jej promieniem w rzeczywistej wielkości, a jeżeli teraz powrócimy do pierwotnego położenia, to rzut pionowy punktu c'_1 przypadnie w punkcie c' na przecięciu się prostej równoległej do osi rzutów, przechodzącej przez punkt c'_1, z prostą $s'\theta'$, rzut zaś poziomy odpowiadający leżeć będzie w punkcie c, t. j. na przecięciu się prostej $s\theta$, z liniją rzutów, przechodzącą przez punkt c. Kreśląc obecnie dwa okręgi kół z punktów c, c', promieniem tym samym a równym $c'_1a'_1$, otrzymamy obwody pozorne na obu płaszczyznach rzutów obwiniętej kulistej. Rozwiązanie zadania dokończy się, kreśląc przez punkt s, s' styczne do znalezionych okręgów kół.

Ślady ostrokręgu dadzą się wyznaczyć za pomocą sposobu podanego w paragrafie **462**, i to zastępując tam elipsoidę odpowiadającą (*fig.* 317. tab. XXXI) przez kulę wpisaną, której środek przypadnie w punkcie c, c'.

472. Zadanie XX. — *Nakreślić do powierzchni obrotowej płaszczyznę styczną, równoległą do płaszczyzny danej* (*fig.* 322, tab. XXXII). — Ponieważ styczność odpowiada jednemu warunkowi, a równoległość dwu, więc zadanie jest możliwem i wyznaczonem.

Oznaczmy przez z, z' rzuty osi, przez μ' rzut pionowy południka obrazu, a przez $P_\alpha P'$ ślady płaszczyzny danej. Sprowadźmy płaszczyzny styczne szukane do takiego położenia, żeby ich punkta dotknięcia leżały na rzucie pionowym obwodu pozornego powierzchni; w tym celu dostatecznem będzie obrócić figurę naokoło z, z' tak, żeby płaszczyzna $P_\alpha P'$ była prostopadłą do płaszczyzny pionowej rzutów. Ponieważ jednakże rzecz ta zawisła tylko od kierunku tej płaszczyzny a nie jej położenia, więc prościej będzie obrócić tę płaszczyznę naokoło osi z'_1, z_1, leżącej na płaszczyznie pionowej rzutów a równoległej do pierwszej, zatrzymując ją przytem w położeniu prostopadłem do płaszczyzny pionowej rzutów. Podczas tego ruchu, ślad poziomy płaszczyzny pozostaje ciągle stycznym do koła zakreślonego z punktu z_1 jako środka, promieniem równym z_1p, i przyjdzie, skoro z_1p padnie na oś rzutów xy, do z_1p_1; że zaś punkt v' przecięcia się osi z płaszczyzną pozostaje nieruchomym, zatem nowy ślad pionowy tej płaszczyzny przypada na $v'p_1$.

Ponieważ szukana płaszczyzna styczna ma za ślad pionowy styczną Q'_1 do krzywej μ', poprowadzoną w kierunku $v'p_1$, więc jej śladem poziomym będzie Q_1. Że zaś wróciwszy do pierwotnego położenia, punkt θ_1 przypada w θ, a równoległa Q do P, przechodząca przez ten punkt, jest śladem poziomym płaszczyzny stycznej szukanej i wyznacza przytem w punkcie spotkania się jej β z osią xy jeden punkt śladu pionowego, kreśląc więc przez punkt β równoległę Q' do P', otrzymamy drugi ślad płaszczyzny szukanej. Zadanie to ma drugie rozwiązanie, które znajdziemy w sposób zupełnie podobny.

473. Zadanie XXI. — *Nakreślić normalnę do powierzchni obrotowej, równolegle do prostej danej* (*fig.* 323, tab. XXXII). — Oznaczmy przez z, z' oś powierzchni, przez μ' rzut pionowy południka głównego a przez $s'\theta'_1$, $z\theta$ kierunek normalnej. Sprowadźmy najprzód prostę daną, ruchem obrotowym naokoło osi z_1, z' do położenia równoległego do płaszczyzny pionowej rzutów; ponieważ punkt z_1, s' nie poruszy się, zaś θ, θ' przypadnie na θ_1, θ'_1, znając więc dwa punkta, przez które przechodzi prosta szukana, otrzymamy samą prostę $z\theta$, $z'\theta'_1$. Jeżeli teraz nakreślimy prostę t' prostopadłą do $s'\theta'_1$ a styczną do μ', to znajdziemy w punkcie jej dotknięcia się m'_1 rzut pionowy spodka normalnej po obrocie, a ztąd także i odpowiadający rzut pionowy.

Powróciwszy wreszcie figurę do jej pierwotnego położenia, będzie punkt m, m' spodkiem normalnej, zaś prosta $mn, m'n'$ równoległa do $s'0', z0$, a przechodząca przez punkt m, m' będzie żądaną normalną. Zadanie to może być użytem do rozwiązania zadania poprzedzającego.

474. Zadanie XXII. — *Przez prostę daną nakreślić płaszczyznę styczną do jakiejkolwiek powierzchni obrotowej.* — Ponieważ styczność odpowiada jednemu zaś prosta dana dwu warunkom, więc zadanie jest możliwe i wyznaczone.

Oznaczmy przez Σ powierzchnię (fig. k_3) a przez D prostę daną. Obierzmy punkta S_1, S_2 w dwu położeniach dowolnych na prostej D, i nakreślmy krzywe dotknięcia C, C_1 ostrokręgów opisanych na Σ, których wierzchołki odpowiednie przypadają w tych punktach, a w punktach γ_1, γ_2 przecięcia się krzywych C, C_1 znajdziemy punkta dotknięcia płaszczyzn stycznych szukanych. Te płaszczyzny są zatem wyznaczone przez ich wspólną prostę D i przez punkta ich styczności γ_1, γ_2. Ponieważ jeden z wierzchołków ostrokręgów może być oddalonym do nieskończoności, więc można wziąć pod uwagę ostrokrąg z walcem, zamiast dwu ostrokręgów.

Wreszcie zadanie może być rozwiązanem jeszcze, kreśląc przez prostę D płaszczyznę styczną do ostrokręgu opisanego na powierzchni, a którego wierzchołek znajdzie się na prostej D, lub do walca również opisanego na powierzchni, a którego tworzące będą równoległe do prostej D.

Rozwiązanie to wymaga, kreślenia dwu krzywych pomocniczych, gdyż ostrokrąg opisany na Σ dotyka tej powierzchni podług krzywej niepłaskiej c, a zatem trzeba, żeby do niej nakreślić płas-

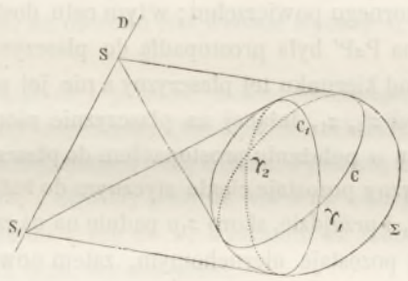

Fig. k_3.

czyznę styczną przez prostę D, znaleźć przedewszystkiem rzut krzywej płaskiej, leżącej na powierzchni ostrokręgu. Można wprawdzie wyznaczyć spotkanie się ostrokręgu opisanego z płaszczyzną poziomą rzutów nie kreśląc krzywej dotknięcia, lecz ponieważ to wykreślenie winno być poprzedzonem wyznaczeniem punktów krzywej dotknięcia, więc jest ono zawsze bardzo zmudnem. Używając wreszcie któregokolwiek z rozwiązań podanych, każde z nich może być uproszczonem, a to kreśląc w blizkości punktów dotknięcia, tylko małe cząstki krzywych, które je wyznaczają. Wszystkie wykreślenia tutaj podane są bezwarunkowo bardzo długie i trudne do wykonania, należy więc zastąpić je zawsze sposobem podanym w końcu rozdziału V.

475. Twierdzenie Monge'a. — *Jeżeli dwie powierzchnie drugiego stopnia dotykają się z sobą w dwu punktach wspólnych, to przecinają się one z sobą podług dwu krzywych płaskich, których płaszczyzny przechodzą przez prostę łączącą te dwa punkta dotknięcia.* — Oznaczmy przez P, Q (fig. k_4) płaszczyzny styczne wspólne obu powierzchniom, a przez C, C_1 punkta styczności tychże. Jeżeli obierzemy jakikolwiek punkt M na wspólnem przecięciu się dwu powierzchni, i jeżeli nakreślimy przez punkta M, C, C_1 płaszczyznę R, to takowa przetnie obie powierzchnie podług dwu stożkowych przecho-

dzących przez też punkta, płaszczyzny zaś styczne wspólne, podług stycznych CT, C_1T_1 wspólnych obu stożkowym. Widzimy ztąd, że stożkowe, o których mowa, muszą przechodzić przez pięć punktów, t. j. przez pojedynczy punkt M, przez dwa punkta zchodzące się w punkcie C i dwa inne zchodzące się w punkcie C_1, a ponieważ przez pięć punktów możemy nakreślić tylko jednę stożkowę a nie więcej, więc dwie stożkowe zchodzą się z sobą. Przecięcie zatem szukane ma już jednę krzywę drugiego

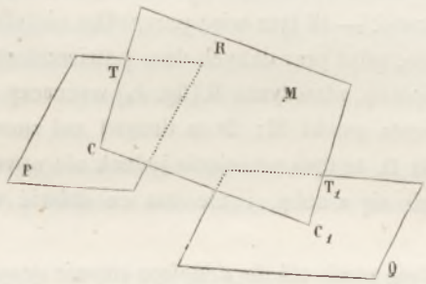

Fig. k_4.

stopnia, której płaszczyzna przechodzi przez cięciwę CC_1, a ponieważ przecięcie to zupełne jest czwartego stopnia, musi ono więc mieć jeszcze drugą krzywę drugiego stopnia, która przejdzie koniecznie i z tych samych przyczyn co i pierwsza, przez cięciwę CC_1.

Twierdzenie Monge'a jest fałszywem wtenczas, gdy prosta CC_1 jest wspólną obu powierzchniom. I rzeczywiście, wziąwszy bowiem prostę D wspólną dwu powierzchniom drugiego stopnia (fig. k_5),

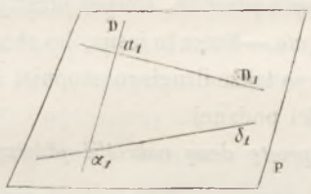

Fig. k_5.

i nakreśliwszy przez nią płaszczyznę jakąkolwiek P, ta płaszczyzna przetnie pierwszą powierzchnię podług stożkowej, do której należy prosta D, zkąd wypada, że przecięcie to jest utworzone z dwu prostych D, D_1 przecinających się z sobą w punkcie a_1.

Podobnież płaszczyzna P przetnie drugą powierzchnię podług dwu prostych D, δ_1, mających punkt wspólny α_1, przetnie ona więc jednę powierzchnię w punkcie a_1, drugą zaś w punkcie α_1. Jeżeli teraz przetniemy te dwie powierzchnie drugą płaszczyzną przechodzącą przez prostę D, to znajdziemy dla pierwszej powierzchni dwie proste D, D_2, przecinające się w punkcie a_2, który jest różnym od punktu a_1; żeby bowiem prosta D_2 mogła przejść przez punkt a_1 musiałyby proste D, D_1, D_2, które są swemi własnemi stycznemi, leżeć na jednej płaszczyznie stycznej do odpowiedniej powierzchni w punkcie a_1, czyli płaszczyzna ta musiałaby przecinać powierzchnię podług trzech prostych, co być nie może, gdyż przecięcie musi być drugiego stopnia.

Z tego widzimy zaś : 1° że każdemu punktowi dotknięcia a_1 pierwszej powierzchni płaszczyzną P, przechodzącą przez prostę D, odpowiada tylko jeden punkt dotknięcia α_1, a nie więcej, tejże

płaszczyzny P z drugą powierzchnią i odwrotnie; 2° że punkta dotknięcia a_1, a_2... etc...α_1, α_2...etc... otrzymane na obu powierzchniach, obracając płaszczyznę P naokoło prostej D, tworzą dwie podziałki jednokreślne (homographiques) tejże samej podstawy, a ponieważ te podziałki mają dwa punkta podwójne, więc ztąd wniosek, że te powierzchnie dotkną się w dwu punktach prostej D.

Dwie powierzchnie zatem drugiego stopnia, mające jednę tworzącę wspólną, a których przecięcie w skutek tego jest utworzone z tworzącej i z krzywej trzeciego stopnia, mają dwie płaszczyzny styczne wspólne w dwu punktach, także wspólnych, tworzącej. — W tym więc przypadku nietylko twierdzenie Monge'a jest fałszywem, lecz także i dowodzenie, gdyż przy danych dwu powierzchniach drugiego stopnia, mających z przypuszczenia prostę CC_1 wspólną, płaszczyzna R (fig. k_4) wyznaczy : 1° na jednej z nich prostę CC_1, i drugą prostę przechodzącą przez punkt M; 2° na drugiej zaś znowu prostę CC_1 i trzecią prostę przechodzącą także przez punkt D, te dwa przecięcia jednak nie utworzą, jak w przypadku ogólnym, dwu stożkowych zchodzących się z sobą, i nie ma co mówić w tym przypadku szczególnym o dowodzeniu.

476. Wniosek I. — *Jeżeli dwie powierzchnie drugiego stopnia są opisane na trzeciej, to ich wspólne przecięcie jest układem dwu krzywych płaskich, których płaszczyzny przechodzą przez prostę wspólnego przecięcia się płaszczyzn krzywych dotknięcia.* — Ponieważ w tym przypadku dwie krzywe dotknięcia znajdą się na jednej i tejże samej powierzchni, i przetną się z sobą w skutek tego w dwu punktach rzeczywistych lub urojonych, które będą wspólnemi dwu powierzchniom opisanym, zatem w tych punktach trzy powierzchnie uważane będą miały płaszczyznę styczną wspólną, i twierdzenie Monge'a może być tu zastosowanem.

Wniosek tu podany, prowadzi do następującej własności :

477. Wniosek II. — *Jeżeli na powierzchni drugiego stopnia opiszemy dwa ostrokręgi, to ich wspólne przecięcie będzie układem dwu krzywych płaskich, których płaszczyzny przechodzą przez prostę wspólnego przecięcia płaszczyzn krzywych dotknięcia.*—Rzecz to jasna, bo skoro krzywe dotknięcia są płaskie (§ **455**) i drugiego stopnia, ostrokręgi więc są także drugiego stopnia, i wniosek poprzedzający może być tu zastosowanym, co dowodzi własności podanej.

478. Zadanie XXIII. — *Przez prostę daną nakreślić płaszczyznę styczną do powierzchni obrotowej drugiego stopnia.*

1° Elipsoida i hiperboloida jednopowłokowa. — Jako przykład weźmy elipsoidę przedstawioną na figurze 424, tab. XXXII, i oznaczmy prostę daną przez d, d'. Nakreślmy przez jeden z punktów prostej d, d' ostrokrąg opisany na elipsoidzie zaś przez prostę d, d' płaszczyznę do niego styczną. Przyjmijmy za wierzchołek ostrokręgu punkt s, s' przecięcia się prostej danej z płaszczyzną obrazu, przechodzącą przez oś z, z' powierzchni, i przedstawmy ostrokrąg pomocniczy przez jego obwód pozorny pionowy, który znajdziemy, kreśląc przez punkt s' styczne do elipsy przedstawionej na rysunku.

Należy teraz przeciąć ostrokrąg taką płaszczyzną, żeby przedstawienie rysunkiem rzutów przecięcia było najłatwiejszem. W tym celu biorąc przecięcie się ostrokręgu opisanego z walcem pionowym rzucającym równik, to ponieważ te dwie powierzchnie jako opisane na powierzchni obrotowej, przecinają się z sobą podług dwu krzywych płaskich, których płaszczyzny przechodzą przez przecięcie się krzywych dotknięcia (§ 477), te zaś ostatnie mają za rzuty pionowe $a'b'$, $e'f'$, a przecięcie się ich płaszczyzn jest prostą prostopadłą do płaszczyzny pionowej rzutów, przechodzącej przez punkt przecięcia się β' tych prostych, zatem płaszczyzny krzywych przecięcia są także prostopadłemi do płaszczyzny pionowej rzutów, czyli krzywe te mają rzuty pionowe prostolinijne. Ponieważ nadto punkta t', q', p', r' przecięcia się z sobą obwodów pozornych pionowych powierzchni opisanych, są

częścią rzutu pionowego szukanego przecięcia, więc rzut ten pionowy jest przedstawionym przez proste $t'q'$, $r'p'$, które, jeżeli rysunek jest dokładnie wykonanym, winny przejść przez punkt $3'$.

Rzuty poziome linij dotknięcia, leżą na podstawie walca opisanego t. j. na rzucie poziomym równika. W ten sposób nakreśliliśmy na ostrokręgu dwie krzywe $(p'r', ambn)$, $(t'q', ambn)$ *w rzucie prostym i kołowym.*

Zupełne rozwiązanie zadania jest teraz bardzo łatwem, gdyż przyjmując za płaszczyznę podstawy ostrokręgu płaszczyznę przechodzącą przez $r'p'$ prostopadle do płaszczyzny pionowej rzutów, przecięciem jej z d, d' będzie o, o', kreśląc zaś przez o styczne t'_1, t'_2 do koła $ambn$, które są rzutami poziomemi dwu prostych płaszczyzn stycznych, rzuty ich pionowe odpowiadające t'_1, t'_2 zejdą się na $r'p'$.

Ponieważ zatem styczne do podstawy ostrokręgu mają za rzuty (t_1, t'_1), (t_2, t'_2), więc dołączając do nich prostę d, d', znajdziemy dwie pary prostych wyznaczających dwie płaszczyzny styczne, które należało wykreślić.

Rozwiązanie tu podane stosuje się bez zmiany do kuli, do elipsoidy o trzech osiach nierównych, i do hyperboloidy jednopowłokowej jakiejkolwiek, lub obrotowej.

479. 2° Hyperboloida obrotowa dwupowłokowa (*fig.* 325, tab. XXXII). — Oznaczmy przez z, z' rzuty osi, przez H', H'_1 rzuty na płaszczyznę pionową rzutów hyperboli południkowej, a przez d, d' rzuty prostej danej. Wyznaczmy ślad poziomy walca równoległego do prostej d, d', a opisanego na hyperboloidzie; rzuty ukośne w kierunku prostej d, d' równoleżników, mających promienie równe zeru (s'_1, z), (s'_1, z), wyznaczą ogniska F, F_1 śladu. Kreśląc teraz jednę z tworzących obwodu pozornego pionowego walca opisanego, znajdziemy, że jej rzut pionowy $c'l'$ jest styczną do H' a równoległą do d', że jej punkt dotknięcia C' ma za rzut poziomy c, zaś prosta ct równoległą do d i przechodzącą przez punkt c, wyznacza drugi rzut tej stycznej.

Ślad poziomy m tej stycznej należy do śladu poziomego walca opisanego, a ten ostatni jest hyperbolą mającą swe ogniska w punktach F, F_1, i punkt m jest jednym z jej punktów; dla łatwego jej znalezienia, nakreślmy proste mF, mF_1 i wyznaczmy ich różnicę $F_1 2$, to ponieważ ta ostatnia będzie właśnie długością osi poprzecznej, podzieliwszy więc prostę FF_1 na połowę znajdziemy środek, od którego odcinając po jednej i po drugiej stronie długości równe połowie osi rzeczywistej na prostej $F_1 F$, otrzymamy jej wierzchołki A, A_1.

Żeby nakreślić przez prostę d, d' płaszczyzny styczne do walca opisanego, wyznaczymy ślad θ prostej d, d' i przez ten punkt nakreślimy, nie kreśląc krzywej, styczne do hyperboli wyznaczone przez swe ogniska F, F_1 i przez wierzchołki osi ogniskowej A, A_1.

480. 3° Paraboloida obrotowa. — Przedewszystkiem dowiedźmy następującego twierdzenia: *Rzut, wszelkiego przecięcia eliptycznego paraboloidy obrotowej, na płaszczyznę prostopadłą do jej osi jest kołem.*

Jeżeli przyjmiemy oś z na osi powierzchni, za początek spółrzędnych wierzchołek i osie prostokątne, to równaniem paraboloidy obrotowej będzie:

$$x^2 + y^2 - 2pz = 0. \tag{1}$$

Ponieważ płaszczyzny przecinające powierzchnię podług elips nie są równoległe do osi z, zatem równania ich obejmują spółrzędną z i mają kształt następujący:

$$z = ax + by + c.$$

Równanie rzutu przecięcia na płaszczyznę xoy otrzymamy, rugując z w równaniach (1) i (2), i będzie :

$$x^2 + y^2 + 2p(ax + by + c) = 0,$$

które to równanie przedstawia właśnie okrąg koła.

Wykonanie rysunku. — Można także użyć ostrokręgu opisanego mającego podstawę *w rzucie prostym i kołowym*. I tak, oznaczywszy przez z, z' rzuty osi (*fig.* 326, tab. XXXII), przez p, p' rzuty paraboli południkowej głównej i przez d, d' rzuty prostej danej, wyznaczmy przecięcie s, s' prostej d, d' z płaszczyzną obrazu przechodzącą przez z, z', i opiszmy na paraboloidzie ostrokrąg, mający za wierzchołek punkt s, s', to kreśląc z punktu s' styczne do p' i łącząc następnie z sobą punkta dotknięcia, które już umiemy znaleźć z całą ścisłością, otrzymamy rzut pionowy $u'v'$ krzywej dotknięcia. Ponieważ prosta $u'v'$ jest biegunową punktu s', a biegun znajduje się w odległości skończonej od krzywej, więc biegunowa nie jest równoległą do osi z, z', a tem samem krzywa dotknięcia jest elipsą, której rzutem poziomym jest koło. Dla wykreślenia tego koła należy wziąć rzuty poziome u, v odpowiadające u', v', a że wskutek symetryi figury względem płaszczyzny obrazu przechodzącej przez oś, można uważać prostę uv za średnicę koła, zatem takowe łatwo wykreślimy.

W ten sposób otrzymaliśmy na $uv, u'v'$ rzut prosty i rzut kołowy podstawy ostrokręgu opisanego. Jeżeli teraz wyznaczymy przecięcie się m, m' płaszczyzny podstawy z prostą d, d', i nakreślimy z punktu m styczne mt_1, mt_2 do okręgu koła w rzucie poziomym, to otrzymamy rzuty poziome dwu prostych, leżących na szukanej płaszczyznie stycznej; rzuty pionowe odpowiadające $m't'_1$, $m't'_2$ zchodzą się na biegunowej $u'v'$.

Zadanie to przedstawia dwa rozwiązania, które otrzymamy dołączając do prostej wspólnej d, d' jednę ze stycznych mt_1, $m't'_1$, lub mt_2, $m't'_2$.

481. Zadanie XXIV. — *Przez punkt dany nakreślić płaszczyznę styczną wspólną dwu powierzchniom obrotowym.* — Zadanie jest możliwem do rozwiązania, gdyż styczne dają dwa warunki a punkt zewnętrzny trzeci warunek. Przyjmując punkt dany za wierzchołek wspólny, należy przezeń nakreślić ostrokrąg styczny do każdej powierzchni, a następnie płaszczyzny styczne do obu ostrokręgów (§ **361**), któreto ostatnie zadanie daje się rozwiązać, gdyż dwa ostrokręgi mają wierzchołek wspólny. Rozróżnimy tu dwa przypadki :

482. *A*) **Kiedy powierzchnie dane są jednokładne.** — Ponieważ w tym przypadku obie powierzchnie mają jeden ostrokrąg opisany wspólny, którego wierzchołek leży w środku podobieństwa, więc dosyć będzie nakreślić przez punkt zewnętrzny płaszczyzny styczne do ostrokręgu.

483. *B*) **Kiedy dwie powierzchnie są kulami.** — Ponieważ dwie kule są zawsze jednokładne, można zatem do tego zadania zastosować rozwiązanie podane w poprzedzającym paragrafie.

Weźmy kule przedstawione przez swe obwody pozorne (γ, γ'), (γ_1, γ'_1) na obu płaszczyznach rzutów (*fig.* 327, tab. XXXIII), i punkt przez swe rzuty m, m'. Żeby znaleźć środek podobieństwa, należy uważać je jako leżące w wierzchołkach dwu ostrokręgów opisanych na kulach, a któreto wierzchołki znajdziemy z łatwością, kreśląc rzuty tworzących obwodu pozornego ostrokręgów. Ponieważ te rzuty winny być styczne do obwodów pozornych (§ **395**^{bis}) kul, ponieważ nadto wierzchołki winny leżeć na linii środków oo_1, $o'o'_1$, więc znajdziemy rzut pionowy jednego z nich na przecięciu s' prostej $o'o'_1$ z jedną ze stycznych wspólnych do obwodów pozornych kul w rzucie pionowym, zaś rzut poziomy tegoż wierzchołka będzie na przecięciu się s prostej oo_1 z liniją rzutów, przechodzącą przez punkt s'. Celem rozwiązania zadania, wprowadzając środek podobieństwa s, s', znajdziemy, że płaszczyzna styczna

odpowiadająca przechodzi przez prostę łączącą punkta (m, m'), (s, s') nakreśliwszy ją, i przez tęż prostę przeprowadziwszy płaszczyznę styczną do jednej z kul np. do kuli, której środkiem jest punkt o, o' (§ 478), prosta ms, $m's'$ spotka płaszczyznę obrazu przechodzącą przez punkt o, o' w punkcie σ, σ', przez który kreśląc ostrokrąg opisany na kuli, tworzące obwodu pozornego pionowego tego ostrokręgu będą stycznemi wychodzącemi z punktu σ' do koła, którego środkiem jest punkt o'.

Jeżeli teraz znajdziemy przecięcie się ostrokręgu, którego wierzchołkiem jest punkt σ, σ', z walcem pionowym opisanym na kuli, to otrzymamy krzywę o rzucie prostym i kołowym, a mianowicie rzutem prostym będzie prosta $p'q'$, zaś rzutem kołowym koło γ. Ponieważ płaszczyzna tej krzywej z prostą $m\sigma, m'\sigma'$ przecinają się w punkcie u, u', więc kreśląc z tego punktu styczne (t_1, t'_1), (t_2, t'_2) do krzywej i dołączając do każdej z tych stycznych prostę $m\sigma$, $m'\sigma'$, znajdziemy dwie pary prostych, dających dwa rozwiązania zadania.

Środek podobieństwa wprost wyznaczy dwa inne rozwiązania.

484. Zadanie XXV. — *Przez punkt dany nakreślić płaszczyznę styczną wspólną dla powierzchni obrotowej i dla ostrokręgu.* — Ponieważ styczność z ostrokręgiem odpowiada dwu a styczność z powierzchnią obrotową jednemu warunkowi, więc mamy trzy warunki niezbędne i dostateczne do wyznaczenia szukanej płaszczyzny stycznej.

Żeby rozwiązać to zadanie, należy przedewszystkiem nakreślić przez wierzchołek ostrokręgu danego ostrokrąg pomocniczy, opisany na powierzchni obrotowej, a następnie jak w poprzedzającem zadaniu, znaleźć płaszczyznę styczną wspólną obu ostrokręgom mającym wierzchołek wspólny.

485. Jako szczególny i nader zajmujący przypadek tego zadania obierzmy *wykreślenie płaszczyzny stycznej wspólnej do kuli i do ostrokręgu obrotowego.*

Pierwsze rozwiązanie. — Należy w ostrokrąg dany wpisać kulę równą kuli danej i przez wierzchołek ostrokręgu nakreślić płaszczyzny styczne wspólne obu kulom (§ 483), gdyż wówczas środki podobieństwa kul przypadają w środku prostej łączącej środki tych powierzchni, a punkt w nieskończoności na tejże prostej.

Drugie rozwiązanie. — Jeżeli oznaczymy przez P płaszczyznę styczną szukaną (fig. k_5), przez o, ω środek i punkt dotknięcia kuli, przez Sz oś ostrokręgu, zaś przez Sg jego tworzącę dotknięcia, to zmieniając położenie płaszczyzny P w ten sposób, żeby różne jej punkta przebiegały w kierunku prostopadłym do tejże płaszczyzny drogi równe promieniowi kuli, płaszczyzna ta przyjmie położenie Q równoległe do P, i będzie styczną wzdłuż prostej Σg_1 równoległej do sg, do nowego ostrokręgu obrotowego, mającego tęż samą oś i też same tworzące, co ostrokrąg pierwszy po zmianie położenia, w kierunku prostopadłym do P, o długość równą promieniowi kuli.

Postępując tak dalej, sprowadzimy zadanie do znalezienia płaszczyzny stycznej do ostrokręgu pomocniczego, przechodzącego przez środek kuli. Zmieniając kierunek zmiany położenia, znajdziemy drugi ostrokrąg pomocniczy i każdy z nich da nam dwa rozwiązania.

Wykreślenie rysunku (*fig.* 328, tab. XXXIII). — Weźmy kulę przedstawioną przez dwa obwody pozorne na obu płaszczyznach rzutów, i ostrokrąg dany przez swój wierzchołek s, s' i przez podstawę C. Przenieśmy tworzącę $sh, s'h'$ równolegle do niej samej i jej długość przyjmijmy za promień R kuli; oznaczywszy przez $sh, s'h'$ rzuty tej linii zaś przez h jej ślad poziomy, to ostrokrąg pomocniczy będzie miał za wierzchołek s, σ' a za podstawę okrąg koła o promieniu sh_1, i którego h_1 jest punktem przejścia; otóżto do tego ostrokręgu należy nakreślić przez punkt o, o' zewnątrz obrany płaszczyznę styczną. W tym celu nakreślmy rzuty so, $\sigma'o'$ prostej łączącej wierzchołek z punktem zewnętrznym, wyznaczmy następnie ślad poziomy θ tej prostej, i z tego punktu poprowadźmy styczne

do podstawy ostrokręgu pomocniczego ; jedna z nich *ot* będzie śladem poziomym jednej z płaszczyzn stycznych do tegoż ostrokręgu.

Płaszczyzna styczna do ostrokręgu pierwotnego, a odpowiadająca tej, którą w tej chwili nakreśliliśmy, ma za ślad poziomy styczną P do krzywej C, nakreśloną równolegle do θt ; α jest jednym z punktów

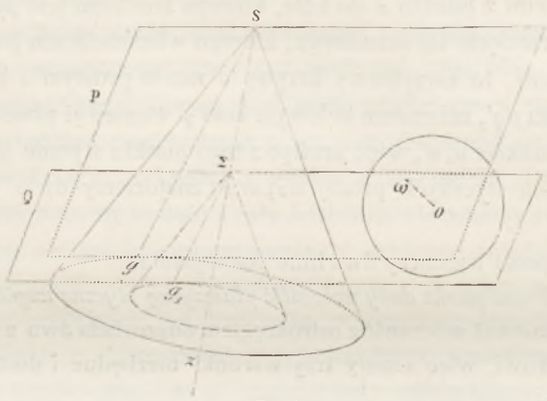

Fig. k_5.

jej śladu pionowego, drugi punkt zaś przejścia tej linii znajdziemy, kreśląc ślad pionowy v' prostej równoległej do P, a przechodzącej przez punkt s, s'.

Jednem z rozwiązań jest płaszczyzna $P\alpha P'$, trzy pozostałe dadzą się wyznaczyć w sposób zupełnie taki sam, jak poprzedzający.

486. Zadanie XXVI. — *Nakreślić płaszczyznę styczną do trzech powierzchni obrotowych, z których dwie są podobnemi* (homothétiques). — Ponieważ środek podobieństwa dwu powierzchni *podobnych* jest wierzchołkiem ostrokręgu opisanego na nich obydwóch, więc wystarczającem będzie nakreślić płaszczyzny styczne wspólne do tego ostrokręgu i do ostrokręgu, mającego tenże sam wierzchołek, a opisanego na trzeciej powierzchni danej.

487. Zastosowanie. — *Nakreślić płaszczyznę styczną do trzech kul danych.* — Jeżeli za płaszczyznę figury przyjmiemy płaszczyznę środków c_1, c_2, c_3, kul danych (fig. k_6), i nakreślimy koła wielkie prze-

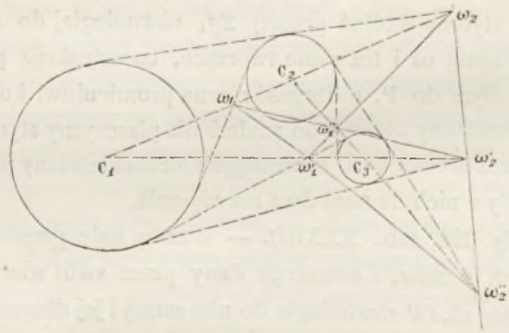

Fig. k_6.

cięcia się tej płaszczyzny z trzema kulami danemi, to znajdziemy, że kule dane brane po dwie są podwójnie podobne, i że ich środki podobieństwa dla kul mających za środki c_1, c_2 są ω_1, ω_2; ω'_1, ω'_2 dla kul mających za środki c_1, c_3 ; i w końcu ω''_1, ω''_2 dla kul mających za środki c_2, c_3.

Wszelka płaszczyzna styczna wspólna trzem kulom, musi przejść przez jeden z otrzymanych środków podobieństwa; kombinując więc te kule po dwie we wszystkie możliwe sposoby, otrzymamy trzy kombinacye. Wnosimy ztąd, że sześć środków podobieństwa znalezionych powyżej, muszą leżeć brane po trzy na jednej prostej, i że są one wierzchołkami czworoboku zupełnego $\omega'_1\omega''_1\omega'_2\omega''_2\omega'_3\omega''_3$, którego boki noszą nazwę osi podobieństwa kul.

Ponieważ wszelka płaszczyzna styczna do jednej z dwu powierzchni podobnych, a przechodząca przez środek podobieństwa, jest także styczną do drugiej, więc wnosimy ztąd, że wszelka płaszczyzna styczna do jednej z kul, a przechodząca przez oś podobieństwa, dotyka dwu pozostałych powierzchni i odpowiada warunkom zadania.

Ponieważ dowiedliśmy przedewszystkiem, że wszelka płaszczyzna zadosyć czyniąca zadaniu winna przechodzić przez jednę z osi, więc widzimy, że płaszczyzny styczne do jednej z kul, a przechodzące przez każdę z osi podobieństwa, są rozwiązaniami zadania.

Kreślenie płaszczyzny stycznej do kuli, a przechodzącej przez prostę daną, zostało już podane w paragrafie **478**, pozostaje więc tylko wyznaczyć liczbę rozwiązań, które zadanie nasze przedstawić może.

Jeżeli bowiem wszystkie boki czworoboku zupełnego $\omega_1\omega_2\omega'_1\omega'_2\omega''_1\omega''_2$ leżą zewnątrz kuli, każdy z nich daje dwa rozwiązania, więc zadanie ma ośm rozwiązań.

Rozbierzmy teraz przypadki szczególne.

Jeżeli dwie powierzchnie są podobne, to wszelka rozbieżna wychodząca ze środka podobieństwa, a przecinająca jednę z nich, musi przecinać drugą, przedstawia bowiem ona na tej ostatniej punkta odpowiednie punktom przecięcia pierwszej. Jeżeli rozbieżna jest styczną do jednej z powierzchni, to ma ona na niej dwa punkta zchodzące się w jeden, a wskutek tego, ma na drugiej dwa punkta odpowiednie, zchodzące się również w jeden, t. j. że ta rozbieżna musi także być styczną do drugiej powierzchni. Wreszcie, jeżeli rozbieżna nie ma żadnego punktu na jednej powierzchni, to nie ma ona także żadnego punktu na drugiej, gdyż każdemu punktowi jednej, winien odpowiadać na rozbieżnej wychodzącej ze środka podobieństwa, punkt na drugiej i odwrotnie.

Ztąd wynika, 1° że wszelka oś podobieństwa styczna do jednej kuli, musi być styczną do dwu pozostałych i daje tylko jedno rozwiązanie; 2° że wszelka oś sieczna jednej z kul, będzie sieczną dwu pozostałych i nie przedstawi żadnego rozwiązania.

Liczba więc rozwiązań straconych może być parzystą lub nieparzystą, i może przybierać wszelkie wartości zawarte pomiędzy 0 i 8, czyli, że zadanie może mieć zero, jedno, dwa, trzy, i t. d. aż do ośmiu rozwiązań.

ROZDZIAŁ V

HYPERBOLOIDA OBROTOWA JEDNOPOWŁOKOWA LUB POWIERZCHNIA SKOŚNA OBROTOWA

488. Hyperboloidą obrotową jednopowłokową nazywamy powierzchnię utworzoną obrotem prostej naokoło osi, kiedy tworząca i oś nie leżą na jednej płaszczyznie. Wkrótce dowiedziemy, że ta powierzchnia jest właśnie powierzchnią podaną pod tąż nazwą w paragrafie **338**.

Jeżeli oznaczymy przez Z (fig. k_7) oś a przez G tworzącę, to różne punkta tej ostatniej, obracając się naokoło osi Z, opiszą równoleżniki, z których najmniejszy będzie opisany przez spodek p najkrótszej odległości prostych Z i G; ten równoleżnik najmniejszy, jak to już wiemy, zwie się kołem szyjnem lub naszyjnikiem.

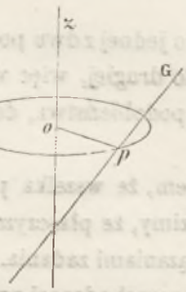

Fig. k_7.

489. Twierdzenie I. — *Rzuty tworzących prostolinijnych hyperboloidy jednopowłokowej na płaszczyznę koła szyjnego lub na płaszczyznę doń równoległą, są styczne do koła szyjnego lub do jego rzutu* (fig. k_8). — Oznaczmy przez Z oś, przez G jedno z położeń tworzącej prostolinijnej, przez *op* prostopadłę wspólną do Z i do G, przez C koło szyjne, zaś przez M, *m* jeden z punktów leżących na G i jego rzut na płaszczyznę koła szyjnego.

Ponieważ rzutem tworzącej G na płaszczyznę koła szyjnego C jest *pm*, a prosta *op* jest prostopadłą do G i do Z, jest ona zatem także prostopadłą co do kierunku, do prostej *Mm* równoległej do Z,

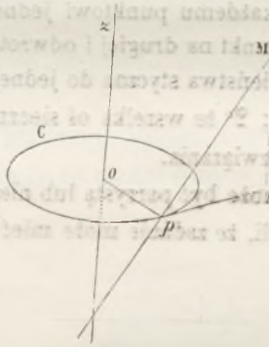

Fig. k_8.

a więc i do płaszczyzny *pMm* i do prostej *pm* leżącej na tej płaszczyznie. Ponieważ odwrotnie *pm* jest prostopadłą do promienia *op* koła szyjnego C, więc jest ona styczną i do koła szyjnego.

490. Twierdzenie II. — *Przecięcia płaskie hyperboloidy obrotowej jednopowłokowej są krzywemi drugiego stopnia* (fig. k_9). — Ponieważ stopień jakiejkolwiek krzywej jest ten sam co stopień jej rzutu na jakąkolwiek płaszczyznę (§ 456), więc dowiedziemy, że rzut wspólnego przecięcia na płaszczyznę koła szyjnego jest krzywą stożkową.

Oznaczmy przez Z oś, przez G jednę z tworzących, przez *op* najkrótszą odległość tych prostych, przez γ koło szyjne, przez P płaszczyznę sieczną, przez M punkt spotkania P z G, przez *m* rzut punktu

M na płaszczyznę koła szyjnego γ, przez AB ślad P na płaszczyznę koła szyjnego, przez α kąt stały utworzony przez tworzące prostolinijne z tąż płaszczyzną, wreszcie przez β kąt płaszczyzny P z płaszczyzną koła szyjnego.

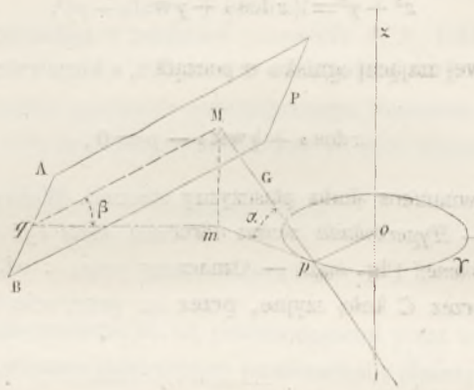

Fig. 60.

Nakreślmy kąt β prowadząc z punktu m prostopadłę mq do AB, i kreśląc prostę łączącą punkta M i q.

Na płaszczyznie koła szyjnego przyjmując dwie osie prostokątne jakiekolwiek mamy najprzód równanie koła szyjnego

$$(x-p)^2+(y-q)^2-R^2=c=0, \tag{1}$$

zaś równanie śladu AB

$$x\cos\varphi+y\operatorname{wst}\varphi-p=d=0. \tag{2}$$

Z tych otrzymamy

$$Mm=mp\operatorname{sty}\alpha=mq\operatorname{sty}\beta. \tag{3}$$

Ponieważ zaś $\overline{mp}^2$ jest potęgą punktu m względem okręgu koła γ, czyli

$$\overline{mp}^2=c;$$

a równanie (2) daje

$$mq=d.$$

więc podstawiając w (3) otrzymamy

$$c\operatorname{sty}^2\alpha=d^2\operatorname{sty}^2\beta,$$

czyli równanie kształtu

$$c-\lambda d^2=0, \tag{4}$$

które jest równaniem krzywej stożkowej podwójnie stycznej do koła szyjnego, co było do dowiedzienia.

491. Wniosek. — *Rzut przecięcia płaskiego ostrokręgu obrotowego na płaszczyznę, przechodzącą przez wierzchołek a prostopadłą do osi, jest krzywą stożkową, której jednem ogniskiem jest wierzchołek ostrokręgu, a kierownicą odpowiednią ślad płaszczyzny siecznej na płaszczyznę rzutów.* — Ponieważ ostro-

krąg obrotowy jest hyperboloidą obrotową jednopowłokową, której promień koła szyjnego jest równym zeru, więc równanie rzutu szukanego znajdziemy, zakładając w (1) $p=0$, $q=0$ i $R=0$, i podstawiając w (3) za c i d ich wartości odpowiadające; będzie więc:

$$x^2+y^2=\lambda(x\,\mathrm{dos}\,\varphi+y\,\mathrm{wst}\,\varphi-p)^2,$$

które jest równaniem stożkowej mającej ognisko w początku, a kierownicę odpowiednią przedstawioną przez równanie

$$x\,\mathrm{dos}\,\varphi+y\,\mathrm{wst}\,\varphi-p=0,$$

a które znów jest właśnie równaniem śladu płaszczyzny siecznej. Wniosek więc jest dowiedzionym.

492. **Twierdzenie III.** — *Hyperboloida skośna obrotowa może być utworzoną zupełnym obrotem hyperboli naokoło jej osi głównej* (fig. [illegible]). — Oznaczmy przez z oś, przez G tworzącą, przez op ich wspólną prostopadłą, przez G koło szyjne, przez ox przecięcie się płaszczyzny koła szyjnego

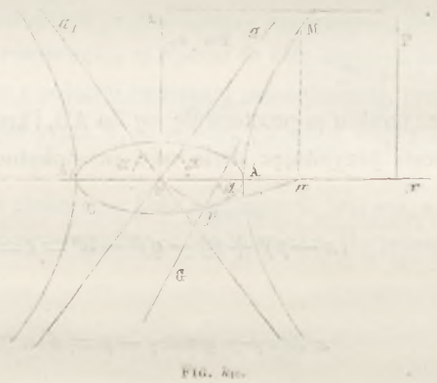

Fig. [illegible].

z płaszczyzną jakąkolwiek P przechodzącą przez z, przez M punkt spotkania się P z G, przez m rzut punktu M na ox, wreszcie przez α kąt stały utworzony przez G z płaszczyzną koła szyjnego. — Jeżeli nakreślimy prostę mp, t. j. rzut G na płaszczyznę koła szyjnego, to ona będzie (§ 489) styczną do koła szyjnego, a przechodzącą przez punkt p.

Załóżmy teraz $Mm=z$ i $om=x$, i szukajmy równania miejsca geometrycznego punktu M odniesionego do osi oy, oz, to trójkąt Mmp daje:

$$z=mp\,\mathrm{sty}\,\alpha.$$

Z trójkąta zaś opm oznaczając promień koła szyjnego przez R, otrzymamy

$$mp^2=x^2-R^2.$$

Tę wartość na pm podstawiając w pierwszem równaniu, otrzymamy

$$z=\sqrt{x^2-R^2}\,\mathrm{sty}\,\alpha,$$

czyli

$$z^2-x^2\,\mathrm{sty}^2\,\alpha=-R^2\,\mathrm{sty}^2\,\alpha. \tag{1}$$

Ten ostatni związek jest równaniem miejsca geometrycznego punktu M, i przedstawia jak widzimy

hyperbolę odniesioną do swych osi, której *oz* jest osią urojoną, zaś *ox* osią rzetelną, dla znalezienia wierzchołków osi załóżmy $z = 0$ w (1), a znajdziemy

$$x = t \pm R,$$

czyli, że wierzchołki osi przypadają w punktach przecięcia A, A_1 koła szyjnego z płaszczyzną południka uważanego.

Poszukajmy wreszcie asymptot przecięcia południkowego. Ponieważ środek leży w początku, więc równanie kwadratowe dla tych prostych, sprowadzając do zera wszystkie wyrazy stopnia drugiego w równaniu (1), będzie

$$z = \pm x \operatorname{sty} \alpha$$

lub

$$z^2 - x^2 \operatorname{sty}^2 \alpha = 0.$$

t. j., że asymptoty są dwiema prostemi *oa*, oa_1 przechodzącemi przez środek, i nachylonemi do osi *ox* pod kątem α, który czynią tworzące prostolinijne powierzchni z płaszczyzną koła szyjnego.

Ponieważ hyperbole nakreślone na różnych płaszczyznach południkowych są sobie równe, więc widzimy, że powierzchnia jest utworzoną obrotem zupełnym hyperboli naokoło swej osi urojonej.

Podczas ruchu obrotowego, asymptoty tworzą ostrokrąg styczny do hyperboloidy podług równoleżnika leżącego w nieskończoności, ostrokrąg ten nosi nazwę ostrokręgu asymptotycznego hyperboloidy.

493. Twierdzenie IV. — *Hyperboloida obrotowa jednopowłokowa ma podwójny sposób tworzenia prostoliniiny* (fig. l_1). — Oznaczmy przez *z* oś, przez G tworzącę prostolinijną, przez *op* ich najkrótszą

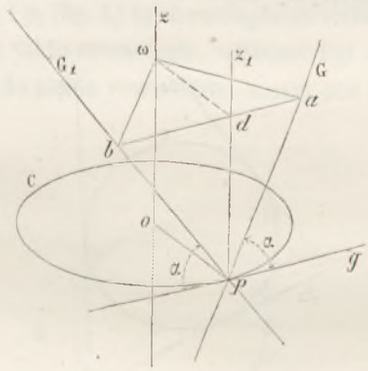

Fig. l_1.

odległość, przez C koło szyjne, zaś przez α kąt, jaki tworzy G z płaszczyzną koła szyjnego, a mający za miarę kąt płaski zawarty pomiędzy G i jej rzutem *g* na płaszczyznę koła szyjnego. Nakreślmy na płaszczyznie G*pg* prostę G_1 nachyloną pod kątem α do rzutu *g*, i dowiedźmy, że powierzchnia utworzona obrotem zupełnym prostej G_1 naokoło osi *z* jest taż sama, co powierzchnia utworzona obrotem zupełnym tworzącej G naokoło tejże osi *z*. W tym celu wystarczy dowieść, że równoleżniki jednej powierzchni zchodzą się z równoleżnikami drugiej. Nakreślmy więc przez *p* prostę z_1 równoległą do *z*, a leżącą na płaszczyznie G*pg*, i przetnijmy proste *z*, G, G_1, z_1 płaszczyzną prostopadłą do *z*; znalazłszy punkta przecięcia ω, *a*, *b*, *d*, połączmy takowe, a mianowicie punkta (ω, *b*), (ω, *a*), (ω, *d*) liniami prostemi, i zauważmy, że punkta *a*, *b*, *d* leżą na prostej wspólnego przecięcia płaszczyzny,

prostopadłej do z z prostemi G, g, G_1; tę nakreśliwszy znajdziemy dalej, że prosta ωd i wspólna prostopadła op są do siebie równoległemi, jako przecięcia dwu płaszczyzn równoległych trzecią, zkąd znów wynika, że ponieważ op jest prostopadłą do płaszczyzny prostych z_1, G, to i równoległa do niej musi być prostopadłą do ab.

Ponieważ dwa trójkąty bpd, apd są równe, gdyż ich kąty przy p jako dopełniające kąta α są równe, bok dp jest wspólny i są one nadto prostokątne w punkcie d, więc dwa boki ad i bd są równe. Ztąd wypada, że dwa trójkąty $b\omega$, $da\omega$ jako mające bok ωd wspólny a bok bd równy ad, są sobie równe, a więc i przeciwprostokątnie ich $a\omega$, $b\omega$ muszą być sobie równe.

Obracając teraz G i G_1 naokoło z, to punkta a i b opiszą na tejże samej płaszczyznie prostopadłej do z równoleżniki, które mają środek wspólny, zaś promienie ωa, ωb, równe zchodzą się z sobą, a ponieważ są one jakiekolwiek, więc twierdzenie jest dowiedzionem.

Oprócz dwu układów tworzących tutaj podanych, powierzchnia nie ma innego układu prostolinijnego; gdyby bowiem miała jeszcze inny, to znaleźlibyśmy trzy proste przechodzące przez jeden punkt powierzchni, któreby leżały na płaszczyznie stycznej w tymże punkcie, t. j. że ta płaszczyzna przecinałaby powierzchnię podług trzech prostych, co jest niemożliwem, gdyż przecięcie powierzchni płaszczyzną jest krzywą stożkową.

494. Różnice tworzących różnych układów. — Dla rozróżnienia tworzących dwu układów przedstawmy sobie patrzącego stojącego na osi i mającego nogi w punkcie ω t. j. w środku koła szyjnego, a patrzącego na tworzącę; część tej tworzącej, leżąca poniżej koła szyjnego, będzie zawsze jużto na prawo jużteż na lewo dla jednego układu, i odwrotnie na lewo lub na prawo dla drugiego.

Jeżeli więc przedstawimy rzuty g_1, g_2, g_3 (fig. l_2) różnych tworzących na płaszczyznie koła szyjnego wziętej za płaszczyznę figury, i oznaczymy części ich widzialne względem tejże płaszczyzny, to bez

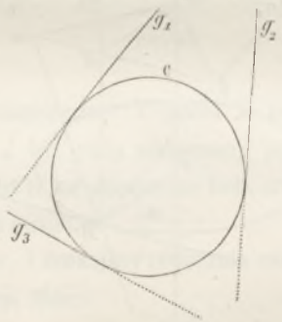

Fig. l_2.

trudności rozróżnimy tworzące należące do rozmaitych układów; będzie bowiem dla tworzącej G_1 część widzialna po prawej stronie patrzącego, dla tworzącej G_2 będzie ona po lewej, a dla tworzącej G_3 znów po prawej stronie, czyli G_1 i G_3 należą do jednego układu, a G_1 i G_2 do układów różnych.

495. Twierdzenie. — *Dwie tworzące należące do układów różnych, są zawsze na jednej płaszczyznie zaś dwie tworzące jednego układu nigdy nie leżą na jednej płaszczyznie* (fig. l_3). — Przyjmijmy za płaszczyznę figury płaszczyznę koła szyjnego, i oznaczmy przez C, g_1, g_2 koło szyjne, i rzuty na jego płaszczyznę dwu tworzących G_1, G_2 układów różnych (§ 494). — Jeżeli przypuścimy najprzód, że g_1 i g_2 nie są do siebie równoległe, to trzeba, żeby G_1 i G_2 leżały na jednej płaszczyznie, żeby odległość γ_1, jednego z punktów tworzącej G_1 od płaszczyzny koła szyjnego, amającego za rzut punkt m, była równa

odległości γ_2 od tejże płaszczyzny jednego z punktów tworzącej G_2, mającego za rzut tenże punkt m_1. Otóż, jeżeli oznaczymy przez α kąt stały jaki czynią tworzące z płaszczyzną koła szyjnego, zaś przez a_1, a punkta dotknięcia g_1 i g_2 z kołem szyjnem C, to znajdziemy

$$\gamma_1 = ma_1 \operatorname{sty} \alpha,$$

$$\gamma_2 = ma_2 \operatorname{sty} \alpha;$$

a ponieważ $m\,a_1 = ma_2$, więc

$$\gamma_1 = \gamma_2$$

czyli, że tworzące G_1, G_2 przecinają się z sobą.

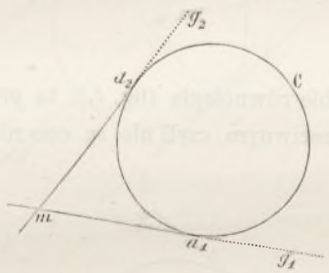

Fig. l_3.

Przypuściwszy teraz, że rzuty g_1 i g_2 (fig. l_4) są równoległe do siebie, to tworzące G_1 i G_2 będą miały rzuty na płaszczyznę koła szyjnego także równoległe, utworzą kąt α z tąż płaszczyzną, i będą jednakowo pochylone ku niej, jako zaś do siebie równoległe, muszą one leżeć na jednej płaszczyznie.

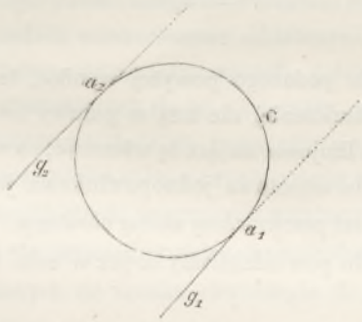

Fig. l_4.

Zajmując się obecnie drugą częścią twierdzenia, oznaczmy przez C (fig. l_5) koło szyjne, które z założenia leży na płaszczyznie figury, a przez g_1, g_2 rzuty na tęż płaszczyznę tworzących tegoż samego układu G_1, G_2.

Przypuśćmy przedewszystkiem, że g_1, g_2 przecinają się z sobą w punkcie m; w takim razie tworzące w przestrzeni mogłyby mieć tylko jeden punkt wspólny, mający za rzut punkt m, co jest niemożliwem

gdyż m odpowiada dwu punktom, leżącym na dwu tworzących G_1, G_2 z jednej i z drugiej strony koła szyjnego.

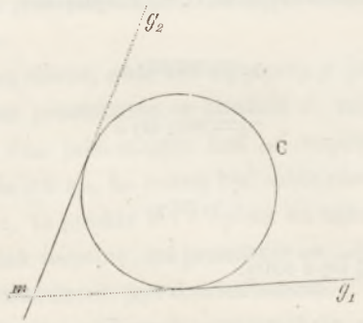

Fig. 16.

Jeżeli zaś rzuty g_1, g_2 są do siebie równoległe (fig. l_6), to proste G_1 i G_2 są pochylone do płaszczyzny koła szyjnego w kierunku przeciwnym, czyli nie są one równoległe w przestrzeni, a więc i nie leżą na jednej płaszczyznie.

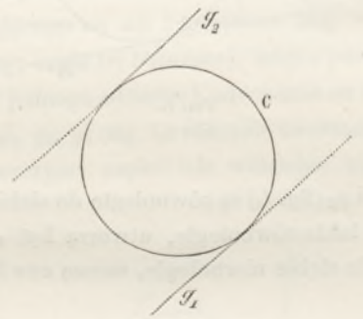

Fig l_6.

496. Uwaga I. — Z dowodzenia podanego powyżej wynika, że dwie tworzące jednego układu bardzo blizkie i zbliżające się nieskończenie, nie leżą w granicy na jednej płaszczyznie. Dowiedziemy w dalszym ciągu, że powierzchnie linijowe mające tę własność, są skończonemi, i wówczas będziemy mogli powiedzieć, że hyperboloida obrotowa jednopowłokowa jest jedyną powierzchnią, będącą zarazem skośną i obrotową, czyli jest *powierzchnią skośną obrotową*.

Na początku niniejszego rozdziału powiedzieliśmy to już w celu usprawiedliwienia się z przyjętej przez nas klasyfikacyi.

497. Uwaga II. — Przez każdy punkt powierzchni skośnej obrotowej przechodzą dwie tworzące prostolinijne różnych układów, które są swemi własnemi stycznemi i wyznaczają płaszczyznę styczną w punkcie uważanym.

498. Uwaga III. — *Wszelka płaszczyzna przechodząca przez jednę tworzącę prostolinijną hyperboloidy obrotowej jednopowłokowej, jest styczną do powierzchni w jednym z punktów tej tworzącej.* — Rzeczywiście; skoro bowiem płaszczyzna ta przecina powierzchnię podług krzywej stożkowej, której częścią jest tworząca prostolinijna, przecięcie składa się więc z dwu prostych, a płaszczyzna dotyka powierzchni w punkcie wspólnego przecięcia.

499. **Określenie.** — Dwie tworzące różnych układów jeżeli są równoległe, wyznaczają płaszczyznę styczną w nieskończoności, którą nazywamy płaszczyzną *asymptotyczną* powierzchni.

500. **Twierdzenie V.** — *Ostrokrąg asymptotyczny hyperboloidy obrotowej jednopowłokowej jest obwijającym płaszczyzn asymptotycznych tej powierzchni* (fig. l_7). — Oznaczmy przez C koło szyjne, przez o jego środek, przez g_1, g_2 rzuty na płaszczyznę koła szyjnego dwu tworzących G_1, G_2 prostolinijnych i równoległych, przez g rzut na tęż płaszczyznę tworzącej ostrokręgu asymptotycznego, równoległej do G_1 i G_2. Uważajmy prostę łączącą punkta a_1, a_2 dotknięcia się tworzących g_1, g_2 z kołem

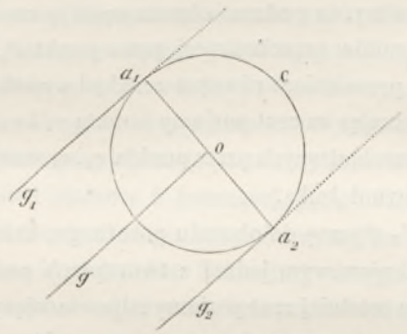

FIG. l_7.

szyjnem C, i zważmy, że w przestrzeni tworzące G, G_1, G_2 są równoległe i opierają się na prostej a_1a_2, a znajdziemy, że te trzy tworzące leżą na jednej płaszczyznie, która jest płaszczyzną asymptotyczną dotykającą hyperboli w punkcie nieskończenie oddalonym na tworzących G, G_1, G_2, a prócz tego jest płaszczyzną styczną do ostrokręgu asymptotycznego wzdłuż tworzącej G. Więc ostrokrąg asymptotyczny jest obwijającym płaszczyzn asymptotycznych hyperboloidy.

501. **Twierdzenie VI.** — *Ostrokrąg asymptotyczny hyperboloidy obrotowej jednopowłokowej jest miejscem geometrycznem prostych, otrzymanych z przeniesienia, do środka koła szyjnego, asymptot do przecięć płaskich hyperboloidy, równolegle do nich samych.*—Ponieważ asymptotą do przecięcia płaskiego, jest styczna do tego przecięcia w punkcie nieskończenie oddalonym, a podobne punkta znajdują się na przecięciu płaszczyzny siecznej z dwoma parami tworzących, należących do układów różnych, lecz równoległych do siebie co dwie i równoległych do tej płaszczyzny, ponieważ nadto, proste powyższe wyznaczają dwie płaszczyzny asymptotyczne, których przecięcia się z płaszczyzną sieczną są odpowiednio prostemi równoległemi do każdej z nich, i przedstawiają właśnie asymptoty odpowiednie przecięciu, więc te asymptoty są równoległe do tworzących uważanych. Miejsce zatem geometryczne prostych równoległych do asymptot do przecięć płaskich, przechodzących przez środek powierzchni, jest miejscem tworzących przeniesionych do środka równolegle do nich samych, czyli twierdzenie jest dowiedzionem.

502. **Zadanie I.** — *Hyperboloidę obrotową jednopowłokową przedstawić przez swe obwody pozorne* (*fig.* 329, tab. XXXIII). — Jeżeli oś powierzchni jest pionowa, to hyperboloida ma cztery tworzące prostolinijne równoległe do płaszczyzny pionowej, które służą bardzo często do jej utworzenia, i noszą wskutek tego nazwę *tworzących głównych.*

Przypuszczając że powierzchnia jest wyznaczoną przez jej oś z, z' i przez jednę z tworzących głównych g, g', szukajmy jej obwodów pozornych. Ponieważ wspólna prostopadła do prostych danych ma za rzut pionowy punkt p' przecięcia się osi z' z prostą g', a za rzut poziomy prostopadłę zp

spuszczoną z punktu z na p, więc kreśląc z punktu z jako środka, promieniem równym zp, okrąg koła, znajdziemy rzut poziomy koła szyjnego czyli obwód pozorny w rzucie poziomym. Rzut pionowy koła szyjnego jest przedstawionym przez prostę równoległą do osi rzutów, a przechodzącą przez punkt p', i zakończoną na linijach rzutów stycznych do rzutu poziomego tej krzywej.

Oznaczmy teraz obwód pozorny w rzucie pionowym. Pierwszy sposób polega na kreśleniu obwijającej rzutów pierwszych prostolinijnych (§ 395ter), które z łatwością znajdziemy, obracając g, g' naokoło osi z, z' i kreśląc np. te z tworzących, które dzielą koło szyjne na części równe. Drugi sposób polega na wyznaczeniu rzutu pionowego południka obrazu (§ 390); w tym celu obierzmy jeden z punktów np. c, c' na g, g' i zważmy, że podczas obrotu opisuje on okrąg koła, mający za rzut pionowy prostę równoległą do osi rzutów przechodzącej przez punkt c', a za rzut poziomy okrąg koła opisany z punktu z jako środka, promieniem równym zc, zkąd wypada, że przecięcia się równoleżnika z płaszczyzną południka obrazu, mając za rzut poziomy punkta c_1 i c_2, które po podniesieniu z kładu przypadają na linijach rzutów przechodzących przez punkta c_1, c_2, znajdują się w punktach c'_1, c'_2 należących do rzutu pionowego równoleżnika.

Wyznaczmy teraz w punkcie c'_1 styczną do obwodu pozornego, którego szukamy.

Otóż, styczna ta jest rzutem pionowym jednej z tworzących prostolinijnych, przecinających się w punkcie c_1, c'_1 (§ 342), której to ostatniej rzut poziomy odpowiadający otrzymamy, kreśląc z punktu c_1 jednę ze stycznych c_1p_1 do koła szyjnego; podnosząc teraz punkt p_1 do p'_1 i kreśląc prostę, łączącą punkta p'_1, c'_1, znajdziemy styczną szukaną. W sposób tu podany możemy nakreślić tyle stycznych i tyle wyznaczyć punktów, ile potrzeba do wyznaczenia samej krzywej.

Stosując sposób ogólny kreślenia do równoleżnika, przechodzącego przez ślad poziomy θ prostej g, g', który jest śladem poziomym hyperboloidy, wyznaczyliśmy na rysunku punkta spotkania obwodu pozornego szukanego z osią rzutów.

Można także wyznaczyć hyperbolę południkową przez jej oś główną i przez asymptoty, gdyż zasadzając się na wynikach podanych w paragrafie 492, widzimy, że końce osi głównej leżą w punktach a' i b', to jest w końcach rzutu pionowego koła szyjnego, jakoteż że jedna z asymptot odpowiada g' a drugą otrzymuje się, kreśląc prostę g'_1 symetryczną do g' względem osi z'. Znane czytelnikowi własności odcinków hyperboli pozwolą z łatwością nakreślić tę krzywę, mając asymptoty i jeden punkt krzywej.

503. Zadanie II. — *Znając rzuty osi z, z' i rzuty g, g' tworzącej głównej powierzchni skośnej obrotowej, znaleźć rzuty jednego z jej punktów, i nakreślić przezeń do powierzchni płaszczyznę styczną* (*fig.* 330, tab. XXXIII). — Jeżeli nakreślimy obwód pozorny powierzchni w rzucie poziomym, t. j. okrąg koła ze środka z promieniem zp, równym najkrótszej odległości tworzącej głównej od osi, i weźmiemy następnie gdziekolwiek, byleby zewnątrz tego obwodu, rzut poziomy m jednego punktu powierzchni, to rzut jego pionowy odpowiadający znajdzie się na rzucie tegoż nazwiska równoleżnika, mającego za rzut poziomy okrąg koła o środku z, a którego punktem przejścia będzie punkt m. Ten okrąg koła spotyka g w dwu punktach a i b, które po podniesieniu ich z kładu przypadną w punktach a' i b' na g'. Jeżeli teraz z każdego z tych punktów nakreślimy linije równoległe do osi rzutów, to znajdziemy rzuty pionowe równoleżników powierzchni przechodzących przez punkt M, na których linija rzutów przechodząca przez punkt m, wyznaczy rzuty pionowe m'_1, m'_2 punktów szukanych.

Jednem słowem, na powierzchni znajdują się dwa punkta (m, m'_1), (m, m'_2), mające rzut poziomy w punkcie m.

Płaszczyzna styczna w punkcie (m, m'_1) jest wyznaczoną (§ 497) przez tworzące różnych układów

przechodzące przez ten punkt, a których rzutami poziomemi są styczne md i mc do rzutu poziomego koła szyjnego. Można byłoby znaleźć rzuty pionowe tych tworzących, lecz prościej będzie szukać ich śladów poziomych. W tym celu weźmy ślad θ prostej g, g', i opiszmy ze środka z promieniem $z\theta$ okrąg koła, który będzie śladem poziomym hyperboloidy. Śladem tegoż nazwiska tworzących płaszczyzny stycznej szukanej, będzie t, t_1, gdyż m, m'_1 jest ponad kołem szyjnem, zkąd wypada, że prosta łącząca punkta t, t_1 jest śladem poziomym P płaszczyzny stycznej; prosta tej płaszczyzny, przechodząca przez punkt m, m_1, wyznaczy przez swój ślad pionowy v' jeden z punktów przejścia śladu płaszczyzny stycznej na płaszczyznie tegoż samego nazwiska, zaś drugi punkt tego śladu znajdziemy w punkcie α na przecięciu się śladu P z osią rzutów xy. Łącząc więc obecnie punkt α z v' liniją prostą, otrzymamy szukany ślad pionowy P', i szukana płaszczyzna styczna jest w tej chwili wyznaczoną przez swe ślady $P_\alpha P'$.

504. Zadanie III. — *Znając płaszczyznę przechodzącą przez tworzącę prostolinijną hyperboloidy obrotowej, znaleźć punkt, w którym ta płaszczyzna dotyka powierzchni* (*fig.* 331, tab. XXXIII). — Zadanie to jest tylko odwróceniem zadania *płaszczyzny stycznej*. Oznaczmy przez z, z' rzuty osi, a przez g, g' rzuty jednej z tworzących. Znalazłszy ślad poziomy θ tworzącej $g_1 g'$, nakreślmy przezeń, w kierunku dowolnym, prostę P, przyjmując takową za ślad poziomy płaszczyzny przechodzącej przez tworzącę g, g', której szukamy punktu dotknięcia z hyperboloidą. Nakreślmy następnie z punktu z jako środka, promieniem zp równym odległości punktu z od g, okrąg koła przedstawiający rzut poziomy koła szyjnego, jakoteż wykreślmy ślad poziomy powierzchni, t. j. okrąg koła mający za środek punkt z, a za punkt przejścia punkt θ. Płaszczyzna dana przecina hyperboloidę podług dwu prostych, z których jedną jest tworząca g, g', a druga ma za ślad poziomy punkt θ_1, przecięcia się P ze śladem, na tejże samej płaszczyznie rzutów hyperboloidy.

Ponieważ druga tak znaleziona tworząca winna być jedną ze stycznych do koła szyjnego, przechodzących przez punkt θ_1, idzie więc tylko o stosowny wybór tej ostatniej odpowiednio do zadania. W tym celu wyobraźmy sobie obserwatora stojącego na osi i patrzącego na tworzącę g, g'; punkt θ znajdzie się po lewej jego stronie, a ponieważ winniśmy wziąć tworzącę innego układu od g, g', więc θ_1 winno się znaleźć po prawej jego stronie, gdy on stoi zawsze na osi i patrzy na drugą tworzącę, leżącą na płaszczyznie danej, czyli, że rzut poziomy tej prostej musi leżeć na stycznej $\theta_1 p_1$. Widzimy ztąd, że szukany punkt dotknięcia ma za rzut na płaszczyznie poziomej rzutów punkt m, który po podniesieniu przypada w punkcie m' wspólnego przecięcia się linii rzutów przechodzącej przez punkt m z tworzącą g'. Ponieważ więc przez punkt m, m' przechodzą dwie tworzące, leżące na jednej płaszczyznie, punkt ten musi być szukanym punktem dotknięcia. Dobrem będzie zapamiętać sposób tu podany odróżnienia tworzących różnych układów, gdyż w ten sposób unikniemy stosowania metody podanej w paragrafie 294 a polegającej na widzialności tworzącej.

Istnieje jeszcze drugi sposób również prosty, co poprzedzający, do odróżnienia tworzących różnych układów, a mianowicie : należy ustawić obserwatora na śladzie poziomym tworzącej tak, żeby on patrzał na koło szyjne, które w przypadku tworzących tegoż samego układu musi leżeć z jednej strony obserwatora, jużto na prawo, jużteż na lewo, a w przypadku dwu tworzących różnych układów po prawej stronie dla jednej z nich, a po lewej dla drugiej.

Zadanie odwrotne płaszczyzny stycznej mogłoby być jeszcze rozwiązanem, ustawiając punkt dotknięcia na przecięciu się tworzącej g, g' z płaszczyzną południka, nakreśloną prostopadle do płaszczyzny stycznej danej.

505 Zadanie IV. — *Mając daną hyperboloidę obrotową jednopowłokową, nakreślić do niej obwiniętę kulistą, dotykającą jej podług wskazanego południka* (*fig.* 332, tab. XXXIII). — Oznaczmy przez z, z'

rzuty osi, a przez g, g' rzuty jednej z tworzących. Weźmy rzut poziomy anb jednego południka, i nakreślmy drugi jego rzut, podnosząc punkt m do m', i kreśląc z tego punktu równoległę do osi rzutów ograniczoną w punktach a' i b' przecięcia się jej z linijami rzutów, obejmującemi pomiędzy sobą rzut poziomy równoleżnika. Ponieważ środek obwiniętej kulistej jest wierzchołkiem wiązki normalnych do powierzchni w rozmaitych punktach cechy, ponieważ nadto płaszczyzna styczna do powierzchni w punkcie m, m' obejmuje tworzącę g, g', więc promień wiązki normalny do powierzchni w punkcie m, m', jest także normalny do tworzącej g, g', że zaś ta ostatnia jest tworzącą obrazu zatem kąt prosty przedstawi się jako taki w rzucie pionowym. Wskutek więc tego, jeżeli nakreślimy prostopadłę do g' przez punkt m', to otrzymamy promień wiązki w rzucie pionowym, a punkt ω' spotkania się tej linii z osią z', będzie rzutem na tęż płaszczyznę rzutów środka obwiniętej kulistej. Drugi rzut tego środka znajdzie się w punkcie z, zaś prosta łącząca punkt Ω z punktem A będzie normalną obrazu, mającą $\omega' a'$ za rzut w rzeczywistej wielkości, i wyznaczającą promień obwiniętej. Obwinięta kulista jest więc teraz jużwyznaczoną przez jej środek ω', z i przez jej promień $\omega' a'$.

506. Zadanie V. — *Mając daną hyperboloidę obrotową jednopowłokową przez jej oś z, z' i przez jej tworzącę główną g, g', znaleźć wierzchołek obwiniętej stożkowej dotykającej tej powierzchni podług wskazanego równoleżnika* (*fig.* 332, tab. XXXIII). — Zachowajmy figurę poprzedzającą i wyznaczmy wierzchołek obwiniętej stożkowej, której cechą jest $ab, a'b'$.

Ponieważ normalna do powierzchni w punkcie a, a' ma za rzut prostę $a'\omega', az$, a nadto ta prosta leżąc na południku obrazu, jest także normalną do tego południka, zatem styczna do południka głównego ma za rzut pionowy prostopadłę $a'\sigma', a'\omega'$, i wyznacza w punkcie σ' przecięcia się jej z osią z' rzut pionowy wierzchołka ostrokręgu opisanego na hyperboloidzie wzdłuż równoleżnika danego, podczas gdy z jest jego drugim rzutem.

507. Zadanie IV. — *Nakreślić przez punkt dany lub równolegle do prostej danej, płaszczyznę dotykającą hyperboloidy obrotowej jednopowłokowej podług równoleżnika wskazanego.* — Rozwiązanie tego zadania nie przedstawia żadnej trudności, umiejąc znaleźć obwiniętę stożkową lub kulistą dotykającą powierzchni podług wskazanego równoleżnika. Sposoby podane w paragrafach **409** i **410** rozwiązują zadanie bez trudności.

508. Zadanie VII. — *Nakreślić przez punkt dany lub równolegle do prostej danej, płaszczyznę dotykającą hyperboloidy obrotowej jednopowłokowej podług wskazanej tworzącej.* — Przez punkt dany lub równolegle do prostej danej należy nakreślić płaszczyznę obejmującą tworzącę wskazaną, a na tej ostatniej płaszczyznie rozwiązać zadanie odwrotne płaszczyzny stycznej (§ **504**).

509. Zadanie VIII. — *Mając daną hiperboloidę obrotową jednopowłokową, nakreślić do niej przez tworzącę wskazaną, płaszczyznę styczną nachyloną do poziomu pod kątem danym.* — Należy nakreślić przez prostę daną płaszczyzny styczne do ostrokręgu obrotowego, mającego wierzchołek na tejże prostej, a tworzące nachylone do poziomu pod kątem danym, i rozwiązać następnie na płaszczyznie i dla hyperboloidy zadanie odwrotne płaszczyzny stycznej (§ **504**).

510. Zadanie IX. — *Mając daną hyperboloidę obrotową jednopowłokową przez jej oś z, z' i przez jednę z jej tworzących głównych g, g', nakreślić do niej płaszczyznę styczną równoległą do płaszczyzny danej* (*fig.* 333, tab. XXXIII). — Ponieważ szukana płaszczyzna styczna winna obejmować dwie tworzące różnych układów, które wskutek tego muszą być równoległe do płaszczyzny $P\alpha P'$, zatem zadanie zprowadza się do kreślenia tworzących równoległych do tej płaszczyzny. Ponieważ tedy tworzące hyperboloidy są równoległe do tworzących ostrokręgu asymptotycznego, należy więc nakreślić ten ostatni, co uczynimy zważając, że wierzchołek tego ostrokręgu znajduje się w środku s, s' hyperboloidy, a prosta

sh, $s'g'$ równoległa do g, g' jest jedną z jego tworzących obrazu. Ponieważ ślad poziomy h tej prostej służy do wyznaczenia punktu przejścia podstawy ostrokręgu na płaszczyznie poziomej rzutów, i ponieważ nadto środek jej znajduje się w punkcie s, s', więc nakreślimy ją z łatwością.

Aby wyznaczyć tworzące ostrokręgu asymptotycznego a równoległe do $P\alpha P'$, nakreślmy przez s, s' płaszczyznę równoległą do danej, posługując się prostą poziomą sv, $s'v'$ płaszczyzny szukanej, która wyznaczy nam punkt v', następnie nakreślmy prostę $R'\gamma$ równoległą do $P\alpha$, zaś przez punkt γ prostę γR do αP, a otrzymamy oba ślady $R\gamma R'$ szukanej płaszczyzny równoległej.

Ślad poziomy γR tej płaszczyzny spotyka ślad poziomy ostrokręgu asymptotycznego w dwu punktach t_1, t_2, które połączone z punktem s prostemi st_1, st_2, przedstawiają rzuty poziome tworzących ostrokręgu, równoległych do płaszczyzny $P\alpha P'$. Ponieważ styczne do rzutu poziomego koła szyjnego, nakreślone w kierunku prostych st, st_2, wyznaczają rzuty poziome tworzących szukanych na hyperboloidzie, a ślady poziome tych prostych znajdują się w punktach t_3, t_4, t_5, t_6, więc muszą, na czem nawet polega sprawdzenie rysunku, styczne w punktach t_1, t_2 do podstawy ostrokręgu asymptotycznego, przechodzić pierwsza przez punkta t_3, t_4, a druga przez punkta t_5, t_6. Sprawdzenie to usprawiedliwia się tem, że styczne do podstawy ostrokręgu w punktach t_1, t_2 są śladami płaszczyzn asymptotycznych, odpowiednich tworzącym przedstawionym w rzucie poziomym przez proste st_1, st_2. Obecnie należy połączyć ślady t_3, t_4, t_5, t_6, i to po dwa w ten sposób, żeby proste łączące je pomiędzy sobą były równoległe do αP, ztąd otrzymamy ślady poziome Q_1, Q_2 dwu płaszczyzn stycznych odpowiadających warunkom zadania. Jeżeli teraz wyznaczymy punkta β_1, β_2 przecięcia się tych prostych z xy, i nakreślimy z tych punktów równoległe Q'_1, Q'_2 do P', to znajdziemy ślady pionowe odpowiadające.

511. Twierdzenie VII. — *Jeżeli dwie powierzchnie drugiego rzędu mają dwie proste wspólne, to ich przecięcie jest układem czterech prostych.* —Niech będą dwie proste D_1, D_2 wspólne; proste te są, bardzo

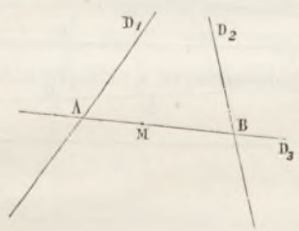

FIG. l_9.

naturalnie, częścią przecięcia się powierzchni uważanych, to przecięcie zaś jako czwartego stopnia, ma punkta leżące nazewnątrz prostych D_1, D_2; jeżeli jednym z tych punktów będzie punkt M, to przez ten punkt można nakreślić prostę D_3, spotykającą dwie proste D_1, D_2 w dwu punktach, które oznaczymy przez A i B. Ponieważ dwie powierzchnie mają trzy punkta wspólne A, M, B z prostą D_3, a wszelka prosta, mająca trzy punkta wspólne z powierzchnią drugiego stopnia, leży na niej w zupełności, więc wnosimy ztąd, że prosta D_3 jest także częścią wspólnego przecięcia, a ponieważ to ostatnie jest czwartego stopnia i obejmuje już trzy proste więc musi ona obejmować i czwartą.

512. Twierdzenie VIII. — *Paraboloida hyperboliczna przedstawia dwa sposoby tworzenia prostolinijne.* — Wiemy, że paraboloida hyperboliczna jest powierzchnią utworzoną przez liniję prostą, poruszającą się równolegle do płaszczyzny stałej P (fig. l_{10}) po dwu prostych D_1, D_2 (§ 339); P jest płaszczyzną kierowniczą, D_1, D_2 są kierownicami powierzchni, a proste ruchome są tworzącemi pierwszego układu. Obierzmy teraz za kierownice drugiego układu proste G_1 i G_2, a za płaszczyznę

kierowniczą płaszczyznę P_1 równoległą do prostych D_1, D_2, i dowiedźmy, że dwie paraboloidy tak utworzone zchodzą się z sobą. Niech G_3 będzie trzecią tworzącą pierwszego układu, a D_1 i D_2 dwiema tworzącemi drugiego układu, to nakreśliwszy trzecią tworzącę D_3 tego ostatniego układu, dostatecznem będzie dowieść, że dwie tworzące jakiekolwiek G_3 i D_3 przecinają się z sobą. Oznaczywszy punkta przecięcia się prostych przedstawionych na figurze, uważmy, że punkta (A, E), (a, c), (B, C) mogą być wzięte za przecięcia prostych D_1, D_2 przez trzy płaszczyzny równoległe do P, a otrzymamy ztąd proporcyę

$$\frac{aA}{aB} = \frac{cE}{cC};$$

odcinki zaś prostych G_1, G_2 dają proporcyę

$$\frac{bB}{bC} = \frac{eA}{eE}.$$

Mnożąc przez się te dwa równania odpowiedniemi stronami, będzie

$$\frac{aA}{aB} \cdot \frac{bB}{bC} = \frac{cE}{cC} \cdot \frac{eA}{eE},$$

czyli

$$\frac{aA}{aB} \cdot \frac{bB}{bC} \cdot \frac{cC}{cE} \cdot \frac{eE}{eA} = 1.$$

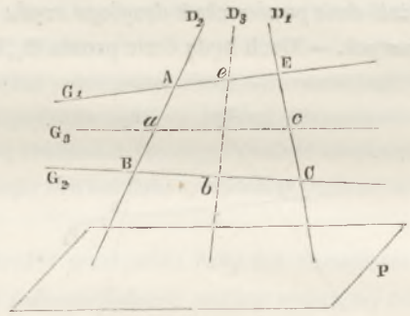

FIG. 110.

Widzimy więc, że iloczyn czterech stosunków odcinków, wyznaczonych przez cztery punkta a, b, c, e na bokach czworokąta skośnego ABCE, jest równym jedności, co dowodzi, na mocy zasadniczej własności geometrycznej, że proste ac, eb przecinają się z sobą.

513. Wynik I. — *Dwie tworzące różnych układów leżą zawsze na jednej płaszczyznie.* — Własność ta wynika odrazu z dowodn twierdzenia.

514. Wynik II. — *Dwie tworzące tegoż samego układu nie leżą nigdy na jednej płaszczyznie.* — Rzeczywiście, gdyby bowiem tak nie było, to tworzące przeciwnego układu, które winny spotykać pierwsze, utworzyłyby płaszczyznę, a powierzchnia byłaby płaską, co jest niemożliwem.

515. Twierdzenie IX. — *W paraboloidzie hyperbolicznej rzuty tworzących jednego układu, na płaszczyznę prostopadłą do płaszczyzny kierowniczej drugiego układu, tworzą wiązkę.* — Niech P będzie jedną z płaszczyzn kierowniczych (fig. m_1), zaś Q płaszczyzną rzutów prostopadłą do płaszczyzny P.

Uważmy dwie tworzące G_1, G_2 nierównoległe do płaszczyzny P, i niech g_1, g_2 będą ich rzutami na

płaszczyznie Q; oznaczmy punkt przecięcia się tych rzutów ω, i nakreślmy przezeń prostopadłę G'_1 do Q, to ponieważ ta prosta opierając się na G_1 i G_2 w punktach A i B, będzie równoległą do płaszczyzny P spotka G_1, G_2, czyli, będzie tworzącą układu równoległego do P, zatem spotka ona także wszystkie tworzące G_1, G_2, G_3, G_4,... układu nierównoległego do P, zkąd wypada, że rzuty g_1, g_2, g_3, g_4,... tych tworzących mają punkt ω' wspólny, czyli tworzą wiązkę, której wierzchołkiem jest punkt ω.

Odwrotność jest także prawdziwą i dowodzi się z łatwością. Twierdzenie tu dowiedzione jest identycznem z twierdzeniem dowiedzionem w paragrafie 202.

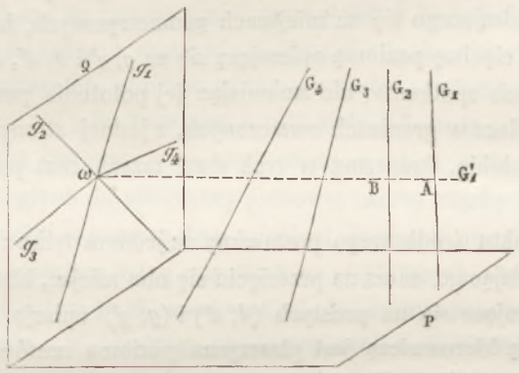

Fig. m_1.

516. Twierdzenie X. — *Jeżeli trzy tworzące prostolinijne hyperboloidy jednopowłokowej* (§ 339) *są równoległe do jednej płaszczyzny, hyperboloida zmienia się na paraboloidę hyperboliczną.* — Oznaczmy przez G_1, G_2, G_3 tworzące prostolinijne równoległe do płaszczyzny P (fig. m_2), przez g_1, g_2 dwie proste opierające się w punktach (A_1, B_1, C_1), (A_2, B_2, C_2) na tworzących G_1, G_2, G_3.

Proste g_1, g_2, jako mające trzy punkta wspólne z hyperboloidą, leżą na niej w zupełności. Jeżeli teraz

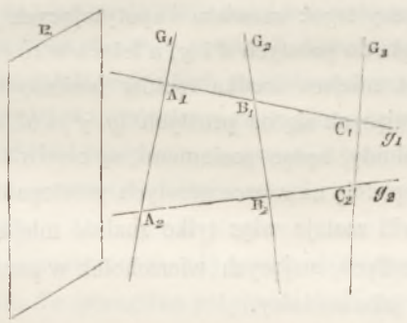

Fig. m_2.

uważymy paraboloidę hyperboliczną mającą za dwie kierownice proste g_1, g_2, zaś płaszczyznę P za płaszczyznę kierowniczą, to G_1, G_2, G_3 znajdą się na tej paraboloidzie, a tworzące nierównoległe do płaszczyzny P, i opisujące paraboloidę, muszą opierać się na G_1, G_2, G_3, to jest, że będą one też same, co tworzące opisujące hyperboloidę. Te dwie powierzchnie zchodzą się więc z sobą, co dowodzi twierdzenia.

517. Zadanie X. — *Wyznaczyć punkta spotkania się prostej z hyperboloidą obrotową jednopowło-*

kową. — Rozwiążemy przedewszystkiem to zadanie sposobem najogólniejszym i najprostszym, przedstawionym przez Duleau w korespondencyi Szkoły Politechnicznej (*Correspondance de l'École Polytechnique*), a następnie przedstawimy sposób podany przez P. Rouché i mający tę wyższość nad sposobem pierwszym, że odpowiada więcej zasadom geometryi wykreślnej.

Rozwiązanie Duleau. — Niech będzie daną hyperboloida przez jej oś z, z' (*fig.* 334, tab. XXXIII), przez jednę z jej tworzących głównych g, g', i rzuty prostej d, d'. Przypuśćmy, że prosta d, d' została sprowadzoną do położenia równoległego do płaszczyzny pionowej rzutów przez obrót naokoło osi z, z', to znalazłszy punkta przecięcia się, z łatwością wrócimy do pierwotnego położenia.

Używając sposobu zasadzającego się na miejscach geometrycznych, lub sposobu polegającego na krzywych błędu, uważmy cięciwę poziomą opierającą się na g, g' i d, d', a nadto przechodzącą przez jeden z punktów szukanych spotkania; nie zmieniając jej położenia poziomego, poruszajmy ją po tychże samych prostych, lecz w granicach oznaczonych, z jednej strony przez proste kierownicze, a z drugiej przez hyperboloidę. Oznaczmy w tych dwu razach rzut poziomy miejsca geometrycznego środków cięciw.

Jeżeli rzut poziomy punktu środkowego postawimy na jednem tylko z miejsc geometrycznych, to popełnimy błąd, lecz stawiając go naraz na przecięciu się obu miejsc, błąd ten stanie się zerem.

Ponieważ cięciwy opierające się na prostych (d, d') i (g, g') opisują paraboloidę hyperboliczną, której pierwszą płaszczyzną kierowniczą jest płaszczyzna pozioma rzutów, zaś druga ma położenie równoległe do prostych (g, g') i (d, d') czyli jest płaszczyzną pionową rzutów, więc rzuty na płaszczyznę poziomą rzutów tworzących nierównoległych do płaszczyzny pionowej, tworzą wiązkę (§ 515). Wyznaczmy wierzchołek tej wiązki. Otóż, ponieważ prosta θt łącząca ślady poziome prostych (g, g') i (d, d') jest jej jednym promieniem, który zarazem jest tworzącą prostopadłą do płaszczyzny pionowej przechodzącej przez punkt a' przecięcia się g' z d', wyznaczywszy więc jego rzut poziomy, czyli prostę prostopadłą do osi rzutów przechodzącą przez punkt a', znajdziemy drugi promień wiązki, z przecięcia się zaś tych dwu promieni wyznaczymy wierzchołek wiązki czyli punkt ω.

To mając, znajdźmy teraz pierwsze miejsce geometryczne, miejsce środka rzutów poziomych cięciw równoległych do płaszczyzny tegoż nazwiska i spotykających proste (d, d') i (g, g'), takowem bowiem jest prosta pq równoległa do prostych d i g, a leżąca w równej od nich odległości.

Szukając zaś drugiego, to jest miejsca środka rzutów poziomych cięciw równoległych do płaszczyzny tegoż nazwiska, a opierających się na prostych (g, g') i (d, d') zawartych w hyperboloidzie, to ponieważ te cięciwy hyperboloidy, będąc poziomemi, są cięciwami różnych równoleżników, więc rzuty poziome ich środków przypadają na wiązce prostych prostopadłych do cięciw, której wierzchołek leży w punkcie z. W tej chwili zostaje więc tylko znaleźć miejsce geometryczne punktów przecięcia się dwu wiązek prostopadłych, mających wierzchołek w punktach ω, z, miejsce zaś to jest okręgiem koła, opisanym na ωz jako średnicy.

Tak znalezione dwa miejsca przecinają się z sobą w punktach μ_1, μ_2, a rzuty poziome cięciw odpowiadających przechodzą przez wierzchołek wiązki ω i są przedstawione przez proste $\omega\mu_1, \omega\mu_2$, których przecięcie się z prostą d wyznacza rzuty poziome m_1, m_2 punktów szukanych; rzuty pionowe znajdziemy łatwo w punktach m'_1, m'_2.

518. Rozwiązanie P. Rouché. — Rozwiązanie P. Rouché polega na wyznaczeniu przecięcia się prostej z powierzchnią, które otrzymamy kreśląc przez prostę powierzchnię pomocniczą, wyznaczając przecięcie się tej ostatniej z powierzchnią daną a wreszcie szukając gdzie to przecięcie spotyka prostę daną.

Ten sposób postępowania zastosujemy do rozwiązania niniejszego zadania.

Oznaczmy przez z, z' rzuty osi (*fig.* 335. tab, XXXIV), przez (g_1, g'_1), (g_2, g'_2) rzuty dwu tworzących głównych różnych układów, przez d, d' rzuty prostej danej po dokonaniu obrotu naokoło osi z, z' aż do sprowadzenia jej do położenia równoległego do płaszczyzny pionowej rzutów.

Powierzchnia pomocnicza przez nas przyjęta jest paraboloidą hyperboliczną (§ **516**), mającą za kierownice trzy proste obrazu (d, d'), (g_1, g'_1), (g_2, g'_2). Ta powierzchnia ma dwie proste wspólne z hyperboloidą obrotową; ponieważ jednak powierzchnie te są drugiego stopnia, a więc przecięciem ich wspólnem jest układ czterech prostych (§ **511**), zatem należy znaleźć dwie proste dopełniające przecięcia. Że zaś proste szukane są tworzącemi i paraboloidy i hyperboloidy, będziemy więc je uważali kolejno jako należące do jednej a następnie do drugiej z tych powierzchni. Otóż, uważając je jako tworzące hyperboloidy, rzuty ich poziome winny przypadać na stycznych do rzutu tegoż nazwiska koła szyjnego, uważane zaś jako tworzące paraboloidy, ich rzuty poziome są częścią wiązki, gdyż płaszczyzna pozioma rzutów jest płaszczyzną kierowniczą, a zatem rzuty na płaszczyznę poziomą rzutów tworzących nierównoległych do płaszczyzny pionowej tworzą wiązkę (§ **515**).

Znajdźmy wierzchołek tej wiązki za pomocą dwu promieni. Ponieważ przeciąwszy paraboloidę płaszczyzną rzucającą prostę G_1 i zawierającą jednę z prostych na niej leżących, płaszczyzna ta przetnie paraboloidę podług drugiej prostej, zatem punkt spotkania tej płaszczyzny z prostą g_2, g'_2 będzie w punkcie b, b', zaś z prostą d, d' w punkcie a, a', i ta druga prosta przecięcia będzie miała za rzut poziomy prostę ba, która wyznaczy jeden z promieni wiązki. Drugi promień cf znajdziemy w sposób podobny do poprzedzającego, kreśląc rzut poziomy wspólnego przecięcia paraboloidy z płaszczyzną rzucającą pionowo prostę G_2. Tak znalezione dwa promienie ba i cf wyznaczają w punkcie ich wspólnego przecięcia się wierzchołek wiązki ω. Że zaś wierzchołek wiązki ω leży także na rzucie poziomym $a_1 f_1$ jednej z prostych wspólnego przecięcia się paraboloidy z płaszczyzną rzucającą pionowo prostę D, zatem w każdym przypadku jeden z tych promieni posłuży albo do sprawdzenia dokładności rysunku, albo do wyznaczenia wierzchołka ω z większą dokładnością.

Ponieważ rzuty poziome prostych dopełniających przecięcia hyperboloidy z paraboloidą pomocniczą przechodzą przez punkt ω, i są styczne do rzutu tegoż nazwiska koła szyjnego, więc mogą one służyć do wyznaczenia punktów przecięcia m_1, m_2 z prostą d, które są rzutami poziomemi punktów przecięcia prostej d, d' z paraboloidą; jeżeli więc z tych punktów nakreślimy linije rzutów aż do spotkania się z rzutem pionowym d' prostej, to znajdziemy rzuty pionowe m'_1, m'_2 odpowiadające, czyli, że punkta (m_1, m'_1), (m_2, m'_2) są punktami przecięcia się prostej z hyperboloidą.

Zauważmy w końcu, że prosta $f_1 a_1$ pozostaje niezmienną, gdy rzut poziomy prostej D zmienia swe położenie równolegle do pierwotnego.

Rozwiązanie tu podane może być uproszczonem, gdy prosta dana spotyka oś, jest do niej równoległą lub prostopadłą co do kierunku. Te szczególne przypadki rozbierzemy poniżej.

519. Przecięcie się hyperboloidy obrotowej jednopowłokowej z prostą przecinającą jej oś obrotu. — Chociaż rozwiązanie ogólne może być zastosowanem do tego szczególnego przypadku, zajmującem będzie podać rozwiązanie inne.

Oznaczmy przez z, z' rzuty osi (*fig.* 336, tab. XXXIV), przez g, g' rzuty jednej z tworzących głównych, przez d, d' rzuty prostej spotykającej oś w punkcie o', z. Za powierzchnię pomocniczą przyjmijmy ostrokrąg utworzony przez obrót całkowity prostej d, d' naokoło osi z, z', mający wierzchołek w punkcie o', z, a za ślad poziomy koło, którego środkiem jest punkt z, zaś okrąg jego przechodzi przez ślad poziomy θ prostej d, d'.

Nakreśliwszy okrąg koła, wyznaczmy przecięcie się ostrokręgu z hyperboloidą; ponieważ zaś te powierzchnie są obrotowe i drugiego stopnia, więc przecięciem się ich będą równoleżniki. Otóż te równoleżniki będą wyznaczone skoro tylko znajdziemy jeden punkt każdego z nich, a punkta te znajdziemy biorąc przecięcie się tworzącej g, g' z ostrokręgiem pomocniczym.

Żeby znaleźć punkta szukane przesuńmy przez prostę g, g' i przez wierzchołek o', z płaszczyznę, wyznaczmy przecięcie się jej z ostrokręgiem, które składa się z dwu tworzących, i wyznaczmy w końcu przecięcie się tych tworzących z prostą g, g'.

Ślad poziomy płaszczyzny pomocniczej otrzymamy, kreśląc przez o', z prostę równoległą do g, g', wynajdując jej ślad poziomy h_1, i łącząc ten ostatni ze śladem poziomym prostej g, g'.

Znając ślad h, h_1, znajdziemy punkta jego spotkania t_1, t_2 ze śladem ostrokręgu, a kreśląc proste zt_1, zt_2, te ostatnie będą rzutami poziomemi tworzących przecięcia płaszczyzny pomocniczej z ostrokręgiem. Ponieważ te proste przecinają także prostę g w punktach μ_1, μ_2, mających rzuty pionowe w punktach μ'_1, μ'_2 na prostej g', więc znamy rzuty $(\mu_1, \mu'_1), (\mu_2, \mu'_2)$ punktów przecięcia się prostej g, g' z ostrokręgiem, które, jak to powiedzieliśmy powyżej, są rzutami punktów leżących odpowiednio na równoleżnikach szukanych. Jeżeli więc teraz nakreślimy przez punkta μ'_1, μ'_2 proste równoległe do osi rzutów, to znajdziemy rzuty pionowe równoleżników wspólnych obu powierzchniom, a przecięcia się tych linij z prostą d' będą rzutami pionowemi m'_1, m'_2 punktów przecięcia się prostej d, d' z hyperboloidą, których rzuty poziome odpowiednie m_1, m_2 otrzymamy, kreśląc przez nie linije rzutów.

Punktami szukanemi są więc punkta $(m_1, m'_1), (m_2, m'_2)$,

520. Przecięcie się hyperboloidy obrotowej jednopowłokowej z prostą równoległą do jej osi obrotu. — Zadanie to zostało już rozwiązanem (§ 503). Należy znaleźć rzuty pionowe dwu punktów powierzchni, znając ich wspólny rzut poziomy.

521. Przecięcie się hyperboloidy obrotowej jednopowłokowej z prostą prostopadłą co do kierunku do jej osi obrotu. (*fig.* 337, tab. XXXIV). — Przyjmijmy jak wyżej, że hyperboloida jest wyznaczoną przez jej oś z, z' i przez jednę z jej tworzących głównych g, g'.

Żeby znaleźć przecięcie się hyperboloidy z prostą d, d', należy nakreślić przez tę ostatnię płaszczyznę poziomą pomocniczą, przecinającą g, g' w punktach μ, μ', a hyperboloidę podług równoleżnika mającego punkt z za środek swego rzutu poziomego, a punkt μ za punkt przejścia. Nakreśliwszy więc ten okrąg koła, i wyznaczywszy punkta m_1, m_2 przecięcia się jego z d, podnieśmy z kładu te punkta do m'_1, m'_2, a otrzymamy w ten sposób szukane punkta $(m_1, m'_1), (m_2, m'_2)$.

522. Zadanie XI. — *Przez prostę daną nakreślić płaszczyznę styczną do hyperboloidy obrotowej jednopowłokowej. — Warunki rozwiązalności zadania.* — Ponieważ płaszczyzna styczna powinna przechodzić przez dwie tworzące różnych układów, a ponieważ te proste są z prostą daną na jednej płaszczyznie, więc możemy powiedzieć, że prosta dana winna przecinać powierzchnię, wyjąwszy, że ona się znajdzie naraz i na płaszczyznie asymptotycznej, i będzie równoległą do dwu tworzących hyperboloidy wyznaczających tę płaszczyznę. Wypadek ten da się wysłowić jak następuje :

Żeby przesunąć przez prostę daną płaszczyznę styczną do hyperboloidy obrotowej jednopowłokowej, trzeba i wystarcza, żeby prosta dana przecinała powierzchnię w dwu punktach leżących w odległości skończonej lub nieskończonej.

Zajmijmy się teraz wyznaczeniem płaszczyzny stycznej.

Oznaczmy przez D prostę daną (fig. m_3) i przypuśćmy, że punkta w których ona spotyka powierzchnię są wyznaczone (§ 519). Przez każdy z tych punktów przejdą dwie tworzące, które znaj-

dziemy bez trudności; otóż przypuśćmy, że przez punkt m_1 przechodzą dwie tworząc G_1, G_2, a przez m_2 tworzące G_3, G_4, to ponieważ płaszczyzna styczna szukana obejmuje parę z tych prostych, należy więc sprawdzić różne kombinacyje, powstające z połączenia tych prostych branych po dwie. I tak płaszczyzna przechodząca przez proste G_1 i G_2 jest wprawdzie styczną w punkcie m_1, ale prosta D nie leży na niej; żeby bowiem ta prosta leżała na płaszczyznie potrzeba, żeby i punkt m_2 leżał także na niej, czyli

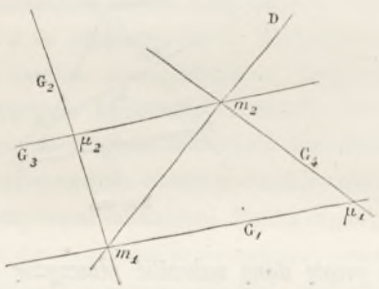

Fig. m_3.

przecięcie się jej z powierzchnią musiałoby być utworzone przez proste G_1, G_2 i przez punkt m_2, co jest niemożebnem. Dla tejże samej przyczyny należy odrzucić kombinacyję prostych G_3 i G_4.

Pozostałe więc tylko kombinacyje G_1 i G_4, G_2 i G_3 dają płaszczyzny odpowiadające zadaniu, a punkta dotknięcia leżą na przecięciu się prostych (G_1, G_4), (G_2, G_3) w punktach μ_1 i μ_2.

523. Zadanie XII. — *Przez punkt dany nakreślić do hyperboloidy skośnej, płaszczyznę styczną dotykającą powierzchni w punkcie leżącym na południku obranym.* — Ponieważ płaszczyzna styczna winna przechodzić przez prostopadłę do płaszczyzny południka, a idącą przez punkt dany, więc należy nakreślić tę liniję, gdyż w ten sposób sprowadzimy zadanie do poprzedzającego.

524. Zadanie XIII. — *Nakreślić równolegle do prostej danej płaszczyznę styczną do hyperboloidy, w punkcie leżącym na południku obranym.* — Należy przez prostę daną i przez prostopadłę, wyprowadzoną z jednego z jej punktów na płaszczyznę południka danego, przesunąć płaszczyznę a równolegle do niej nakreślona płaszczyzna, będzie styczną do hyperboloidy (§ **510**).

525. Zadanie XIV. — *Znaleźć krzywę dotknięcia i ślad poziomy ostrokręgu lub walca opisanego na hyperboloidzie obrotowej jednopowłokowej.* — Do rozwiązania tego zadania można użyć sposobu obwiniętych kulistych, stożkowych lub walcowych, posługując się wykreśleniami podanemi przy powierzchniach obrotowych jakichkolwiek. Rozwiązanie uproszczone polega na wykreśleniu przez tworzące prostolinijne i przez wierzchołek ostrokręgu (leżącego w odległości skończonej lub nieskończonej) płaszczyzn, i na rozwiązaniu z pomocą ich zadania odwrotnego płaszczyzny stycznej (§ **504**).

Znając sposób znalezienia krzywej dotknięcia, potrafimy wykreślić ślad ostrokręgu lub walca, punkta zaś szczególne znajdziemy w sposób podany przy powierzchniach obrotowych jakichkolwiek.

526. Styczna w jakimkolwiek punkcie krzywej dotknięcia. — Oznaczmy przez S wierzchołek ostrokręgu (fig. m_4), przez M punkt, zaś przez G_1, G_2 tworzące przecinające się w tymże punkcie.

Wiemy, że styczna jest biegunową punktu S względem przecięcia się powierzchni ze swą płaszczyzną styczną w punkcie M, które to przecięcie utworzonem jest przez proste G_1, G_2, t. j. że nakreśliwszy na płaszczyznie stycznej rozbieżnę SAB i wziąwszy sprzężonę harmoniczną Σ punktu S względem A i B, znajdziemy za pomocą prostej łączącej punkta Σ i M styczną szukaną. Połączmy punkta S i M i uważmy, że cztery proste przecinające się w punkcie M dzielą harmonicznie rozbieżnę SB, to znaj

dziemy, że proste MS i MΣ są sprzężonemi harmonicznemi prostych MA, MB, zkąd wypada, że kreśląc równoległę $\alpha\beta$ do SM zawartą pomiędzy G_1, i G_2, wyznaczając dalej jej środek μ i łącząc go z punktem M linią prostą, znajdziemy styczną szukaną.

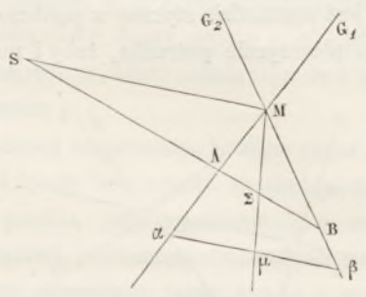

Fig. m_4.

527. Zastosowanie. — *Przez prostę daną nakreślić płaszczyznę styczną do powierzchni obrotowej jakiejkolwiek.*

Ogólne rozwiązanie Monge'a. — Wystawmy sobie hyperboloidę pomocniczą, utworzoną przez obrót prostej danej anokoło osi powierzchni obrotowej; ponieważ płaszczyzna styczna szukana obejmuje tworzącę hyperboloidy, dotyka więc ona tej powierzchni w punkcie leżącym na prostej danej. Punkt ten dotknięcia leży na przecięciu się tej prostej z płaszczyzną, przechodzącą przez oś wspólną obu powierzchniom uważanym i w kierunku prostopadłym do płaszczyzny stycznej szukanej, a ta płaszczyzna prostopadła jest płaszczyzną południka dotknięcia powierzchni obrotowej danej.

Krótko mówiąc, płaszczyzna styczna szukana dotyka obu powierzchni w dwu punktach leżących na jednym południku, a zatem ślad jej na tym południku jest styczną wspólną do odpowiedniego południka dwu powierzchni obrotowych.

Teraz więc dokończymy rysunku kreśląc hyperbolę południkową główną hyperboloidy, i kreśląc do południków głównych obu powierzchni styczną wspólną, którą obrócimy naokoło osi powierzchni obrotowej do spotkania prostej danej, w tem położeniu te dwie proste wyznaczą nam położenie szukanej płaszczyzny stycznej.

Wykonanie rysunku. — Oznaczmy przez z, z' oś powierzchni (*fig.* 338, tab. XXXIV), przez μ jej obwód pozorny pionowy, zaś przez d, d' prostę daną.

Wykreślmy hyperbolę południkową główną hyperboloidy pomocniczej, w tym celu przetnijmy tę powierzchnię płaszczyzną obrazu, której ślad poziomy F przechodzi przez z. Rzutem poziomym koła szyjnego jest koło mające za środek punkt z, a promień równy prostopadłej zp poprowadzonej z punktu z na prostę d; rzut pionowy koła szyjnego znajdziemy, kreśląc, po podniesieniu punktu p do p' na prostej d', przez punkt p' prostę równoległą do osi rzutów, która wyznaczy 1° w punkcie spotkania z osią środek o' rzutu pionowego szukanej hyperboli południkowej; 2° w punkcie spotkania s' z linią rzutów styczną do rzutu poziomego koła szyjnego, jeden z wierzchołków osi głównej tej hyperboli.

Asymptoty hyperboli południkowej znajdziemy, obracając naokoło osi z, z' prostę d, d' w płaszczyznie obrazu; rzut jej poziomy przypadnie na stycznej p_1t do rzutu koła szyjnego równoległej do xy; punkta a i p' przypadną w p_1, o', zaś punkta spotkania a, a' prostej d, d' z płaszczyzną obrazu, mającą za ślad poziomy F', przypadną w punktach a_1, a'_1; jeżeli więc połączymy punkt o' z a'_1 to znajdziemy jednę z asymptot szukanych, drugą zaś wyznaczymy kreśląc prostę $o'a'_2$ symetryczną do $o'a'_1$ względem

osi $o's'$. To mając, na zasadzie własności odcinkowych wykreślimy jednę z gałęzi H' hyperboli. Sprawdzenie dokładności rysunku polega na tem, że prosta d' winna dotykać hyperboli H' wpunkcie a'. Nakreślmy obecnie styczne wspólne $b'_1m'_1$, $c'_1n'_1$ do krzywych μ' i H', i obróćmy je aż do spotkania prostej d, d'.

Możnaby nakreślić ostrokręgi utworzone obrotem każdej stycznej naokoło z, z', i wziąć ich przecięcia się z prostą d, d', lecz łatwiej będzie zauważyć, że jeden z punktów dotknięcia b'_1 lub c'_1 przypadnie na prostej d, d' po dokonaniu obrotu, gdyż punkta dotknięcia opiszą proste równoległe do xy i przypadną na prostej d' w punktach b', c', których rzuty poziome b, c leżą na przecięciu się prostej d z linijami rzutów przechodzącemi przez punkta b', c', a więc ostatecznie w punktach (b', b), (c', c), w których hyperboloida dotyka dwu płaszczyzn zadosyć czyniących warunkom zadania. Ślady poziome południków dotknięcia wspólnych przypadają na zb lub zc, i to na te płaszczyzny południków należy sprowadzić, obrotem naokoło osi z, z', punkta dotknięcia (m'_1, m_1), (n'_1, n_1) powierzchni danej z płaszczyznami szukanemi. Punkt m_1, m'_1 opisuje łuk koła, którego rzutem pionowym jest prosta równoległa do osi rzutów przechodzącej przez punkt m'_1, rzutem zaś poziomym jest łuk koła mającego za środek punkt z, a za promień w rzeczywistej wielkości zm_1; łuk ten będzie ograniczony przez południk zb w punkcie m, m', który jest jednym z punktów dotknięcia szukanych. Postępując w taki sam sposób dla punktu n_1, n'_1 znajdziemy drugi punkt dotknięcia n, n'. Znając więc obecnie dla każdego rozwiązania prostę d, d' i punkt m, m', lub n, n', obie te płaszczyzny styczne są wyznaczone.

ĆWICZENIA ODNOSZĄCE SIĘ DO PŁASZCZYZN STYCZNYCH DO POWIERZCHNI OBROTOWYCH

528. Zadanie I. — *Mając dane dwie proste, wyznaczyć ich wspólną prostopadłę, używając walca obrotowego mającego za oś jednę z prostych danych a stycznego do drugiej* (*fig.* 339, tab. XXXIV). — Oznaczmy przez (d, d'), (d_1, d'_1) dwie proste dane.

Rozwiązanie ogólne. — Przez punkt obrany na prostej D należy nakreślić prostę Δ równoległą do D_1 i zauważyć, że płaszczyzna utworzona przez proste D i Δ winna być styczną do walca obrotowego, którego osią jest prosta D_1 a promień równy najkrótszej odległości prostych danych. Dla wyznaczenia walca, o którym mowa, przetnijmy go wraz z płaszczyzną styczną i z prostą D_1, płaszczyzną pomocniczą prostopadłą do tej prostej. Z przecięcia tego otrzymamy na płaszczyznie prostę łatwą do nakreślenia, na walcu koło niewiadome lecz styczne do prostej, a na prostej D_1 środek tego koła. W ten sposób, koło to wykreślimy z łatwością, a prosta nakreślona równolegle do D_1 przez punkt dotknięca z płaszczyzną styczną, będzie tworzącą dotknięcia walca, a w punkcie spotkania tej ostatniej z prostą D znajdzie się jeden z punktów najkrótszej odległości; prostopadłę wreszcie wspólną otrzymamy kreśląc przez punkt tak znaleziony prostę prostopadłą do płaszczyzny utworzonej przez proste D, Δ.

Wykreślenie rysunku. — Na prostej d, d' obierzmy punkt a, a', którego rzut pionowy przypada na przecięciu się prostych d', d'_1, przezeń nakreślmy prostę δ, d'_1 równoległą do d_1, d'_1, i wyznaczywszy ślady (θ, θ'), (θ_1, θ'_1) prostych (d, d'), (δ, d'_1), połączmy je linią prostą, to ta ostatnia będzie śladem poziomym płaszczyzny stycznej do walca. Nakreślmy dalej przez ślad poziomy h prostej d_1, d'_1 płaszczyznę sieczną pomocniczą i skierujmy ją prostopadle do prostej, to ślad jej poziomy Q będzie prostą prostopadłą do d_1 a przechodzącą przez punkt h. Punkt h będzie środkiem koła przecięcia się

płasczyzny z walcem. Nakreśliwszy teraz styczną do tego koła, będzie ona prostą spotkania się płasczyzny stycznej z płasczyzną sieczną, a zatem punkt h_1 przecięcia się śladów poziomych tych płasczyzn, będzie jednym z punktów przejścia tej stycznej.

Żeby znaleźć drugi punkt, przetnijmy dwie płasczyzny, których przecięcia się szukamy, płasczyzną pionową rzucającą prostę d, d', i zróbmy kład tej ostatniej na płasczyznę poziomą rzutów. Podczas tego ruchu punkt b, a' prostej d_1, d'_1 przypadnie w punkcie B_1 na prostopadłej do prostej d_1, przechodzącej przez b i w odległości bB_1 równej wzniesieniu $\alpha a'$ tego punktu, punkt h pozostanie nieruchomym; że zaś prosta d_1, d'_1 przypadnie w kładzie na prostej łączącej punkt h z B_1, zatem płasczyzna rzucająca spotka płasczyznę styczną podług prostej w kładzie tI_1, równoległej do hB_1, a przechodzącej przez punkt t, zaś przecięcie się płaszczyzny koła z tąż samą płasczyzną rzucającą, będzie przedstawione w kładzie przez prostę prostopadłą do tI_1 a idącą przez punkt h. Widzimy więc, że drugi punkt styczności z kołem, którego szukamy, znajdzie się w kładzie w punkcie F, to jest w spodku tej ostatniej prostej.

Jeżeli teraz sprowadzimy ten punkt do rzeczywistego położenia, a następnie zrobimy nowy jego kład naokoło Q, to on przypadnie w punkcie F_2 na prostej d_1 t. j. w odległości od h równej hF_1, którą wyznaczymy zapomocą łuku koła.

Prosta łącząca punkt h_1 z punktem F_2 przedstawia kład stycznej naokoło Q, a prostopadła hG_1 do tej stycznej, przechodząca przez punkt h, jest zarazem i promieniem koła w rzeczywistej wielkości i szukaną najkrótszą odległością.

Jeżeli podniesiemy z kładu punkt G_1, to przypadnie on na prostopadłej do Q przechodzącej przez ten punkt, którego położenia nie warto wyznaczać, gdyż tworząca dotknięcia idąca przezeń ma za rzut poziomy tęż samę prostopadłę. Wynika ztąd, że dostatecznem będzie nakreślić przez G_1 prostopadłę do Q, która jest rzutem poziomym tworzącej dotknięcia, i przedłużyć ją do spotkania się z prostą d w punkcie p, gdyż podnosząc p do p' znajdziemy w punkcie p, p' jeden ze spodków najkrótszej odległości.

Nakreśliwszy wreszcie przez p prostopadłę pq do $0\theta_1$, i podniósłszy punkt przecięcia się jej z prostą d_1 do punktu q' na prostej d'_1 i na linii rzutów przechodzącej przez punkt q, i połączywszy p' z q' prostą $p'q'$, znajdziemy proste pq, $p'q'$ t. j. rzuty szukanej najkrótszej odległości.

529. Zadanie II. — *Nakreślić normalnę wspólną do dwu ostrokręgów danych* (fig. m_5). — Oznaczmy przez Σ, Σ_1 dwa ostrokręgi dane i przypuśćmy, że N, N_1 przedstawia normalnę wspólną, to płasczyzny

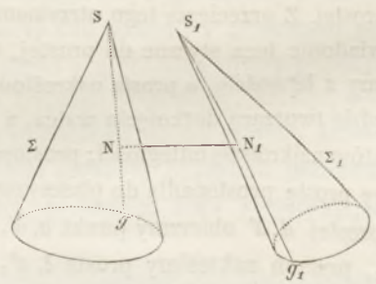

Fig. m_5.

styczne przechodzące przez punkta N, N_1 do ostrokręgów odpowiednich, winny być prostopadłe do N, N_1 a tem samem równoległe, nadto prosta NN_1 winna być prostopadłą do tworzących Sg, S_1g_1.

Zadanie będzie więc rozwiązanem, jeżeli nakreślimy do ostrokręgów płaszczyzny styczne równoległe (§ 363), gdyż potem pozostanie tylko wyznaczyć najkrótszą odległość tworzących dotknięcia.

Ponieważ podane rozwiązanie jest niezależne od położenia wierzchołków ostrokręgów, więc da się ono zastosować i wtedy, gdy jeden lub dwa wierzchołki znajdą się w nieskończoności w kierunku danym.

530. Zadanie III. — *Nakreślić kulę dotykającą dwu ostrokręgów, lub walca i ostrokręgu, lub też dwu walców danych, w dwu punktach wprost przeciwnych.* — Średnica kuli, która łączy dwa punkta dotknięcia, będzie normalną wspólną do dwu powierzchni danych; że zaś tę umiemy wykreślić, zostaje więc tylko do nakreślenia na tej średnicy kula szukana.

531. Zadanie IV. — *Mając dane na powierzchni kuli trzy koła nakreślić czwarte, do nich styczne.*

Rozwiązanie ogólne. — Ponieważ wiemy, że przez dwa koła leżące na jednej kuli możemy zawsze przesunąć dwa ostrokręgi (§ 174, 3°), więc kreśląc przez jedno z kół danych, jakoteż przez każde z dwu pozostałych jeden ostrokrąg, a do tych ostatnich jako mających podstawę wspólną płaszczyznę styczną wspólną, płaszczyzna ta będzie płaszczyzną jednego z kół szukanych, a punkta styczności tej płaszczyzny z krzywemi danemi, będą punktami styczności tychże krzywych z okręgiem koła szukanym; widzimy więc, że nie kreśląc płaszczyzny stycznej można znaleźć koło szukane za pomocą trzech jego punktów.

Wykreślenie rysunku. — Przypuśćmy, że środek kuli przypada w punkcie o, o' (*fig.* 340, tab. XXXV), i przedstawmy powierzchnię przez jej obwody pozorne na dwu płaszczyznach rzutów.

Ponieważ zawsze można sprowadzić jedno z kół danych cd, $b'd'$ na płaszczyznę obrazu, więc dla wyznaczenia łatwego dwu pozostałych, obierzemy proste $a'b'$, $u'v'$ jako rzuty pionowe ich cięciwy wspólnej z kołem wielkiem obrazu kuli, a one wskażą nam także nachylenie płaszczyzn tych dwu kół względem płaszczyzny koła wielkiego obrazu i kierunek tych nachyleń.

Wykreślenie należy zacząć od wyznaczenia rzutów kół danych.

Rzut koła względnie do cięciwy ab, $a'b'$. — Jeżeli przez punkt o' nakreślimy prostę $o'e'$ prostopadłą do cięciwy danej, to płaszczyzna prostopadła do płaszczyzny przechodzącej przez $o'e'$ będzie płaszczyzną symetryi koła uważanego, a ztąd wypada, że rzut koła na tę płaszczyznę będzie liniją prostą, nachyloną do płaszczyzny obrazu przechodzącej przez punkt o, o' pod kątem płaskim kąta dwuściennego danego. Jeżeli teraz przyjmiemy za nową płaszczyznę pionową rzutów, płaszczyznę obrazu przechodzącą przez punkt o, o' i za oś rzutów prostę $e'o'$, to dwa rzuty kuli zejdą się z sobą na kole wielkiem przedstawionem na dawnej płaszczyznie; rzut prostolinijny koła szukanego będzie prostą h'_1, g'_1 wychodzącą z punktu f', i nachyloną do $e'o'$ pod kątem danym w kierunku odpowiednim naznaczonemu.

Prosta $g'_1h'_1$ wyznacza w rzeczywistej wielkości średnicę koła. Jeżeli podniesiemy figurę, dla sprowadzenia jej do pierwotnego położenia, to punkta g'_1, h'_1 będą miały za rzuty g', h'; środek ω'_1 prostej $g'_1h'_1$ będzie miał za rzut punkt ω', który jest środkiem rzutu pionowego koła, a średnica obrazu tego koła będzie miała za rzut pionowy prostę równoległą do $a'b'$, przechodzącą przez punkt ω', i zakończoną w punktach i', j', które znajdziemy odcinając $\omega'i' = \omega'j' = \omega'_1g'_1$.

Rzut poziomy okręgu koła znajdziemy, robiąc najprzód rzut (g, g'), (h, h') na dawną płaszczyznę poziomą rzutów; będą one leżały na linijach rzutów przechodzących przez punkta g', h' a w odległościach gg_2, hh_2 równych $g'g'_1$, $h'h'_1$ od płaszczyzny obrazu F_1 przechodzącej przez o, o', i to: pierwszy, przed płaszczyzną F_1 drugi zaś za nią. Połączywszy punkta h i g liniją prostą, znajdziemy średnicę rzutu uważanego, a linija rzutów wychodząca z punktu ω' wyznaczy środek ω tegoż rzutu; kreśląc więc teraz przez punkt ω prostę równoległą do osi rzutów, i wyznaczając punkta i, j przecięcia się jej z linijami rzutów, przechodzącemi przez punkta i', j', otrzymamy rzut poziomy średnicy

koła prostopadłego do HG. Znając obecnie dwie osie $g'h'$ i $i'j'$ rzutu pionowego, i punkta a', b' tejże krzywej leżące na obwodzie pozornym kuli na tejże samej płaszczyznie rzutów, możemy nakreślić elipsę $h'j'k'i'$ i wyznaczyć jej części widzialne.

Znając zaś na płaszczyznie poziomej rzutów końce (h, g) i (i, j) dwu średnic sprzężonych, punkta obwodu pozornego dadzą się wyznaczyć bez trudności wprost, lecz dla uniknienia kreślenia nowych linij na rysunku, wyznaczyliśmy punkta k' i l' spotkania się rzutu pionowego koła z obwodem pozornym poziomym kuli na tejże płaszczyznie rzutów, a wreszcie ich rzuty poziome k, l, poczem rzut poziomy koła łatwy do wykreślenia jakoteż wyznaczenie jego części widzialnych. W sposób podobny do poprzedzającego znaleźliśmy okrąg koła, którego cięciwa ma za rzut pionowy $u'v'$, a wykreślenia i napisy podane na rysunku, pozwolą poznać sposób kreślenia rzutów tej linii.

Wykreślenie koła stycznego. — Znajdźmy przedewszytkiem wierzchołek jednego z ostrokręgów, które możemy nakreślić przez $(hjgi, h'j'g'i')$, $(cd, c'd')$; w tym celu nakreślmy przez punkta c i d dwie styczne do elipsy $hjgi$ obejmujące tę elipsę, a znajdziemy w punkcie σ przecięcia się ich między sobą rzut poziomy szukanego wierzchołka, że płaszczyzna zaś prostopadła do płaszczyzny pionowej rzutów i przechodząca przez $o'e'$ jest płaszczyzną symetryi ostrokręgu szukanego, na której leżeć musi wierzchołek, zatem rzut pionowy tego wierzchołka, leży na przecięciu się linii rzutów przechodzącej przez punkt σ z prostą $o'e'$, w punkcie σ'.

Dla znalezienia wierzchołka drugiego ostrokręgu pomocniczego, przyjmijmy okręgi kół $(higj, h'i'g'j')$, $(pnqm, p'n'q'm')$, i za pomocą stycznych zewnętrznych wspólnych nakreślmy wierzchołek σ_1, σ'_1 jednego z ostrokręgów obwijających te koła, a następnie znajdźmy płaszczyzny styczne wspólne obu ostrokręgom, co jest możliwem, gdyż mają one podstawę $(ihjg, i'h'j'g')$ wspólną. Żeby wykreślenie było jak najprostszem, wyznaczymy tylko jednę z tych płaszczyzn stycznych za pomocą trzech jej punktów dotknięcia się z kołem danem. Trzy te punkta zaś znajdziemy, kreśląc rzuty $\sigma\sigma_1$, $\sigma'\sigma'_1$ prostej wierzchołkowej, której wyznaczymy punkta dotknięcia (w, w'), (w_1, w'_1), (w_2, w'_2) z płaszczyznami kół danych, prowadząc następnie przez każdy z tych punktów styczne do odpowiednich krzywych, a które to styczne, ze względu na położenie wierzchołków ostrokręgów względem płaszczyzn podstaw, winny być stosownie umieszczone. Rysunek wystarczy do sprawdzenia kombinacyi tych stycznych, i znajdziemy, że punkta dotknięcia dla jednego z rozwiązań zadania znajdą się w (γ, γ'), (γ_1, γ'_1), (γ_2, γ'_2).

Obecnie więc zadanie sprowadzonem zostało do nakreślenia rzutów koła przechodzącego przez znalezione trzy punkta dotknięcia, które to wykreślenie zrobimy, łącząc linijami prostemi punkt γ, γ' z punktami (γ_1, γ'_1), (γ_2, γ'_2), i kreśląc poziomę płaszczyzny utworzonej przez te dwie proste na wysokości odpowiedniej środkowi kuli. Rzut pionowy tej poziomej jest prostą równoległą do osi rzutów przechodzącą przez punkt o', i spotykającą proste $\gamma'\gamma'_1, \gamma'\gamma'_2$ w punktach α', α'_1; jeżeli więc nakreślimy przez te punkta linije rzutów, to znajdziemy punkta α, α_1, które są rzutami poziomemi dwu punktów poziomej szukanej, prosta łącząca punkta α, α_1 jest rzutem poziomym tejże, zaś punkta β, β_1, w których ona spotyka obwód pozorny kuli na rzucie tegoż nazwiska, należą do rzutu poziomego koła stycznego i odgraniczają część widzialną tego rzutu.

Zmieńmy płaszczyzny rzutów, tak samo, jak to zrobiliśmy dla wyznaczenia elips już nakreślonych; w tym celu przyjąwszy za płaszczyznę poziomą rzutów płaszczyznę przechodzącą przez środek kuli, zaś za płaszczyznę pionową płaszczyznę przechodzącą przez prostę oo_2, idącą przez punkt o a prostopadłą do cięciwy poziomej $\beta\beta_1$, to w tym razie oo_1 będzie nową osią rzutów, α_2 swym własnym rzutem, zaś punkt γ, γ' będzie miał za rzut poziomy γ, a za pionowy punkt γ_3, leżący na prosto-

padłej do oo_1 przechodzącej przez punkt γ w odległości $\gamma_4\gamma_3$ od oo_1, równej różnicy wzniesień punktów o', γ'. Rzut pionowy koła przypada więc na prostej $\alpha_2\gamma_3$, zawartej w granicach δ, δ_1 koła wielkiego obwodu pozornego poziomego kuli. Żeby teraz wrócić do pierwotnego położenia należy postąpić w ten sam sposób, jak dla kół danych. Postępując w sposób wskazany, mogliśmy przedstawić na rysunku osie $\delta_2\delta_3$, $\mu_2\mu_3$ rzutu poziomego, i na płaszczyznie pionowej rzutów średnice sprzężone $\delta'_2\delta'_3$, $\mu'_2\mu'_3$.

Drugie wykreślenie rzutów koła stycznego. — Znalazłszy trzy styczne i ich punkta dotknięcia sposobem podanym powyżej, możemy nakreślić rzuty koła, zasadzając się na twierdzeniu Pascala, brzmiącem jak następuje :

Boki przeciwległe sześcioboku wpisanego w krzywę stożkową, przecinają się w trzech punktach leżących na jednej linii prostej.

Zadanie geometryczne, które należy tu rozwiązać jest następujące :

Znając dwie styczne t_1, t_2 (fig. m_6), *odpowiednie ich punkta dotknięcia* A i B *i punkt* C *krzywej stożkowej, nakreślić tę krzywę.*

Razem znamy pięć punktów krzywej a mianowicie, dwa, które oznaczymy przez 1 i 2 zchodzące się w punkcie A, dwa inne, oznaczone przez 3 i 4 zchodzące się w punkcie B i punkt C, który oznaczymy przez 5. Chociaż te pięć punktów wyznaczają krzywę stożkową, postarajmy się jednakże wykreślić

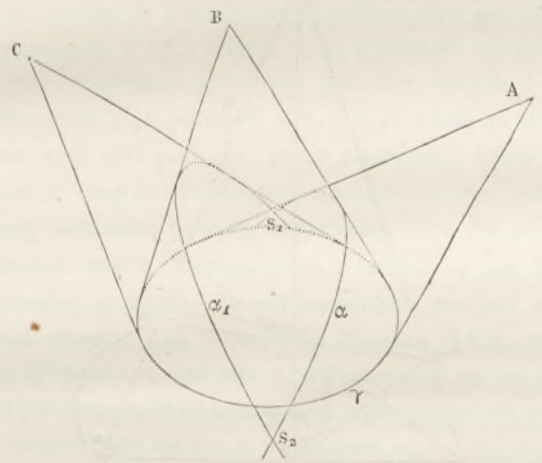

Fig. m_6.

jeszcze inne, a w tym celu przez punkt C nakreślmy jakąkolwiek rozbieżnę CD, i szukajmy drugiego punktu krzywej na niej leżącego. Ponieważ pięć punktów znanych i szósty nieznany tworzą sześciobok wpisany w krzywę stożkową, więc zastosujmy twierdzenie Pascala; biorąc bok 12, czyli styczną t_1, a opuszczając boki 23 i 34 po niej następujące, nakreślimy punkt α przecięcia się stycznej t_1 z bokiem 45, dalej biorąc bok 23 i opuszczając boki 34 i 45, po nim idące, nakreślimy punkt β przecięcia się boku 23 z CD, i nakreślimy wreszcie prostę $\alpha\beta$, to na tej właśnie prostej znajdzie się punkt przecięcia boków 34 i boku nieznanego; przedłużywszy obecnie bok 34 do punktu γ leżącego na $\alpha\beta$, nakreślmy prostę γA i oznaczmy punkt M przecięcia się jej z rozbieżną CD, to punkt M tak znaleziony będzie należał do krzywej stożkowej. Postępując w taki sam sposób i zmieniając położenie rozbieżnej obranej, znajdziemy tyle punktów krzywej, ile tylko chcemy.

Liczba rozwiązań.—Jeżeli za podstawę wspólną ostrokręgów weźmiemy jednę z krzywych danych, ta podstawa wyznaczy z drugą krzywą daną dwa ostrokręgi, które należy kolejno połączyć z dwoma ostrokręgami, otrzymanemi kombinując podstawę wspólną z trzecią krzywą daną; otrzymamy ztąd cztery grupy dwu ostrokręgów, a ponieważ każda grupa przedstawia dwa rozwiązania, zatem zadanie ma w ogólności ośm rozwiązań.

532 **Zadanie V.** — *Nakréślić rzuty bryły opisanej obrotem trójkąta równobocznego naokoło jednego z boków.* — Przypuściwszy, że mamy tylko dane rzuty boku trójkąta, który leży na osi obrotu, to jego środek będzie odpowiadał środkowi kuli stycznej do dwu ostrokręgów opisanych przez trójkąt równoboczny podczas jego obrotu. Promień tej kuli i obwody jej pozorne znajdziemy łatwo, a kreśląc następnie przez każdy rzut końców prostej danej, styczne do odpowiednich obwodów pozornych kuli, znajdziemy obwody pozorne na obu płasczyznach rzutów podwójnego ostrokręgu, opisanego ruchem trójkąta równobocznego. Rzuty okręgu koła, opisanego przez wierzchołek trójkąta leżący zewnątrz prostej obrotu, znajdziemy łatwo, używając sposobu podanego w paragrafie 136.

533. **Twierdzenie. I.** — *Przez krzywę drugiego stopnia i trzy punkta można przesunąć dwie powierzchnie stożkowe drugiego stopnia, a nie więcej* (fig. m_7). — Oznaczmy przez γ krzywę drugiego

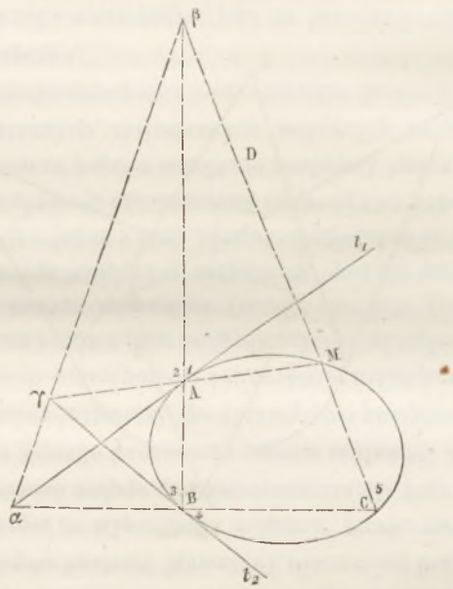

Fig. m_7.

stopnia, zaś przez A, B, C punkta dane. Jeżeli ostrokręgi istnieją, to jedna z ich tworzących przechodzi przez punkt A, opiera się na krzywej γ i przechodzi przez jeden z wierzchołków ostrokręgów szukanych, a więc jest ona również tworzącą ostrokręgu pomocniczego, mającego za wierzchołek punkt F, a za podstawę krzywę γ, zkąd wypada, że wierzchołki szukane muszą należeć do tego ostrokręgu, a tem samem i do ostrokręgów mających za wierzchołki punkta B i C, a za podstawę krzywę γ.

Z powyższego wypada, że jeżeli istnieją ostrokręgi zadość czyniące warunkom zadania, to muszą one mieć swe wierzchołki w punkcie spotkania ostrokręgów pomocniczych. Otóż ostrokręgi, których wierzchołki leżą w punktach A i B, mają pierwszą krzywę płaską wspólną γ drugiego stopnia, więc

przecinają się z sobą podług innej krzywej α także drugiego stopnia; podobnież ostrokręgi, mające wierzchołki w punktach B i C, mają krzywę wspólną γ i przecinają się z sobą podług krzywej α_1 także drugiego stopnia.

Tak znalezione krzywe α i α_1, leżące na ostrokręgu B, przecinają się z sobą tylko w dwu punktach S_1, S_2, to jest, że jeżeli zadanie jest możliwem do rozwiązania, to przedstawi ono tylko dwa rozwiązania, i wierzchołki będą jużto w punkcie S_1 jużteż w punkcie S_2.

Widocznem jest teraz, że skoro ostrokrąg mający za wierzchołek S_1 lub S_2, a za podstawę γ, ma za tworzące proste S_1A, S_1B, S_1C, lub S_2A, S_2B, S_2C i odpowiada zatem warunkom zadania, więc zadanie jest możliwem do rozwiązania.

534. Zadanie VI. — *Do ostrokręgu przechodzącego przez krzywę γ, γ' drugiego stopnia i przez trzy punkta (a, a'), (b, b'), (c, c'), nakreślić płaszczyznę styczną przez jeden z punktów danych c, c' (fig. 341, tab. XXXIV).* — Dla ułatwienia wykreślenia przyjęliśmy za płaszczyznę pionową rzutów płaszczyznę prostopadłą do płaszczyzny krzywej danej, gdyż w ten sposób rzutem pionowym tej krzywej jest prosta γ'.

Jeżeli przetniemy ostrokrąg płaszczyzną przechodzącą przez trzy punkta, to przecięcie w ten sposób otrzymane jest krzywą stożkową przechodzącą przez te punkta i przez dwa punkta spotkania się jej płaszczyzny z krzywą γ, γ'. Dla wyznaczenia tych ostatnich punktów, nakreślmy rzuty prostych $(a'b', ab)$, $(a'c', ac)$; pierwsza z nich przecina płaszczyznę krzywej stożkowej w punktach i', i, druga zaś przecina ją w punktach i'_1, i_1, a ponieważ prosta ii_1 jest cięciwą wspólną rzutów poziomych dwu krzywych stożkowych, więc punkta jej przecięcia d i f z krzywą γ, są punktami należącemi do rzutu poziomego krzywej stożkowej przecięcia ostrokręgu z płaszczyzną punktów danych. Krzywa stożkowa, o której mowa, jest więc wyznaczoną przez pięć punktów a, b, c, d, f, a krzywa odpowiednia w przestrzeni jest także wyznaczoną przez swój rzut poziomy i przez płaszczyznę, która jest płaszczyzną punktów danych. Ponieważ płaszczyzna styczna do ostrokręgu, przechodząca przez punkt c, c' obejmuje styczną w tymże punkcie do krzywej stożkowej powyżej znalezionej, więc dla znalezienia rzutu poziomego tej stycznej, uważmy sześciobok $acedfb$, którego jeden z boków ce ma długość równą zeru i jest skierowany w kierunku stycznej szukanej. Że zaś sześciobok ten jest wpisany w rzut poziomy stożkowej pomocniczej, więc stosując doń twierdzenie Pascala (§ 531), znajdziemy z przecięcia się boków przeciwległych ac, df punkt i_1 już znany, a z przecięcia się boków przeciwległych cd, ab punkt α_1, który połączony z punktem i_1 linią prostą $\alpha_1 i_1$, wyznaczy prostę punktów zbiegu $\alpha_1 i_1$; jeżeli więc teraz przedłużymy bf do spotkania się z $\alpha_1 i_1$ w punkcie α_2, to znajdziemy jeden punkt stycznej szukanej, którą otrzymamy, łącząc α_2 z c.

Rzut pionowy stycznej otrzymamy, biorąc przecięcie się t prostych $\alpha_2 e$ i df, podnosząc go do punktu t' na rzut pionowy γ' prostej DF, i łączą punkta c' i t' linią prostą.

Znając w ten sposób jednę prostę $ce, c't'$ płaszczyzny stycznej, należy znaleźć drugą, a tę ostatnią wyznaczymy z przecięcia się płaszczyzny stycznej nieznanej z płaszczyzną styczną do krzywej γ, któreto przecięcie winno być styczne do γ, γ' i przechodzić przez punkt t, t'; kreśląc więc przez punkt t dwie styczne tm_1, tm_2 do krzywej γ, znajdziemy rzuty poziome stycznych szukanych, których rzuty pionowe $t'm'_1$, $t'm'_2$ zchodzą się z sobą na γ'.

Dwie pary stycznych $(tc, t'c')$, $(tm_1, t'm'_1)$, i $(tc, t'c')$, $(tm_2, t'm'_2)$ przedstawiają dwa rozwiązania zadania, odpowiadające dwu ostrokręgom, a które można nakreślić przez krzywę γ, γ' i przez trzy punkta dane (§ 533).

535. Twierdzenie II. — *Przez dwie krzywe drugiego stopnia przecinające się w dwu punktach, można nakreślić tylko dwa ostrokręgi, a nie więcej* (fig. m_8). — Oznaczmy przez γ i γ_1 dwie krzywe dru-

giego stopnia, przecinające się z sobą w dwu punktach M i M_1; obrawszy dowolnie na jednej z nich np. γ trzy punkta A, B, C i przez te punkta jakoteż przez krzywę γ nakreśliwszy dwa ostrokręgi, powiadamy, że te ostrokręgi obejmują także γ_1; i rzeczywiście, jeżeli bowiem przetniemy je płaszczyzną

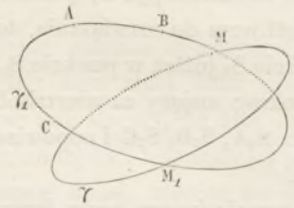

Fig. m_8.

przechodzącą przez trzy punkta A, B, C, to otrzymamy stożkowę przechodzącą jak z_1 przez pięć punktów A, B, C, M, M_1, która nie jest niczem innem jak krzywą γ_1, zkąd wypada, że ostrokręgi uważane przechodzą przez krzywe γ i γ_1 i one są jedyne, które przez nie przechodzą.

536. Zadanie VII. — *Znaleźć wierzchołki dwu ostrokręgów, które można nakreślić przez parabolę leżącą na płaszczyznie poziomej rzutów, i przez koło zatoczone na cięciwie paraboli jako średnicy na płaszczyznie nachylonej do poziomu pod kątem* 45° (*fig.* 342, tab. XXXIV). — Oznaczmy przez *p* parabolę daną i przez *ab* cięciwę służącą za średnicę koła. Płaszczyzny styczne w punktach *a* i *b* winny się przecinać z sobą podług prostej przechodzącej przez wierzchołki szukane, którato prosta ma za ślad poziomy punkt θ przecięcia się stycznych do paraboli w punktach *a* i *b*, i winna być równoległą do linii największego spadku płaszczyzny koła, gdyż styczne w punktach *a* i *b* do koła są linijami największego spadku jego płaszczyzny, a ponieważ są one w zupełności zawarte w płaszczyznach stycznych do ostrokręgów w punktach *a* i *b*, więc są one równoległe do ich wspólnego przecięcia. Przecięcie zatem, o którem mowa, jest prostą nachyloną do poziomu pod kątem 45°, i mającą za rzut poziomy prostopadłę θd do prostej *ab*, przechodzącą przez punkt θ.

Jeżeli przez tę prostę i przez środek koła *c* nakreślimy płaszczyznę sieczną, której śladem poziomym jest prosta łącząca punkta θ i *c*, to płaszczyzna ta wyznaczy na paraboli punkt *t*, na płaszczyznie koła jego średnicę prostopadłą do *ab*, a na jego okręgu końce tej średnicy. Rzuty końców tej średnicy znajdziemy, kreśląc najprzód rzut poziomy średnicy *ck* prostopadłej do *ab*, i robiąc następnie jej kład naokoło tego rzutu, gdyż wówczas przypadnie on na linii E_1E_2, którą otrzymamy, kreśląc przez punkt *c* prostę nachyloną pod kątem 45° do *ck*, i odcinając na niej po jednej i po drugiej stronie punktu *c*, długości cE_1, cE_2 równe promieniowi koła. Powracając figurę do jej pierwotnego położenia, punkta E_1, E_2 przypadną w punktach e_1, e_2, które są ich rzutami poziomemi, wskutek czego proste przecięcia się ostrokręgów z płaszczyzną sieczną mają za rzuty poziome proste e_1t, e_2t, i wyznaczają w punktach przecięcia się z prostą θd, rzuty poziome s_1, s_2 wierzchołków ostrokręgów.

Rzuty pionowe odpowiednie znajdziemy wprost, zasadzając się na szczególnej wartości nachylenia prostej wierzchołków do płaszczyzny poziomej rzutów; ta bowiem prosta będzie nachyloną pod kątem 45° do poziomu, gdyż wzniesienie punktu s_2 liczone ponad płaszczyzną poziomą, jeżeli przyjmiemy, że punkt E_2 leży pod nią, jest właśnie równe θs_2, a wzniesienie drugiego wierzchołka liczone pod płaszczyzną poziomą, jest równe θs_1, z tejże samej przyczyny, co wiedząc możemy łatwo nakreślić rzuty pionowe s'_1, s'_2 wierzchołków. Na rysunku przedstawiliśmy także obwody pozorne w rzucie ostrokręgu, mającego wierzchołek w punkcie s_2, s'_2, obwody zaś pozorne drugiego ostrokręgu dadzą się wykreślić w sposób zupełnie taki sam.

537. Zadanie VIII. — *Mając dane dwie proste i jeden punkt na każdej z nich, wyznaczyć dwa walce obrotowe dotykające prostych w punktach danych i to tak, żeby*

1° *w tych punktach płaszczyzny styczne były równoległe pomiędzy sobą, jakoteż, żeby*

2° *te punkta należały do przecięcia prostego walca.*

1° Oznaczmy przez D, D_1, c, c_1 (fig. m_9) proste i punkta dane.

Ponieważ płaszczyzny styczne winny być równoległe i mają nadto obejmować, jedna prostę D a druga prostę D_1, więc znajdziemy je, kreśląc przez D i przez D_1 płaszczyzny P, P_1 odpowiednio

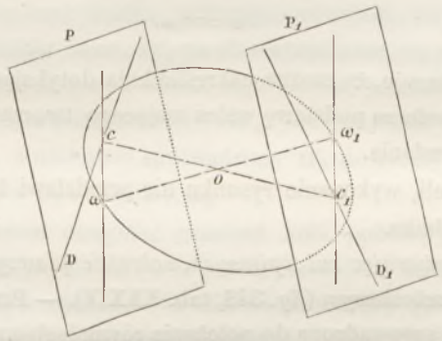

Fig. m_9.

równoległe do tychże prostych D_1, D. Wskutek tego punkt O, czyli środek prostej cc_1 jest jednym z punktów osi walca, rzuty $c\omega$, $c_1\omega_1$ prostej cc_1 na płaszczyzny P i P_1 są tworzącemi dotknięcia, zaś okrąg koła, opisany na płaszczyznie prostopadłej do tworzących $c\omega$, $c_1\omega_1$ na $\omega\omega_1$ jako średnicy, jest podstawą walca.

2° Zostawmy dane poprzedniej figury na figurze m_{10}.

Ponieważ prosta nakreślona pomiędzy punktami c i c_1 winna być cięciwą przecięcia prostego, więc płaszczyzna Q, nakreślona prostopadle do tej cięciwy i przez jej środek o, musi przechodzić przez

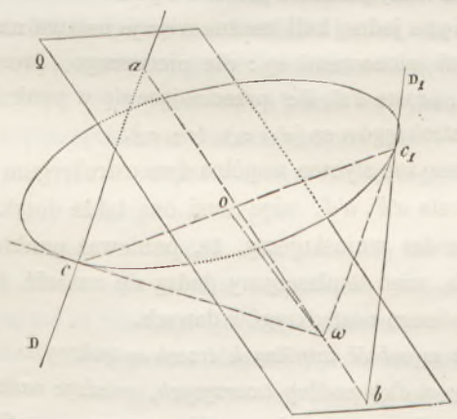

Fig. m_{10}.

prostę wspólnego przecięcia płaszczyzn stycznych w punktach c, c_1; że zaś punkta przecięcia a i b płaszczyzny Q z prostemi D i D_1 należą do prostych wspólnego przecięcia się płaszczyzn stycznych

z płaszczyzną Q, łącząc zatem punkta a i b, znajdziemy prostę ab wspólną Q i uważanym płaszczyznom stycznym, a którato prosta musi być równoległą do tworzących dwu walców.

Z punktu o nakreślmy prostę prostopadłą do ab, i niech jej spodkiem będzie ω; następnie nakreśliwszy proste $\omega c, \omega c_1$, to ponieważ prosta cc_1 będzie prostopadłą do płaszczyzny Q, zaś prosta $o\omega$ prostopadłą do prostej ab płaszczyzny Q, zatem na zasadzie twierdzenia trzech prostopadłych, proste $c\omega$, $c_1\omega$ będą także prostopadłe do ab.

Płaszczyzna trójkąta $c\omega c_1$ jest prostopadłą do ab, prócz tego Q jest miejscem geometrycznem punktów równooddalonych od cc_1, mamy więc ztąd :

$$c\omega = c_1\omega.$$

Ponieważ ta równość wskazuje, że można nakreślić koła dotykające prostych $c\omega$, $c_1\omega$ w punktach c i c_1, zatem przyjmując to koło za podstawę walca mającego tworzące w kierunku prostej ab, znajdziemy właśnie rozwiązanie zadania.

Po tem cośmy tu powiedzieli, wykonanie rysunku nie przedstawi żadnej trudności i będzie doskonałem ćwiczeniem dla czytelnika.

538. Zadanie IX. — *Nie używając kul wpisanych, nakreślić płaszczyznę styczną wspólną dwu ostrokręgom obrotowym współwierzchołkowym* (*fig.* 343, tab. XXXIV). — Przypuśćmy, że płaszczyzna wyznaczona przez dwie osie została sprowadzoną do położenia równoległego do płaszczyzny pionowej rzutów. Oznaczmy w tem położeniu przez $(sz, s'z')$, $(sz_1, s'z'_1)$ rzuty dwu osi. Dla zupełnego wyznaczenia ostrokręgów biorąc jeszcze kąty tworzące, będziemy mogli nakreślić obwody pozorne tych powierzchni w rzucie pionowym, pierwszy bowiem, czyli dla pierwszego ostrokręgu otrzymamy za pomocą prostych $s'g'_1$, $s'g'_2$ leżących po jednej i po drugiej stronie prostej $s'z'$, a nachylonych do niej pod kątem tworzącym, drugi zaś przez proste $s'g'_3$, $s'g'_4$ nachylone po jednej i po drugiej stronie prostej $s'z'_1$ pod kątem równym drugiemu kątowi tworzącemu danemu.

Jeżeli przetniemy dwa ostrokręgi kulą dowolnego promienia, której środek leży w wierzchołku wspólnym s, s', to obwód pozorny pionowy tej kuli będzie okręgiem koła, mającym za środek punkt s' a promień równy promieniowi kuli, miejsca zaś geometryczne, w których kula spotka ostrokręgi, będą okręgami kół mającemi za rzuty pionowe proste $a'b'$, $c'd'$.

Ponieważ koła te znajdują się na jednej kuli, można więc je ustawić na dwu ostrokręgach (§ 164, 3°), których obwodami pozornemi pionowemi są : dla pierwszego, proste $b'd'$, $a'c'$ przecinające się w punkcie σ'_1, a dla drugiego, proste $a'd'$, $b'c'$ przecinające się w punkcie σ'_2. Wypada więc ztąd, że rzutami wierzchołków dwu ostrokręgów są (σ'_1, σ_1), (σ'_2, σ_2).

Otóż, ponieważ wszelka płaszczyzna styczna wspólna dwu ostrokręgom danym, obejmuje styczne do dwu kół mających za rzuty proste $a'b'$, $a'd'$, więc musi ona także dotykać jednego z ostrokręgów pomocniczych. Z tego co poprzedza wnioskujemy, że, ponieważ punkta (σ'_1, σ_1), (σ'_2, σ_2) należą do płaszczyzn stycznych szukanych, więc te płaszczyzny dadzą się znaleźć, kreśląc po prostu przez każdy z nich płaszczyzny styczne do jednego z ostrokręgów danych.

539. Zadanie X. — *Znając wysokość wspólną h trzech ostrokręgów obrotowych równych, mających osie w kącie 1 i dotykających się co dwa podług tworzących, wiedząc nadto, że jeden z nich spotyka obie płaszczyzny rzutów, a drugi tylko płaszczyznę poziomą podług tworzącej profilu, nakreślić ich rzuty* (*fig.* 344, tab. XXXV). — Ponieważ wierzchołek wspólny winien koniecznie leżeć na osi rzutów, ustawmy go więc na niejw położeniu dowolnem s, s'. Biorąc teraz pod uwagę dwa ostrokręgi, które winny dotykać płaszczyzny poziomej rzutów, znajdziemy, że ich rzuty poziome są równe, i że oś jednego z nich jest

prostopadłą do osi rzutów; dzieląc więc kąt prosty z_2sx na trzy części równe, znajdziemy rzut poziomy sg ich wspólnej tworzącej dotknięcia, jakoteż rzut sz_1 na tęż płaszczyznę osi ostrokręgu stycznego do obu płaszczyzn rzutów. Rzut pionowy tej osi jest prostą $s'z'_1$ symetryczną do sz' względem osi rzutów.

Wykreślenie ostrokręgu stycznego do obu płaszczyzn rzutów. — Wiemy, że obwód pozorny poziomy tego ostrokręgu jest wyznaczonym przez oś rzutów i przez prostę sg, pionowy zaś jest symetrycznym do pierwszego względem xy, czyli, składa się on z prostej xy i z prostej $s'g'_1$ symetrycznej do sg względem xy. Należy więc nakreślić rzuty podstawy ostrokręgu stycznego do dwu płaszczyzn rzutów. W tym celu, nakreślmy rzut środka, odcinając na osi sz_1, $s'z'_1$ i od punktu s, s' wysokość daną h; otrzymamy to, sprowadzając oś sz_1, $s'z'_1$ na płaszczyznę pionową rzutów i obracając ją naokoło pionowej przechodzącej przez punkt s, s'. Podczas tego obrotu, jakikolwiek punkt m, m' przypada w punkcie m_1, m'_1, zaś oś przybiera położenie sm_1, $s'm'_1$, poczem jeżeli na tej ostatniej prostej odetniemy wysokość h równą $s\Omega$, a następnie sprowadzimy Ω'_1 do rzeczywistego położenia, to środki obu rzutów podstawy znajdą się w punktach ω'_1, ω_1.

Z kładu tego możemy zarazem otrzymać promień koła podstawy, gdyż dosyć będzie przez punkt Ω'_1 nakreślić prostopadłę Ω'_1A_1 do $s'\Omega'_1$ a ta prosta przedstawi w rzeczywistej wielkości promień szukany. Ponieważ sA_1 może być uważanem za kład na płaszczyznę pionową rzutów, (naokoło pionowej przechodzącej przez punkt s, s'), tworzącej dotknięcia ostrokręgu z płaszczyzną poziomą rzutów, więc kreśląc z punktu s jako środka, promieniem równym sA_1, łuk koła, znajdziemy w punkcie a_1, przecięcia się tego łuku z prostą sz_1 punkt najniższy koła podstawy, a wskutek symetryi, ponieważ punkt a_1 jest jednym wierzchołkiem małej osi rzutu poziomego podstawy, zatem odciąwszy ω_1a_2 równe ω_1a_1, punkt a_2 będzie drugim wierzchołkiem tej osi.

Jeżeli teraz przez punkt ω_1 nakreślimy prostę prostopadłą do małej osi, to otrzymamy oś wielką elipsy, której końce znajdziemy, odcinając na niej, po jednej i po drugiej stronie punktu ω, długości równe promieniowi Ω'_1A_1, — znając zaś cztery wierzchołki a_1, a_2, b_1, b_2 elipsy szukanej, takowę łatwo nakreślimy.

Drugi rzut podstawy otrzymamy również łatwo, gdyż dosyć jest nakreślić elipsę, której wierzchołki α'_1, α'_2, β'_1, β'_2 są symetryczne do pionowych względem xy. Punkt spotkania się dwu elips z osią rzutów jest odrazu wyznaczony przez rzut punktów a_1, a'_1 na xy, czyli przez przecięcie się prostej $a_1\alpha'_1$ z osią rzutów xy, zaś punkta symetryczne punktu dotknięcia a'_1, względem dwu środków ω_1, ω'_1, wyznaczają punkt najniższy c rzutu poziomego i punkt najwyższy c_1 rzutu pionowego.

Wykreślenie ostrokręgu dotykającego płaszczyzny poziomej rzutów podług prostej profilu. — Ponieważ prosta sg jest osią symetryi rzutów poziomych dwu pierwszych ostrokręgów, więc możemy natychmiast nakreślić rzut poziomy drugiego ostrokręgu.

Rzut poziomy znajdziemy, zważając, że środek koła podstawy ma za rzut pionowy punkt ω'_2 na wysokości punktu ω_1, ω'_1 na płaszczyznie profilu wierzchołka. Wierzchołki s', σ' małej osi elipsy szukanej wyznaczymy łatwo, jej zaś oś wielką znajdziemy, przedłużając prostę poziomą $\omega'_1\omega'_2$ do przecięcia się jej w b_3, b_4, z linijami rzutów przechodzącemi przez wierzchołki b_3, b_4 rzutu poziomego tejże osi; to mając, druga elipsa może być nakreśloną, i ona to ograniczy rzut pionowy ostrokręgu nie kreśląc obwodu pozornego, który tutaj redukuje się do jednego punktu s'.

Rzut trzeciego ostrokręgu. — Ponieważ ten ostrokrąg winien być stycznym do dwu poprzedzających, więc rzut poziomy jego osi winien przypaść na prostej sg. Dla znalezienia obwodów pozornych, wyznaczymy środek kuli dotykającej ostrokręgu na jego podstawie. Środek kuli wpisanej,

o której mowa, znajdziemy w punkcie przecięcia się osi trzeciego ostrokręgu z normalną wspólną pierwszemu ostrokręgowi i temu, którego szukamy, a przechodzącą przez punkt wspólny podstawom tych ostrokręgów. Żeby znaleźć rzut poziomy tej normalnej, zauważmy, że normalne wzdłuż podstawy pierwszego ostrokręgu, zbiegają się w jednym punkcie na jego osi, że zaś w punkcie a_1, a'_1 normalna jest pionową, więc punkt a_1, a'_1 jest wierzchołkiem wiązki normalnych, a normalna wspólna ma za rzut poziomy prostę wychodzącą z punktu a_1 i dochodzącą do prostej sg, tudzież jest podzieloną na dwie równe części w drugim swym punkcie przecięcia z elipsą $a_1b_1a_2b_2$.

Pierwszem miejscem geometrycznem drugiego końca tej normalnej jest prosta sg, szukajmy więc drugiego. W tym celu, nakreślmy przez a_1 sieczne dochodzące do elipsy $a_1b_1a_2b_2$ i przedłużmy je poza drugi ich koniec przecięcia, na długość równą pierwszej części, to miejsce tak znalezionych punktów obejmie punkta szukane; że zaś miejsce to jest krzywą podobną (homothétique) do tej, którą przekształcamy, stosunek podobieństwa jest równym $\frac{1}{2}$, a środek podobieństwa leży w a_1, zatem krzywa ta jest elipsą. Postępując w ten sposób, sprowadziliśmy zadanie do wyznaczenia punktu przecięcia prostej z elipsą, któreto zadanie da się rozwiązać bez kreślenia nowej elipsy.

Rzeczywiście, wystawmy sobie bowiem, że ta elipsa jest rzutem koła leżącego na płaszczyznie podstawy, mającej za rzut poziomy prostopadłę P do prostej sa_1, a przechodzącą przez punkt a_1. Jeżeli zrobimy kład na płaszczyznę poziomą rzutów tego koła i prostej na tej płaszczyznie leżącej, a mającej za rzut poziomy prostę sg, to ponieważ koło w kładzie będzie miało środek w punkcie c_2 na prostej a_1s i w odległości od punktu a_1 równej średnicy b_1b_2 koła podstawy, kreśląc więc z punktu c_2 jako środka, promieniem równym c_2a_1, okrąg koła, znajdziemy kład koła. Kład zaś prostej, której rzutem jest sg, otrzymamy zważając, że punkt u przecięcia się jej z osią obrotu nie zmienia swego położenia podczas obrotu, a drugi punkt v przecięcia się jej z prostą równoległą do osi obrotu a przechodzącą przez punkt a_2, przypada w punkcie V_1, to jest na przecięciu się prostopadłej z równoległą do P, z których pierwsza przechodzi przez punkt v, a druga przez punkt c_2, czyli przez kład punktu mającego za rzut punkt a_2.

Jeżeli nakreślimy prostę uV_1 i wyznaczymy punkt o_1 przecięcia się jej z okręgiem koła w kładzie, to ten punkt o_1 po podniesieniu z kładu będzie miał za rzut poziomy punkt o, leżący i na prostopadłej do P przechodzącej przez o_1 i na prostej sg; łącząc więc punkt a_1 z o liniją prostą, znajdziemy rzut poziomy normalnej wspólnej, który, jeżeli rysunek jest dokładnie wykonany, winien być podzielony na dwie równe części w drugim swym punkcie przecięcia γ_1 z elipsą $a_1b_1a_2b_2$.

Punkt γ_1 ma za rzut pionowy odpowiedni punkt γ'_1, a punkt w przestrzeni γ_1, γ'_1 jest właśnie punktem spotkania się dwu podstaw.

W skutek symetryi, znajdziemy w punkcie przecięcia się elipsy $a_3b_3a_4b_4$ z prostopadłą do sg, przechodzącą przez punkt γ_1, punkt γ_2 dotknięcia się tej elipsy z rzutem poziomym trzeciej podstawy, linija rzutów wyznaczy punkt γ'_2.

Rysunek winien przedstawić dwa następujące sprawdzenia: 1° punkta γ'_2, γ'_1 winny leżeć w jednakowej odległości od osi rzutów xy, i 2° trzy punkta o, γ_2, a_2 winny leżeć na jednej prostej, podzielonej w punkcie γ_2 na dwie równe części.

Przed chwilą znaleziony punkt o jest rzutem poziomym środka kuli dotykającej trzeciego ostrokręgu podług okręgu koła podstawy, wyznaczmy teraz jego rzut pionowy; w tym celu zauważmy, że w pierwszym ostrokręgu środek kuli, dotykającej go podług okręgu koła podstawy, ma za rzuty punkta a_1, α'_1, w drugim zaś środek tejże kuli przypada w punkcie, którego rzuty są w punktach a_3, a'_3, z których ostatni t. j. punkt a'_3 przypada na przecięciu się linii rzutów, przechodzącej przez punkt a_3, z prostą

równoległą do osi rzutów, przechodzącą przez punkt α'_1; zatem rzut pionowy środka trzeciej kuli musi leżeć współcześnie na linii rzutów przechodzącej przez punkt a, na prostej $\alpha'_1\gamma'_1$ i na prostej $a'_3\gamma'_1$, czyli że trzy te proste muszą się zchodzić w jednym punkcie o', który jest właśnie punktem szukanym.

Promień tej kuli jest równy promieniowi kuli, mającej swój środek w punkcie a_1, α'_1, to jest prostej $\alpha'_1 a'_1$; jeżeli więc z punktu o' promieniem równym $\alpha'_1 a'_1$ zakreślimy okrąg koła, a z punktu s' nakreślimy doń styczne, to otrzymamy obwód pozorny trzeciego ostrokręgu.

Należy teraz znaleźć rzuty podstawy ostrokręgu, któreto zadanie sprowadza się zawsze do znalezienia rzutów koła, a które rozwiązaliśmy, robiąc kład poziomy płaszczyzny pionowej rzucającej, której osią jest $so, s'o'$, naokoło prostej so.

Podczas tego obrotu punkt s zostaje nieruchomym, punkt o, o' przypada w punkcie o_2 na prostopadłej do osi obrotu, przechodzącej przez punkt o, a w odległości oo_2 równej wzniesieniu punktu o, o'; kład więc znajdziemy, kreśląc prostę so_2.

Jeżeli na kładzie osi odetniemy długość $s\Omega_3$ równą wysokości $s'\Omega'_3$ ostrokręgów, i nakreślimy przez punkt Ω_3 prostę prostopadłą $\Omega_3 F_1$ do $s\omega_3$, a równą promieniowi koła podstawy, to prosta ta będzie właśnie rzutem na płaszczyznę w kładzie połowy koła podstawy.

Podniosłszy figurę z kładu, środek koła będzie miał rzut poziomy w punkcie ω_3, pionowy zaś w punkcie ω'_3, leżącym na linii rzutów przechodzącej przez punkt ω_3 i w odległości równej $\omega\Omega_3$; punkt F_1 będzie miał za rzut poziomy punkt f_1, rzut zaś jego pionowy przypadnie w punkcie f'_1, t. j. w odległości $\varphi' f'_1$ od poziomej przechodzącej przez punkt ω'_3, równej różnicy wzniesień $\omega_3\Omega_3, f_1 F_1$, czyli $\varphi_1 F_1$; wreszcie na zasadzie symetryi, znajdziemy punkta f_2, f'_2. Jeżeli teraz nakreślimy przez środek ω_3, ω'_3 poziomę płaszczyzny koła, odetniemy na rzucie poziomym tej prostej, z jednej i z drugiej strony punktu ω_3, długości $\omega_3 h_1, \omega_3 h_2$ równe $\omega_1 b_1$, a następnie podniesiemy za pomocą linij rzutów punkta h_1, h_2 do h'_1, h'_2 na równoległę do osi xy, przechodzącą przez punkt ω'_3, to otrzymamy na płaszczyznie poziomej rzutów, dwa wierzchołki h_1, h_2 rzutu poziomego podstawy trzeciego ostrokręgu, a na płaszczyznie pionowej rzutów końce h'_1, h'_2 średnicy rzutu pionowego tejże podstawy.

Ostatecznie więc znamy cztery wierzchołki f_1, f_2, h_1, h_2 szukanego rzutu poziomego, i końce f'_1, f'_2, h'_1, h'_2 dwu średnic sprzężonych drugiego rzutu, a to mając potrafimy nakreślić oba rzuty podstawy.

Sprawdzenie dokładności rysunku mamy tu następujące : elipsy winny się dotykać w punktach $\gamma_1, \gamma_2, \gamma'_1, \gamma'_2$, a elipsa $f'_1 h'_1 f'_2 h'_2$ winna spotykać obwód pozorny ostrokręgu, którego ona jest rzutem podstawy, w punktach dotknięcia rzutów tego obwodu z obwodem kuli wpisanej (§ 395).

540. Zadanie XI.—*Mając dane trzy ostrokręgi o wierzchołkach na jednej linii prostej, z których pierwszy jest jakimkolwiek, a dwa pozostałe mają za kierownice przecięcia płaskie pierwszego, nakreślić do tych dwu ostatnich płaszczyznę styczną wspólną.* — Jeżeli przez prostę, na której leżą wierzchołki ostrokręgów przesuniemy płaszczyznę styczną do pierwszego, to ona przetnie płaszczyzny podstaw dwu pozostałych podług prostych stycznych do podstaw, a że styczne i wierzchołki odpowiednie leżą na szukanej płaszczyznie stycznej, więc ta płaszczyzna będzie styczną do trzech ostrokręgów.

Możemy wyprowadzić ztąd następujące twierdzenie :

541. Twierdzenie III. — *Jeżeli wierzchołki trzech powierzchni stożkowych drugiego stopnia leżą na jednej linii prostej, a jedna z nich spotyka dwie pozostałe podług krzywych płaskich, to te ostatnie przecinają się z sobą także podług krzywej płaskiej.* — Rzeczywiście, ponieważ dwie powierzchnie, których przecięcia szukamy, mają dwie płaszczyzny styczne wspólne w dwu punktach wspólnych, więc podług twierdzenia Monge'a, ich przecięcie jest układem dwu stożkowych.

542. Określenie. — Rzuty bryłowe (stéréographique). — *Rzutem bryłowym jakiejkolwiek figury kulistej, nazywamy perspektywę tej figury, gdy punkt widzenia jest jednym z punktów powierzchni tej kuli, a obraz jest jej płaszczyzną średnicową prostopadłą do promienia wpadającego do punktu widzenia.*

543. Twierdzenie IV. — *Rzutem bryłowym koła leżącego na kuli jest koło, którego środek jest rzutem wierzchołka ostrokręgu, dotykającego kuli podług koła danego* (fig. n_1). — Oznaczmy przez ω środek kuli, przez C koło nakreślone na jej powierzchni, przez S wierzchołek ostrokręgu opisanego na kuli podług koła C, przez o środek rzutów, zaś przez P płaszczyznę średnicową prostopadłą do promienia ωo. Wyobraziwszy sobie kulę pomocniczą, mającą środek w punkcie S, a promień równy długości tworzącej Sa ostrokręgu opisanego, ta kula przetnie prostopadle kulę daną, mającą środek w punkcie ω. Przekształćmy figurę zapomocą promieni wodzących odwrotnych, przyjmując za biegun przekształcenia punkt o, a za potęgę dwa razy wzięty kwadrat promienia kuli, to znajdziemy, że punktem przeciwśrednicowym punktu o jest punkt ω, a kula dana przekształca się na płaszczyznę prostopadłą do promienia $o\omega$, to jest na płaszczyznę średnicową P. Kula pomocnicza ma za przekształconę inną kulę, której środek leży na So, nadto, ponieważ kąty utworzone przez powierzchnie w różnych punktach ich wspólnego przecięcia pozostają niezmienne, zatem przekształcona kuli pomocniczej winna przecinać P prostokątnie, t. j. mieć swój środek na P, czyli, że środek ten musi leżeć na przecięciu się P z oS t. j. w punkcie Σ. Ponieważ przecięcie się płaszczyzny P z przekształconą kuli

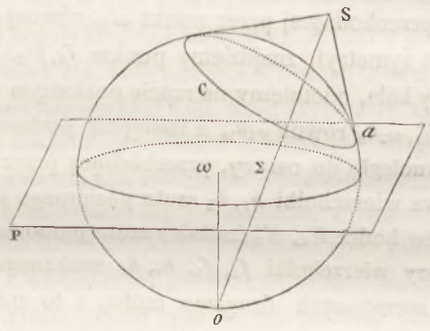

Fig. n_1.

pomocniczej wyznacza rzut bryłowy (stereograficzny) koła C, zatem ten rzut jest rzeczywiście kołem, którego środek jest rzutem Σ punktu S. Część twierdzenia dotyczącą środka rzutu, zawdzięczamy panu Chasles.

544. Zadanie XII. — *Nakreślić płaszczyznę styczną wspólną dwu ostrokręgom, mającym wierzchołek wspólny leżący na powierzchni kuli danej, zaś podstawy na tejże kuli otrzymane z przecięcia jej dwiema płaszczyznami danemi.* — Dla uproszczenia rysunku przyjmiemy najwyższy punkt s, s' kuli za wierzchołek ostrokręgu (*fig.* 345, tab. XXXVI), a płaszczyzny (P_1, P'_1), (P_2, P'_2) za płaszczyzny podstaw.

Ponieważ rzuty bryłowe (stereograficzne) podstaw na płaszczyznę średnicową poziomą są kołami, a nadto, ponieważ ta płaszczyzna średnicowa jest równoległą do płaszczyzny poziomej rzutów, więc podstawy ostrokręgów na tę ostatnią płaszczyznę będą kołami, których wykreśleniem zajmiemy się tutaj.

Wyznaczmy przedewszystkiem obwody pozorne ostrokręgów opisanych na kuli podług dwu podstaw danych; otóż na płaszczyznie pionowej rzutów, rzuty podstaw, obwód pozorny kuli i ostrokręgów opisanych, winny się dotykać w dwu punktach, które znajdziemy, szukając punktów podstaw, leżących

na obwodzie pozornym pionowym kuli. Jeżeli przetniemy wszystko płaszczyzną obrazu F, przechodzącą przez środek o, o' tej powierzchni, to znajdziemy, na kuli koło obwodu pozornego pionowego, na płaszczyznie P_1, P'_1 liniję obrazu h_1h_2, $h'_1k'_1$, a na drugiej płaszczyznie P_2, P'_2 prostę obrazu h_2h_1, $h'_2k'_2$; przecięcie się zaś koła z prostemi obrazu wyznaczy punkta dotknięcia obwodów pozornych pionowych kuli i dwu ostrokręgów na niej opisanych a'_1, b'_1 a'_2, b'_2.

Ponieważ bieguny t'_1, t'_2 cięciw $a'_1b'_1$, $a'_2b'_2$ względem okręgu koła nakreślonego na płaszczyznie pionowej rzutów, są rzutami pionowemi wierzchołków ostrokręgów opisanych, nadto, te wierzchołki znajdują się na płaszczyznach pionowych prostopadłych do płaszczyzn podstawy, przechodzących przez środki kuli, więc mają one swe rzuty pionowe zarazem i na linijach rzutów odpowiednich i na prostopadłej wychodzącej z punktu o do P_1 lub do P_2. Znamy więc już w tej chwili rzuty prostokątne (t_1, t'_1), (t_2, t'_2) wierzchołków ostrokręgów opisanych. Jeżeli więc ustawimy środek rzutów w punkcie s, s', i zrobimy rzut ostrokręgowy na płaszczyznę poziomą rzutów, to otrzymamy punkta a θ_1, θ_2, zrobiwszy rzut stożkowy jak wyżej punktów płaszczyzny obrazu F, której rzutami pionowemi prostokątnemi są a'_1, b'_2, to otrzymamy α_1, β_2. Mając teraz środki θ_1, θ_2 szukanych okręgów kół i punkt przejścia każdego z nich t. j. α_1 i β_1, można je nakreślić, a jedna z ich stycznych wspólnych Q jest śladem poziomym jednej z szukanych płaszczyzn stycznych, która jest wyznaczoną przez prostę Q i przez punkt s, s'.

545. Zadanie XIII. — *Mając dwa ostrokręgi obrotowe dane przez ich osie* (z, z'), $(z_1 z'_1)$, *przez ich wierzchołki* (s, s'), (t, t') *i przez ich kąty tworzące, nakreślić obwody pozorne tych powierzchni i płaszczyzny styczne równoległe* (*fig.* 346, tab. XXXVI). — Za pomocą kul wpisanych, wyznaczymy obwody pozorne, w sposób podany w paragrafie **471**.

Przypuśćmy, że wykreślenie już jest zrobione, a dla uproszczenia rysunków zostających do wykonania przyjmijmy, że kule wpisane mają promienie równe. Przypuśćmy nadto że obwody pozorne tak kul (γ, γ'), (γ_1, γ'_1) jakoteż ostrokręgów odpowiadających są już nakreślone, i zajmijmy się jedynie drugą częścią zadania.

Pierwsze rozwiązanie. — Ponieważ wzdłuż równoleżników dotknięcia ostrokręgów z kulami wpisanemi, normalne do tych ostrokręgów tworzą dwie inne powierzchnie ostrokręgowe, mające wierzchołki w punktach (o, o'), (o_1, o'_1), możemy więc zastąpić rozwiązanie, którego szukamy, wyznaczeniem tworzących równoległych tych ostrokręgów; w tym celu, zmieńmy położenie kuli (γ_1, γ'_1) i jej ostrokręgu opisanego, nie zmieniając oryentacyi figury ruchomej, lecz w ten sposób, żeby kule wpisane przykrywały się wzajemnie. Jeżeli teraz nakreślimy styczną do kół γ, γ', odpowiednio równoległe do prostych obwodów pozornych ostrokręgu, mającego wierzchołek w punkcie t, t', to znajdziemy obwody pozorne ostrokręgu przeniesionego i jego wierzchołek σ, σ', W tej chwili więc ostrokręgi normalne mają wierzchołek wspólny o, o', a zadanie nasze sprowadza się do znalezienia ich wspólnych tworzących, lub też do znalezienia punktów przecięcia się kół, podług których ostrokręgi mające wierzchołki w punktach (s, s'), (σ, σ') dotykają kuli γ, γ'. Dla znalezienia punktów, o których mowa, zróbmy rzuty stereograficzne tych kół, przyjmując za środek rzutów punkt najniższy kuli γ, γ', czyli raczej nakreślmy rzuty zbieżne kół na płaszczyznie poziomej rzutów, biorąc za środek rzutów punkt o_1, c'. Tak znalezione rzuty będą, naturalnie, kołowemi jak rzuty (stereograficzne) bryłowe. Wyznaczmy ich środek sposobem podanym przez P. Chasles. W tym celu, nakreślmy rzuty stożkowe $(c's, os)$, $(c'\sigma', o\sigma)$ i wyznaczmy ich ślady poziome ω_1, ω_2, a te będą właśnie środkami szukanemi; biorąc obecnie rzuty zbieżne punktów leżących na płaszczyznie obrazu, której śladem jest F, otrzymamy za rzuty ich pionowe punkta a', b', zaś punktami, przez które przechodzą każde z kół szukanych będą punkta α i β. Jeżeli więc nakreślimy te okręgi kół, i oznaczymy ich punkta spotkania

(φ, φ'), (φ_1, φ'_1), to punkta te będą właśnie rzutami zbieżnemi punktów szukanych. Dla podniesienia ich z kładu nakreślmy rzuty prostokątne $(\varphi o, \varphi'_1 c')$ tych rzucających zbieżnych, które dałyby w punkcie przecięcia się ich z kulą, punkta szukane; można je jednakże otrzymać łatwiej, zważając, 1° że leżą one w punktach spotkania się krzywych dotknięcia ostrokręgów opisanych, mających wierzchołki w punktach (s, s'), (σ, σ'), i 2° że wszystkie krzywe dotknięcia otrzymane przez posuwanie wierzchołków (s, s'), (σ, σ') po prostej $s\sigma$, $s'\sigma'$, zbiegają się w punktach szukanych. Jeżeli więc ustawimy wierzchołki spotkania σ_1, σ'_1 prostej σs, $\sigma' s'$ z płaszczyzną obrazu F, to rzut pionowy krzywej dotknięcia będzie prostolinijnym, i przypadnie na biegunowej $p'q'$ punktu σ'_1 względem γ', czyli, że rzuty pionowe spodków normalnych znajdą się na przecięciu f_1, f'_1 tej biegunowej z prostemi $\varphi' c'$, $\varphi'_1 c'_1$, a linije rzutów wyznaczą nam rzuty poziome f, f_1 odpowiadające.

Biorąc przy wykreśleniu pod uwagę tylko punkt f, f', to proste $o'f'$, of będą rzutami normalnej odpowiedniej, a kreśląc przez punkt o_1, o'_1 proste $o_1 f_2, o'_1 f'_2$, równe i równoległe do of, $o'f'$, otrzymamy rzuty normalnej równoległej, poczem pozostaje jeszcze do wykreślenia przez (f, f'), (f_2, f'_2) płaszczyzny prostopadłe do tych normalnych. Tworzące dotknięcia znajdziemy uważając, że jedną z nich jest prosta $(sf, s'f')$, a drugą prosta otrzymana z nakreślenia prostych σf, $\sigma' f'$ i do nich równoległych, a przechodzących przez punkt s, s', które, jeżeli rysunek jest dokładnie wykonany, winny przechodzić przez punkt f_2, f'_2.

546. Drugie rozwiązanie. — Zmieniwszy położenie jednego z ostrokręgów w sposób podany powyżej, można nakreślić przez prostę $s\sigma$, $s'\sigma'$ płaszczyzny styczne do kuli γ, γ', zaś przez punkt t, t' płaszczyzny równoległe do pierwszych, a przechodzące przez punkt s, s'. Weźmy ostrokrąg opisany na kuli, którego wierzchołek σ, σ' znajduje się na przecięciu płaszczyzny obrazu F z prostą σt, $\sigma' t'$, i nakreślmy odpowiedni ostrokrąg opisany. Jedna z krzywych o rzucie prostym i kołowym ostrokręgu opisanego na γ, γ', a mającego wierzchołek w punkcie σ_1, σ'_1, będzie miała za rzut γ, $k'g'$; płaszczyzna tej krzywej spotyka w punkcie i, i' prostę wierzchołków, zaś styczne do tej krzywej przechodzące przez punkt i, i', wyznaczają z prostą wierzchołków, płaszczyzny styczne wspólne do ostrokręgów, mających wierzchołki w punktach (σ, σ'), (s, s'), co wiedząc z łatwością już dokończymy zadania.

Sprawdzenie dokładności rysunku, jest tu nakreślenie stycznej ij, $i'j'$ i prostej dotknięcia $j\sigma_1, j'\sigma'_1$, która to ostatnia winna przejść przez punkt f, f', t. j. przez koniec normalnej of, $o'f'$.

547. **Zadanie XIV.** — *Nakreślić płaszczyznę równooddaloną od czterech kul danych.* — Należy nakreślić płaszczyznę styczną do trzech kul, a następnie płaszczyznę równooddaloną od tej ostatniej i od czwartej kuli. Zadanie to ma 64 rozwiązań.

548. **Zadanie XV.** — *Do dwu ostrokręgów mających wierzchołek wspólny w ognisku południka elipsoidy obrotowej spłaszczonej, a za podstawy dwa przecięcia płaskie tejże elipsoidy, nakreślić wspólną płaszczyznę styczną.* — Dowiodłszy przedewszystkiem, że dwa ostrokręgi są obrotowe, nakreślimy następnie do nich płaszczyznę styczną wspólną, sposobem podanym w paragrafie 362.

549. **Zadanie XVI.** — *Opisawszy na elipsoidzie obrotowej o osi pionowej, walec równoległy do kierunku danego, nakreślić doń płaszczyznę styczną przez punkt obrany zewnątrz tej powierzchni.* — Należy przez punkt obrany zewnątrz nakreślić prostę równoległą do tworzących walca, a przez nią płaszczyznę styczną do elipsoidy.

550. **Zadanie XVII.** — *Opisawszy na powierzchni obrotowej o osi pionowej walec równoległy do kierunku danego, nakreślić doń płaszczyznę styczną nachyloną do poziomu pod kątem danym.* — Należy opisać na powierzchni obrotowej ostrokrąg, którego tworzące czynią kąt dany z poziomem, a następnie równolegle do kierunku tworzących walca nakreślić płaszczyzny styczne do tego ostrokręgu.

551. Zadanie XVIII. — *Przez punkt obrany na powierzchni obrotowej, której oś leży na linii ziemnej, nakreślić do niej płaszczyznę styczną* (*fig.* 347, tab. XXXVII). — Oznaczmy przez μ, μ' obwody pozorne powierzchni na obu płaszczyznach rzutów i przez m' rzut pionowy punktu danego. Przedewszystkiem należy nam wyznaczyć drugi rzut punktu M, a ten otrzymamy kreśląc przez punkt M płaszczyznę profilu Q, Q′ przecinającą powierzchnię; przecięcie to bowiem będzie kołem mającem środek w punkcie o a promień równy oa', kład zaś jego naokoło Q′ na płaszczyznę pionową rzutów, posłuży do znalezienia kładu M, punktu M_1, a podnosząc z kładu punkt M_1, znajdziemy punkt m t. j. drugi rzut punktu danego. Dla nakreślenia przez punkt m, m' płaszczyzny stycznej do powierzchni, wyznaczmy ślady v', h stycznej do równoleżnika, i uważmy, że styczna do μ' przechodząca przez a' wyznacza wierzchołek α ostrokręgu stycznych do południka wzdłuż równoleżnika danego, dalej, że ten punkt należy do płaszczyzny stycznej szukanej, i że jest on punktem zbiegu śladów tej płaszczyzny, zkąd wypada, że proste łączące punkt α z punktami v', h są śladami P, P′ szukanej płaszczyzny stycznej.

552. Zadanie XIX. — *Nakreślić płaszczyznę styczną w jakimkolwiek punkcie powierzchni obrotowej, posługując się sposobem podanym w paragrafie* **439** (*fig.* 348, tab. XXXVIII). — Oznaczmy przez z, z' oś powierzchni, przez μ' rzut pionowy tworzącej obrazu, przez ab, $a'b'$ rzuty równoleżnika wreszcie przez m, m' punkt powierzchni. Postąpmy tak, jak gdybyśmy szukali na równoleżniku danym punktu dotknięcia płaszczyzny stycznej, równoległej do nieznanego śladu pionowego tej płaszczyzny, jednak odwracając porządek wykreślenia w celu wyjścia z punktu m', i dojścia do poznania kierunku śladu pionowego. Jeżeli przez punkt a' nakreślimy styczną $a't'$ do μ' i do niej równoległę $m'\omega'$ przechodzącą przez punkt m', następnie połączymy punkt spotkania się ω' tej równoległej z punktami z' i a', to prosta $\omega'a'$ tak otrzymana winna być równoległą do śladu pionowego szukanej płaszczyzny stycznej.

Dla znalezienia teraz śladów płaszczyzny stycznej szukanej, znajdźmy ślad v' stycznej mt_1, $m't'_1$ do równoleżnika, i nakreślmy przez punkt v' równoległę P′ do $\omega'a'$, to przez punkt α przecięcia się tej prostej z osią rzutów xy, nakreśliwszy równoległę P do mt_1, otrzymamy PαP′ jako ślad płaszczyzny stycznej szukanej.

553. Zadanie XX. — *Mając elipsoidę spłaszczoną obrotową daną przez jej oś obrotu z, z', leżącą w płaszczyznie obrazu, i przez jej elipsę południka głównego* E, E′, *nakreślić do niej walec obrazu, mający za ślad poziomy okrąg koła* (*fig.* 349, tab. XXXVIII). — Ponieważ ślady poziome walców obrazu opisanych są elipsami mającemi jednę oś stałą i równą $a'a'_1$, żeby więc obie ich osie były równe, nakreślmy przez o' równoległę do xy, odetnijmy na niej $o'b' = o'a'$, zaś przez b' styczną do E′, a ta ostatnia wyznaczy nam właśnie kierunek rzutów pionowych tworzących walca. Ślad poziomy walca opisanego jest więc okręgiem koła C, mającym promień równy $o'a'$, który z łatwością da się ustawić w należytem położeniu.

554. Zadanie XXI. — *Mając daną kulę nieprzezroczystą promienia* R, *leżącą na płaszczyznie poziomej rzutów i dotykającą zarazem płaszczyzny pionowej, a oświetloną przez punkt świecący, położony w odległości* 2R *od płaszczyzny poziomej rzutów i nad nią, tak, że cień rzucony na płaszczyznę poziomą rzutów spotyka oś rzutów w punkcie danym* A *i pod kątem danym* α, *znaleźć:*

1° *Cień rzucony przez kulę na płaszczyznę poziomą rzutów,*

2° *Położenie punktu świecącego,*

3° *Cień rzucony przez kulę na płaszczyznę pionową rzutów,*

4° *Rzuty cienia własnego kuli* (*fig.* 350, tab. XXXVIII).

Obwody pozorne kuli. — Ponieważ kula jest styczną do obu płaszczyzn rzutów, więc tak wzniesienie

jak i oddalenie jej środka o, o' jest równe R, a okręgi kół styczne do osi rzutów i opisane z punktów o, i o' jako środków, są jej obwodami pozornemi.

Cień rzucony na płaszczyznę poziomą rzutów. — Ponieważ punkt A leży na krzywej cienia rzuconego przez kulę na płaszczyznę poziomą rzutów, więc kreśląc przez ten punkt prostę t nachyloną do osi rzutów xy pod kątem α, otrzymamy styczną do tej krzywej w punkcie A, nadto przyjmując za środek rzutów punkt świecący, rzuty stożkowe punktu najniższego i najwyższego kuli, nakreślone na płaszczyznie poziomej rzutów, znajdują się, jeden w punkcie najniższym, a drugi w nieskończoności, gdyż środek rzutów ma też same wzniesienie 2R, co punkt najwyższy. Z powyższego wynika, że krzywą cienia kuli na płaszczyznie poziomej rzutów jest parabola, wyznaczona przez swe ognisko F, przez styczną t i przez punkt dotknięcia A tej stycznej. Znajdźmy części wyznaczające tę parabolę, a przedewszystkiem jej oś. W tym celu nakreślmy promień wodzący FA, zaś przez punkt A prostę Au tworzącą z prostą FA kąt podzielony na dwie równe części przez prostę At, to prosta tak znaleziona wyznaczy kierunek osi paraboli, osią zaś będzie prosta Fz równoległa do Au, a przechodząca przez punkt F. Punkt przejścia stycznej w wierzchołku otrzymamy, robiąc rzut punktu F do p na prostę At, a prostopadła do Fz, przechodząca przez punkt p, będzie szukaną styczną w wierzchołku; spodek tej prostej σ przedstawia wierzchołek, kierownicę zaś d, d'_1 otrzymuje się natychmiast. W tej chwili wykreślenie paraboli nie przedstawia żadnej trudności.

Wyznaczenie punktu świecącego. — Jeżeli zrobimy przecięcie płaszczyzną pionową obejmującą σF, to znajdziemy: na kuli koło wielkie, na ostrokręgu świecącym dwa promienie, z których jeden jest styczny do tego koła wielkiego, i przechodzi przez punkt σ; promień zatem świecący znajdziemy łatwo, umieszczając punkt świecący nad płaszczyzną poziomą rzutów i na wysokości równej 2R.

Dla wykonania wskazanego rysunku, zróbmy kład, naokoło średnicy kuli równoległej do σF, płaszczyzny siecznej pionowej, przechodzącej przez σF, na płaszczyznę poziomą przechodzącą przez środek kuli; ponieważ w tym razie punkt F przypadnie w punkcie F_1 prostej σF np., na prostopadłej do oz, przechodzącej przez punkt F i w odległości od σF równej promieniowi kuli, zaś oś oz przypadnie na prostej F_1Z_1 równoległej do $F\sigma$, a przechodzącej przez punkt F_1, zatem punkt przecięcia się F_1Z_1 z prostopadłą do oz przechodzącą przez σ, wyznaczy kład $X\Sigma_1$ tego ostatniego punktu.

Kład szukanego promienia świecącego znajdzie się obecnie na drugiej stycznej, przechodzącej przez Σ_1, do koła wielkiego przedstawionego na płaszczyznie poziomej rzutów, a wyznaczając na nim punkt S_1 w odległości równej 2R od F_1Z_1 znajdziemy kład S_1 punktu świecącego. Dla podniesienia go z kładu, należy nakreślić przez punkt S_1 prostę prostopadłą do rzutu osi obrotu, której spodek s wyznacza rzut poziomy punktu świecącego; rzut zaś jego poziomy s' znajdziemy na linii rzutów przechodzącej przez punkt s, i w odległości równej 2R od xy.

Cień rzucony przez kulę na płaszczyznę pionową rzutów. — Przyjmując teraz za środek rzutów punkt s, s', i robiąc rzut pionowy punktów kuli znajdujących się najbliżej i najdalej od tej płaszczyzny, pierwszy z nich φ' będzie swym własnym rzutem, a drugi przedstawiony w rzucie prostokątnym przez b, o', będzie miał w rzucie stożkowym za rzut punkt przecięcia się φ'_1 prostej $s'\varphi'$ z prostopadłą $\varphi_2\varphi'_1$, znajdujący się poza obrębem naszego rysunku. Krzywa szukana jest więc elipsą, której ognisko znajduje się jedno w punkcie φ', a drugie w punkcie φ'_1 zewnątrz rysunku.

Dla wyznaczenia osi ogniskowej tej elipsy, przetnijmy kulę i ostrokrąg świecący płaszczyzną prostopadłą do płaszczyzny pionowej rzutów, a przechodzącą przez $s'\varphi$, to znajdziemy: na kuli koło wielkie, a na ostrokręgu dwie tworzące styczne do tego koła, których ślady pionowe będą wierzchołkami szukanemi.

Rysunek wykonamy, robiąc kład płaszczyzny siecznej na płaszczyznę obrazu przechodzącą przez środek kuli, i wówczas koło wielkie zejdzie się z już nakreślonem na płaszczyznie pionowej rzutów, punkt s, s' przypadnie w S_2 na prostopadłej do $s'\varphi'$ przechodzącej przez punkt s', a w odległości równej różnicy oddaleń punktów (o, o'), (s, s'), prosta wspólnego przecięcia się płaszczyzny siecznej z płaszczyzną pionową rzutów będzie miała za kład styczną $\theta\theta_1$ do koła wielkiego, mającego środek w punkcie o, i równoległą do $s'\varphi'$. Nakreśliwszy przez punkt S'_2 styczne do koła wielkiego w kładzie i oznaczywszy ich punkta przecięcia się z $\theta\theta_1$, otrzymamy wierzchołki szukane w kładzie, z których jeden W_1 po podniesieniu z kładu, przypadnie w punkcie W. Jeżeli, jak to ma miejsce na naszym rysunku, druga styczna przecina $\theta\theta_1$ w punkcie za bardzo oddalonym, i jeżeli nadto punkt φ'_2 leży także poza obrębem rysunku, to wierzchołek W znajdziemy za pomocą kładu, a dla wykreślenia elipsy wyznaczymy środek ω', szukając przecięcia się prostej $\varphi'\varphi'_1$ z pionową równooddaloną od prostych $\varphi'_1\varphi'_2$ i $\varphi' o$. Następnie należy nakreślić małą oś elipsy prostopadle do prostej $\varphi'\varphi'_1$ i znaleźć jej końce, a te otrzymamy, kreśląc z punktu φ jako środka promieniem równym połowie wielkiej osi $W\omega'$ okrąg koła, który w punktach B, B_1 przecięcia się z małą osią wyznaczy takowe. Znając teraz wierzchołki B, B_1, W możemy nakreślić elipsę, a jeżeli rysunek został wykonany z dokładnością, to ta krzywa winna przeciąć parabolę poprzednio nakreśloną, na osi rzutów.

Rzut samego cienia. — Zajmijmy się przedewszystkiem rzutem poziomym. Na kładzie płaszczyzny pionowej przechodzącej przez $o\sigma$, nakreśliwszy biegunowę p_1q_1 punktu S_1 względem koła wielkiego w kładzie wraz z S, ta biegunowa jest rzutem na tej płaszczyznie w kładzie, koła dotknięcia ostrokręgu z kulą; sprowadzając więc figurę do pierwotnego położenia, punkta p_1, q_1 będą miały za rzuty punkta o i q, które są wierzchołkami małej osi elipsy szukanej. Oś jej wielką otrzymamy sposobem kilkakrotnie używanym, to jest kreśląc przez środek μ małej osi prostopadłę, i odcinając na niej po obu stronach punktu μ długości μe, μe_1 równe połowie p_1q_1. Znając teraz wierzchołki F, q_1, e, e_1 elipsy, łatwo nakreślimy takowę, lecz dla oddzielenia jej części widzialnej od ukrytej należy wyznaczyć punkta tej krzywej, leżące na obwodzie pozornym w rzucie poziomym kuli. Płaszczyzna koła cienia przecina płaszczyznę obwodu pozornego w przestrzeni podług cięciwy, mającej za rzut poziomy prostę prostopadłą do os, a przechodzącą przez punkt przecięcia się jej z prostą p_1q_1. Cięciwa ta jest już nakreśloną, i jest nią prosta $\Sigma_1\sigma$, gdyż, ponieważ p_1q_1 jest biegunową punktu S_1, zatem oznaczywszy przez x odległość punktu o od punktu przecięcia się prostych os i p_1q_1, otrzymamy:

$$x = \frac{R^2}{os}; \tag{1}$$

następnie, ponieważ kąt $\Sigma_1 o S_1$ jest prostym, zaś trójkąt tegoż nazwiska jest prostokątnym, więc

$$\Sigma_1 q_1 = \frac{\overline{oq_1}^2}{S_1 q_1} = \frac{R^2}{S_1 p_1} = \frac{R^2}{os}; \tag{2}$$

porównywając te dwa równania z sobą, znajdujemy

$$x = \Sigma_1 q_1;$$

czyli

$$\Sigma_1 q_1 = \Sigma_1 F_1 = o\sigma$$

czyli, że własność ta jest dowiedzioną.

Z powyższego dowodzenia wnieść należy, że punkta przecięcia się cięciwy $\Sigma_1\sigma$ z obwodem pozor-

nym w rzucie poziomym kuli, wyznaczają właśnie punkta szukane krzywej cienia. W podobny sposób znaleźliśmy także rzut pionowy. Części kreskowane naszego rysunku przedstawiają części kuli i płaszczyzn rzutów znajdujące się w cieniu.

555. Zadanie XXII. — *Przygotować tak dane zadania, żeby krzywa stożkowa dana, opisała obrotem swym naokoło osi powierzchnię drugiego stopnia, i nakreślić południk tej ostatniej* (fig. n_2). — Wiedząc, że żeby powierzchnia była drugiego stopnia trzeba, żeby przecięcie jej płaszczyzną stożkowej tworzącej, było również drugiego stopnia, więc wnosimy ztąd, że tem przecięciem będzie sama stożkowa tworząca, przyczem płaszczyzna południkowa prostopadła do płaszczyzny siecznej winna dzielić symetrycznie krzywę przecięcia, lub co na jedno wychodzi, *rzut osi obrotu na płaszczyznę tworzącej winien przypaść na jednej z jej osi.*

Dowiedliśmy tu, że ten warunek jest dostatecznym.

Oznaczmy przez z oś obrotu (fig. n_2), przez ox przecięcie się płaszczyzny tworzącej z płaszczyzną południka prostopadłą do niej, przez γ stożkową tworzącą, przez oy prostopadłę do płaszczyzny zox, przechodzącą przez punkt przecięcia się osi oz, ox. Ponieważ prosta ox jest osią krzywej γ, zatem równanie tej krzywej możemy napisać w następujący sposób :

$$y^2 = ax^2 + bx + c. \tag{1}$$

Jeżeli przetniemy powierzchnię utworzoną przez krzywę γ, płaszczyzną południka zox, to jeden z punktów przecięcia otrzymamy, kreśląc rzędną MP krzywej γ, i prowadząc przez punkt P prosto-

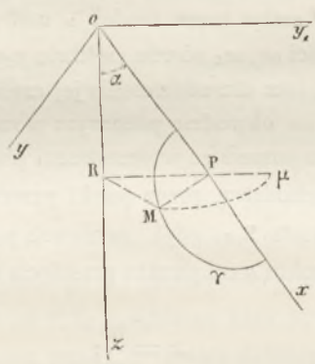

Fig. n_2.

padłę PR do oz, poczem łącząc punkt M z punktem R i robiąc kład prostej RM na Rμ, punkt μ ztąd znaleziony jest właśnie jednym z punktów krzywej szukanej.

Jeżeli więc teraz, na zasadzie tego wykreślenia, poprowadzimy z punktu o na płaszczyznę zox, prostę oy_1 prostopadłą do oz i odniesiemy południk do osi spółrzędnych zoy_1, to otrzymamy

$$\mathrm{RM} = \mathrm{R}\mu = y_1 + x \operatorname{wst} \alpha.$$

Ponieważ zaś, oznaczając przez α kąt jaki tworzy oś obrotu z płaszczyzną krzywej, otrzymujemy jak wiadomo równanie :

$$y^2 = \overline{\mathrm{MP}}^2 = \overline{\mathrm{RM}}^2 - \overline{\mathrm{RP}}^2 = (y_1 + x \operatorname{wst}\alpha)^2 - x^2 \operatorname{wst}^2 \alpha;$$

zatem podstawiając w równaniu (1) za y^2 jego wartość, będzie ostatecznie

$$y_1^2 + 2xy_1 \operatorname{wst}\alpha = ax^2 + bx + c,$$

któreto równanie przedstawia krzywę południka, a ponieważ jest ono drugiego stopnia, więc i krzywa musi być także drugiego stopnia, co było do okazania.

Powyższe uwagi prowadzą do następującego twierdzenia:

Aby jakakolwiek stożkowa obrotem swym naokoło jakiejś osi mogła opisać powierzchnię drugiego stopnia, potrzeba i wystarcza, żeby rzut tej osi obrotu na płaszczyznę stożkowej był jedną z jej własnych osi.

Przyjmijmy za oś obrotu pionowę z, z' (*fig.* 351, tab. XXXVII) i sprowadźmy stożkowę, naprzykład elipsę, do takiego położenia, żeby jej płaszczyzna była prostopadłą do płaszczyzny pionowej rzutów, to w tem położeniu jedna z jej osi aa_1, $a'a'_1$ znajdzie się na płaszczyznie południka głównego, zaś tworząca będzie miała za rzut aba_1b_1, $a'a'_1$.

556. Wyznaczenie jednego z punktów południka. — Ponieważ obrawszy na tworzącej punkt m, m', rzutami równoleżnika opisanego przezeń będzie koło mające środek w punkcie z, a którego punkt m jest punktem przejścia, jakoteż prosta równoległa do osi rzutów, przechodząca przez punkt m', jeżeli więc teraz weźmiemy ślad poziomy F płaszczyzny południka obrazu i wyznaczymy punkta $(m_1, m'_1), (m_2, m'_2)$ spotkania południka z równoleżnikiem, otrzymamy dwa punkta szukanego południka głównego.

Wyznaczywszy w ten sposób dostateczną liczbę punktów, można znaleźć łuki $a'_1m'_1a'$, $a'_1m'_2a'$ tworzące rzut pionowy szukanego południka, zkąd wnioskować należy, że elipsa opisuje tylko część powierzchni drugiego stopnia, która, jak to ma miejsce tutaj, zawartą jest pomiędzy równoleżnikami, których rzuty pionowe leżą na $a'\alpha'$, $a'\alpha'_1$.

557. Punkta przysposobione południka. — Ponieważ promień zm równoleżnika służącego do wyznaczenia jakiegokolwiek punktu części użytecznej łuku południka, jest przeciwprostokątnią trójkąta, mającego przyprostokątnie na odciętej zp punktu m krzywej danej, i odpowiedniej jej rzędnej mp, wynika więc ztąd że

$$\overline{zm}^2 = \overline{zp}^2 + \overline{mp}^2,$$

któreto równanie wyznacza punkta użyteczne krzywej dla wszelkich wartości odciętej zawartej pomiędzy za, za_1. Poza temi granicami, rzędna mp staje się urojoną i jej wartości mogą być przedstawione przez rzędne hyperboli H, mającej wierzchołki osi głównej w punktach a, a_1, zaś wierzchołki drugiej osi w punktach b, b_1. Krzywa H może służyć tak samo jak elipsa z tym jednakże warunkiem, żeby jej rzędne były pomnożone przez $\sqrt{-1}$, lub mówiąc inaczej, żeby jakiemukolwiek punktowi μ na hyperboli odpowiadał punkt południka leżącego na kole promienia R, danego przez związek

$$R^2 = \overline{z\omega}^2 - \overline{\mu\omega}^2.$$

Z tego co poprzedza, wyprowadzamy następujące wykreślenie: na prostej $z\omega$ jako średnicy zataczamy półokręgu koła, a z punktu ω jako środka, promieniem $\mu\omega$ kreślimy łuk koła do punktu μ_1 t. j. do przecięcia się jego z półokręgiem koła; następnie, kreśląc z punktu z jako środka okrąg koła przechodzący przez punkt μ_1, otrzymamy rzut poziomy równoleżnika, którego rzut pionowy odpowiadający znajdziemy, podnosząc punkt μ do μ' na prostę $a'a'_1$, i prowadząc przez punkt μ' prostę równoległą do osi rzutów. Nakreśliwszy w ten sposób rzuty równoleżnika, wyznaczymy jego punkta przecięcia się $(\mu_2, \mu'_2), (\mu_3, \mu'_3)$ z płaszczyzną obrazu, które są właśnie punktami szukanemi.

558. Rodzaj powierzchni. — Równoleżniki, mające promień równy zeru, odpowiadają punktom hyperboli, których spółrzędne są równe, a z których dwa zostały już znalezione, kreśląc przez punkt z dwie proste nachylone do F pod kątem 45°, i wyznaczając ich punkta spotkania c i d z górną częścią hyperboli H. Punkt c ma rzut pionowy w punkcie c' i wyznacza równoleżnik s', z promienia zero, podobnież punkt d podnosi się do punktu d' i wyznacza równoleżnik s_1, z, którego promień jest także równy zeru.

Wykreślenie tu podane wyznacza wierzchołki s'_1, s' krzywej południka i wskazuje nadto, że wszelkiemu punktowi zawartemu pomiędzy c i d na H, odpowiada równoleżnik urojony, zawarty pomiędzy wierzchołkami południka, a to dowodzi, że powierzchnia jest hyperboloidą obrotową dwupowłokową.

Zasada, na której polega rozbiór zupełny zadania, została tu w zupełności wyłożoną, czytelnik więc posługując się nią, wyznaczy łatwo rodzaj powierzchni utworzonych przez elipsę, hyperbolę lub parabolę, gdy te krzywe zmienią położenie swe względnie do osi obrotu.

559. **Zadanie XXIII.** — *Mając dane : elipsę $a'b'$, $ambn$ w rzutach prostym i kołowym, punkt s, s' i dwie proste obrazu, z których pierwsza cd, $c'd'$ ma za rzut poziomy przedłużenie średnicy koła $ambn$, zaś za rzut pionowy prostę równoległą do $a'b'$, a druga gf, $g'f'$ ma rzut pionowy prostopadły do $c'd'$.*

Znaleźć (*fig.* 352, tab. XXXVIII) :

1° *Płaszczyznę przechodzącą przez prostę $f'g'$ i dotykającą powierzchni obrotowej, utworzonej całkowitym obrotem elipsy danej naokoło osi cd, $c'd'$,*

2° *Płaszczyznę styczną wspólną do powierzchni obrotowej i do ostrokręgu, mającego za podstawę elipsę daną a za wierzchołek punkt s, s', wreszcie*

3° *Rzuty powierzchni obrotowej, utworzonej ruchem elipsy danej.*

1° Płaszczyzna styczna przesunięta przez prostę fg, $f'g'$. — Ponieważ powierzchnia obrotowa jest drugiego stopnia (§ 555), żeby więc nakreślić do niej płaszczyznę styczną przez prostę fg, $f'g'$, zastąpmy ją walcem na niej opisanym, równolegle do prostej danej. Przyjąwszy za podstawę tego walca krzywę dotknięcia z powierzchnią obrotową, a tę z łatwością znajdziemy, gdyż płaszczyzna tej krzywej zchodzi się z płaszczyzną średnicową sprzężoną z kierunkiem fg, $f'g'$, i którato ostatnia płaszczyzna jest płaszczyzną południka prostopadłego do tego kierunku, więc płaszczyzna podstawy będzie właśnie płaszczyzną elipsy danej. Wiedząc nadto, że przecięcia powierzchni drugiego stopnia płaszczyznami równoległemi są podobne i mają swe rzuty także podobne (homothétiques), więc podstawą walca opisanego jest krzywa mająca rzut prosty i kołowy.

Punkta tej krzywej znajdziemy, biorąc przecięcie się równoleżników nakreślonych, przez punkta (a, a'), (b, b'), a prostopadle do płaszczyzny pionowej rzutów, z płaszczyzną przechodzącą przez prostę $c'd'$; że zaś równoleżniki te mają środki w punktach (ω, ω'), (ω_1, ω'_1), a punkta spotkania mają swe rzuty w punktach ω', ω'_1 na pionowej, zaś α_1, α_2, β_1, β_2 na płaszczyznie poziomej rzutów i to na prostopadłych do cd przechodzących przez punkta ω, ω_1 a po obu stronach tych punktów w odległościach od każdego z nich równych $\omega'a'$, jeżeli więc nakreślimy przez punkta α_1, α_2, β_1, β_2 okrąg koła, to on będzie rzutem poziomym podstawy walca, rzutem zaś jego pionowym będzie prosta $c'd'$. Łatwo teraz dokończymy wykreślenia, szukając punktu k, k' przecięcia się płaszczyzny podstawy z prostą fg, $f'g'$ i prowadząc przezeń styczne do podstawy, których rzutami poziomemi będą styczne t_1, t_2 do okręgu koła, a przechodzące przez punkt k, zaś rzutami pionowemi proste t'_1, t'_2 zchodzące się z prostą $c'd'$. Dwie płaszczyzny styczne są więc wyznaczone, każda przez parę prostych $(fg, f'g')$, (t_1, t'_1) i $(fg, f'g')$, (t_2, t'_2).

2° Płaszczyzna styczna wspólna do ostrokręgu i do powierzchni obrotowej. — Ponieważ płas-

czyzna styczna wspólna winna dotykać powierzchni w punkcie należącym do elipsy tworzącej, zastąpimy więc tę powierzchnię obrotową przez ostrokrąg opisany wzdłuż elipsy danej. Ponieważ następnie przecięcie południkowe $i\alpha_1 j\alpha_2$, $i'j'$ jest już znanem, jeżeli więc nakreślimy do niego przez punkt α, ω' styczną i wyznaczymy jej punkt spotkania o, o' z osią cd, $c'd'$, to wszystkie styczne do południków przechodzących przez rozmaite punkta równoleżnika $a'a'_1$, $a\alpha_1 a_1\alpha_2$, spotkają prostę cd, $c'd$ w jednym punkcie, zkąd wynika, że prosta $o'a'$ jest styczną do rzutu pionowgo południka obrazu, a wskutek symetryi styczną w punkcie b' do tegoż południka otrzymamy kreśląc prostę od punktu b' do punktu σ' przecięcia się prostych $o'a'$, $\omega'_2\omega'_6$, gdzie punkt σ' odpowiada punktowi σ w rzucie poziomym.

Przedstawmy sobie ostrokrąg mający wierzchołek w punkcie σ, σ' i opisany na elipsoidzie, to krzywa dotknięcia tych powierzchni ma za rzut pionowy prostę $a'b'$, czyli że sama krzywa zchodzi się z tworzącą daną $a'b'$, $amb n$. W ten sposób sprowadziwszy zadanie do kreślenia przez punkt s, s' płaszczyzn stycznych do ostrokręgu opisanego, należy teraz nakreślić prostę σs, $\sigma' s$ i wyznaczyć punkt u, u' spotkania się jej z płaszczyzną podstawy, a kreśląc przez ten punkt dwie styczne (θ_1, θ'_1), (θ_2, θ'_2) do podstawy, i dodając do każdej z nich prostę σs, $s'\sigma'$, otrzymamy dwie pary prostych, które wyznaczają dwie płaszczyzny styczne wspólne.

560. 3° Rzut powierzchni. — Ponieważ znany rzut prosty i kołowy $i'j'$, $i\alpha_1 i\alpha_2$ obejmują dwa łuki użyteczne i dwa łuki przysposobione południka całkowitego, a powierzchnia jest elipsoidą obrotową, którą utworzylibyśmy obrotem tego południka naokoło cd, $c'd'$, więc łatwo nakreślić obwody pozorne w rzucie. I tak, obwód pozorny pionowy otrzyma się, obracając o 90° południk tworzący, gdyż podczas tego ruchu punkta i, i', j, j' pozostają nieruchome, punkta zaś mające pierwotnie za rzuty (ω'_2, ω_3), (ω'_2, ω_4), przychodzą do punktów ω'_5, ω_6 leżących na prostopadłej do $c'd'$ i po obu stronach punktu ω_2 w odległościach jednakowych $\omega_2\omega_3$. Tak znalezione wierzchołki i', j', ω'_5, ω'_6 rzutu pionowego południka głównego służą do nakreślenia obwodu pozornego pionowego powierzchni, a równoleżniki mające za rzuty pionowe $a'a'_1$, $b'b'_1$, odgraniczają łuki użyteczne $a'\omega'_6 b'$, $a'_1\omega'_5 b'_1$ tego południka.

Obwód pozorny poziomy znajdziemy zważając, że biorąc średnicę $p'q'$ sprzężoną do cięciw pionowych elipsy $i'a'j'a'_1$ mamy rzut pionowy tego obwodu, a zatem jego rzut poziomy odpowiedni jest elipsą, której jedną osią jest $\omega_3\omega_4$, drugą zaś otrzymamy łatwo, robiąc rzut poziomy pq średnicy $p'q'$.

Dla oddzielenia łuków użytecznych od tych, które są tylko przedłużeniem obwodu szukanego, należy szukać punktów przejścia, których rzuty pionowe v', w' otrzymamy z przecięcia się prostych $p'q'$, $a'a'_1$, $b'b'_1$, a następnie odpowiadające rzuty poziome v_1, v_2, w_1, w_2.

Ostatecznie, rzut poziomy powierzchni opisanej przez $a'b'$, $amnb$, może być uzupełnionym przez rzuty na tęż płaszczyznę rzutów, kół opisanych przez (a, a'), (b, b'), które już zostały wyznaczone z pomocą ich osi, sposobem kilkakrotnie używanym.

561. Zadanie XXIV. — *Mając daną powierzchnię pierścieniową o osi pionowej z, z', i obrawszy punkt s, s' na prostopadłej do płaszczyzny pionowej rzutów, a przechodzącej przez środek tej powierzchni, za wierzchołek ostrokręgu, wyznaczyć rzuty krzywej dotknięcia danej powierzchni z ostrokręgiem na niej opisanym* (*fig.* 353, tab. XXXVIII).

Wykreślenie jakiegokolwiek punktu krzywej dotknięcia. — Rozwiążmy to zadanie sposobem obwiniętych walcowych. W tym celu weźmy koło południkowe, którego rzutem poziomym jest cd, zastąpmy powierzchnię walcem prostym dotykającym jej podług tego koła, i nakreślmy przez s, s' do tego walca płaszczyzny styczne. Ślady tych płaszczyzn na płaszczyźnie podstawy winny przejść przez spodek prostopadłej wyprowadzonej z punktu s, s' do tej płaszczyzny, a dla skrócenia działań zupełnie

podobnych w następstwie, wyznaczmy miejsce geometryczne rzutów poziomych spodków tychże prostopadłych, które jest okręgiem koła opisanym na *sz* jako średnicy.

Spodek prostopadłej do płaszczyzny podstawy mającej ślad poziomy na *cd* znajduje się w punkcie *e* na przecięciu się tego miejsca geometrycznego z prostą *cd*, i z tego to właśnie punktu należy nakreślić styczne do podstawy. Znajdziemy zaś te styczne, robiąc kład koła południka, mającego za rzut prostę *cd*, naokoło tejże prostej jako średnicy, na płaszczyznę poziomą przechodzącą przez środek powierzchni pierścieniowej, gdyż kładem południka będzie okrąg koła opisany na *cd* jako średnicy, punkt *e* pozostanie nieruchomym, a styczne w kładzie przypadną na prostych eM_1, eM_2 nakreślonych przez punkt *e*, i stycznych do tego koła w kładzie.

Powracając teraz całą figurę do należytego położenia, punkta M_1 i M_2 będą miały swe rzuty poziome w punkcie *m*, a pionowe w punktach m'_1, m'_2 leżących na linii rzutów, przechodzącej przez punkt *m* i po obu stronach poziomej nakreślonej przez punkt *s'*, a w odległości od tej ostatniej równej mM_1. W sposób tu podany możemy znaleźć tyle punktów krzywej, ile chcemy.

Punkta przysposobione rzutu poziomego. — Na przecięciu się znalezionego przed chwilą miejsca geometrycznego z kołem szyjnem i równikiem znajdują się punkta p_1, q_1, q_2, p_2, które po podniesieniu przypadają w p'_1, q'_1, q'_2, p'_2 i tworzą w rzucie poziomym, wskutek symetryi figury, punkta zwrotu. Część użyteczna rzutu poziomego krzywej dotknięcia ogranicza się w punktach zwrotu, lecz krzywa geometryczna tak utworzona może być przeciągniętą dalej, a przedłużenie to, jak wiadomo, nosi nazwę *łuku przysposobionego*.

Ponieważ ślady poziome południków, na których znajdują się punkta użyteczne, są zawarte wewnątrz kątów p_1zp_2 i q_1zq_2, weźmy więc rzut poziomy *fg* południka leżącego poza temi granicami i szukajmy punktu przysposobionego, który on wyznacza. Wykreślenie dające punkt użyteczny *m*, wskazuje, że ten punkt jest biegunem względem koła cM_2, dM_1, prostopadłej *se* do prostej *cd*, a zatem wyznaczając przecięcie się *k* prostej *fg* z miejscem rzutów poziomych spodków prostopadłych i kreśląc biegun *n* prostej *sk*, względem okręgu koła mającego *fg* za średnicę, punkt *n* tak znaleziony, będzie należał właśnie do części przysposobionej rzutu poziomego krzywej dotknięcia.

Asymptoty łuku przysposobionego. — Jeżeli ustawimy punkt *k* w ten sposób, że jemu odpowiadający biegun będzie odrzucony do nieskończoności, to znajdziemy kierunek asymptotyczny łuku przysposobionego, gdyż dostatecznem będzie tak postąpić, żeby punkt *k* przypadł w środku południka ruchomego. Że zaś, nakreśliwszy miejsce rzutów poziomych środków, w punktach *u* i *v* w których ono przecina miejsce rzutów spodków prostopadłych, znajdziemy dwa punkta przejścia południków, na których leżą punkta przysposobione w nieskończoności, zatem południkami temi są *zu*, *zv*.

Należy teraz znaleźć asymptoty, a w tym celu szukajmy granicy odległości *nt* punktu przysposobionego *n* od kierunku asymptotycznego *zu*. Oznaczywszy przez *o* środek koła opisanego na *fg* jako średnicy, przez R promień *zo*, przez *r* promień koła tworzącego powierzchni pierścieniowej, przez *d* odległość *zs*, przez α kąt *uzs* i przez ω kąt *uzk*, otrzymamy

$$nt = zn\,\mathrm{wst}\,\omega = (\mathrm{R} + on)\,\mathrm{wst}\,\omega.$$

Ponieważ nadto punkt *n* jest biegunem prostej *sk* więc mamy

$$ok.on = r^2,$$

lub

$$on = \frac{r^2}{ok},$$

podstawiając więc w nt za on jego wartość tak otrzymaną, wypada

$$nt = \left(\mathrm{R} + \frac{r^2}{ok}\right)\mathrm{wst}\,\omega.$$

Trójkąt prostokątny skz daje

$$zk = d\,\mathrm{dos}(\alpha - \omega),$$

zkąd

$$ok = d\,\mathrm{dos}(\alpha - \omega) - \mathrm{R},$$

a podstawiając tę wartość w nt, otrzymamy

$$nt = \left(\mathrm{R} + \frac{r^2}{d\,\mathrm{dos}(\alpha - \omega) - \mathrm{R}}\right)\mathrm{wst}\,\omega$$

Ponieważ, jeżeli ω dąży do zera, to i $\mathrm{R}\,\mathrm{wst}\,\omega$ zbliża się do zera, należy więc szukać granicy wyrażenia

$$\left(\frac{r^2\,\mathrm{wst}\,\omega}{d\,\mathrm{dos}(\alpha - \omega) - \mathrm{R}}\right), \text{ dla } \omega = o.$$

Dla usunięcia niewyznaczoności powstającej z wprowadzenia tej hipotezy do ułamku uważanego, zastąpmy go stosunkiem pochodnych jego wyrazów, gdyż w tym przypadku trzeba będzie tylko szukać wartości granicy wyrażenia

$$r^2\,\frac{\mathrm{dos}\,\omega}{d\,\mathrm{wst}(\alpha - \omega)};$$

w którem, jeżeli wprowadzimy $\omega = 0$, to ułamek sprowadzi się do $\frac{r^2}{d\,\mathrm{wst}\,\alpha}$.

Ponieważ rysunek daje

$$d\,\mathrm{wst}\,\alpha = su,$$

zatem odległość asymptoty od kierunku asymptotycznego sprowadza się do wyrażenia $\frac{r^2}{su}$.

Wnosimy więc, że robiąc kład południka granicznego mającego środek w punkcie u, i biorąc biegunowę vw punktu s względem tegoż południka, znajdziemy asymptotę szukaną. Drugą asymptotę wyznaczymy, zasadzając się na symetryi.

Styczna do łuku przysposobionego w punkcie z. — Jeżeli weźmiemy biegunowę $\mu\mu_1$ punktu z względem jednego z kół południkowych w kładzie, i jeżeli obrotem naokoło z, sprowadzimy μ_1 do μ_2 i μ na miejsce zp_2, sp_1 spodków prostopadłych, jakoteż nakreślimy z_{μ_2}, z_{μ_3}, to te proste będą rzutami dla których łuk przysposobiony przechodzi przez punkt z, będą one także siecznemi południków, wychodzącemi z punktu z, a których dwa punkta przecięcia zchodzą się w jeden, t. j. w punkcie z, czyli będą one stycznemi szukanemi.

Punkt południka profilu. — Punkta (a, a'), (a, a'_4), (b, b'), (b, b'_4) zostały znalezione sposobem ogólnym, jak to wreszcie wskazuje figura.

562. Zadanie XXV. — *Przez punkt dany nakreślić prostę podwójnie styczną do powierzchni pierścieniowej.* — Wykreślenia podane w tym i następującym paragrafie, a służące do rozwiązania tamże zawartych zadań, zawdzięczamy pp. Janin i Mannheim [1].

Przypuśćmy przedewszystkiem, że powierzchnia pierścieniowa daną jest przez swe rzuty na dwie

[1] *Bulletin de la Société philomatique*, t. II, str. 54.

płaszczyzny odpowiednio równoległe i prostopadłe do jej osi. Robiąc obrót naokoło tej osi, sprowadźmy punkt dany na płaszczyznę obrazu przechodzącą przez tęż oś.

Przyjmijmy za płaszczyznę figury płaszczyznę południka obrazu, i oznaczmy przez y oś powierzchni (fig. n_3), przez S punkt dany, przez M_1, M_2 południk główny powierzchni pierścieniowej, wreszcie przez r promień kół tego południka.

Jeżeli przypuścimy, że zadanie jest rozwiązanem, i nadamy prostej podwójnie stycznej ruch obrotowy naokoło osi powierzchni, to ona opisze hyperboloidę obrotową jednopowłokową, dotykającą

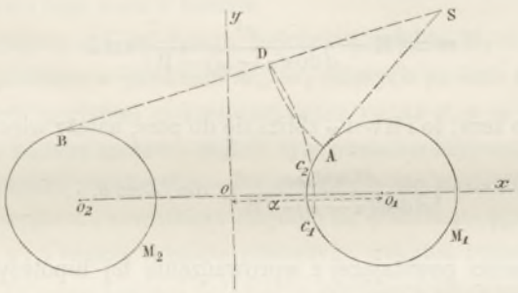

Fig. n_3.

powierzchni pierścieniowej podług równoleżników, zakreślonych punktami styczności tej prostej. Wypada z tego, że przecięciem się hyperboloidy z płaszczyzną figury będzie hyperbola, mająca punkt S za punkt przejścia, a prostę oy za oś poboczną, która winna być podwójnie styczną do M_1 i M.

Wykreślmy teraz dotknięcie się hyperboli z kołem M_1; w tym celu weźmy za oś x prostę środków o_1o_2 południków M_1, M_2, a za oś y oś obrotu, i oznaczmy przez α odciętę środka o_1; równaniem koła M_1 będzie

$$(x-\alpha)^2+y^2-r^2=c=o. \tag{1}$$

Nadto mamy : 1° cięciwa wspólna hyperboloidy i koła M_1 jest prostopadłą do osi ox, 2° hyperbola jest odniesioną do swych osi, co odrazu wynika z twierdzenia geometrycznego następującego :

Proste przecinające na dwie równe części jakikolwiek układ dwu cięciw wspólnych kołu i przecięciu stożkowemu, są równoległe do osi tegoż przecięcia.

Ponieważ więc cięciwa wspólna jest równoległą do osi y, więc równanie jej jest następujące :

$$x-l=o; \tag{2}$$

a ztąd równaniem hyperboli będzie

$$c-\lambda(x-l)^2=o,$$

lub jeszcze

$$(x-\alpha)^2+y^2-r^2-\lambda(x-l)^2=o.$$

w którem, ponieważ środek hyperboli przypada w początku spółrzędnych, wyraz stopnia pierwszego winien być równy zeru, czyli że będzie

$$-2\alpha+2\lambda l=o,$$

zkąd

$$\lambda=\frac{\alpha}{l}.$$

Jeżeli w równaniu stożkowej podwójnie stycznej za λ podstawimy jego wartość, to otrzymamy

$$lc - \alpha(x-l)^2 = o. \tag{3}$$

Oznaczmy przez p i q spółrzędne punktu S a przez c_1 jego potęgę względem M_1, to wyrażając, że punkt S należy do hyperboli, mamy:

$$lc_1 - \alpha(p-l)^2 = o;$$

Z tego równania możemy znaleźć wartość dla l, a w tym celu porządkując je podług tej nieznanej, będzie

$$\alpha l^2 - (2\alpha p + c_1)\, l + \alpha p^2 = o;$$

zkąd

$$l = \frac{2\alpha p + c_1 \pm \sqrt{(2\alpha p + c_1)^2 - 4\alpha^2 p^2}}{2\alpha};$$

lub jeszcze

$$l = \frac{2\alpha p + c_1 \pm \sqrt{c_1(c_1 + 4\alpha p)}}{2\alpha}.$$

Ponieważ $c_1 + 4\alpha p$ jest potęgą punktu S względem M_2, oznaczając więc przez c'_1 tę potęgę, znajdziemy

$$l = \frac{2\alpha p + c_1 \pm \sqrt{c_1 c'_1}}{2\alpha},$$

ponieważ nadto spółrzędne punktu dotknięcia winny czynić zadość równaniu (1), więc winny one także sprawdzić równanie

$$(x+\alpha)^2 + y^2 - r^2 - 4\alpha x = o,$$

które wypływa z równania (1), a że one sprawdzają także równanie (2), więc dotknięcia należą do krzywej przedstawionej przez równanie

$$(x+\alpha)^2 + y^2 - r^2 - 4\alpha l = o;$$

w którem za l podstawiając jego wartość znalezioną powyżej, otrzymamy,

$$(x+\alpha)^2 + y^2 - r^2 - 4\alpha p - 2c_1 \mp 2\sqrt{c_1 c'_1} = o,$$

lub

$$(x+\alpha)^2 + y^2 - r^2 - c'_1 - c_1 \mp 2\sqrt{c_1 c_1'} = o$$

albo ostatecznie

$$(x+\alpha)^2 + y^2 - r^2 - (\sqrt{c_1'} \pm \sqrt{c_1})^2 = o \tag{4}$$

Wnosimy ztąd, że punkta dotknięcia szukane leżą na przecięciu się dwu okręgów kół, z których jeden jest M_1, a drugi zsś przedstawiony przez równanie (4) ma środek w punkcie o_2 a promień równy przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego, którego boki kąta prostego są równe r i $\sqrt{c'_1} \pm \sqrt{c_1}$. Otóż, ponieważ $\sqrt{c_1}$, $\sqrt{c'_1}$ są długościami stycznych wychodzących z punktu S do okręgów kół M_1, M_2, więc wyprowadzamy ztąd następujące wykreślenie:

Z punktu S kreślimy styczne SB i SA, które dotykają koło M_2 w punkcie B zaś koło M_1 w punkcie A, z punktu S jako środka opisujemy promieniem SA okrąg koła przecinający SB w dwu punktach D i D_1.

Ponieważ punkt D_1 odpowiada okręgowi koła spotykającemu M_1 w punktach urojonych, więc wskutek tego ani on ani okrąg koła odpowiadający nie zostały przedstawione na rysunku. Jeżeli teraz nakreślimy okrąg koła współśrodkowy z M_2 i mający za punkt przejścia punkt D, to w punktach C_1, C_2 spotkania się tego okręgu z kołem M_1 otrzymamy punkta dotknięcia M_1 z hyperbolą, a ztąd wypłyną i równoleżniki punktów szukanych, czyli zadanie sprowadzi się do wyznaczenia przecięcia się ostrokręgów, mających punkt S za wierzchołek wspólny a za podstawy odpowiednie równoleżniki znalezione powyżej. Powyższe wykreślenie byłoby łatwiejszem, uważając hyperbolę jako miejsce geometryczne punktów, których różnica potęg względem M_1 i M_2 jest stałą i równą SB — SA.

563. Zadanie XXVI — *Nakreślić do powierzchni pierścieniowej proste podwójnie styczne w kierunku danym.* — Zachowajmy dla powierzchni pierścieniowej znakowanie podane na figurze poprzedzającego zadania, a dla prostej przyjmijmy, żeśmy ją przenieśli równolegle do niej samej tak, żeby przeszła przez środek o powierzchni, gdyż sprowadzimy ją na płaszczyznę obrazu figury, obracając ją naokoło osi y (*fig.* n_4).

Niech będzie d rzutem pionowym tej prostej. Hyperboloida pomocnicza nakreślona poprzednio,

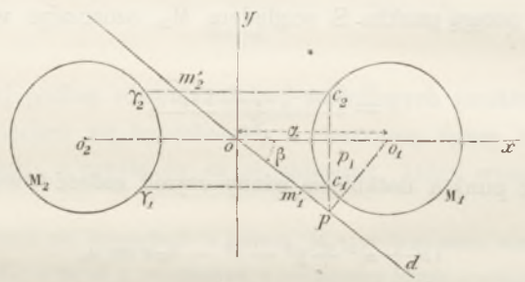

Fig. n_4.

ma za południk główny hyperbolę podwójnie styczną do koła M_1, mającą d za jedną z asymptot, zaś y za oś urojoną.

Oznaczmy punkta jej dotknięcia się z kołem M_1, a w tym celu weźmy równanie (3) poprzedzającego paragrafu

$$lc - \alpha (x - l)^2 = o,$$

wyraźmy, że hyperbola przez nie przedstawiona ma prostę d za asymptotę. Jeżeli nazwiemy przez β kąt tej prostej z osią ox, będzie

$$l(1 + \operatorname{sty}^2\beta) - \alpha = o$$

lub

$$l = \frac{\alpha}{1+\operatorname{sty}^2\beta} = \alpha \operatorname{dos}^2\beta.$$

Obecnie, kreślenie prostej dotknięcia nie przedstawia już trudności, gdyż robiąc rzut punktu o_1 o p na prostę d, mamy

$$op = \alpha \operatorname{dos}\beta,$$

a robiąc rzut punktu p do p_1 na ox, mamy

$$op_1 = op \operatorname{dos}\beta = \alpha \operatorname{dos}^2\beta,$$

co dowodzi, że prostopadła pp_1 jest cięciwą wyznaczającą punkta dotknięcia c_1, c_2, zaś rzuty pionowe równoleżników dotknięcia są $c_1\gamma_1$, $c_2\gamma_2$.

Żeby znaleźć prostę równoległą do prostej danej, a spotykającą równoleżniki powierzchni, to przypuściwszy, że rzuty walcowe tych kół zostały zrobione w kierunku danym i na płaszczyznę koła szyjnego, to oba te rzuty będą miały za cięciwę wspólną prostę prostopadłą do płaszczyzny pionowej przechodzącej przez punkt o, zkąd wnosimy, że d jest rzutem pionowym prostej szukanej.

Łatwo teraz będzie znaleźć rzut poziomy odpowiadający, gdyż wystarczy znaleźć rzuty poziome punktów powierzchni pierścieniowej, mających swe rzuty pionowe w punktach m'_1, m'_2.

564. Zadanie XXVII. — *Znaleźć punkta podwójne śladu poziomego ostrokręgu lub walca opisanego na powierzchni pierścieniowej.* — Należy nakreślić przez wierzchołek ostrokręgu, lub równolegle do tworzących walca, proste podwójnie styczne do powierzchni pierścieniowej, i znaleźć ich ślady poziome.

565. Zadanie XXVIII. — *Znając promień jednej z obwiniętych kulistych hyperboloidy obrotowej jednopowłokowej, znaleźć jej rzuty* (*fig.* 354, tab. XXXIX). — Dla uproszczenia rysunku przyjmiemy za oś hyperboloidy prostę pionową z, z', jakoteż obierzemy jednę z tworzących głównych g, g' tej powierzchni.

Jeżeli z punktu z jako środka, promieniem równym promieniowi kuli, opiszemy okrąg koła, to otrzymamy natychmiast rzut poziomy obwiniętej kulistej, rzut zaś jej pionowy znajdziemy, robiąc rzut pionowy przecięcia obwiniętej płaszczyzną obrazu przechodzącą przez g, g', któreto przecięcie jest okręgiem koła, mającym średnicę równą cięciwie ab i styczną do g'. Środek tego koła jest właśnie środkiem szukanego obwodu pozornego, a leży on na osi z' w odległości od g' równej połowie cięciwy ab; punkta o'_1, o'_2 odpowiadające tym warunkom znajdziemy z łatwością, poczem opisując z nich jako środków dwa okręgi kół, promieniem równym promieniowi obwiniętej, znajdziemy ostatecznie obwody pozorne na płaszczyznie pionowej rzutów, a należące do obu rozwiązań zadania.

566. Zadanie XXIX. — *Znając trzy kierownice prostolinijne hyperboloidy jednopowłokowej, znaleźć środek tej powierzchni* (*fig.* 355, tab. XXXIX). — Na trzech prostych danych wystawmy równoległościan. Ponieważ zaś płaszczyzny krawędzi przeciwległych tego wielościanu, a obejmujące dwie tworzące równoległe, są płaszczyznami asymptotycznemi hyperboloidy i przecinają się w środku tej powierzchni, więc środek równoległościanu zchodzi się ze środkiem hyperboloidy.

Dla uproszczenia wykreślenia przyjmiemy, że jedna z kierownic d_1, d'_1 jest prostopadłą do płaszczyzny poziomej rzutów. Niech (d_2, d'_2), (d_3, d'_3) będą dwiema pozostałemi kierownicami. Ponieważ prostopadła do płaszczyzny poziomej rzutów, przechodząca przez punkt b przecięcia się prostych d_2, d_3, przecina trzy proste dane, jest więc ona tworzącą powierzchni. Dalej ponieważ płaszczyzna, którą wyznacza ta prosta wraz z prostą d, d_1 dotyka powierzchni w nieskończoności, jest zatem ona płaszczyzną asymptotyczną, i przechodzi przez środek powierzchni, a nadto, ponieważ środek winien leżeć w równej odległości od dwu tworzących równoległych, o których mowa, winien on więc leżeć na prostopadłej o, $a'c'$ do płaszczyzny poziomej rzutów, przechodzącej przez środek d_1b.

Dla znalezienia drugiego położenia środka, szukajmy prostej równoległej do d_2, d'_2, a opierającej się na dwu prostych (d_1, d'_1), (d_3, d'_3); otóż ponieważ rzut poziomy δ_2 tej prostej jest prostą równoległą do d_2 a przechodzącą przez d_1, nadto punkt e przecięcia się jej z prostą d_3 ma za rzut pionowy punkt e', jeżeli zatem przez punkt e' nakreślimy prostę δ'_2 równoległą do d'_2, to otrzymamy rzut pionowy prostej szukanej. Nakreśliwszy teraz prostę równoległą do d'_2, δ'_2 i równooddaloną od nich, wyznaczy nam ona drugie miejsce punktu szukanego, a punkt o' przecięcia się jej z prostą $a'c'$ wyznaczy ostatecznie rzut pionowy środka, czyli rzutami środka będą punkta o i o'.

567. Zadanie XXX. — *Przez prostę równoległą do jednej z tworzących prostolinijnych hyperboloidy obrotowej jednopowłokowej, nakreślić do tej powierzchni płaszczyznę styczną* (*fig.* 356, tab. XXXIX). — Oznaczmy przez z, z' oś powierzchni, przez g, g' jednę z jej tworzących prostolinijnych, zaś przez d, d' prostę równoległą do g, g', przez którą chcemy nakreślić płaszczyznę styczną do powierzchni.

Przedewszystkiem należy znaleźć punkt, w którym prosta d, d' spotyka hyperboloidę. W tym celu, przetnijmy powierzchnię daną płaszczyzną wyznaczoną przez proste (d, d'), (g, g'), której śladem poziomym jest prosta P łącząca ślady θ i h prostych wyznaczających ją, następnie, nakreśliwszy rzut poziomy koła szyjnego i ślad hyperboloidy na tęż płaszczyznę rzutów, wyznaczmy drugi punkt, w którym ta powierzchnia spotyka ślad P, to kreśląc z tego punktu prostę g_1 do koła szyjnego, znajdziemy rzut poziomy tworzącej innego rodzaju tworzenia niż g, g', a zarazem otrzymamy rzuty poziome g_1, g'_1 tworzących, należących do przecięcia się hyperboloidy z płaszczyzną pomocniczą.

Z powyższego rozumowania wypływa, że prosta d, d' przecina powierzchnię daną najprzód w punkcie leżącym na niej w nieskończoności, a następnie w drugim punkcie, mającym swój rzut poziomy a na przecięciu się prostej d z g_1. Jeżeli teraz przez punkt a nakreślimy rzuty poziome tworzących przecinających się w punkcie A, to znajdziemy, 1° że pierwsza z nich już jest nakreśloną i leży na g_1, 2° że drugą otrzymamy kreśląc z punktu a drugą styczną do koła szyjnego, przyczem ślad poziomy tworzącej, której druga prosta jest rzutem, leży w punkcie t.

Dwie tworzące nakreślone przez punkt leżący w nieskończoności na prostej d, d', mają swe rzuty poziome jedna na g, a druga na stycznej do koła szyjnego g_2 nakreślonej w kierunku prostej g.

Połączywszy wreszcie jednę z tworzących wychodzących z punktu A, z tworzącą różnego układu, a wychodzącą z punktu w nieskończoności na prostej d, d', znajdziemy dwie płaszczyzny mające za ślady poziome, jedna prostę P, druga zaś prostę P_1 łączącą ślady t i t_1.

Dwa rozwiązania tu znalezione składają się z płaszczyzn, mających za ślady proste P i P_1 i prostę d, d'. Jeżeli rysunek został wykonany z dokładnością, to prosta P_1 winna przechodzić przez punkt 0 a to sprawdzenie prowadzi na zasadzie przekształcenia figur do twierdzenia geometryi płaskiej.

568. Zadanie XXXI. — *Mając daną elipsoidę o trzech osiach nierównych, a której jedna z płaszczyzn głównych jest równoległą do płaszczyzny pionowej rzutów, nakreślić:*

1° *Rzuty jednego punktu powierzchni i płaszczyznę przechodzącą przezeń;*

2° *Rzuty krzywej dotknięcia ostrokręgu lub walca opisanego na elipsoidzie, z elipsoidą;*

3° *Płaszczyzny styczne równoległe do płaszczyzny danej* (*fig.* 357, tab. XXXIX).

Oznaczmy przez $(a'a'_1, aa_1)$, $(b'b'_1, bb_1)$, $(c'c_1, cc_1)$ rzuty osi.

Jeżeli przyjmiemy koło opisane na c', c'_1 jako średnicy, za podstawę walca pionowego, to ten walec dotknie elipsoidy w dwu punktach (c, c_1), (c', c'_1), zkąd na zasadzie twierdzenia Monge'a wypada, że przecięciem się tych dwu powierzchni jest układ dwu stożkowych przechodzących przez ich punkta spotkania, i, ponieważ prosta łącząca punkta spotkania jest prostopadłą do płaszczyzny pionowej przechodzącej przez punkt c', więc dwie te stożkowe mają za rzuty pionowe dwie proste przecinające się w punkcie c'. Ponieważ nadto punkta przecięcia się d', f', g', h' obwodów pozornych w rzucie pionowym elipsoidy z walcem, należą do rzutu pionowego wspólnego przecięcia, więc wypada ztąd, że to przecięcie jest utworzone z dwu krzywych $(dcgc_1, d'g')$, $(dcgc_1, h'f')$ o rzucie prostym i kołowym.

Szukajmy teraz drugiego rzutu punktu w położeniu dowolnem, a którego rzut pionowy jest m'. Ponieważ przecięcia elipsoidy płaszczyznami równoległemi są podobne, nakreśliwszy więc przez punkt m' dwie proste $p'q'$, *ust* odpowiednio równoległe do prostych, $h'f'$, $d'g'$, i przeciąwszy powierzchnię dwiema płaszczyznami prostopadłemi do płaszczyzny pionowej przechodzącej przez te proste, rzuty

poziome przecięć będą kołami mającemi za średnice proste pq i us, wyznaczone z przecięcia się prostej ab z linijami rzutów punktów p', q', u', s'. Nakreśliwszy te koła, znajdziemy w punktach m_1, m_2 ich wspólnego przecięcia się, rzuty poziome dwu punktów elipsoidy odpowiadających punktowi m'.

Żeby poprowadzić teraz, przez punkt m_1, m', płaszczyznę styczną do elipsoidy, należy nakreślić styczne $(t_1, t'_1), (t_2, t'_2)$ przez ten punkt do kół przecinających się w nim, a te styczne wyznaczą właśnie płaszczyznę styczną szukaną.

2° Krzywę dotknięcia ostrokręgu lub walca opisanego otrzymamy, wyznaczając przedewszystkiem przecięcia o rzucie prostym i kołowym, i opisując wzdłuż nich ostrokręgi, a następnie kreśląc płaszczyzny styczne do tych ostrokręgów albo przez punkt dany, albo równolegle do prostej danej.

3° Można jeszcze zamienić elipsoidę daną na elipsoidę obrotową, zmieniając rzędne, liczone od płaszczyzny obrazu głównej i prostopadle do niej, w stosunku $b'b'_1$ do cc_1, poczem przekształcając w ten sam sposób płaszczyznę daną, sprowadzimy zadanie nasze do już znanego.

569. Zadanie XXXII. — *Nakreślić rzuty dwu hyperboloid obrotowych jednopowłokowych równych, których osie są dane tak że te dwie hyperboloidy dotykają się z sobą w punktach leżących na równoleżnikach równych* (fig. n_5). — Oznaczmy przez z, z_1 osie dane. W punktach wspólnych dwu kołom

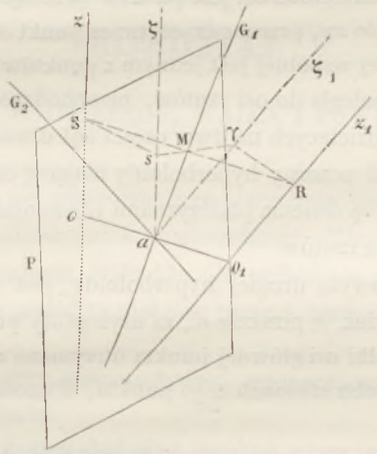

Fig. n_5.

szyjnym powierzchnie hyperboloid winny się dotykać, i winny mieć w tych punktach normalne wspólne. Ponieważ normalna w jakimkolwiek punkcie koła szyjnego jest prostopadłą do osi obrotu powierzchni, więc normalna wspólna jest najkrótszą odległością oo_1 osi danych.

Ponieważ promienie kół szyjnych winny być równe, więc punkt przecięcia się tych kół musi przypaść w środku a, najkrótszej odległości, a że tworzące powierzchni przechodzących przez ten punkt winny leżeć w płaszczyznie stycznej wspólnej, więc znajdą się one na płaszczyznie P przechodzącej przez punkt a, równoległej do z i z_1. Tworzące, o których mowa, muszą tworzyć z osiami z, z_1 kąty równe.

Szukając więc prostych płaszczyzny P, które wychodzą z punktu a, i są jednakowo nachylone do osi, proste te będą jednakowo nachylone i do prostych ζ, ζ_1 równoległych do z, z_1, lub, co na jedno wychodzi, tworzące będą dwiema prostemi G, G_1 dzielącemi na dwie równe części kąt $\zeta a \zeta_1$. Obecnie zostaje więc do dowiedzenia że:

1° *Jakikolwiek punkt* M *prostej* G_1 *opisuje równoleżniki równe,*

2° *Dwie powierzchnie są styczne w punkcie* M, *a więc i hyperboloidy opisane przez* G_1 *dotykają się z sobą wzdłuż tej linii.*

1° Punkt M opisuje rzeczywiście równoleżniki równe, gdyż odległość jego od płaszczyzny koła szyjnego, mającego za promień o', jest rzutem prostej aM na ξ, a odległość jego od drugiej płaszczyzny drugiego koła szyjnego jest rzutem aM na ξ_1; że zaś te rzuty są równe, więc punkt M należy zarazem do dwu równoleżników równych dwu hyperboloid.

2° Powierzchnie dotykają się z sobą w punkcie M w rzeczywistości, gdyż 1° normalne w tym punkcie do hyperboloid są prostopadłe do G_1, a tem samem ich rzuty na P zchodzą się z sobą i przypadają na prostopadłej $s\gamma$ do G_1, a przechodzącej przez punkt M, i 2° ξ, ξ_1 są rzutami osi z, z_1 na P; kreśląc więc przez punkta s i γ proste równoległe do oo_1, znajdziemy punkta S i R przecięcia się normalnych z osiami. W tej chwili zadanie sprowadza się do okazania, że trzy punkta S, R i M leżą na jednej linii prostej, co jest widocznem z trójkątów SMs, RMγ równych pomiędzy sobą, gdyż i kąty ich muszą być sobie równe.

Wykonanie rysunku. — Dla uproszczenia wykreślenia, ustawiliśmy jednę z osi w położeniu z, z' prostopadłem do płaszczyzny poziomej rzutów, gdy druga z_1, z'_1 jest osią obrazu.

Rzutem poziomym najkrótszej odległości osi jest punkt o' przecięcia się prostych z'_1, z_1, a jej rzutem poziomym część oo_1 prostopadłej do xy, przechodzącej przez punkt o', a zawartej pomiędzy z i z_1.

Punkt o' t. j. środek prostopadłej wspólnej jest jednym z punktów tworzącej dotknięcia, której rzutem poziomym jest prosta g równoległa do osi rzutów, przechodzącej przez punkt a, zaś pionowym prosta g', czyli jedna z prostych dzielących na dwie części kąt utworzony przez proste z', z'_1. Obecnie już z łatwością nakreślimy obwód pozorny hyperboloidy mającej oś pionową, a na naszym rysunku powierzchnia ta została ograniczoną dwiema płaszczyznami równooddalonemi od koła szyjnego, z których jedną jest płaszczyzna pozioma rzutów.

Obwód pozorny w rzucie pionowym drugiej hyperboloidy, jest rzutem południka obrazu na tęż płaszczyznę; rzut ten ma swój środek w punkcie o', za asymptoty prostę g' i prostę g'_1 symetryczną do g' względem z'_1, a za wierzchołki osi głównej punkta otrzymane z odcięcia na prostopadłej do z'_1 przechodzącej przez punkt o' i po obu stronach tego punktu, długości równych promieniowi o_1a koła szyjnego.

Co się tyczy obwodu pozornego w rzucie poziomym drugiej hyperboloidy, to zauważymy:

1° że on jest rzutem na tęż płaszczyznę krzywej dotknięcia walca pionowego opisanego na powierzchni hyperboloidy, lub, rzutem przecięcia hyperboloidy płaszczyzną średnicową sprzężoną z cięciwami pionowemi, i

2° że dla cięciw mających tenże sam kierunek, płaszczyzny średnicowe hyperboloidy i ostrokręgu asymptotycznego, zchodzą się z sobą.

Płaszczyzna średnicowa sprzężona z cięciwami pionowemi ostrokręgu asymptotycznego, jest tu prostopadłą do płaszczyzny pionowej rzutów, i punkt o' jest jednym punktem przejścia jej śladu pionowego, zaś drugim punktem jest punkt m', t. j. środek cięciwy pionowej $p_1p'_1$, zawarty pomiędzy prostemi, g', g'_1 tworzącemi obwód pozorny ostrokręgu w rzucie pionowym.

Szukany zatem obwód pozorny jest przecięciem się płaszczyzny prostopadłej do płaszczyzny pionowej rzutów, a przechodzącej przez $o'm'$, z hyperboloidą.

Ponieważ płaszczyzna, o której mowa przecina koło szyjne w dwu punktach a, a_1, które są wierzchołkami osi głównej hyperboli szukanej, a jej asymptoty są rzutami poziomemi prostych przecięcia

płaszczyzny średnicowej z ostrokręgiem; więc dla znalezienia ich, nakreślmy z punktu $o'_1 o_1$ jako środka, promieniem dowolnym $o'v'$ kulę pomocniczą, przecinającą ostrokrąg podług okręgu koła mającego za rzut $u'v'$, i przecinającego płaszczyznę średnicową w dwu punktach mających swe rzuty pionowe w punkcie p', a rzuty poziome w p i p_1, a któreto ostatnie znajdziemy za pomocą rzutów równoleżnika poziomego kulí.

Proste więc $o_1 p$, $o'_1 p_1$ są asymptotami hyperboli obwodu pozornego, którą obecnie łatwo nakreślimy.

Dla ograniczenia rzutów tej ostatniej hyperboloidy zrobionym został, sposobem już znanym czytelnikowi, rzut okręgów kół spotykających które ograniczają pierwszą hyperboloidę. Przecięcia się tych kół z hyperbolą obwodu pozornego zostały znalezione, biorąc przecięcia (q', q), (q', q_1), (γ, γ'), (γ_1, γ'_1) płaszczyzny średnicowej z okręgami kół. Przecięcia te mają swe rzuty pionowe w punktach spotkania się rzutów tegoż nazwiska kół z obwodem pozornym, a ich odległość wspólna od płaszczyzny obrazu przechodzącej przez oś z_1, z'_1 została znalezioną, kreśląc kład jednego z kół granicznych i rzeczywistą wielkość $q'Q_1$ połowy prostopadłej do płaszczyzny pionowej a przechodzącej przez punkt q.

ROZDZIAŁ V

PRZECIĘCIA PŁASKIE OSTROKRĘGU, WALCA I POWIERZCHNI OBROTOWYCH

570. Wyznaczenie przecięcia się płaszczyzny z powierzchnią jest tylko szczególnym przypadkiem znalezienia linii wspólnej dwu jakimkolwiek powierzchniom. Chociaż w tej chwili nie zajmiemy się rozwiązaniem tego ogólnego zadania, jednakże dla uniknienia powtarzań i dla przedstawienia tej kwestyi jak najogólniej, wypada podać tu niektóre teoryje, służące do wyznaczenia wspólnego przecięcia się dwu powierzchni.

Znajdujemy krzywę wspólną dwu powierzchniom, wyznaczając różne jej punkta i łącząc je z sobą w należytym porządku liniją ciągłą.

571. Wykreślenie jednego jakiegokolwiek punktu przecięcia się dwu powierzchni. — Dla znalezienia jednego jakiegokolwiek punktu przecięcia się dwu powierzchni, przecinamy je trzecią powierzchnią pomocniczą, tak wybraną, żeby rzuty jej przecięć z każdą z powierzchni były łatwe do wykreślenia i biorąc punkta przecięcia się znalezionych linij przecięcia.

Jako powierzchni pomocniczych używamy, płaszczyzny, kuli a czasem ostrokręgu lub walca.

Jeżeli przecięcie powierzchni jest płaskiem, to możemy niekiedy nakreślić te punkta uciekając się do jego rzutu pomocniczego prostolinijnego. Rzeczywiście, zmieniwszy bowiem płaszczyznę pionową rzutów w ten sposób, żeby nowa płaszczyzna była prostopadłą do śladu poziomego tej, której przecięcia szukamy, przecięcie to będzie miało rzut pionowy prostolinijny, i zadanie sprowadzi się do wyznaczenia rzutów poziomych pewnej liczby punktów, których znamy rzuty pionowe.

572. Wykreślenie stycznej. — Ponieważ styczna w punkcie przecięcia się dwu powierzchni musi leżeć na płaszczyznach stycznych przechodzących przez punkt uważany, więc możemy ją znaleźć na ich wspólnem przecięciu. Jeżeli przecięcie jest płaskiem, to jedna z płaszczyzn stycznych jest zarazem płaszczyzną przecięcia.

573. Sposób Bineta. — Sposób ten polega na następującej uwadze : jeżeli przez jeden z punktów linii wspólnego przecięcia się dwu powierzchni nakreślimy do nich normalne, to te ostatnie będą prostopadłe do przecięcia się płaszczyzn stycznych, t. j. do stycznej, a tem samem ich płaszczyzna będzie także prostopadłą do tej prostej. Z powyższego wynika, że ażeby otrzymać styczną, należy nakreślić przez punkt uważany prostopadłe do tych powierzchni.

Jeżeli chcemy wykreślić krzywę, to nie wystarcza dla ścisłego poznania jej kształtu, znaleźć dostateczną liczbę jej punktów, lecz należy nadto wyznaczyć jej punkta szczególne i linije do nich należące.

Podajmy w tym względzie kilka ogólnych wskazówek.

574. Kreślenie asymptot. — Ponieważ asymptoty są to styczne, których punkta styczności leżą w nieskończoności, znajdziemy je więc, szukając przecięcia się płaszczyzn stycznych, do dwu powierzchni, przechodzących przez punkta leżące w nieskończoności, na ich wspólnem przecięciu.

575 Krzywe hyperboliczne. — Krzywe paraboliczne. — Krzywemi hyperbolicznemi nazywamy takie krzywe, które, jak hyperbola, mają gałęzie rozciągające się do nieskończoności i asymptoty. Krzywe zaś, których gałęzie rozciągają się do nieskończoności, lecz których asymptoty, jak asymptoty paraboli, są odrzucone do nieskończoności, noszą nazwę krzywych parabolicznych.

Krzywa hyperboliczna lub paraboliczna drugiego rzędu jest hiperbolą lub parabolą.

576. Punkta obwodu pozornego. — Punkta takie mają szczególną wartość, gdyż na powierzchni uważanej odgraniczają one części widzialne krzywej wspólnego przecięcia, a nadto drugą ich ważną zaletą jest, że ich rzuty na płaszczyznę obwodu pozornego uważanego są punktami dotknięcia tego obwodu w rzucie z rzutem na tęż płaszczyznę krzywej wspólnego przecięcia (§ 342).

Metody ogólnej służącej do wyznaczenia punktów leżących na obwodzie pozornym nie posiadamy, możemy jednakże zrobić uwagę bardzo ważną, to jest, że obwody pozorne powierzchni są płaskie, a tem samem, że punkta, o których mowa, dadzą się wyznaczyć najczęściej, przyjmując płaszczyznę linij obwodu pozornego za powierzchnię pomocniczą i postępując dalej tak, jak w paragrafie 571.

577. Punkt najwyższy i punkt najniższy. — Te punkta trudne do wyznaczenia i nie do znalezienia na wielkiej liczbie rysunków, dadzą się wyznaczyć do pewnego stopnia, jużto za pomocą twierdzenia podanego w paragrafie 401, jużteż za pomocą twierdzenia następującego :

Twierdzenie. — *Jeżeli w jednym z punktów wspólnego przecięcia się dwu powierzchni, płaszczyzny styczne mają swe ślady poziome równoległe, to ten punkt jest albo najwyższym albo najniższym na linii wspólnego przecięcia się tych powierzchni i odwrotnie.* — Rzeczywiście, jeżeli bowiem ślady poziome dwu płaszczyzn stycznych są równoległe, to ich wspólne przecięcie, czyli styczna w punkcie uważanym jest równoległa do wspólnego kierunku ich śladów, a tem samem i do płaszczyzny poziomej rzutów, co dowodzi podanej własności. Odwrotnie, ponieważ w punkcie najwyższym lub najniższym styczna do krzywej jest poziomą, więc ślady poziome płaszczyzn stycznych wyznaczających ten punkt, są równoległe do stycznej a tem samem równoległe względem siebie.

578. Przypadek przecięć płaskich. — Na zasadzie twierdzenia podanego tutaj, możemy znaleźć punkt najwyższy i punkt najniższy przecięcia płaskiego jakiejkolwiek powierzchni, wyznaczając punkta krzywej dotknięcia, w których ślad poziomy płaszczyzny stycznej do powierzchni danej, jest równoległy do śladu poziomego na tejże płaszczyznie płaszczyzny siecznej. Dla przecięć płaskich rzecz się dzieje zupełnie inaczej jak w przypadku ogólnym, i w tym razie łatwo jest znaleźć punkt najwyższy i najniższy.

579. Powierzchnie ograniczające. — Jeżeli weźmiemy pod uwagę szereg powierzchni pomocniczych przecinających powierzchnie, których szukamy przecięcia się, to napotkamy taką powierzchnię,

która przecinając jednę z powierzchni danych, jest zarazem styczną do drugiej wzdłuż linii wspólnej, i ona jest ostatnią, która wyznacza jeszcze punkta wspólnego przecięcia, otóż takie powierzchnie zwą się *powierzchniami ograniczającemi* a punkta przez nie wyznaczone zwą się *punktami granicznemi* przecięcia.

Powierzchnie ograniczające mają bardzo ważną własność, którą znać należy, a którą możemy wysłowić jak następuje :

Przecięcie jednej z dwóch powierzchni danych powierzchnią ograniczającą, jest krzywą styczną w punkcie granicznym do linii wspólnego przecięcia się tychże powierzchni.

I rzeczywiście, ponieważ bowiem w jednym z punktów granicznych płaszczyzna styczna do jednej z powierzchni danych jest zarazem styczną do powierzchni ograniczającej, zatem przecięcie się jej z płaszczyzną styczną do drugiej powierzchni danej, wyznacza 1° styczną do linii wspólnego przecięcia się powierzchni danych, i 2° styczną do linii wspólnego przecięcia powierzchni ograniczającej z powierzchnią przeciętą.

580. Uwaga. — Bardzo często powierzchnie ograniczające są płaszczyznami poziomemi, a wówczas płaszczyzny ograniczające są płaszczyznami przechodzącemi przez punkt najwyższy i przez punkt najniższy wspólnego przecięcia się powierzchni, których dotknięcia szukamy.

PRZECIĘCIA PŁASKIE WALCA I OSTROKRĘGU

581. **Zadanie I.** — *Nakreślić rzuty i rzeczywistą wielkość przecięcia jakiegokolwiek ostrokręgu* (*fig.* 359, tab. XL).

Oznaczmy przez s, s' rzuty wierzchołka ostrokręgu, przez *abcd* jego ślad poziomy, zaś przez $P\alpha P'$ ślady płaszczyzny siecznej.

582. **Wybór powierzchni pomocniczych.** — Żeby przecięcia pomocnicze były łatwe do wykreślenia, przyjmijmy płaszczyzny sieczne przechodzące przez wierzchołek ostrokręgu, które w ten sposób winny zadość czynić jednemu warunkowi. Dla ułatwienia kreślenia przecięcia tych płaszczyzn z płaszczyzną $P\alpha P'$ poddamy je drugiemu warunkowi, t. j. przesuniemy je przez prostę sw, $s'w'$ równoległą do αP i tak nakreśloną przez punkt s, s', żeby przecięcia się płaszczyzn pomocniczych z płaszczyzną daną były linijami tej ostatniej. Ślady poziome w takim układzie powierzchni pomocniczych utworzą wiązkę mającą wierzchołek w punkcie, który jest śladem prostej sw, $s'w'$ na tejże samej płaszczyznie rzutów.

583. **Kreślenie jakiegokolwiek punktu.** — Przyjmijmy za ślad poziomy płaszczyzny pomocniczej jakąkolwiek prostę Q rozbieżną punktu ω, i wyznaczmy punkta w których ona spotyka ślad poziomy ostrokręgu; niech jednym z tych śladów będzie punkt t, mający za rzut pionowy punkt t', to łącząc punkta t z s i t' z s' linijami prostemi, otrzymamy rzuty jednej z tworzących wspólnego przecięcia płaszczyzny pomocniczej z ostrokręgiem.

Przecięcie się płaszczyzny pomocniczej z płaszczyzną $P\alpha P'$ ma za ślad poziomy punkt h przecięcia się prostych αP z wQ, rzutem więc jego poziomym będzie prosta przechodząca przez punkt h, a równoległa do osi rzutów xy. Punkt, w którym ta ostatnia równoległa spotyka prostę st, wyznacza właśnie rzut poziomy jakiegokolwiek punktu m krzywej wspólnego przecięcia, a linija rzutów przechodząca przez punkt m, wyznacza na przecięciu się z prostą $s't'$ rzut pionowy m' tegoż punktu.

584. **Styczna w jakimkolwiek punkcie linii wspólnego przecięcia.** — Ponieważ styczna, jak

to dowiedliśmy (§ 572), jest przecięciem się płaszczyzny stycznej z płaszczyzną sieczną, więc jeżeli obierzemy punkt m, m' to płaszczyzna styczna w tym punkcie, mając za ślad poziomy styczną R do podstawy ostrokręgu, przechodzącą przez punkt t, a która spotykając się z prostą P wyznacza ślad poziomy θ, stycznej mającej swój ślad pionowy w punkcie θ', wyznaczy prostę θm, $\theta' m'$, czyli styczną szukaną. Lecz jeżeli, jak to ma miejsce dla punktu, którego rzutem poziomym jest punkt m_1, ślady poziome R_1, P przecinają się poza granicami rysunku, to wówczas uciec się możemy do płaszczyzny pomocniczej, mającej za ślad poziomy prostę Q, i wziąć 1° rzut poziomy przecięcia się tej ostatniej płaszczyzny z płaszczyzną $P\alpha P'$, który jest przedstawionym przez prostę już używaną mh, i 2° rzut sh_1, na tęż samą płaszczyznę, przecięcia się jej z płaszczyzną styczną, a znalazłszy punkt μ wspólnego przecięcia się tych prostych mh, sh_1, otrzymamy właśnie jeden punkt rzutu poziomego stycznej, którym jest prosta μm_1.

Łatwo znaleźlibyśmy odpowiadający rzut pionowy, lecz dla uniknienia zawikłania rysunku nie kreślimy go tutaj.

585. Płaszczyzna ograniczająca. — Ponieważ płaszczyzna ograniczająca jest styczną do ostrokręgu, ślad więc jej poziomy znajdziemy, kreśląc przez punkt ω styczną Q_2 do podstawy *acd*. Postępując dalej z płaszczyzną ograniczającą w ten sam sposób jak z jakąkolwiek płaszczyzną poziomą m_2, m'_2, a na zasadzie własności powierzchni ograniczających, dowiedzionej powyżej (§ 579), przecięcie się $h_2 m_2$, $h'_2 m'_2$, płaszczyzny ograniczającej z płaszczyzną krzywej szukanej, jest właśnie styczną do tej krzywej.

586. Gałęzie nieskończone. — Asymptoty. — Zauważmy przedewszystkiem, że asymptoty do rzutów krzywej zchodzą się z rzutami asymptot do krzywej, i rzeczywiście, gdyż asymptoty są to styczne, a wiemy, że styczne do rzutów krzywej zchodzą się z rzutami stycznych do krzywej. Otóż pamiętając to, zajmijmy się zadaniem i szukajmy tworzących, wyznaczających punkta w nieskończoności uważanego przecięcia. Ponieważ te tworzące są równoległe do płaszczyzny $P\alpha P'$, więc wyznaczymy je, kreśląc przez wierzchołek ostrokręgu płaszczyznę równoległą do płaszczyzny $P\alpha P'$, a ponieważ nadto ślad poziomy tej płaszczyzny jest prostą Q_3 równoległą do P, i przechodzącą przez ω, więc wyznaczając przecięcia się $(t_3 s, t'_3 s')$, $(\theta_3 s, \theta'_3 s')$, tej płaszczyzny równoległej do $P\alpha P'$ z ostrokręgiem, znajdziemy tworzące ostrokręgu przechodzące przez punkta w nieskończoności linij wspólnego przecięcia, a styczna do przecięcia w punkcie leżącym w nieskończoności na prostej $s\theta_3$, $\theta'_3 s'$ jest asymptotą krzywej wspólnego przecięcia. Że zaś styczna, o której mowa, jest prostą $s\theta_3$, $s'\theta'_3$, wspólnego przecięcia się płaszczyzny $P\alpha P'$ z płaszczyzną styczną do ostrokręgu, mającą swój ślad poziomy na stycznej UU_1 do podstawy, a przechodzącej przez punkt θ_3, więc przecięcie się prostej P z prostą UU_1 wyznaczy ślad poziomy h_3 asymptoty szukanej, którego odpowiadający rzut pionowy h'_3 leży na osi rzutów.

Wreszcie płaszczyzna styczna obejmuje tworzącę $s\theta_3$, $s\theta'_3$ równoległą do płaszczyzny $P\alpha P'$, więc przecięcie się tych płaszczyzn jest równoległe do tej tworzącej, czyli, jednem słowem asymptota szukana jest prostą $h_3\beta$, $h'_3\beta'$ równoległą do $s\theta_3$, $s'\theta'_3$, a przechodzącą przez punkt h_3, h'_3.

Drugą asymptotę znajdziemy w taki sam sposób, kreśląc przez punkt h_4, h'_4 prostę $h_4\beta_1, h'_4\beta'_1$ równoległą do st_3, $s't'_3$.

Z tego wszystkiego wnosimy, 1° że krzywa wspólnego przecięcia się ostrokręgu z płaszczyzną jest krzywą hyperboliczną, jeżeli płaszczyzna przechodząca przez wierzchołek ostrokręgu i w kierunku płaszczyzny tej krzywej, przecina ostrokrąg; 2° że jest ona krzywą paraboliczną, jeżeli ta płaszczyzna równoległa jest styczną do ostrokręgu, gdyż wówczas przecięcie się jej z płaszczyzną krzywej wyznacza asymptotę w nieskończoności; 3° że jest ona krzywą najczęściej zamkniętą, a w każdym

razie ograniczoną, jeżeli płaszczyzna równoległa dotyka powierzchni tylko w wierzchołku, gdyż wówczas nie ma zupełnie gałęzi nieskończonych.

587. Położenie gałęzi krzywej względnie do asymptot (*fig.* n_6). — Oznaczmy przez $Ca C_1$ ślad poziomy ostrokręgu, przez P ślad płaszczyzny siecznej, przez s rzut wierzchołka powierzchni stożkowej na płaszczyznę poziomą rzutów, zaś przez sa ślad na tęż płaszczyznę rzutów, tworzącej równoległej do płaszczyzny siecznej.

Jeżeli przyjmiemy za płaszczyzny pomocnicze, płaszczyzny zawierające tworzącę, mającą za rzut sa, to one wyznaczą nam na płaszczyznie siecznej proste równoległe do tej tworzącej. Ślady poziome płaszczyzn pomocniczych przejdą wszystkie przez punkt a.

Uważmy przedewszystkiem ślad at styczny do $Ca C_1$; przecięcie się jego z płaszczyzną krzywej wyznaczy

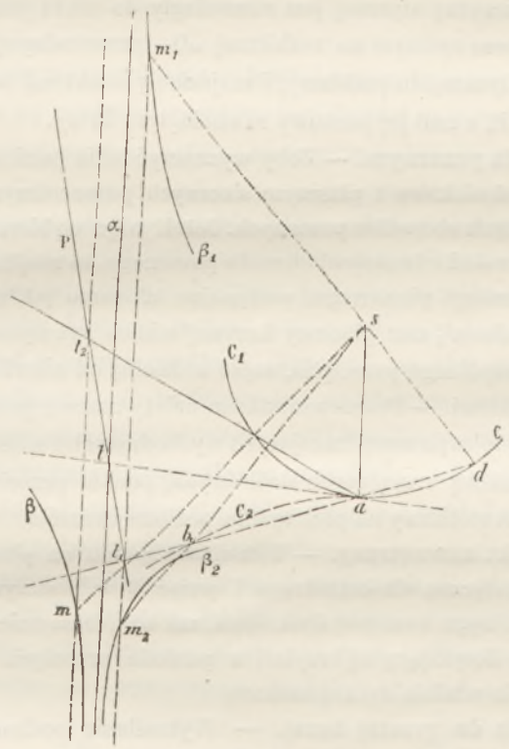

FIG. n_6.

jej asymptotę, która ma za rzut poziomy prostę $t\alpha$ równoległą do sa, a przechodzącą przez punkt t. Uważmy następnie dwie płaszczyzny pomocnicze, których ślady przechodzą przez dwa punkta d i b podstawy blizkie punktu a i z jednej i z drugiej jego strony; rzuty poziome odpowiadających przecięć z płaszczyzną krzywej, są prostemi równoległemi do rzutu $t\alpha$ asymptoty, a przechodzącemi przez punkta t_1 i t_2, punkta zatem m, i m_1 wyznaczone przez te płaszczyzny są blizkie rzutu $t\alpha$, i leżą po jednej i po drugiej stronie asymptoty, nadto, wskutek położenia prostych sd i sb leżą one po jednej i po drugiej stronie prostej at i są bardzo od niej oddalone.

Wnosimy więc ztąd, że krzywa składa się z dwu gałęzi β, β_1 leżących po jednej i po drugiej stronie

asymptoty i zchodzących się z sobą w punkcie na niej leżącym w odległości nieskończenie wielkiej.

Prawo tu podane może się nie sprawdzać dla punktów szczególnych i dla punktów odosobnionych krzywej podstawy; przypuściwszy bowiem, że ta ostatnia ma punkt przegięcia w punkcie a (jak krzywa $C\alpha\, C_2$), wówczas punkt b przejdzie do b_1, punkt m do m_2 i β do β_2, a krzywa składać się będzie z dwu gałęzi β_1, β_2 leżących z tejże samej strony asymptoty.

W tym szczególnym przypadku, płaszczyzna styczna wzdłuż tworzącej mającej za rzut prostę sa, przechodzi na wskróś powierzchni, i wszystkie jej przecięcia płaskie mają punkta przegięcia w punktach, w których one przecinają tworzącę dotknięcia; możemy więc powiedzieć, że przecięcie ma punkt przegięcia także w nieskończoności, co jest powodem zmiany położenia jego gałęzi względnie do stycznej w punkcie krzywej leżącym w nieskończoności.

588. Punkt najwyższy i punkt najniższy (*fig.* 359, tab. XL). — Ponieważ punkta te są punktami, w których ślad poziomy płaszczyzny stycznej jest równoległy do śladu poziomego płaszczyzny danej, wyznaczymy je więc sposobem ogólnym na rozbieżnej ωQ_1, przechodzącej przez punkt dotknięcia t_4 prostej równoległej do P a stycznej do podstawy, i znajdziemy punkt m_4, m'_4, w którym rzut poziomy stycznej jest równoległy do P, a rzut jej pionowy równoległym do xy.

589. Punkta na obwodzie pozornym. — Żeby wyznaczyć takie punkta, należy przy wyznaczeniu innych punktów, tak wybrać niektóre z płaszczyzn siecznych pomocniczych, żeby one przechodziły przez ślady poziome tworzących obwodów pozornych. Jeżeli więc wybierzemy płaszczyznę tak, żeby jej ślad ωQ_5 przechodził przez ślad c tworzącej obwodu pozornego, to znajdziemy rzuty m_5, m'_5 punktu należącego do obwodu pozornego pionowego, postępując tak samo jak z płaszczyzną, której ωQ jest śladem poziomym. W punkcie m'_5 rzut pionowy krzywej winien być stycznym do $s'c'$ i oddzielać, na rzucie pionowym krzywej wspólnego przecięcia, część widzialną od niewidzialnej.

590. Punkta na prostej danej. — Przedewszystkiem należy ustawić prostę daną na płaszczyznie, a następnie nakreśliwszy takowę za pomocą rzucających wychodzących z wierzchołka ostrokręgu, wyznaczyć na prostej danej za pomocą rzucających stożkowych, punkta przecięcia tego rzutu z podstawą podniesioną z kładu i jej rzut stożkowy na płaszczyznie poziomej rzutów.

591. Styczna przez punkt zewnętrzny. — Ustawiwszy punkt na płaszczyznie danej, należy nakreślić przezeń płaszczyznę styczną do ostrokręgu i wziąć ją za płaszczyznę pomocniczą, a ta ostatnia wyznaczy nam na ostrokręgu tworzącę dotknięcia, zaś na płaszczyznie krzywej, prostę przechodzącą przez punkt dany i dotykającą tej krzywej w punkcie przecięcia się z tworzącą dotknięcia. Prosta tak znaleziona, będzie właśnie styczną szukaną.

592. Styczna równoległa do prostej danej. — Wykreślenie podane w poprzedzającym paragrafie, może być zastosowanem tutaj, przypuszczając tylko, że punkt zewnętrzny leży w odległości nieskończenie wielkiej na kierunku prostej danej.

593. Punkta graniczne w danym kierunku. — Punkt najwyższy i punkt najniższy obu rzutów. — Punkta ostateczne w kierunku poprzecznym. — Pod nazwą, punkt graniczny w kierunku strzałki f (fig. n_7), rozumiemy punkta dotknięcia γ_1, γ_2 stycznych prostopadłych do f.

Wyznaczenie więc tych punktów sprowadza się do wykreślenia prostych równoległych do kierunku danego (§ 592).

Jest rzeczą wielce pożądaną, żeby na każdym rzucie rysunku, były wykreślane sposobem tu podanym, punkta graniczne w kierunku osi rzutów i w kierunku do niej prostopadłym, gdyż w ten sposób znajdziemy punkt leżący najdalej na prawo i na lewo, jakoteż punkt najwyższy i najniższy każdego rzutu.

Zauważymy tu mimochodem, że punkta ostateczne w kierunku poprzecznym mają tęż samą styczną na obu rzutach (§ 28).

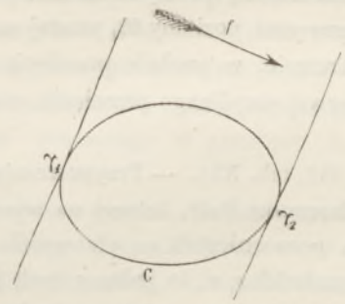

Fig. n_7.

594. Punkta zwrotu pierwszego rodzaju. — Jeżeli kierownicą ostrokręgu jest krzywa skończona, i jeżeli nadto w jednym z jej punktów, tworząca jest do niej styczną, to każde przecięcie płaskie w punkcie spotkania tej tworzącej z płaszczyzną sieczną, przedstawia punkt zwrotu pierwszego rodzaju (§ 382, 2°).

595. Części widzialne przecięcia (*fig.* 359, tab. XL). — Ponieważ tworzące dolnej powłoki ostrokręgu, których ślady poziome leżą na łuku *abkf*, są widzialne w rzucie poziomym, a ponieważ nadto, łuk $bmm_1m_4m_2f$ należy do odpowiedniej części ostrokręgu, jest więc on widzialny na płaszczyznie poziomej rzutów. Przedłużenia tego łuku, które są rzutami poziomemi części krzywej leżącej pod płaszczyzną poziomą rzutów, winny być znaczone punktami okrągłemi, na obu rzutach. Względnie do płaszczyzny pionowej rzutów, tylko łuk *abc* podstawy jest widzialnym, zatem należy łuk $b'm'm_4'm'_5$, kreślić liniją ciągłą a punktami okrągłemi pozostałe części wspólnego przecięcia, na rzucie pionowym.

596. Rzeczywista wielkość krzywej wspólnego przecięcia. — Rzeczywistą wielkość znajdziemy, kreśląc przedewszystkiem oba rzuty tej krzywej i robiąc następnie jej kład na jednę z płaszczyzn rzutów. Czytelnik sam rozwiąże bez trudności niniejsze zadanie.

597. Kreślenie jednoczesne punktów krzywej i stycznych do niej przez te punkta przechodzących. — W tym celu dostacznem będzie tak wybrać płaszczyzny pomocnicze, żeby one były styczne do powierzchni, gdyż wówczas płaszczyzna dana z płaszczyzną pomocniczą przecinają się podług linij, które służąc do wyznaczenia punktów krzywej, są zarazem styczne do tej krzywej.

598. Wykonanie rysunku — *Pierwszy sposób.* (*fig.* 361, tab. XL). — Oznaczmy przez s, s' dane rzuty wierzchołka ostrokręgu, dany ślad poziomy C tej powierzchni i dane ślady $P_\alpha P'$ płaszczyzny siecznej. Wykonajmy przedewszystkiem, jak w paragrafie **402**, rysunek służący do sprawdzenia, czy krzywa przecięcia jest hyperboliczną, paraboliczną lub ograniczoną, to jest nakreślmy ślad poziomej $\omega\omega_1$ leżącej na płaszczyznie przechodzącej przez wierzchołek s, s' ostrokręgu, a równoległej do płaszczyzny $P_\alpha P'$, gdyż ślad ten, jakto zaraz zobaczymy, posłuży nietylko do sprawdzenia o którem mowa, lecz nadto posłuży on do wyznaczenia punktów szukanego przecięcia.

Obierzmy za ślad poziomy płaszczyzny pomocniczej stycznej do ostrokręgu, jednę ze stycznych do jego podstawy np. R. Linija, podług której płaszczyzna ta spotka ostrokrąg, jest tworzącą dotknięcia, a jej rzutem poziomym *st*. Ponieważ ta płaszczyzna spotyka płaszczyznę daną podług prostej, której ślad poziomy przypada w punkcie 0, i ponieważ nadto ta ostatnia prosta winna

być równoległą do prostej wspólnego przecięcia się tej płaszczyzny z płaszczyzną tylko co nakreśloną przez wierzchołek s, s' ostrokręgu, równolegle do $P\alpha P'$, a mającej za ślad poziomy h i przechodzącej przez wierzchołek ostrokręgu, to jest mającej prostę sh za rzut poziomy, więc nakreśliwszy przez θ prostę równoległą do sh_1, otrzymamy rzut poziomy $\theta\theta_1$ prostej wspólnego przecięcia się płaszczyzny $P\alpha P'$ z płaszczyzną pomocniczą. Wreszcie, w punkcie przecięcia się m prostej st z $\theta\theta_1$ znajdujemy jeden punkt rzutu poziomego krzywej wspólnego przecięcia, a styczna w tym punkcie jest właśnie prostą $\theta\theta_1$.

599. Drugie wykreślenie (*fig.* 362, tab. XL). — Przypuszczając też dane co powyżej, nakreślmy rzuty $v'h', vh$ prostej poziomej płaszczyzny $P\alpha P'$, leżącej na wysokości wierzchołka s, s'. Następnie, jeżeli nakreślimy ślady płaszczyzn pomocniczych na płaszczyźnie poziomej rzutów i na płaszczyźnie poziomej przechodzącej przez wierzchołek s, s', to jedna z tych płaszczyzn będzie wyznaczoną przez styczną R do krzywej C i przez równoległę sv_1, $s'v'$ przechodzącą przez wierzchołek s, s'.

Ponieważ prosta mająca za rzut poziomy st jest wspólną płaszczyźnie pomocniczej i ostrokręgowi, a prosta (sv_1, vh), której rzut poziomy przechodzi przez punkta a i θ przecięcia się dwu par prostych (P, R), jest wspólną płaszczyźnie pomocniczej i płaszczyźnie danej, więc w punkcie przecięcia się m prostych $a\theta$ i st znajdziemy jeden punkt rzutu poziomego wspólnego przecięcia, styczną zaś w tym punkcie jest prosta θa Zasadzając się na tem, z łatwością znajdziemy następnie rzut pionowy.

600. **Punkta przecięcia się podstawy z rzutem przecięcia na płaszczyznę tejże podstawy** (*fig.* 359, tab. XL). — Jeżeli ślad αP spotyka podstawę ostrokręgu, to punkta (b, b'), (f, f') należą oczywiście do krzywej wspólnego przecięcia, a punkta b i f są wspólne rzutowi poziomemu tej krzywej i podstawy ostrokręgu; lecz oprócz tych punktów możemy jeszcze napotkać inne, odpowiadające przecięciu się krzywych w rzucie, chociaż same krzywe nie przecinają się w przestrzeni.

Te punkta przecięcia dają się wyznaczyć z łatwością tylko dla ostrokręgów drugiego rzędu (*fig.* 360, tab. XL). I tak, przyjmijmy elipsę C za ślad poziomy ostrokręgu a następnie ustawmy jego wierzchołek s,s' jakoteż płaszczyznę sieczną $P\alpha P'$ w położeniu dowolnem. Ponieważ ostrokrąg jest drugiego rzędu, więc dodając do płaszczyzny $P\alpha P'$ płaszczyznę poziomą rzutów, otrzymamy nową powierzchnię drugiego rzędu, której przecięcie z ostrokręgiem składa się z krzywej C i z krzywej szukanej, a punkta przecięcia się rzutów poziomych tych dwóch linij, są punktami podwójnemi rzutu poziomego (§ 378) wspólnego przecięcia się dwu powierzchni uważanych drugiego stopnia.

Otóż krzywa C jest znaną; więc, jeżeli znajdziemy prostę przechodzącą przez punkta podwójne, to poznamy zarazem i punkta szukane. Żeby znaleźć tę prostę uważmy, że punkta w przestrzeni, które zchodzą się z sobą w rzucie poziomym dla utworzenia punktu podwójnego, leżą na jednej cięciwie pionowej, której środek ma za rzut poziomy tenże punkt podwójny, a więc punkta szukane leżą na rzucie poziomym prostej wspólnego przecięcia płaszczyzn średnicowych sprzężonych z cięciwami pionowemi na dwu powierzchniach uważanych drugiego stopnia.

Wyznaczmy więc te dwie płaszczyzny. Jedna z nich, odpowiadająca układowi płaszczyzn, winna obejmować αP, gdyż wzdłuż całej tej linii cięciwy pionowe mają długość równą zeru; zatem jeżeli weźmiemy na płaszczyźnie pionowej rzutów *jakąkolwiek* cięciwę pionową $a'b'$, to jej środek m' znajdzie się także na płaszczyźnie średnicowej, a ślady płaszczyzny będą αP i prosta łącząca punkta α i m'.

Ponieważ płaszczyzna średnicowa odpowiadająca ostrokręgowi winna obejmować tworzące tej

powierzchni, które tworzą obwód pozorny w rzucie poziomym, gdyż w rozmaitych punktach tych tworzących cięciwy pionowe mają długość równą zeru, zatem płaszczyzna ta średnicowa ma za ślad poziomy Q t. j. prostę łączącą punkta t i t_1, przechodzi przez wierzchołek s, s' ostrokręgu, a przecięcie się śladu Q z osią rzutów wyznacza punkt β jej śladu pionowego Q'; drugi punkt przejścia v' tego śladu został wyznaczony za pomocą prostej poziomej sv, $s'v'$ płaszczyzny średnicowej.

Znając teraz ślady płaszczyzn średnicowych łatwo wyznaczymy rzut poziomy wh ich wspólnego przecięcia, którato prosta przecinając w punktach δ_1, δ_2 krzywę C, wyznacza punkta szukane.

W następującym paragrafie, podobnie jak tu, przyjmiemy, że ostrokrąg jest drugiego stopnia.

601. Wierzchołki rzutów i rzuty wierzchołków. — 1° *Kiedy przecięcie jest hyperbolą.* — Przedewszystkiem należy wyznaczyć asymptoty, następnie znaleźć proste dzielące na dwie równe części tak kąty utworzone przez ich rzuty, jakoteż i kąty ich w przestrzeni, gdyż wówczas otrzymamy osie rzutów i rzuty osi o której mowa a tem samem sprowadzimy zadanie nasze do wyznaczenia punktów wspólnego przecięcia, których rzuty leżą na tych osiach, a to zadanie umiemy już rozwiązać (§ 590).

2° *Kiedy przecięcie jest parabolą.* — Dla stwierdzenia, że krzywa jest parabolą, należy przez wierzchołek ostrokręgu nakreślić płaszczyznę równoległą do danej płaszczyzny siecznej, a którąby dotykała ostrokręgu wzdłuż tworzącej wyznaczającej kierunek asymptotyczny przecięcia; kreśląc wówczas prostopadłe do rzutów tworzącej i rzuty prostopadłej do samej tworzącej, znajdziemy kierunek stycznych w wierzchołkach rzutów, i kierunek stycznych do rzutów wierzchołka, a temsamem sprowadzimy zadanie do wyznaczenia punktów dotknięcia stycznych równoległych do tych rozmaitych kierunków, to jest do zadania, które umiemy rozwiązać (§ 592).

Wyznaczywszy wierzchołki, proste nakreślone z tych punktów do rzutów kierunku asymptotycznego wyznaczą osie rzutów i rzuty osi.

3° *Kiedy przecięcie jest elipsą.* — Wiemy, że prosta łącząca punkt najwyższy z punktem najniższym wyznacza jednę średnicę krzywej i każdego z jej rzutów, a środek tej prostej i rzuty jego wyznaczają następnie środek krzywej i środki jej obu rzutów. Jeżeli więc nakreślimy teraz przez środek krzywej poziomę jej płaszczyzny, to znajdziemy średnicę sprzężoną elipsy, której wierzchołki wyznaczywszy następnie, nakreślimy : 1° osie elipsy znając średnice sprzężone, 2° wierzchołki obu rzutów działając na każdym rzucie, i 3° nareszcie rzuty wierzchołków, robiąc to na kładzie średnic i wracając potem do rzutów. Zazwyczaj nie kreśli się wierzchołków, gdyż średnice sprzężone elipsy są dostateczne do ich wyznaczenia a nawet do ich wykreślenia.

602. Zadanie II. — *Nakreślić rzuty i rzeczywistą wielkość przecięcia walca płaszczyzną* (*fig.* 363, tab. XL). — Oznaczmy przez C ślad poziomy walca, przez g kierunek rzutów poziomych jego tworzących, przez d rzut poziomy jakiejkolwiek prostej leżącej na płaszczyznie danej, zaś przez P ślad poziomy tej płaszczyzny.

Na prostej D obrawszy jakikolwiek punkt A, nakreślmy przezeń równoległę do tworzącej walca, niech g_1 będzie rzutem poziomym a θ_1 jej śladem tegoż samego nazwiska; jeżeli przyjmiemy za płaszczyzny pomocnicze płaszczyzny równoległe do płaszczyzny utworzonej przez proste G_1 i D, to ich ślady poziome będą równoległe do $\theta\theta_1$; niech jednym z tych śladów będzie Q, to płaszczyzna odpowiadająca temu śladowi przetnie płaszczyznę daną podług prostej, mającej ślad poziomy w punkcie θ_2 przecięcia się prostych Q i P, zaś rzut poziomy na prostej $\theta_2 d_1$ równoległej do θd.

Ponieważ płaszczyzna sieczna przecina walec podług układu dwu tworzących, których ślady po-

ziome h_1, h_2 leżą w punkcie przecięcia się prostej Q z rzutem poziomym C walca, a których rzuty poziome h_1q_2, h_2q_3 są równoległe do g, więc rzuty poziome m_2, m_3 dwu punktów wspólnego przecięcia otrzymamy na przecięciu się tych prostych z prostą $\theta_2 d_1$.

603. **Styczna w jednym z punktów wspólnego przecięcia.** — Ponieważ styczna w punkcie m_2 jest przecięciem się płaszczyzny danej z płaszczyzną styczną do walca w tymże punkcie, ponieważ nadto ta płaszczyzna styczna ma za ślad poziomy styczną R do krzywej C, przechodzącą przez ślad h_1, więc ślad poziomy stycznej szukanej jest w punkcie θ_3 na przecięciu się prostych R i P, t. j. że dosyć jest nakreślić rzut poziomy tej stycznej,

604. **Gałęzie nieskończone przecięcia płaskiego walca.** — Dwa są przypadki, w których przecięcie płaskie walca może mieć gałęzie nieskończone : 1° kiedy płaszczyzna sieczna jest równoległą do jednej z tworzących walca, i 2° kiedy jedna z tworzących leży zupełnie w nieskończoności.

W pierwszym przypadku płaszczyzna będąc równoległą do jednej tworzącej, jest równoległą do wszystkich, zatem przecięcie przez nią utworzone składa się z pewnej liczby tworzących i nie przedstawia nic ciekawego.

Z tego widzimy, że usunąwszy ten przypadek przecięcia prostolinijnego, gałęzie nieskończone mogą mieć tylko miejsce na przecięciu płaskiem walca o tyle, o ile one istnieją na jego podstawie, a mianowicie w dwu przypadkach t. j. 1° kiedy podstawa walca jest hyperboliczną, i 2° kiedy jest ona paraboliczną.

1° *Kiedy podstawa walca jest hyperboliczną* (*fig.* 364, tab. XLI). — Oznaczmy przez β, β_1, dwie gałęzie podstawy zchodzące się w nieskończoności na asymptocie A (podstawa leży zawsze na płaszczyznie rzutów), przez g, g' kierunek tworzących walca, zaś przez $P\alpha P'$ płaszczyznę sieczną.

Jeżeli przyjmiemy, że g, g' nie jest równoległą do płaszczyzny $P\alpha P'$, to żadna z płaszczyzn pomocniczych, jako równoległych do g, g', nie będzie równoległą do płaszczyzny $P\alpha P'$, i każda z nich wyznaczy punkta należące do szukanego przecięcia to jest, że płaszczyzna przechodząca przez tworzącę leżącą w nieskończoności na walcu wyznacza punkta należące do przecięcia, a zatem to przecięcie ma zawsze gałęzie nieskończone.

Znajdźmy teraz asymptotę jego przecięcia, ponieważ ona musi leżeć na płaszczyznie stycznej wzdłuż tworzącej w nieskończoności, którato ostatnia płaszczyzna winna być równoległą do tworzących walca i zawierać punkt leżący w nieskończoności na podstawie, więc jest nią asymptota A. Płaszczyzna ta zwie się płaszczyzną asymptotyczną walca, i daje się wykreślić, prowadząc przez punkt θ, θ' dowolnie obrany na A, prostę g_1, g'_1 równoległą do g, g', a następnie wyznaczając ślady płaszczyzny obejmującej tę prostę i prostę A ; śladem poziomym tej płaszczyzny jest podstawa A, a jej śladem pionowym jest prosta przechodząca przez ślad v' prostej g_1, g_1', i przecinająca A w punkcie γ na osi rzutów xy. Szukana więc asymptota jest prostą wh, $w'h'$ wspólnego przecięcia się płaszczyzny asymptotycznej $A\gamma v'$, z płaszczyzną daną $P\alpha P'$.

Dodamy kończąc, że płaszczyzna $P\alpha P'$ nie jest nigdy równoległą, usuwając wszystkie przypadki przecięć prostolinijnych, do tworzących walca, a zatem że spotka ona zawsze płaszczyznę asymptotyczną podług prostej, nie leżącej zupełnie w nieskończoności. Prosta tak znaleziona będzie asymptotą szukanego przecięcia, zkąd wynika następujący ważny wniosek : *Przecięcia płaskie walca, którego podstawa jest hyperboliczną, są hyperbolami.*

605. 2° *Kiedy podstawa walca jest paraboliczną.* — Rozumując jak powyżej, wypada 1° że zawsze znajdziemy punkta w nieskończoności należące do przecięcia;

2° że płaszczyzna asymptotyczna, która musi przechodzić przez tworzącę w nieskończoności i

przez asymptotę podstawy także leżącą w nieskończoności, będzie płaszczyzną w nieskończoności przestrzeni (§ 4), i spotkać musi tamże płaszczyznę krzywej.

Jednem słowem widzimy, że tak przecięcie jak podstawa będą paraboliczne, lub streszczając, powiemy:

Jeżeli podstawa walca jest ograniczoną, hyperboliczną lub paraboliczną, przecięcie jego płaskie jest ograniczonem, hyperbolicznem lub parabolicznem, a *przecięcie płaskie walca, jest odpowiednio do punktów w nieskończoności, tegoż samego rodzaju co jego podstawa.*

ZASTOSOWANIE TEORYI JEDNOKŁADNOŚCI DO ZNALEZIENIA PRZECIĘĆ PŁASKICH OSTROKRĘGU I WALCA

606. **Przecięcie płaskie ostrokręgu.** — Dowiedliśmy w paragrafie 246, że dwa przecięcia płaskie bocznych ścian ostrosłupa są jednokładne; ponieważ zaś ostrokrąg jest granicą, ku której dąży ostrosłup, więc twierdzenie o którem mowa, może być stosowane i do ostrokręgu, a da się wysłowić jak następuje:

Rzuty na jakąkolwiek płaszczyznę dwu przecięć płaskich tego samego ostrokręgu, są jednokładne, gdyż oś jednokładności jest rzutem przecięcia się płaszczyzn siecznych, a jej środek rzutem wierzchołka ostrokręgu.

Odwrotność tego twierdzenia jest prawdziwą tak dla ostrosłupa, jak dla ostrokręgu (§ 249).

Dla uzupełnienia tych ogólników, dowiedźmy następującego twierdzenia:

Jeżeli dwie krzywe są jednokładne, to ich styczne w dwu punktach jednokładnych są także jednokładne.

Jeżeli weźmiemy dwie sieczne jednokładne, to zbliżając nieskończenie do siebie dwa punkta przecięcia pierwszej z nich, dwa punkta jednokładne drugiej będą dążyć także do zejścia się z sobą, a zatem dwie sieczne zostając ciągle jednokładnemi staną sie jednocześnie stycznemi, czego należało dowieść.

607. **Zadanie.** — *Wyznaczyć za pomocą jednokładności przecięcie hyperboliczne ostrokręgu płaszczyzną* (*fig.* 365, tab. XLI). — Nakreślimy jako przykład, rzut poziomy krzywej przecięcia się ostrokręgu, mającego za rzut poziomy wierzchołka punkt *s*, za podstawę na tejże płaszczyznie rzutów elipsę C, z płaszczyzną wyznaczoną przez jejś lad poziomy P i z płaszczyzną wyznaczoną przez ślad L na tejże płaszczyznie rzutów, a nakreśloną równolegle do pierwszej przez wierzchołek ostrokręgu. Prosta L, wskutek tego, będzie prostą ograniczającą figury szukanej (§ 250).

Możnaby także wyznaczyć płaszczyznę sieczną przez jej ślad P i przez jeden z jej punktów, wówczas bowiem z łatwością znaleźlibyśmy parę punktów jednokładnych dwu figur, stosując wykreślenie podane w paragrafie 251, a następnie wyznaczyć prostę graniczną figury szukanej.

Wykonawszy należycie dane wykreślenia, t. j. tak, żeby przecięcie było hyperboliczne, przyjęliśmy za prostę graniczną L siecznę podstawy C′, w tych bowiem warunkach, ponieważ ostrokrąg jest drugiego stopnia, więc i krzywa przecięcia musi być hyperbolą.

608. **Wyznaczenie jednoczesne i punktu jakiegokolwiek przecięcia i jego stycznej.** — Obierzmy na krzywej C w położeniu dowolnem jakikolwiek punkt *m*, i szukajmy zarazem i punktu jednokładnego z nim, i punktu jednokładnego stycznej do krzywej C, a przechodzącej przez punkt *m*. Pierwsze miejsce punktu jednokładnego z punktem *m* otrzymamy, kreśląc prostę *sm* łączącą

punkt uważany ze środkiem jednokładności, a drugi zaś znajdziemy, kreśląc następnie jednokładnę stycznej *mt* do krzywej C, poprowadzonej przez punkt *m*. Styczna ta spotyka P w punkcie *a*, a L w punkcie *b*, że zaś pierwszy z tych punktów jest swym własnym jednokładnym, drugi zaś *b*, ma swój jednokładny w nieskończoności na prostej łączącej punkt *s* z punktem *b*, jeżeli więc przez punkt *a* nakreślimy prostę at_1, równoległą do *sb*, to znajdziemy jednokładnę stycznej.

W punkcie m_1 przecięcia się prostych *sm* i at_1 leży punkt szukany, a styczna w tym punkcie jest właśnie prostą at_1 służącą do jego wyznaczenia.

609. **Wyznaczenie asymptot.** — Ponieważ jednokładne punktów spotkania *d* i *e* podstawy C z prostą graniczną L leżą w nieskończoności na prostych, łączących punkt *s* z punktami *d* i *e*, więc jednokładne stycznych w tych punktach są szukanemi asymptotami.

Dla wyznaczenia jednej z nich, nakreślmy styczną $d\delta$ w punkcie *d* do krzywej C, i szukajmy punktu mu odpowiedniego; ponieważ punkt spotkania δ tej stycznej z osią jednokładności jest jego własnym odpowiednim, punkt zaś *a* ma swój odpowiedni, jak to już powiedzieliśmy, w nieskończoności na *sd*, więc prosta $\delta\alpha$ równoległa do *sd* a przechodząca przez punkt δ jest asymptotą szukaną. Drugą asymptotę $\epsilon\beta$ wyznaczy się w sposób podobny do poprzedzającego.

Znając teraz obie asymptoty i jeden punkt hyperboli szukanej, możemy dopełnić jej wykreślenia, zasadzając się na własnościach odcinkowych hyperboli.

610. **Punkta na prostej danej.** — Nakreśliwszy odpowiednię prostej danej, należy wyznaczyć jej punkta przecięcia z krzywą C, i szukać po prostu ich odpowiednich.

611. **Styczne przez punkt zewnętrzny.** — Należy znaleźć punkt odpowiedni punktowi zewnętrznemu i przez punkt tak znaleziony nakreślić styczne do podstawy C, a następnie ich odpowiednie.

612. **Styczne równoległe do prostej danej. — Punkta graniczne w kierunku oznaczonym — Wierzchołki.** — Te trzy zadania, jakeśmy to już powiedzieli (§ 592 i 593), rozwiązują się za pomocą zadania podanego powyżej, nie zatrzymując się więc dłużej nad niemi przejdźmy wprost do wykreśleń, a ponieważ te ostatnie są identyczne, więc podamy tylko te, które się odnoszą do wyznaczenia wierzchołków rzutu poziomego.

613. **Wierzchołki rzutu.** — Punkt *o* przecięcia się asymptot jest środkiem hyperboli, a prosta $o\gamma$ dzieląca na dwie równe części kąt $\alpha o\beta$ jest osią jednokładności.

Należy wyznaczyć tylko punkta na prostej $o\gamma$, a w tym celu znajdźmy odpowiednię tej prostej. Otóż ponieważ punkt *f*, w którym ta prosta przecina oś jednokładności P, jest jego własnym odpowiednim, punkt zaś *h* przecięcia się rozbieżnej L, przechodzącej przez punkt *s* a równoległej do $o\gamma$, jest odpowiednim punktu leżącego w nieskończoności na prostej $o\gamma$, zatem odpowiednia osi głównej jest prostą łączącą punkt *f* z punktem *h*. Prosta *fh* tak otrzymana, spotyka C w punktach *u* i *v* odpowiednich szukanym wierzchołkom, same więc wierzchołki znajdziemy w punktach u_1, v_1 przecięcia się osi $o\gamma$ z rozbieżnemi, łączącemi punkta *u* i *v* ze środkiem *s* jednokładności.

614. **Zadanie.** — *Wyznaczyć za pomocą jednokładności przecięcie paraboliczne ostrokręgu płaszczyzną* (*fig.* 376, tab. XLI). — Zachowując ilości wiadome poprzedzającego zadania, i w celu otrzymania paraboli na przecięcie, ustawiwszy prostę L tak, żeby ona była styczną do krzywej C, nie powtarzając już wykreślenia służącego do wyznaczenia jakichkolwiek punktów, zajmiemy się tylko wyznaczeniem osi i wierzchołków w rzucie poziomym.

615. **Oś i wierzchołki rzutu.** — Oznaczywszy przez *t* punkt, w którym prosta L spotyka krzywę C, to ponieważ punktem odpowiednim punktowi *t*, jest punkt leżący w nieskończoności na prostej łączącej punkt *s* z punktem *t*, a punkt w nieskończoności należy do rzutu poziomego paraboli

więc prosta *st* przedstawia kierunek asymptotyczny tego rzutu, lub co na jedno wychodzi, prosta *st* przedstawia kierunek osi szukanego rzutu, zaś prosta *sk* prostopadła do *st* wyznacza kierunek stycznej w wierzchołku rzutu. Wyznaczenie wierzchołka sprowadza się więc do znalezienia punktu dotknięcia stycznej do rzutu paraboli, a równoległej do prostej *sn*. Żeby znaleźć ten punkt dotknięcia, szukajmy punktu odpowiedniego punktowi leżącemu w nieskończoności na prostej *sn*, który znajduje się w punkcie *k* przecięcia się prostej *sn* z prostą ograniczającą L.

Obecnie więc należy wykreślić przez punkt *k* styczne do podstawy C ostrokręgu, i szukać punktów odpowiednich ich punktom dotknięcia; otóż ponieważ jedną z tych stycznych jest właśnie prosta ograniczająca L, której odpowiednią jest prosta w nieskończoności płaszczyzny, wyznaczającej wierzchołek paraboli w nieskończoności, należy więc, nakreśliwszy drugą styczną $k\Sigma$, wyznaczyć punkt odpowiedni jej punktowi dotknięcia Σ.

Ten ostatni punkt znajdziemy, zważając, że prosta Σk spotyka oś jednokładności P w punkcie *a*, który jest swym własnym odpowiednim, a zaś punkt *k* tej prostej ma odpowiedni mu punkt w nieskończonosci na prostej *sk*, a więc prosta równoległa do *sk* a przechodząca przez punkt *a* jest odpowiednią stycznej, punkt zaś Σ_1 spotkania się tej ostatniej prostej z prostą $s\Sigma$ jest szukanym punktem dotknięcia.

Jeżeli więc ostatecznie nakreślimy przez punkt Σ_1, prostę $\Sigma_1 x$ równoległą do *st*, otrzymamy wierzchołek rzutu Σ_1, jego oś $\Sigma_1 x$ i styczną w wierzchołku $\Sigma_1 a$.

616. Przecięcie płaskie walca. — Wiemy, że rzut podstawy na jakąkolwiek płaszczyznę i rzut przecięcia płaskiego na tęż płaszczyznę w przypadku walca, są w powinowactwie (§ **252**), gdyż środek jednokładności leży w nieskończoności na rzucie tworzących walca.

Jeżeli więc oznaczymy przez C ślad poziomy walca, przez P ślad płaszczyzny, a przez *mg* rzut poziomy jednej z jego tworzących (*fig.* 367, tab. XLI), to przypuszczając, że rzut poziomy m_1 punktu przecięcia się tejże tworzącej z daną płaszczyzną sieczną został poprzednio znaleziony, będziemy mogli wyznaczyć punkt odpowiedni jakiemukolwiek punktowi μ podstawy C, i styczną odpowiadającą. Żeby zrobić odrazu to podwójne wykreślenie, przesuńmy przez *m* równoległę $m\alpha$ do P, to odpowiednia tej prostej spotykającej oś jednokładności w nieskończoności, będzie prosta $m_1\alpha_1$ do niej równoległa.

Żeby znaleźć teraz odpowiednię stycznej, przechodzącej przez punkt μ, do krzywej zauważmy, że ta styczna spotyka P i $m\alpha$ w punktach *a* i *b*, z których pierwszy jest swym własnym odpowiednim, drugi zaś *b* ma swój odpowiedni w punkcie przecięcia się m_1, α_1 z prostą łączącą punkt *b* ze środkiem jednokładności, a który w tym przypadku leży w nieskończoności na prostej *mg*.

Styczną szukaną jest więc prosta ab_1, a punkt dotknięcia leży na przecięciu się μ_1 samej stycznej z prostą, łączącą punkt μ ze środkiem jednokładności.

ROZWINIĘCIE OSTROKRĘGU I WALCA, PRZEKSZTAŁCONE PRZECIĘĆ PŁASKICH TYCH POWIERZCHNI

617. Wiadomosci wstępne. — Ponieważ powierzchnie boczne stożkowe lub walcowe mogą być uważane jako granice powierzchni bocznych ostrosłupa lub graniastosłupa, a zatem są one, jak te ostatnie, rozwijalnemi na płaszczyznie (§ **339**).

Jakakolwiek linija nakreślona na powierzchni rozwijalnej, zamienia się po rozwinięciu powierzchni

na inną liniję, zwaną *przekształconą z rozwinięcia* pierwszej, lub po prostu *przekształconą* linii danej.

Podamy tu kilka własności *przekształconych* linij nakreślonych na ostrokręgu, a wszystkie one stosować się będą w zupełności także i do powierzchni walcowych, które są powierzchniami stożkowemi mającemi wierzchołek w nieskończoności na kierunku danym.

618. **Twierdzenie zasadnicze.** — *Rozwijając powierzchnię stożkową, spostrzegamy: 1° że jakakolwiek część linii nakreślonej na tej powierzchni, ma tęż samą długość co część odpowiadająca linii przekształconej, 2° że kąt między przekształconemi dwu linij jakichkolwiek, nakreślonych na powierzchni, jest równy kątowi utworzonemu przez same linije* (fig. n_8).

Uważmy powierzchnię boczną SABCD i t. d. ostrosłupa i liniję łamaną $\alpha\beta\gamma\delta$ i t. d., której wierzchołki leżą na jego krawędziach.

Dla rozwinięcia ostrosłupa wystarcza, zostawiając ścianę SAB nieruchomą, sprowadzić ścianę SBC na płaszczyznę tamtej, a to obracając tę ostatnię naokoło ich krawędzi wspólnej SB, a następnie robiąc kład na tęż samą płaszczyznę wszystkich innych ścian. Wskutek tego długość każdego boku linij $\alpha\beta\gamma\delta$ i td.; a tem samem i linij $\alpha\beta\gamma\delta$ i t. d., nie zmieni się, co dowodzi dostatecznie, przechodząc do granicy, pierwszej części twierdzenia.

Drugiej zaś dowiedziemy zważając: 1° że kąty utworzone przez boki $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, i t. d. z krawędziami bocznemi, które te boki spotykają, pozostają niezmienne po rozwinięciu powierzchni, i 2° że w gra-

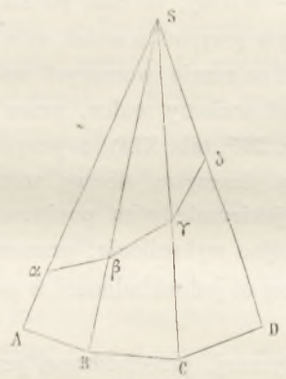

Fig. n_8.

nicy, przedłużenia tych właśnie boków są stycznemi do linii łamanej w granicy, a zatem, że kąt utworzony przez styczną w jakimkolwiek punkcie krzywej nakreślonej na powierzchni stożkowej, z tworzącą przechodzącą przez ten punkt, pozostaje niezmiennym po rozwinięciu powierzchni.

Dla zastosowania tej własności do dwu krzywych jakichkolwiek powierzchni stożkowej, wystarczy dodać, że kąt dwu krzywych, który z określenia jest równym kątowi utworzonemu przez styczne przechodzące przez ich punkt przecięcia, składa się z summy lub różnicy kątów utworzonych przez te styczne, z tworzącą prostolinijną powierzchni, a przechodzącą przez punkt spotkania się krzywych uważanych.

619. **Twierdzenie.** — *Wszelkiemu punktowi obranemu na przecięciu płaskiem ostrokręgu, w którym płaszczyzna tego przecięcia jest normalną do powierzchni ostrokręgu, a nie jest prostopadłą do krawędzi tej powierzchni przechodzącej przez ten punkt, odpowiada, na rozwinięciu ostrokręgu, punkt przecięcia przekształconej przecięcia.*

Uważmy jakikolwiek ostrokrąg mający wierzchołek w punkcie S (fig. n_9), a dla ułatwienia przyjmijmy za kierownicę powierzchni jej przecięcie C płaszczyzną sieczną P, którą przyjmiemy za normalną w punkcie M do powierzchni ostrokręgu.

Przedewszystkiem zastąpmy powierzchnię ostrokręgu powierzchnią ostrosłupa SABDE i t. d. opisanego na ostrokręgu, ustawiając jednę z jego ścian SBD na płaszczyznie stycznej do ostrokręgu podług krawędzi SM. Jeżeli teraz zrobimy kład ścian SDE, SAB na przedłużoną płaszczyznę ściany SBD, obracając je naokoło odpowiednich osi obrotu SD i SB, to będziemy mogli rozwinąć przedstawioną część ostrosłupa opisanego, a przechodząc do granicy będziemy mogli znaleźć w blizkości punktu M kształt przekształconej krzywej C. Przedłużmy bok BD w jednę i drugą stronę, to prosta KF tak znaleziona będzie rzutem wspólnym, na płaszczyznę P, krawędzi bocznych SB, SD przedłużonych;

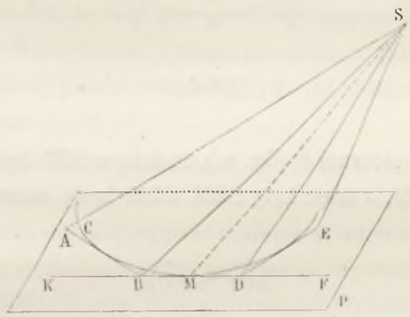

Fig. n_9.

że zaś te krawędzie tworzą z ich rzutem wspólnym dwa kąty, z których jeden SDF jest koniecznie ostrym, a drugi SBK rozwartym, więc pierwszy z nich jest najmniejszym ze wszystkich kątów, jakie prosta SD może utworzyć z prostemi leżącemi na płaszczyznie, a drugi zaś największym ze wszystkich kątów, jakie prosta SB może utworzyć z prostemi tejże płaszczyzny, czyli że mamy

$$\widehat{SDF} < SDE,$$
$$SBK > SBA.$$

Z tego co poprzedza widzimy łatwo, że po dokonaniu kładu wskazanego powyżej, punkt E przypadnie pod prostą KF a punkt A nad nią.

Po rozwinięciu więc ostrosłupa, boki jego podstawy przedstawią położenie podane na figurze n_{10}.

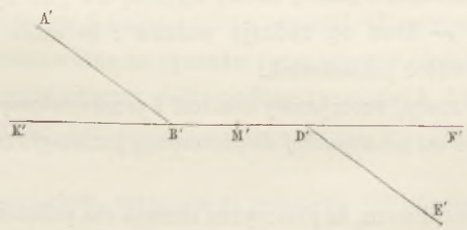

Fig n_{10}.

Jeżeli teraz przejdziemy do granicy to znajdziemy, że prosta stała KF (fig. n_9) lub K'F' (fig. n_{10}), est styczną do przekształconej, a nadto, że punkta jej leżące po jednej i po drugiej stronie punktu

M′ (fig. n_{10}) leżą także po jednej i po drugiej stronie stycznej, czyli, że przekształcona ma punkt przegięcia w punkcie M′ (fig. n_{10}).

Przypuszczając obecnie z zachowaniem powyższych notatek, że tworząca SM i płaszczyzna styczna

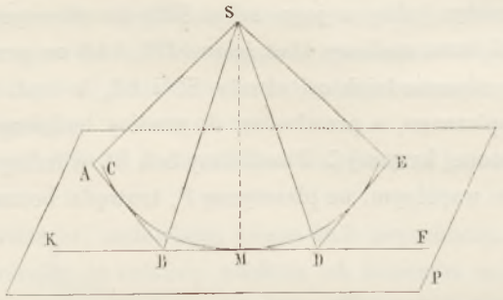

Fig. o_1.

SKF prostopadłe do płaszczyzny siecznej P (fig. o_1), to ściana SBD będzie teraz utworzoną przez dwa trójkąty prostokątne w punkcie M, a więc kąty SBM, SDM będą ostre, zaś kąty SBK, SDF rozwarte, czyli będzie, że kąt

$$\widehat{SDF} > \widehat{SDE},$$

$$\widehat{SBK} > \widehat{SBA}.$$

Jeżeli więc zrobimy kład, jak powyżej, ścian SAB, SDE obracając je naokoło odpowiednich osi obrotu SB, SD, na płaszczyznę styczną SKF, to punkta A i E przypadną ponad KF, przekształcona zaś

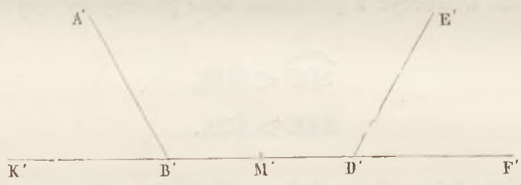

Fig. o_2.

podstawy ABDE przyjmie kształt podany na figurze o_2, i w granicy w blizkości punktu M′ i po obu jego stronach przyjmie ona położenie z jednej strony stycznej K′F′, co było do dowiedzenia.

620. Rozwinięcie walca. — Dwa są rodzaje walców : 1° walec zwyczajny, najprostszy t. j. walec prosty obrotowy, i 2° walec jakikolwiek.

621. Zadanie. — *Znaleźć rzuty, rzeczywistą wielkość i przekształconę krzywej wspólnego przecięcia się walca prostego obrotowego, o osi prostopadłej do płaszczyzny poziomej rzutów, z płaszczyzną jakąkolwiek* (*fig.* 368, tab. XLI).

Przyjmijmy, co zawsze jest możliwem, że płaszczyzna sieczna ma położenie prostopadłe do płaszczyzny pionowej rzutów, gdyż w każdym razie możemy ją sprowadzić do tego szczególnego położenia, obracając ją naokoło osi walca. Śladem poziomym walca jest okrąg koła przedstawiony na figurze, a powierzchnia jego ma swój rzut poziomy na tym śladzie. Rzutem pionowym walca ograniczonego z jednej strony

jego śladem poziomym, a z drugiej strony podstawą równoległą do tego śladu, jest prostokąt $a'b', a'_1b_1$. Niech $P\alpha P'$ przedstawia płaszczyznę sieczną.

622 Rzuty przecięcia. — Rysunek tak jest ustawiony, że daje odrazu rzuty krzywej wspólnego przecięcia, któremi są: na płaszczyznie poziomej rzutów dany okrąg koła, zaś na pionowej odcinek $e'g'$, zawarty w prostokącie $a'b'b_1'd_1'$ śladu $\alpha P'$.

623. Rzeczywista wielkość przecięcia. — Dla zmniejszenia miejsca zajętego na figurze przez rzeczywistą wielkość przecięcia, robimy zazwyczaj jego kład na płaszczyznę równoległą do płaszczyzny poziomej rzutów, a przechodzącej przez jego środek ω, ω'. Płaszczyzna ta ma ślad pionowy na równoległej Q do osi rzutów, a przechodzącej przez punkt ω'.

W tym celu, uważmy jakikolwiek punkt m, m' krzywej wspólnego przecięcia i zróbmy jego kład naokoło prostej ω', $\omega' z$, a znajdziemy, że rzut jego pionowy przypada w punkcie m_1' przecięcia się Q' z łukiem koła mającego środek w punkcie ω' i punkt przejścia w punkcie m', rzut zaś jego poziomy przypada w punkcie m_1 przecięcia się prostej równoległej do osi rzutów, a przechodzącej przez punkt m, z linią rzutów przechodzącą przez punkt m'_1.

624. Styczna do krzywej wspólnego przecięcia w rzeczywistej wielkości. — Szukajmy stycznej w punkcie m_1, m'_1. Otóż wiedząc, że przed zrobieniem kładu rzut poziomy stycznej szukanej jest styczną do mn danego okręgu koła, dotykającą go w punkcie n, a ten nie zmienia swego położenia podczas robienia kładu, zatem, dla znalezienia rzutu poziomego stycznej szukanej, dostatecznem będzie połączyć punkt n z punktem m_1 linią prostą. Rzut pionowy tej stycznej, który zchodzi się ze śladem Q', nie przedstawia nic ciekawego.

Wiemy z geometryi analitycznej, że krzywa wspólnego przecięcia jest elipsą, a stosując do rysunku stycznej metodę przekształcenia figur, łatwo dowiedziemy jednej z własności dobrze już znanych, a służącej do kreślenia stycznej do elipsy.

625. Wierzchołki krzywej wspólnego przecięcia w rzeczywistej wielkości. — Wierzchołki te znajdują się łatwo gdyż, jak to wskazuje symetrya figury, mają one za rzuty (a, e'), (b, g'), (i, ω'), (j, ω'), a kłady dwu ostatnich, jako leżących na osi obrotu, pozostają w ich rzutach, gdy tymczasem pierwszych przypadają w (e_1, e_1'), (g_1, g'_1).

626. Ogniska krzywej wspólnego przecięcia w rzeczywistej wielkości. — Punkta dotknięcia się płaszczyzny $P\alpha P'$ z dwu kulami wpisanemi w walec a stycznemi do niej, są podług Daudelin'a i Quetelet'a, ogniskami przecięcia. Na naszym rysunku przedstawiliśmy tylko jedno z nich f, f', którego kład znajduje się w punkcie f_1, f'_1.

627. Kierownice krzywej wspólnego przecięcia w rzeczywistej wielkości. — Na zasadzie twierdzenia powyżej wzmiankowanego, proste te są przecięciem się płaszczyzny $P\alpha P'$ z płaszczyznami krzywych dotknięcia danego walca z kulami pomocniczemi, służącemi do znalezienia ognisk. Jedna z takich prostych została przedstawioną na rysunku przez jej rzut pionowy d' i przez kład d_1, d_1'.

628. Rozwinięcie walca. — Otwórzmy walec podług tworzącej b, $b'b'_1$ i rozwińmy go na płaszczyznie pionowej rzutów, ustawiając przekształconę jego podstawy, która jest prostolinijną, na osi rzutów.

Rozwinięcie walca jest prostokątem, mającym za podstawę $\beta\beta''$ równe długości okręgu koła $aibj$, a za wysokość $\beta\beta_1$ t. j., wysokość walca. Długość $\beta\beta''$ może być obliczoną, lecz częstokroć łatwiejszym jest następujący sposób rysunkowy. Ponieważ wartość π przybliżona na pół setnej z nadmiarem jest równą $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, więc za przybliżoną wartość okręgu koła możemy wziąć

$$2R\,(\sqrt{2} + \sqrt{3}),$$

które to wyrażenie przedstawia dwa razy wziętą sumę boku trójkąta równobocznego i boku kwadratu a wpisanych w podstawę. Na tej zasadzie wykreślenie $\beta\beta''$, a tem samem i rozwinięcie walca, nie przedstawia trudności.

629. Znalezienie jakiegokolwiek punktu przekształconej wspólnego przecięcia. — Robiąc to dla na punktu m, m', znajdziemy jego położenie za pomocą odciętej krzywolinijnej bm, liczonej od początku b podstawie walca i za pomocą rzędnej prostolinijnej, liczonej na tworzącej tegoż walca; ponieważ rzędna ta, w rzeczywistej wielkości, równa się $m'm'_2$, jeżeli więc, pamiętając że długość jakiejkolwiek linij jest równą długości jej przekształconej (§ **618**, 1°), odetniemy długość łuku bm na $\beta''\mu_2$, i weźmiemy na prostopadłej do osi rzutów przechodzącej przez punkt μ_2, długość $\mu\mu_2$ równą mm'_2, to znajdziemy punkt m, m' na rozwinięciu w punkcie μ.

W taki sposób wyznaczywszy dostateczną liczbę punktów, znajdziemy przekształconę.

Rozwinięcie łuku bm na $\beta''\mu_2$ może być dokonanem, podstawiając za łuk liniję łamaną wpisaną weń, którą następnie rozwijamy na $\beta\mu$ zaczynając od punktu β'' na osi rzutów. Lecz jest jeszcze inny sposób łatwiejszy i dokładniejszy rozwijania łuków, a mianowicie : obieramy punkta, których rzuty poziome dzielą koło podstawy na pewną liczbę części równych, następnie zaś, żeby otrzymać odrazu wszystkie odcięte krzywolinijne w rozwinięciu, dzielimy na tyleż części równych długość $\beta\beta''$ poprzednio wyznaczoną a wreszcie w tak otrzymanych punktach podziału kreślimy rzędne im odpowiadające.

630. Styczna w jakimkolwiek punkcie przekształconej. — Obrawszy np. punkt μ, i opierając nasze wykreślenie na twierdzeniu zasadniczem (§ **618**, 2), widzimy, że dostatecznem będzie nakreślić w punkcie μ kąt w rzeczywistej wielkości, zawartej między styczną w punkcie m, m' a tworzącą walca, i wstawić go w trójkąt, który narysujemy także w rzeczywistej wielkości na rozwinięciu. Jeżeli zauważymy, że ślad poziomy stycznej znajduje się na przecięciu t prostych mt i αP, więc dla nakreślenia kąta w rzeczywistej wielkości, uciekniemy się do trójkąta w przestrzeni Mmt prostokątnego w punkcie m; otóż ponieważ na rozwinięciu, $\mu\mu_2$ przedstawia już przekształconę linii Mm, pozostaje więc odciąć na osi rzutów, i w kierunku, który łatwo znajdziemy rozpatrując figurę, długość mt na $\mu_2\tau$ i przesunąć prostę $\mu\tau$, która przedstawi styczną szukaną.

631. Punkt najwyższy i najniższy przekształconej. — Ponieważ w wierzchołkach (a, e'), (b, g') osi wielkiej, styczne do elipsy tworzą z tworzącemi walca kąty proste, które pozostaną prostemi na rozwinięciu, więc punktami szukanemi są punkta ε, γ_1, γ'_1, które te wierzchołki wyznaczają.

632. Punkta przegięcia przekształconej i styczne w tych punktach. — Ponieważ w punktach (i, ω'), (j, ω') płaszczyzny styczne do walca są równoległe do płaszczyzny pionowej rzutów, a tem samem prostopadłe do płaszczyzny siecznej PαP', więc twierdzenie podane w paragrafie **619** może tu być zastosowanem, a punkta odpowiednie ω_1, ω_2, są właśnie punktami przegięcia przekształconej.

Żeby znaleźć styczną do przekształconej w punkcie ω_2, należy nakreślić przez ten punkt prostę tworzącą z pionową kąt równy kątowi, jaki zamyka tworząca walca ze styczną do krzywej w przestrzeni w punkcie i, ω', a ponieważ ten ostatni kąt ma za rzut w rzeczywistej wielkości kąt $\alpha\omega' j$, więc styczną otrzymamy, kreśląc przez punkt ω_2 prostę równoległą $\omega_2\pi$ do αP'. Że zaś figura jest symetryczną względem pionowej przechodzącej przez punkt ε, więc styczną w drugim punkcie przegięcia ω_1 znajdziemy łatwo.

633. Przekształcona jest sinusoidą. — Żeby dowieść, że przekształcona jest sinusoidą, szukajmy równania miejsca geometrycznego punktu μ, a w tym celu przyjmijmy za początek spółrzędnych punkt przegięcia ω_2, zaś osie $\omega_2 x$, $\omega_2 y$ odpowiednio równoległe do osi rzutów i do tworzących walca; nakreśliwszy nadto spółrzędne x, y punktu μ, i oznaczywszy przez φ kąt utworzony przez płaszczyznę PαP'

z poziomem, a przez R promień walca, to jeżeli przedłużymy proste mm', mm_1 pierwszę do spotkania się z Q' w punkcie m'_3, a drugę do punktu k, w którym ona spotyka ij, otrzymamy jedno równanie

$$-y = \mu\mu_1 = m'm'_3 = m'_3\omega' \operatorname{sty}\varphi = mk \operatorname{sty}\varphi = \mathrm{R} \operatorname{wst} m\omega k \operatorname{sty}\varphi,$$

czyli

$$-y = \mathrm{R} \operatorname{wst} \frac{\text{łuk } im}{\mathrm{R}} \operatorname{sty}\varphi, \tag{1}$$

zaś drugie równanie :

$$-x = \omega_2\mu_1 = \text{łuk } im. \tag{2}$$

Rugując łuk im z tych dwu równań (1) i (2) znajdziemy

$$y = \mathrm{R} \operatorname{sty}\varphi \operatorname{wst} \frac{x}{\mathrm{R}},$$

które to równanie przedstawia właśnie szukane równanie miejsca geometrycznego i ma kształt ogólny następujący :

$$y = c \operatorname{wst} c''x,$$

a to ostatnie jest właśnie równaniem sinusoidy.

Zastosowanie tego równania przy kreśleniu aparatu w kamieniarce (mosty skośne — aparat helisoidalny) jest jedynym powodem podanego tu rozwinięcia w całej ogólności.

634. Zadanie. — *Nakreślić*: 1° *w rzutach i w rzeczywistej wielkości przecięcie proste jakiegokolwiek walca*, i 2° *rozwinięcie walca, jakoteż przekształcone jednej z jego podstaw i krzywej przecięcia go płaszczyzną jakąkolwiek.* — Ponieważ różne punkta figury do rozwinięcia, są, jak w poprzedzającem zadaniu, umieszczone na rysunku za pomocą dwu spółrzędnych, liczonych, jedna na tworzących walca, a druga na jednej z tworzących powierzchni, której przekształcona jest łatwą do wykreślenia, to jest na krzywej przecięcia prostego walca, jej bowiem przekształconą jest linija prosta prostopadła do przekształconych tworzących, więc należy zawsze przed rozwinięciem, nakreślić przecięcie proste walca.

KREŚLENIE PRZECIĘCIA PROSTEGO JAKIEGOKOLWIEK WALCA

635. Żeby wykreślenie było więcej zajmującem, obierzmy walec mający za podstawę okrąg koła *abcd* (*fig.* 369, tab. XLII), leżący na płaszczyznie poziomej rzutów, aczkolwiek rozumowanie odnoszące się do rozwinięcia, jest zupełnie niezależnem od kształtu podstawy. Dla uzupełnienia rysunku walca, weźmy nadto rzut poziomy au jednej z jego tworzących i wzniesienie tego punktu tej linii, którego rzutem jest punkt u, a dla uniknienia w rysunku linij niepotrzebnych do dowodzenia, przesuńmy prostę au przez środek o koła danego.

Dla łatwego zastosowania sposobu podanego w paragrafie **571**, ustawmy oś rzutów xy w położeniu równoległem do rzutu poziomego tworzących walca, i rzućmy pionowo punkta a i u do punktu a' na osi rzutów xy i do punktu u' mającego wzniesienie dane, to łącząc punkta a' i u' liniją prostą, otrzymamy jednę z linij pionowego obwodu pozornego walca, a sam rysunek wskaże sposób znalezienia drugiej.

Jeżeli teraz z punktu p, dowolnie obranego na osi rzutów xy, nakreślimy proste odpowiednio pro-

stopadłe do rzutów au i $a'u'$ tworzącej, to znajdziemy ślady $P_\alpha P'$ przecięcia prostego, którego rzut pionowy $a'_1c'_1$ będzie (natychmiast wyznaczony przez odcinek $a'_1c'_1$ prostej P', zawarty w pionowym obwodzie pozornym walca) leżał na śladzie pionowym tejże płaszczyzny.

636. Rzut poziomy jakiegokolwiek punktu przecięcia. — W położeniu dowolnem na $a'_1c'_1$ obierzmy rzut pionowy m'_1, jednego z punktów przecięcia prostego, i nakreślmy : 1° rzut pionowy $n_1' m'$ tworzącej przechodzącej przez punkt obrany, 2° ślady poziome m, k linij odpowiadających temu rzutowi pionowemu, 3° rzuty poziome g, g_1, tych linij i 4° punkta m_1, k_1 leżące na przecięciu się linii rzutów przechodzącej przez punkt m'_1 z prostemi g i g_1, to znajdziemy w tak nakreślonych punktach m_1, k_1 dwa jakiekolwiek punkta przecięcia prostego w rzucie poziomym.

W sposób podobny nakreślić można taką liczbę punktów, jakiej potrzeba do dokładnego przedstawienia rzutu poziomego przecięcia prostego, lub raczej jego kładu, który jest jedynie potrzebnym do znalezienia przekształconej tego przecięcia.

637. Kreślenie stycznej do przecięcia prostego. — W celu znalezienia stycznej do przecięcia prostego, szukajmy rzutu poziomego stycznej w punkcie m_1, m'_1; otóż, ponieważ płaszczyzna styczna podług tworzącej $m'm'_1$, mm_1 ma za ślad poziomy styczną R w punkcie m do koła podstawy, a punkt przecięcia się R z P jest śladem poziomym stycznej, otrzymamy więc szukany rzut poziomy tejże kreśląc prostę m_1t.

638. Wierzchołki rzutu poziomego. — Widzimy przedewszystkiem, że płaszczyzna obrazu przechodząca przez oś walca, jest zarazem płaszczyzną symetryi przecięcia i jego rzutu poziomego, że zatem rzuty poziome a_1, c_1 dwu punktów (a_1, a'_1), (c_1, c'_1) tego przecięcia, leżących na tej płaszczyźnie, są rzutami poziomemi dwu wierzchołków i dwoma wierzchołkami rzutu poziomego. Następnie widzimy, że w punktach (d_1, b'_1), (b_1, b'_1) przecięcia, leżących na obwodzie pozornym poziomym walca, styczne tak w przestrzeni jakoteż i w rzucie poziomym są odpowiednio równoległe do osi elipsy a_1c_1, $a'_1c'_1$ i do a_1c_1 jej rzutu poziomego, a ztąd wynika, że punkta b_1, d_1 są zarazem, rzutami poziomemi dwu prostopadłych wierzchołków i wierzchołkami rzutu poziomego.

639. Rzeczywista wielkość przecięcia prostego. — Przedewszystkiem należy zrobić kład płaszczyzny PpP' na płaszczyznę poziomą rzutów.

Następnie robiąc kład punktu m_1, m'_1 znajdziemy : 1° w punkcie M'_1 przecięcia się osi rzutów xy z łukiem koła, mającego środek w punkcie p a punkt przejścia w punkcie m'_1, kład rzutu pionowego tegoż punktu, i 2° w punkcie przecięcia się dwu prostych, z których jedna jest przedłużeniem prostej g, a druga prostopadłą do osi rzutów, przechodzącą przez punkt M'_1, znajdziemy kład M_1 punktu uważanego.

W podobny sposób przedstawione zostały na figurze, wierzchołki A_1, B_1, C_1, D_1 elipsy w kładzie.

Ponieważ ślad t stycznej w punkcie m_1, m'_1 pozostaje nieruchomym robiąc kład figury, więc prosta łącząca ten punkt z punktem M_1 jest styczną do kładu w tymże punkcie M_1.

640. Przecięcie jakąkolwiek płaszczyzną pochyłą QqQ'. — Wyznaczenie jednego z punktów leżących na przecięciu. — Jeżeli powierzchnie pomocnicze są płaszczyznami obrazu, przechodzącemi przez tworzące, które już służyły do wyznaczenia przecięcia prostego, to ta z płaszczyzn, która przechodzi przez tworzącę mm_1, $m'm'_1$ spotyka Q w punkcie n, n', zaś QqQ' podług prostej obrazu mającej za rzut poziomy g, a pionowy na prostej równoległej do Q', przechodzącej przez punkt n'. Punkt n_1, n'_1 spotkania się tej prostej obrazu z tworzącą $m'm'_1$, m_1m jest właśnie punktem szukanym przecięcia.

641. Wyznaczenie stycznej. — Ponieważ punkt h przecięcia się śladów poziomych Q i R jest śla-

dem poziomym stycznej szukanej, którego rzutem pionowym jest punkt h', rzutami więc stycznej są proste hn_1, $h'n'_1$.

642. Średnice sprzężone rzutu pionowego. — Postępując z dwiema płaszczyznami pomocniczemi obrazu, dotykającemi walca, i z płaszczyzną przechodzącą przez jego oś w ten sam sposób, jakeśmy postąpili z płaszczyzną pomocniczą jakąkolwiek, znajdziemy na płaszczyznie pionowej rzutów punkta r'_1, s'_1, l'_1, l'_2, a z nich dwa pierwsze są punktami granicznemi, w których proste $r'r'_1$, $s's'_1$, są stycznemi na zasadzie własności ogólnej już znanej (§ 579), zaś dwa pozostałe są punktami obwodu pozornego w rzucie pionowym i mają za styczne linije $c'l'_1$, $a'l'_2$ tworzące ten obwód; wynika ztąd że proste $l'_1l'_2$, $s'_1r'_1$, odpowiednio równoległe do boków równoległoboku $1'2'3'4'$, opisanego na rzucie pionowym elipsy szukanej, są właśnie dwiema średnicami sprzężonemi tego rzutu.

Wyznaczywszy sposobem podanym powyżej, dostateczną liczbę punktów rzutu pionowego przecięcia walca, połączyliśmy je liniją ciągłą, żeby w ten sposób przedstawić rzut pionowy elipsy przecięcia, rzut zaś jej poziomy jako nieużyteczny do rozwinięcia, nie został nakreślonym.

Możnaby także nie kreślić rzutu pionowego krzywej, z tym jednakże warunkiem, żeby punkta jego, jedynie użyteczne do rozwinięcia, były znane.

643. Rozwinięcie walca. — W wykreśleniach obecnie podanych, wszystko tak zostało ułożone, żeby nietylko ułatwić sam rysunek lecz nadewszystko, żeby otrzymać odrazu elementa potrzebne do działań następnych. Skutkiem tego, odcięte krzywolinijne punktów mogą być brane wprost z elipsy $A_1B_1C_1D_1$ i zamienią się na prostolinijne po rozwinięciu, rzędne prostolinijne liczone na tworzących walca pozostaną prostolinijnemi na rozwinięciu i nadto przedstawią się w rzucie pionowym w rzeczywistej wielkości.

Mówimy tu z naciskiem o korzyściach, jakie przedstawia stosowne ułożenie figury, gdyż w ten sposób chcemy zwrócić uwagę czytelnika na to, że przed rozpoczęciem każdego z licznych wykreśleń należy zawsze naprzód obmyśleć całość, tak dla skrócenia wykreślenia jak i dla ułatwienia zrozumienia figury.

644. Przekształcona przecięcia prostego. — Powiedzieliśmy już wyżej, że jest to linija prosta prostopadła do przekształconych tworzących, a zatem ustawimy ją, dla ułatwienia zrozumienia rysunku, na przedłużeniu prostej P'.

Przypuściwszy, że walec jest otworzony podług tworzącej aa_1, $a'a'_1$, skutkiem czego punkt a_1, a'_1 rozdwoi się, obierzmy w położeniu dowolnem na P', punkt α'_1 przedstawiony na rozwinięciu przez punkt a_1, a'_1, a następnie odetnijmy $\alpha'_1\beta_1$ równe łukowi wyprostowanemu A_1B_1 to odcinając od punktu β_1 długości $\beta_1\gamma_1$, $\gamma_1\delta_1$, $\delta_1\alpha''$, to jest trzy razy wziętą długość wyprostowaną $\alpha'_1\beta_1$, ćwiartki elipsy przecięcia prostego, dopełnimy rozwinięcia przecięcia prostego.

645. Przekształcone podstawy i przecięcia pochyłego. — *Wykreślenie jednoczesne jednego z punktów każdej przekształconej.* — Zróbmy wykreślenie dla trzech punktów (m_1, m'_1), (m, m'), (n_1, n'_1), z których pierwszy winien służyć do wyznaczenia odciętej wspólnej dwu pozostałym, a w tym celu, weźmy dla punktu m_1, m'_1 od punktu γ_1 i pomiędzy punktami γ_1 i δ_1, długość równą łukowi C_1M_1, który wyprostujemy, zastępując go liniją łamaną, to znajdziemy w ten sposób punkt μ_1.

Zajmijmy się obecnie wyznaczeniem rzędnych; otóż, ponieważ na rzucie pionowym są one w rzeczywistej wielkości na $m_1m'_1$, $m_1n'_1$, a więc ustawiwszy w należytem położeniu punkta szukane, które znajdziemy, biorąc przecięcie się prostej prostopadłej do P', przechodzącej przez punkt μ_1 z dwiema równoległemi do tejże prostej P' wychodzącemi z punktów m', n', otrzymamy: 1° jeden z punktów t. j. μ, przekształconej podstawy *abcd* i 2° jeden z punktów t. j. ν_1 przeszktałconej przecięcia pochyłego.

646. Styczna w jednym z punktów przekształconej podstawy. — Dla znalezienia stycznej w punkcie μ, wystarcza nakreślić prostę nachyloną do $\mu\mu_1$ pod kątem równym rzeczywistej wielkości kąta, którego rzut poziomy m_1mt leży na płaszczyznie stycznej, mającej za rzut poziomy R; trójkąt tegoż nazwiska jest rzutem poziomym trójkąta, który, dla znalezienia kąta szukanego, można narysować w rzeczywistej wielkości i w stosownem położeniu na rozwinięciu. Trójkąt ten jest prostokątnym w punkcie m_1, m'_1 zaś jeden z boków kąta prostego znajduje się już na rozwinięciu w rzeczywistej wielkości na $\mu\nu_1$, a drugi bok tegoż kąta równa się, w rzeczywistej wielkości, swemu własnemu kładowi M_1t.

Styczną szukaną znajdziemy więc, odcinając na P' w kierunku łatwym da oznaczenia długość $\mu_1\tau$ równą tM_1 i kreśląc w końcu prostę $\mu\tau$.

647. Styczna w jednym z punktów przekształconej przecięcia. — Styczna w punkcie ν_1 tworzy z prostą $\nu_1\mu_1$ kąt równy kątowi jaki tworzy styczna w punkcie n_1, n'_1 z tworzącemi walca. Dla znalezienia go, weźmy punkt spotkania się stycznej do przecięcia pochyłego a idącej przez punkt n_1, n'_1 ze styczną do przecięcia prostego, a przechodzącą przez punkt m_1, m'_1, to punkt ten będzie miał rzut poziomy w punkcie e, który wraz ze styczną do przecięcia prostego, będzie miał za kład punkt E_1.

Kąt en_1m_1 jest rzutem poziomym kąta, który chcemy ustawić na rozwinięciu; otóż znajdziemy go, kreśląc trójkąt prostokątny, w którym jeden bok kąta prostego jest równym rzeczywistej wielkości odcinka tworzącej, mającej za rzut poziomy m_1n_1, drugi zaś jest rzutem poziomym odcinka stycznej do przecięcia prostego, mającego za rzut poziomy m_1e. Pierwszy z tych boków jest już ustawiony należycie na rozwinięciu w $\mu_1\nu_1$, drugi zaś w rzeczywistej wielkości równa się prostej M_1E_1, zkąd widzimy, że odcinając na P, w kierunku wskazanym przez figurę, długość M_1E_1 równą $\mu_1\varepsilon_1$ i wreszcie łączącą punkt ε_1 z ν_1 otrzymamy styczną żądaną.

648. Punkta najbliższe i najbardziej oddalone przecięcia prostego. — Są to punkta, w których rzędna jest maximum, a ich styczne na rozwinięciu są równoległe do $\alpha'_1\alpha''_1$. Względnie do podstawy *abcd*, linije te znajdzie się łatwo, gdyż styczne w punktach *a* i *c* do podstawy są prostopadłe do tworzących, a więc te punkta ustawione na rozwinięciu, wyznaczają punkta α', α'', γ, o które chodziło w zadaniu.

Dla przecięcia leżącego na płaszczyznie QqQ' znajdziemy je łatwo, wyznaczając: 1° prostę przecięcia się płaszczyzn (PpP'), (QqQ'), która jest prostą płaszczyzny QqQ' skierowaną, jak i styczne szukane, prostopadle do tworzących walca, 2° punkta dotknięcia stycznych do linii przecięcia się walca z płaszczyzną QqQ', a nakreślonych równolegle do prostej powyżej wyznaczonej (§ **609**) i w końcu, 3° punkta odpowiadające tym dotknięciom, na rozwinięciu.

649. Punkta przegięcia przekształconych i styczne w tych punktach. — Ponieważ odpowiednie tym punktom szukanym są punkta, w których płaszczyzna styczna do walca jest prostopadłą do płaszczyzny krzywej uważanej (§ **619**), znajdziemy je więc dla podstawy, ustawiając na rozwinięciu punkta *b*, *d*, które przypadną w β, δ, zaś w punkcie *d*, *d'* rzeczywistą wielkość kąta zawartego między styczną do podstawy a tworzącą, czyli kąt $b'_1d'm'$, zkąd wypada, że równoległa do xy, przechodząca przez punkt δ jest jedną ze stycznych przegięcia. Drugą znajdziemy przez symetryę, jak to widać odrazu z figury.

Dla przecięcia, którego znajdziemy przekształcone, wykreślimy punkta tej krzywej, w których płaszczyzna styczna do walca jest normalną do płaszczyzny QqQ'.

Podamy tu tylko sposób postępowania.

1° Przez punkt u, u' należy nakreślić prostę prostopadłą do płaszczyzny QqQ', i wyznaczyć jej ślad poziomy θ.

2° Należy nakreślić ślad poziomy $a\theta$ płaszczyzny prostopadłej do QqQ', a równoległej do tworzących walca.

3° Należy nakreślić w kierunku $a\theta$ styczne U_1, U_2 do podstawy, które będą śladami poziomemi płaszczyzn stycznych do walca prostopadłego do płaszczyzny QqQ'.

4° Należy nakreślić rzuty pionowe f'_1, f'_2 punktów przecięcia należących do tworzących dotknięcia płaszczyzn stycznych.

5° Postępując w ten sam sposób co dla punktu ν_1, należy ustawić na rozwinięciu, w punktach φ_1, φ_2, te punkta przecięcia, których rzuty pionowe są w punktach f'_1, f'_2, a znajdziemy właśnie w punktach φ_1, φ_2 szukane punkta przegięcia, w których styczne wykreślają się tak jak $\nu_1\varepsilon_1$.

650. Przekształcone punktów leżących na obwodach pozornych. — Punkta te, mające swe rzuty pionowe w punktach s'_1, r'_1, l'_1, l'_2 zostały umieszczone na rozwinięciu, jak inne punkta krzywej w punktach σ_1, ρ_1, λ_1, λ_2, λ'_2, a dwa ostatnie z nich są końcami części użytecznej krzywej.

Styczne do przekształconej w punktach σ'_1, ρ' są, jak to łatwo dostrzedz, jedna równoległą do Q', a druga równoległą do prostej symetrycznej do Q', względnie do kierunku rzutów pionowych tworzących walca.

651. Punkta przysposobione. — Dla przedłużenia krzywych poza ich części użyteczne, należy odciąć na przedłużeniu prostej $\lambda_2\lambda''_2$ łuk użyteczny znajdujący się przed λ_2, toż samo trzeba zrobić dla innych punktów końcowych.

ROZWINIĘCIE OSTROKRĘGU

652. Zadanie. — *Mając dany ostrokrąg obrotowy, nakreślić :* 1° *Rzuty i rzeczywistą wielkość jednego z jego przecięć eliptycznych,* 2° *rozwinięcie powierzchni i* 3° *przekształcone przecięcia.*

1° *Przecięcie eliptyczne ostrokręgu prostego obrotowego* (*fig.* 371, tab. XLII). — Oznaczmy przez s, s' rzuty wierzchołka ostrokręgu, przez *abcd* jego ślad poziomy, zaś przez $P\alpha P'$ płaszczyznę sieczną, którą zawsze ustawić możemy prostopadle do płaszczyzny pionowej rzutów, obracając ją naokoło osi powierzchni.

653. Rodzaj przecięcia. — Z samego poglądu na figurę widzimy, że płaszczyzna sieczna przecina tylko jednę powłokę powierzchni ostrokręgu, a więc że krzywa przecięcia jest elipsą.

654. Wykreślenie jednego z punktów przecięcia. — Należy obrać rzuty $s'e'$, se jednej z tworzących ostrokręgu i szukać punktu e'_1, e_1 w którym ona spotyka płaszczyznę daną. Jeżeli przy tem wykreśleniu będziemy brali po dwie tworzące, mające rzut pionowy wspólny, to znajdziemy odrazu dwa punkta krzywej; w ten sposób, jak to widać dostatecznie z figury, zostały wyznaczone jednocześnie punkta k_1,e'_1 i e_1, e'_1.

655. Rzut poziomy stycznej w jednym punkcie przecięcia. — Obrawszy np. punkt e_1,e'_1, to ślad poziomy płaszczyzny stycznej przechodzącej przez ten punkt jest styczną Q do podstawy ostrokręgu, a przechodzącą przez punkt e_1, że zaś ta styczna spotyka P w punkcie t, który jest śladem poziomym stycznej, łącząc więc punkt t z punktem e_1 liniją prostą, otrzymamy szukany rzut poziomy stycznej.

656. Punkta leżące na płaszczyznie profilu przechodzącej przez oś. — Ponieważ wykreślenie ogólne nie daje rozwiązania dla rzutów poziomych tych punktów, więc znajdziemy je, używając płaszczyzny poziomej pomocniczej, przechodzącej przez rzut pionowy g' tych punktów, albowiem

płaszczyzna ta przecina ostrokrąg podług równoleżnika, idącego przez punkt h', h, a którego środek rzutu poziomego przypada w punkcie s'; kreśląc więc rzut poziomy tego okręgu koła i oznaczywszy punkta g_1, g_2, w których on spotyka ślad poziomy uważanej płaszczyzny profilu, znajdziemy właśnie szukane punkta (g_1, g'), (g', g_2).

657. Wierzchołki rzutu poziomego i rzut poziomy wierzchołków. — Dwa pierwsze, to jest leżące na osi ogniskowej, w skutek symetryi figury, mają swe rzuty w punktach (a_1, a'_1), (c_1, c'_1), dwa zaś pozostałe, tak jak i środek powierzchni mają swe rzuty na płaszczyznie pionowej rzutów, w punkcie o', t. j. w środku prostej $a'_1c'_1$; otóż dla znalezienia ich rzutów poziomych, należy nakreślić dwie tworzące, których rzut wspólny, pionowy przechodzi przez punkt o', a następnie postąpić z niemi w sposób podany w paragrafie **654**, a punkta tak znalezione (s_1, o'), (s_2, o') będą właśnie wierzchołkami.

658. Ogniska i kierownica rzutu poziomego. — Jedno z ognisk rzutu poziomego jest rzutem poziomym s wierzchołka ostrokręgu (§ **491**), kierownicę zaś odpowiadającą r_1r_2 znajdziemy, kreśląc rzut poziomy poziomej płaszczyzny $P\rho P'$ tegoż samego wzniesienia co wierzchołek s, s'.

Symetrya figury pozwala znaleźć z łatwością drugie ognisko i drugą kierownicę.

659. Ogniska i kierownica przecięcia. — Twierdzenie Daudelin'a służy do wyznaczenia tych niewiadomych, gdyż dostatecznem będzie nakreślić kulę styczną do płaszczyzn, a wpisaną w ostrokrąg, znajdziemy bowiem w punkcie dotknięcia się jej z płaszczyzną, ognisko f, f'_1, gdyż płaszczyzna krzywej dotknięcia kuli z ostrokręgiem jest płaszczyzną poziomą, więc ma za ślad pionowy prostę $i'j'$ i spotyka płaszczyznę $P\rho P'$ podług kierownicy u', u_1u_2, odpowiadającej ognisku f, f'. W ten sam sposób, wpisując w ostrokrąg drugą kulę styczną do płaszczyzny, znajdziemy drugie ognisko i drugą kierownicę.

660. Rzeczywista wielkość przecięcia. — Zrobiwszy kład płaszczyzny $P\rho P'$ na płaszczyznę pionową rzutów, znajdziemy następujące części składowe rzeczywistej wielkości elipsy przecięcia:

1° Jeden z punktów tej elipsy E_1; kład T śladu poziomego stycznej odpowiadającej, więc kład TE_1 samejże stycznej w punkcie E_1.

2° Kłady A_1, S_1, C_1, S_2 czterech wierzchołków szukanej elipsy, kład jednego z jej ognisk F_1 jakoteż kład odpowiedniej kierownicy U_1U_2.

Drugie ognisko F_2 zostało znalezionem, biorąc punkt symetryczny punktowi F_1 względem środka O' kładu, a znając wszystkie te części składowe, nic łatwiejszego jak nakreślić elipsę.

661. Rozwinięcie ostrokręgu. — Jeżeli otworzymy ostrokrąg wzdłuż tworzącej sa, $s'a'$, i jeżeli nakreślimy rozwinięcie części jego powierzchni, zawartej pomiędzy wierzchołkiem i płaszczyzną jego podstawy, to rozwinięcie to będzie wycinkiem $\alpha\sigma\alpha''$, mającym promień równy rzeczywistej wielkości $s'a$ krawędzi ostrokręgu, kąt zaś jego we środku obliczymy w sposób następujący:

Oznaczmy przez θ (*fig.* 371, tab. XLII) miarę tego kąta, przyjmując jeden stopień za jednostkę. Kąt szukany możemy jeszcze zmierzyć łukiem $\alpha\gamma\alpha''$, którego długość, oznaczając przez R promień koła podstawy ostrokręgu, jest równą $2\pi R$.

Wiedząc to, i oznaczając przez l długość krawędzi bocznej ostrokręgu, otrzymamy

$$\frac{\theta}{2\pi R} = \frac{360^\circ}{2\pi l},$$

a ztąd

$$\theta = 360\,\frac{R}{l};$$

wzór, za pomocą którego możemy obliczyć kąt w środku wycinka.

Podstawę wycinka możemy jeszcze ograniczyć, wpisując w koło podstawy ostrokręgu linię łamaną i odcinając następnie długości każdej z nich, uważanej za cięciwę, na łuku podstawy wycinka.

662. Wykreślenie jakiegokolwiek punktu przekształconej i jej stycznej. — Jeden z punktów przekształconej znajdziemy, biorąc łuk $a\varepsilon$ równy ae, kreśląc prostę $\sigma\varepsilon$, a wreszcie odciąwszy na niej od punktu σ długość równą se_1, $s'e'_1$ w rzeczywistej wielkości; tę ostatnią zaś otrzymamy sprowadzając tworzącę przechodzącą przez punkt uważany na jednę z tworzących obrazu np. sa, $s'a'$ tej powierzchni, a to obrotem jej naokoło osi ostrokręgu.

Ponieważ podczas tego obrotu punkt s, s' zostaje nieruchomym, zaś punkt e'_1 porusza się po prostej równoległej do xy i przypada w punkcie l'_2 na prostej $s'a'$, więc szukaną rzeczywistą wielkością będzie $s'e'_2$, którą odciąwszy na $\sigma\varepsilon$, znajdziemy punkt szukany ε_1.

Styczną w tym punkcie znajdziemy, kreśląc przez punkt ε do podstawy wycinka styczną, i na niej w kierunku wskazanym przez figurę odciąwszy długość $\varepsilon\tau$ równą et.

663. Punkt najdalszy i punkt najbliższy wierzchołka ostrokręgu. — Ponieważ w wierzchołkach wielkiej osi $(a_1, a'_1), (c_1, c'_1)$ styczne do elipsy są prostopadłe do tworzących ostrokręgu, więc odległość tych punktów od wierzchołka ostrokręgu jest jużto maximum, jużteż minimum, a zatem musi ona mieć miejsce dla punktów α_1, γ_1, α''_2 odpowiadających pierwszym, które znaleźliśmy sposobem ogólnym.

664. Punkta przegięcia przekształconej. — Przedewszystkiem należy wyznaczyć punkta przecięcia, w których płaszczyzna styczna do ostrokręgu jest równoległą do płaszczyzny $P\rho P'$ (§ **619**); następnie, jeżeli ostrokrąg jest jakimkolwiek, nakreślić przez jego wierzchołek prostopadłę do płaszczyzny siecznej a przez nią płaszczyzny styczne do ostrokręgu, to punkta w ten sposób otrzymane, a leżące na przecięciu się tworzących dotknięcia z płaszczyzną przecięcia, będą właśnie na rozwinięciu, punktami przegięcia przekształconej przecięcia.

Ponieważ w naszym przypadku powierzchnia jest i rozwijalną i obrotową, możemy zatem zastąpić płaszczyzny styczne przez ich proste normalne, przechodzące przez punkta szukane, i szukać na powierzchni prostych normalnych do niej a leżących na płaszczyźnie $P\rho P'$.

Ponieważ oś ostrokręgu przecina płaszczyznę $P\rho P'$ w punkcie g', s, to jest w punkcie spotkania się normalnych nieznanych z osią, więc nakreśliwszy z punktu g' prostę prostopadłą do $s'a'$, zaś przez jej spodek m' prostopadłę do osi, którą przedłużymy do punktu n' t. j. do spotkania się jej z prostą $s'c'$, równoleżnik mający $m'n'$ za rzut pionowy, może służyć za podstawę ostrokręgu utworzonego przez normalne i zawierającego normalne szukane. Wnosimy ztąd, że rzutem pionowym normalnych szukanych jest $g'l'$, a spodki ich na płaszczyźnie $P\rho P'$ mają wspólny rzut pionowy w punkcie l'.

Obecnie więc wszystko zostało sprowadzone do wykreślenia, sposobem ogólnym podanym dla jakiegokolwiek punktu, rzutów poziomych l_1, l_2, punktów leżących na przecięciu a mających rzut pionowy w punkcie l', i do ustawienia następnie tych punktów (l_1, l'), (l_2, l') w należytem położeniu na rozwinięciu, to jest w punktach λ_1, λ_2, które będą punktami przegięcia przekształconej.

Rozbiór. — Jeżeli oznaczymy przez γ połowę kąta w wierzchołku ostrokręgu danego, a przez δ nachylenie płaszczyzny $P\rho P'$ do poziomu, to kąt między tworzącemi normalnemi ostrokręgu a płaszczyzną poziomą rzutów będzie równy kątowi γ.

1° Kiedy płaszczyzna $P\rho P'$ przecina ostrokrąg normalnych, wówczas mamy dwa punkta przegięcia, a kąt $\gamma < \delta$.

2° Kiedy płaszczyzna PpP′ jest styczną do ostrokręgu normalnych (przypadek szczególny podany w paragrafie **619**), wówczas nie ma punktów przegięcia, lub lepiej mówiąc jest ich dwa zchodzące się w jeden na figurze, gdyż łuk $\lambda_1\lambda_2$ (*fig.* 371, tab. XLII) staje się zerem, a krzywa nic przedstawia żadnego przegięcia widocznego.

W tym przypadku $\gamma = \delta$.

3° Kiedy płaszczyzna PpP′ leży zewnątrz ostrokręgu normalnych, wówczas nie ma zupełnie przegięcia i $\gamma > \delta$.

665. Zadanie. — *Nakreślić dla ostrokręgu prostego i obrotowego : 1° rzuty rzeczywistej wielkości jednego z jego przecięć hyperbolicznych, 2° rozwinąć powierzchnię i ustawić na niej przekształconę przecięcia* (*fig*, 372, tab. XLIII).

Oznaczmy przez s, s' rzuty wierzchołka ostrokręgu, jego ślad poziomy niech będzie okrąg koła mający środek w punkcie s, zaś promień równy sa; niech dalej płaszczyzną sieczną, którą zawsze ustawić możemy prostopadle do płaszczyzny pionowej rzutów, będzie płaszczyzna przedstawiona przez swe ślady PpP′, która, aby otrzymać hyperbolę na przecięcie, przecina obie powłoki ostrokręgu.

Wykreślenie jednego z punktów przecięcia — Ponieważ w tym przypadku tworzące ostrokręgu spotykają płaszczyznę sieczną PpP′ pod bardzo ostremi kątami, a więc punkta ich wzajemnego przecięcia dokładnie wyznaczyć się nie dadzą, dla ich wyznaczenia więc przyjęliśmy za płaszczyzny sieczne pomocnicze, płaszczyzny poziome równooddalone od wierzchołka brane co druga, albowiem postępując w ten sposób, jedna para R′, R′$_1$ tych płaszczyzn, przecina prostę $s'c'$, sc w punktach (d', d), (d'_1, d_1), a ostrokrąg podług okręgów kół równych, których rzutami pionowemi są odpowiednio części prostych R′, R′$_1$ zaś poziomemi jeden i ten sam okrąg koła mający swój środek w punkcie s, a za jeden z punktów przejścia punkt d. Nakreśliwszy ten okrąg koła i rzuty poziome e_1e_2, f_1f_2 punktów przecięcia się płaszczyzn pomocniczych z płaszczyzną PpP′, i biorąc następnie punkta g_1, g_2 k_1, k_2 wspólne tym linijom, otrzymamy cztery punkta rzutu poziomego hyperboli. Styczna w tym przypadku wykreśli się tak samo jak dla elipsy.

666. Wierzchołki. — Ogniska. — Kierownice. — Wykreślenia służące do wyznaczenia tych części hyperboli są w zupełności takież same, jak wykreślenia podane i rozebrane tak obszernie dla elipsy.

667. Asymptoty przecięcia. — Dla rozwiązania tego zadania należy użyć sposobu ogólnego (§ **586**). Przedewszystkiem należy nakreślić przez punkt s, s' płaszczynę QqQ′ równoległą do płaszczyzny PpP′, a następnie wyznaczyć przecięcie się ($s'q$, sm), (sq, sm_1) ostrokręgu z płaszczyzną QqQ′, to proste tak znalezione będą tworzącemi ostrokręgu, na których leży punkt w nieskończoności przecięcia, to jest, innemi słowy, będą to kierunki asymptotyczne przecięcia. Znając je, należy nakreślić styczne do przecięcia, przechodzące przez punkta w nieskończoności na kierunkach asymptotycznych. Jeden z punktów przejścia tych stycznych znajdziemy, kreśląc styczne do podstawy ostrokręgu przez punkt m, m_1, i wyznaczając przecięcia się ich z Pp, to jest punkt n, n_1.

Ponieważ asymptoty mają za rzuty poziome proste równoległe do ms, m_1s, a przechodzące odpowiednio przez punkta n, n_1 więc, jeżeli rysunek został wykonany z dokładnością, winny się one przecinać w środku rzutu poziomego krzywej, to jest w środku ω odległości a_1c_1 wierzchołków rzeczywistych rzutu poziomego przecięcia.

668. Rzeczywista wielkość przecięcia. — Tutaj, tak jak dla elipsy zrobionym został kład płaszczyzny PpP′ na płaszczyznę pionową rzutów, tylko, dla nadania jasności rysunkowi, poprzednio płaszczyzna PpP′ została przeniesioną równolegle do niej samej do P$_1p_1$P′$_1$.

Wykreślenie dla jednego jakiegokolwiek punktu np. e', g_1 jest następujące : przez punkt g_1 przesuwamy prostę równoległą do osi rzutów xy, która spotyka P_1 w punkcie g''_1, z punktu p_1 jako środka kreślimy okrąg koła przechodzący przez punkt g''_1 i szukamy przecięcia się jego G''_1 z kładem P_1, a któryto kład jest prostopadłą P_2 do P'_1 przechodzącą przez p_1, wreszcie wyznaczymy przecięcie się E_1, prostych P'_1 i R'_1 a przez punkta G''_1, E_1 kreślimy dwie proste odpowiednio równoległe a prostopadłe do P'_1, to punkt szukany znajdzie się na przecięciu się tych prostych w punkcie E''. W taki sam sposób znaleziono inne punkta.

669. Rozwinięcie ostrokręgu, przekształcona przecięcia hyperbolicznego. — Poprzednio już wyłożyliśmy sposób rozwijania ostrokręgu, i wykreślania różnych punktów przekształconej jakiejkolwiek krzywej, nakreślonej na jego powierzchni. Zwrócimy tu tylko uwagę na tę okoliczność, że jeżeli przypuścimy ostrokrąg rozwiniętym podług tworzącej sc, $s'c'$, to górna gałęź hyperboli będzie podzieloną na rozwinięciu, a tem samem wierzchołek c, c' rozdzieli się na dwa γ_1, γ_2, i w tych punktach styczne będą odpowiednio prostopadłe do dwu położeń tworzącej rozdwojonej.

670. Punkt przegięcia. — Zastosujmy tu wykreślenie już podane dla elipsy i nie wchodząc w dowodzenie, podajmy następujące po sobie wykreślenia. Ponieważ płaszczyzna $P_\alpha P'$ spotyka oś ostrokręgu danego w punkcie s, s', to jest w wierzchołku ostrokręgu normalnych, więc znajdziemy ztąd punkta (l', l_1), (l', l_2), w których ta płaszczyzna jest normalną do ostrokręgu, a dla umieszczenia ich na rozwinięciu należy nakreślić proste $l_1 s$, $l_2 s$, które są rzutami poziomemi tworzących przechodzących przez te punkta, i których ślady poziome leżą w punktach r_1, r_2. Na podstawie wycinka (*fig.* 373) odciąwszy następnie dwa łuki $\gamma\rho_1$, $\gamma''\rho_2$ tejże długości co łuki cr_1, cr_2 podstawy, i na prostych $\rho_1\sigma$, $\rho_2\sigma$ przechodzących przez punkta przegięcia, a przedłużonych poza σ odciąwszy wreszcie długości $\sigma\lambda_1$, $\sigma\lambda_2$ równe sl'_3, punkta λ_1, λ_2 tak znalezione będą szukanemi punktami przegięcia przekształconej.

671. Asymptoty przekształconej. — Są to styczne, które znajdziemy sposobem podanym w paragrafie **662**, a mianowicie ustawmy w należytem położeniu tworzące przechodzące przez punkta dotknięcia, leżące w nieskończoności, w tym zaś celu weźmy łuk $\gamma\mu_1$, $\gamma\mu$ równe łukom cm_1, cm podstawy i nakreślmy proste $\sigma\mu_1$, $\sigma\mu$; nakreśliwszy teraz styczne do łuku podstaw wycinka w punktach μ_1, μ_2 i odciąwszy na nich, w kierunku wskazanym przez figurę, $\mu_1\nu_1$, $\mu\nu$ równe m_1n_1, mn, to proste odpowiednio równoległe do $\mu_1\sigma$, $\mu\sigma$ a przechodzące przez punkta ν_1, ν, będą właśnie szukanemi asymptotami.

672. Zadanie. — *Nakreślić* : 1° *rzuty i rzeczywistą wielkość przecięcia parabolicznego ostrokręgu prostego obrotowego*, 2° *przekształconę paraboli przecięcia* (*fig.* 374, tab. XLIII).

Jeżeli przyjmiemy, że płaszczyzna sieczna PP' jest prostopadłą do płaszczyzny pionowej rzutów, i równoległą do jednej z tworzących obwodu pozornego pionowego, to przecięcie w tym razie będzie parabolą, którą wyznaczymy za pomocą ogniska s jej rzutu poziomego, kierownicy odpowiedniej δ i wierzchołka a tegoż rzutu, poczem pamiętając o tem cośmy już powiedzieli o elipsie i hyperboli dokończymy z łatwością wykreślenia.

673. Zadanie. — *Nakreślić rozwinięcie jakiegokolwiek ostrokręgu.* — W tym celu należy wpisać ostrosłup w powierzchnię ostrokręgową i rozwinąć go, a jeżeli ściany jego są dostatecznie małe, to prowadząc liniję ciągłą przez wierzchołki podstawy ostrosłupa rozwiniętego, znajdziemy przekształconę tej podstawy. Przekształcona jakiejkolwiek krzywej powierzchni da się wyznaczyć w taki sam sposób.

PRZECIĘCIA PŁASKIE POWIERZCHNI OBROTOWYCH

674. Zadanie. — *Nakreślić rzuty i rzeczywistą wielkość przecięcia płaszczyzną powierzchni obrotowej jakiejkolwiek* (*fig.* 375, tab. XLIV).

Oznaczmy przez z, z' oś, przez μ' rzut pionowy południka obrazu i przez $P_\alpha P'$ płaszczyznę sieczną.

Wyznaczenie jednego z punktów przecięcia. — Zadanie to możemy rozwiązać, używając płaszczyzn pomocniczych siecznych albo poziomych albo południkowych.

Użycie równoleżników. — Obrawszy płaszczyznę poziomą Q' za płaszczyznę sieczną pomocniczą, to ponieważ prostą przecięcia się jej z płaszczyzną daną jest pozioma $v'h'$, vh, zaś z powierzchnią obrotową równoleżnik $n'n'_1$, nn_1, zatem punkta spotkania się (m_1, m'_1), (m_2, m'_2) tych dwu przecięć należą do przecięcia płaszczyzny z elipsoidą.

Użycie południków. — Stosując też same dane co powyżej do figury 376 (tab. XLIV) i przyjmując Q za ślad poziomy płaszczyzny pomocniczej, znajdziemy : 1° że oś powierzchni spotyka płaszczyznę daną w punkcie ω', z, którego wyznaczenie jest podane na rysunku, a przez który przechodzą wszystkie przecięcia się płaszczyzny $P_\alpha P'$ z różnemi płaszczyznami pomocniczemi; 2° że mając ten punkt, łatwo wyznaczymy przecięcia się płaszczyzny danej z innemi płaszczyznami południkowemi pomocniczemi, gdyż, w samej rzeczy, dla płaszczyzny, której śladem poziomym jest Q, znajdujemy drugi punkt przecięcia w punkcie h t. j. w punkcie przecięcia się ich śladów poziomych P i Q.

Tak więc zadanie nasze zostało sprowadzone do wyznaczenia punktów przecięcia się południka mającego Q za ślad poziomy z prostą obecnie znalezioną, a punkta te dadzą się wyznaczyć, sprowadzając obrotem naokoło osi powierzchni jak południk tak i prostę na płaszczyznę obrazu, przechodzącą przez tęż oś, gdyż wówczas ślad h przybiera położenie h_1, h'_1 zaś punkt ω', z pozostaje nieruchomym; nakreśliwszy więc prostę $h'_1\omega'$ i wyznaczywszy punkta m'_1, n'_1 przecięcia się jej z μ', otrzymamy rzuty pionowe dwu punktów, które sprowadzone do należytego położenia w (m, m'), (n, n'), będą punktami szukanemi.

675. Kreślenie stycznej w jednym z punktów wspólnego przecięcia. — Dwa sposoby mogą tu być użyte, jużto sposób za pomocą płaszczyzny stycznej, jużteż sposób za pomocą normalnych.

1szy Sposób. — Użycie płaszczyzny stycznej. — Wykreślmy styczną w punkcie m_2, m'_2 (*fig.* 375, tab. XLIV). W tym celu nakreślmy przedewszystkiem płaszczyznę styczną w tym punkcie, tę ostatnią zaś znajdziemy sprowadzając obrotem naokoło osi z, z'_1, punkt dany do punktu n_1, n'_1 leżącego na południku głównym, gdyż w tem położeniu punktu dotknięcia, płaszczyzna szukana ma za ślad pionowy styczną R'_1 do krzywej μ', przechodzącej przez punkt n'_1, a za ślad poziomy prostopadłę R_1 do osi rzutów.

Wracając teraz płaszczyznę R_1, R'_1 do jej pierwotnego położenia, odległość zr_1 nie zmieni się, a R_1 przypadnie na prostej R, która jest śladem poziomym płaszczyzny stycznej, przecięcie się zaś tej prostej z αP w punkcie $0, 0'$ jest śladem poziomym stycznej szukanej, oznaczonej w ten sposób przez dwa punkta wiadome, które połączywszy z sobą liniją prostą $0m_2$, $0'm'_2$ otrzymamy rzuty stycznej szukanej.

2gi Sposób. — Użycie normalnych. — Ponieważ normalne w jakimkolwiek punkcie powierzchni obrotowej znajduje się łatwo, nie używając do tego płaszczyzny stycznej, gdyż, jak tego dowiedliśmy (§ **389**), wystarcza nakreślić w punkcie uważanym normalnę do południka, więc sposób Bineta podany w paragrafie **573** winien być użytym tylko wtenczas, kiedy chcemy znaleźć styczną w jednym z punktów linii wspólnej dwu powierzchniom obrotowym. Otóż zadanie nasze jest tylko szczególnym

przypadkiem powyższego, albowiem każda płaszczyzna może być uważaną jako powierzchnia obrotowa, której oś jest prostopadłą jakąkolwiek do płaszczyzny, zaś linija południkowa jakąkolwiek prostą przechodzącą przez spodek tej prostopadłej a leżącą na tej płaszczyznie; sposób więc ten może być zastosowanym do przecięć płaskich powierzchni obrotowych, lecz nie przedstawi on żadnej korzyści w porównaniu ze sposobem poprzedzającym, gdyż ten ostatni, polegając na znalezieniu prostej wspólnego przecięcia się płaszczyzny stycznej z płaszczyzną daną, jest daleko łatwiejszy do wykonania, a niżeli znalezienie prostopadłej do płaszczyzny normalnych. Podamy tu zastosowanie tego drugiego sposobu, lecz tylko dla ćwiczenia.

Wróćmy do figury 376, tablica XLIV i znajdźmy styczną w punkcie m, m' już wyznaczonym. W tym celu nakreślmy przez punkt m'_1 normalnę do μ', oznaczmy punkt w którym ona spotyka oś z, z' przez σ'_1.

Ponieważ wzdłuż równoleżnika przechodzącego przez punkt obrany, wierzchołek wiązki normalnych leży w punkcie σ'_1, z, a normalna w punkcie m, m' do powierzchni obrotowej musi przejść przez ten wierzchołek, ponieważ nadto dla płaszczyzny PαP', proste ma, $m'a'$ są rzutami normalnej i są odpowiednio prostopadłe do śladów tej płaszczyzny, jeżeli więc przetniemy płaszczyznę normalnych płaszczyzną obrazu F, przechodzącą przez punkt z, z', to znajdziemy : 1° punkt σ'_1, z na normalnej do powierzchni obrotowej, i 2° punkt b, b' na normalnej do płaszczyzny. Łącząc wreszcie punkt b' z σ'_1 liniją prostą, która jest rzutem pionowym prostej obrazu płaszczyzny normalnych, i kreśląc do niej przez punkt m' prostopadłę $m't'$, ta ostatnia będzie rzutem pionowym stycznej szukanej.

Drugi rzut tej stycznej znajdziemy za pomocą prostej poziomej płaszczyzny normalnych, nakreślmy bowiem przez punkt m, m' prostę poziomą, to ponieważ rzutem jej pionowym jest prosta m'_1m' równoległa do osi rzutów, a spotykająca prostę σ'_1b' w punkcie k', odpowiednim punktowi k, kreśląc więc prostę km, znajdziemy rzut poziomy tej prostej poziomej, a znając go, dostatecznem będzie dla znalezienia rzutu poziomego stycznej szukanej, nakreślić przez punkt m prostę mt prostopadłą do prostej km.

676. Punkt najwyższy i punkt najniższy (*fig.* 375, tab. XLIV). — Ponieważ płaszczyzna południkowa, której ślad poziomy Q jest prostopadłym do αP, jest płaszczyzną symetryi wspólną powierzchni obrotowej i płaszczyznie danej PαP', ponieważ nadto ta płaszczyzna jest prostopadłą do płaszczyzny poziomej rzutów, więc (§ 417) punkta krzywej przecięcia, które na niej leżą, są właśnie punktami szukanemi. Użycie południków posłuży do wyznaczenia tych punktów; wyznaczmy bowiem punkt ω', z przecięcia się osi z płaszczyzną PαP' jakoteż punkt p przecięcia się śladów poziomych P i Q, znajdźmy następnie przecięcia się prostej przechodzącej przez punkta p i ω', z z krzywą południkową, leżącą na płaszczyznie, której śladem poziomym jest Q, a w tym celu sprowadźmy przedewszystkiem płaszczyznę symetryi wraz z figurą na niej leżącą na płaszczyznę południka głównego, skutkiem czego punkt p przypadnie w p_1, p'_1, zaś punkt ω', z pozostanie nieruchomym, a wreszcie nakreślmy prostę $\omega'p'_1$ i znajdźmy punkta s'_1, σ_1 przecięcia się jej z krzywą μ.

Podnosząc teraz z kładu i wracając do pierwotnego położenia, znajdziemy punkt najwyższy σ, σ'_1 jakoteż najniższy s, s'. Rzuty stycznych w tych punktach są : na płaszczyznie pionowej rzutów, proste równoległe do osi rzutów, na płaszczyznie zaś poziomej proste równoległe do αP.

677. Płaszczyzny ograniczające. — Jeżeli płaszczyzny pomocnicze są płaszczyznami poziomemi, to płaszczyznami ograniczającemi są właśnie płaszczyzny przechodzące przez punkta najwyższy i najniższy obecnie znalezione.

Jeżeli płaszczyznami pomocniczemi są płaszczyzny południków, to płaszczyzny graniczne winny spotkać płaszczyznę $P\alpha P'$ podług prostych odpowiednio stycznych do krzywych południkowych, a któreto proste są naturalnie styczne do krzywej szukanej. Ponieważ nadto wszystkie proste przecięcia płaszczyzn południkowych pomocniczych z płaszczyzną P, przechodzą przez punkt ω', z (§ 674), znajdziemy więc styczne leżące na płaszczyznach ograniczających na przecięciu się płaszczyzny $P\alpha P'$ z ostrokręgiem opisanym na powierzchni obrotowej, a mającym wierzchołek w punkcie ω', z.

Dla wyznaczenia ostrokręgu rzeczonego, nakreślmy z punktu ω', z styczną $\omega' u'$, zu do południka głównego, i znajdźmy jej ślad poziomy θ, θ'; ślad poziomy ostrokręgu jest okręgiem koła mającym środek w punkcie z, a punkt θ za punkt przejścia. Nakreśliwszy ten okrąg koła, znajdziemy punkta t_1, t_2 przecięcia się jego αP, które będą punktami dwu stycznych szukanych, czyli dwa punkta południków ograniczających, a ślady poziome tych ostatnich będą prostemi zt_1, zt_2.

Rzuty punktów granicznych znajdziemy, kreśląc przedewszystkiem rzuty $(t_1 z, t'\omega')$, $(t_2 z, t'_2 \omega)$ stycznych w tych punktach, i rzuty uv, $u'v'$ równoleżnika dotknięcia powierzchni obrotowej z ostrokręgiem pomocniczym na niej opisanym, a następnie szukając punktów przecięcia się (λ_1, λ'_1), (λ_2, λ'_2) tych linij.

Warunkiem dokładności rysunku jest to, że oba rzuty każdego z punktów tak wyznaczonych winny leżeć na tychże samych linijach rzutów.

678. Punkta podwójne. — Przyjmujemy tu jak w paragrafie **400**, że powierzchnia jest daną przez swą oś i przez dwie tworzące, gdyż w tych warunkach równoleżnik nakreślony przez punkta podwójne krzywych południkowych, przecina płaszczyznę sieczną w punktach podwójnych przecięcia. Skoro bowiem w takim razie każdemu punktowi podwójnemu krzywej południkowej odpowiadają dwie płaszczyzny styczne do powierzchni, jeżeli więc obrócimy te płaszczyzny naokoło osi powierzchni w ten sposób, żeby ich punkt wspólny dotknięcia przypadł na jednym z punktów przecięcia równoleżnika z płaszczyzną sieczną, to otrzymamy z przecięcia się ich z płaszczyzną sieczną dwie styczne do przecięcia, a ztąd wynika, że punkta uważane są rzeczywiście punktami podwójnemi, i sposób kreślenia tak ich jakoteż i stycznych przez nie przechodzących jest uzasadnionym.

Zdarzyć się może, że krzywa południkowa powierzchni obrotowej nie ma punktów podwójnych, gdy tymczasem przecięcie jej płaszczyzną może mieć takowe, jak się o tem przekonamy z twierdzenia następującego.

679. Twierdzenie. — *Jeżeli jakakolwiek płaszczyzna dotyka i przecina zarazem powierzchnię obrotową, to punkt dotknięcia jest punktem podwójnym* (fig. o_3). — Oznaczmy przez z, z' rzuty osi, którą przyjmiemy za pionową, przez μ', μ'_1 rzut pionowy południka obrazu, zaś przez m, m' punkt dotknięcia, sprowadzony na południk obrazu obrotem naokoło osi z, z'. Weźmy za oś odciętych styczną P w punkcie m' do południka $u'\mu'$, która jest śladem pionowym południka obrazu, a za oś rzędnych prostą równoległą do osi rzutów, a przechodzącą przez punkt m'. Wyznaczmy przedewszystkiem dwa punkta (u_1, u'), (u_2, u') przecięcia, używając do tego płaszczyzny pomocniczej poziomej, mającej Q' za ślad pionowy i bardzo blizkiej punktu m, m'.

Twierdzenie będzie dowiedzionem, okazawszy że jeżeli styczna w przestrzeni ma w punkcie M dwie styczne, to ten punkt jest punktem podwójnym, a to znów jeżeli wykażemy, że rzut poziomy krzywej przecięcia ma dwie styczne w odpowiednim mu punkcie m.

W tym celu nakreślmy proste mu_1, mu_2 i oznaczmy przez v punkt spotkania się prostej $u_1 u_2$ z prostą mz, zaś przez α kąt $u_1 mz$. Otóż, jeżeli płaszczyzna pozioma, której śladem pionowym jest Q', zmienia swe położenie zbliżając się do punktu m, m', to punkta u_1, u_2 zmieniają również takowe

i zbliżają się do punktu m, i przechodząc do granicy, proste te mu_1, mu_2 będą stycznemi w punkcie m do rzutu poziomego krzywej uważanej.

Dla wyznaczenia położenia tych stycznych, znajdźmy granicę styα.

Mamy bowiem z figury

$$\text{sty}\,\alpha = \pm\frac{u_1 v}{m v}.$$

Oznaczmy : przez R_1, R promienie równoleżników, leżących odpowiednio na płaszczyznie poziomej pomocniczej i na płaszczyznie zawierającej punkt m, m', przez a', x, y punkt spotkania się krzywej μ'

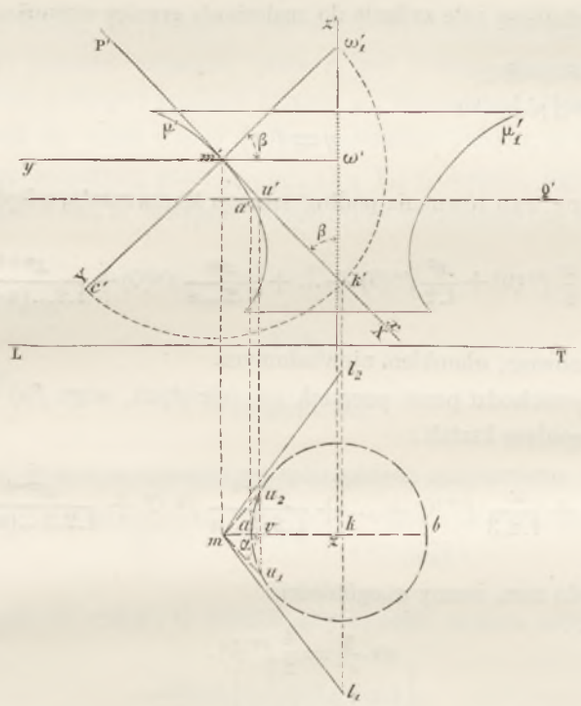

Fig. 93.

z Q' i jego spółrzędne, przez a i b punkta, w których płaszczyzna obrazu przechodząca przez punkt z, z' spotyka rzutpoziomy równoleżnika, mającego promień R_1, wreszcie przez β kąt utworzony przez P' z jakąkolwiek pionową.

Pamiętając to, mamy

$$u_1 v = \sqrt{av \cdot vb} = \sqrt{y(2R_1 - y)},$$

$$mv = m'v' \operatorname{wst}\beta = x \operatorname{wst}\beta.$$

Jeżeli tak znalezione wartości dla $u_1 v$ i mv podstawimy w pierwszym wzorze, otrzymamy

$$\text{sty}\,\alpha = \pm\frac{\sqrt{y(2R_1 - y)}}{x \operatorname{wst}\beta},$$

lub

$$\text{sty}\,\alpha = \pm \frac{1}{\text{wst}\,\beta}\sqrt{2R_1 \frac{y}{x^2} - \left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

Przechodząc do granicy, R_1 dąży ku R, a stosunek $\frac{y}{x}$, który przedstawia spółczynnik kątowy stycznej do krzywej μ', przechodzącej przez początek spółrzędnych, staje się zerem, czyli, będzie:

$$\text{gr. sty}\,\alpha = \pm \frac{1}{\text{wst}\beta}\sqrt{2R\ \text{gr.}\ \frac{y}{x^2}}.$$

W ten sposób sprowadziliśmy całe zadanie do znalezienia granicy stosunku $\frac{y}{x^2}$, którąto wartość otrzymamy w sposób następujący.

Niech równanie krzywej μ' będzie

$$y = f(x).$$

Rozwińmy drugą stronę tego równania podług szeregu MACLAURIN'A, a będzie

$$(1) \qquad y = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} f^n(0) + \frac{x^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} f^{n+1}(\theta x),$$

gdzie θ, jest właściwie mówiąc, ułamkiem niewiadomym.

Ponieważ krzywa μ przechodzi przez początek osi odciętych, więc $f(o) = 0$, i $f'(o) = 0$, a równanie (1) przyjmie następujący kształt:

$$\frac{y}{x^2} = \frac{1}{1.2} f''(0) + \frac{x}{1.2.3} f'''(0) + \ldots + \frac{x^{n-2}}{1.2.3\ldots n} f^n(0) + \frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n+1)} f^{n+1}(\theta x);$$

a dla x zbliżającego się do zera, mamy w ogólności

$$(2) \qquad \text{gr.}\frac{y}{x^2} = \frac{1}{2} f''(0).$$

czyli, że szukane wyrażenie jest następuiące:

$$(3) \qquad \text{gr. wst}\,\alpha = \pm \frac{1}{\text{sty}\,\beta}\sqrt{R f''(0)};$$

a ponieważ zwykle $f'''(0)$ nie jest zerem, więc wskutek podwójnego znaku wzoru (3), punkt m, m' jest punktem podwójnym przecięcia.

Wkrótce okażemy, że styczna w punkcie podwójnym, da się wyznaczyć łatwo, kreśląc granicę kąta α, przedewszystkiem jednak znajdźmy określenie geometryczne $f''(0)$. W tym celu uważmy, że równanie linii μ, w układzie spółrzędnych $xm'y$, może być następujące:

$$x = \varphi(y)$$

w którem f i φ są funkcyami odwrotnemi.

Jeżeli zachowamy oś odciętych i zastąpimy oś rzędnych prostą Y prostopadłą do mx', a przecho-

dzącą przez punkt m', to wzory zmiany spółrzędnych, oznaczając przez X i Y nowe spółrzędne jakiegokolwiek punktu krzywej μ' dadzą:

$$x = X + Y \operatorname{sty}\beta,$$

$$y = \frac{Y}{\operatorname{dos}\beta};$$

czyli, że równaniem krzywej μ' w nowym układzie spółrzędnych jest

$$X = -Y \operatorname{sty}\beta + \varphi\left(\frac{Y}{\operatorname{dos}\beta}\right).$$

Nadto, widoczną jest rzeczą, że promień koła ściśle stycznego lub koła krzywizny krzywej μ' w punkcie m', a któryto promień oznaczmy przez ρ, jest równym granicy podnormalnej liczonej na $m'Y$, odnoszącej się do jednego z punktów krzywej μ', leżącego najprzód w bliskości punktu m', następnie zaś zbliżającego się coraz więcej do tego ostatniego punktu, aż do zupełnego zejścia się z nim (§ 138). Jeżeli więc oznaczymy przez (x_1, y_1), (X_1, Y_1) spółrzędne tego punktu blizkiego, odniesione do każdego układu osi, to równanie odpowiednie normalnej do krzywej μ', będzie miało kształt następujący:

$$Y - Y_1 = -X'_1 (X - X_1),$$

a podnormalna będzie równa

$$X'_1 X_1;$$

zkąd promień krzywizny

$$\rho = \operatorname{gr.}(X'_1 X_1).$$

Z równania krzywej μ' w nowym układzie osi spółrzędnych otrzymujemy

$$X'_1 = -\operatorname{sty}\beta + \varphi'(y_1) \cdot \frac{1}{\operatorname{dos}\beta};$$

a podstawiając w równaniu dla ρ za X'_1 tę wartość, gdy X_1 zdąża do zera, otrzymamy

$$\rho = \operatorname{gr.}\left[\frac{1}{\operatorname{dos}\beta} X_1 | \varphi'(y_1)\right],$$

lub

$$\rho = \frac{1}{\operatorname{dos}\beta} \operatorname{gr.} \frac{X_1}{f'(x_1)},$$

albo jeszcze

$$\rho = \frac{1}{\operatorname{dos}\beta} \operatorname{gr.} \frac{x_1 - y_1 \operatorname{wst}\beta}{f'(x_1)}.$$

Ponieważ, jeżeli x_1 przyjmiemy równe zero, to ostatni ułamek stanie się niewyznaczonym, dla uniknienia więc tego zastąpmy go stosunkiem pochodnych jego obu wyrazów, a znajdziemy

$$\rho = \frac{1}{\operatorname{dos}\beta} \operatorname{gr.} \frac{1 - f'(x_1) \operatorname{wst}\beta}{f''(x_1)},$$

przechodząc zaś do granicy będzie

$$\rho = \frac{1}{\operatorname{dos}\beta} \frac{1}{f''(0)},$$

lub ostatecznie

$$f''(0) = \frac{1}{\rho \operatorname{dos} \beta}. \tag{4}$$

Równanie (3) przybiera teraz kształt następujący

$$\text{gr. sty } \alpha = \pm \frac{1}{\text{wst}\beta} \sqrt{\frac{R}{\rho \operatorname{dos} \beta}}.$$

Oznaczmy : przez ω' rzut pionowy środka równoleżnika, przechodzącego przez punkt podwójny,

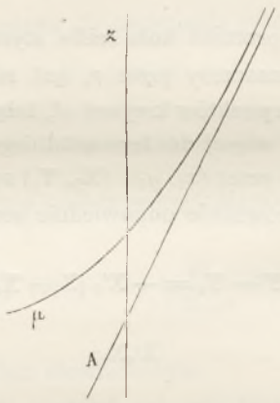

Fig. 64.

przez ω'_1 takiż rzut wierzchołka normalnych do powierzchni, a przechodzących przez różne punkta tego równoleżnika, przez c zaś rzut pionowy środka krzywizny południka obrazu w punkcie m, m', to znajdziemy, że

$$m'\omega'_1 = \frac{m'\omega'}{\operatorname{dos}\beta} = \frac{R}{\operatorname{dos}\beta}, \quad m'c' = \rho,$$

zkąd

$$\text{gr. sty } \alpha = \pm \frac{1}{\text{wst}\beta} \sqrt{\frac{\overline{m'\omega'_1}}{m'c'}},$$

któreto równanie możemy napisać jeszcze w ten sposób :

$$\text{gr. sty } \alpha = \pm \frac{m'\omega'_1}{\text{wst}\beta \sqrt{m'c' \cdot m'\omega'_1}}.$$

Jeżeli teraz na $\omega'c'$ jako średnicy opiszemy pół okręgu koła, i oznaczymy punkt przecięcia się jego P', przez k', a następnie zrobimy rzut punktu k' do k na zm, to otrzymamy :

$$\text{wst}\beta \sqrt{m'c' \cdot m'\omega'_1} = mk,$$

a zatem ostatecznie będzie

$$\text{gr. sty } \alpha = \pm \frac{m'\omega'}{mk}.$$

Widzimy więc, że wykreślenie winno się kończyć w sposób następujący : Należy od punktu k, na

prostej kk' i jej przedłużeniu, odciąć długości kl_1, kl_2 równe $m'\omega'_1$, a proste łączące punkta l_1, l_2 z punktem m będą stycznemi szukanemi.

680. Punkt podwójny na osi obrotu. — Takie punkta otrzymujemy tylko wtenczas, gdy krzywa (fig. o_4), opisująca powierzchnię obrotową, obracając się naokoło osi z, spotyka tę oś, a nadto kiedy płaszczyzna sieczna P przechodzi przez punkt przecięcia M. Rzeczywiście w tem przypuszczeniu, styczna MT w punkcie M do krzywej μ opisuje obrotem swym naokoło osi z ostrokrąg C, który przecinając się z płaszczyzną P, wyznacza dwie proste $M\theta$, $M\theta_1$ styczne w punkcie M do krzywej przecięcia. Punkt M jest więc punktem podwójnym tej krzywej.

Figura 377 tablica XLVII przedstawia wykreślenia uzasadnione na podanej tu zasadzie.

681. Gałęzie nieskończone i asymptoty. — Wiemy, że żeby krzywa przecięcia się powierzchni obrotowej z płaszczyzną, miała gałęzie nieskończone, potrzeba i wystarcza, żeby powierzchnia miała równoleżniki w nieskończoności, to jest, żeby sama krzywa południkowa miała gałęzie nieskończone.

Oznaczmy (fig. o_5), przez μ krzywę południkową w jakiemkolwiek położeniu, przez A jej asymptotę, przez z oś obrotu, zaś przez P płaszczyznę sieczną nie istniejącą na figurze. Ponieważ prosta A obracając

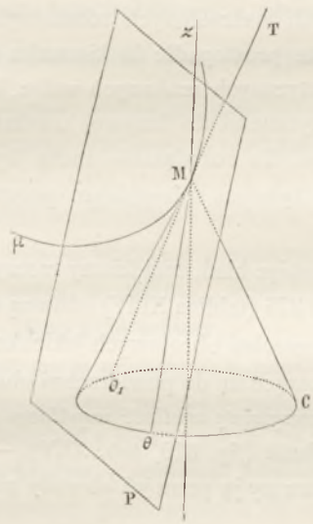

Fig. o_5.

się naokoło osi z, opisuje ostrokrąg znany pod nazwą ostrokręgu asymptotycznego powierzchni, a w nieskończoności, powierzchnia obrotowa i ostrokrąg mają równoleżnik wspólny, wzdłuż którego płaszczyzna styczna obejmuje, tak dla powierzchni jakoteż dla ostrokręgu, to położenie asymptoty A, które odpowiada punktowi uważanemu a prostopadłe przytem do płaszczyzny południka przechodzącego przez tenże punkt, więc widzimy, że w nieskończoności, tak punkta powierzchni jakoteż i ostrokręgu, jak również i płaszczyzny styczne przechodzące przez te punkta, zchodzą się z sobą. Dla wyznaczenia punktów w nieskończoności i asymptot możemy zastąpić powierzchnię przez ostrokrąg asymptotyczny, i zastosować wykreślenie podane dla ostrokręgu (§ **586**).

Wykreślenie rysunku (*fig.* 378, tab. XLVII). — Oznaczmy przez z, z' oś powierzchni, przez μ, μ' rzuty jej południka obrazu, przez $s'a'$, sa rzuty asymptot do krzywej $\mu\mu'$, wreszcie przez $P\alpha P'$, ślady płaszczyzny siecznej.

Wierzchołek ostrokręgu asymptotycznego leży w punkcie s, s' przecięcia się prostych (z, z') i $(s'a', sa)$, ślad poziomy h, h' tej ostatniej prostej jest punktem przejścia śladu poziomego ostrokręgu asymptotycznego, któryto ślad jest okręgiem koła mającym za środek punkt z.

Nakreśliwszy wskazany okrąg koła, przesuniętą została przez punkt s, s' płaszczyzna $Q\beta Q'$ równoległa do $P\alpha P'$, i znalezione zostały proste $(sh_1, s'h'_1)(sh_2, s'h'_2)$ przecięcia się płaszczyzny z ostrokręgiem asymptotycznym; tak znalezione proste są kierunkami asymptotycznemi przecięcia, a dla znalezienia samej asymptoty, odpowiadającej jednej z prostych przecięcia np. sh_1, $s'h'_1$ widzimy, że ślad płaszczyzny asymptotycznej odpowiadającej jest R, tudzież że on wyznacza w punktach θ, θ' ślad poziomy asymptoty. Kreśląc więc przez ten punkt prostę $\theta d, \theta' d'$ równoległą do sh_1, $s'h'_1$, znajdziemy szukaną asymptotę.

682. Punkta obwodu pozornego. — Jeżeli linije obwodu pozornego są płaskie, jak to zazwyczaj ma miejsce dla powierzchni obrotowych, których oś jest prostopadłą do jednej z płaszczyzn rzutów, to płaszczyznę tych linij przyjmując za płaszczyznę pomocniczą, należy postąpić sposobem zwyczajnym.

683. Punkta graniczne w kierunku wyznaczonym. — Idzie tu, jak już wiemy (§ 593), o znalezienie punktów dotknięcia stycznych nakreślonych równolegle do płaszczyzny danej krzywej, a mających za rzuty na płaszczyznę proste prostopadłe do kierunku danego. Punkta takie znajdziemy, opisując na powierzchni w kierunku stycznych szukanych walec, i biorąc jego tworzące na płaszczyznie danej, gdyż te tworzące będąc stycznemi do krzywej uważanej, wyznaczą w punktach swych dotknięcia punkta graniczne szukane. To rozwiązanie może być tylko zastosowane z łatwością do powierzchni drugiego stopnia, w tym zaś szczególnym przypadku jest inne rozwiązanie, które podamy poniżej.

684. Rzeczywista wielkość. — Robiąc kład, znajdziemy rzeczywistą wielkość przecięcia. Chociaż wykreślenia podane na figurach 375 i 376 (tablica XLIV) odnoszą się tylko do elipsoid, jednakże tak te jak i poprzednie stosują się do powierzchni obrotowych jakichkolwiek, w zadaniu zaś następującem podamy wykreślenia szczególne, odnoszące się do powierzchni obrotowych drugiego stopnia.

685. Zadanie. — *Znaleźć rzuty i rzeczywistą wielkość wspólnego przecięcia się powierzchni obrotowej drugiego stopnia z płaszczyzną jakąkolwiek* (*fig.* 379, tab. XLV). — Jako przykład weźmy elipsoidę obrotową o osi pionowej z, z', przedstawmy ją przez jej obwody pozorne, i przetnijmy ją jakąkolwiek płaszczyzną $P\alpha P'$.

Punkta należące do krzywej wspólnego przecięcia jakoteż styczne w tych punktach, znajdziemy sposobami ogólnemi, które nie zostały powtórzone na figurze.

686. Punkta obwodu pozornego. — Tu należy jeszcze użyć sposobu ogólnego podanego w paragrafie 682. Jeżeli bowiem użyjemy płaszczyzny obrazu, której śladem poziomym jest Q, jako płaszczyzny siecznej pomocniczej, to otrzymamy, najprzód z przecięcia się jej z płaszczyzną $P\alpha P'$, prostę $\gamma_1 Q', \gamma_2 f'$, zaś z powierzchnią, elipsę daną, a z przecięcia się wreszcie tych linij punkta (a', a), (b, b'), czyli punkta obwodu pozornego szukanego.

Postępując jak powyżej z płaszczyzną równika, znajdziemy proste h'_1, h', h_1, h powstałe z przecięcia się jej z płaszczyzną $P\alpha P'$, którato prosta przecina równik w punktach (c,c'), (d,d'), spotykających obwód pozorny poziomy elipsoidy.

687. Punkta graniczne w kierunku poprzecznym. — Punkta te wyznaczają się sposobem podanym w paragrafie 683.

I tak, szukamy najprzód śladu poziomego walca opisanego na elipsoidzie w kierunku prostej

przecięcia się płaszczyzny $P\alpha P'$ z jakąkolwiek płaszczyzną profilu (§ 463). Ogniska tego śladu są rzutami ukośnemi zrobionemi, w kierunku tworzących walca opisanego na płaszczyznę poziomą rzutów, równoleżników elipsoidy, mających promień równy zeru; znaleźć je możemy, wyznaczając punkta k', l', które leżąc na $\alpha P'$ mają tożsamo wzniesienie co wierzchołki (e', z), (e'_1, z) elipsy południkowej, a następnie robiąc rzut poziomy punktów k', l' prostej P' w kierunku tworzących walca opisanego. Rzuty, o których mowa, znajdziemy łatwo, biorąc punkta przecięcia φ, φ_1 prostej αP z płaszczyzną profilu, przechodzącą przez l', k'. Ponieważ odległości $\psi\varphi$, $\psi_1\varphi_1$ są równe odległości spodka osi z od ognisk szukanych, więc odcinając długości zF, zF_1 odpowiednio równe $\psi\varphi$, $\psi_1\varphi_1$ znajdziemy te ogniska. Środek śladu będzie środkiem ω prostej FF_1, wierzchołki zaś jego małej osi s, s_1 znajdziemy podług powyższego paragrafu, odcinając na prostopadłej do FF_1, a przechodzącej przez punkt ω i po obu stronach tego punktu, długości równe promieniowi równika.

Wierzchołki s_2, s_3 osi wielkiej znajdziemy, odcinając od punktu ω i po obu jego stronach, odległość punktu s od punktu F na osi ogniskowej.

Dla znalezienia przecięcia się śladu αP z elipsą, której główniejsze punkta, nie kreśląc takowej, wyznaczyliśmy, przypuśćmy, że elipsa i prosta αP są rzutami prostokątnemi na płaszczyznę poziomą rzutów, koła i prostej; średnicą tego koła będzie s_2s_3, a płaszczyzna jego utworzy z poziomem kąt, którego dostawa będzie miała wartość równą $\frac{\omega s}{\omega s_2}$. Przypuśćmy nadto, że zrobionym został kład tego koła na płaszczyznę poziomą rzutów, obracając go naokoło osi s_2s_3 i przedstawmy na figurze ten kład, opisując z punktu ω, jako środka promieniem równym ωs_2 okrąg koła. Należy teraz znaleźć kład prostej, mającej za rzut prostę αP. Otóż, ponieważ β, jest jednym punktem przejścia tego kładu, drugi zaś znajdziemy, kreśląc proste wychodzące z punktu s_2 a dążące do punktu s i do punktu σ, to jest do przecięcia się okręgu koła w kładzie z przedłużeniem prostej ωs, zatem w ten sposób znajdziemy dwie proste z których jedna, to jest $s_2\sigma$, może być uważaną jako kład prostej mającej za rzut s_2s i leżącej na płaszczyznie, której kład robimy.

Ponieważ ślad αP spotyka prostę ss_2 w punkcie i, a punkt j kładu odpowiada punktowi i rzutu, więc punkt ten jest drugim punktem szukanej prostej przejścia.

Wykreśliwszy tę prostę βj, i podniosłszy z kładu do n, n_1 na prostę αP, otrzymamy punkta jej przecięcia się m, m_1 z okręgiem koła w kładzie, a ponieważ punkta n, n_1 należą do stycznych szukanych, rzuty tych ostatnich zatem będą prostemi prostopadłemi do osi rzutów, a przechodzącemi przez te dwa punkta.

Znalazłszy obecnie styczne w punktach granicznych dwu rzutów przecięcia, wyznaczmy same punkta, w tym celu zajmijmy się tylko punktami leżącymi najdalej na prawo na obu rzutach, punkta bowiem leżące najdalej na lewo, znajdą się w sposób zupełnie podobny.

Nakreślmy więc najprzód rzut poziomy punktu leżącego najdalej na prawo, to jest punktu dotknięcia rzutu poziomego elipsy uważanej ze styczną prostopadłą do osi rzutów, a przechodzącą przez punkt n_1.

W tym celu przez punkta d i c rzutu poziomego równika nakreślmy styczne, a da się to wykonać z wielką dokładnością działając na danym okręgu koła, styczne te bowiem tworzą ze styczną pionową, przechodzącą przez punkt n_1 trójkąt 1 2 3, opisany na rzucie poziomym elipsy szukanej.

Wiedząc już o tem, że trójkąt opisany na krzywej stożkowej, może być uważanym za sześciobok również opisany na tejże stożkowej, a którego trzy kąty nie idące po sobie są równe dwu kątom prostym, więc możemy tu zastosować twierdzenie Brianchon'a, zkąd dojdziemy do następującej własności.

W trójkącie opisanym na stożkowej proste łączące punkta dotknięcia każdego boku z przeciwległym wierzchołkiem, przecinają się w jednym punkcie.

Twierdzenie to prowadzi do następującego wykreślenia : należy nakreślić proste $2c$, $3d$, wyznaczyć ich punkt przecięcia 4, nakreślić prostę 4 1 i wyznaczyć punkt g przecięcia się jej z prostą 2 3, a punkt tak znaleziony będzie właśnie punktem szukanym.

Należy teraz znaleźć rzut pionowy tego punktu, w tym celu zaś oznaczmy przez γ, γ_3 punkta spotkania się odpowiednie stycznej, w punkcie leżącym najwięcej na prawo, z osią rzutów i z prostą $\alpha P'$. Ponieważ odcinek tej stycznej, zawartej pomiędzy jej śladem pionowym g_3 i punktem styczności, ma za rzut poziomy prostę $g\gamma$, więc znajdziemy długość jego rzutu pionowego, kreśląc dalej przez punkt g_1 prostę równoległą do xy, wyznaczając punkt g_1 przecięcia się jej z prostą αP, kreśląc dalej przez punkt g_1 prostę prostopadłą do xy, i znajdując wreszcie punkta γ_2, g_2 przecięcia się jej z prostemi yx i αP, a długość $\gamma_2 g_2$ tak znaleziona, będzie właśnie długością odcinka szukanego.

Odcinając obecnie długość $g_3 g'$ równą $\gamma_2 g_2$, znajdziemy punkt g' leżący najdalej na prawo na rzucie pionowym.

Można było dojść do tegoż rezultatu działając wprost, to jest szukając punktów przecięcia się stycznych profilu z krzywą dotknięcia, która ma za rzut na jakąkolwiek płaszczyznę profilu liniję prostą, gdyż wówczas obracając figurę o 90° naokoło osi z, z', dostatecznem będzie wyznaczyć przecięcie się rzutów prostolijnych krzywej dotknięcia z tworzącemi, a następnie powrócić figurę do pierwotnego położenia.

688. Punkt najwyższy i punkt najniższy. — Wierzchołki. — Punkt najwyższy i punkt najniższy (u, u'), (v, v') zostały wyznaczone sposobem ogólnym (§ 676).

Punkta te są zarazem dwoma wierzchołkami krzywej, jak to wskazuje symetrya figury, a rzuty środka o, o' prostej łączącej je z sobą jest środkiem krzywej, wreszcie punkta (w', w), (w'_1, w_1) są dwoma pozostałemi wierzchołkami.

Widzimy, że punkta u, v, w_1, w są wierzchołkami rzutu poziomego, a punkta u', v', w', w'_1 są końcami dwu średnic sprzężonych rzutu pionowego, co mając łatwo już nakreślimy oba rzuty elipsy, a robiąc kład figury naokoło poziomej $\psi_1\psi'_1, \psi\psi'$ jej płaszczyzny, znajdziemy jej rzeczywistą wielkość $U''V''W''W''_1$.

PRZECIĘCIA PŁASKIE HYPERBOLOIDY OBROTOWEJ JEDNOPOWŁOKOWEJ

689. Ponieważ przecięcia hyperboloidy obrotowej jednopowłokowej i jej ostrokręgu asymptotycznego płaszczyzną są podobne, więc na mocy tej własności możemy : 1° rozpoznać rodzaj przecięcia płaskiego hyperboloidy, i 2° znaleźć sposób kreślenia jego rzutów, posługując się rzutami przecięcia ostrokręgu asymptotycznego, jak to zobaczymy poniżej.

690. Zadanie. — *Nakreślić rzuty i rzeczywistą wielkość przecięcia hyperboloidy obrotowej jednopowłokowej płaszczyzną.* — W tem zadaniu napotykamy trzy przypadki :

Pierwszy przypadek. — *Kiedy przecięcie jest eliptycznem* (*fig.* 380, tab. XLVI). — Powierzchnia jest wyznaczoną przez swą oś z, z' prostopadłą do płaszczyzny poziomej rzutów, i przez jednę z tworzących obrazu $0g$, $0'g'$, a płaszczyzna przez ślady $P\alpha P'$.

Tworząca obrazu $0g$, $0'g'$ i płaszczyzna $P\alpha P'$ tworzą z płaszczyzną poziomą rzutów dwa kąty, z których pierwszy, celem otrzymania elipsy z przecięcia, został wziętym większym od drugiego.

691. Wykreślenie jakiegokolwiek punktu przecięcia. — Przyjąwszy tu, jak to uczyniliśmy dla ostrokręgu (§ 665), płaszczyzny równoległe do płaszczyzny poziomej rzutów i równo oddalone od koła szyjnego, podamy wykreślenie dla jednej z tych płaszczyzn, mającej ślad pionowy Q'; ta płaszczyzna przecina powierzchnię podług równoleżnika, którego rzut poziomy ma środek w punkcie z, a przecięcie się jej z tworzącą $0'g'$, $0g$ jest punktem należącym do tego równoleżnika. Rzut jego poziomy znajdziemy z łatwością.

Przecięcie się tejże płaszczyzny z płaszczyzną $P\alpha P'$ jest prostą, mającą ślad pionowy w punkcie v', v, a rzut poziomy vh idący przez v w kierunku równoległym do αP.

Punkta spotkania się (c, c'), (d, d') przecięć właśnie znalezionych, są punktami szukanej elipsy.

692. Styczna w jakimkolwiek punkcie. — Jeżeli przyjmiemy punkt d, d' i nakreślimy przezeń ślad poziomy płaszczyzny stycznej do powierzchni (§ 503), to ta płaszczyzna będzie wyznaczona przez dwie tworzące prostolinijne przechodzące przez ten punkt, a których rzutami poziomemi będą styczne do rzutu poziomego koła szyjnego, przechodzące przez ten punkt d. Nakreśliwszy rzuty o których mowa, widzimy, że punkt d, d' leży nad kołem szyjnem, a zatem ślady poziome t, t_1 tworzących prostolijnych otrzymamy bez trudności.

Nakreśliwszy obecnie ślad poziomy tt_1 płaszczyzny stycznej i znalazłszy jego przecięcie t_2 ze śladem $\alpha P'$, punkt t_2, którego rzutem pionowym jest t'_2, będzie śladem poziomym stycznej, której rzuty otrzymamy, kreśląc proste t_2d, t'_2d'.

693. Punkt najwyższy i punkt najniższy. — Wierzchołki. — Ponieważ płaszczyzna przechodząca przez oś z, z' prostopadle do płaszczyzny $P\alpha P'$, jest także prostopadłą do płaszczyzny poziomej rzutów i ma za ślad poziomy prostę R prostopadłą do αP, przechodzącą przez punkt z, i ponieważ nadto jest ona płaszczyzną symetryi wspólną hyperboloidzie i płaszczyźnie $P\alpha P'$, więc punkta krzywej szukanej, które leżą na tej płaszczyźnie, są zarazem i punktem najwyższym i najniższym i dwoma wierzchołkami tej krzywej. Punkt z, e' przecięcia się płaszczyzny $P\alpha P'$ z osią z, z' został wyznaczonym za pomocą prostej zh, $h'e'$, należącej i do płaszczyzny obrazu przechodzącej przez oś z, z' i do płaszczyzny $P\alpha P'$; nadto, ponieważ ten punkt z, e jest punktem przejścia prostej przecięcia się płaszczyzny $P\alpha P'$ z płaszczyzną symetryi, mającą prostę R za ślad poziomy, a której drugim punktem przejścia jest punkt h_1, h'_1, przecięcia się prostych R z P, zatem prosta h_1z, h'_1e', łącząca te dwa punkta, przetnie powierzchnię właśnie w punktach szukanych, to jest, że wystarczy znaleźć tylko przecięcie się hyperboloidy z tą prostą hz, $h'e'$, a że to zadanie zostało już obszernie rozwiniętem w paragrafie 519, podamy więc tu tylko wykreślenia po sobie następujące.

Z punktu z jako środka promieniem równym zh_1 nakreśliwszy okrąg koła, ten ostatni będzie śladem pionowym ostrokręgu, opisanego obrotem prostej zh_1, $e'h'_1$ naokoło osi z, z'. Następnie, przez wierzchołek z, z' tego ostrokręgu i przez prostę g, g' należy przesunąć płaszczyznę, której ślad poziomy jest prostą łączącą ślady poziome 0, 0_1 prostej $0g$, $0'_1g'$, i prostej do niej równoległej a przechodzącej przez punkt e', z.

Ślad 00_1 spotyka ślad ostrokręgu pomocniczego w punktach 0_2, 0_3, które połączywszy z punktem z linijami prostemi, otrzymamy punkta przecięcia się f i l tych prostych z prostą $0g$, czyli rzuty poziome punktów przecięcia się ostrokręgu pomocniczego z tworzącą $0g, 0'g'$, a przez które należy nakreślić okręgi kół, mające środek w punkcie z. Tak znalezione okręgi kół są rzutami poziomemi równoleżników wspólnemi ostrokręgowi pomocniczemu i hyperboloidzie, a mianowicie przechodzący przez punkt f odpowiada powłoce górnej ostrokręgu, drugi zaś powłoce dolnej; punkt k przecięcia się pierwszego okręgu

koła z prostą $k_1 z$, przedłużoną poza punkt z, jest rzutem poziomym jednego z punktów szukanych, a drugi znajdujący się na dolnej powłoce ostrokręgu, ma za rzut poziomy punkt m. Ponieważ rzuty pionowe k', m' tych punktów leżą na przecięciu się prostej $k_1'e'$ z linijami rzutów, przechodzącemi przez punkta k i m, więc punkta szukane przedstawione są przez ich rzuty $(k', k), (m, m')$, dają nam dwa wierzchołki elipsy szukanej jakoteż jej punkt najwyższy i najniższy, a ponieważ płaszczyzny pomocnicze są płaszczyznami poziomemi, więc te punkta służą także do wyznaczenia płaszczyzn ograniczających.

Ponieważ środek o, o' prostej $mk, m'k'$ jest środkiem krzywej, więc płaszczyzna pozioma pomocnicza, mająca ślad pionowy Q'_1 przechodzący przez punkt o', posłuży do znalezienia dwu punktów (r, r'), (s, s'), które są dwoma pozostałemi wierzchołkami krzywej.

Ponieważ na płaszczyznie poziomej rzutów, rzuty wierzchołków zchodzą się z wierzchołkami rzutów, a na płaszczyznie pionowej rzutów wyznaczają one końce m', k', s', r' dwu średnic sprzężonych $m'k', r's'$ odpowiedniej elipsy, możemy więc nakreślić równoległobok $(1'2'3'4')$, opisany na tej krzywej.

694. Punkta poziomego obwodu pozornego. — Dla znalezienia tych punktów należy przeciąć hyperboloidę płaszczyzną koła szyjnego wziętą za płaszczyznę pomocniczą, to jest wykonać wykreślenie ogólne (§ 691) dla płaszczyzny pomocniczej mającej Q'_2 za ślad pionowy, któryto ślad przechodzi przez rzut pionowy środka powierzchni. W ten też sposób znalezione zostały punkta (u, u'), (w, w').

695. Punkta pionowego obwodu pozornego. — Przecięcie się płaszczyzny $P\alpha P'$ z płaszczyzną obrazu, przechodzącą przez oś z, z', jest prostą, której rzuty $hz, h'e'$ zostały już wyznaczone; ponieważ płaszczyzna ta obrazu spotyka nadto hyperboloidę podług obwodu pozornego pionowego tej powierzchni, zatem wykreśliwszy ten ostatni, to jest hyperbolę, której sposób kreślenia podaliśmy już (§ 502), możemy wprawdzie znaleźć jej przecięcie się z prostą hz, $h'e'$, lepiej jednakże kreślić wprost na danych figury nie używając hyperboli południkowej.

Zadanie tak przedstawione jest właśnie zadaniem podanem w poprzedzającym paragrafie, gdyż rzeczywiście należy znaleźć punkta przecięcia prostej hz, $h'e'$, spotykającej oś hyperboloidy z tąż powierzchnią.

Ponieważ ostrokrąg pomocniczy ma teraz za podstawę okrąg koła, którego środkiem jest punkt z, a punkt h punktem przejścia, zaś wierzchołek tego ostrokręgu jest punktem z, e' przecięcia się płaszczyzny $P\alpha P'$ z osią z, z', zatem śladem płaszczyzny pomocniczej jest $\theta\theta_1$.

Proste, podług których te dwie powierzchnie pomocnicze się spotykają, mają za rzuty poziome $\theta_4 z$, $\theta_5 z$.

Punkta przecięcia się δ i β tych rzutów z θg są rzutami poziomemi punktów, leżących odpowiednio na równoleżnikach wspólnych hyperboloidzie i nowemu ostrokręgowi pomocniczemu. Za pomocą tych punktów można znaleźć rzuty poziome równoleżników jakoteż rzuty poziome ε, γ, punktówszukanych, które następnie podnieść należy na prostę $h'e'$ do punktów γ', ε'.

Rysunek przedstawiający hyperboloidę ściętą, zawartą pomiędzy płaszczyzną poziomą rzutów a przecięciem eliptycznem, winien zadosyć czynić temu sprawdzeniu, że hyperbola obwodu pozornego pionowego winna przechodzić przez punkta ε', γ', i dotykać rzutu pionowego krzywej wspólnego przecięcia.

696. Rzeczywista wielkość przecięcia. — Należy naokoło αP i na płaszczyznę poziomą rzutów zrobić kład znalezionej właśnie elipsy, a to otrzymamy w sposób następujący: nakreśliwszy na płaszczyznie $P\alpha P'$ prostę obrazu $o\mu$, $o'\mu'$, przechodzącą przez środek przecięcia, znajdziemy kład szukany tego środka o_1, t. j. przecięcia łuku koła, mającego środek w puukcie μ, a promień równy $\mu' o'$, z przedłużeniem prostej oh_1 (§ 130).

Wreszcie wierzchołki w kładzie wyznaczają się łatwo, co widoczne z figury, również łatwo można wyznaczyć kład różnych punktów przecięcia i stycznych odpowiadających.

697. Wyznaczenie uboczne wierzchołków przecięcia płaskiego hyperboloidy (fig. 381, tab. LXVII). — Na tej figurze hyperboloida jest wyznaczoną tak samo jak na poprzedzającej, płaszczyzna zaś, dla uproszczenia, została obróconą naokoło osi z, z' tak, żeby przyjęła położenie $P_\alpha P'$, prostopadłe do płaszczyzny rzutów.

Przedewszystkiem wyznaczmy krzywę przecięcia się płaszczyzny danej z ostrokręgiem asymptotycznym do hyperboloidy. Ponieważ wierzchołek tego ostrokręgu zchodzi się ze środkiem z, z' powierzchni, a jedna z tworzących jego obwodu pozornego pionowego ma za rzut g' i prostę g_1 równoległą do g, a przechodzącą przez punkt z, druga zaś ma za rzut poziomy także g_1, a za rzut pionowy prostę g'_1 symetryczną do g' względem z', więc znajdziemy wierzchołki rzutu poziomego przecięcia ostrokręgu asymptotycznego płaszczyzną $P_\alpha P'$ (§ 657) zważając, że dwa z nich a i b można wykreślić natychmiast, a dwa pozostałe otrzymamy, posługując się ogniskiem i środkiem, z których pierwsze to jest ognisko f leży u spodka osi, a drugi to jest środek o znajduje się w środku prostej ab.

Jeżeli przez punkt o nakreślimy prostę prostopadłą do prostej ab, to ta ostatnia będzie drugą osią szukanego rzutu, a opisując z punktu f jako środka, promieniem oa równym połowie osi wielkiej, łuk koła, znajdziemy w punktach przecięcia się tego łuku z drugą osią, to jest w punktach c i d dwa pozostałe wierzchołki szukane.

Zajmijmy się teraz znalezieniem wierzchołków krzywej przecięcia hyperboloidy płaszczyzną $P_\alpha P'$.

Ponieważ punktowi o odpowiada na rzucie pionowym punkt o', który jest zarazem środkiem odcinków, utworzonych na αP przez asymptoty obwodu pozornego pionowego hyperboloidy i przez sam obwód, więc przecięcia utworzone przez płaszczyznę $P_\alpha P'$ na hyperboloidzie i na ostrokręgu asymptotycznym, są nietylko podobne lecz nadto współśrodkowe.

Dwa wierzchołki (o', c_1), (o', d_1) przecięcia hyperboloidy przez $P_\alpha P'$ są łatwe do wyznaczenia, przyjmując za płaszczyznę pomocniczą płaszczyznę poziomą, przechodzącą przez punkt o, o' (§ 691). Jeden z dwu pozostałych wierzchołków znajdziemy, kreśląc prostę cb a następnie do niej równoległę przez punkt c_1 i przedłużając ją do punktu b_1 spotkania się jej z g_1, gdyż przecięcia płaszczyzną $P_\alpha P'$ hyperboloidy i ostrokręgu asymptotycznego są podobnemi. Punkt tak znaleziony jest trzecim wierzchołkiem rzutu poziomego przecięcia, czwarty zaś a_1 otrzymamy zważając, że on jest symetrycznym punktu b_1 względnie do środka wspólnego rzutów poziomych obu przecięć.

698. Drugi przypadek. — *Przecięcie hyperboliczne* (*fig.* 382, tab. XLVI). — Powierzchnia niech będzie daną przez jej oś pionową z, z' i przez jednę z jej tworzących obrazu prostolijnych g, g', dla uproszczenia zaś wykreślenia płaszczyzna $P_\alpha P'$ niech będzie prostopadłą do płaszczyzny pionowej rzutów.

Ponieważ znalezienie jednego jakiegokolwiek punktu przecięcia, jest w zupełności takie same, jak w pierwszym przypadku, więc ono nie zostało przedstawione na rysunku.

699. Oś i wierzchołki. — Co się tyczy osi, to najłatwiejszy sposób wykonania rysunków dających takowe jest wynalezienie przedewszystkiem rzutu pionowego środka; otóż rzut ten leży widocznie w środku o' odcinka, utworzonego na $\alpha P'$ przez hyperbolę obwodu pozornego pionowego powierzchni, lub lepiej mówiąc, w środku odcinka $l'k'$, utworzonego na tejże prostej $\alpha P'$ przez asymptoty tej hyperboli. Znając rzut pionowy, znajdziemy odpowiedni rzut poziomy bez trudności.

Łatwo teraz wyznaczyć położenie osi urojonej, gdyż, jeżeli tak jak na naszym rysunku, punkt o przypada wewnątrz obwodu pozornego pionowego powierzchni, to prosta prostopadła do płaszczyzny

pionowej rzutów, a przechodząca przez ten punkt, jest właśnie kierunkiem tejże osi, płaszczyzna zaś pozioma pomocnicza, przechodząca przez punkt z' posłuży do znalezienia obu jej końców. Wykonywając ten rysunek otrzymaliśmy punkta (s_1, o'), (s_2, o').

Jeżeli przeciwnie punkt o' leży zewnątrz obwodu pozornego pionowego powierzchni, to wierzchołki osi poziomej są urojone, a wówczas i tylko wtedy, należy dla znalezienia ich użyć sposobu nieco długiego, służącego do wyznaczenia wierzchołków osi przecinającej z, z' (§ 693).

700. Asymptoty przecięcia. — Dla jakiejkolwiek powierzchni obrotowej można, jakeśmy to pokazali powyżej (§ 681), przy wyznaczaniu gałęzi nieskończonych i asymptot, zastąpić, powierzchnię obrotową daną przez jej ostrokrąg asymptotyczny, a tym sposobem zastąpić wykreślenie ostrokręgu asymptotycznego tem, które zostało podane w paragrafie 586 i które tu tylko wskażemy.

Nakreślmy przedewszystkiem ostrokrąg asymptotyczny. Otóż wierzchołek jego jest środkiem σ', z powierzchni danej, podstawa zaś jego na płaszczyznie poziomej rzutów jest okręgiem koła, mającym środek w punkcie z, a którego jeden punkt obwodu znajdziemy, kreśląc ślad poziomy t prostej g^1, g_1 równoległej do g, g', i przechodzącej przez punkt z, σ'. Łatwo teraz nakreślimy samą podstawę.

Następnie przez wierzchołek ostrokręgu nakreślmy płaszczyznę $Q'\beta Q$ równoległą do $P'\alpha P$ i weźmy tworzące $(\sigma\beta, z\beta_1)$, $(\sigma'\beta, z\beta_2)$, podług których ta płaszczyzna przecina ostrokrąg asymptotyczny, to kreśląc przez te proste płaszczyzny styczne do ostrokręgu, śladami poziomemi tychże płaszczyzn będą proste, przechodzące przez punkta β_1, β_2, a styczne do podstawy ostrokręgu.

Ślady te spotykają αP w punktach h_1, h_2, które są śladami poziomemi szukanych asymptot, zkąd wypada, że rzutami poziomemi tych ostanich są proste, przechodzące przez punkta h_1, h i odpowiednio równoległe do prostych $\beta_1 z$, $\beta_2 z$.

Zauważymy w końcu, że płaszczyzny styczne do ostrokręgów a przechodzące przez proste $(z\beta_1, \beta\sigma')$, $(z\beta_2, \beta\sigma')$, są płaszczyznami asymptotycznemi do hyperboloidy, i że każda z nich winna przecinać powierzchnię podług dwu tworzących prostolinijnych, równoległych względem siebie i odpowiednio równoległych do tworzącej styczności tych płaszczyzn z ostrokręgiem.

Z tego co poprzedza wnosimy, że styczne do rzutu poziomego koła szyjnego, a przechodzące przez punkta t_2, τ_2 przecięcia się śladów poziomych hyperboloidy z jedną z uważanych płaszczyzn asymptotycznych, winny, jeżeli rysunek jest dokładnie wykonany, być równoległe do prostej βz. Takież sprawdzenie dokładności rysunku ma miejsce dla płaszczyzny asymptotycznej, dotykającej ostrokręgu asymptotycznego podług tworzącej $(z\beta_1, \sigma'\beta)$.

Powiemy jeszcze słów kilka o wykreśleniach znajdujących się na naszej figurze, a należących do kilku ważniejszych punktów przecięcia.

Przedewszystkiem punkt k, k' przecięcia się tworzącej danej z płaszczyzną $P\alpha P'$, należy do przecięcia. Dodając ten punkt do dwu asymptot dopiero znalezionych, mamy elementa niezbędne do wykreślenia samej krzywej, któryto rysunek da się teraz uskutecznić bez trudności.

Nadto wyznaczone zostały punkta (a, a'), (b, b'), w których krzywa przecięcia spotyka obwód pozorny poziomy powierzchni, i punkta (c, c'), (d, a), (e, e'), (f, e'), w których ona spotyka dwie płaszczyzny poziome równooddalone od koła szyjnego, a z których jedna jest płaszczyzną poziomą rzutów.

Te dwie płaszczyzny poziome zawierają pomiędzy sobą odcinek hyperboloidy, którego część górna, leżąca nad płaszczyzną $P\alpha P'$ odjętą została, dla wskazania części widzialnych; nadto hyperboloida została przyjętą za pełną i nieprzezroczystą, a części widzialne i przecięte są kreskowane (§ 275).

Trzeci Przypadek. — *Przecięcie paraboliczne* (*fig.* 283, tab. XLVII). — Zachowując dane poprze-

dzającej figury, ustawmy płaszczyznę sieczną $P\alpha P'$ w położeniu prostopadłem do płaszczyzny pionowej rzutów i równolegle do tworzącej g, g', a otrzymamy z przecięcia parabolę.

Ponieważ parabola jest granicą elipsy, więc wszystko co było tam powiedziane, z małą zmianą stosuje się i tutaj.

Dwie tylko kwestye, które dają się rozwiązać sposobami odnoszącemi się do samej paraboli, rozbierzemy tutaj.

701. Oś i wierzchołki, — Prosta ta, αP, leżąca na przecięciu się płaszczyzny $P\alpha P'$ z płaszczyzną obrazu przechodzącą przez z, z', jest osią.

Dla znalezienia wierzchołka należy znaleźć przecięcie się osi z powierzchnią; otóż, ponieważ oś ta, αP jest równoległą do tworzącej θg, $\theta' g'$, czyli te dwie proste leżą na jednej płaszczyznie, przyjmując więc tę płaszczyznę za płaszczyznę sieczną pomocniczą, znajdziemy na hyperboloidzie krzywę drugiego stopnia, która obejmując tworzącę θg, $\theta' g'$, będzie utworzona z tej tworzącej innego układu, którą natychmiast znajdziemy.

Nakreśliwszy bowiem ślad poziomy hyperboloidy i ślad poziomy θt płaszczyzny pomocniczej, i biorąc nadto drugi punkt h ich wspólnego przecięcia, znajdziemy jeden z punktów szukanej tworzącej, a ztąd rzut poziomy drugiej tworzącej przecięcia jest jedną z dwu stycznych, które możemy nakreślić z punktu h do rzutu poziomego koła szyjnego.

Z tych dwu stycznych należy teraz wybrać tę, która odpowiada zadaniu; otóż, ponieważ patrzący znajdując się w punkcie 0 i zwrócony ku punktowi d, w którym g spotyka rzut poziomy koła szyjnego, będzie miał żądaną tworzącą po lewej stronie, gdyby zaś patrzący znajdował się w punkcie h i w tychże samych warunkach co wyżej, to winien on widzieć rzut poziomy koła szyjnego po prawej stronie (§ 504), zatem styczna, którą wziąć należy, jest hk, a punkt s przecięcia się jej z prostą ta jest zarazem i rzutem poziomym wierzchołka i wierzchołkiem rzutu poziomego, a odpowiedni rzut pionowy znajduje się w punkcie s' przecięcia się prostej P' z liniją rzutów przechodzącą przez punkt s.

702. Ognisko rzutu poziomego. — Przedewszystkiem wyznaczmy części składowe paraboli wspólnej płaszczyznie $P\alpha P'$ i ostrokręgowi asymptotycznemu. W tym celu dopełnijmy obwodu pozornego pionowego ostrokręgu asymptotycznego, a któryto obwód składa się z dwu prostych mających rzut poziomy wspólny ta, zaś rzuty pionowe g', g'_1 symetrycznie ułożone względem punktu z.

Ponieważ punkt σ, σ' przecięcia się płaszczyzny $P\alpha P'$ z prostą g'_1, ta jest wierzchołkiem paraboli, powstałej z przecięcia ostrokręgu płaszczyzną $P\alpha P'$, punkt zaś α jest wierzchołkiem jej rzutu poziomego, a punkt z, na zasadzie twierdzenia dowiedzionego wyżej (§ 401), jest jej ogniskiem, więc dowiedziemy, że płaszczyzna $P\alpha P'$ przecina hyperboloidę i ostrokrąg asymptotyczny podług dwu parabol równych.

Odnieśmy powierzchnię i ostrokrąg asymptotyczny do trzech osi spółrzędnych prostokątnych, przechodzących przez środek koła szyjnego; niech jedna z nich to jest OZ będzie osią obrotu obu powierzchni, druga zaś OX niech leży na płaszczyznie koła szyjnego i ma za rzut poziomy za.

W tym układzie spółrzędnych, ponieważ równania tak hyperboloidy jakoteż i ostrokręgu asymptotycznego będą się tylko różniły od siebie wyrazem stałym, zatem i równania rzutów poziomych na płaszczyznę koła szyjnego parabol, powstałych z przecięcia tych powierzchni płaszczyzną $P\alpha P'$, będą się różniły od siebie tymże samym wyrazem stałym, a nadto, ponieważ rzuty te są dwoma parabolami, mającemi oś wspólną OX, równania więc ich są następujące

$$y^2 = 2px + c,$$
$$y^2 = 2px + c',$$

zkąd wynika, że rzuty dwu parabol na płaszczyznę koła szyjnego, lub innemi słowy na płaszczyznę poziomą rzutów, mają jeden i ten sam parametr, a tem samem są sobie równe.

Dla dopełnienia wykreślenia, weźmiemy poprostu na osi za, od punktu s, odcinek sf równy odcinkowi σz i skierowany w tęż samą stronę, a znajdziemy punkt f, który będzie ogniskiem szukanym.

Znając obecnie ognisko i wierzchołek łatwo wykreślimy parabolę.

PRZECIĘCIE PROSTEJ Z POWIERZCHNIĄ.

703. Żeby znaleźć przecięcie prostej z powierzchnią, należy przez prostę przesunąć płaszczyznę i szukać przecięcia tej ostatniej z powierzchnią, a punkta spotkania prostej danej z przecięciem płaskiem będą punktami szukanemi.

Dla danego ostrokręgu lub walca, płaszczyzna pomocnicza winna przechodzić przez wierzchołek ostrokręgu lub w kierunku tworzących walca. Dla hyperboloidy płaszczyznę pomocniczą można zastąpić paraboloidą (§ **518**).

Zajmijmy się teraz powierzchniami obrotowemi drugiego stopnia.

704. Zadanie. — *Nakreślić przecięcie się prostej z kulą* (*fig.* 334, tab. XLVII). — Nakreślmy obwody pozorne kuli w rzutach i dwa rzuty ab, $a'b'$ prostej danej. Wiemy, że jakiekolwiek byłoby położenie prostej, zawsze możemy sprowadzić ją, obrotem naokoło osi pionowej, przechodzącej przez środek kuli o, o' do położenia równoległego do płaszczyzny pionowej rzutów (§ **119**); skutkiem takiegoto obrotu spodek p, p' najkrótszej odległości osi od prostej przypada w punkcie p, p', zaś ślad θ, θ' prostej ab, $a'b'$ w θ, θ'_1, czyli $\theta_1 p_1$, $\theta'_1 p'_1$ są nowemi rzutami prostej danej.

Znając to przetnijmy kulę płaszczyzną pionową rzucającą tę prostę w jej nowem położeniu, a ta wyznaczy na kuli okrąg koła cd, $c'd'$, którego przecięcie się z prostą obrazu w punktach (n'_1, n_1), (m'_1, m_1) wyznaczy właśnie przecięcie się kuli z prostą daną.

Wracając teraz do pierwotnego położenia, otrzymamy punkta (m, m'), (n, n') szukane. Części rzutów prostej ukryte przez kulę, zostały przedstawione na naszej figurze punktami okrągłemi; znajdują sięone sposobem podanym w paragrafie **267.**

705. Zadanie. — *Nakreślić przecięcie się elipsoidy obrotowej z prostą.*

Pierwsze rozwiązanie. — Należy przeciąć powierzchnię płaszczyzną rzucającą prostę na płaszczyznę pionową rzutow, a następnie, dla uniknienia kreślenia elipsy, należy znaleźć taką płaszczyznę, na której krzywa przecięcia ma za rzut okrąg koła, poczem wykreślenie da się wykonać bez trudności.

Drugie rozwiązanie. — Należy zmniejszyć spółrzędne prostopadłe do płaszczyzny równika w taki sposób, żeby zamienić elipsoidę na kulę, a wówczas prosta dana zamieni się na inną prostę.

Rzuty poziome punktów wspólnych tej ostatniej prostej z kulą, dadzą sięznaleźć bardzo łatwo (§ **704**) i będą rzutami punktów szukanych, rzuty zaś pionowe odpowiadające znajdziemy za pomocą linij rzutów.

Tego rozwiązania używa się dla elipsoidy o trzech osiach nierównych, z tym jednakże warunkiem, żeby robić niejedno lecz dwa przekształcenia podobne do właśnie podanego.

Trzecie rozwiązanie (*fig.* 385, tab. XLVII). — Przyjmijmy w położeniu zwyczajnem elipsoidę daną przez swe obwody pozorne i oznaczmy przez ab, $a'b'$ rzuty prostej. Jeżeli przetniemy elipsoidę płaszczyzną rzucającą prostę daną na płaszczyznę pionową rzutów, to przecięcie tak utworzone będzie

elipsą, mającą za rzut pionowy prostę $e'f'$; jeżeli następnie nakreślimy proste łączące odpowiednio punkta e', f' z końcami d', e' rzutu pionowego równika i oznaczymy ich punkt zbiegu przez s, jeżeli nadto weźmiemy pod uwagę ostrokrąg pomocniczy, którego wierzchołek leży w punkcie (s, s') płaszczyzny obrazu przechodzącej przez z, z', a którego rzut pionowy przypada w punkcie s', i mający za podstawę przecięcie elipsoidy przypadające w rzucie pionowym na $e'f'$, to ten ostrokrąg będzie drugiego stopnia i przetnie powierzchnię podług pierwszej krzywej także drugiego stopnia, która dla uzupełnienia przecięcia będzie miała krzywę płaską, a ta ostatnia jest, jak to łatwo widzimy, równikiem.

Znalazłszy wreszcie punkta, w których prosta dana spotyka ostrokrąg pomocniczy, te będą właśnie punktami szukanemi. Rozwiązanie tu podane stosuje się w zupełności do elipsoidy o trzech osiach nierównych i do hyperboloidy jednopowłokowej.

706. Zadanie. — *Znaleźć punkta wspólne danej prostej i paraboloidzie.* — Przyjmiemy, że oś powierzchni jest pionową. Jeżeli prosta dana nie jest równoległą do osi, to przyjmując za płaszczyznę pomocniczą jej płaszczyznę rzucającą prostopadle do płaszczyzny pionowej rzutów, ta odetnie na powierzchni elipsę, mającą rzut poziomy kołowy (§ 480), poczem resztę wykreślenia wykonamy z łatwością. Jeżeli zaś prosta dana jest równoległą do osi, to znajdziemy łatwo równoleżniki powierzchni przechodzące przez punkta szukane, a tem samem i punkta żądane. Kończąc dodamy, że rozwiązanie to może być zastosowanem do paraboloidy eliptycznej pod tym warunkiem, że ją poprzednio zamienimy na paraboloidę obrotową sposobem podanym w paragrafie (**705**, 2° rozw.).

ROZDZIAŁ VI

PRZECIĘCIE SIĘ DWU POWIERZCHNI KRZYWYCH

707. Zadanie I. — *Znaleźć przecięcie się dwu ostrokręgów, których podstawy leżą na jednej płaszczyźnie* (*fig.* 386, tab. XLVIII). — W niniejszym przykładzie podstawy są dwoma okręgami kół γ, γ_1, leżącemi na płaszczyźnie poziomej rzutów i mającemi środki w punktach o, p_1, rzutami wierzchołków są (s, s'), (σ, σ'), co mając, za pomocą tych danych możemy dokończyć przedstawienia dwu powierzchni, nakreśliwszy ich obwody pozorne.

708. Wyznaczenie jakichkolwiek punktów linii wspólnej obu powierzchniom. — W tym przypadku moglibyśmy użyć za płaszczyzny pomocnicze płaszczyzn poziomych, lecz dla usunięcia z jednej strony przecięć kołowych trudniejszych do wykreślenia, aniżeli przecięcia prostolinijne powstałe z użycia księgi płaszczyzn pomocniczych przechodzących przez prostę $s\sigma, s'\sigma'$, łączącą wierzchołki ostrokręgów danych, a następnie celem rozbioru tego zadania w całej ogólności i otrzymania rozwiązania niezależnego od kształtu nadanego podstawom, uważaliśmy za stosowne, użyć tego ostatniego układu płaszczyzn pomocniczych.

Ślady poziome płaszczyzn pomocniczych przechodzących przez liniję wierzchołków $s\sigma, s'\sigma'$, tworzą wiązkę prostych przechodzących wszystkie przez ślad poziomy t, tej linii.

Oznaczywszy przez P jeden ze śladów, widzimy, że ponieważ ta prosta spotyka podstawę pierwszego

ostrokręgu w punktach a_5, a_7, podstawę drugiego w punktach b_5, b_7, a dwa zaś ostrokręgi, podług czterech tworzących, mających za rzuty poziome, proste sa_5, sa_7, σb_5, sb_7, w punktach więc przecięcia rzutów poziomych tych prostych, to jest w punktach m_5, m_7 i m_{16}, m_{18}, otrzymamy rzuty poziome czterech punktów należących do krzywej szukanej.

Znajdźmy rzuty pionowe a'_7, b'_7, punktów a_7, b_7, i nakreślmy rzuty pionowe $s'a'_7$, $\sigma'b'_7$, odpowiednich tworzących, to w punkcie m'_7 przecięcia się tych linij znajdziemy rzut pionowy punktu M_7 przecięcia, przyczem, jako sprawdzenie rysunku punkta m_7, m'_7 winny leżeć na jednej i tej samej linii rzutów.

W takiż sam sposób należy postąpić dla znalezienia trzech pozostałych punktów, leżących na tejże płaszczyznie pomocniczej.

709. Styczna w jakimkolwiek punkcie przecięcia.

Pierwszy przypadek. — *Jeżeli ślady na płaszczyznie obu podstaw, płaszczyzn stycznych do obu ostrokręgów a przechodzących przez punkt dany, przecinają się w granicach rysunku.* — Przypuśćmy, że chcemy przez punkt m_7, m'_7 nakreślić styczną do wspólnego przecięcia powierzchni danych. Zadanie to nie jest niczem innem, jak nakreśleniem prostej wspólnego przecięcia się płaszczyzn stycznych do obu ostrokręgów, a przechodzących przez tenże punkt. Żeby więc znaleźć tę prostę, wiemy, że ona przechodzi już przez jeden punkt m_7, m'_7, należy tedy nakreślić przez ten punkt ślady poziome płaszczyzn stycznych, które są prostemi R_1, R_2 stycznemi do odpowiednich podstaw, a przechodzącemi przez punkta a_7, b_7 i wziąć punkt θ, θ' ich wspólnego przecięcia, poczem łącząc punkt θ, θ' z punktem m_7, m'_7 liniją prostą, otrzymamy styczną szukaną.

Drugi przypadek. — *Kiedy ślady, na płaszczyznę obu podstaw płaszczyzn stycznych do obu ostrokręgów, a przechodzących przez punkt dany, przecinają się poza granicami rysunku.*

Obrawszy punkt m_{16} rzutu poziomego, potrzeba znaleźć przecięcie się płaszczyzn stycznych, mających za ślady poziome styczne R_1, R_3 do odpowiednich podstaw a przechodzące przez punkta a_7, b_{16}. Ale, zamiast uważać styczną szukaną jako przecięcie tych dwu płaszczyzn stycznych, uważajmy ją jako przecięcie się dwu ostrokręgów, mających za kierownice poziome R_1, R_3 a za wierzchołki odpowiednie (s, s'), (σ, σ'), i zastosujmy do nich wykreślenie ogólne.

Pod tem założeniem, ponieważ linja wierzchołków $s\sigma$, $s'\sigma'$, a tem samem i jej ślad poziomy t pozostaną, a zatem, jeżeli przez punkt t nakreślimy ślad poziomy Q płaszczyzny siecznej pomocniczej (możnaby także wziąć za płaszczyznę sieczną pomocniczą jednę z płaszczyzn, które służyły do znalezienia punktów szukanego przecięcia) to znajdziemy 1° punkta θ_1 i θ_3 jako przecięcia się płaszczyzny siecznej pomocniczej, której śladem poziomym jest Q, z R_1 i R_3; 2° proste $s\theta_1$, $\sigma\theta_3$ jako przecięcia się tejże płaszczyzny siecznej z płaszczyznami stycznemi; a wreszcie 3° na przecięciu się tych prostych z sobą punkt t, to jest rzut poziomy punktu leżącego na stycznej. Rzutem więc poziomym stycznej szukanej jest tm_{16}, pionowy zaś otrzymamy bardzo łatwo.

710. Punkta leżące na płaszczyznach granicznych. — Pomiędzy płaszczyznami pomocniczemi znajdują się takie, które dotykając jednej powierzchni przecinają zarazem drugą, a te płaszczyzny jakto już powiedzieliśmy (§ 519), zwą się płaszczyznami granicznemi.

Płaszczyzny, o których mowa mają na naszym rysunku, za ślady poziome P_1, P_2. Pierwsza z tych płaszczyzn, stosując tu wykreślenie ogólne, wyznacza w punktach przecięcia się tworzącej dotknięcia σb, $\sigma' b'_1$ płaszczyzny granicznej uważanej, z jednym ostrokręgiem jakoteż w punktach przecięcia się jej tworzących $(sa_1, s'a')$, $(sa_{12}, s'a'_{12})$ z drugim ostrokręgiem, dwa punkta (m_1, m') (m_{12}, m'_{12}) krzywej szukanej, w których, na zasadzie własności ogólnej powierzchni granicznych (§ 519), styczne

są poprostu tworzącemi (sa_1, $s'a'_1$), (sa_{12}, $s'a'_{12}$), podług których płaszczyzna graniczna przecina jednę z powierzchni.

W podobny sposób przekonamy się, że druga płaszczyzna graniczna, mająca za ślad poziomy P_2, wyznacza także dwa punkta (m_6, m'_6), (m_{17}, m'_{17}) i styczne odpowiednie (σb_6, $\sigma' b'_6$) (σb_{17}, $\sigma' b'_{17}$).

711. Przenikanie. — Przenikanie wzajemne. — Wycięcie. — Na płaszczyznie podstaw możemy znaleźć, zachowując powyższe dane i znakowanie naszego rysunku, jednę z trzech figur opisanych powyżej.

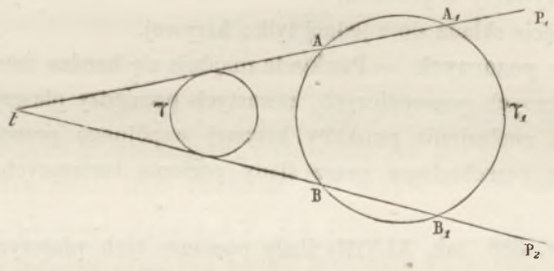

FIG. 06.

Na pierwszej z nich (fig. o_6) płaszczyzny graniczne dotykają obie jednej powierzchni a przecinają drugę, a przecięcie ztąd powstałe składa się z dwu krzywych, z których jedna jest utworzoną przez przecięcie się wszystkich tworzących ostrokręgu, mającego za podstawę γ, z tworzącemi ostro-

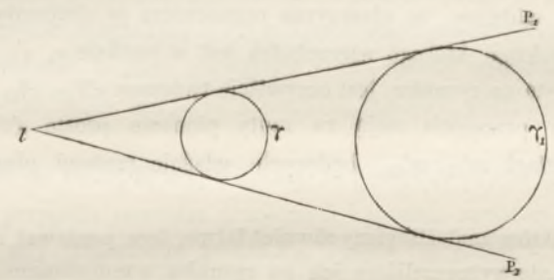

FIG. 07.

ręgu, mającego za podstawę γ_1, i których ślady poziome leżą na łuku AB; druga zaś pozostaje stale kombinując z sobą wszystkie tworzące ostrokręgu mającego za podstawę γ, z tworzącemi drugiego ostrokręgu, a których znów ślady poziome przypadają na łuku A_1B_1 podstawy γ'.

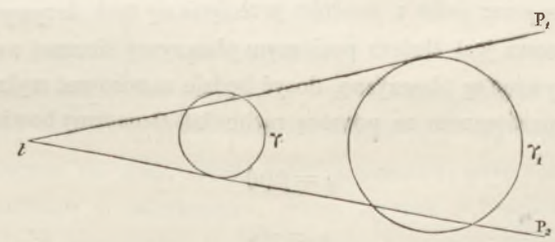

FIG. 08.

Jeżeli powierzchnia mająca za podstawę γ przecina drugą powierzchnię przy wejściu wzdłuż jednej krzywej a przy wyjściu wzdłuż drugiej, to powiadamy, że jest *przenikanie*.

Jeżeli zaś, jak to ma miejsce w drugim układzie (fig. o_7), każda z płaszczyzn granicznych dotyka obu powierzchni, to powiadamy, że jest *przenikanie wzajemne*.

Uważmy mimochodem, że z przenikania wzajemnego dwu ostrokręgów drugiego stopnia, podług twierdzenia MONGE'A (§ 475), otrzymujemy dwie krzywe także drugiego stopnia, przecinające się z sobą na każdej z płaszczyzn granicznych.

Nareszcie w ostatnim układzie (fig. o_8), który jest właśnie układem przyjętym na nowym rysunku, jedna z płaszczyzn granicznych dotyka jednej powierzchni a druga drugiej, oba więc ostrokręgi nacinają się wzajemnie, co nazywamy *Wycinkiem*.

W tym przypadku przecięcie składa się z jednej tylko krzywej.

712. Punkta obwodów pozornych. — Punkta te znajduje się bardzo łatwo, dosyć bowiem jest z pomiędzy płaszczyzn siecznych pomocniczych, zawartych pomiędzy płaszczyznami granicznemi wybrać te, które służąc do znalezienia punktów krzywej wspólnego przecięcia dwu powierzchni, mają swe ślady poziome przechodzące przez ślady poziome tworzących, składających obwody pozorne.

Na naszym rysunku (*fig.* 386, tab. XLVIII) ślady poziome tych płaszczyzn idą od punktu t do punktów a_{10}, b_3, b_{15}, a_4, a_{11}, b_{11}.

Dodamy tu, że punkta a_{11}, b_{11} zostały, przy układaniu na rysunku danych naszego zadania, tak wybrane, żeby prosta $a_{11}b_{11}$ przechodziła przez punkt t, lecz jestto przypadek szczególny, który obraliśmy jedynie dla uczynienia naszego wykreślenia więcej zajmującem.

Podajmy tu wykreślenia odnoszące się do jednej z linij tworzących obwody pozorne. Biorąc pod uwagę prostę $\sigma'b'_{15}$, σb_{10} widzimy, że płaszczyzna pomocnicza ją obejmująca ma za ślad poziomy prostę tb_{15} i przecina ostrokrąg, którego wierzchołek jest w punkcie σ, σ', podług dwu prostych, z których jedna, to jest użyta na rysunku, jest oczywiście tworzącą $\sigma'b'_{20}$, σb_{15}.

Na drugim ostrokręgu przecięcia mają za rzuty pionowe proste $s'a'_{15}$, $s'a'_{20}$, które przecinają prostę $\sigma'b'_{20}$ w punktach m'_{15}, m'_{20}, będących właśnie rzutami pionowemi dwu punktów szukanych.

Rzuty poziome tych punktów znaleźlibyśmy również łatwo, lecz ponieważ ich znajomość nie przedstawia nic ważnego, więc nie wyznaczaliśmy ich na rysunku, a tem samem uniknęliśmy zapełnienia figury linijami bez użytku, któreby tylko ją zaciemniały. W punktach m'_{15}, m'_{20} tak znalezionych, rzut pionowy wspólnego przecięcia winien spotkać prostę $\sigma'b'_{20}$ (§ 342).

713. Punkt najwyższy i punkt najniższy. — Wyznaczenie tych punktów prowadzi do następującego zadania:

Znając dwie krzywe γ, γ_1 *i punkt* t, *nakreślić przez ten punkt taką prostę, żeby styczne do każdej z krzywych* a', *przechodzące przez jeden z punktów przecięcia się tych krzywych z prostą, były równoległe.* — Prosta o której mowa jest śladem poziomym płaszczyzny siecznej pomocniczej, obejmującej punkta szukane, znalazłszy więc tę płaszczyznę, dosyć będzie zastosować wykreślenie ogólne.

Zadanie to może być rozwiązanem za pomocą rachunku. Oznaczmy bowiem przez

$$\rho = f(\omega)$$

$$\rho = \varphi(\omega)$$

równania dwu podstaw γ, γ_1, przyjmując za biegun punkt t, a za biegunową prostę jakąkolwiek przechodzącą przez ten punkt.

Ponieważ wiemy, że kąt V między styczną do krzywej a promieniem wodzącym ma wartość daną przez równanie

$$\operatorname{sty} V = \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)},$$

w którem α przedstawia nachylenie promienia wodzącego, przechodzącego przez punkt dotknięcia z osią biegunową, więc oznaczając przez α kąt między prostą szukaną a osią biegunową, otrzymamy

$$\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \frac{\varphi(\alpha)}{\varphi'(\alpha)}.$$

Gdyby to równanie dało się rozwiązać łatwo, to znajomość wartości dla α pociągnęłaby za sobą znajomość płaszczyzn siecznych pomocniczych, wyznaczających punkta szukane.

Ponieważ jednakże rozwiązanie tego równania jest prawie zawsze bardzo trudne, należy więc postępować sposobem przybliżeń kolejnych, a w tym celu, należy najprzód kreślić rozbieżne przez punkt t, dalej styczne do podstaw przez ich punkta przecięcia się z rozbieżnemi, a wreszcie znaleźć styczne, które są równoległe względem siebie. Najczęściej nie wyznacza się tych punktów, wyjąwszy w przypadku, gdy podstawy są podobne (homothétique), w tym bowiem szczególnym przypadku wystarcza, do znalezienia na obu płaszczyznach podstaw śladu płaszczyzn pomocniczych, obejmujących punkta szukane, połączyć punkt t ze środkiem podobieństwa. W przypadku podstaw kołowych, ponieważ dwa koła są zawsze podwójnie podobnemi, wystarcza połączyć punkt t z dwoma środkami podobieństwa, a w ten sposób znajdziemy ślady poziome płaszczyzn szukanych.

Zbytecznem jest tu dodawać, że jeżeli płaszczyzna w ten sposób wyznaczona ma obejmować punkt najniższy, trzeba i wystarcza, żeby ślad jej na płaszczyznę podstaw przypadał pomiędzy śladami płaszczyzn granicznych.

Stosując to wykreślenie do naszej figury, widzimy, że ponieważ prosta łącząca punkt t ze środkiem podobieństwa wprost, przypada zewnątrz przestrzeni kątowej, zawartej pomiędzy śladami P_1, P_2 płaszczyzn granicznych, gdy tymczasem, prosta P_3, łącząca ten punkt t ze środkiem podobieństwa odwrotnym c, jest zawartą wewnątrz tegoż kąta, należy więc tylko zastosować wykreślenie ogólne (§ 708), do płaszczyzny mającej P_3 za ślad poziomy, a wykonawszy takowe znajdziemy rzuty pionowe punktu najwyższego m'_{21} i punktu najniższego m'_9.

714. Punkta zwrotu pierwszego rodzaju. — Dwie linije obwodów dwu powierzchni na tęż samą płaszczyznę rzutów mogą przypadkowo zchodzić się z sobą w przestrzeni, a rzecz ta na rysunku zostanie przedstawioną przez dwie rozbieżne, wychodzące z punktu t i przechodzące odpowiednio przez ślady poziome dwu linij obwodów pozornych a należących do rzutów na tejże samej płaszczyznie dwu powierzchni stożkowych, zchodzących się z sobą. Ten szczególny przypadek, jakto już powiedzieliśmy powyżej ma miejsce na naszej figurze dla prostych at_{11}, tb_{11} zchodzących się z sobą. W tych warunkach, ponieważ dwie tworzące, mające za rzuty poziome proste sa_{11}, sb_{11} przecinają się w punkcie m_{11}, w którym płaszczyzny styczne do dwu ostrokręgów są pionowe, gdyż punkt M_{11}, należy do obwodu pozornego poziomego każdego z ostrokręgów, zatem styczna w punkcie M_{11} wspólnego przecięcia się jest prostopadłą w przestrzeni do płaszczyzny pionowej rzutów, a w skutek twierdzenia III$_{8^o}$, paragrafu 386, rzut poziomy przecięcia przedstawia w punkcie m_{11} punkt zwrotu pierwszego rodzaju.

715. Łączenie punktów. — Wycięcie. — Dla stwierdzenia przykładem wskazówek ogólnych, które

nastąpią, zajmiemy się tutaj przypadkiem przedstawionym na figurze, to jest Wycięciem, innemi zaś jakoto : Przenikaniem i przenikaniem wzajemnem zajmiemy się później rozwiązując zadania w tym celu osobno wybrane.

Używając tu rzutów zbieżnych (§ 283), powtórzmy najprzód uwagi już podane dla dwu ostrosłupów, a mianowicie :

Przedstawmy sobie punkt ruchomy, który wyszedłszy z jakiegokolwiek punktu krzywej szukanej i wracając do tegoż punktu, opisze ją ruchem ciągłym; ruchy zbieżne tegoż punktu ruchomego na płaszczyznę poziomą rzutow, ustawiając środek rzutów w wierzchołku s, s' lub w wierzchołku σ, σ', przebiegną ruchem ciągłym jużto podstawę γ jednego z ostrokręgów, jużteż podstawę γ_1 drugiego .

Wiemy, że dla każdego przejścia punktu ruchomego przez płaszczyznę, jedna z jego rzucających stożkowych jest styczną do krzywej w przestrzeni, ztąd wynika, że na odpowiednim rzucie zwróci on się napowrót (§ 385) i przebieży na nowo część krzywej już opisanej, jakoteż że, połączenie może mieć miejsce w sposób następujący :

Ustawiwszy, dla uniknienia jednego ze zwrotów, początek ruchu punktu ruchomego w punkcie M_1 płaszczyzny granicznej, mającej P_1 za ślad poziomy, to w tym przypadku, dla dwu rzutów zbieżnych punktu ruchomego i dla samego punktu znajdziemy im odpowiadające a po sobie następujące położenia : 1° na łuku podstawy γ, zawartym także pomiędzy płaszczyznami granicznemi, punkta a_1, a_{12}, a_3,... a_{12}, poczem od punktu a_{12} zwracając się napowrót, przejdziemy przez punkta a_{13}, a_{16},... a_{20}, a_{21}; 2° na łuku podstawy γ_1, zawartym także pomiędzy płaszczyznami granicznemi, punkta b_1, b_2, b_3,. . b_6, zkąd wracając napowrót otrzymamy b_{17}, b_8, b_9,... b_{17}, a wracając powtórnie, jeden z rzutów stożkowych przejdzie przez punkta b_{17}, b_{18},... b_{20}, b_{21}, b_1; wreszcie 3° na krzywej przestrzeni, otrzymamy punkta M_1,M_2, M_3,...M_{20}, M_{21}.

Tylko jeden rzut punktów obwodów pozornych przedstawia, jak to już zauważyliśmy, pewną szczególną wartość, a mianowicie ten, który należy do linii obwodu pozornego w rzucie, i z tegoto powodu oba rzuty nie zostały nakreślone na rysunku, punkta zaś takie jak M_4 nie zostały podane w rzucie pionowym.

Pamiętając tę uwagę, punkta, które zostały połączone liniją ciągłą, są następujące :

W rzucie poziomym m_1, m_2, m_4, m_5, m_6, m_7, m_{11}, m_{12}, m_{13}, m_{16}, m_{17}, m_{18}, m_{19}, m_1.

W rzucie zaś pionowym m'_1, m'_3, m'_6, m'_7, m'_8, m'_9, m'_{10}, m'_{12}, m'_{14}, m'_{15}, m'_{17}, m'_{20}, m'_{21}, m'_1.

716. **Części widzialne.** — Na figurze 386 (tab. XLVIII), zostało przedstawione ciało utworzone z dwu powierzchni wziętych razem, a w tem przypuszczeniu części widzialne zostały wyznaczone na zasadzie następujących uwag :

1° Żeby punkt wspólnego przecięcia względnie do jednej z płaszczyzn rzutów był widzialnym, czyli, żeby leżał na przecięciu się dwu tworzących widzialnych w rzucie.

2° Żeby punkta przejścia od części widzialnych do części niewidzialnych na jednej z płaszczyzn rzutów, leżały na linijach obwodów pozornych względem tejże płaszczyzny rzutu.

Połączenie tych dwu uwag z uważnem rozpatrzeniem figury, czego niczem zastąpić nie można , jest wystarczającem do dokładnego rozróżnienia części widzialnych od ukrytych, przedstawionych na naszym rysunku.

Figura 387 (tab. XLVIII) przedstawia ostrokrąg, mający wierzchołek w punkcie s, s', uważany za bryłę pełną wyciętą przez drugi ostrokrąg.

Figura 388 (tab. XLIX) przedstawia w tychże samych warunkach co powyżej drugi ostrokrąg.

Na figurze 389 (tab. XLIX) został nakreślony rysunek bryły wspólnej obu ostrokręgom.

Na figurze 390 (tab, XLIX) dostrzegamy rzuty części *powierzchni* ostrokręgu, mającego wierzchołek w punkcie σ, σ', a zawartej w granicach krzywej przecięcia, lub mówiąc innemi słowy, dostrzegamy *listek* utworzony przez część *powierzchni* ostrokręgu, o wierzchołku σ, σ' zawartej w drugim ostrokręgu.

Wreszcie na figurze 391 (tab. XLIX) został przedstawiony *listek* utworzony przez część *powierzchni* ostrokręgu, o wierzchołku s, s', zawartej w drugim ostrokręgu.

717. Zadanie II. — *Znaleźć przecięcie się dwu ostrokręgów, mających podstawy na dwu płaszczyznach różnych* (*fig.* 392, tab. XLIX). — Podamy tu tylko rzut poziomy figury.

Oznaczmy przez s, σ rzuty poziome wierzchołków dwu ostrokręgów, przez γ, γ_1 rzuty poziome ich podstaw leżących na płaszczyznach różnych, przez uv rzut poziomy prostej wspólnej obu płaszczyznom podstaw, przez θ, θ_1 rzuty poziome punktów, w których prosta, łącząca wierzchołki obu ostrokręgów, spotyka płaszczyzny podstaw γ, γ_1.

Ponieważ płaszczyzny pomocnicze muszą wszystkie przechodzić przez prostę wierzchołków, więc rzuty poziome ich śladów na płaszczyzny podstaw będą prostemi, wychodzącemi odpowiednio z punktów θ, θ_1 i przecinającemi się na prostej uv.

Oznaczywszy, dla jakiegokolwiek położenia płaszczyzny pomocniczej, przez $\theta\alpha_1$, $\theta_1\alpha_4$ rzuty poziome śladów tej płaszczyzny na płaszczyzny podstaw, to rzuty poziome tworzących, podług których ta płaszczyzna pomocnicza przecina oba ostrokręgi, będą sa_1, sa_{10}, σb_4, σb_{10}, punkta zaś ich przecięcia się m_4, n_4, m_{10}, n_{10} będą punktami rzutu poziomego linii wspólnego przecięcia się powierzchni danych.

Płaszczyzny graniczne dadzą się nakreślić bardzo łatwo, a ztąd nie mniej łatwo odróżnimy przypadek *wycięcia* od przypadku *przenikania*.

Dla urozmaicenia przykładów wzięliśmy umyślnie takie podstawy, żeby płaszczyzny graniczne $\theta\alpha_1\theta_1$, $\theta\alpha_7\theta_1$ były zarazem obie stycznemi do obu ostrokręgów, to jest żeby było *przenikanie wzajemne* dwu powierzchni stożkowych przedstawionych na naszym rysunku.

Dalej, za podstawy powierzchni przyjęliśmy elipsy, gdyż w tym przypadku, jak to powiedzieliśmy wyżej, z przecięcia na zasadzie twierdzenia Monge'a, otrzymamy dwie krzywe drugiego stopnia, przecinające się na płaszczyznach granicznych. Stosując obecnie wykreślenie ogólne do płaszczyzn granicznych, znajdziemy rzuty poziome dwu punktów m_1, m_7, w których spotykają się dwie krzywe tworzące przecięcie.

Widzimy nadto na rysunku, że punkta m_2, m_3, m_4, m_9, n_6, n_9, n_{12}, n_3 obwodów pozornych i styczna w punkcie n_4 zostały wyznaczone, podamy więc tu sposób kreślenia tej stycznej. Ponieważ rzuty poziome śladów płaszczyzn stycznych w punkcie N_4, do każdego ostrokręgu na odpowiednie płaszczyzny podstaw, są stycznemi $a_{10}\delta$, $b_4\beta$ do krzywych γ, γ_1, i ponieważ nadto możemy zastąpić płaszczyzny styczne przez ostrokręgi mające wierzchołki w punktach $(s, s'), (\sigma, \sigma')$ a za kierownice styczne rzucone poziomo na $a_{10}\delta$, $b_4\beta$, jak to już miało miejsce w paragrafie **709** (2^{gi} przypadek), zatem jeżeli przetniemy te ostrokręgi, płaszczyzną graniczną $\theta\alpha_1\theta_1$, znajdziemy rzuty poziome $\sigma\beta, \sigma\delta$ prostych wspólnego przecięcia i punkt wspólnego spotkania się tychże, to jest punkt ε. Prosta łącząca punkt ε z punktem n_4 jest rzutem stycznej szukanej.

718. Łączenie punktów. — Należy łączyć z sobą liniją ciągłą punkta znajdujące się na płaszczyznach pomocniczych po sobie następujących, a ktore napotkamy, przebiegając jednę podstawę dwa razy w tymże samym kierunku drugą zaś także dwa razy, lecz w kierunku przeciwnym.

Stosując tę uwagę do naszego rysunku, znajdziemy, punkta idące po sobie w następującym porządku,

$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_{11}, a_1$ dla podstawy γ jednego ostrokręgu,

$b_1, b_2, b_3, \ldots\ldots b_{12}, b_1$ — γ_1 drugiego —

wreszcie dla jednej z krzywych, którą chcemy wykreślić

$$m_1, m_2, \ldots\ldots m_{10}, m_1.$$

Zachowując tenże sam porządek dla krzywej γ_1, a zmieniając porządek użyty dla krzywej γ, znajdziemy na tej ostatniej krzywej punkta c_1, c_3, c_4, ... c_9,... c_1 a na krzywej, którą chcemy nakreślić, punkta m_1, n_3, n_4.... n_{12} m_1.

Widzimy nadto, że w tych warunkach, punkt przecięcia się rzutów poziomych śladów płaszczyzn pomocniczych na płaszczyzny podstaw, przybierał dla każdej z krzywych przecięcia kolejno położenia : α_1, α_2, α_3,... α_6, α_7, α_8,... α_{11}, α_{12}, α_1. Na figurze głównej (*fig.* 392, tab. XLIX) przedstawionym został ostrokrąg, uważany za bryłę pełną po usunięciu części jego zawartej w drugim ostrokręgu.

Figura 393 (tab. XLIX) przedstawia część wspólną obu ostrokręgom, a na figurze 394 tejże tablicy przedstawiono ostrokrąg, mający wierzchołek S i uważany jako pełny, a ograniczony płaszczyznami krzywych przecięcia.

Znając wierzchołek s, s' ostrokręgu i ślad poziomy jego podstawy γ, znając nadto ślad poziomy γ_1 podstawy walca i prostę $s\theta$, $s'\theta'$ równoległą do kierunku jego tworzących, a przechodzącą przez wierzchołek ostrokręgu, łatwo możemy znaleźć obwody pozorne obu powierzchni.

719. Zadanie III. — *Znaleźć przecięcie się ostrokręgu z walcem* (*fig.* 395, tab. L). — Ponieważ zadanie to jest tylko szczególnym przypadkiem dwu poprzedzających, i można je rozwiązać w taki sam sposób jak poprzedzające, więc tu tylko zajmiemy się rozwiązaniem jednego przypadku, a mianowicie, gdy obie podstawy leżą na jednej płaszczyźnie. Co się zaś tyczy znalezienia stycznych, punktów obwodów pozornych, punktów leżących na płaszczyznach granicznych, punktu najwyższego, najniższego i punktów zwrotu, odeszlemy czytelnika do rozwiązania ogólnego.

720. Wyznaczenie jednego jakiegokolwiek punktu. — Ponieważ płaszczyzny pomocnicze przechodzą zazwyczaj przez prostę łączącą wierzchołki ostrokręgów, to jest przez prostę $s\theta$, $s'\theta$ równoległą do tworzących walca, a przechodzącą przez wierzchołek ostrokręgu, więc ślady poziome płaszczyzn pomocniczych utworzą wiązkę, której wierzchołkiem będzie punkt θ. Jeżeli jednym z takich śladów jest P, to płaszczyzna pomocnicza odpowiadająca przecina ostrokrąg podług dwu tworzących, mających ślady poziome β_1, β_2 a za rzuty na tejże płaszczyźnie proste $s\beta_1$, $s\beta_2$, zaś walec także podług dwu tworzących, mających za ślady poziome α_1, α_2, a za rzuty tegoż nazwiska proste $\alpha_1 g_1$, $\alpha_2 g_2$, równoległe do $s\theta$, przechodzące przez punkta α_1, θ_2; tak znalezione rzuty przecinają się z sobą w punktach m_1, m_2, m_3, m_4, które są właśnie punktami rzutu poziomego szukanego przecięcia.

Sposób postępowania dla znalezienia rzutu pionowego jakiegokolwiek punktu M_4 jest następujący : Wyznaczywszy α'_1, β'_2, przez punkt α'_1, należy nakreślić prostę $\alpha'_1 g'_1$ równoległą do $s'\theta'$, i połączyć punkt s' z punktem β'_2 linią prostą, a przecięcie się prostych $\alpha'_1 g'_1$ i $s'\beta'_2$, które są rzutami pionowemi tworzących przecinających się w punkcie M_4, wyznaczy właśnie szukany rzut pionowy M_4

721. Płaszczyzny graniczne. — Ponieważ śladami poziomemi tych płaszczyzn są P_1 i P_2, a te płaszczyzny są styczne do podstawy γ, wnosimy więc ztąd, że jest *przenikanie* ostrokręgu w walec.

722. Łączenie punktów. — Przenikanie. — Powiedzieliśmy w paragrafie 292, że w przypadku przenikania łączenie punktów jest łatwiejszem jak w przypadku wycięcia, i rzeczywiście, gdyż przy przenikaniu mamy dwie krzywe, jednę wejścia a drugą wyjścia, które możemy nakreślić oddzielnie.

Dla nakreślenia pierwszej z nich, należy połączyć z sobą liniją ciągłą punkta przecięcia, leżące na płaszczyznach siecznych po sobie następujących, a to przebiegając jednocześnie całą podstawę γ ostrokręgu w kierunku strzałki f i dwa razy odcinek e_1k_1 podstawy γ_1, zawarty pomiędzy płaszczyznami granicznemi P_1, P_2 i w kierunku strzałek ψ, ψ_1, ψ_2, ψ_3.

W taki sam sposób znajdziemy krzywę wyjścia, tylko odcinek e_1k_1 zostanie zastąpionym przez a_1d_1, który należy przebiedz w kierunku strzałek φ, φ_1, φ_2, φ_3,

Na figurze (395 tab. L) przedstawione zostały ostrokrąg i walec lecz tylko w rzucie poziomym, figura zaś 396 tejże tablicy przedstawia część powierzchni ostrokręgu zawartą w walcu.

723. Zadanie IV. — *Znaleźć przecięcie dwu walców* (*fig.* 397, tab. LI). — Ponieważ zadanie to jest tylko szczególnym przypadkiem trzech poprzedzających, podamy więc tylko kilka ogólnych wskazówek.

Biorąc tu pod uwagę przypadek zwyczajny, to jest dwa walce dane przez ślady poziome ich podstaw, a które tutaj są kołami γ, γ_1 i przez kierunek ich tworzących, nakreślimy natychmiast ich obwody pozorne i zajmiemy się wyznaczeniem ich linii wspólnej.

724. Wyznaczenie jakiegokolwiek punktu linii wspólnej. — Przez punkt a, a' obrany dowolnie należy nakreślić proste równoległe do kierunku każdej tworzącej i znaleźć ślady poziome 0, θ_1 tych równoległych.

Ponieważ prosta łącząca punkta θ, θ_1 jest kierunkiem ogólnym śladów poziomych płaszczyzn pomocniczych, więc jeżeli P jest jednym z tych śladów, to przecięcia się $\theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5$ tego śladu z krzywemi podstaw, są śladami poziomemi tworzących, podług których płaszczyzna pomocnicza przecina walec. Nakreśliwszy rzuty poziome tych tworzących, znajdziemy w punktach ich przecięcia się z sobą rzuty poziome m_1, m_2, m_3, m_4 czterech punktów wspólnego przecięcia.

Jeżeli obecnie wyznaczymy rzut pionowy θ'_3, θ'_5 punktów θ_3, θ_5, a następnie nakreślimy przez te dwa rzuty proste odpowiednio równoległe do rzutów pionowych tworzących, to znajdziemy w punkcie m'_3 przecięcia się tych prostych, rzut pionowy jednego z punktów przecięcia. Jako sprawdzenie dokładności rysunku, punkta m_3, m'_3 winny leżeć na jednej linii prostej prostopadłej do osi rzutów.

W taki sam sposób znalezione zostały rzuty pionowe m_1', m'_2, m'_4 trzech pozostałych punktów przecięcia, leżących na płaszczyznie pomocniczej, a której śladem poziomym jest P.

725. Punkta szczególne krzywej wspólnego przecięcia. — Ponieważ tu P_1 i P_2 są śladami poziomemi płaszczyzn granicznych, jest więc *wycięcie*, z figury zaś łatwo poznamy wykreślenie służące do wyznaczenia punktów (a_1, a'_1), (a_2, a'_2), (a_3, a'_3), (a_4, a'_4), leżących na płaszczyznach granicznych i na obwodach pozornych.

Co się tyczy punktu najwyższego i najniższego, to zauważmy, że skoro podstawy są równe, środek podobieństwa wprost i równoległa do $0_1\ \theta_2$, przechodząca przezeń leżą w nieskończoności, a zatem i ta prosta nie jest zawartą pomiędzy śladami P_1, P_2 płaszczyzn granicznych; są więc tu tylko dwa punkta (h, h'), (b, b') o wzniesieniu największem i najmniejszem, które znajdziemy kreśląc środek podobieństwa odwrotnego ω, leżący we środku prostej łączącej środki podstaw γ, γ_1 i stosując

wykreślenie ogólne do płaszczyzny pomocniczej, której ślad poziomy P_3 przechodzi przez ten środek.

Figura główna przedstawia ciało utworzone przez dwa walce.

Figura 398 tejże tablicy przedstawia część pozostałą jednego z walców, uważanego za pełny, po odjęciu części zawartej w drugim, lub inaczej mówiąc, część pozostałą jednego walca wyciętą przez drugi.

Figura 399 (tab. L) przedstawia ciało wspólne obu walcom uważanym za pełne.

Wreszcie figury 400 i 401 tejże tablicy, przedstawiają dwa listki utworzone przez część powierzchni każdego walca, zawarte w krzywej wspólnej.

PUNKTA PODWÓJNE PRZECIĘCIA SIĘ POWIERZCHNI DRUGIEGO RZĘDU

726. Punkta te są dwojakiego rodzaju :

1° Punkta podwójne w przestrzeni.

2° Punkta podwójne w rzucie.

PUNKTA PODWÓJNE W PRZESTRZENI

727. Punkta te wyznaczają się dość łatwo, gdyż skoro w każdym z nich styczne do krzywej wspólnej winny leżeć na płaszczyznach stycznych do dwu powierzchni, zatem te płaszczyzny zchodzą się z sobą, czyli : *w punktach podwójnych wspólnego przecięcia dwu powierzchni te ostatnie mają płaszczyznę styczną wspólną.*

Odwrotność tej własności jest prawdziwą, lecz dowód jej ogólny nie może znaleźć miejsca w tym wykładzie, tylko nieco dalej zostanie ona dowiedzioną dla szczególnego przypadku, to jest dla powierzchni stożkowych.

Z poprzedzających uwag wnosimy, że sposób zwyczajny kreślenia nie jest prawdziwym dla punktów podwójnych, gdyż w tych punktach płaszczyzny styczne do dwu powierzchni, zchodzą się z sobą ; żeby więc znaleźć styczne w punkcie podwójnym, należy szukać prostych, podług których płaszczyzna styczna wspólna obu powierzchniom danym przecina ostrokrąg pomocniczy, mający wierzchołek w punkcie podwójnym, a za kierownicę krzywe wspólnego przecięcia się powierzchni. W tym celu zaś przeciąwszy ostrokrąg i płaszczyznę, jakąkolwiek inną płaszczyzną, i nakreśliwszy proste łączące punkta przecięcia się dwu linij w ten sposób znalezionych w punkcie podwójnym, te proste będą szukanemi stycznemi.

Wykreślenie tu podane może być ułatwione za pomocą kilku twierdzeń, następujących.

728. Twierdzenie. — *Jeżeli jakakolwiek krzywa stopnia m ma punkt podwójny, to ostrokrąg mający ten punkt za wierzchołek i przechodzący przez tę krzywę, jest stopnia m — 2.* — Przesuńmy przez punkt podwójny jakąkolwiek płaszczyznę, to przecięcie się jej z krzywą będzie miało miejsce w m punktach, z których dwa zejdą się z punktem podwójnym, a zatem płaszczyzna ta przetnie ostrokrąg podług $m - 2$ tworzących, czyli że stopień tej powierzchni będzie równym $m - 2$.

729. Wniosek. — *Jeżeli krzywa wspólnego przecięcia dwu powierzchni drugiego stopnia ma punkt podwójny, to ostrokrąg mający ten punkt za wierzchołek i obejmujący tę krzywę. jest także drugiego stopnia.* — Wniosek ten wypływa wprost z poprzedzającego twierdzenia, krzywa bowiem przecięcia jest czwartego stopnia. W przypadku przecięcia dwu powierzchni drugiego stopnia,

wyznaczenie stycznych w punkcie podwójnym tej linii, sprowadza się więc do znalezienia przecięcia ostrokręgu drugiego stopnia z płaszczyzną przechodzącą przez jego wierzchołek, a które znajdziemy, przecinając ostrokrąg i płaszczyznę pomocniczą; ztąd otrzymamy bowiem krzywę drugiego stopnia i prostę, a biorąc dwa punkta, w których tak znaleziona prosta spotyka krzywę i łącząc je z punktem podwójnym linijami prostemi, otrzymamy styczne szukane.

730. Twierdzenie. — *Sześć jest kierunków, w których płaszczyzna przecina dwie powierzchnie drugiego stopnia podług krzywych podobnych* (homothétique). — Przeniosłszy bowiem ostrokręgi asymptotyczne dwu powierzchni równolegle do nich samych, i dając im jeden i ten sam wierzchołek, te ostrokręgi będą miały cztery tworzące wspólne, które kombinując z sobą po dwie, otrzymamy sześć płaszczyzn, jużto rzeczywistych jużteż urojonych, a każda płaszczyzna równoległa do jednego z nich przetnie powierzchnie dane podług dwu krzywych mających za kierunek asymptotyczny wspólny, proste służące do wyznaczenia kierunku tej płaszczyzny. Tak otrzymane dwie krzywe będą więc miały ten sam kierunek asymptotyczny, a tem samem będą podobnemi (homothétiques).

731. Twierdzenie. — *Sześć kierunków, w których płaszczyzna przecina dwie powierzchnie drugiego stopnia podług krzywych podobnych, są wspólne nietylko tym powierzchniom, lecz i wszystkim innym tegoż samego stopnia, przechodzącym przez ich wspólne przecięcie.* — Wszelka płaszczyzna, przecinająca dwie pierwsze powierzchnie podług krzywych podobnych, ma cztery punkta wspólne z przecięciem tych powierzchni, z których dwa leżą zawsze w nieskończoności. Nadto płaszczyzna sieczna spotyka jednę z powierzchni drugiego stopnia, przechodzących przez przecięcie się dwu pierwszych, w dwu punktach leżących w nieskończoności, czyli jednem słowem, płaszczyzna sieczna przecina wszelkie powierzchnie podług krzywych stożkowych, mających dwa punkta wspólne w nieskończoności, zkąd wypada, że te stożkowe muszą być podobnemi.

732. Wniosek. — *Wszelka płaszczyzna cykliczna wspólna dwu powierzchniom drugiego stopnia, jest także wspólną powierzchniom tegoż stopnia, przechodzącym przez przecięcie się dwu pierwszych.* — Wniosek ten wynika wprost z powyższego twierdzenia, albowiem dwa koła jakiekolwiek są zawsze podobnemi, a figury podobne koła są zawsze kołami.

733. **Uproszczenie sposobu kreślenia stycznych w punktach podwójnych.** — Jeżeli płaszczyzny przecinające dwie powierzchnie drugiego stopnia podług krzywych podobnych, nie są wszystkie urojonemi, to wykreślenie podane w paragrafie 591 może być wykonanem jak następuje : Wybrawszy płaszczyznę przecinającą powierzchnię podług krzywych podobnych, można wyznaczyć stożkowę, podług której przecina ona jednę z powierzchni danych, a pamiętając, że druga krzywa jest podobną do pierwszej, łatwo znajdziemy tę, podług której taż płaszczyzna przecina ostrokrąg pomocniczy.

Ponieważ ta ostatnia krzywa stożkowa jest podstawą ostrokręgu, którego przecięcie z płaszczyzną styczną w punkcie podwójnym należy znaleźć, więc otrzymamy go, jużto używając płaszczyzn cyklicznych ostrokręgu, jużteż kreśląc rzut kołowy tej podstawy.

Widzimy ztąd, że wykreślenia są zawsze długie i oprócz kilku szczególnych przypadków, z których najprostszym jest przypadek dwu ostrokręgów mających podstawy kołowe na jednej płaszczyźnie, wykreślenie najprostsze polega na wyznaczeniu kilku punktów przecięcia się ostrokręgu pomocniczego z płaszczyzną sieczną jakąkolwiek.

Te punkta przecięcia winny być tak wybierane, żeby znajomość ich posłużyła do wyznaczenia części użytecznych krzywej przecięcia płaszczyzny siecznej z ostrokręgiem, a któreto punkta leżą w blizkości śladu płaszczyzny stycznej wspólnej na płaszczyznę sieczną i po obu jego stronach ; wreszcie

dokończymy zaś wykreślenia przecięcia ostrokręgu płaszczyzną styczną do dwu powierzchni danych sposobem zwyczajnym.

734. Kreślenie stycznych w punktach podwójnych przecięcia się dwu powierzchni stożkowych lub walcowych. — Uważmy dwa ostrokręgi mające płaszczyznę styczną wspólną P, niech wierzchołki ich leżą w punktach S i S_1, a tworzącemi, podług których płaszczyzna styczna dotyka każdej z tych powierzchni, niech będą $S\delta$, $S_1\delta$ (fig. 69).

Dowiedźmy tu, że punkt δ, w którym płaszczyzna styczna wspólna P dotyka obu ostrokręgów, jest punktem podwójnym przecięcia a zarazem nakreślmy styczne w tym punkcie. Dla dopięcia tego podwójnego celu, wystarcza nakreślić styczne w punkcie δ do krzywej wspólnego przecięcia i pokazać, że zadanie ma dwa rozwiązania.

Ponieważ te styczne leżą na płaszczyznie stycznej P, a nadto, ponieważ one się zchodzą ze stycznemi do rzutu na tęż płaszczyznę krzywej wspólnej dwu ostrokręgom, będziemy więc szukać tylko tych ostatnich,

Przez punkt δ nakreślmy dwie płaszczyzny prostopadłe do płaszczyzny stycznej P i oznaczmy przez δx, δx_1 ich ślady na płaszczyznę P, przez γ, γ_1 krzywe, podług których te płaszczyzny przecinają odpowiednio ostrokręgi, mające wierzchołki w S i S_1, przez δy przecięcie płaszczyzn prostopadłych do P, a

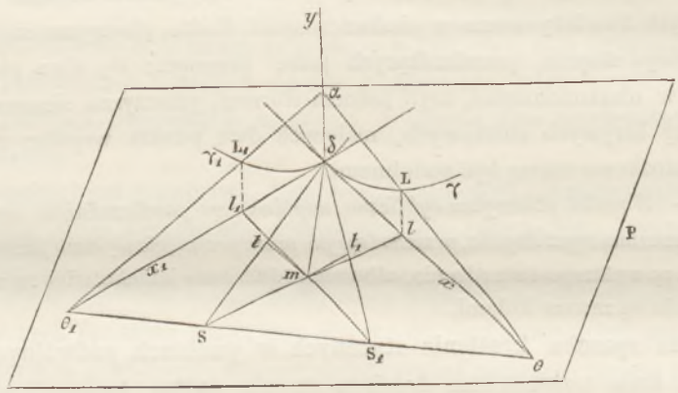

Fig. 69.

które również jest do niej prostopadłe, wreszcie przez θ, θ_1 punkta, w których linija łącząca wierzchołki S, S_1 przecina odpowiednio płaszczyzny krzywych γ, γ_1.

Przyjmijmy γ, γ_1 za podstawy odpowiednie ostrokręgów i nakreślmy sposobem ogólnym (§ 708) jeden z punktów rzutu na płaszczyznę P ich linii wspólnej. W tym celu, nakreślmy przez θ, θ_1 i przez punkt α, leżący na y a blizki punktu δ, płaszczyznę sieczną pomocniczą, to ta ostatnia wyznaczy, na płaszczyznach podstaw proste $\theta\alpha$, $\theta_1\alpha$, na samych zaś podstawach punkta L, L_1 mające za rzuty na płaszczyznę P punkta l, l_1, i wreszcie na ostrokręgach, tworzące mające za rzuty Sl, S_1l_1, które się przecinają w punkcie szukanym m. Nakreślmy teraz prostę δm i uważmy, że znając już punkt δ, należy tylko wyznaczyć granicę kierunku prostej δm, gdy punkt m zdąża ku δ, a znajdziemy, kreśląc przez punkt m proste mt, mt_1 odpowiednio równoległe do $\theta\delta$, $\theta_1\delta$ i szukając granicy stosunku tych dwu linij, które dla skrócenia nazwiemy przez p i p_1, i oznaczając przez

$$y = f(x),$$

$$y_1 = \varphi(x_1),$$

że równania krzywych γ, γ_1 odniesionych odpowiednio do osi $x\delta x$, $y\delta x_1$ i przez (x, y), (x_1, y_1) współrzędne punktów L, L_1.

Z trójkątów podobnych mamy

$$\frac{mt}{\delta l} = \frac{St}{S\delta},$$

$$\frac{mt_1}{\delta l_1} = \frac{S_1 t_1}{S_1 \delta};$$

co możemy napisać

$$\frac{p}{x} = \frac{St}{S\delta},$$

$$\frac{p_1}{x_1} = \frac{S_1 t_1}{S_1 \delta}.$$

Dzieląc dwa ostatnie równania przez siebie, będzie

$$\frac{p}{p_1} \cdot \frac{x_1}{x} = \frac{St}{S\delta} : \frac{S_1 t_1}{S_1 \delta}.$$

Ponieważ, jeżeli punkt α zdąża ku δ, to punkta m, t, t_1 dążą także do δ, a stosunki drugiej strony powyższego równania mają granicę równą 1, możemy więc napisać ten związek jak następuje

$$\text{gr.}\frac{p}{p_1} \cdot \text{gr.}\frac{x_1}{x} = 1,$$

albo

$$\text{gr.}\frac{p}{p_1} = \text{gr.}\frac{x}{x_1}. \tag{1}$$

Na zasadzie paragrafu 679 mamy zaś

$$\frac{y}{x^2} = \frac{1}{1.2} f''(0) + \frac{x}{1.2.3} f'''(0) + \ldots\ldots \tag{2}$$

$$\frac{y_1}{x_1^2} = \frac{1}{1.2} \varphi''(0) + \frac{x_1}{1.2.3} \varphi'''(0) + \ldots\ldots \tag{3}$$

Podobieństwo trójkątów prowadzi do następujących związków

$$\frac{y}{\delta\alpha} = \frac{\theta l}{\theta\delta},$$

$$\frac{y_1}{\delta\alpha} = \frac{\theta_1 l_1}{\theta_1 \delta};$$

z których otrzymujemy

$$\frac{y}{y_1} = \frac{\theta l}{\theta\delta} : \frac{\theta_1 l_1}{\theta_1 \delta},$$

a ztąd

$$\text{gr.}\frac{y}{y_1} = 1. \tag{4}$$

Że zaś z równań (2) i (3)

$$\text{gr.}\frac{y}{x^2}=\frac{f''(0)}{1.2},$$

zaś

$$\text{gr.}\frac{y_1}{x_1^2}=\frac{\varphi''(0)}{1.2}.$$

zatem

$$\text{gr.}\frac{y_1}{y}\ .\ \text{gr.}\ \frac{x^2}{x_1^2}=\frac{\varphi''(0)}{f''(0)},$$

albo jeszcze, na mocy równania (4)

$$\text{gr.}\frac{x}{x_1}=\pm\sqrt{\frac{\varphi''(0)}{f''(0)}}.$$

Jeżeli w równaniu (1) za gr. $\frac{x}{x_1}$ podstawimy tę wartość, będzie

$$\text{gr.}\frac{p}{p_1}=\pm\sqrt{\frac{\varphi''(0)}{f''(0)}}.$$

Weźmy wzór (4) paragrafu 679

$$f''(0)=\frac{1}{\rho\cos\beta},$$

w którym β przedstawia kąt między normalną do krzywej μ (fig. o_3) w punkcie m' a osią $m'y$, i uważmy, że ten wzór może być zastosowanym do krzywych γ, γ_1 (fig. o_9) z tym warunkiem, że β jest równem zeru. Oznaczywszy więc przez ρ i ρ_1 promienie krzywizny krzywych γ, γ_1 w punkcie δ, otrzymamy

$$f''(0)=\frac{1}{\rho},\qquad \varphi''(0)=\frac{1}{\rho_1},$$

zkąd

$$\frac{\varphi''(0)}{f''(0)}=\frac{\rho}{\rho_1},$$

a w granicy

$$\text{gr.}\frac{p}{p_1}=\pm\sqrt{\frac{\rho}{\rho_1}}.$$

Oto jest wzór szukany, który wskazuje, że punkt δ jest punktem podwójnym, i który posłuży do kreślenia stycznych w tym punkcie.

735. Kreślenie stycznych. — Ponieważ wzór powyżej znaleziony można napisać

$$\text{gr.}\frac{p}{p_1}=\pm\frac{\sqrt{\rho\rho_1}}{\rho_1},$$

kreślenie więc stycznych nie przedstawi trudności. W tym celu zróbmy wykreślenie na płaszczyznie stycznej wspólnej P, gdyż następnie łatwo znajdziemy rzut figury znalezionej na jakąkolwiek płaszczyznę.

Oznaczmy przez $S\delta$, $S_1\delta$ dwie tworzące dotknięcia, przecinające się w punkcie podwójnym δ

(fig. o_{10}), wystawmy $\sqrt{\rho\rho_1}$ i przez punkt dowolnie obrany a na prostej Sδ nakreślmy równoległę do śladu płaszczyzny krzywej γ na płaszczyznie figury; odetnijmy następnie na niej po obu stronach punktu a długości ab, ac równe $\sqrt{\rho\rho_1}$ i wreszcie przez punkta c i b nakreślmy proste równoległe dS, δ.

Jeżeli zrobimy toż samo wykreślenie dla drugiego ostrokręgu, lecz zastępując $\sqrt{\rho\rho_1}$ przez ρ_1, to znajdziemy, że pary prostych równoległych tak znalezionych tworzą równoległobok $defg$, którego przekątnie δt, $\delta\sigma$ są stycznemi szukanemi.

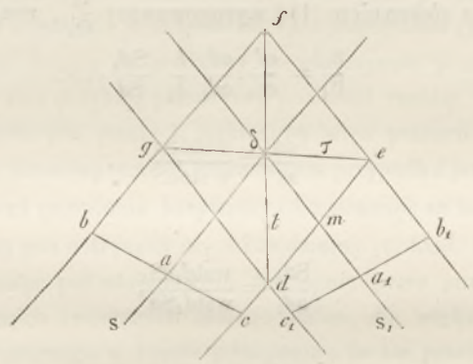

FIG. o_{10}

Dla powyższego wykreślenia musieliśmy się uciec do promieni krzywizny obu podstaw leżących na płaszczyznach prostopadłych do płaszczyzny stycznej wspólnej; twierdzenie podane tutaj pozwoli uczynić go niezależnem od położenia podstaw.

736. **Twierdzenie Meusnier'a** — Twierdzenie to, które uważać będziemy tutaj jedynie w jego zastosowaniu do powierzchni stożkowych, jest także prawdziwe dla jakiejkolwiek powierzchni; brzmi ono jak następuje :

Dla wszelkiej powierzchni stożkowej, promień krzywizny przecięcia ukośnego jest rzutem promienia krzywizny przecięcia normalnego mającego tęż samą styczną (fig. p_1).

Oznaczmy przez Q płaszczyznę podstawy lub przecięcia ukośnego powierzchni, przez c podstawę ostrokręgu lub przecięcie ukośne, przez S wierzchołek powierzchni, zaś przez Sg jej tworzącę dotknięcia z jedną z jej płaszczyzn stycznych P.

Jeżeli obierzemy dwa punkta, jeden d na podstawie c, drugi zaś e na stycznej ab, nakreślimy tworzącę Sd, oznaczymy przez d_1 punkt jej przecięcia z podstawą c_1 i nakreślimy wreszcie prostę Se i trójkąty aed i aed_1, to otrzymamy, oznaczając przez (Ω, Ω_1), (R, R_1) powierzchnie tych trójkątów i promienie kół opisanych na nich,

$$4\Omega R = ae.ed.ad$$

$$4\Omega_1 R_1 = ae.ed_1.ad_1.$$

Dzieląc te równości jednę przez drugę, znajdziemy

$$\frac{\Omega}{\Omega_1}\cdot\frac{R}{R_1} = \frac{ed}{ed_1}\cdot\frac{ad}{ad_1}. \tag{1}$$

Z porównania dwu ostrosłupów $Sade$, $Saed_1$, oznaczywszy przez h i h_1 odległości punktu S od płaszczyzn Q i N, wypływa związek następujący:

$$\frac{\Omega h}{\Omega_1 h_1} = \frac{Sa.Se.Sd}{Sa.Se.Sd_1},$$

lub

$$\frac{\Omega}{\Omega_1} = \frac{h_1}{h} \cdot \frac{Sd}{Sd_1}.$$

Porównawszy to równanie z równaniem (1) i wyrugowawszy $\frac{\Omega}{\Omega_1}$, znajdziemy:

$$\frac{R}{R_1} = \frac{ed}{ed_1} \cdot \frac{ad}{ad_1} \frac{h}{h_1} \frac{Sd_1}{Sd}.$$

Że zaś

$$\frac{ad}{sd} = \frac{\text{wst}dSa}{\text{wst}daS},$$

zaś

$$\frac{Sd_1}{ad_1} = \frac{\text{wst}d_1aS}{\text{wst}d_1Sa},$$

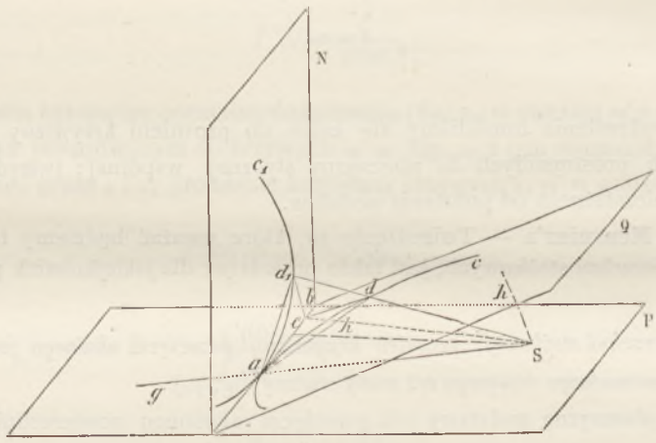

Fig. p.

zatem porównywając z sobą trzy ostatnie równania, będzie

$$\frac{R}{R_1} = \frac{ed}{ed_1} \frac{\text{wst}d_1aSh}{\text{wst}daSh_1}.$$

Oznaczając wreszcie kąt utworzony przez płaszczyzny Q i N przez θ, możemy w ostatniem równaniu zastąpić stosunek $\frac{h}{h_1}$ przez $\cos\theta$, i otrzymamy

$$\frac{R}{R_1} = \frac{ed}{ed_1} \frac{\text{wst}d_1aS}{\text{wst}daS} \cdot \cos\theta.$$

Jeżeli teraz przypuścimy, że punkt e zdąża do a, to stosunek $\frac{ed}{ed_1}$ będzie zbliżał się do $\frac{ad}{ad_1}$ albo do jemu równego $\frac{\text{wst } ad_1d}{\text{wst } add_1}$; a jeżeli nadto punkt d zdąża do a, to promienie R i R_1 będą zbliżać

się do promieni krzywizny krzywych C i C_1, które oznaczywszy przez ρ, ρ', ostatecznie otrzymamy

$$\rho = \rho' \cos\theta,$$

a równanie to jest dowodem naszego twierdzenia, gdyż kąt zawarty pomiędzy płaszczyznami Q i N jest równym kątowi pomiędzy normalnemi do krzywych uważanych w punkcie *a*.

737. Zastosowanie. — *Mając dane dwa walce spoczywające na płaszczyźnie poziomej rzutów i styczne do siebie, a których kierownicami są dwa koła leżące na płaszczyźnie pionowej rzutów, nakreślić do nich styczne w punkcie podwójnym wspólnego przecięcia się tych powierzchni* (*fig.* 402, tab. LII).

Oznaczmy przez γ', γ'_1 koła służące za podstawy na płaszczyźnie pionowej rzutów, przez $a\delta$, $b\delta$ tworzące, wzdłuż których walce dotykają płaszczyzny poziomej rzutów. Ponieważ punktem podwójnym ich wspólnego przecięcia jest punkt δ, nakreślmy więc przezeń styczne. W tym celu, przeciąwszy oba walce płaszczyzną pionową rzutów, która w tym przypadku jest prostopadłą do płaszczyzny stycznej wspólnej, to ponieważ promienie krzywizny obu przecięć są znane, znajdziemy w sposób podany na figurze, ich średnią geometryczną *ac*, i znajdziemy jej kład na *ad* i *ae*, po obu stronach punktu *a*, na oś rzutów, kreśląc pół okręgu koła. Następnie przez punkta *e* i *d* nakreślmy proste równoległe do rzutów poziomych tworzących małego walca, dla większego zaś, takiemiż równoległemi są tworzące obwodu pozornego w rzucie poziomym; że zaś przecięcia się dwu prostych równoległych odpowiednich sobie mają miejsce w punktach m_1, m_2, m_3, m_4, więc przekątne m_1m_3, m_2m_4 winny przejść przez punkt δ i dotknąć w nim krzywej wspólnego przecięcia.

Przecinając zaś oba walce płaszczyznami pomocniczemi poziomemi, znajdziemy rzuty tylu punktów krzywej przecięcia, ile chemy, a tem samem będziemy mogli nakreślić samą krzywę

Figura nasza przedstawia wykreślenie kilku punktów szczególnych, nadto mniejszy walec został uważany za pełny, a przytem za wycięty przez większy.

Na Figurze 403 przedstawioną została bryła wspólna obu walcom.

Figura 404 przedstawia listek utworzony z części większego walca zawartej w mniejszym, a figura 405 przedstawia część powierzchni mniejszego walca, zawartą w większym.

738. Twierdzenie. — *Styczne w punkcie podwójnym wspólnego przecięcia dwu powierzchni stożkowych, tworzą z dwiema tworzącemi tych powierzchni, a spotykającemi się w tymże punkcie, wiązkę harmoniczną, dwie styczne zaś i dwie tworzące tworzą dwie pary promieni sprzężonych.* — Uważmy (fig. o_{10}) wiązkę δ, $SS_1t\tau$, niech punkt *m* będzie punktem spotkania się pros tych *de* i δS_1. Ponieważ prosta *de* przedłużona spotyka δS w odległości nieskończenie wielkiej, ponieważ nadto punkt *m* jest środkiem prostej *de*, więc promienie wiązki uważanej wyznaczają na tejże prostej punkta przecięcia, tworzące podział harmoniczny (§ **257**), zatem i sama wiązka jest także harmoniczną.

Twierdzenie to może być także zastosowanem do rzutów promieni wiązki (§ **254**), czyli służy ono do znalezienia drugiej stycznej w punkcie podwójnym, znając pierwszę. Przekonamy się o tem z następującego zastosowania.

739. Pierwsze zastosowanie. — *Nakreślić styczne w punkcie podwójnym przecięcia dwu ostrokręgów, walca i ostrokręgu, i dwu walców mających podstawę wspólną.* — Uważmy przedewszystkiem dwa ostrokręgi (fig. p_2). Podstawę wspólną, mającą za rzut poziomy γ, przyjmujemy za płaską lecz jakąkolwiek; niech rzutami wierzchołków będą *s* i s_1, zaś *o* rzutem punktu przecięcia się prostej łączącej wierzchołki z płaszczyzną podstawy wspólnej.

Ponieważ dwa ostrokręgi mają płaszczyznę styczną wspólną, a przecięcie się jej z płaszczyzną podstawy ma za rzut poziomy prostę $\theta\delta$ styczną do γ, a przechodzącą przez punkt δ, więc ten ostatni punkt musi być rzutem poziomym punktu podwójnego. Ponieważ krzywa, której rzutem jest γ, należy do przecięcia, a $\theta\delta$ jest jedną ze stycznych w punkcie podwójnym, nakreślmy więc dwie proste $s\delta$ i $s_1\delta$ i szukajmy sprzężonej harmonicznej promienia $\theta\delta$ względem tych dwu prostych; w tym celu nakreślmy prostę równoległą do $\theta\delta$ i wyznaczmy jej punkta przecięcia a i b z prostemi $s\delta$, $s_1\delta$ znajdźmy następnie środek m prostej ab, to prosta łącząca punkt δ z punktem m będzie właśnie drugą

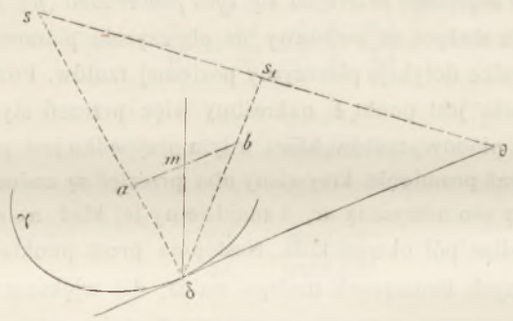

Fig. p_2.

styczną w punkcie podwójnym, gdyż punkt spotkania się prostej ab z $\theta\delta$ leży w nieskończoności, a środek m prostej ab jest sprzężonym harmonicznym względem punktów a i b (§ 257).

W taki sam sposób rozwiążemy zadanie odnoszące się do przypadku przecięcia się ostrokręgu z walcem.

Zajmijmy się teraz przypadkiem dwu walców (fig. p_3).

Oznaczmy przez γ, g, g_1 rzuty poziome podstawy wspólnej i dwie równoległe do tworzących,

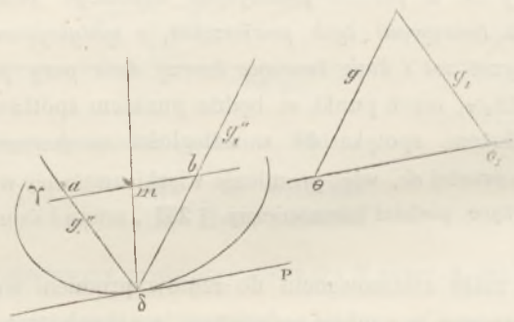

Fig. p_3.

a któreto równoległe służą do wyznaczenia rzutu poziomego $\theta\theta_1$ kierunku śladów płaszczyzn pomocniczych na płaszczyźnie podstawy.

Ponieważ styczna P do γ, mająca kierunek $\theta\theta_1$ spotyka tę krzywę w punkcie δ, który jest śladem poziomym szukanego punktu podwójnego, ponieważ nadto P jest jednym z rzutów poziomych stycz-

nych w punkcie podwójnym, a drugim jest promień sprzężony harmoniczny dla P względem prostych g', g''_1, przechodzących przez punkt δ w kierunku prostych g, g_1, zatem znajdziemy go łatwo, kreśląc odcinek ab prostej równoległej do P, a zawarty pomiędzy g', g''_1, biorąc następnie jego środek m i łącząc wreszcie punkt m z punktem δ liniją prostą δm.

740. **Drugie zastosowanie.** — Przy kreśleniu stycznych w punkcie podwójnym, podanem w paragrafie 727, często się zdarza, że przecięcie ostrokręgu pomocniczego płaszczyzną jakąkolwiek spotyka przecięcie się tej płaszczyzny z płaszczyzną styczną wspólną, poza obrębem rysunku, gdy tymczasem drugi punkt leży wewnątrz wykreślenia, a w takim razie, jednę ze stycznych szukanych znajdziemy natychmiast; lecz drugą, jak to widzieliśmy powyżej, możemy tylko znaleźć za pomocą wykreślenia, służącego do wyznaczenia czwartego promienia wiązki harmonicznej, której trzy pozostałe promienie są znane.

741. **Punkta podwójne w wierzchołku powierzchni stożkowej.** — Ponieważ w wierzchołku ostrokręgu powierzchnia ta ma nieskończoną liczbę płaszczyzn stycznych, wniosek więc paragrafu 734 może być w tym razie fałszywym, i to wtenczas, kiedy ten wierzchołek jest punktem podwójnym przecięcia się ostrokręgu uważanego z drugą powierzchnią; otóż, żeby wierzchołek był punktem podwójnym przecięcia, winien on leżeć na drugiej powierzchni, a to szczególne położenie ostrokręgu prowadzi do następującego twierdzenia:

742. **Twierdzenie.** — *Jeżeli wierzchołek powierzchni stożkowej drugiego stopnia leży na innej powierzchni jakiejkolwiek, to linija wspólnego przecięcia się tych dwu powierzchni może przedstawić albo punkt zwrotu, albo punkt odosobniony, stosownie do tego, czy płaszczyzna styczna do jednej z tych powierzchni, lecz przechodząca przez wierzchołek ostrokręgu, przecina powierzchnię stożkową, dotyka jej lub styka się z nią tylko w jednym punkcie* (fig. p_4).

Oznaczmy przez Σ, Σ_1 powierzchnię jakąkolwiek i dany ostrokrąg, przez S wierzchołek ostrokręgu uważany jako leżący na Σ, przez P płaszczyznę styczną w punkcie S do powierzchni Σ, wreszcie przez Sa, Sb tworzące, wzdłuż których płaszczyzna P przecina powierzchnię stożkową Σ_1.

Uważając jakąkolwiek tworzącą Sc blizką Sa, ta przecina Σ w punkcie S i w drugim punkcie m, a ponieważ, gdy Sc poruszając się zbliża się coraz więcej do Sa i zchodzi się z nią w granicy, punkt m dąży także do punktu S, z którym się zchodzi w granicy, więc prosta Sa jest styczną do przecięcia; toż samo ma miejsce i dla prostej Sb. Punkt więc S jest punktem podwójnym przecięcia, gdyż ma ono w nim dwie styczne.

Jeżeli płaszczyzna P jest styczną do dwu powierzchni Σ, Σ_1, to styczne Sa i Sb zchodzą się z sobą i wówczas jedna z powłók ostrokręgu nie spotyka powierzchni Σ (przypuszczamy, że ta powierzchnia nie jest przeciętą przez jej płaszczyznę styczną), a krzywa wspólnego przecięcia składa się z dwu łuków dotykających tejże samej prostej w punkcie S nie przecinając jej, czyli punkt S jest punktem zwrotu.

Wreszcie, jeżeli płaszczyzna P przecina ostrokrąg tylko w punkcie S, żaden z punktów przecięcia tworzących ostrokręgu i Σ nie zchodzi się z wierzchołkiem ostrokręgu, czyli wierzchołek ten jest punktem odosobnionym krzywej wspólnej obu powierzchniom Σ, Σ_1.

PUNKTA PODWÓJNE W RZUCIE

743. Oznaczywszy przez P, S (fig. p_5) płaszczyznę i środek rzutu, przez C, c krzywę przecięcia się dwu powierzchni i jej rzut, wiemy (§ 378), że punkt podwójny w rzucie powstaje z dwu punktów M_1, M_2 leżących na jednej rzucającej, których więc rzuty m_1, m_2, zchodzą się z sobą.

Punkta podwójne wspólnego przecięcia się dwu powierzchni otrzymujemy bardzo łatwo, za pomocą płaszczyzn stycznych wspólnych, lecz wykreślenie stycznych w tych punktach jest trudne.

Rzecz się ma zupełnie przeciwnie w rzucie, gdyż w tym razie, łatwo jest, znając punkta podwójne w rzucie, nakreślić styczne odpowiadające, wystarcza bowiem użyć sposobu zwyczajnego, lecz wy-

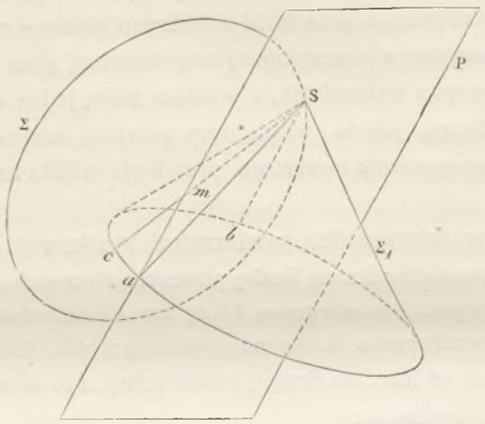

Fig. p_4.

znaczenie samych tych punktów jest bardzo trudne, i prócz kilku przypadków szczególnych, należy zawsze poprzestać na wykreśleniu samej krzywej.

Pokażemy tu, że dla powierzchni drugiego stopnia łatwo jest wykreślić prostę łączącą punkta podwójne w rzucie na płaszczyznie, co wreszcie czyni wykreślenie ściślejszem.

744. *Wyznaczenie prostej łączącej punkta podwójne w rzucie krzywej, wspólnej dwu powierzchniom drugiego stopnia* (fig. p_5).

Jeżeli wyznaczymy na figurze p_5 punkt N sprzężony harmoniczny punktu S względem punktu M_1, M_2, to rzut tego punktu przypadnie widocznie w punkcie podwójnym szukanym, albowiem należy on do

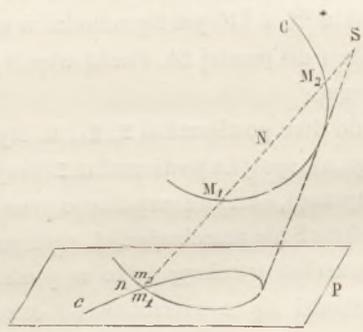

Fig. p_5.

dwu miejsc geometrycznych, które znajdziemy biorąc sprzężony harmoniczny punktu S względem tych punktów, w których każda z powierzchni danych spotyka rozbieżne, wychodzące z tegoż punktu S.

W naszym przypadku, ponieważ te miejsca geometryczne są płaszczyznami biegunowemi punktu S, względnie do uważanych powierzchni, więc punkta podwójne w rzucie winny należeć do rzutu prostej przecięcia się płaszczyzn biegunowych środka rzutu w obu powierzchniach danych.

W przypadku rzutów prostokątnych najogólniej używanym, punkt N leży na środku odcinka M_1M_2, a płaszczyzny biegunowe są płaszczyznami średnicowemi sprzężonemi cięciw prostopadłych do płaszczyzny rzutów uważanej.

Te płaszczyzny średnicowe są widocznie płaszczyznami linij obwodów pozornych powierzchni, odpowiednich płaszczyznie rzutów, którą się zajmujemy.

745. Uwaga. — *Jeżeli dwie powierzchnie są drugiego stopnia, to krzywa ich wspólnego przecięcia się ma tylko dwa punkta podwójne w rzucie na każdej z płaszczyzn spółrzędnych, a nie więcej.* — Ponieważ bowiem punkta podwójne w rzucie leżą na jednej prostej, która może tylko spotkać rzut linii wspólnej dwu powierzchniom w czterech punktach, albowiem rzut ten jest czwartego stopnia, otóż w każdym więc punkcie podwójnym, leżącym na prostej, mamy dwa punkta spotkania się prostej, z krzywą a zatem nie może być więcej jak dwa punkta podwójne w rzucie na tęż samą płaszczyznę.

746. Pierwsze zastosowanie. — *Nakreślić prostę punktów podwójnych w rzucie linii wspólnego przecięcia się dwu ostrokręgów, mających podstawy na jednej płaszczyznie* (*fig.* 386, tab. XLVIII).

Z figury widzimy odrazu, że prosta punktów podwójnych jest tylko użyteczna na płaszczyznie poziomej rzutów; nadto, że jedna z płaszczyzn średnicowych przechodzi przez wierzchołek s, s' i ma za ślad poziomy biegunowę a_4a_{11} punktu s względem krzywej γ, gdyż obejmuje ona tworzące obwodu pozornego poziomego, a śladami tych linij są punkta a_4, a_{11}. Podobnież, ponieważ druga płaszczyzna średnicowa przechodzi przez punkt σ, σ' i ma za ślad poziomy b_2d, pozostaje więc do znalezienia rzut poziomy wspólnego przecięcia się dwu płaszczyzn średnicowych. Otóż punkt h przecięcia się śladów poziomych tych płaszczyzn jest jednym z punktów tego przecięcia; dla znalezienia zaś drugiego punktu możnaby uważać te płaszczyzny za ostrokręgi (§ **709**, 2^{gi} przypadek), wiedząc atoli, że dwie z prostych obwodu pozornego poziomego przecinają się w punkcie, którego rzutem poziomym jest punkt m_{11}, prosta więc łącząca punkt h z m_{11} jest prostą punktów podwójnych w rzucie poziomym, a tem samem, musi ona przejść przez punkt podwójny rzutu poziomego wspólnego przecięcia.

747. Drugie zastosowanie. — *Nakreślić prostę punktów podwójnych w rzucie wspólnego przecięcia się dwu ostrokręgów, mających podstawy na płaszczyznach różnych* (*fig.* 392, tab. XLIX).

Rysunek na którym ma być zrobione wykreślenie, posiada dwa rodzaje punktów podwójnych, a mianowicie m_1, m_7, które są rzutami punktów podwójnych w przestrzeni i dwa inne, które są punktami podwójnemi w rzucie.

Pierwsze zostały w zupełności wyznaczone, a styczne przez nie przechodzące dadzą się znaleźć bardzo łatwo, gdyż ostrokręgi pomocnicze zazwyczaj używane, sprowadzają się tu do dwu płaszczyzn, których przecięcia się z płaszczyznami stycznemi są łatwe do znalezienia.

Zajmijmy się wyznaczeniem prostej przechodzącej przez punkta podwójne w rzucie.

Ponieważ przecięcia się płaszczyzn średnicowych z płaszczyznami odpowiedniemi podstaw, mają za rzuty poziome proste a_2a_8, b_3b_9, a te płaszczyzny średnicowe przechodzą odpowiednio przez punkta mające za rzuty s, τ, ponieważ nadto rzut poziomy wspólnego ich przecięcia został otrzymany, przyjmując te płaszczyzny za ostrokręgi (§ **709**, 2^{gi} przypadek) i przecinając te ostatnie płaszczyznami pomocniczemi, które już były użyte do wyznaczenia punktów krzywej wspólnej obu ostrokręgom danym, zaś jedna z tych płaszczyzn przechodzi przez punkta, których rzuty poziome znajdują się w $0, 0_1, \alpha_3$ i wyznacza na płaszczyznach średnicowych dwie proste mające za rzuty sg, σf, więc punkt k przecięcia się tych ostatnich prostych jest jednym z punktów prostej szukanej. W sposób podobny używając płaszczyzn pomocniczych granicznych, mających za rzuty śladów ich na płaszczyznach

podstaw proste $\theta\alpha_7$, $\theta_1\alpha_7$, znaleziono proste sa_6, ob_6 i ich punkt przecięcia się l. Prosta łącząca punkt l z punktem k jest właśnie prostą szukaną.

748. Trzecie zastosowanie. — *Nakreślić prostę punktów podwójnych wspólnego przecięcia się walca z ostrokręgiem* (*fig.* 395, tab. L).

Wykonajmy tym razem rysunek na płaszczyznie pionowej rzutów. Ponieważ dla walca ślad poziomy płaszczyzny średnicowej sprzężonej z cięciwami prostopadłemi do płaszczyzny pionowej rzutów jest przedstawiony przez prostę $\tau_1\tau_3$, a ta płaszczyzna jest równoległą do tworzących walca, jest więc ona w zupełności wyznaczoną.

Dla ostrokręgu ta płaszczyzna średnicowa przechodzi przez wierzchołek s, s' i ma za ślad poziomy prostę h_3, h_4. Punkt h, h' jest rzutem poziomym przecięcia się płaszczyzn średnicowych.

Drugi punkt tegoż przecięcia znajdziemy, uważając pierwszę z płaszczyzn średnicowych jako walec o kierownicy prostolinijnej, a drugę jako ostrokrąg także o kierownicy prostolinijnej.

Dla znalezienia jeszcze innego punktu przecięcia się tych powierzchni, przyjmiemy za płaszczyznę sieczną pomocniczą płaszczyznę graniczną, mającą za ślad poziomy P_4; płaszczyzna ta wyznacza na pierwszej płaszczyznie średnicowej prostę równoległą do tworzących walca, mającą za ślad poziomy punkt t, t_1, którego rzutem pionowym jest prosta $t'k'$, na drugiej zaś płaszczyznie srednicowej prostę, której śladem poziomym jest t_1, t'_1, a rzutem pionowym $t'_1s'_1$.

Ponieważ punkt l' to jest punkt przecięcia się tych rzutów pionowych należy do prostej szukanej, więc prostą szukaną jest prosta $l'h'$, łącząca punkt l' z h'. Tak samo należy postępować na płaszczyznie poziomej rzutów.

749. Czwarte zastosowanie. — *Nakreślić prostę punktów podwójnych w rzucie krzywej wspólnego przecięcia się dwu walców mających podstawy na jednej płaszczyznie* (*fig.* 397, tab. LI).

Dla płaszczyzny poziomej rzutów należy używać dwu płaszczyzn średnicowych, które będąc odpowiednio równoległemi do tworzących walców, mają za ślady poziome Q i Q_1.

Punkt k przecięcia się śladów poziomych jest punktem przejścia prostej szukanej, drugi zaś jej punkt znajdziemy, używając płaszczyzny granicznej mającej za ślad poziomy P_2. Prosta kl winna przechodzić przez punkta podwójne rzutu poziomego krzywej wspólnej dwu walcom.

Dla punktów podwójnych w rzucie pionowym, uważmy że proste R, R_1 są śladami poziomemi płaszczyzn średnicowych, a ponieważ te proste są równoległe do siebie i do osi rzutów, więc przecięcie się płaszczyzn średnicowych będzie także równoległe do osi rzutów. Obecnie więc idzie tylko o znalezienie jednego punktu rzutu pionowego tego przecięcia. W tym celu, dwie płaszczyzny, uważane za walce, zostały przecięte płaszczyzną pomocniczą, mającą za ślad P_4, a jako ślady tych dwu przecięć znaleziono (t, t'), (t_4, t'_1); nakreśliwszy więc przez punkta t', t'_4 proste równoległe do rzutów pionowych tworzących walców i odpowiadające każdemu z nich, znajdziemy w punkcie ich przecięcia się f' punkt szukany, przez który prosta równoległa do osi rzutów poprowadzona jest właśnie prostą przechodzącą przez punkta podwójne w rzucie pionowym.

750. Uwaga. — Zazwyczaj, dla wyznaczenia zupełnego punktów podwójnych w rzucie, należy przeciąć dwie powierzchnie prostopadłe do uważanej płaszczyzny rzutów, płaszczyzną obejmującą prostę punktów podwójnych, gdyż w ten sposób, znajdziemy na każdej z nich linije, których przecięcia będą rzutami punktów szukanych.

Wykreślenie tu podane wykonywa się tylko w pewnych szczególnych przypadkach, to jest wtedy, gdy linije wspólnego przecięcia są łatwe do wykreślenia; lecz wkrótce podamy wykreślenie całkowite i ogólne punktów podwójnych dla rzutów przecięcia ostrokręgu z kulą, której środek przypada w jego wierzchołku.

Można czasami wyznaczyć punkta podwójne w rzucie przecięcia dwu powierzchni drugiego rzędu za pomocą hyperboloidy jednopowłokowej, przechodzącej przez przecięcie się dwu powierzchni, a której jedna z tworzących prostolinijnych jest prostopadłą do płaszczyzny rzutów uważanej; w tym jednak przypadku ta hyperboloida przedstawia także jednę tworzącą przeciwnego układu, prostopadłą do tejże płaszczyzny rzutów, a punkta, w których te tworzące przecinają powierzchnię daną, mają swe rzuty zchodzące się u spodków prostopadłych, a zatem te dwa spodki są właściwie punktami szukanemi.

TWIERDZENIA UŁATWIAJĄCE KREŚLENIE RZUTÓW PRZECIĘCIA SIĘ POWIERZCHNI DRUGIEGO STOPNIA

751. Twierdzenie I. — *Przecięcie się dwu powierzchni drugiego rzędu jest czwartego stopnia.* — Ponieważ jakakolwiek płaszczyzna spotyka dwie powierzchnie podług krzywych drugiego stopnia, a te krzywe mają cztery punkta wspólne rzeczywiste lub urojone, zatem wszelka płaszczyzna sieczna przecina liniję wspólną obu powierzchniom w czterech punktach, czyli linija ta jest czwartego stopnia.

752. Twierdzenie II. — *Jeżeli dwie powierzchnie drugiego stopnia przecinają się z sobą podług jednej krzywej płaskiej, to przecięcie to jest uzupełnione drugą krzywą płaską.* — Twierdzenie to jest wynikiem poprzedzającego.

753. Wniosek. — *Jeżeli dwie powierzchnie stożkowe drugiego stopnia są styczne podług tworzącej wspólnej, to przecięcie ich składa się z prostej podwójnej i z krzywej stożkowej.* — Ponieważ tworząca dotknięcia winna być uważaną za dwie tworzące wspólne powierzchniom i zchodzące się z sobą, więc ta prosta podwójna należy do przecięcia, i jest to stożkowa wspólna obu powierzchniom, które na zasadzie poprzedniego twierdzenia winny mieć drugą stożkowę, wspólną.

754. Twierdzenie III. — (Patrz § 475).

755. Wniosek I. — (§ 476).

756. Wniosek II. — (§ 477).

757. Wniosek III. — *Jeżeli dwie powierzchnie drugiego stopnia dotykają się podług jednej linii, ta ostatnia jest stożkową.* — Obrawszy na linii dotknięcia dwa punkta w położeniu dowolnem, dwie powierzchnie dotkną się z sobą w tych punktach, a wskutek tego przetną się (§ 475) podług dwu stożkowych przechodzących przez te dwa punkta, czyli, że te dwie stożkowe zchodzą się z tą liniją, która zatem sama musi być stożkową.

758. Twierdzenie. IV. — *Jeżeli dwie powierzchnie drugiego stopnia mają płaszczyznę symetryi wspólną, to rzutem przecięcia się ich na wszelką płaszczyznę równoległą do płaszczyzny symetryi, jest linija stożkowa.* — Obierzmy trzy osie, z których dwie ox, oy na płaszczyznie symetryi, a trzecia prostopadła do niej; równania dwu powierzchni nie będą miały wyrazu pierwszego stopnia co do z i przyjmą kształt następujący

$$z^2 = f(x, y),$$

$$z^2 = \varphi(x, y).$$

W tych równaniach $f(x, y)$ i $\varphi(x, y)$ są drugiego stopnia, a z nich wyprowadzamy następujące równanie,

$$f(x, y) = \varphi(x, y),$$

które jest właśnie równaniem rzutu krzywej wspólnego przecięcia na płaszczyznę symetryi, a ponieważ ten rzut w niczem się nie różni od rzutu tej krzywej na płaszczyznę równoległą do płaszczyzny symetryi, jest więc on stożkowym.

759. Uwaga. — *Jeżeli warunki dwu ostatnich twierdzeń są sprawdzone jednocześnie, to rzut krzywej przecięcia na wszelką płaszczyznę równoległą do płaszczyzny symetryi składa się zazwyczaj z dwu prostych.* — I rzeczywiście; ponieważ bowiem dwa punkta dotknięcia płaszczyzn stycznych wspólnych zwykle nie leżą na płaszczyznie symetryi, zatem cięciwa wspólna obu krzywym płaskim, składającym przecięcie jest prostopadłą do płaszczyzn symetryi, krzywe zaś te mają rzuty prostolinijne tak na płaszczyznę symetryi, jakoteż na płaszczyznę do niej równoległą. Gdyby wyjątkowo punkta dotknięcia płaszczyzn stycznych leżały na płaszczyznie symetryi, to dwie stożkowe byłyby wówczas symetrycznie położone względem tej płaszczyzny i miałyby rzut wspólny nieprostolinijny.

760. Twierdzenie V. — *Przecięcie się dwu powierzchni podobnych drugiego stopnia jest systematem dwu stożkowych, z których jedna leży w nieskończoności.* — Jeżeli dwie powierzchnie drugiego stopnia są podobne, to równania ich mają ten sam wyraz drugiego stopnia, czyli równania te są następującego kształtu :

$$S = 0,$$

$$S + \lambda P = 0,$$

w których S jest funkcyją drugiego stopnia, P funkcyą linijną, zaś λ ilością stałą. Krzywa przecięcia winna więc leżeć na powierzchni

$$\lambda P = 0,$$

która przedstawia płaszczyznę w odległości skończonej i płaszczyznę w nieskończoności, co dowodzi podanej własności.

761. Twierdzenie VI. — *Przecięcia płaszczyzną dwu powierzchni drugiego stopnia, opisanych jedna na drugiej, są krzywemi stożkowemi podwójnie stycznemi.* — Widoczną jest rzeczą, że dwie stożkowe dotkną się w punktach rzeczywistych lub urojonych, w których płaszczyzna sieczna spotyka krzywę wspólnego przecięcia.

762. Wniosek. — *Jeżeli płaszczyzna sieczna dotyka jednej z powierzchni opisanych w jednym z jej pępków* (ombilics), *to przecina drugą podług stożkowej, mającej pępek za ognisko, a za odpowiednią kierownicę prostę przecięcia się płaszczyzny siecznej z płaszczyzną krzywej dotknięcia.* — I rzeczywiście; skoro bowiem pępek [1]) jest wówczas okręgiem koła promienia równego zeru, a podwójnie stycznym do stożkowej wspólnego przecięcia, punkta zaś w których on dotyka krzywej, leżą właśnie na prostej wspólnego przecięcia płaszczyzny siecznej z płaszczyzną krzywej wspólnej obu powierzchniom, a więc, na zasadzie paragrafu **462**, wniosek nasz jest dowiedzionym.

763. Uwaga. — Jeżeli powierzchnią styczną do płaszczyzny jest kula, to powyższe twierdzenie jest prawdziwem dla jakiegokolwiek punktu dotknięcia, gdyż wszystkie punkta kuli są pępkami.

764. Twierdzenie VII. — *Jeżeli dwa ostrokręgi drugiego stopnia mają płaszczyznę styczną wspólną, tworzące zaś ich dotknięcia są równoległe, to walec, nakreślony w kierunku tych tworzących na krzywej przecięcia się dwu ostrokręgów, jest także drugiego rzędu.* — Ponieważ punkt spotkania się tworzących

---

[1]) Nazywamy pępkami (ombilics) powierzchni drugiego stopnia, punkta w których ta powierzchnia jest przeciętą rednicami sprzężonemi swych płaszczyzn cyklicznych.

dotknięcia jest punktem podwójnym przecięcia się ostrokręgów, zatem drugi ostrokrąg mający wierzchołek w tym punkcie podwójnym, a za kierownicę krzywę przecięcia, jest także ostrokręgiem drugiego rzędu (§ 729); że zaś i wierzchołek tego ostrokręgu leży w nieskończoności na tworzących dotknięcia, jest więc on walcem równoległym do tych tworzących.

765. Uwaga. — Dowodzenie tu podane stosuje się także do dwu hyperboloid jednopowłokowych.

WYZNACZENIE GAŁĘZI NIESKOŃCZONYCH KRZYWEJ WSPÓLNEJ DWU POWIERZCHNIOM STOŻKOWYM LUB WALCOWYM

766. Gałęzie nieskończone pochodzą z dwu przyczyn, które należy odróżniać.

Pierwsza przyczyna. — Dwie powierzchnie mają tworzące prostolinijne i równoległe.

Druga przyczyna. — Tworzące jednej powierzchni są odrzucone do nieskończoności i spotykają drugą powierzchnię.

Jeżeli dwie powierzchnie są walcowe, to pierwsza przyczyna ma tylko miejsce dla walców równoległych, lecz wówczas także przecięcie się ich jest utworzonem z pewnej liczby tworzących i nie przedstawia nic zajmującego dla gałęzi nieskończonych, któremi się w tej chwili zajmujemy.

Dla dwu ostrokręgów zaś przeciwnie, drugą przyczynę należy odrzucić, gdyż rzeczywiście w tym przypadku tworzące ostrokręgu nie są nigdy zupełnie w nieskończoności jako przechodzące zawsze przez jeden z wierzchołków.

Nareszcie w przypadku danych ostrokręgu i walca, obie przyczyny, winny być wzięte pod uwagę. Widzimy więc, że trzy są odmienne do rozbioru przypadki, a mianowicie : 1° dla dwu ostrokręgów, 2° dla ostrokręgu i walca i 3° dla dwu walców.

767. Przypadek pierwszy. — *Dwie powierzchnie są ostrokręgami* (fig. p_6). — Dla przekonania się,

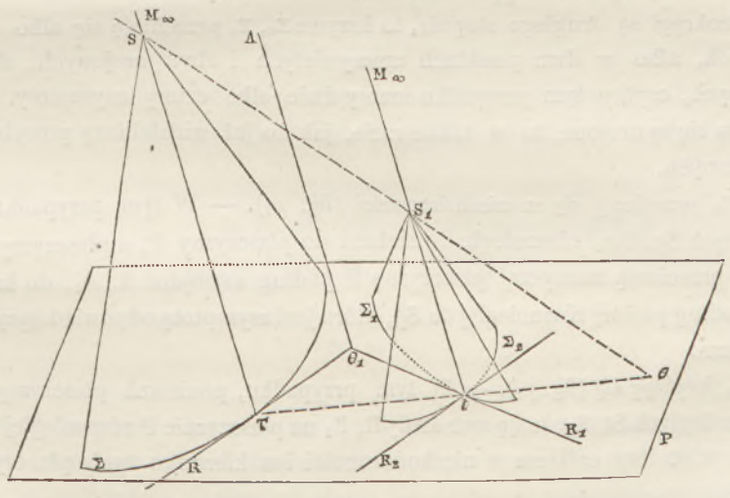

Fig. p_6.

że istnieją tworzące równoległe, należy przenieść jeden z ostrokręgów równolegle do jego pierwotnego położenia do wierzchołku drugiego (§ 528, 3°) i upewnić się że istnieją tworzące wspólne.

Oznaczmy przez S, S_1 wierzchołki ostrokręgów danych, przez Σ, Σ_1 podstawy odpowiednie na płaszczyznie P, zaś przez Σ_2 podstawę na tejże płaszczyznie ostrokręgu mającego wierzchołek S, po przeniesieniu go równolegle do niego samego do wierzchołka drugiego ostrokręgu.

Ponieważ podstawa Σ_2 może mieć względem podstawy Σ_1 rozmaite położenia, należy więc je rozważyć kolejno, i tak :

1° *Kiedy* Σ_1 i Σ_2 *nie mają żadnego punktu wspólnego.* — W tym przypadku dwa ostrokręgi nie mają żadnej tworzącej wspólnej, więc ich przecięcie się nie rozciąga się do nieskończoności.

2° *Kiedy* Σ_1 i Σ_2, (jak na figurze p_6), *przecinają się z sobą w odległości skończonej.* — Niech punktem spotkania będzie punkt t; jeżeli nakreślimy tworzącę S_1t i sprowadzimy ją do pierwotnego położenia, kreśląc po prostu przez punkt S prostę $S\tau$ równoległą do S_1t, to punkt M_∞ na prostych S_1t i $S\tau$ należy do przecięcia się ostrokręgów danych, czyli tworząca będzie miała jeden punkt w nieskończoności.

Ponieważ na zasadzie powyżej podanego paragrafu, prosta SS_1 ma za ślad na płaszczyznie P środek podobieństwa (similitude) krzywych Σ, Σ_1 a środek ten należy koniecznie do prostej τt, więc leżeć on musi na wspólnem ich przecięciu, to jest w punkcie θ.

Zwyczajne wykreślenie wyznacza na płaszczyznie $S\theta\tau$ punkt przecięcia M_∞; wyznaczyłoby ono i inne punkta tego przecięcia bardzo oddalone na płaszczyznach sąsiednich z jednej i drugiej strony pierwszej, wyjąwszy przypadku, w którym ostrokręgi dotykają płaszczyzny $S\theta\tau$ i leżą po obu jej stronach. Ztąd wnosimy, że przecięcie ma gałęzie nieskończone w kierunku tS_1.

Dla wyznaczenia asymptoty odpowiadającej, to jest stycznej do krzywej wspólnej w punkcie M_∞ wiemy, że płaszczyzny styczne w tym punkcie mają za ślad na płaszczyznie podstaw styczne R, R_1 do krzywych Σ, Σ_1 przechodzące przez punkta τ, t; punkt zatem przecięcia się θ_1 tych śladów jest jednym punktem stycznej, drugim zaś jest M_∞, czyli, że prosta A równoległa do prostej S_1t a przechodząca przez punkt θ_1 jest właśnie asymptotą szukaną.

Przez punkt t nakreśliwszy styczną R_2 do krzywej Σ_2, to ponieważ ta prosta winna być równoległą do R, więc R, R_1 nie są równoległemi, ztąd wynika, że zawsze w przypadku uważanym, przecięcie ma asymptotę, a zatem, *że jest ono hyperbolicznem.*

Jeżeli dwa ostrokręgi są drugiego stopnia, to krzywe Σ_1, Σ_2 przecinają się albo w czterech punktach rzeczywistych, albo w dwu punktach rzeczywistych i dwu urojonych, albotéż w czterech punktach urojonych, czyli w tym przypadku mamy dwie albo cztery asymptoty. Jeżeli zaś cztery punkta przecięcia się są urojone, to w takim razie, jak to już widzieliśmy powyżej, krzywa nie ma gałęzi nieskończonych.

3° *Kiedy* Σ_1, Σ_2 *przecinają się w nieskończoności* (fig. p_7). — W tym przypadku dwa ostrokręgi mają dwie tworzące Sg, S_1g_1 równoległe do siebie i do płaszczyzny P, a płaszczyzny styczne przechodzące przez nie przecinają zazwyczaj płaszczyznę P podług asymptot A, A_1, do krzywych Σ, Σ_1, zaś pomiędzy sobą podług prostej równoległej do Sg, która jest asymptotą odpowiadającą krzywej wspólnej obu powierzchniom.

4° *Kiedy* Σ_1, Σ_2 *dotykają się* (fig. p_8). — W tym przypadku, ponieważ płaszczyzny styczne wzdłuż tworzących równoległych St, S_1t mają swe ślady R, R_1 na płaszczyznie P równoległej i są same równoległe, asymptota więc leży całkiem w nieskończoności i w kierunku tych płaszczyzn, czyli krzywa jest paraboliczną.

Jeżeli powierzchnie są drugiego rzędu, to Σ_2 przecina Σ_1 w dwu punktach zchodzących się w punkcie t i w dwu innych punktach rzeczywistych lub urojonych, będą więc oprócz asymptoty w nieskończoności dwie inne asymptoty rzeczywiste lub urojone.

Gdyby dwie płaszczyzny $S_\tau R$, $S_1 t R_1$ zchodziły się z sobą, to ich wspólne przecięcie miałoby wówczas punkt podwójny w nieskończoności M_∞ a asymptoty dałyby się wyznaczyć przez przecięcia się płaszczyzny stycznej wspólnej z walcem pomocniczym, przechodzącym przez to przecięcie się i mającym tworzące równoległe do $S_1 t$ (§ 727).

Przyjąwszy zaś dwie powierzchnie dane za powierzchnie drugiego stopnia, walce byłyby także drugiego stopnia (§ 729), a krzywa wspólna miałaby dwie asymptoty równoległe.

Wreszcie, gdy krzywe Σ_1, Σ_2 są drugiego stopnia i podwójnie styczne, to przecięcie ma dwie

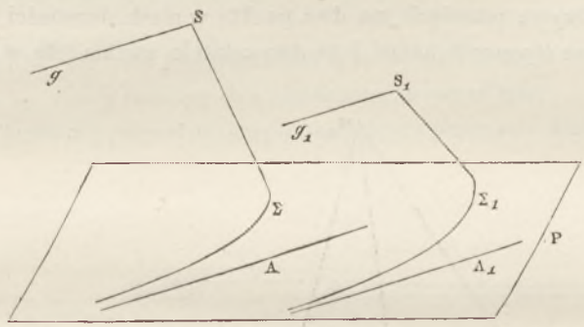

Fig. p_7.

asymptoty w nieskończoności i w kierunku płaszczyzn stycznych wspólnych dwu ostrokręgom tegoż samego wierzchołka.

5° *Kiedy* Σ_1, Σ_2 *są ściśle styczne*, t. j. kiedy te krzywe mają trzy punkta wspólne zchodzące się.

W tym przypadku tworzące równoległe ostrokręgu danego są potrójne, asymptota, jak poprze-

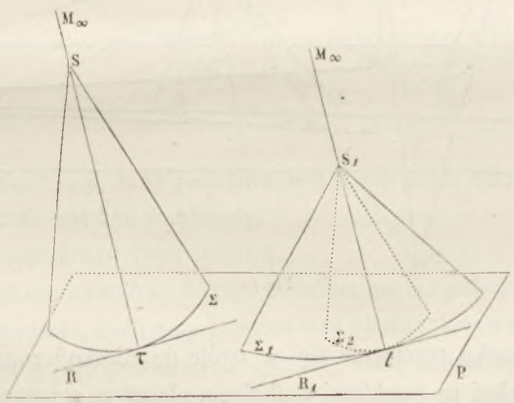

Fig. p_8.

dnio, leży cała w nieskończoności i przecina krzywę w trzech punktach zchodzących się, czyli krzywa ta przedstawia punkt przegięcia w nieskończoności.

Jeżeli krzywe Σ_1, Σ_2 mają cztery punkta zchodzące się z sobą, to asymptota do krzywej przecięcia leży w nieskończoności i nie przecina krzywej i t. d.

6° *Kiedy krzywe* Σ_1, Σ_2 *zchodzą się z sobą.*

Ponieważ w tym przypadku dwa ostrokręgi dane są podobne, wszystkie ich tworzące są równo-

ległe co druga i jedna z gałęzi krzywej wspólnej leży całkiem w nieskończoności, pozostaje więc tylko do zbadania, czy gałęź tego przecięcia jest w odległości skończonej i czy rozciąga się nieograniczenie.

Uważmy (fig. p_9) dwa ostrokręgi których podstawami na płaszczyznie P są Σ, Σ_1, linija SS_1 liniją wierzchołków, mającą ślad na płaszczyznę P w punkcie θ; jeżeli śladem płaszczyzny pomocniczej, przechodzącej przez prostę SS_1 na tęż płaszczyznę P będzie Q, to ponieważ punkt θ jest środkiem podobieństwa krzywych Σ, Σ_1 (§ 363, 3°) zaś tworzącemi są proste Sa, Sb, Sa_1, Sb_1 wyznaczone na obu ostrokręgach przez płaszczyznę pomocniczą, a równoległe co druga, zatem, w przypadku przedstawionym na figurze, krzywa przecięcia ma dwa punkta w nieskończoności i dwa inne M_1, M_2.

Ponieważ dla płaszczyzn stycznych nawet i te dwa ostatnie punkta leżą w nieskończoności, zatem

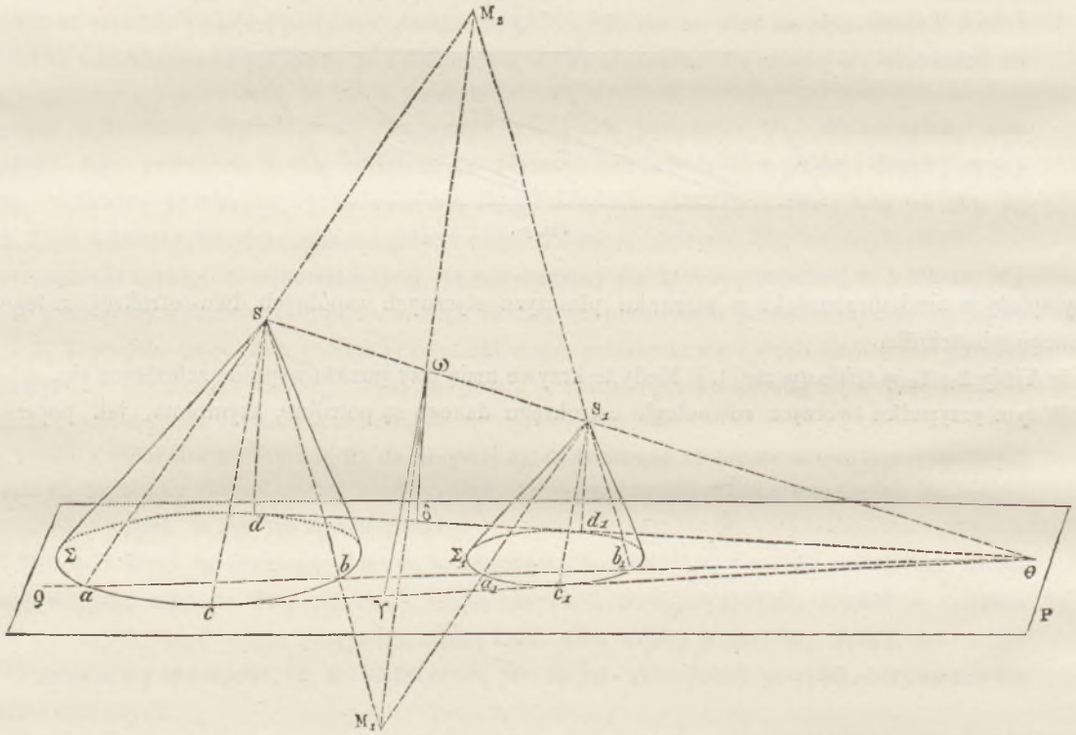

Fig. p_9.

gałęź przedstawiona na rysunku rozciągnie się w ogóle do nieskończoności. Że zaś punkta leżące w nieskończoności na tej gałęzi są punktami dotknięcia płaszczyzn stycznych wspólnych dwu ostrokręgom, są one zatem punktami podwójnemi przecięcia, asymptoty zaś wyznaczy się sposobem podanym powyżej (4°). Jakkolwiek dotąd podstawy drugiego stopnia zostały narysowane, jednakże one nie wpływają na rozumowanie.

Przyjąwszy teraz, że ostrokręgi są drugiego stopnia, znajdziemy na zasadzie twierdzenia dowiedzionego (§ 759), że przecięcie będzie układem dwu stożkowych, z których jedna leży w nieskończoności, nadto, że ostrokrąg pomocniczy służący do wyznaczenia stycznych w punkcie podwójnym, sprowadza się do dwu płaszczyzn, z których jedna leży w nieskończoności.

Ponieważ prócz tego, ostrokręgi dane mają dwie płaszczyzny styczne wspólne, a więc i dwa punkta

podwójne, wypada ztąd, że krzywa ma cztery asymptoty, z których dwie leżą w nieskończoności, a dwie pozostałe należą do linii nakreślonej na rysunku, czyli tą liniją jest hyperbola.

Znalezienie asymptot nie przedstawia trudności, gdyż wystarcza tu nakreślić płaszczyzny styczne wspólne i ich tworzące dotknięcia (Sc, S_1c_1), (Sd, S_1d_1), a te dwie pary prostych równoległych wyznaczą kierunki asymptotyczne, następnie zaś zauważyć, że $SM_1\ S_1M_2$ jest równoległobokiem, mającym środek w punkcie ω, który nie zmienia się, gdy się zmienia płaszczyzna pomocnicza, a więc, że on jest zawsze we środku cięciw M_1M_2, czyli, że jest środkiem przecięcia. Kreśląc więc przez punkt ω proste $\omega\gamma$, $\omega\delta$ odpowiednio równoległe do kierunków asymptotycznych Sc, Sd, otrzymamy asymptoty szukane.

768. Drugi przypadek. — *Dwiema powierzchniami są ostrokrąg i walec.*

Pierwsza przyczyna. — *Kiedy tworzące dwu powierzchni są równoległe.*

Żeby wskutek tylko pierwszej przyczyny krzywa wspólnego przecięcia miała gałęzie nieskończone,

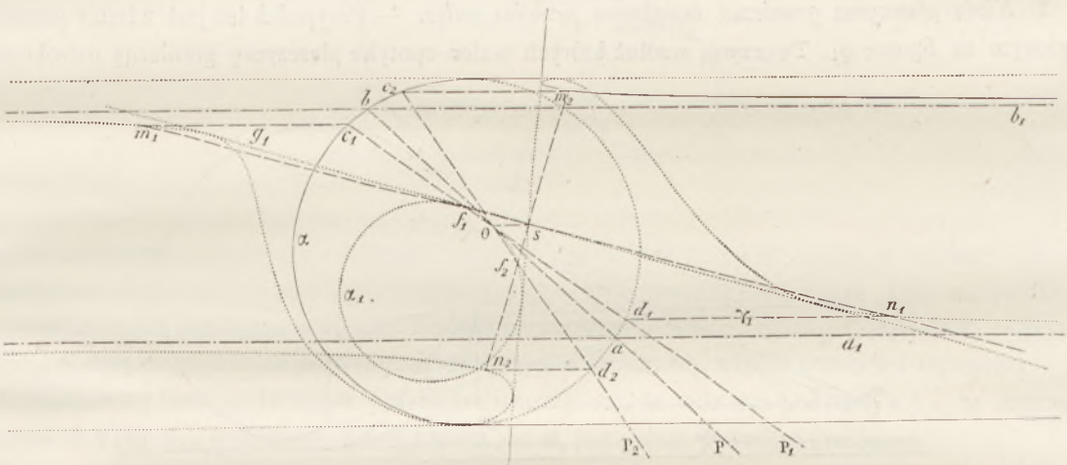

Fig. p_{10}.

potrzeba, jak to już powiedzieliśmy, żeby podstawa walca nie miała takowych, podstawa zaś ostrokręgu może je mieć lub może ona być zamkniętą.

Dowiedźmy najprzód następującego twierdzenia :

Asymptoty krzywej nakreślonej na walcu, którego podstawa nie ma gałęzi nieskończonych, są koniecznie jego tworzącemi. — I rzeczywiście, zrobiwszy bowiem rzut ukośny, krzywej uważanej w kierunku tworzących walca i na płaszczyznę jego podstawy, znajdziemy samą podstawę, dla której jako zamkniętej z założenia, asymptota musi mieć za rzut jeden z punktów krzywej, lub inaczej mówiąc, asymptota musi być tworzącą walca.

Zauważywszy raz na zawsze, że wykreślenia odnoszące się do gałęzi nieskończonych będą przedstawiane tylko w rzucie poziomym, zajmiemy się rozwiązaniem głównej części zadania. W tym celu oznaczmy przez s rzut wierzchołka ostrokręgu, przez α, α_1 ślady odpowiednie na płaszczyznę rzutu walca i ostrokręgu, przez $s\theta$ rzut tworzącej ostrokręgu równoległej do tworzących walca, i wreszcie przez θ ślad tej tworzącej na płaszczyznę rzutów (fig. p_{10}).

Śladami płaszczyzn pomocniczych, używanych zazwyczaj do wyznaczenia punktów krzywej przecięcia, są promienie wiązki, której θ jest wierzchołkiem. Robiąc wykreślenie dla jednej z płaszczyzn

np. tej, której śladem jest P, znajdziemy na ostrokręgu dwie tworzące, których rzutami są $s\theta$, sf, na walcu zaś dwie tworzące, których rzutami są c_1q_1, $d_1\gamma_1$, wreszcie na rzucie krzywej przecięcia cztery punkta, z których dwa n_1, m_1 leżą w odległości skończonej, gdy tymczasem dwa pozostałe zawsze w nieskończoności.

Krzywa więc nakreślona jest miejscem geometrycznem punktów m_1, n_1 i dla niej to należy sprawdzić, czy istnieją gałęzie nieskończone.

Punkta m_1, n_1 znajdą się w nieskończoności, gdy prosta sf stanie się równoległą do kierunku rzutów tworzących walca, to jest skoro się zejdzie z prostą $s\theta$, gdyż wówczas ślad płaszczyzny pomocniczej będzie styczną P do podstawy α_1, a przechodzącą przez punkt β.

Płaszczyzna pomocnicza, której śladem jest P, jest płaszczyzną graniczną dla ostrokręgu, a jako taka może nie spotykać walca, może go przecinać, lub może go tylko dotykać.

1° *Kiedy płaszczyzna graniczna ostrokręgu nie spotyka walca.* — W tym przypadku krzywa nakreślona jest zamkniętą.

2° *Kiedy płaszczyzna graniczna ostrokręgu przecina walec.* — Przypadek ten jest właśnie przedstawionym na figurze q_1. Tworzące, wzdłuż których walec spotyka płaszczyznę graniczną ostrokręgu,

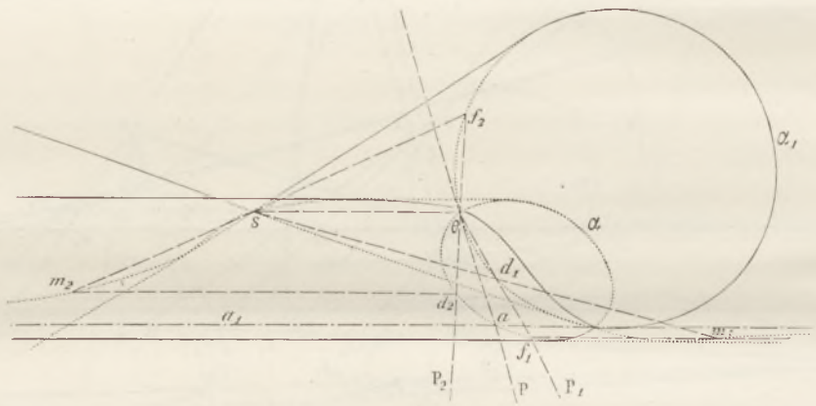

Fig. q_1.

mają za rzuty aa_1, bb_1, a na zasadzie własności powierzchni granicznych, te ostatnie winny spotykać rzut krzywej przecięcia powierzchni w nieskończoności; lecz ponieważ przecięcie to składa się z dwu części, jednej przedstawionej na rysunku, a drugiej leżącej w nieskończoności, może więc się zdawać, że twierdzenie ogólne jest w tym przypadku nieprawdziwe, jednakże tak nie jest, gdyż postępując po krzywej, jako miejscu geometrycznem punktów m_1, n_1, w bliskości prostych aa_1, bb_1, to jest uważając płaszczyzny pomocnicze, których ślady P_1, P_2 leżą po obu stronach P i są mało nachylone do tej prostej, znajdujemy, że punktami przecięcia, leżącemi w odległości skończonej na tychże płaszczyznach, są punkta n_1, m_1, n_2, m_2. Jeżeli teraz będziemy zbliżać P_1 i P_2 do P, to punkta m_1, m_2, leżące z jednej i z drugiej strony prostej bb_1, dążą do punktu w nieskończoności tej prostej, a że toż samo ma miejsce i dla punktów n_1, n_2, a zatem proste aa_1, bb_1 są asymptotami krzywej uważanej.

W przypadku tu uważanym podstawy są drugiego stopnia, lecz widocznem jest, że byleby punkta θ, a i b nie były ani punktami przegięcia, ani punktami szczególnemi, to kształt podstawy jest zupełnie obojętnym.

Zdarzyć się może, że tworząca dotknięcia płaszczyzny granicznej dla ostrokręgu, należy do walca,

lecz wówczas figura q_1, dla której tak znakowanie jakoteż wykreślenie podane na poprzedzającej figurze zostało zachowane, wskazuje, że krzywa ma tylko jednę asymptotę, a mianowicie tworzącą, wzdłuż której płasczyzna graniczna dla ostrokręgu przecina walec, a której rzutem jest prosta aa_1.

3° *Kiedy płasczyzna graniczna ostrokręgu zchodzi się z jedną z płasczyzn granicznych walca.*

Jeżeli przypuścimy najprzód, że tworzące dotknięcia płasczyzny granicznej wspólnej nie zchodzą się i postępować będziemy na danych figury poprzedzającej, zmieniając tylko położenie podstawy α (fig. q_2), którą tym razem przyjmiemy za styczną do P, to zobaczymy, że z dwu płasczyzn bardzo

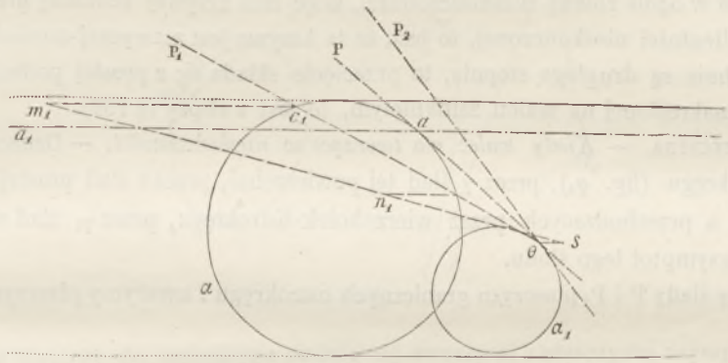

Fig. q_2.

blizkich płasczyzny granicznej wspólnej, tylko ta, której śladem jest P, wyznacza punkta, leżące w odległości skończonej na przecięciu, a rzuty zaś m_1, n_1 tych punktów leżą blizko rzutu aa_1 tworzącej, wzdłuż której płasczyzna graniczna wspólna dotyka walca a ponieważ jeżeli P_1 dąży do P, to punkta m_1, n_1 dążą do punktu leżącego w nieskończoności na prostej aa_1, więc ta prosta jest asymptotą.

Przypuściwszy teraz, że tworzące dotknięcia zchodzą się, to wówczas podstawy α i α_1 są styczne w punkcie θ (fig. q_3), a tworząca, której rzutem jest $s\theta$, jest prostą podwójną przecięcia.

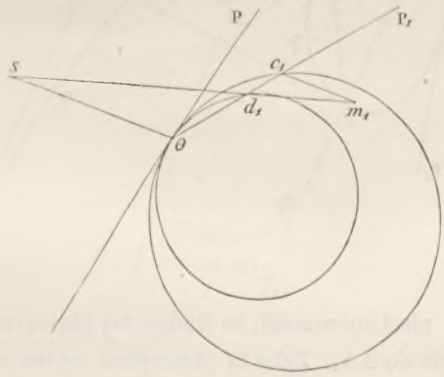

Fig. q_3.

Zobaczmy czy druga część przecięcia ma gałęzie nieskończone; w tym celu, zróbmy wykreślenie dla jakiegokolwiek punktu m_1 lecz blizkie prostej $s\theta$ i napiszmy wynikający ztąd związek :

$$(1) \qquad \frac{c_1 m_1}{s\theta} = \frac{c_1 d_1}{d_1 \theta}.$$

Zakładając

$$c_1 d_1 = u \qquad d_1 \vartheta = v,$$

otrzymamy

$$u = f(v).$$

a ponieważ, jeżeli P_1 dąży do P to druga strona równości (1) dąży do $f'(v)$, więc możemy napisać

$$\text{gr.}\, c_1 m_1 = f'(v).s\vartheta\,;$$

że zaś $f'(v)$ nie jest w ogóle równą nieskończoności, więc rzut krzywej szukanej przetnie $s\vartheta$ w punkcie leżącym w odległości nieskończonej, to jest, że ta krzywa jest zazwyczaj zamkniętą.

Jeżeli powierzchnie są drugiego stopnia, to przecięcie składa się z prostej podwójnej i z krzywej drugiego stopnia nakreślonej na walcu zamkniętym, to jest z elipsy (§ 752).

769. Druga przyczyna. — *Kiedy walec ma tworzące w nieskończoności.* — Oznaczmy przez s rzut wierzchołka ostrokręgu (fig. q_4), przez γ ślad tej powierzchni, przez ϑ ślad prostej równoległej do tworzących walca, a przechodzących przez wierzchołek ostrokręgu, przez γ_1 ślad walca i wreszcie przez AA_1 jednę z asymptot tego śladu.

Jeżeli nakreślimy ślady P i P_1 płaszczyzn granicznych ostrokręgu i uważymy płaszczyznę pomocniczą,

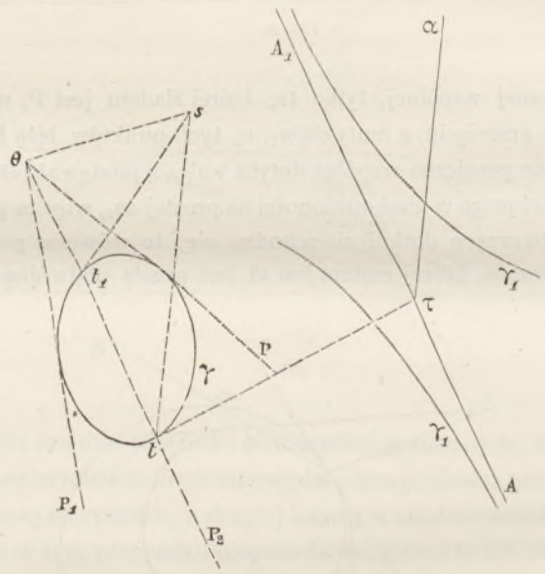

Fig. q_4.

obejmującą tworzące walca w nieskończoności, to śladem tej płaszczyzny będzie prosta P_2, przechodząca przez punkt ϑ i równoległa do AA_1. Żeby ta płaszczyzna wyznaczała punkta przecięcia w nieskończoności, trzeba i wystarcza, żeby ślad jej przypadał wewnątrz kąta utworzonego przez P i P_1. Przypuściwszy więc, że warunek ten ma miejsce, to jedna z płaszczyzn asymptotycznych walca może przeciąć płaszczyzny graniczne, może być równoległą do jednej z nich, lub nareszcie może się z nią zchodzić.

1° *Kiedy jedna z płaszczyzn asymptotycznych walca przecina płaszczyzny graniczne ostrokręgu,* Przypadek ten jest przedstawiony na figurze q_4. Płaszczyzna mająca ślad P_2 przecina wówczas

ostrokrąg podług dwu tworzących spotykających tworzące w nieskończoności walca, a których rzutami są st, st_1, czyli krzywa wspólna dwu powierzchniom ma punkta w nieskończoności.

Szukając asymptoty odpowiadającej tworzącej, której rzutem jest st, to znajduje się ona na prze-

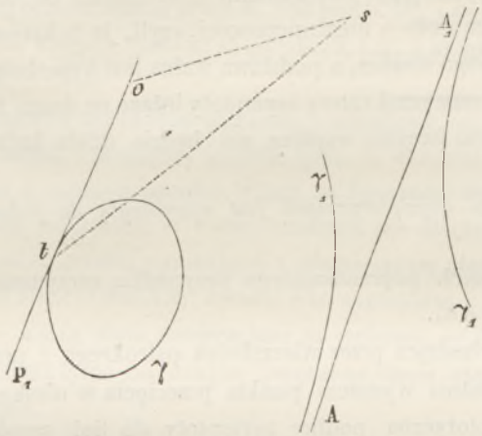

Fig. 95.

cięciu płaszczyzny stycznej do ostrokręgu podług tej tworzącej z płaszczyzną asymptotyczną, śladem zaś płaszczyzny stycznej do ostrokręgu, jest styczna do γ przechodząca przez punkt t, a spotykająca AA_1 w punkcie τ, który jest śladem asymptoty szukanej.

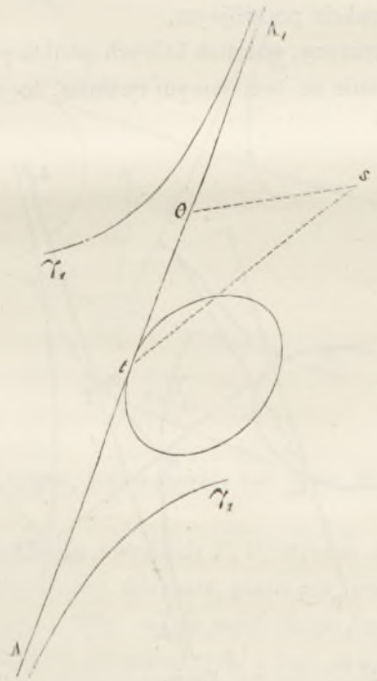

Fig. 96.

Ponieważ nadto tworząca ostrokręgu jest równoległą do płaszczyzny asymptotycznej, więc rzut asymptoty otrzymamy, kreśląc przez punkt τ prostę $\alpha\tau$ równoległą do st.

Należy postąpić w ten sam sposób z prostą st_1.

Jeżeli podstawa walca jest paraboliczną, to płaszczyzna asymptotyczna jest płaszczyzną w nieskończoności, a zatem, jeżeli płaszczyzna przechodząca przez wierzchołek ostrokręgu, a w kierunku płaszczyzny asymptotycznej, pada pomiędzy płaszczyznami granicznemi ostrokręgu, to krzywa wspólna obu powierzchniom, ma asymptotę w nieskończoności, czyli, że ta krzywa jest także paraboliczną.

Jeżeli powierzchnie są drugiego stopnia, a podstawa walca jest hyperbolą, to krzywa wspólna obu powierzchniom będzie miała zazwyczaj cztery asymptoty leżące co druga na jednej płaszczyznie; jeżeli zaś podstawa jest parabolą, to krzywa wspólna nie będzie miała żadnej asymptoty w odległości skończonej.

2° *Kiedy jedna z płaszczyzn asymptotycznych jest równoległą do jednej z płaszczyzn granicznych ostrokręgu.*

Zachowując znaczenie danych poprzedzającego przypadku, otrzymamy figurę q_5, na której, tym razem θP_1 jest równoległe do AA_1.

Ponieważ płaszczyzna przechodząca przez wierzchołek ostrokręgu i przez P_1, obejmuje tworzącą, której rzutem jest st, a ta ostatnia wyznacza punkta przecięcia w nieskończoności, więc płaszczyzna ta spotyka płaszczyznę asymptotyczną podług asymptoty do linii wspólnej, a ta asymptota leży w nieskończoności. Gałęź zatem krzywej wspólnej odpowiadająca tej asymptocie, jest *paraboliczną*.

3° *Kiedy jedna z płaszczyzn asymptotycznych zchodzi się z płaszczyzną graniczną ostrokręgu.*

W tym przypadku płaszczyzna asymptotyczna jest styczną zarazem do obu powierzchni, których przecięcie się ma wskutek tego punkt podwójny w nieskończoności na tworzącej st dotknięcia ostrokręgu z płaszczyzną asymptotyczną (fig. q_6). Wynika ztąd, że asymptoty do krzywej wspólnej obu powierzchniom są stycznemi w punkcie podwójnym.

770. Uwaga. — Jeżeli dwie przyczyny, wskutek których punkta przecięcia znajdują się w nieskończoności, mają miejsce jednocześnie na tym samym rysunku, to nie należy sądzić, że wykreślenia

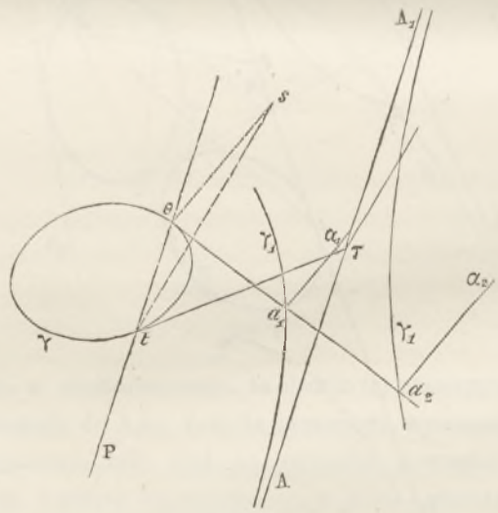

Fig. q_7.

służące do wyznaczenia asymptot w każdym z tych przypadków, mogą być użyte bez poprzedniego rozbioru kwestyi. I rzeczywiście; weźmy bowiem (fig. q_7), γ za podstawę ostrokręgu, $s\theta$ za rzut two-

rzącej tego ostrokręgu, równoległej do tworzącej walca, zaś i γ_1 za ślad walca a otrzymamy w $a_1\alpha_1$, $a_2\alpha_2$ sposobem zwyczajnym, na tworzących, rzuty równoległych asymptot, wychodzących z punktów w nieskończoności. Pozostałe asymptoty otrzymamy zważając, że śladem płaszczyzny równoległej do płaszczyzny asymptotycznej przechodzącej przez $s\theta$, jest prosta θP, i że ta płaszczyzna przecina ostrokrąg wzdłuż dwu tworzących, których rzutami są proste $s\theta$, i st, a których punkta spotkania z walcem leżą w nieskończoności.

Ponieważ pierwsza z tworzących ostrokręgu wyznacza z przecięcia się, ze wszystkiemi tworzącemi walca, punkta w nieskończoności, z pomiędzy których tylko te wchodzą do rysunku, których rzuty leżą na $a_1\alpha_1$, $a_2\alpha_2$, więc punkt w nieskończoności, leżący na tworzącej ostrokręgu, mającej za rzut $s\theta$, i na tworzącej walca, leżącej całkowicie w nieskończoności nie należy do krzywej wykreślonej na rysunku, a więc nie należy także prostej wynikającej z przecięcia się płaszczyzny stycznej $s\theta a_1$ z płaszczyzną asymptotyczną, której śladem jest AA_1, uważać jako asymptotę.

771. Trzeci przypadek. — *Kiedy dwie powierzchnie są walcami.* — Ponieważ w tym przypadku punkta w nieskończoności zależą tylko od drugiej przyczyny, musi więc przynajmniej jedna z podstaw mieć gałęzie nieskończone.

Można tu atoli odróżnić dwa następujące przypadki :

1° *Kiedy jedna podstawa jest ograniczoną, a druga ma gałęzie nieskończone* (fig. q_8).

Oznaczmy przez γ, γ_1 dwie podstawy, przez $a\theta$, $a\theta_1$ rzuty prostych równoległych do dwóch tworzą-

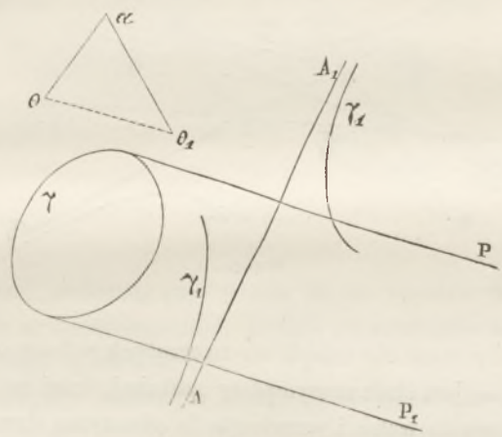

Fig. q_8

cych walców, a przechodzących przez jeden punkt, zaś przez $\theta\theta_1$ ślad płaszczyzny przechodzącej przez te dwie równoległe.

Ponieważ płaszczyzny ograniczające mają swe ślady P, P_1 styczne do γ, więc płaszczyzny przecinające γ_1 w nieskończoności, leżą najczęściej zewnątrz płaszczyzn granicznych, czyli, że przecięcie wogóle, nie ma gałęzi nieskończonych; żeby zaś je mieć mogło, musi płaszczyzna asymptotyczna być równoległą do płaszczyzn siecznych pomocniczych i być zawartą po między płaszczyznami ograniczającemi drugiego walca, gdyż w takim razie będzie ona płaszczyzną ograniczającą walec o podstawie nieskończonej, a jako taka, przetnie drugi walec podług asymptot linii wspólnej obu powierzchniom danym

2° *Kiedy podstawy obu walców mają gałęzie nieskończone.* — W tym przypadku płaszczyzny sieczne

pomocnicze nakreślone w kierunku dwu tworzących walców, mogą mieć względnie do płaszczyzn asymptotycznych, trzy rozmaite a następujące położenia :

1° *Płaszczyzny sieczne pomocnicze mogą nie być równoległe do płaszczyzn asymptotycznych.*

2° *Płaszczyzny sieczne pomocnicze mogą być równoległe do jednej płaszczyzny asymptotycznej.*

3° *Dwa walce mogą mieć dwie płaszczyzny asymptotyczne równoległe.*

1° *Kiedy płaszczyzny sieczne pomocnicze nie są równoległe do płaszczyzn asymptotycznych* (fig. q_9). — Oznaczmy przez γ, γ_1 podstawy ustawione na płaszczyźnie poziomej rzutów, przez aa_1, $\alpha\alpha_1$ odpowiednie im asymptoty, przez $m\theta$, $m\theta_1$ rzuty dwu prostych równoległych do tworzących walców a przechodzących przez jeden i tenże sam punkt w przestrzeni, wreszcie przez $\theta\theta_1$ ślad płaszczyzny tych prostych.

Ponieważ z założenia $\theta\theta_1$ nie jest równoległe do żadnej z asymptot podstawy, więc kreśląc płaszczyznę sieczną równoległą do tworzących walców, będzie ona oddaloną do nieskończoności i obejmie jednę tworzącą każdej z tych powierzchni, a punkt ich przecięcia się będzie punktem w nieskończoności przecięcia.

Szukajmy teraz asymptoty, to jest prostej, podług której przecinają się z sobą płaszczyzny asymptotyczne do walców. Ponieważ płaszczyzny te są wyznaczone, gdyż przechodzą one odpowiednio przez

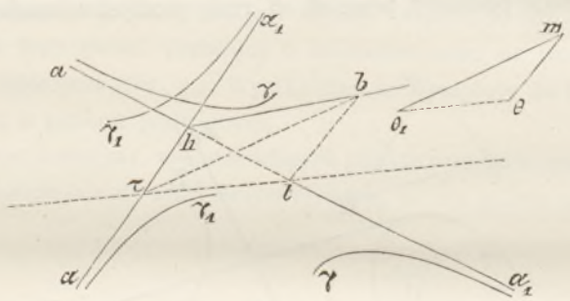

Fig. q_9.

asymptoty podstawy i są skierowane równolegle do tworzących walców odpowiednich, więc punkt h przecięcia się asymptot oa_1, $\alpha\alpha_1$ jest śladem asymptoty szukanej, drugi zaś jej punkt otrzymamy, uważając płaszczyzny asymptotyczne za walec i przecinając je płaszczyzną sieczną pomocniczą, równoległą do tworzących walców danych. Oznaczywszy zatem przez $t\tau$ ślad poziomy tej płaszczyzny, to śladami przecięć będą punkta t i τ, a kreśląc przez nie proste równoległe do rzutów odpowiednich tworzących walców, znajdziemy punkt b, to jest rzut drugiego punktu szukanego.

Nakreślenie samej prostej bh, która jest rzutem asymptoty szukanej, nie przedstawia trudności.

Jeżeli walce są drugiego stopnia, to w taki sam sposób znajdziemy cztery asymptoty.

Zauważymy tu, że przecięcie jest zazwyczaj hyperbolicznem, żeby zaś ono było parabolicznem musi przynajmniej jedna podstawa być paraboliczną.

2° *Kiedy płaszczyzny sieczne pomocnicze są równoległe do jednej z płaszczyzn asymptotycznych* (fig. q_{10}).

Oznaczmy przez γ, γ_1, ślady walców, przez aa_1, $\alpha\alpha_1$ ich asymptoty, zaś przez hg, rzut jednej z tworzących walca, mającego za podstawę γ

Jeżeli przyjmiemy, zgodnie z założeniem, że płaszczyzna asymptotyczna mająca ślad $\alpha\alpha_1$ jest

równoległą do tworzących walca o podstawie γ, to ta płaszczyzna wyznaczy natychmiast kierunek płaszczyn pomocniczych, czyli będzie płaszczyzną ograniczającą dla walca o podstawie γ_1.

Ponieważ ta płaszczyzna ograniczająca obejmuje punkta przecięcia leżące w nieskończoności na tworzących, wzdłuż których spotyka ona walec o podstawie γ, a te tworzące mają za ślady poziome punkta przecięcia się t_1, t_2 podstawy γ z asymptotą $\alpha\alpha_1$, za rzuty zaś proste równoległe t_1g_1, t_2g_2 przechodzące przez punkta t_1, t_2 w kierunku prostej hg, więc, na zasadzie powierzchni granicznych, te tworzące są stycznemi do krzywej w nieskończoności, a ponieważ ta ostatnia ma punkta leżące na płaszczyznach równoległych do płaszczyzny granicznej uważanej i blizkie jej, zatem te dwie tworzące mające za rzuty t_1g_1, t_2g_2 są asymptotami przecięcia w rzucie, a tem samem gałęzie odpowiadające tego przecięcia mają kształt hyperboliczny.

3° *Kiedy płaszczyzny asymptotyczne dwu walców są równoległe.* — W tym przypadku płaszczyzny te są równoległe do dwu tworzących walców i wyznaczają odrazu kierunek płaszczyzn siecznych pomocniczych, a nadto są one płaszczyznami granicznemi dla odpowiedniego walca i przecinają drugi po-

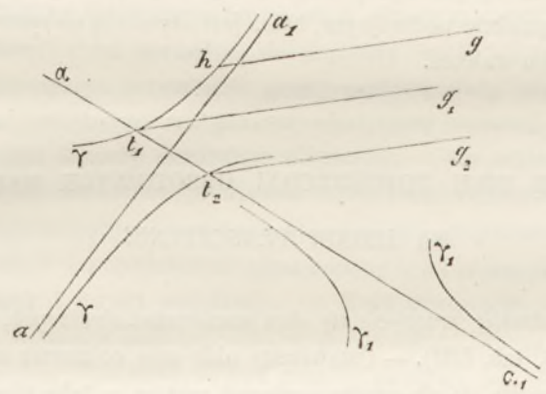

Fig. 910.

dług tworzących do krzywej szukanej, gdyż proste te, na zasadzie własności powierzchni granicznych dotykają przecięcia w nieskończoności, punkta zaś przecięcia znajdują się na płaszczyznach siecznych pomocniczych, które są im blizkie.

Jeżeli powierzchnie są drugiego stopnia, to w ten sposób znajdziemy dwie asymptoty, trzecię otrzymamy z przecięcia się płaszczyzn asymptotycznych nierównoległych, a czwarta znajdzie się w kierunku płaszczyzn asymptotycznych równoległych w nieskończoności.

Przecięcie w tym przypadku składa się z prostej w nieskończoności i z krzywej trzeciego stopnia, gdyż przecięcie się płaszczyzny, mającej kierunek dowolny, z danym walcem jest układem dwu hyperbol, których dwie asymptoty są równoległe, i przecinające się w czterech punktach, z których jeden zostaje ciągle w nieskończoności, a krzywa w odległości skończonej, jako przecięta tylko w trzech punktach przez jakąkolwiek płaszczyznę, jest krzywą trzeciego stopnia.

Jeżeli teraz dwa walce drugiego stopnia mają płaszczyzny asymptotyczne równoległe brane co druga, to przecięcia się tych płaszczyzn są także równoległe, lub inaczej mówiąc, tworzące tych dwu powierzchni są równoległe, i przecięcie w tym przypadku składa się z czterech tworzących, z których dwie leżą w nieskończoności.

Wreszcie, przypuścić można, że walce mają płaszczyznę asymptotyczną wspólną, a w tym razie

punkta leżące na tej płaszczyznie są punktami podwójnemi w nieskończoności, zaś asymptoty są stycznemi w punktach podwójnych.

Jeżeli walce są drugiego stopnia, to płaszczyzna sieczna pomocnicza leżąca w nieskończoności wyznacza jeden punkt przecięcia, a asymptotę odpowiadającą otrzymamy na przecięciu się płaszczyzn asymptotycznych niewspólnych.

Nadto płaszczyzna asymptotyczna wspólna obejmuje punkt podwójny, w którym styczne są także asymptotami przecięcia.

Styczne te otrzymuje się łatwo, gdyż przecięcie składa się z krzywej w nieskończoności i z krzywej płaskiej w odległości skończonej. Rzeczywiście, jakakolwiek płaszczyzna ustawiona dowolnie przecina dwa walce podług układu dwu hyperboli mających asymptotę wspólną i przecinających się w czterech punktach, z których dwa leżą w nieskończoności. Widzimy więc, że jakakolwiek płaszczyzna sieczna przecina krzywę wspólną w dwu punktach w odległości skończonej, czyli, że jest ona rzeczywiście drugiego stopnia.

Jeżeli nakreślimy przecięcie się płaszczyzny krzywej wspólnej z płaszczyzną asymptotyczną wspólną, to otrzymamy tę styczną w punkcie podwójnym, która jest użyteczną na rysunku, to jest drugą asymptotę hyperboli wspólnej obu walcom.

PRZECIĘCIE SIĘ DWU POWIERZCHNI OBROTOWYCH MAJĄCYCH OSIE NA JEDNEJ PŁASZCZYZNIE

772. Zadanie I. — *Nakreślić przecięcie się dwu powierzchni obrotowych, których osie zbiegają się w jednym punkcie* (*fig.* 406, tab. LIII). — Ustawiwszy obie osie, co zawsze możliwe tak, żeby jedna z nich np. z, z' była prostopadłą do płaszczyzny poziomej rzutów, a żeby płaszczyzna ich była równoległą do płaszczyzny pionowej, w tym razie rzut poziomy drugiej osi będzie prostą pq, równoległą do osi rzutów, a przechodzącą przez punkt z, rzut zaś jej pionowy $p'q'$ będzie prostą jakąkolwiek.

Jako przykład weźmiemy elipsoidę spłaszczoną i paraboloidę, a dla zupełnego ich wyznaczenia dodamy tu jeszcze rzuty pionowe γ', γ'_1 ich południków obrazu.

773. Wyznaczenie jakiegokolwiek punktu przecięcia. — Wybór powierzchni pomocniczej zależy od następujących uwag:

Uwaga. I — *Dwie powierzchnie obrotowe wspólnej osi mogą się tylko przecinać podług równoleżników.*

Uwaga II. — *Kula może być uważaną za powierzchnię obrotową naokoło każdej ze swych średnic.*

Uwagi te prowadzą do wniosku, że powierzchniami pomocniczemi mogą być tylko kule współśrodkowe, mające środek w punkcie o', z, w którym osie powierzchni zbiegają się z sobą.

Nakreśliwszy z punktu o' jako środka, promieniem dowolnym, okrąg koła β' i przyjąwszy go za obwód pozorny w rzucie pionowym jednej z kul pomocniczych, otrzymamy z przecięcia się tej kuli z powierzchniami danemi, okręgi kół, których rzuty pionowe przypadają na cięciwach odpowiednio prostopadłych do osi i wspólnych krzywym (β', γ'), (β', γ'_1); że zaś cięciwy te, to jest $a'b'$, $c'd'$, przecinają się w punkcie m', należącym do rzutu pionowego dwu punktów przecięcia, więc ten punkt jest właśnie rzutem pionowym punktu szukanego, a rzuty poziome odpowiednie tych dwu punktów otrzymamy, kreśląc rzut poziomy równoleżnika elipsoidy, na którym leżą punkta szukane i biorąc przecięcia się jego m_1, m_2 z liniją rzutów przechodzącą przez punkt m'.

774. Wyznaczenie stycznej. — Sposób Bineta (§ 573). — Ponieważ styczna w punkcie m_1, m' jest prostopadłą do płaszczyzny dwu normalnych do powierzchni danych, a przechodzących przez tenże sam punkt, więc wyznaczywszy punkta przecięcia się tych normalnych z odpowiedniemi osiami, to jest znalazłszy wierzchołki wiązek normalnych, odpowiednie równoległnikom przecinającym się w punkcie m_1, m', normalna do γ', przechodząca przez punkt a, przetnie oś z' w punkcie ω', który jest rzutem pionowym jednego z tych wierzchołków, rzut zaś jego poziomy znajduje się w spodku z osi elipsoidy.

Rzut pionowy drugiego wierzchołka znajdziemy w punkcie ω'_1, przecięcia się prostej $p'q'$ z normalną do paraboli γ'_1 w punkcie c', a kreśląc z punktu ω'_2 liniję rzutów, która spotyka prostę pq w punkcie ω'_1 otrzymamy rzut poziomy tegoż wierzchołka.

Widzimy więc, że rzutami dwu normalnych są $(m'\omega', m_1z')$, $(m'\omega_1', m_1\omega)$.

Ponieważ płaszczyzna osi jest równoległą do płaszczynny pionowej rzutów i przecina płaszczyznę normalnych podług prostej łączącej punkt ω_1 z ω', więc kreśląc tę prostę i przez punkt m' prowadząc do niej prostopadłę, otrzymamy rzut pionowy m_1t' stycznej szukanej.

Jeżeli wreszcie przetniemy płaszczyznę normalnych płaszczyzną poziomą, przechodzącą przez punkt ω', z, to znajdziemy: 1° na normalnej do elipsoidy punkt ω', z; 2° na drugiej normalnej punkt ω'_2, ω_2 i 3° na płaszczyznie normalnych prostę poziomą $\omega'\omega'_2$, $z\omega_2$, a kreśląc przez punkt m_1 prostę prostopadłą do $z\omega_2$, otrzymamy rzut poziomy mt stycznej szukanej.

775. Punkta poziomego obwodu pozornego elipsoidy. — Dla znalezienia tych punktów (n', n_1) (n', n_2) należy postąpić w ten sam sposób, jak dla znalezienia punktu jakiegokolwiek (§ 773), t. j. obierając kulę pomocniczą, przechodzącą przez równik, której obwodem pozornym pionowym jest koło β_1, mające środek w punkcie o' i przechodzące przez końce f', f'_1 rzutu pionowego równika.

776. Punkt najwyższy i punkt najniższy. — Kule graniczne. — Punkta te otrzymują się sposobem zwyczajnym, używając kuli wpisanej w powierzchnię, której oś jest pochyłą względem płaszczyzny poziomej rzutów. Ponieważ obwód pozorny pionowy tej kuli jest kołem β'_2 mającem środek w punkcie o', a za promień jednę z normalnych $o'g'$ do paraboli γ'_1, przechodzącą przez punkt o' i nie zchodzącą się z $p'q'$, więc stosując tu zwyczajny sposób postępowania, otrzymamy punkta (i', i_1), (i', i_2), (j', j_1), (j', j_2); ponieważ nadto ta kula jest powierzchnią graniczną, więc krzywa wspólnego przecięcia musi być styczną do kół wspólnych kuli i elipsoidzie. Wynika ztąd, że styczne w punktach i', j' są właśnie prostemi poziomemi $h'l'$, $h'_1l'_1$, i że cztery punkta znalezione są punktami najwyższemi i najniższemi przecięcia, a nadto, że rzuty poziome równoległników elipsoidy, przechodzących przez te punkta, winny być styczne do rzutu poziomego linii wspólnej powierzchniom danym.

Kula graniczna, dotykająca elipsoidy nie została wziętą pod uwagę, gdyż ona nie dosięgłaby paraboloidy.

Z rysunku widzimy, że kule pomocnicze, wyznaczające punkta rzeczywiste przecięcia, są wszystkie zawarte pomiędzy kulą, której obwodem pozornym w rzucie pionowym jest β'_2 i tą, której obwód w rzucie na tęż płaszczyznę przechodzi przez punkt r', to jest przez punkt przecięcia się krzywych γ', γ'_1 najwięcej oddalony od środka o' wspólnego kulom pomocniczym.

777. Punkta obwodu pozornego w rzucie pionowym. — *Punkta zwrotu drugiego rodzaju w rzucie pionowym.* — Widocznem jest, że punkta obwodów pozornych w rzucie pionowym leżą na przecięciu się krzywych γ', γ'_1 w punktach r'_1, r'_2, r'_3, r'_4, a ponieważ te punkta odpowiadają czterem punktom w przestrzeni, których rzutami poziomemi są punkta r_1, r_2, r_3, r_4, w których styczne do

przecięcia są prostopadłe do płaszczyzny pionowej rzutów, więc wynika ztąd, że punkta przecięcia się krzywych γ', γ'_1 są punktami zwrotu rzutu pionowego przecięcia, a nadto, wskutek symetryi figury względem płaszczyzny osi, te punkta zwrotu są drugiego rodzaju (§ 387).

778. Styczne w punktach zwrotu w rzucie pionowym. — Chociaż reguły geometryczne, na których polega kreślenie stycznych do rzutu pionowego krzywej wspólnego przecięcia, nie mogą być stosowane, jak wiadomo, do kreślenia stycznych w punktach zwrotu, rzuty bowiem stycznej w tym przypadku redukują się do jednego punktu, pomimo jednak tego, prawo ciągłości pozwala twierdzić, że i w tym przypadku sposób kreślenia BINETA może być użytym. I tak, przez punkt r'_1 nakreśliwszy normalne w tym punkcie do elipsy i do paraboli, a następnie prostę łączącą punkta ω'_3, ω'_4 przecięcia się tych normalnych z odpowiedniemi osiami, to kreśląc wreszcie przez punkt r'_1, prostę prostopadłą $r'_1t'_1$ do $\omega'_3\omega'_4$, otrzymamy styczną szukaną.

W podobny sposób postępując, znaleźlibyśmy styczne w trzech pozostałych punktach.

779. Prosta punktów podwójnych w rzucie poziomym. — Jestto prosta przecięcia się płaszczyzn linij obwodów pozornych w rzucie poziomym.

Dla elipsoidy płaszczyzną tą jest równik, to jest płaszczyzna pozioma, której śladem pionowym jest $f'f'_1$.

Dla paraboloidy płaszczyzną tą jest płaszczyzna średnicowa sprzężona z cięciwami pionowemi, to jest płaszczyzna prostopadła do płaszczyzny pionowej rzutów, mająca za ślad na tejże płaszczyznie rzutów prostę $p'_1q'_1$ równoległą do $p'q'$, a przechodzącą przez środek cięciwy pionowej paraboli γ'_1

Punkt δ' jest przecięciem się rzutów pionowych płaszczyzn średnicowych, to jest prostych $f'f'_1$, $p'_1q'_1$, prostopadła do osi rzutów przechodząca przez ten punkt wyznacza prostę, na której leżą punkta podwójne w rzucie poziomym.

Ponieważ prosta ta na naszym rysunku nie spotyka rzutu poziomego krzywej wspólnego przecięcia, więc punkta podwójne w tym rzucie nie istnieją.

780. Punkta obwodu pozornego poziomego paraboloidy. — Obwód pozorny paraboloidy na płaszczyznie poziomej rzutów jest krzywą przecięcia tej powierzchni płaszczyzną prostopadłą do płaszczyzny pionowej rzutów, a przechodzącą przez p'_1 q'_1, czyli jestto parabola równa paraboli danej, mająca punkt p_2 za środek jej rzutu poziomego.

Zobaczymy w następnym paragrafie, że z krzywej tej są tylko użyteczne dwa małe jej łuki, dające się wykreślić bardzo łatwo.

Punkta s', u' rzutu pionowego przecięcia z prostą $p'_1q'_1$ są rzutami pionowemi punktów leżących na obwodzie pozornym, odpowiadającym płaszczyznie poziomej hyperboloidy; wyznaczywszy je wprost na rysunku, a następnie, uważając je jako rzuty pionowe punktów, leżących na elipsoidzie, znaleziono odpowiednie im rzuty poziome s_1, s_2, u_1, u_2.

781. Części widzialne. — Dla odróżnienia części widzialnych, część elipsoidy uważanej za stałą, a zawarta w paraboloidzie, została odjętą.

Jak to powiedzieliśmy wyżej, tylko część rzutu poziomego obwodu pozornego paraboloidy jest użyteczną, a mianowicie dwa łuki s_1u_1, s_2u_2 przedstawiające jeden z obwodów pozornych odbicia, robionego przez paraboloidę na elipsoidzie. Widzimy więc, że dostatecznem byłoby nakreślić na rysunku tylko dwa łuki s_1u_1, s_2u_2 paraboli $u_1s_1p_2s_2u_2$.

782. Asymptoty rzutu pionowego. — Ponieważ rzutem pionowym jest krzywa stożkowa (§ 757), więc wszelka prosta równoległa do jednej z tych asymptot, przecina takowę raz w punkcie leżącym

w odległości skończonej, drugi zaś raz w punkcie leżącym w nieskończoności, a skoro ta równoległa stanie się asymptotą, to dwa punkta spotkania leżą w nieskończoności i odwrotnie.

Jeżeli proste spotykają krzywę w jednym tylko punkcie, to one są śladami pionowemi płaszczyzn, wyznaczających na obu powierzchniach obrotowych krzywe stożkowe, mające dwa punkta wspólne w nieskończoności, czyli dwie stożkowe podobne. Jeżeli zaś te proste zchodzą się z jedną z asymptot szukanych, to stożkowe odpowiadające są współśrodkowemi.

Kierunki asymptotyczne znajdziemy, kreśląc ślady pionowe dwu płaszczyzn prostopadłych do płaszczyzny dwu osi, a przecinających obie powierzchnie dane podług krzywych podobnych. W tym celu wyznaczmy elipsoidę, mającą środek w punkcie o', z, podobną do elipsoidy danej i opisaną na tejże samej kuli co paraboloida.

Ponieważ obwód pozorny pionowy tej elipsoidy pomocniczej ma za oś małą średnicę poziomą $1'2'$ koła β'_2, więc kreśląc prostę $f'3'$ i do niej równoległę $1'4'$, znajdziemy w punkcie $4'$ przecięcia się tej ostatniej z osią z', trzeci wierzchołek elipsy szukanej, a mając to, łatwo ustawimy czwarty wierzchołek $5'$ w należytem miejscu i wykreślimy samą krzywę pomocniczą.

Ponieważ 1° kula wpisana w paraboloidę dotyka tej powierzchni podług równoleżnika, mającego za rzut prostę $k'g'$;

2° taż kula dotyka elipsoidy pomocniczej podług drugiego równoleżnika, mającego za rzut prostę $1'2'$;

3° dwa punkta przecięcia się tych równoleżników mają rzut pionowy w punkcie $10'$, a rzuty tegoż nazwiska krzywych wspólnych paraboloidzie i elipsoidzie pomocniczej przypadają na cięciwach $6'7'$, $8'9'$, przechodzących koniecznie przez punkt $10'$;

4° płaszczyzny przechodzące przez te cięciwy, a prostopadłe do płaszczyzny pionowej rzutów są jedyne, które wyznaczają kierunki przecięć płaskich podobnych możliwych do otrzymania na powierzchniach uważanych, za pomocą płaszczyzn prostopadłych do płaszczyzny osi obrotu, i

5° ślady pionowe tych płaszczyzn wyznaczają ślady asymptot rzutu pionowego przecięcia.

Więc krzywa w przypadku przedstawionym na naszym rysunku, jest hyperbolą.

Zajmijmy się teraz wyznaczeniem samych asymptot, które, jak wiemy, są śladami pionowemi płaszczyzn, mających z powierzchniami danemi przecięcia podobne i współśrodkowe. W tym celu wyznaczmy tę z płaszczyzn, która jest równoległą do $8'9'$. Ponieważ miejscem środków przecięć elipsoidy danej, a w kierunku prostopadłym do płaszczyzny pionowej rzutów i równoległych do $8'9'$ jest średnica $11'12'$ elipsy γ' sprzężona cięciw równoległych do $8'9'$, ponieważ nadto, dla paraboloidy miejscem środków jest średnica $13'14'$ sprzężona cięciw równoległych do tegoż kierunku, a te średnice przecinają się z sobą w punkcie $15'$, więc punkt ten należy do asymptoty szukanej, którą znajdziemy, kreśląc przezeń prostę $\alpha'_2\alpha'_3$ równoległą do $8'9'$.

W takiż sposób nakreśloną została druga asymptota $\alpha'\alpha'_1$ i środek hyperboli przypada w punkcie $16'$, to jest w środku prostej $i'j'$, przez który, jeżeli rysunek został wykonany z dokładnością, obie te asymptoty przejść powinny.

783. Rozbiór. — Powierzchniami obrotowemi drugiego stopnia są dwie elipsoidy, jedna spłaszczona druga wydłużona, dwie hyperboloidy, jednopowłokowa i dwupowłokowa, jedna paraboloida ; kula, ostrokrąg i walec.

Ponieważ przecięcia płaszczyzną dwu hyperboloid i ich ostrokręgów asymptotycznych są podobne, korzystniej więc będzie przy wyznaczeniu gałęzi nieskończonych i asymptot zastępować hyperboloidy przez ich ostrokręgi asymptotyczne.

W dalszym ciągu tego rozbioru nie będziemy więcej mówić o hyperboloidach, i przyjmiemy raz na zawsze, że osie powierzchni i płaszczyzny sieczne, służące do wyznaczenia kierunków asymptotycznych, leżą pierwsze na płaszczyznach równoległych do płaszczyzny pionowej rzutów, a drugie są skierowane prostopadle do tej ostatniej płaszczyzny rzutów.

Dodamy jeszcze, że jeżeli powierzchnie mają środek, to płaszczyzny sieczne będą mogły przechodzić kolejno przez każdy z nich, w ten sposób bowiem łatwiej poznamy kształt przecięcia wyznaczonego przez nie na każdej z powierzchni.

Zajmijmy się teraz rozwiązaniem samego zadania, dowodząc przedewszystkiem, że jeżeli dwie powierzchnie mają osie równoległe, lub gdy jedna z tych powierzchni jest elipsoidą spłaszczoną, to krzywa przecięcia nie posiada asymptot.

Uważmy dwie powierzchnie o osiach równoległych, lub przypadek gdy jedna z nich jest kulą, gdyż wówczas osie ich są koniecznie równoległe. W tym przypadku płaszczyzny sieczne prostopadłe do osi wyznaczają przecięcia podobne, a ich ślady pionowe dają kierunki asymptotyczne rzutu pionowego krzywej, wspólnej obu powierzchniom danym. Na każdym z tych śladów znajduje się punkt w odległości skończonej od rzutu przecięcia, i ten punkt, wskutek okręgów kół, które nigdy nie są współśrodkowe, nie może oddalić się do nieskończoności, wyjąwszy, gdy ślad samej płaszczyzny znajduje się w nieskończoności, i wówczas rzut pionowy krzywej przecięcia ma jednę asymptotę w nieskończoności, czyli krzywa jest parabolą, której oś jest równoległą do kierunku asymptotycznego, a tem samem prostopadłą do rzutów pionowych osi obrotu.

Jeżeli nadto, dwie krzywe południkowe są podobne, to dwie powierzchnie i ich przecięcia jedną płaszczyzną będą także podobne, a wskutek tego rzut pionowy krzywej uważanej będzie miał we wszystkich kierunkach jeden punkt w nieskończoności, czyli krzywa przecięcia będzie utworzona z dwu prostych, jednej leżącej w odległości skończonej a drugiej w nieskończoności.

Jeżeli teraz jedna z powierzchni jest elipsoidą spłaszczoną, to uważając płaczyznę sieczną, prostopadłą do płaszczyzny pionowej rzutów, a przechodzącą przez środek elipsoidy, której oś mała będzie równoległą do płaszczyzny pionowej rzutów, wówczas jakąkolwiek byłaby druga powierzchnia, to oś mała przecięcia będzie zawsze prostopadłą do płaszczyzny pionowej rzutów.

To co tu powiadamy jest niemal widoczne wtedy, kiedy elipsoida uważana jest wydłużoną, gdyż dostatecznem będzie przenieść płaszczyznę sieczną do środka tej powierzchni, nie zmieniając jej kierunku, żeby własność ta była zupełnie widoczną.

W przypadku paraboloidy, własność ta jest widoczną pamiętając, że rzut przecięć eliptycznych tej powierzchni, na płaszczyznę prostopadłą do osi obrotu, jest kołem.

Wprzypadku ostrokręgu i walca, oś ogniskowa przecięcia leży na płaszczyznie obrazu, na której się znajduje oś obrotu, gdyż przyjęliśmy, że płaszczyzna sieczna jest prostopadłą do tej płaszczyzny obrazu.

W tym więc przypadku nie istnieje żadna płaszczyzna prostopadła do płaszczyzny pionowej, przecinającej dwie powierzchnie podług krzywych homotetycznych, czyli rzut pionowy krzywej wspólnej jest elipsą.

Kombinujmy z sobą inne powierzchnie.

Jeżeli dwie powierzchnie dane są elipsoidami spłaszczonemi, których osie obrotu leżą na jednej płaszczyznie obrazu, to opisując, na osi wielkiej jednej z nich jako średnicy kulę, i przenosząc drugę homotetycznie i tak, żeby dotykała tej kuli podług koła wielkiego, na której, jak wskazuje figura r'_1, zostały przedstawione :

1° rzuty pionowe z', z'_1 osi,

2° rzuty obwodów pozornych γ', γ'_1, α_1 na tęż samą płaszczyznę trzech powierzchni współśrodkowych, i 3° rzuty pionowe $a'b'$, $a_1'b'_1$ krzywych dotknięcia kuli z elipsoidami, które wszystkie przechodzą przez punkt o' i są odpowiednio prostopadłe do osi z', z'_1.

Otrzymamy dwa punkta przecięcia m', n' linij $a'b'$, γ_1' wewnątrz krzywej γ', gdy tymczasem, ponieważ punkta dotknięcia a'_1, b'_1 leżą zewnątrz krzywej γ', zatem pomiędzy punktami a'_1, m'_1 krzywa γ'_1 spotyka krzywę γ'_1; w takiż sposób przekonamy się, że też krzywe spotykają się pomiędzy punktami (m', b_1'), (b'_1, n'), (n', a'_1).

Ponieważ krzywe γ'_1, γ' przecinają się w czterech punktach rzeczywistych, zatem powierzchnie przecinają się podług dwu krzywych, a ponieważ rzuty tych krzywych są prostolinijne i przechodzą przez punkt o, więc są to dwie średnice $d'e'$, $f'g'$ wspólne elipsom γ', γ'_1.

W ten sposób znajdziemy kierunki asymptotyczne $d'e'$, $f'g'$ rzutu pionowego wspólnego przecięcia powierzchni danych, ztąd wypada, że rzutem pionowym tego przecięcia jest hyperbola, której asymptoty wyznacza się sposobem podanym przy rozwiązywaniu zadania ogólnego.

Jeżeli dwie elipsoidy dane są wydłużone, a ich osie obrotu spotykają się z sobą, to rozumowanie podane powyżej może być w zupełności takież same i wypadki otrzymane będą też same.

Jeżeli jedną z powierzchni danych jest ostrokrąg lub walec, to należy ją przenieść równolegle do niej samej tak, żeby ona dotykała kuli wpisanej w drugą powierzchnię, gdyż w tem położeniu osie obu powierzchni nie zchodzą się z sobą i znajdzie się przynajmniej jeden punkt dotknięcia prostych tworzących obwód pozorny w rzucie pionowym ostrokręgu lub walca przeniesionego, który otrzymamy wewnątrz obwodu pozornego pionowego drugiej powierzchni opisanej na tejże kuli.

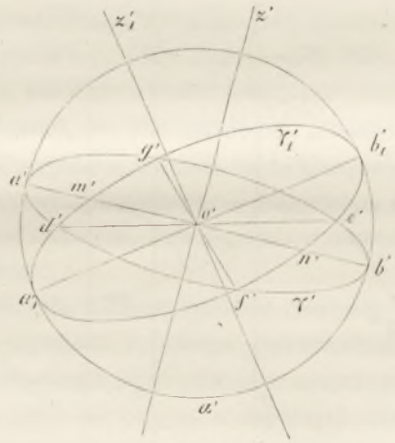

Fig. r_1.

Przedłużywszy dostatecznie te proste, spotkają one ostatni obwód pozorny w czterech punktach rzeczywistych, z których dwa mogą się zchodzić z sobą, a ztąd wynikną dwa kierunki asymptotyczne rzutu pionowego wspólnego przecięcia, czyli przecięcie to będzie jeszcze hyperbolą.

Wykreślenie asymptot odbędzie się sposobem ogólnym, wyjąwszy w przypadku, gdy jeden z punktów dotknięcia, o których mowa, leży w nieskończoności.

Rozbierzmy ten przypadek szczególny, działając zawsze na płaszczyznie pionowej rzutów, a w tym celu obierzmy jako przykład ostrokrąg i paraboloidę obrotową, i oznaczmy (fig, r_2) przez z', z'_1, rzuty

pionowe dwu osi, leżących na płaszczyźnie obrazu, przez γ'_1, ($s'g'$, $s'_1g'_1$) rzuty pionowe paraboloidy i ostrokręgu, przypuśćmy nadto, że prosta $s'g'$ jest równoległą do osi paraboloidy.

Wpiszmy kulę w paraboloidę i przenieśmy ostrokrąg równolegle do jego położenia tak, żeby był stycznym do kuli. W tem nowem położeniu paraboloida i ostrokrąg przecinają się z sobą podług dwu krzywych płaskich, mających rzuty pionowe na $a'b'$ i na równoległej do z' przechodzącej przez c.

Asymptotę równoległą do $a'b'$ nakreślimy jak zazwyczaj. Dla znalezienia zaś drugiej, zauważymy, że płaszczyzny prostopadłe do płaszczyzny pionowej rzutów a równoległe do z', przecinają obie powierzchnie podług dwu parabol, których osie zchodzą się z prostą wspólnego przecięcia się ich płaszczyzny z płaszczyzną obu osi obrotu, a zatem, że dwie te parabole mają dwa punkta wspólne w nieskończoności, czyli, żeby ślad pionowy płaszczyzny profilu był asymptotą, wystarcza, żeby dwa inne punkta przecięcia się parabol leżały także w nieskończoności, to jest, żeby te parabole były równe i zwrócone w tęż samą stronę. Ponieważ zaś w paraboloidzie wszystkie parabole są równe paraboli danej, więc zadanie sprowadza się do przecięcia ostrokręgu podług takiejże samej paraboli, leżącej na płaszczyźnie profilu i skierowanej ku górze.

W tym celu przypuśćmy zadanie rozwiązanem i oznaczmy przez P' ślad płaszczyzny szukanej, wpiszmy w ostrokrąg dany kulę styczną do tej płaszczyzny i nazwijmy przez ω' rzut jej środka, przez φ'

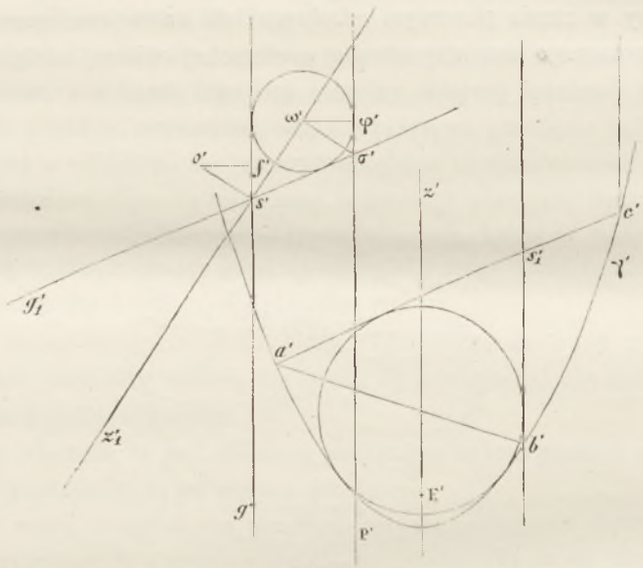

Fig. 72.

rzut jej punktu styczności z płaszczyzną, wreszcie przez σ' przecięcie się P' z $s'g'_1$, a znajdziemy, że φ' jest ogniskiem przecięcia, zaś σ' jego wierzchołkiem; ponieważ odległość $\sigma'\varphi'$ jest znaną, wskutek tego wykreślenie jest następujące: na przedłużeniu prostej $s'g'$ odciąwszy długość $s'f'$ równą odległości wierzchołka paraboli danej od jej ogniska, przez punkta s', f' należy nakreślić proste odpowiednio prostopadłe do $s'z'_1$ i $s'g'$ i wyznaczyć punkt o' ich wspólnego przecięcia, a prosta $o'f'$ jest promieniem kuli szukanej, którą podwajając otrzymamy odległość prostych $s'g'$ i P', co znów mając, możemy nakreślić prostę P', która jest właśnie asymptotą szukaną.

Zajmijmy się wreszcie ostatnim przypadkiem, to jest kiedy dwiema powierzchniami są dwie paraboloidy, lub paraboloida i elipsoida wydłużona.

Ponieważ jedna przynajmniej z powierzchni jest paraboloidą, więc przypuściwszy, że oś jej jest prostopadłą do płaszczyzny poziomej rzutów, na drugiej powierzchni nakreślmy przecięcia o rzutach prostych na płaszczyznie pionowej rzutów i kołowych na płaszczyznie poziomej rzutów. Tak nakreślone płaszczyzny przecięcia przetną paraboloidę podług elips, których rzuty poziome będą kołami, zaś ślady ich pionowe będą kierunkami asymptotycznemi szukanemi. Krzywa zatem jest hyperboloidą, a jej asymptoty kreślą się tak samo jak na figurze ogólnej.

Wypadki główne tego rozbioru są zawarte w następującem twierdzeniu :

784. Twierdzenie. — *Jeżeli dwie powierzchnie obrotowe drugiego stopnia mają osie na jednej płaszczyznie, to rzut linij ich wspólnego przecięcia na płaszczyznę równoległą do osi, jest*

1° *Parabolą, jeżeli dwie osie są równoległe ;*

2° *Elipsą, jeżeli jedna z powierzchni jest elipsoidą spłaszczoną ;*

3° *Hyperbolą we wszystkich innych przypadkach.*

Uwaga. — *Jeżeli jedna z powierzchni ślizga się po swej osi, to rzut krzywej przecięcia na płaszczyznę dwu osi zmienia swe położenie homotetycznie*, gdyż zmiana tego położenia jednej z powierzchni wpływa na zmianę kierunku asymptotycznego uważanego rzutu.

Dowiedźmy innego zajmującego zadania.

785. Twierdzenie p. Catalan. — *Jeżeli przecięcia południkowe dwu powierzchni obrotowych drugiego stopnia mają w punkcie przecięcia się swych osi obrotu, ognisko wspólne, to rzut linii wspólnej obu powierzchniom, na płaszczyznę tych osi, jest układem dwu prostych.*

Rzeczywiście ; dwie bowiem powierzchnie uważając jako opisane na jednej kuli, mającej promień równy zeru, a której środek przypada w ognisku wspólnem (§ 462), krzywa ich dotknięcia ma jako rzut dwie proste (§ 476 i § 759), które przechodzić muszą przez punkt przecięcia rzutów kierownic odpowiadających ognisku wspólnemu, na płaszczyznie osi, albowiem krzywe dotknięcia kuli z temi powierzchniami są okręgami kół urojonemi w rzucie na te kierownice.

786. Punkta przysposobione rzutu pionowego. — Najprostszy sposób znalezienia tych punktów leży we własnościach krzywych stożkowych, któreto ostatnie możemy nakreślić, znając pięć warunków służących do ich wyznaczenia.

Na naszym rysunku (*fig.* 406, tab. LIII) wykreślenie krzywej zostało dokończone sposobem zwyczajnym, to jest używając asymptot i jednego rzeczywistego punktu przecięcia, możnaby jednakże uważać rzut pionowy wspólnego przecięcia, jako miejsce geometryczne przecięcia się siecznych prostopadłych do odpowiednich osi obrotu, a wspólnych stożkowym γ', γ'_1 i kołom mającym środek w punkcie o; w ten sposób wyznaczonym został punkt μ' na naszym rysunku, lecz ponieważ wiele kół używanych do wyznaczenia punktów przecięcia, daje tylko jednę cięciwę dla każdego południka, a niektóre z nich nie spotykają elipsy w punktach rzeczywistych, zatem należy użyć siecznych urojonych a wspólnych kołom i stożkowym (1).

787. Zadanie II. — *Nakreślić przecięcie się dwu powierzchni obrotowych, których osie są równoległe.* — W tym celu należy sprowadzić dwie osie do położenia prostopadłego do płaszczyzny poziomej rzu-

(1) W tym względzie uciec się należy do zastosowań analizy i geometryi, które posłużyły za podstawę do dzieła « Traité des propriétés projectives des figures » przez Poncelet'a t. II, str. 379.

tów i użyć płaszczyzn poziomych, jako powierzchni pomocniczych, a styczne znaleźć się dadzą sposobem Bineta.

Punkt najwyższy i punkt najniższy otrzymamy z przecięcia się linij południkowych, leżących na płaszczyźnie obu osi, sprowadzając te linije, dla uniknienia kreślenia dwu nowych krzywych, obrotem naokoło jednej z osi, do położenia równoległego do płaszczyzny pionowej rzutów, gdyż wówczas jedna z nich będzie miała rzut pionowy na obwodzie pozornym powierzchni, na której ona leży, a nowy rzut tegoż nazwiska drugiej z nich otrzymamy, przesuwając obwód pozorny pionowy drugiej powierzchni, biorąc przecięcie się krzywych południkowych w tem nowem położeniu i sprowadzając go do pierwotnego.

788. Przypadek szczególny. — *Przecięcie się kuli z powierzchnią obrotową drugiego stopnia.* — Jako przykład weźmy elipsoidę i kulę, a następnie mówmy tylko o rzucie pionowym kzrywej wspólnej w przypuszczeniu, że płaszczyzna przechodząca przez środek kuli i przez oś drugiej powierzchni została sprowadzoną do położenia równoległego do płaszczyzny pionowej rzutów.

Oznaczywszy przez o', z' γ, γ'_1, rzuty pionowe środka kuli, osi elipsoidy i obwodów pozornych tych dwu powierzchni na płaszczyźnie pionowej rzutów, pamiętając nadto, że na zasadzie twierdzenia podanego w paragrafie 784, rzut szukany jest parabolą z osią prostopadłą do z', możemy znaleźć odrazu i jeden z punktów rzutu pionowego wspólnego przecięcia i jego styczną.

W tym celu, przyjmijmy za powierzchnie pomocnicze kule wpisane w elipsoidę daną, a wyznaczywszy jednę z nich przez jej obwód pozorny β'_1 znajdźmy jej przecięcie się z powierzchniami danemi, które, dla elipsoidy, będzie równoleżnikiem podwójnym, mającym za rzut dwie proste zchodzące się na $a'_1b'_1$, a dla kuli, równoleżnikiem pojedynczym, mającym za rzut $c'_1d'_1$. Punkt m'_1 przecięcia się tych prostych należy do rzutu pionowego wspólnego przecięcia, a ponieważ prosta $a'_1b'_1$ jest prostą podwójną, czyli, ponieważ kula pomocnicza ma własność powierzchni granicznych, więc punkt m'_1 przedstawia dwa punkta krzywej leżące na prostej $c'_1d'_1$, lub co na jedno wychodzi, prosta $c'_1d'_1$ jest styczną do krzywej szukanej.

789. **Przecięcie krzywej z prostą.** — Jeżeli chcemy znaleźć wprost punkta, w których prosta $e'f'$ dowolnie obrana spotyka krzywę, to należy użyć kuli pomocniczej, mającej środek na osi z', a przecinającej kulę daną podług koła, mającego za rzut część $c'_2d'_2$ prostej $e'f'$ zawartą w rzucie pionowym obwodu pozornego γ'.

Rzut pionowy środka tej kuli, leży na przecięciu się prostopadłej do prostej $e'f'$, przechodzącej przez punkt o' z prostą z', to jest w punkcie ω'_2, a jej obwód pozorny pionowy jest okręgiem koła β'_2, opisanym z punktu ω'_2 jako środka, a przechodzącym przez punkta $c'_2d'_2$. Rzutami przecięć kuli pomocniczej dwiema powierzchniami danemi są proste $c'_2d'_2$, $a'_2b'_2$, $g'_2h'_2$, a punkta m'_2, n'_2, w których pierwsza z tych linij przecina dwie pozostałe, są punktami szukanemi.

790. **Styczna równoległa do prostej danej.** — Dla zmniejszenia liczby linij na rysunku, szukajmy stycznej równoległej do prostej $e'f'$. Ponieważ styczne do rzutu pionowego wspólnego przecięcia są osiami pierwiastnemi krzywej γ' i okręgów kół wpisanych w elipsę daną, więc, żeby oś pierwiastna przyjęła kierunek $e'f'$, przyjmiemy za liniję środków dwu kół prostę, przechodzącą przez punkt o', i prostopadłą do $e'f'$ a powyżej już nakreśloną, której przecięciem się z osią z' jest punkt ω'_2 środek szukanego okręgu koła; obecnie bowiem możemy nakreślić to koło β'_3 i znaleźć sposobem podanym wyżej, punkt m'_3 uważanego rzutu i styczną $c'_3d'_3$ odpowiadającą, która musi znów być równoległą do $e'f'$.

791. **Oś, wierzchołek i parametr.** — Ponieważ oś jest prostopadłą do z', więc punkt stycz-

ności stycznej równoległej do z', będzie wierzchołkiem, a ponieważ środek koła pomocniczego służącego do znalezienia tego punktu, leży u spodka ω'_4 prostej prostopadłej do z', a przechodzącej przez punkt o', i służy zarazem do nakreślenia tego koła to jest β'_4, więc postępując z tem ostatniem kołem jak zazwyczaj, otrzymamy szukany wierzchołek s; prostopadła zaś $s'x'$ do z' będzie osią szukaną, a parametr znajdziemy, wyznaczając dwa razy wziętą podnormalną odpowiadającą stycznej jakiejkolwiek.

Na naszym rysunku została przedstawioną powierzchnia utworzonę przez kulę i przez elipsoidę.

ĆWICZENIA NALEŻĄCE DO ROZDZIAŁÓW V I VI

792. Zadanie. I — *Nakreślić, za pomocą jego wierzchołków, ślad pionowy ostrokręgu mającego za podstawę koło leżące na płaszczyznie poziomej rzutów, a wierzchołek w kącie dwuściennym* 2 *i na płaszczyznie profilu przechodzącej przez środek podstawy* (*fig.* 408, tab. LIV). — Niech γ będzie podstawą ostrokręgu, zaś s, s' rzutami jego wierzchołka. Ponieważ płaszczyzna profilu przechodząca przez środek podstawy jest płaszczyzną symetryi uważanej krzywej, obejmuje więc ona dwa z szukanych wierzchołków, a dla znalezienia ich należy zrobić kład płaszczyzny profilu na płaszczyznę poziomą rzutów. Wskutek tego wierzchołek ostrokręgu będzie miał w kładzie położenie na prostopadłej do osi obrotu, przechodzącej przez punkt s, t. j. będzie on w odległości sS_1 od tego punktu, równej znamieniu $s's_4$, tworzące zaś jego leżące na płaszczyznie profilu uważanej, przyjmą w kładzie położenie $S_1\theta_1$, $S_1\theta_2$, a przecięcia się ich Σ_1, Σ_2 z osią xy wyznaczą kłady dwu wierzchołków szukanych, które po podniesieniu z kładu znajdą się w punktach σ'_1, σ'_2.

Ponieważ środek o' leży w środku prostej σ'_1, σ'_2, zatem druga oś da się wykreślić łatwo.

Ponieważ płaszczyzny styczne do ostrokręgu, wzdłuż tworzących obwodu pozornego względnie do płaszczyzny poziomej rzutów, mają za ślady pionowe proste prostopadłe do osi rzutów xy a przechodzące przez punkta σ'_3, σ'_4, więc te proste muszą być stycznemi do krzywej szukanej, i to stycznemi w dwu pozostałych jej wierzchołkach, czyli wierzchołki te leżą w punktach σ'_3, σ'_4 przecięcia się stycznych odpowiadających z osią poziomą, przechodzącą przez punkt o'.

Ślady wreszcie pionowe c'_1, c'_2 tworzących $(s't', st)$, $(s't'_1, st_1)$ obwodu pozornego pionowego, są punktami styczności elipsy z tym obwodem pozornym w rzucie pionowym, i punkta te winny być wyznaczone, jeżeli idzie o dokładne wyznaczenie śladu pionowego ostrokręgu, który na naszej figurze jest przedstawiony przez elipsę $\sigma'_1\,\sigma'_4\sigma'_2\sigma'_3$.

793. Zadanie II. — *Nakreślić rzuty przecięcia hyperboloidy obrotowej o osi pionowej* z, z', *z płaszczyzną przechodzącą przez jej środek i przez styczną do jej śladu poziomego, idącą przez punkt tegoż śladu najwięcej oddalony od osi rzutów* (*fig.* 409, tab. LIV). — Oznaczmy przez g, g' rzuty tworzącej głównej powierzchni, znajdźmy jej ślad poziomy θ i ślad γ powierzchni, przez γ_1, γ'_1 rzuty koła szyjnego, przez ω, ω_1 rzuty środka koła szyjnego i wreszcie przez P ślad poziomy płaszczyzny siecznej.

794. Wyznaczenie jednego z punktów przecięcia i jego stycznej. — Przyjąwszy za płaszczyzny sieczne płaszczyzny styczne do ostrokręgu asymptotycznego hyperboloidy, takowe, podobnie jak płaszczyzna dana przejdą wszystkie przez środek ω, ω', który zatem będzie punktem wspólnym przecięcia się płaszczyzny danej z płaszczyznami pomocniczemi. Jedna z tych płaszczyzn jest wyznaczoną przez dwie tworzące tegoż samego układu, których rzuty poziome g_1, g_2 są równoległe, a jej ślad poziomy przechodzi przez ślady poziome tych tworzących.

Ponieważ ten ślad $\theta_1\theta_2$ przecina P w punkcie t, który jest śladem poziomym przecięcia płaszczyzny pomocniczej z płaszczyzną daną, więc znajdziemy ztąd rzuty $t\omega$, $t'\omega'$ tego przecięcia, a punkta m'_1, m'_2, w których proste g_1, g_2 przecinają $t\omega$, są dwoma punktami krzywej szukanej, rzuty ich zaś pionowe m'_1, m'_2 znajdują się na prostej $t'\omega'$ i na linijach rzutów przechodzących przez punkta m_1, m_2.

Dla znalezienia stycznej w punkcie m_1, m'_1 uważmy, że ślad θ_1 należy do śladu poziomego płaszczyzny stycznej w tym punkcie, drugi zaś punkt θ_3 znajdziemy, kreśląc przez punkt m_1 drugą styczną do rzutu poziomego koła szyjnego; nakreśliwszy więc teraz ślad $\theta_1\theta_3$ płaszczyzny stycznej, i biorąc punkt τ, σ' przecięcia się jej z P, to punkt ten będzie śladem poziomym stycznej szukanej, zaś τm_1, $m'\tau'_1$ będą rzutami stycznej szukanej.

795. Punkta obwodu pozornego i wierzchołki. — Używając płaszczyzny pomocniczej poziomej, przechodzącej przez środek ω, ω', znajdziemy punkta (s_1, s'_1), (s_2, s'_2) krzywej wspólnego przecięcia, leżące zarazem na obu obwodach pozornych hyperboloidy. Ponieważ środek krzywej leży w punkcie ω, ω', więc te punkta ω, ω' są środkami rzutów tej krzywej, nadto, ponieważ ślady płaszczyzny profilu przechodzącej przez z, z' są osiami odpowiednich rzutów, a s_3, s'_3 są wierzchołkami tych rzutów, zaś wskutek symetryi względem środka mamy pozostałe wierzchołki s_4, s'_4, wynika więc ztąd, że punkta s'_1, s_1, s'_2, s_2 już znalezione, są innemi wierzchołkami krzywej przecięcia, czyli, że ta krzywa jest elipsą.

Na figurze przedstawioną została część hyperboloidy zawarta pomiędzy płaszczyzną sieczną i płaszczyzną poziomą rzutów, w przypuszczeniu, że powierzchnia obwija bryłę pełną, ściany zaś płaskie przecięte i widzialne zostały kreskowane.

796. Twierdzenie I. — *Wszelka płaszczyzna równoległa do jednej z płaszczyzn stycznych w jednym z punktów powierzchni drugiego stopnia, przecina tę powierzchnię i ostrokrąg, mający za podstawę jedno z przecięć płaskich tej powierzchni a wierzchołek w punkcie styczności, podług dwu krzywych podobnych.* — Ponieważ powierzchnia i ostrokrąg mają jednę krzywę płaską wspólną, przecinają się więc one z sobą podług drugiej krzywej płaskiej, przechodzącej przez wierzchołek ostrokręgu. Jeżeli powierzchnia drugiego stopnia jest prostokreślna, to płaszczyzna styczna przechodząca przez wierzchołek ostrokręgu, przetnie ją podług dwu tworzących, które muszą przechodzić odpowiednio przez punkt styczności tej płaszczyzny stycznej z podstawą ostrokręgu, czyli proste te winny leżeć na powierzchni ostrokręgu, a druga krzywa wspólna musi leżeć na płaszczyznie stycznej.

Jeżeli powierzchnia nie jest prostokreślną, to wszelka płaszczyzna przechodząca przez wierzchołek ostrokręgu, prócz płaszczyzny stycznej, przetnie ją podług krzywej, ostrokrąg zaś przetnie albo tylko w jednym punkcie, albotéż podług prostej lub podług dwu prostych, czyli jedyna krzywa płaska, przechodząca przez wierzchołek ostrokręgu a wspólna obu powierzchniom, jest krzywą znikającą, dla której płaszczyzna styczna uważana przecina powierzchnię drugiego stopnia.

W każdym razie, ponieważ krzywa wspólna leży na płaszczyznie stycznej, zatem przecięcia w kierunku tej płaszczyzny są koniecznie podobnemi.

797. Zadanie III. — *Mając daną elipsoidę obrotową i płaszczyznę jakąkolwiek, znaleźć, bez kreślenia przecięcia płaszczyzny z elipsoidą, ślad pionowy ostrokręgu, mającego tę liniję przecięcia za kierownicę a wierzchołek w punkcie równika najbliższym płaszczyzny pionowej rzutów.* — Ponieważ obwód pozorny w rzucie pionowym elipsoidy jest, na zasadzie twierdzenia właśnie dowiedzionego, krzywą podobną do szukanego śladu, więc tym śladem musi być elipsa, której punkta leżące na płaszczyznie równika znajdziemy wprost, a styczne w tych punktach wyznaczą się łatwo.

Wiedząc to, należy w kierunku powyższych stycznych nakreślić styczne do obwodu pozornego w rzucie pionowym elipsoidy, jakoteż proste łączące te punkta, a odpowiadające parom stycznych

równoległych. Te ostatnie proste przetną się w środku podobieństwa krzywej szukanej i obwodu pozornego w rzucie pionowym elipsoidy, poczem rysunek da się wykreślić łatwo.

798. Zadanie IV. — *Nakreślić za pomocą twierdzenia I* (§ 796), *punkta graniczne w kierunku poprzecznym przecięcia płaskiego elipsoidy obrotowej.* — Zróbmy wykreślenie na *fig.* 379, tab. XLV, na której przecięcie już jest wyznaczone, i szukajmy stycznych do krzywej przecięcia, równoległych do prostej, której śladami są l' i φ. W tym celu wyznaczmy przedewszystkiem przecięcie płaszczyzną poziomą jakąkolwiek, ostrokręgu mającego za wierzchołek jeden z punktów e', z elipsoidy, a za kierownicę krzywę przecięcia, i następnie nakreślmy w kierunku tej prostej płaszczyzny styczne do tego ostrokręgu. Przetnijmy teraz ostrokrąg płaszczyzną poziomą, przechodzącą przez środek o, o' elipsy służącej za kierownicę ostrokręgu, to płaszczyzna ta przetnie elipsę, o której mowa w punktach (w', w), (w'_1, w_1) należących do szukanego przecięcia, a ponieważ takowe na zasadzie twierdzenia I, jest kołowem, wystarczy więc znaleźć tylko jeszcze jeden punkt tego koła, ten zaś znajduje się na przecięciu 6′,6 płaszczyzny siecznej poziomej z tworzącą $e'a$, *za* ostrokręgu pomocniczego. Mając to, łatwo wykreślimy na figurze rzut poziomy $6w_1w$ tego koła.

Wykreślmy obecnie przecięcie się płaszczyzny koła z prostą równoległą do tej, której śladami są l', φ, a przechodzącą przez punkt e', z.

W tym celu wpiszmy w kąt $P'\alpha y$, prostopadle do osi rzutów, prostę 7, 8, mającą długość równą różnicy znamion punktów (e', z), (o', o) i przedłużmy ją do przecięcia się z αP w punkcie 9, to odcinek 8, 9 tak otrzymany, a przeniesiony na z, 10, wyznaczy rzut poziomy 10, punktu, w którym równoległa do prostej, mającej ślady l', φ, spotyka płaszczyznę koła pomocniczego; kreśląc przez ten punkt styczne 10, 11, 10, 12 do koła $6w_1w$, otrzymamy rzuty poziome śladów płaszczyzn stycznych do ostrokręgu na płaszczyźnie pomocniczej.

Ślad płaszczyzny elipsy $v'w'u'w'_1$, $vwuw_1$ na płaszczyźnie poziomej pomocniczej jest prostą ww_1, $w'w'_1$ a przecięcia się 13 i 14 prostej ww_1 ze stycznemi 10, 11, 10.12 są punktami należącemi do rzutów poziomych szukanych stycznych profilu, które znajdziemy, kreśląc przez punkta 13 i 14 proste prostopadłe do osi rzutów. Zbytecznem zdaje się przypominać, że te styczne winny się zchodzić ze stycznemi profilu już znalezionemi innym sposobem (§ 687).

Jeżeli obecnie wykreślimy rzuty (z 11, e'11), (z12, e'12) tworzących dotknięcia ostrokręgu z temi płaszczyznami stycznemi, i wyznaczymy punkta przecięcia odpowiednie ze stycznemi profilu powyżej znalezionemi, otrzymamy punkta (g, g'), (g_1, g'_1) szukane, z których jeden (g, g') został wyznaczony już innym sposobem (§ 687).

799. Zadanie V. — *Mając dany walec obrotowy pionowy i dwa punkta leżące na tworzącej obwodu pozornego pionowego tej powierzchni, nakreślić:*

1° *Rzuty linii najkrótszej łączącej te dwa punkta i przecinającej wszystkie tworzące powierzchni,*

2° *Miejsce geometryczne śladów poziomych stycznych w rozmaitych punktach tej linii, i*

3° *Ślad poziomy ostrokręgu przechodzącego przez tę linię i mającego wierzchołek na osi walca.*

1° Rzut linii najkrótszej. — Niech (o, o') i $(8, 8')$ będą punktami danemi (*fig.* 410, tab. LIV). Ponieważ przekształcona skutkiem rozwinięcia linii szukanej musi być prostolinijną, więc mamy ztąd następujące wykreślenie:

Należy podzielić podstawę i odległość 0′8′ na jednakową liczbę części równych, przez punkta podziału podstawy nakreślić linije rzutów, zaś przez punkta podziału wysokości linije poziome; te linije przetną się z sobą odpowiednio dla każdego punktu licząc od o i od o', i wyznaczą punkta należące do rzutu pionowego krzywej przecięcia, odpowiedni zaś rzut poziomy zejdzie się z podstawą walca.

W taki sposób znaleźliśmy krzywę 0, 1, 2, 3, ... 8, 0, 1′, 2′, 3′, ... 8′, którą przedłużyliśmy nieco poza punkt 8, 8′ i 0, 0′. Krzywa tak znaleziona jest *helisą*, a równanie rzutu jej pionowego, które łatwo znajdziemy, wskazuje, że ten rzut jest *synusoïdą*.

800. Kreślenie stycznej. — Dla nakreślenia stycznej w punkcie np. 3, 3′, używając sposobu ogólnego (§ **624**), należy przez punkt 3 nakreślić styczną do podstawy walca i odciąć od tego punktu, w kierunku oznaczonym przez figurę, długość 3θ równą wyprostowanemu łukowi 3.2.1.0, a punkt θ tak znaleziony będzie śladem poziomym stycznej, ktorej rzutami wskutek tego będą proste θ3, θ′3′.

Widzimy z łatwością, że styczne do krzywej tworzą z tworzącemi walca kąt stały.

801. 1° MIEJSCE GEOMETRYCZNE ŚLADÓW POZIOMYCH STYCZNYCH DO LINII NAJKRÓTSZEJ. — Wykreślenie powyżej podane wskazuje, że szukanem miejscem geometrycznem γ jest rozwijająca koła podstawy, a punkt *o* jest punktem spotkania się tej rozwijającej z podstawą walca.

802. 2° ŚLAD POZIOMY OSTROKRĘGU — Jeżeli obierzemy za wierzchołek ostrokręgu punkt *s*, *s*′, nakreślimy rzuty *s*3, *s*′3′ tworzącej jakiejkolwiek tej powierzchni, i wyznaczymy jej ślad poziomy *t*, który jest jednym punktem krzywej szukanej, to otrzymamy punkta krzywej γ_1 w liczbie dostatecznej dla jej nakreślenia.

803. Styczna do śladu ostrokręgu. — Ślad poziomy płaszczyzny stycznej do ostrokręgu, wzdłuż tworzącej przechodzącej przez punkt obrany *t*′ *t*′, jest styczną szukaną, a że ten ślad musi przechodzić przez punkt *t* i przez ślad poziomy θ stycznej do linii najkrótszej, więc styczną tą jest prosta *t*θ.

804. Asymptota. — Ponieważ tworząca pozioma *sm*, *s*′*m*′ ostrokręgu wyznacza kierunek asymptotyczny, a styczna w punkcie *m*, *m*′ do helisy ma ślad poziomy w punkcie θ_1 więc prosta $\alpha\alpha_1$ równoległa do *sm*, a przechodząca przez punkt θ_1 jest śladem poziomym płaszczyzny stycznej do ostrokręgu, przechodzącej przez punkt w nieskończoności śladu poziomego tej powierzchni, czyli, że prosta $\alpha\alpha_1$ jest szukaną asymptotą.

805. Punkt asymptotyczny. — Ponieważ, jeżeli przedłużymy helisę do nieskończoności pod płaszczyzną poziomą, to tworzące ostrokręgu dążą do zejścia się z osią walca, zatem spodek *s* tej osi jest punktem asymptotycznym krzywej γ_1.

806. Krzywa γ_1 jest spiralną hyperboliczną. — Żeby tego dowieść, przypuśćmy, że punkt *t*, t_1 jest jednym z punktów krzywej γ_1 i załóżmy :

$$st^2 = \rho, \qquad \overset{\frown}{mst} = \omega.$$

Oznaczmy nadto przez *a*′, *s* spodek prostopadłej przechodzącej przez punkt 3, 3′, a leżącej na osi walca, przez *r* jego promień, przez h_1 wzniesienie punktu *s*, *s*′ i wreszcie przez *h* odległość punktów (0, 0′), (8, 8′).

Ponieważ prosta w przestrzeni, której rzutami są 3*s*, 3′*a*′ jest równa promieniowi walca i równoległa do prostej *st*, leżącej na płaszczyznie poziomej rzutów, mamy więc proporcyę :

$$\frac{ts}{r} = \frac{h_1}{s'a'}; \tag{1}$$

nadto, zwracając uwagę na kształt przekształconej przez rozwinięcie helisy, mamy

$$\frac{s'a'}{\text{łuk}\,m4.3} = \frac{h}{2\pi r},$$

zkąd

$$s'a' = \frac{h}{2\pi r}.\omega r = \frac{h}{2\pi}\,\omega.$$

Podstawiając za $s'a'$ i st ich wartości (1) wypada

$$\frac{\rho}{r} = \frac{2\pi h_1}{h\omega},$$

któreto równanie jest kształtu

$$\omega\rho = c',$$

czyli, że krzywa γ_1 jest rzeczywiście spiralną hyperboliczną.

807. Zadanie IV. — *Nakreślić ślad poziomy walca, mającego za kierownicę helisę, której wyznaczyliśmy rzuty, a za kierunek tworzących jednę ze stycznych do tej krzywej.* — W tym celu ustawiwszy tworzące walca w kierunku stycznej do helisy w punkcie 6, 6′, to ponieważ ślad poziomy τ, τ' tej stycznej winien leżeć na przecięciu się prostej poziomej, przechodzącej przez punkt 6 z rozwijającą koła γ, więc 6τ, $6'\tau'$ będą rzutami stycznej w punkcie obranym.

808. Wyznaczenie jakiegokolwiek punktu śladu walca pochyłego. — Ponieważ ślad poziomy τ_1, τ'_1 prostej równoległej do 6τ, $6'\tau'$, a przechodzącej przez punkt 3, 3′, jest właśnie tym punktem, więc styczną w tym punkcie jest prosta $\tau_1\theta$, łącząca ślad poziomy θ tej stycznej w punkcie 3, 3′ z helisą.

809. Punkta zwrotu. — Jeżeli część helisy przedstawionej na rysunku przedłużymy do nieskończoności, to znajdziemy na niej nieskończoną liczbę punktów, leżących na płaszczyźnie obrazu przechodzącej przez punkt 6, 6′, a w każdym z tych punktów tworzące walca pochyłego będą styczne do helisy, czyli w punktach śladu poziomego otrzymamy nieskończoną liczbę punktów zwrotu (§386, 2°). Jeden z tych punktów na naszym rysunku znajduje się w punkcie τ, a przedłużając nieco helisę pod płaszczyznę poziomą, znajdziemy drugi w punkcie τ_2, τ'_2. Wyznaczywszy w ten sposób dostateczną liczbę tych punktów szukanego śladu γ, nakreślimy samą krzywę.

810. Ślad poziomy walca pochyłego jest cykloidą zwyczajną. — Ponieważ rzuty pochyłe w kierunku 6τ, $6'\tau'$ przecięć kołowych walca prostego są okręgami kół tegoż promienia co podstawa walca danego i wszystkie są styczne do prostej 6τ, wynika więc ztąd, że krzywa γ_2 może być utworzoną ruchem punktu koła stycznego bezustannie do prostej 6τ, toczącego się bez ślizgania po tej prostej, a taka krzywa γ_2 jest właśnie cykloidą zwyczajną.

811. Zadanie VII. — *Rozwiązać powyższe zadanie nie zmieniając ani kierownicy, ani kierunku rzutu poziomego tworzących, lecz zmniejszając i powiększając kąt, który czynią te tworzące z płaszczyzną poziomą rzutów.* — W tym przypadku otrzymamy dwie cykloidy, jednę skróconą a drugą wydłużoną, to jest dwie krzywe opisane przez dwa punkta, z których jeden leży wewnątrz a drugi zewnątrz okręgu koła, toczącego się po jednej z jego stycznych.

812. Zadanie VIII. — *Przez punkt obrany na paraboloidzie hyperbolicznej nakreślić do niej płaszczyznę styczną* (*fig.* 411, tab. LIV). — Dla uproszczenia zadania przyjmiemy płaszczyznę poziomą rzutów za jednę z płaszczyzn kierowniczych, a proste $(ab, a'b')$, $(cd, c'd')$ będą dwiema kierownicami jakiemikolwiek.

Niech m' będzie rzutem pionowym punktu obranego na powierzchni; żeby znaleźć drugi jego rzut, przesuńmy przezeń tworzącę równoległą do płaszczyzny kierowniczej danej, której rzutem pionowym jest prosta równoległa do osi rzutów, przechodzącej przez punkt m', to prosta ta spotka $a'b'$, $c'd'$ w punktach f', g', których odpowiedniemi są f, g; łącząc z sobą te ostatnie punkta liniją prostą fg, otrzymamy rzut poziomy tworzącej uważanej, a ta przecinając się z liniją rzutów, przechodzącą przez punkt m', wyznacza szukany rzut poziomy m.

Wyznaczmy teraz płaszczyznę w punkcie m, m'; ponieważ ta płaszczyzna obejmuje już tworzące $fg, f'g'$, więc obejmuje ona także tworzącę drugiego układu, przechodzącą przez punkt styczności, a że w rzucie pionowym, tworzące drugiego układu tworzą wiązkę (§ **515**), której wierzchołek znajduje się w punkcie ω' przecięcia się prostych $a'b', c'd'$, zatem prosta $\omega'm'$ jest rzutem pionowym tworzącej szukanej.

Ponieważ ślad pionowy tej prostej winien leżeć na śladzie pionowym $\theta\theta_1$ paraboloidy i na linii rzutów przechodzącej przez punkt t', t. j. na przecięciu się prostej $\omega'm'$ z osią rzutów, więc ślad ten leży w punkcie t, a rzut szukany otrzymamy kreśląc prostę tm. W tej więc już chwili płaszczyzna styczna jest wyznaczoną przez proste $(fg, f'g')$, $(tm, t'm')$ a ślady jej $P'\alpha P$ znajdziemsy posobem podanym na rysunku.

813. Zadanie odwrotne. — *Znaleźć punkt, w którym płaszczyzna jakakolwiek przechodząca przez jednę z tworzących paraboloidy, dotyka tej powierzchni.* — Ponieważ płaszczyzna uważana przecina powierzchnię wzdłuż dwu tworzących, przecinających się w punkcie szukanym, więc zadanie jest rozwiązane, żeby zaś przedstawić go rysunkiem, należy wykonać toż samo działanie co powyżej, ale w porządku odwrotnym.

814. Zadanie XI. — *Zachowując dane poprzedzającej figury, wyznaczyć :*

1° *Płaszczyznę styczną do paraboloidy, a równoległą do płaszczyzny danej,*

2° *Drugą płaszczyznę kierowniczą, wierzchołek, oś i płaszczyzny główne tej powierzchni,*

3° *Krzywę, wzdłuż której dotyka ona ostrokręgu opisanego,*

4° *Obwody pozorne,*

5° *Przecięcie jej jakąkolwiek płaszczyzną.*

1° Nakreśliwszy prostę równoległą do śladu poziomego płaszczyzny danej, a spotykającą dwie kierownice (§ **75**), i przez nią przesunąwszy płaszczyznę równoległą do pierwszej, wyznaczymy punkt, w którym ona dotyka powierzchni (§ **813**).

2° Nakreśliwszy przez jednę z kierownic płaszczyznę równoległą do drugiej, otrzymamy drugą płaszczyznę kierowniczą, a ponieważ przecięcie się płaszczyzn kierowniczych jest równoległe do osi, więc płaszczyzna prostopadła do tego przecięcia wyznaczy kierunek płaszczyzny stycznej w wierzchołku, sam zaś wierzchołek otrzymamy, szukając punktu styczności płaszczyzny stycznej równoległej do tego kierunku.

Kreśląc następnie przez wierzchołek prostę równoległą do przecięcia się płaszczyzn kierowniczych, znajdziemy oś, a płaszczyznami głównemi będą wreszcie te, które przechodząc przez oś powierzchni, są równoległe do płaszczyzn dzielących na dwie równe części kąty dwuścienne, utworzone przez płaszczyzny kierownicze.

3° Styczne do krzywej dotknięcia znajdziemy, kreśląc sposobem podanym w paragrafie **526** płaszczyznę, przechodzącą przez wierzchołek ostrokręgu i przez jednę z tworzących a wreszcie rozwiązując na niej zadanie odwrotne płaszczyzny stycznej.

4° Należy rozwiązać poprzedzające zadanie, ustawiając raz po raz wierzchołek ostrokręgu w nieskończoności na prostopadłej do każdej z płaszczyzn rzutów.

5° Punkta krzywej przecięcia otrzymamy za pomocą płaszczyzn pomocniczych poziomych.

815. — Asymptoty przecięć płaskich [paraboloidy hyperbolicznej. — Dowiedźmy przedewszystkiem następującego twierdzenia :

Płaszczyzna asymptotyczna paraboloidy hyperbolicznej dla jakiejkolwiek tworzącej, jest równoległą do odpowiadającej płaszczyzny kierowniczej (*fig.* 411, tab. LIV).

Płaszczyzna styczna w punkcie m, m' może być uważaną jako wyznaczona przez prostę $fg, f'g'$ i przez

punkt t, t', a ponieważ, gdy punkt m, m' znajduje się w nieskończoności, to punkt t leży także w nieskończoności na prostej $\theta\theta_1$, którato ostatnia prosta nie jest równoległą do fg, $f'g'$, więc płaszczyzna asymptotyczna odpowiadająca tworzącej uważanej jest poziomą.

Kreślenie asymptot odbędzie się jak następuje: wyznaczywszy przecięcia się płaszczyzny danej z każdą z płaszczyzn kierowniczych, i nakreśliwszy w każdym układzie tworzące równoległe do tych przecięć, należy przesunąć przez każdę z nich płaszczyzny równoległe do płaszczyzn kierowniczych, a te ostatnie przetną płaszczyznę daną podług szukanych asymptot.

816. Rodzaj przecięć płaskich. — Jeżeli dana płaszczyzna sieczna spotyka przecięcie się płaszczyzn kierowniczych, to krzywa szukana będzie miała dwie asymptoty i będzie hyperbolą, w przeciwnym razie będzie ona parabolą.

817. Twierdzenie II. — *Dowieść, że krzywa dotknięcia ostrokręgu opisanego na paraboloidzie hyperbolicznej jest hyperbolą, a krzywa dotknięcia walca opisanego jest parabolą* (do dowiedzenia).

818. Zadanie X. — *W dany czworościan foremny, którego jedna krawędź se_1 leży na płaszczyźnie poziomej rzutów, a jego ściany tworzą z tąż płaszczyzną kąty równe, wpisawszy ostrokrąg mający wierzchołek w punkcie s i ośmiościan foremny, którego wierzchołki leżą w środku krawędzi czworościanu, znaleźć tylko rzut poziomy części ostrokręgu pełnego zawarte pomiędzy czworościanem i ośmiościanem* (*fig.* 412, tab. LV).

819. Rzut czworościanu i ośmiościanu. — Dana krawędź wyznacza rzuty poziome dwu wierzchołków s, e_1, dwa zaś pozostałe znajdziemy na krawędzi leżącej nad płaszczyzną poziomą rzutów, a której rzutem poziomym jest prostopadła de prostej se_1, przechodząca przez punkt e tej prostej, i po obu stronach tego punktu w odległości równej ee_1. Rzutem więc poziomym czworościanu jest kwadrat $sa_1e_1b_1$ i jego dwie przekątnie.

Ponieważ środki boków czworościanu mają za rzuty poziome punkta a, b, c, d, e, f, a punkt e jest środkiem krawędzi spodniej se_1 zaś f środkiem rzutu a_1b_1 krawędzi górnej, więc rzuty poziome krawędzi ośmiościanu tworzą także kwadrat $abcd$ i jego dwie przekątnie.

820. Obwód pozorny poziomy ostrokręgu. — Możemy znaleźć obwód pozorny szukany nie kreśląc kuli wpisanej w ostrokrąg, wystarczy bowiem nakreślić ślady poziome płaszczyzn stycznych do ostrokręgu a prostopadłych do płaszczyzny poziomej rzutów, przyjmując za podstawę ostrokręgu koło, które go zamyka. W tym celu zrobiwszy kład na płaszczyznę poziomą rzutów ściany czworościanu, której rzutem jest $a_1b_1c_1$ naokoło jej krawędzi górnej, to trójkąt $A_1B_1E_1$ wystawiony na a_1b_1 będzie właśnie tym kładem, a wpisując weń koło e_1 otrzymamy kład podstawy ostrokręgu.

Płaszczyzny styczne znajdziemy zważając, że one obejmują pionowę przechodzącą przez punkt s, która przecina płaszczyznę, na kładzie właśnie otrzymanym, w punkcie mającym za rzut poziomy s, a którego kład wskutek tego przypada w punkcie S_1, symetrycznym punktu E_1, względem a_1b_1.

Ponieważ przecięcie się jednej z płaszczyzn stycznych z płaszczyzną podstawy ma kład na stycznej $S_1\Omega_1$ do koła γ_1, wychodzącej z punktu S_1, a która po podniesieniu z kładu przypada na prostej łączącej punkt s z punktem α przecięcia się prostych $S_1\Omega_1$, a_1b_1, więc prosta $s\alpha$ jest rzutem poziomym prostej leżącej na płaszczyźnie stycznej pionowej, czyli jestto ślad poziomy tej płaszczyzny, lub inaczej mówiąc, prosta $s\alpha$ jest jedną z prostych szukanego obwodu pozornego; drugą podobną prostę otrzymamy łatwo zważając, że ona jest symetryczną do pierwszej względem se_1.

821. Użycie rzutów zbieżnych do wyznaczenia krzywych przecięcia się ostrokręgu ze ścianami ośmiościanu. — Przyjąwszy za wierzchołek punkt s, a za płaszczyznę rzutów płaszczyznę ściany, której kład zrobiliśmy przed chwilą, zróbmy powtórnie kład tej ściany, wciągając do tego ruchu rzut zbieżny ostrokręgu i ośmiościanu.

Ponieważ rzut zbieżny całej powierzchni ostrokręgu zchodzi się z jego podstawą, a rzut zbieżny ośmiościanu ma za rzut poziomy pięć trójkątów a_1fd_1, fd_1c_1, $d_1e_1c_1$, fc_1b_1, $a_1b_1e_1$, więc po zrobieniu kładu podstawa ta i rzuty będą następujące : γ_1, $A_1F_1D_1$, F_1D_1C, $D_1E_1C_1$, $F_1C_1B_1$, $A_1B_1E_1$.

Zauważyć tu należy, że trzy ściany ośmiościanu mają za rzuty zbieżne boki trójkąta w rzucie prostokątnym a_1b_1e, a w kładzie $A_1B_1E_1$.

Ponieważ części koła γ_1 znajdujące się wewnątrz trójkątów wyżej podanych, są rzutami zbieżnemi całkowitemi krzywych przecięcia, szukając zatem odpowiednich im rzutów prostokątnych, otrzymamy części użyteczne tych krzywych.

Widzimy ztąd, że użycie rzutów zbieżnych prowadzi 1° do znalezienia odrazu ścian ośmiościanu, zawierających części użyteczne przecięcia, i 2° do uniknienia kreślenia punktów tych krzywych, a leżących na przedłużeniu ścian ośmiościanu.

Rozbiór rzutów zbieżnych wskazuje, że ściany zawierające krzywe przecięcia są te, których rzut zbieżny nie jest prostolinijnym.

Obecnie wyznaczymy rzut poziomy podstawy ostrokręgu i rzuty poziome linij przecięcia się ostrokręgu ze ścianami wskazanemi.

822. Rzut poziomy podstawy ostrokręgu. — Nakreśliwszy prostę I_1G_1 równoległą do A_1B_1, podniosłszy z kładu punkt G_1 do g_1, dalej przez ten punkt nakreśliwszy równoległę do A_1B_1 i podniosłszy wreszcie H_1, I_1 do h_1, i_1 te ostatnie punkta będą należeć do krzywej szukanej. Korzystając z powyżej już zrobionego wykreślenia, punkta H_2, I_2 zostały także podniesione z kładu do h_2, i_2.

823. Wierzchołki rzutu poziomego podstawy. — Wierzchołki te znajdziemy, podnosząc z kładu końce dwu średnic eS_3, S_1S_2 krzywej γ_1 odpowiednio prostopadłych i równoległych do osi obrotu. Robiąc to, punkt e nie zmieni swego położenia, punkt zaś S_3 przypadnie w punkcie s_3 w odległości od punktu e_1 równej jednej trzeciej e_1e ; rzut drugiej średnicy przypadnie na prostej równoległej do prostej a_1b_1 a przechodzącej przez punkt μ prostej es_3, końce zaś jej znajdziemy, odcinając długości μs_2, μs_3 równe sobie i promieniowi koła γ_1.

824. Przecięcie ściany mającej za rzut prostokątny *eab* z ostrokręgiem. — Ponieważ ściana uważana jest równoległą do płaszczyzny podstawy ostrokręgu, zatem przecina ona tę ostatnią podług krzywej podobnej do tej podstawy.

Ponieważ punkta e, e_1 są odpowiedniemi, a punkt μ_1 odpowiedni punktowi μ leży w trzeciej części wysokości trójkąta eba licząc od podstawy ab, mamy zatem wykreślenie następujące : przez punkt e, e_1 nakreśliwszy dwie proste równoległe, z których jedna przecina elipsę odpowiednią w punktach p i q, i połączywszy te punkta z punktem μ linijami prostemi, to prowadząc przez punkt μ_1 proste równoległe do pq, otrzymamy w punktach p_1, q_1 punkta szukane. Figura wskazuje dosyć jasno, w jaki sposób zostały wyznaczone wierzchołki e'', s''_1, s''_3, s''_2.

825. Przecięcie się ściany mającej za rzut prostokątny *dec* z ostrokręgiem. — Ponieważ kładem rzutu zbieżnego tej krzywej jest łuk $C_1S_3D_1$, wystarczy więc nakreślić rzuty prostokątne punktów odpowiadających punktom tego łuku, gdyż wówczas punkt G_1 przypadnie w g_1, a rzucająca jego stożkowa będzie miała za rzut prostokątny g_1s ; prostej zaś G_1I_1 odpowie inna prosta, mająca tenże sam kierunek, lecz przechodząca przez punkt g przecięcia się prostych g_1s, cc_1, a przecięcie się tej ównoległej z sh, to jest punkt h, będzie punktem szukanym.

Krzywa, którą się zajmujemy jest parabolą, gdyż płaszczyzna jej jest równoległą do płaszczyzny ściany czworościanu dotykającej ostrokręgu.

Ponieważ łuk $D_1S_3C_1$ dotyka prostych E_1D_1, E_1C_1, więc łuk odpowiedni paraboli dotknie odpowiednio w punktach c i d prostych de, ce.

Ponieważ kąt ced jest prostym a jego ramiona dotykają paraboli, punkt więc e leży na kierownicy tej krzywej; gdy zaś symetrya figury wskazuje nadto, że ee_1 jest osią paraboli, zatem prosta a_1b_1 jest kierownicą. Ponieważ środek φ biegunowej cd punktu e względem paraboli jest ogniskiem tej krzywej, a jej wierzchołek σ leży we środku prostej $e\varphi$, więc łatwo teraz nakreślić szukany łuk paraboli; na naszym rysunku został on przedłużony poza punkta c i d ograniczające jego część użyteczną, a to dla lepszego uwydatnienia kształtów krzywej.

826. Przecięcie się ściany mającej za rzut prostokątny afd z ostrokręgiem wpisanym. — Ponieważ kładem łuku odpowiadającego tej krzywej jest $F_1\Omega_1D_1$, więc biorąc tylko pod uwagę punkt, którego kładem jest I_2 a rzutem prostokątnym i_2, znajdziemy szukany punkt na prostej łączącej punkt s z punktem i_2. Dla znalezienia zaś drugiej prostej, przechodzącej przez tenże punkt, nakreślimy prostę j_1i_2, dla której punktowi j_1 odpowiada punkt j przecięcia się prostych sj_1, ad; że zaś prosta, której rzutem prostokątnym jest fd, jest swym własnym rzutem stożkowym, zatem punkt k_1 przecięcia się prostych j_1i_2, fd jest jednym z punktów prostej szukanej, zaś samą prostą jest k_1j. Przecięcie się tej ostatniej prostej k_1j z prostą si_2, to jest punkt l, jest wreszcie punktem szukanym.

Z poprzedzającego wnosimy, że krzywa szukana jest jeszcze parabolą, gdyż leży ona na płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny ściany czworościanu, mającej za rzut sb_1e_1, i dotykającej ostrokręgu wzdłuż prostej mającej za rzut sa, ta zaś ostatnia prosta se jest kierunkiem osi paraboli, którą nakreśliliśmy. Tu jak poprzednio widzimy, że proste ad, af są stycznemi w punktach d i f do paraboli.

Ponieważ prosta aa_3 równoległa do sc, a przechodząca przez punkt a jest średnicą sprzężoną do kierunku biegunowej ed punktu a, więc środek m prostej aa_3 jest punktem paraboli, a styczna w tym punkcie jest prostą mn równoległą do ed. Ponieważ następnie dwie styczne mn, ae są prostopadłemi do siebie, więc punkt n ich wspólnego przecięcia jest punktem przejścia kierownicy, czyli, że ta ostatnia jest prostą $n\delta$ prostopadłą do se, a przechodzącą przez punkt n.

Ponieważ nadto ognisko paraboli winno się znajdować na biegunowej em punktu n i na łuku koła, mającego środek w punkcie e stycznego zaś do prostej $n\delta$, będzie niem więc punkt φ_1, φ_1x będzie osią, a punkt σ wierzchołkiem paraboli. Znając to, łatwo nakreślimy samą krzywę. Krzywa ta na naszym rysunku, dla tychże samych przyczyn co powyżej, została przedłużoną poza punkta e i d, które je ograniczają.

827. Przecięcie się ściany mającej za rzut fbc z ostrokręgiem. — Przecięcie to jest parabolą symetryczną względem se_1 do powyżej nakreślonej.

828. Przedstawienie bryły. — Powyższe wykreślenia pozwalają sądzić z samej figury o kształcie części ostrokręgu pełnego, zawartych pomiędzy dwoma wielościanami. Części płaskie przecięte lecz widzialne, zostały pocieniowane.

829. Zadanie XI. — *Mając dany sześcian o przekątni pionowej, przedstawić w obu rzutach części jego powierzchni, leżącej zewnątrz kuli stycznej do jego boków i zewnątrz walca obrotowego mającego za oś jednę z krawędzi sześcianu, a za promień połowę długości tejże krawędzi* (*fig.* 413, tab. LV). — Jeżeli oznaczymy przez ab, $a'b'$ rzuty przekątni pionowej sześcianu, to wykreślenie już podane (§§ 274) wyznaczy jego rzuty $abglhnkm$, $a'b'g'l'h'n'k'm'$, i nachylenie wspólne $c'a'_1y$ jego ścian do płaszczyzny poziomej rzutów.

830. Przecięcie się kuli ze ścianami sześcianu. — Krzywe wynikające z tego przecięcia są wszystkie równe, gdyż są one rzutami kół równych i jednakowo nachylonych do płaszczyzny poziomej rzutów (§ 136).

Podajmy tu wykreślenie rzutu poziomego jednego z tych kół, naprzykład koła wpisanego w ścianę $ahlg$, $a'h'l'g'$.

W tym celu uważmy, że proste qq_1, pp_1, łączące środki boków przeciwległych kwadratu ukośnego $ahlg$, są średnicami sprzężonemi równemi elipsy szukanej, nadto oś wielka tej elipsy ma za rzut hg, a jej długość jest równa średnicy koła lub krawędzi sześcianu w rzeczywistej wielkości; ponieważ zaś tą krawędzią w rzeczywistej wielkości jest $b'c'$, więc odcinając od punktu ω i po obu jego stronach ωs, ωs_1 równe połowie $b'c'$, otrzymamy szukaną oś.

Zrobiwszy rzut krawędzi $b'c'$ pod kątem $c'a'y'$ lub pod jemu równym $c'b'd'$, otrzymamy prostę $b'd'$, która przedstawia długość małej osi.

Ponieważ w trójkącie $b'c'd'$ boki $b'c'$, $b'd'$ przedstawiają długości dwu osi elipsy, zatem bok $d'c'$ jest odległością ogniskową, a ponieważ ona jest równą rzutowi poziomemu krawędzi sześcianu, to jest pp_1, więc wykreślenie elipsy może być wykonanem jak następuje :

Z punktu ω jako środka promieniem wspólnym ωp_1 nakreślimy dwa łuki koła pq_1, p_1q, które przecinając się w punktach f_1, f_2 z prostą gh wyznaczą ogniska elipsy szukanej, znając zaś oś wielką ss_1 i ogniska, łatwo wykreślimy samą krzywę.

Zajmijmy się obecnie wyznaczeniem rzutów pionowych kół przecięcia się ścian sześcianu z kulą. Ponieważ na każdej ścianie proste łączące środki boków przeciwległych, są dwiema średnicami sprzężonemi odpowiedniej elipsy, zatem średnice te posłużą do wykreślenia krzywych.

Na naszym rysunku zostały tylko przedstawione średnice sprzężone elipsy wpisanej w równoległobok $a'h'l'g'$, to jest proste $p'p'_1$, $q'q'_1$, lecz dla nadania większej dokładności rysunkowi, można byłoby sposobem podanym w paragrafie **600** nakreślić jeszcze proste przechodzące przez punkta przecięcia się rzutów tych kół.

Obecnie figura jest dostateczną do zrozumienia wszystkich wykreśleń i wskazania części widzialnych, dodamy jeszcze tylko, że zgodnie z założeniem, część sześcianu zawarta w walcu obrotowym, mającym promień równy połowie krawędzi sześcianu, została odjętą (krawędź bm, $b'm'$ została przyjętą za oś walca).

831. Twierdzenie III. — *Wszelka płaszczyzna podwójnie styczna do powierzchni pierścieniowej, przecina ją podług dwu kół, równych kołu przechodzącemu przez środki przecięć południkowych, środki tych kół leżą na prostopadłej do osi, przechodzącej przez środek powierzchni i po obu jego stronach w odległości równej promieniowi koła tworzącego, i wreszcie, rzuty ich na płaszczyznę prostopadłą do osi mają ognisko wspólne w spodku tejże osi.*

Twierdzenie to zawdzięczamy p. Ivon Villarceau.

Jeżeli weźmiemy pod uwagę jedno z kół południkowych powierzchni, to ono przechodzi przez punkta kołowe leżące w nieskończoności jej płaszczyzny; że zaś te punkta opisują podczas ruchu obrotowego krzywej południkowej, równoleżniki w nieskończoności, zatem te ostatnie muszą się z sobą zchodzić, gdyż miejscem punktów kołowych w nieskończoności przestrzeni jest koło w nieskończoności. Ztąd wynika, że podwójnym równoleżnikiem powierzchni jest koło w nieskończoności.

Znając to, nakreślmy przez punkta dotknięcia płaszczyzny podwójnie stycznej z powierzchnią i przez punkt jakikolwiek przecięcia, okrąg koła, to tenże przetnie powierzchnię w dziewięciu punktach, z których dwa znajdują się w każdym punkcie styczności płaszczyzny siecznej z powierzchnią pierścieniową, jeden wzięty dowolnie na krzywej wspólnej i dwa w każdym z dwu punktów kołowych w nieskończoności płaszczyzny siecznej, gdyż, jak powiedzieliśmy wyżej, koło w nieskończoności jest równoleżnikiem podwójnym powierzchni pierścieniowej.

Że zaś krzywa przecięcia jest czwartego stopnia, a więc okrąg koła może ją tylko przeciąć w ośmiu punktach nie zchodząc się z nią, zatem przecięcie składa się z koła i dopełnia się drugiem kołem, które przecinają się w punktach styczności płaszczyzny podwójnie stycznej z powierzchnią pierścieniową, czyli, że te punkta są punktami podwójnemi przecięcia.

Znajdźmy teraz promień i środki tych kół. Ponieważ prosta, podług której płaszczyzna koła szyjnego i równika powierzchni pierścieniowej przecina płaszczyznę sieczną, jest prostopadłą w środku cięciwy wspólnej kołom przecięcia, i przechodzi przez ich środki, zatem końce średnicy każdego z nich otrzymamy z przecięcia się ich płaszczyzn z kołem szyjnem i z równikiem.

Promień przecięcia jest równy połowie summy promieni, równika i koła szyjnego, to jest promieniowi koła przechodzącego przez środki południków, odległość zaś środka przecięcia od osi jest równą połowie różnicy tych promieni, czyli promieniowi południka.

W końcu dowiedziemy, że spodek osi powierzchni pierścieniowej na płaszczyznie poziomej rzutów jest ogniskiem dwu rzutów poziomych krzywej przecięcia.

Niech będą (fig. r_3) rzut pionowy osi z', rzuty kół γ', γ_1' należących do obwodu pozornego pionowego

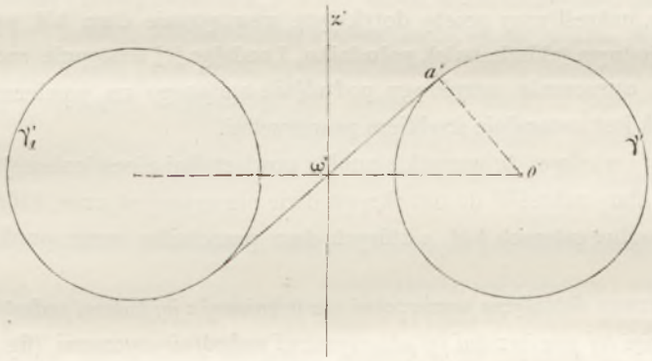

Fig. r_3.

i wreszcie rzut ω' środka powierzchni. Nakreślmy nadto przez ω' styczną wspólną kołom γ', γ_1' i z punktu o' t. j. środka krzywej γ', poprowadźmy prostopadłę $o'a'$ do tej stycznej.

Ponieważ, jak widzieliśmy, połowy osi wielkich rzutów poziomych kół przecięcia są równe $o'\omega'$, a rzut tej linii pod kątem $o'\omega'a'$ wyznacza długość wspólną $\omega'a'$ połowy ich osi małych, więc $o'a'$ jest równe odległości środków tych rzutów od odpowiednich im ognisk.

Wreszcie, ponieważ linija $o'a'$ jest także równą odległości tych środków od spodka osi, więc ten ostatni jest ogniskiem wspólnem dwu rzutów kół, któremi się zajmujemy.

Uwaga.—Jak tylko poznamy ułożenie rzutów kół przecięcia, będziemy mogli nakreślić je za pomocą boków trójkąta $\omega'a'o'$.

832. Twierdzenie IV. — *Przecięcie powierzchni pierścieniowej kulą podwójnie styczną, jest układem czterech kół, z których dwa leżą w nieskończoności a dwa pozostałe w odległości skończonej.* — Widzieliśmy w poprzedzającym paragrafie, że koło w nieskończoności jest równoleżnikiem podwójnym powierzchni pierścieniowej, że zaś nadto, kula jest powierzchnią pierścieniową, której koło południkowe ma środek na osi, więc możemy powiedzieć, że to koło jest także równoleżnikiem podwójnym kuli.

Ponieważ więc koło w nieskończoności jest równoleżnikiem podwójnym wspólnym obu powierzchniom, zatem krzywa wspólnego przecięcia w odległości skończonej jest czwartego stopnia. Ponieważ

nadto płaszczyzna przechodząca przez oś powierzchni pierścieniowej i przez środek kuli, jest płaszczyzną symetryi wspólną obu powierzchniom, więc punkta, w których kula dotyka powierzchni pierścieniowej, mogą być albo symetrycznie położone względem tej płaszczyzny, albo też leżeć na niej samej.

Jeżeli dwa punkta dotknięcia są symetryczne, to można przez nie przesunąć płaszczyznę prostopadłą do osi powierzchni pierścieniowej, która odetnie na obu powierzchniach uważanych równoleżniki podwójnie styczne a tem samem zchodzące się z sobą, i wówczas dwie powierzchnie dotykać się będą z sobą podług równoleżnika podwójnego, tworzącego część przecięcia leżącą w odległości skończonej.

W głównym przypadku, to jest gdy punkta dotknięcia leżą na płaszczyznie południka powierzchni pierścieniowej, walec rzucający krzywę przecięcia na płaszczyznę południka jest drugiego stopnia, gdyż, w skutek symetryi figury, płaszczyzna równoległa do jego tworzących, a skierowana dowolnie, może go tylko przeciąć podług dwu tworzących. Wiemy nadto, że ten walec dotyka kulę w dwu punktach, to jest, na zasadzie twierdzenia Monge'a, dotyka ją podług dwu krzywych płaskich, które będąc nakreślone na kuli, muszą być dwoma kołami.

833. Zadanie XII. — *Przez jakikolwiek punkt powierzchni pierścieniowej nakreślić cztery koła.* — Dwa z nich są znane odrazu przez równoleżnik i południk, które przechodzą przez ten punkt, dwa zaś pozostałe znajdziemy, nakreśliwszy prostę dotykającą wewnętrznie dwu kół powierzchni pierścieniowej, leżących na jednym jakimkolwiek południku, i nadając jej następnie ruch obrotowy naokoło osi powierzchni dla utworzenia ostrokręgu podwójnie opisanego na powierzchni pierścieniowej, a którego wierzchołek jest naturalnie środkiem powierzchni.

Mając ten ostrokrąg i wiedząc, że wszystkie punkta powierzchni pierścieniowej leżą zewnątrz niego, możemy przez punkt dany nakreślić do ostrokręgu dwie płaszczyzny styczne, które przetną powierzchnię pierścieniową podług czterech kół, z których dwa przechodzą przez punkt dany i są właśnie kołami szukanemi.

834. Uwaga. — *Krzywe dotknięcia powierzchni pierścieniowej z jej kulami podwójnie stycznemi, niczem się nie różnią od przecięć tej powierzchni jej płaszczyznami podwójnie stycznemi* (fig. r_4). — Obierzmy za

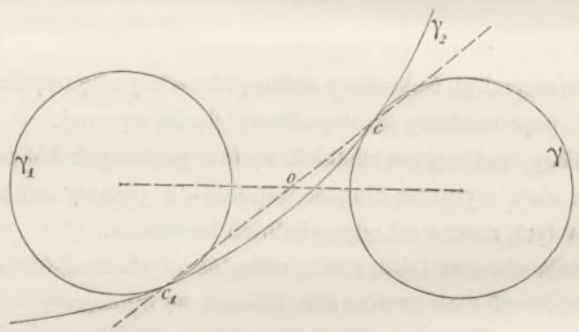

Fig. r_4.

płaszczyznę figury płaszczyznę południka, przechodzącą przez punkta dotknięcia c, c_1 i nakreślmy koła γ, γ_1, γ_2 odcięte przezeń tak na powierzchni pierścieniowej, jakoteż na kuli.

Dowiedziemy przedewszystkiem, że prosta łącząca punkta c, c_1, przechodzi przez środek o powierzchni pierścieniowej.

W tym celu zauważmy, że punkta c, c_1, o leżą na jednej linii prostej, albowiem pierwszy z nich jest środkiem jednokładności odwrotnej kół γ i γ_2, drugi, środkiem jednokładności wprost, kół γ_1, γ_2,

a trzeci i ostatni, środkiem jednokładności odwrotnej kół γ, γ_1, a zatem trzy te punkta leżą na jednej z osi jednokładności odwrotnej układu trzech kół, przedstawionych na rysunku.

Przez tę prostę, na której leży wierzchołek o ostrokręgu podwójnie opisanego na powierzchni pierścieniowej i zewnątrz niego, możemy przesunąć dwie płaszczyzny styczne do powierzchni pierścieniowej, które odetną na kuli dwa koła przechodzące przez punkta c i c_1, a na powierzchni pierścieniowej cztery koła; z tych dwa przejdą także przez punkta c i c_1 i będą styczne do pierwszych, gdyż styczne do kół uważanych w punktach c i c_1 są przecięciami płaszczyzny tych kół z płaszczyznami stycznemi, wspólnemi kuli i powierzchni pierścieniowej, a że dwa koła podwójnie styczne zchodzą się z sobą, zatem twierdzenie jest dowiedzionem.

835. Zadanie XIII. — *Nakreślić przecięcie powierzchni pierścieniowej o osi pionowej, płaszczyzną podwójnie styczną, równoległą do osi rzutów i na ostatecznym rysunku przedstawić część bryły zawartą w powierzchni pierścieniowej, a leżącą za płaszczyzną podwójnie styczną* (*fig.* 414, tab. LVI). — Niech będzie powierzchnia pierścieniowa przedstawiona przez swe obwody pozorne i mająca za oś pionową prostę z, z'; nakreśliwszy do niej płaszczyznę podwójnie styczną $P_1 \alpha P'_1$ a prostopadłą do płaszczyzny pionowej rzutów, i obróciwszy takowę naokoło z, z' o 90°, łatwo wyznaczymy ślad poziomy P płaszczyzny podwójnie stycznej do powierzchni pierścieniowej a równoległej do osi rzutów, skutkiem czego płaszczyzna sieczna będzie wyznaczoną przez punkt o', z nieruchomy i przez znaleziony ślad poziomy P.

Na mocy tego cośmy powiedzieli w paragrafie **831** wynika, że punkt z jest ogniskiem wspólnem rzutów poziomych dwu kół przecięcia, zaś płaszczyzna pozioma pomocnicza, przechodząca przez środek powierzchni, posłuży do znalezienia wielkich osi ab, cd rzutu poziomego przecięcia i osi $a'b'$, $c'd'$ jego rzutu pionowego.

Dla znalezienia końców małych osi wystarczy znaleźć punkta, w których styczne do rzutów są równoległe do osi wielkich, to jest punkta leżące na równoleżniku najwyższym i na równoleżniku najniższym powierzchni pierścieniowej, czyli punkta mające za rzuty (f, f'), (e, e'), (g, g'), (h, h').

Dla znalezienia punktów podwójnych wystarczy obrócić o 90° naokoło z, z' punkta, w których płaszczyzna $P_1 \alpha P'_1$ dotyka powierzchni pierścieniowej, gdyż w ten sposób znajdziemy punkta (i, i'), (j, j'), których wykreślenie jest dość jasno przedstawione na figurze.

Części powierzchni pierścieniowej przecięte i widzialne zostały zacieniowane na figurze.

836. Zadanie XIV. — *Znaleźć punkta spotkania się powierzchni pierścieniowej z prostą przechodzącą przez jej środek.* — Wyznaczywszy ostrokrąg dotykający powierzchni pierścieniowej podług dwu równoleżników, należy przyjąć za płaszczyznę sieczną pomocniczą jednę z płaszczyzn stycznych do ostrokręgu, a przechodzącą przez prostę daną.

837. Zadanie XV. — *Nakreślić obwody pozorne powierzchni, utworzonej zupełnym obrotem koła naokoło osi pionowej, przechodzącej przez jedno z ognisk jej rzutu poziomego* (do rozwiązania).

838. Zadanie XVI. — Mając dane :

1° *Półkulę styczną do płaszczyzny pionowej rzutów, spoczywającą na swej podstawie leżącej na płaszczyźnie poziomej rzutów, a której promień jest równy* $0^m,100$.

2° *Powierzchnię pierścieniową o osi pionowej, oddaloną o* $0^m,170$ *od płaszczyzny pionowej rzutów, i leżącą w płaszczyźnie profilu przechodzącej przez środek kuli, której półkula jest daną; środek koła południkowego tej powierzchni leży o* $0^m,070$ *od jej osi, od płaszczyzny poziomej rzutów o* $0^m,051$, *zaś jego promień jest równy* $0^m,049$.

Nakreślić półkulę uważaną za pełną i istniejącą jako sama, odrzucając część tej bryły zawartą w powierzchni pierścieniowej (skala przyjęta jest równą $\frac{6}{10}$) (*fig.* 415, tab. LVII).

Za pomocą powyższych danych nakreśliwszy obwody pozorne $(\gamma', \gamma_1, \alpha, \alpha_1)$, (β, β'_1) obu powierzchni, przekonamy się, że powierzchnia pierścieniowa jest podwójnie styczną do półkuli, w dwu punktach leżących na płaszczyźnie profilu, przechodzącej przez środek tej półkuli, a z których jeden a, a' znajduje się w punkcie wierzchołkowym półkuli i na równoleżniku najwyższym powierzchni pierścieniowej.

Nakreślmy przedewszystkiem rzut poziomy linii wspólnej obu powierzchniom danym; otoż wiemy z własności dowiedzionych powyżej (§§ **831, 832, 834**), że jest to układ dwu elips, których znajdziemy części składowe, zasadzając się na tych własnościach; że zaś części składowe, o których mowa, znajdują się w trójkącie $c'd'a'$, który umiemy nakreślić, zostaje więc tylko umieścić je we właściwem położeniu na figurze. W tym celu uważmy, że dwie elipsy szukane mają ognisko wspólne w punkcie z i dowiedźmy, że punkt a jest wierzchołkiem małej osi każdej z nich.

I rzeczywiście, ponieważ w przestrzeni koła wspólne obu powierzchniom mają punkt wierzchołkowy wspólny a, a', a styczne w tym punkcie podwójnym są równoległemi do średnic tych kół, więc ich rzuty poziome są osiami wielkiemi dwu elips szukanych, zaś punkt a jest rzeczywiście jednym z końców małej osi każdej z nich. Ponieważ nadto każda z prostych za i $c'o'$ jest równą połowie długości wielkiej osi dwu elips uważanych, więc te proste muszą być sobie równe.

Łatwo już teraz będzie umieścić części składowe elips we właściwych położeniach, gdyż dość będzie nakreślić na prostej az jako przeciwprostokątnej wspólnej, i po obu jej stronach, dwa trójkąty $a\omega z$, $a\omega_1 z$ równe trójkątowi $c'd'o'$ i tak je ustawić, żeby boki $z\omega$, $z\omega_1$ były równe $o'd'$, albowiem wówczas boki kąta prostego tych trójkątów wyznaczą położenie osi.

Pozostałe wierzchołki nieznane dotąd otrzymamy, odcinając

$$\omega a_2 = \omega_1 a$$

zaś

$$\omega a_1 = \omega' ,$$

i biorąc odpowiednie przecięcia się b, b_1, b_2, b_3 osi ωz, $\omega_1 z$ z kołami α, α_1.

Nakreśliwszy obecnie elipsę mającą bb_1 za oś wielką i aa_1 za oś małą, i ustawiwszy ją w położeniu symetrycznem względem az, w ten sposob znajdziemy elipsę, której osiami są aa_2, b_2b_3.

Dla nakreślenia rzutu pionowego, należy sprowadzić ω do ω' i ω_1 do ω'_1, przesunąć prostę $a'\omega'$, ω'_1 i przedłużyć ją o długość równą jej długości, w ten sposób bowiem poznamy jednę średnicę każdej z elips. Te dwie średnice $a'a'_1$, $a'a'_2$ mają za sprzężone $b'b'_1$, $b'b'_2$, a te ostatnie otrzymamy, podnosząc punkta b, b_1, b_2, b_3. Znając to, możemy teraz nakreślić rzut pionowy przecięcia.

Dla nadania większej dokładności wykreśleniu, punkta, w których rzut pionowy przecięcia dotyka obwodów pozornych obu powierzchni w rzucie na tęż samą płaszczyznę, zostały wyznaczone wprost.

Powyższe wykreślenia nie przedstawiają trudności; dość jest bowiem zauważyć, że płaszczyzny krzywych przecięcia są wyznaczone przez proste przecinające się w punktach ω, ω' i ω_1, ω'_1 i użyć za płaszczyzny pomocnicze odpowiednio, płaszczyzn obrazu przechodzących przez z, z' i przez środek kuli.

Pierwsza z tych płaszczyzn pomocniczych przecina płaszczyznę koła, mającego środek w punkcie ω_1, ω'_1, podług prostej obrazu zg, $e'g'$, rzut zaś pionowy tej prostej spotyka γ', γ'_1 w czterech punktach, z których dwa k', k'_1 są punktami dotknięcia elipsy, mającej środek w punkcie ω'_1, z kołami γ', γ'_1; punkta zaś dotknięcia tychże kół z elipsą, mającą środek w punkcie ω, ω', są symetrycznemi względem punktu z' punktów k', k'_1 właśnie znalezionych.

Druga płaszczyzna pomocnicza ma za ślad poziomy prostę równoległą do osi rzutów, a przechodzącą przez punkt a, i spotyka płaszczyznę koła mającego środek w punkcie ω, ω' podług prostej as, $a's'$, która wyznacza drugi punkt dotknięcia f'_1 rzutu pionowego tego koła $z\beta'_1$. Punkt f'_1 został wyznaczony za pomocą prostej równoległej do osi rzutów, a przechodzącej przez punkt f'. Drugi punkt podwójny wspólnego przecięcia może być otrzymany obrotem o 90° naokoło z, z' krzywych południkowych, leżących na płaszczyźnie profilu, i w tento sposób zostały znalezione punkta δ', δ w pierwotnem położeniu figury i Δ_1, Δ'_1 po dokonaniu obrotu.

839. Zadanie XVII. — *Mając powierzchnię pierścieniową, której promień koła tworzącego jest równy promieniowi koła szyjnego w położeniu zwyczajnem, wyznaczyć :*

1° *Przecięcie tej powierzchni z płaszczyzną styczną, dotykającą jej w punkcie koła szyjnego, najwięcej oddalonym od płaszczyzny pionowej rzutów ;*

2° *Obwody pozorne powierzchni utworzonej obrotem tego przecięcia naokoło jego osi pionowej ;*

3° *Przecięcie tej ostatniej powierzchni płaszczyznami prostopadłemi do płaszczyzny pionowej, dotykającej ją w punkcie podwójnym jej południków* (*fig.* 416, tab. LVI).

1° Powierzchnia pierścieniowa, której rzutem osi jest z, z', jest wyznaczoną przez swe obwody pozorne na dwu płaszczyznach rzutów, a płaszczyzna pionowa, która ma ją przecinać, jest wyznaczona przez jej ślad poziomy P. Punkta należące do przecięcia zostały wyznaczone za pomocą płaszczyzn poziomych pomocniczych, poczem wykreślonym został rzut pionowy γ' tego przecięcia.

840. Styczne w punkcie podwójnym. — Ponieważ z wykreślenia ogólnego (§ **679**) wynika, że w punkcie podwójnym δ, δ' styczne $(\delta't', \delta P)$, $(\delta't'_1, \delta P)$ są nachylone do poziomu pod kątem 45°, przecięcie więc które wykreśliliśmy, jest *lemniskatą*, jak to wynika z następującego twierdzenia :

841. Twierdzenie V. — *Przecięcie powierzchni pierścieniowej płaszczyznami równoległemi do osi i odległemi od niej o długość równą promieniowi koła południkowego, są* KRZYWEMI CASSINI'EGO *lub* LEMNISKATAMI (fig. r_5). — Przyjmijmy oś obrotu za oś z, prostopadłę do oz,a' wyprowadzoną ze środka

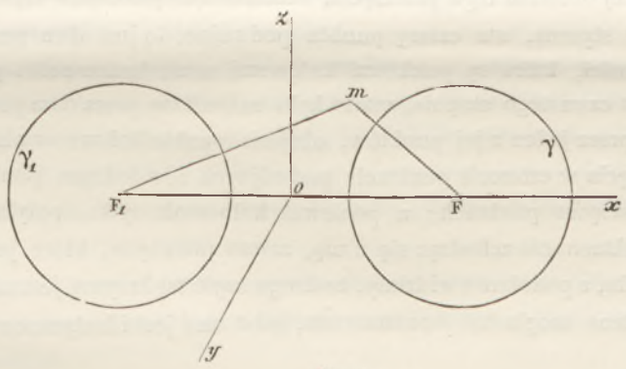

FIG. r_5.

jednego z kół tworzących równoległych do płaszczyzny siecznej za oś x, wreszcie prostopadłę do płaszczyzny zox za oś y. Płaszczyzna zox przecina powierzchnię pierścieniową podług dwu kół γ, γ_1; oznaczmy przez r ich promień wspólny, zaś przez a odległość ich środków od osi oz.

Ponieważ płaszczyzna przecięcia jest równoległą do zox i leży od niej w odległości równej r, tem samem zaś rzut przecięcia tego na płaszczyznę zox jest w rzeczywistej wielkości, należy więc znaleźć jego równanie.

Ponieważ równaniami powierzchni pierścieniowej i płaszczyzny siecznej są:

$$(x^2+y^2+z^2+a^2-r^2)^2=4a^2(x^2+y^2),\quad y=r;$$

więc równaniem szukanem rzutu będzie

$$(x^2+z^2+a^2)^2-4a^2x^2=4a^2r^2,$$

czyli

$$(x^2+z^2+a^2+2ax)(x^2+z^2+a^2-2ax)=4a^2r^2,$$

albo jeszcze

$$[(x+a)^2+z^2][(x-a)^2+z^2]=4a^2r^2.$$

Ponieważ czynniki pierwszej strony tego ostatniego równania przedstawiają potęgi jednego jakiegokolwiek punktu m rzutu, którym się zajmujemy, względem punktów F, F_1, mamy więc

$$\overline{mF}^2.\overline{mF_1}^2=4a^2r^2,$$

lub

$$mF.mF_1=2ar.$$

to jest, że iloczyn odległości punktów krzywej od dwu punktów stałych jest stałym, co było do okazania.

2° Wykreślenie obwodu pozornego powierzchni, utworzonej obrotem zupełnym naokoło osi z, z'_1, przecięcia obecnie nakreślonego, jest dostatecznie wskazanem na figurze.

3° Zanim przystąpimy do rozwiązania trzeciego zadania, dowiedźmy następującego twierdzenia:

842. Twierdzenie VI. — *Przeciąwszy powierzchnię pierścieniową płaszczyzną jakąkolwiek lecz równoległą do jej osi, to płaszczyzna podwójnie styczna do powierzchni, utworzonej obrotem zupełnym tego przecięcia naokoło jego osi równoległej do osi powierzchni pierścieniowej, przetnie tę powierzchnię podług dwu kół.* — I rzeczywiście, ponieważ bowiem przecięcie płaszczyzną równoległą do osi ma dwa punkta podwójne na kole w nieskończoności, zatem to koło jest także równoleżnikiem podwójnym powierzchni utworzonej obrotem tego przecięcia, wszelkie zaś przecięcie tej ostatniej powierzchni płaszczyzną podwójnie styczną, ma cztery punkta podwójne, to jest dwa punkta dotknięcia i dwa punkta w nieskończoności, które są punktami kołowemi w nieskończoności płaszczyzny przecięcia. Gdy zaś ta ostatnia jest czwartego stopnia, zatem koło nakreślone przez dwa punkta podwójne w odległości skończonej i przez jeden z jej punktów, obejmie punkta kołowe w nieskończoności, tudzież spotka krzywę przecięcia w czterech punktach podwójnych i w jednym punkcie pojedynczym tej krzywej, czyli w dziewięciu punktach; a ponieważ koło może tylko spotykać krzywę czwartego stopnia w ośmiu punktach nie zchodząc się z nią, zatem przecięcie, które jest czwartego stopnia, obejmuje już jedno koło, a podobnież widzimy, że druga część tej krzywej jest także kołem.

Dowodzenie tu podane mogło być opuszczonem, gdyż ono jest identyczne z podanem już w paragrafie **831**.

Z tego cośmy tu powiedzieli widzimy, że łatwo będzie nakreślić, jak to wskazuje wreszcie figura, rzuty przecięcia utworzonego przez płaszczyzny styczne w punkcie δ, δ' (*fig.* 416 tab. LVI). I rzeczywiście, skoro bowiem płaszczyzny te są płaszczyznami podwójnie stycznemi, których punkta styczności zchodzą się z sobą, przecinają więc one powierzchnię podług kół przedstawionych w rzucie poziomym przez cztery elipsy zchodzące się z sobą co dwie, punkta z_1, c, a, b są wierzchołkami pierwszej, zaś z_1, c_1, a_1, b_1 wierzchołkami drugiej.

Ostateczny rysunek przedstawia bryłę utworzoną przez lemniskatę, tu tylko zostały odjęte części leżące nad dwiema płaszczyznami podwójnie stycznemi.

843. Zadanie XVIII. — *Przedstawić rzuty części powierzchni pierścieniowej, zawartej wewnątrz ostrosłupa sześciościennego opisanego na ostrokręgu, dotykającym powierzchni pierścieniowej podług dwu równoleżników* (do rozwiązania).

844. Twierdzenie VII. — *Wszelka płaszczyzna podwójnie styczna do powierzchni, utworzonej obrotem stożkowej naokoło prostej leżącej na jej płaszczyznie, przecina tę powierzchnię podług dwu stożkowych, które w rzucie na płaszczyznę prostopadłą do osi, mają jedno ognisko wspólne u spodka tej osi* (do dowiedzenia).

845. Zadanie XIX. — *Znaleźć przecięcie się dwu ostrokręgów, mających za podstawę wspólną koło leżące na płaszczyznie poziomej rzutów, a których rzuty wierzchołków przypadają na końcu średnicy tego koła, równoległej do osi rzutów* (*fig.* 417, tab. LVIII). — Oznaczmy przez γ podstawę daną, przez st średnicę równoległą do osi rzutów, zaś przez (s, s'), (t, t') rzuty wierzchołków.

Ponieważ dwa ostrokręgi mają krzywę płaską γ wspólną, więc przecięcie ich obejmuje drugą krzywę płaską, którą należy wyznaczyć. Ponieważ płaszczyzną symetryi tej ostatniej krzywej jest płaszczyzna obrazu, przechodząca przez wierzchołki dane, a więc rzut jej pionowy jest prostolinijnym, dość zatem będzie wyznaczyć dwa punkta tego rzutu. W tym celu przeciąwszy obie powierzchnie płaszczyzną obrazu przechodzącą przez wierzchołki, płaszczyzna ta wyznaczy cztery tworzące, mające za rzuty pionowe $s'a'$, $s'b'$, $t'a'$, $t'b'$, które przecinając się z sobą wyznaczą nietylko punkta a', b' należące do podstawy, lecz nadto dwa punkta szukanego rzutu pionowego, a mianowicie punkt σ' i drugi leżący w nieskończoności na prostych $s'a'$, $t'b'$, który oznaczyliśmy na rysunku przez n'_∞; szukana więc prosta zostanie wyznaczoną, łącząc punkt σ' z n'_∞, lub co na jedno wychodzi, kreśląc przez punkt σ' prostę równoległą $\sigma'd'$ do $s'a'$.

Z poprzedzającego wynika nadto, że i rzut poziomy wspólnego przecięcia jest prostolinijnym, i że jest nim prosta de; druga zatem krzywa przecięcia jest przecięciem się jednego z ostrokręgów z płaszczyzną profilu, czyli jest ona parabolą.

Figura przedstawia kład tej paraboli i bryłę utworzoną z połączenia części dwu ostrokręgów, zawartych pomiędzy wierzchołkiem i podstawą wspólną.

846. Zadanie XX. — *Wyznaczyć przecięcie się ostrokręgu o podstawie kołowej z walcem kołowym pionowym, wspartego na płaszczyznie poziomej rzutów w ten sposób, że ich podstawy przecinają się z sobą na średnicy równoległej do osi rzutów, a rzut poziomy wierzchołka ostrokręgu zchodzi się z punktem dotknięcia podstaw* (*fig.* 418, tab. LVIII). — Ponieważ tworząca pionowa ostrokręgu jest prostą podwójną wspólnego przecięcia, więc to ostatnie składać się będzie z tej prostej $s'a'$, s i ze stożkowej (§ 752).

Ponieważ nadto punkt m', m należy do dwu powierzchni, a płaszczyzna pozioma przechodząca przezeń przecina powierzchnie podług jednego koła, mającego za rzuty $m'n'$, γ_1, więc to koło i prosta podwójna tworzą całkowite przecięcie.

Rysunek przedstawia bryłę utworzoną przez część ostrokręgu, zawartą pomiędzy jego podstawą γ i wierzchołkiem s, s', i część walca zawartą pomiędzy podstawą γ_1 i płaszczyzną poziomą, leżącą nad wierzchołkiem s, s'.

847. Zadanie XXI. — *Nakreślić przecięcie się kuli z ostrokręgiem, którego wierzchołek leży w jej środku i rozwinąć następnie powierzchnię ostrokręgu* (*fig.* 419, tab. LVIII). — Za podstawę ostrokręgu przyjęliśmy hyperbolę H, H_1, leżącą na płaszczyznie poziomej rzutów, a za wierzchołek jego jakikolwiek punkt o, o'. Wierzchołek ten jest zarazem środkiem kuli stycznej do płaszczyzny poziomej rzutów.

848. Wyznaczenie jednego z punktów przecięcia. — Punkta należące do przecięcia wyznaczone

są za pomocą punktów, w których tworzące ostrokręgu i kuli przecinają się z sobą. W tym celu obrawszy tworzącę ot, $o't'$ i obróciwszy ją naokoło osi pionowej, przechodzącej przez punkt o, o', w położenie równoległe do płaszczyzny pionowej rzutów, to jest w położenie ot_1, $o't'_1$, to przecięcia się jej z kulą będą miały za rzuty pionowe punkta $m'_1n'_1$, a powracając teraz do pierwotnego położenia, otrzymamy szukane punkta (m, m'), (n, n').

849. Wyznaczenie stycznej w jakimkolwiek punkcie. — W tym celu obierzmy punkt m, m'. Śladami płaszczyzny stycznej do kuli w punkcie mającym rzut pionowy w m'_1 są P_1, P'_1. Jeżeli obrócimy ten punkt wraz z płaszczyzną styczną naokoło osi pionowej, przechodzącej przez punkt o, o', a to dla sprowadzenia punktu do położenia m, m', prosta P_1 przypadnie na P i spotka ślad poziomy R płaszczyzny stycznej do ostrokręgu w punkcie θ, θ', który jest właśnie śladem poziomym stycznej szukanej; łącząc ten punkt z punktem m, m', znajdziemy rzuty θm, $\theta' m'$ szukanej stycznej. Styczna R do hyperboli została wyznaczoną, jak to wskazuje figura, za pomocą asymptot A, A_1.

850. Punkta obwodu pozornego ostrokręgu. — Ślady poziome h i τ tworzących obwodu pozornego pionowego ostrokręgu zostały znalezione, biorąc przecięcie się hyperboli ze średnicą sprzężoną cięciw pionowych.

Wykreślenie ogólne, podane na naszym rysunku i zastosowane do tworzących, których śladami są h i τ, dało punkta s', σ', r', μ' leżące na obwodzie pozornym pionowym ostrokręgu.

Jeżeli teraz nakreślimy przez punkt o styczne $o\theta_1$, $o\theta_2$ do H i H_1 i znajdziemy punkta krzywej, leżące na tych stycznych, to tak otrzymane punkta będą punktami obwodu pozornego poziomego powierzchni stożkowej.

851. Punkta obwodu pozornego pionowego kuli. — Jeżeli przyjmiemy za płaszczyznę pomocniczą płaszczyznę obrazu przechodzącą przez punkt o, o', to ta ostatnia przetnie kulę podług okręgu koła, mającego γ'_1 za rzut pionowy, a ostrokrąg podług tworzących $(oh_2, o'h'_2)$, $(o\tau_2, o'\tau'_2)$, punkta więc przecięcia się (v, v'), (u, u'), (p, p'), (q, q') tych linij są właśnie punktami szukanemi.

852. Punkta obwodu pozornego poziomego kuli. — Używając płaszczyzny poziomej przechodzącej przez punkt o, o' za płaszczyznę sieczną, znajdziemy na kuli koło mające γ za rzut poziomy, a na ostrokręgu dwie równoległe do A, A_1, przechodzące przez punkt o. Punkta zaś przecięcia się a_1, a_2, a_3, a_4 rzutów poziomych tych przecięć będą rzutami poziomemi punktów szukanych, których rzuty pionowe znajdą się na śladzie pionowym Q' płaszczyzny pomocniczej i w punktach a'_1, a'_2, a'_3, a'_4.

853. Punkta podwójne w rzucie pionowym. — Ponieważ płaszczyznami sprzężonemi do cięciw prostopadłych do płaszczyzny pionowej rzutów są: dla kuli płaszczyzna obrazu przechodząca przez punkt o, o', a dla ostrokręgu płaszczyzna przechodząca przez tenże punkt o, o' i przez prostę $h\tau$ leżącą na płaszczyźnie poziomej rzutów, a ponieważ nadto przecięcie się tych dwu płaszczyzn przechodzi przez punkta o, o' i ψ, ψ', więc prostą punktów podwójnych w rzucie pionowym jest prosta $\psi' o'$.

Dla znalezienia samych punktów podwójnych, uważmy rzuty poziome $o\psi_1$, $o\psi_2$ tworzących ostrokręgu, których rzutem pionowym wspólnym jest prosta $o'\psi'$, i zastosujmy ogólny sposób postępowania, a znajdziemy punkta (ε', δ'), które są punktami podwójnemi rzutu pionowego, ich zaś rzutami poziomemi są punkta δ_1, δ_2, ε_1, ε_2.

854. Punkta podwójne rzutu poziomego. — W tym razie prosta punktów podwójnych jest wyznaczoną przez rzut poziomy prostej wspólnego przecięcia się płaszczyzn średnicowych sprzężonych do cięciw pionowych.

Płaszczyzna średnicowa kuli jest płaszczyzną poziomą mającą Q' za ślad poziomy, a dla ostrokręgu jest to płaszczyzna przechodząca przez punkt o, o' i biegunowę $\theta_1\theta_2$ punktu o względem H, H_1.

Rzut poziomy wspólnego przecięcia się tych płaszczyzn przechodzi przez punkt o i jest równoległy do $\theta_1\theta_2$; ta prosta równoległa musi przechodzić przez punkta podwójne φ, φ_1. Całkowite wykreślenie odnoszące się do punktów podwójnych jest takie same, jak wykreślenie służące do znalezienia jakiegokolwiek punktu krzywej wspólnej obu powierzchniom danym.

855. Punkt najwyższy i punkt najniższy. — Ponieważ w tych punktach ślady poziome płaszczyzn stycznych są równoległe (§ 577), a ponieważ nadto ślad poziomy płaszczyzny stycznej do kuli winien być prostopadłym do rzutu poziomego tworzącej ostrokręgu, przechodzącej przez punkt styczności, czyli, ten rzut poziomy winien być normalnym do H_1H_1, więc punkta szukane znajdziemy, działając jak zazwyczaj z tworzącemi ostrokręgu, których rzuty poziome przechodzą przez punkt o i są normalne do hyperboli danej.

856. Przedstawienie bryły. — Ostatecznie na rysunku przedstawioną została część pełna ostrokręgu, zawarta w kuli.

857. Rozwinięcie ostrokręgu. — Rozwinięcie znalezionego przecięcia jest łukiem koła, a odcięte liczone na tej linii i rzędne, liczone na tworzących ostrokręgu, posłużą do wyznaczenia przekształconej przez rozwinięcie jakiejkolwiek linii, nakreślonej na ostrokręgu. Rzeczywista wielkość odciętych da się znaleźć, robiąc przedewszystkiem rozwinięcie walca pionowego, rzucającego krzywę wspólnego przecięcia powyżej wyznaczoną.

Sposób tu podany jest ogólnym i może służyć do rozwinięcia jakiegokolwiek stożka.

858. Zadanie XXII. — *Nakreślić przecięcie się elipsoidy spłaszczonej o osi pionowej z walcem, którego oś równoległa do linii ziemnej przechodzi przez środek elipsoidy, i przedstawić na figurze część walca wyciętą przez elipsoidę* (*fig.* 420, tab. LVIII).

Oznaczmy przez z, z' oś elipsoidy, przez o', z jej środek, przez ε', ε rzuty jej krzywej południkowej. Oś walca z_1, z'_1 jest prostą równoległą do linii ziemnej przechodzącą przez środek z, o', a walec został przedstawionym przez swe obwody pozorne.

Na zasadzie twiedzenia już dowiedzionego (§ 783) widzimy, że rzutem pionowym wspólnego przecięcia jest elipsa, na zasadzie zaś paragrafu 758 wiemy, że jego rzutem poziomym jest hyperbola.

Rysunek wskazuje dość jasno sposób postępowania, za pomocą którego znaleźliśmy wierzchołki elipsy a', b', c', d', wierzchołki osi głównej hyperboli s_1, s_2, i wreszcie cztery punkta a_1, a_2, c_1, c_2 tej hyperboli.

859. Styczne w punktach granicznych rzutu poziomego przecięcia. — Ponieważ w punkcie a_1, a' styczna jest pionową, a rzutem jej poziomym jest jeden punkt nie wyznaczający stycznej do rzutu poziomego krzywej, więc prostę tę znajdziemy używając sposobu podanego w paragrafie 778, to jest, kreśląc normalnę $a'\varepsilon'$ w punkcie blizkim wierzchołka s', która spotka oś $o's'$ w punkcie zbliżającym się do środka krzywizny o'_2 elipsy w punkcie s', skoro punkt blizki wierzchołka zdąża do punktu s'. Środek krzywizny umiemy znaleźć (§ 137). Punktowi o'_2 odpowiada punkt o_2, a ten ostatni przypada w punkcie o, jeżeli obrócimy figurę naokoło osi z, z' dla sprowadzenia wierzchołka s, s' do punktu a_1, a'.

Ponieważ normalna do walca, przechodząca przez punkt a_1, a' przecina oś $z_1z'_1$ w punkcie, którego rzutem poziomym jest punkt ω leżący na przecięciu się z_1 z a_1a_2, i ponieważ nadto w granicy ślad płaszczyzny dwu normalnych na płaszczyznie poziomej rzutów, przechodzącej przez $o'z'_1$, ma za rzut poziomy prostę ωo_1, więc styczną szukaną otrzymamy, kreśląc przez punkt a_1 prostę at prostopadłą do ωo_1, pozostałe zaś styczne w punktach (c_1, c'), (c_2, c'), (a_2, a') znajdziemy, zasadzając się na symetryi figury.

860. Zadanie XXIII. — *Przedstawić bryłę utworzoną przez część hyperboloidy obrotowej, leżącą zewnątrz ostrokręgu a zawartą pomiędzy dwiema płaszczyznami poziomemi równooddalonemi od koła szyjnego, z których jedna jest płaszczyzną poziomą rzutów; hyperboloida jest wyznaczoną przez jej oś uważaną za pionową, przez jej ślad poziomy γ_1, przez rzut poziomy γ jej koła szyjnego i przez kąt jej tworzących z płaszczyzną poziomą rzutów równy 45°, a ostrokrąg przez jego wierzchołek s leżący na płaszczyźnie poziomej rzutów i przez jego tworzące równoległe do tworzących hyperboloidy* (*fig.* 421, tab. LVIII). — Będzie tu tylko mowa o rzutach poziomych.

861. Wyznaczenie jakiegokolwiek punktu krzywej przecięcia. — Punkta krzywej przecięcia dadzą się wyznaczyć dwoma sposobami : 1° za pomocą płaszczyzn pomocniczych poziomych i 2° używając płaszczyzn przechodzących przez tworzące hyperboloidy i przez wierzchołki ostrokręgu.

Pierwszy sposób. — Płaszczyzny poziome zostały użyte do wyznaczenia ostatecznych punktów krzywej przecięcia i punktów obwodu pozornego poziomego hyperboloidy. Rzuty poziome pierwszych z tych punktów znajdują się w punktach *e*, *f* przecięcia się rzutu poziomego γ koła górnego, ograniczającego hyperboloidę, z kołem γ_2, a którego promień równa się długości rzutu poziomego $\theta_1\theta_2$ części tworzącej hyperboloidy, zawartej pomiędzy dwoma kołami tej powierzchni, mającemi za rzut γ.

Rzuty punktów koła szyjnego leżą w punktach *a* i *b* na przecięciu się koła γ_1 z kołem γ_3, którego środek znajduje się w punkcie *s*, a promień równa się połowie długości $\theta_1\theta_2$.

Drugi sposób. — Jeżeli oznaczymy przez θ_3, θ_4 rzuty punktów przecięcia się tworzącej prostoliniinej hyperboloidy z kołami ograniczającemi z góry i z dołu tę hyperboloidę, to kreśląc przez tę tworzącę i przez wierzchołek *s* ostrokręgu płaszczyznę sieczną pomocniczą, śladem jej poziomym będzie $s\theta_3$ i przetnie ona hyperboloidę podług tworzącej obranej i podług tworzącej innego układu, mającej za ślad poziomy *t*, a rzut na stycznej *tg* do γ_1. Ta płaszczyzna pomocnicza przetnie nadto ostrokrąg podług dwu tworzących, których rzutami są proste *sk*, *sl*, przechodzące przez punkt *s* a skierowane podług $\theta_3\theta_4$ i *tg*. Tak znalezione cztery proste przecinają się z sobą w czterech punktach, z których dwa leżą w nieskończoności, dwa zaś inne mają rzuty w punktach m, m_1, należących właśnie do szukanej krzywej przecięcia.

862. Rodzaj krzywej przecięcia. — Gałęzie nieskończone. — Asymptoty. — Ponieważ obie powierzchnie są homotetyczne i drugiego stopnia, więc krzywa przecięcia musi być także drugiego stopnia (§ 760).

Szukając czy punkta m, m_1 mogą leżeć w nieskończoności, widzimy, że ta okoliczność może mieć miejsce tylko wtenczas, gdy proste *sk*, *sl* zchodzą się z sobą, albowiem wówczas proste $\theta_3\theta_4$ i *tg* staną się równoległe, a płaszczyzna sieczna pomocnicza będzie zarazem styczną do ostrokręgu i styczną w nieskończoności do hyperboloidy, czyli że przejdzie ona przez środek koła szyjnego. Nakreśliwszy więc przezeń płaszczyzny styczne do ostrokręgu, rzuty ich śladów na płaszczyznę koła szyjnego są prostemi *zi*, *zh* stycznemi do koła γ_3, a przechodzącemi przez punkt *z*, rzutami zaś tworzących dotknięcia są proste *si*, *sh*, które wyznaczają kierunki asymptotyczne przecięcia, a w skutek czego to ostatnie jest hyperbolą.

Asymptoty wyznaczymy zważając, że rzut na płaszczyznę koła szyjnego śladu płaszczyzny stycznej do ostrokręgu wzdłuż prostej, mającej za rzut *si*, jest prostą *zi*, a rzut na tęż płaszczyznę płaszczyzny krzywej przecięcia jest *ab*; te dwie proste przecinając się z sobą, wyznaczają punkt *d*, który jest rzutem punktu, przez który przechodzi jedna z asymptot szukanych, zatem rzutem tej asymptoty jest prosta dd_1 równoległa do *si*, a przechodząca przez punkt *d*. W taki sam sposób została znalezioną druga asymptota cc_1.

863. Wierzchołki rzutu i rzut wierzchołków. — Wskutek symetryi punkta te leżą na tworzących ostrokręgu, których rzuty przypadają na sz; dla znalezienia ich należy nakreślić do koła szyjnego styczną $\theta_1\theta_2$ równoległą do sz, a dwie pary prostych odpowiadających w przestrzeni tym równoległym, wyznaczą dwie płaszczyzny, których ślady poziome $s\theta_1$, $s\theta_2$ zostały przedstawione na figurze. Ponieważ te dwie płaszczyzny przecinają hyperboloidę podług czterech tworzących, z których dwie zchodzą się z $\theta_1\theta_2$ w rzucie, a dwie pozostałe mają za rzuty t_1g_1, t_2g_2, więc punkta σ_1, σ_2 przecięcia się ich z sz są właśnie punktami szukanemi.

Na figurze została przedstawioną bryła utworzona przez część pełną hyperboloidy, leżącą zewnątrz ostrokręgu.

864. Zadanie XXIV. — Mając dane:

1° *Walec, którego śladem poziomym i obwodem pozornym na płaszczyznie pionowej rzutów jest koło* γ *i proste obrazu* θg, $\theta' g'$, sb_1, $b'b'_1$.

2° *Ostrokrąg, którego śladem poziomym jest koło* γ_1 *dotykające pierwszego w punkcie* s, *a którego wierzchołek* s, s' *leży na tworzącej* θg, $\theta' g'$ *walca.*

Znaleźć:

1° *Rzuty wspólnego przecięcia walca z ostrokręgiem, i* 2° *przedstawić walec uważany za pełny i istniejący sam, odrzucając części tej bryły zawarte w ostrokręgu* (*fig.* 422, tab. LIX).

865. Wyznaczenie jakichkolwiek punktów przecięcia. — Ponieważ śladem poziomym prostej równoległej do tworzących walca, a przechodzącej przez wierzchołek ostrokręgu, jest punkt s, który jest zarazem wierzchołkiem wiązki śladów poziomych płaszczyzn pomocniczych, więc oznaczywszy przez P ślad poziomy jakiejkolwiek płaszczyzny pomocniczej, ta ostatnia wyznaczy na walcu dwie tworzące $(\theta g, \theta' g')$, $(tg_1, t'g'_1)$ i na ostrokręgu dwie inne tworzące, których rzutami poziomemi będą st_1, st_2; otrzymamy dwa punkta (m, m'), (m_1, m'_1), które są właśnie punktami należącemi do krzywej wspólnego przecięcia.

866. Punkta na linijach obwodów pozornych. — Punkta te znajdziemy sposobem ogólnym, przesuwając płaszczyzny pomocnicze przez proste tworzące te obwody. Figura przedstawia tylko wykreślenie odnoszące się do punktu a, a', który znaleźliśmy, używając płaszczyzny mającej P_1 za ślad poziomy.

867. Styczna w jakimkolwiek punkcie. — Obrawszy punkt m_1, m'_1, płaszczyzny styczne w tym punkcie do obu powierzchni mają za ślady poziome R, Q, punkt zaś h, h' ich wspólnego przecięcia wyznacza punkt przejścia stycznej szukanej, której rzutami są hm_1, $h'm'_1$.

868. Styczne w punkcie podwójnym. — Płaszczyzna styczna do walca a przechodząca przez wierzchołek ostrokręgu, spotyka tę ostatnią powierzchnię podług dwu tworzących $(s'\theta', s\theta_1)$, $(s'\theta', s\theta_2)$, które są właśnie stycznemi w punkcie podwójnym (§ **742**).

869. Styczne w punktach zwrotu drugiego gatunku na rzucie pionowym przecięcia. — Ponieważ temi punktami zwrotu są punkta b', b'_1 to jest punkta odpowiadające przecięciu się obwodów pozornych na płaszczyznie pionowej rzutów, a styczne w tych punktach nie są rzutami stycznych do krzywej wspólnego przecięcia, okażmy więc, że sposób postępowania Bineta może być do nich zastosowanym.

W tym celu oznaczmy przez M jeden z punktów jednej z powierzchni danych, zaś przez μ jedno z dwu kół przechodzących przez ten punkt (fig. r_6). Przez punkt o t. j. środek tego koła nakreślmy prostę oz prostopadłą do jego płaszczyzny i okażmy, że normalna N do powierzchni uważanej, a przechodząca przez punkt M musi spotykać prostę oz. Rzeczywiście, styczna T do μ w punkcie M będąc

prostopadłą do z i do promienia oM, jest prostopadłą do ich płaszczyzny, a ponieważ N jest także prostopadłą do T, więc proste N i oz leżą na jednej płaszczyźnie, czego należało dowieść.

Ponieważ w razie jak na naszej figurze, punkt ω przecięcia się prostych oz i N leży zawsze na płaszczyźnie pionowej wspólnej obu powierzchniom, więc na tę płaszczyznę symetryi ślad płaszczyzny dwu normalnych, przechodzących przez jakikolwiek punkt krzywej przecięcia, otrzymamy łatwo, a wskutek tego i wykreślenie rzutu pionowego stycznych szukanych znajdziemy bez trudności.

Zastosujmy to wykreślenie do punktu b'_1. Ponieważ tak dla ostrokręgu jakoteż i walca rzut pionowy jednego z kół, nakreślonych przez punkt B, przypada na prostej równoległej do linii ziemnej przechodzącej przez punkt b'_1, i ponieważ nadto rzuty pionowe c', c'_1 środków tych kół, przez które to

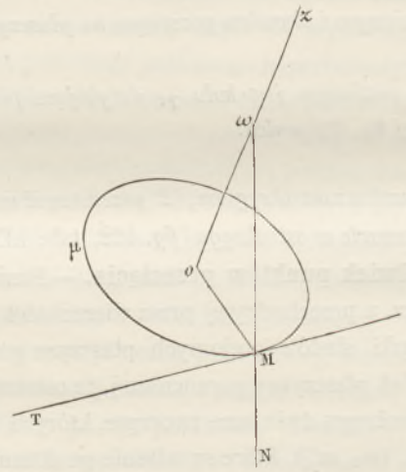

Fig. 7c.

środki należy kreślić pionowe, znajdziemy łatwo, nakreśliwszy więc przez punkt b'_1 proste prostopadłe do linij obwodów pozornych, przechodzących przez ten punkt, te prostopadłe będą rzutami pionowemi normalnych i spotkają w punktach ω', ω'_1 proste pionowe przechodzące przez środki odpowiadające, a prosta $b'_1\tau'_1$ prostopadła do prostej łączącej punkta ω', ω'_1 a przechodząca przez punkt b'_1, będzie styczną szukaną.

W taki sam sposób znaleziono styczną $b'\tau'$, przechodzącą przez drugi punkt zwrotu.

870. Gałęzie nieskończone, asymptoty i rodzaj rzutu pionowego. — Rzut pionowy jest krzywą stożkową (§ 758); zobaczmy, czy ma ona gałęzie nieskończone.

Ponieważ płaszczyzny poziome przecinają powierzchnie podług kół, a rzuty pionowe punktów wspólnego przecięcia leżą u spodków osi pierwiastnych tych kół na płaszczyźnie pionowej rzutów, ponieważ nadto koła na każdej z tych płaszczyzn poziomych mają punkta kołowe w nieskończoności płaszczyzny wspólne, więc linija ziemna jest kierunkiem asymptotycznym, a asymptota odpowiadająca jest śladem pionowym tej płaszczyzny poziomej, dla której oś pierwiastna dwu kół leży w nieskończoności. Jeden z punktów asymptoty znajduje się w punkcie f' przecięcia się rzutów pionowych $o's'$, $o'_1l'_1$ średnic sprzężonych do przecięć poziomych powierzchni, a prosta $f'k'$ równoległa do linii ziemnej, a przechodząca przez ten punkt, wyznacza właśnie tę asymptotę.

Drugą asymptotę znajdziemy, zważając, że kierunek jej jest danym przez ślad pionowy płaszczyzny prostopadłej do płaszczyzny pionowej rzutów odcinającej na powierzchniach przecięcia homotetyczne.

Dla wyznaczenia tej płaszczyzny przenieśmy ostrokrąg homotetycznie tak, żeby przechodził przez ślad poziomy walca; w tem nowem położeniu obwód pozorny w rzucie pionowym tego ostrokręgu jest przedstawionym przez prostę $b's'$ i przez prostę przechodzącą przez punkt θ' a równoległą do $s'h'$, rzut zaś pionowy jego wierzchołka leży na przecięciu się σ' tych dwu prostych. Wiedząc nadto (§ **751**), że dwie powierzchnie mające podstawę wspólną przecinają się podług drugiej krzywej płaskiej, której rzutem pionowym jest $s'p'$, więc płaszczyzna prostopadła do płaszczyzny pionowej rzutów i równoległa do $s'p'$ jest właśnie płaszczyzną szukaną, a kierunkiem drugiej asymptoty jest prosta $s'p'$.

Jeżeli obecnie połączymy punkt σ' ze środkiem q' prostej $s'p'$, i nakreślimy przez punkt s' prostę równoległą do $\sigma'q'$, to otrzymamy w ostrokręgu danym rzut pionowy $s'q'_1$ miejsca geometrycznego środków przecięć, wyznaczających płaszczyzny prostopadłe do płaszczyzny pionowej rzutów, a równoległe do prostej $s'p'$. Obierzmy wreszcie punkt u' przecięcia się prostych $o'_1l'_1, s'q'_1$ i nakreślmy przezeń prostę $u'v'$ równoległą do $s'p'$, to ponieważ płaszczyzna pionowa przechodząca przez $u'v'$ wyznacza na powierzchniach danych przecięcia homotetyczne i współśrodkowe, więc prosta $u'v'$ jest asymptotą szukaną.

Rzutem pionowym krzywej wspólnej obu powierzchniom jest hyperbola, której części przysposobione zostały wykreślone zasadzając się na własności odcinkowej.

871. Zadanie XXV. — *Nakreślić rzuty wspólnego przecięcia się powierzchni pierścieniowej z ostrokręgiem obrotowym w następujących warunkach:*

1° *Oś powierzchni pierścieniowej a, z jest pionową i oddaloną od płaszczyzny pionowej rzutów o* $0^m,130$, *zaś promień koła południkowego stycznego do osi powierzchni pierścieniowej i do płaszczyzny poziomej rzutów równa się* $0^m,055$.

2° *Ostrokrąg dotyka płaszczyzny poziomej rzutów wzdłuż tworzącej* $s\omega$ *równoległej do osi rzutów i spotykającej oś powierzchni pierścieniowej, wierzchołek jego s leży w odległości* $0^m,055$ *od osi powierzchni pierścieniowej, a wreszcie kąt jego w wierzchołku jest równym* 45 *stopniom.*

3° *Rysunek winien przedstawić ostrokrąg uważany za pełny i istniejący sam, odrzucając część jego zawartą w powierzchni pierścieniowej* $\left(\text{skala przyjęta } \frac{3}{5}\right)$ (*fig.* 423, tab. LIX).

872. Obwody pozorne powierzchni. — Obwody pozorne powierzchni pierścieniowej znajdziemy sposobem zwyczajnym, co się zaś tyczy obwodu pozornego pionowego ostrokręgu, to ten ostatni obejmuje liniję ziemną i prostę $s'j'$ przechodzącą przez punkt dotknięcia się kół tworzących z osią powierzchni pierścieniowej, rzut zaś pionowy osi ostrokręgu będzie wyznaczonym przez prostę $s'z'_1$ dzielącą kąt $j's'h'$ na dwie równe części.

Dla wykreślenia obwodu pozornego poziomego ostrokręgu, należy przedewszystkiem nakreślić obwody pozorne ε', ε kuli wpisanej w ostrokrąg, której środek leży w punkcie ω, ω' przecięcia się osi, i następnie nakreślić przez punkt s do koła ε dwie styczne $s\tau, s\tau_1$, a te ostatnie będą linijami szukanemi.

Rzut pionowy $s'\tau'$ tych prostych znajdziemy, łącząc punkt s' z punktem l' przecięcia się rzutów pionowych $k'k'_1$, $k'_2k'_3$ obwodu pozornego poziomego kuli z krzywą, wzdłuż której kula dotyka ostrokręgu.

873. Wyznaczenie jakiegokolwiek punktu przecięcia. — Ponieważ dwie powierzchnie uważane są powierzchniami obrotowemi, których osie przecinają się w punkcie ω, ω', przetnijmy więc je kulą, mającą w tym punkcie swój środek.

Obwód pozorny γ' pionowy tej kuli spotka ostrokrąg podług dwu prostych, których rzutami pionowemi są proste $a'b'$, $a'_1b'_1$, zaś powierzchnię pierścieniową podług prostych, których rzutami

pionowemi są $c'd', e'f'_1$; wzajemne przecięcie się tych prostych, wyznaczy cztery punkta linii wspólnej, których rzutami pionowemi są m'_1, m'_2, m'_3, m'_4. Szukając w rzucie poziomym punktów odpowiednich punktowi m'_1, to ponieważ punktowi f' odpowiada f, a rzutem poziomym równoleżnika, mającego $e'f'$ za rzut pionowy, jest koło przechodzące przez punkt f, którego środek leży w punkcie ω, punkta więc m, m_1 przecięcia się tego koła z liniją rzutów, przechodzącą przez punkt m'_1, są właśnie punktami szukanemi.

874. Punkta przysposobione rzutu pionowego. — Trzy punkta m'_2, m'_3, m'_4 poprzedzającego wykreślenia znalezione na rzucie pionowym, jako leżące zewnątrz tak ostrokręgu jako też powierzchni pierścieniowej, są punktami przysposobionemi jednej z krzywych szukanych.

875. Styczna do krzywej przecięcia. — Szukajmy stycznej w punkcie m_1, m'_1; otoż ta styczna jest prostopadłą do płaszczyzny normalnych przechodzących przez ten punkt, a że rzutami jednej z nich są $(m'_1\omega'_1, m_1\omega)$, druga zaś przecina oś w punkcie σ', σ, więc prosta $\sigma'\omega'_1$ jest rzutem pionowym linii obrazu płaszczyzny tych dwu normalnych, a σg jest rzutem poziomym poziomej tejże płaszczyzny, wskutek czego rzuty stycznych są prostemi m'_1t', m_1t prostopadłemi do $\sigma'\omega', \sigma g$, przechodzącemi odpowiednio przez punkta m'_1, m_1.

876. Punkta leżące na obwodach pozornych ostrokręgu. — Wiadomem jest już naprzód, że punktami szukanemi na płaszczyznie pionowej rzutów są punkta s', h', i', j', a na płaszczyznie poziomej rzutów punkta obwodu pozornego poziomego ostrokręgu zostały tylko sprawdzone; w tym zaś celu, nakreśliwszy przedewszystkiem rzut pionowy krzywej wspólnej, znaleźliśmy punkt λ przecięcia się jej z $s'\tau'$ i przezeń nakreśliliśmy liniję rzutów, która musi przejść przez punkta λ, λ_1, i w których obwód pozorny poziomy ostrokręgu dotyka rzutu poziomego krzywej przecięcia.

877. Punkta leżące na obwodach pozornych powierzchni pierścieniowej. — Punkta obwodu pozornego pionowego zostały już znalezione, a punkta δ, δ_1 obwodu pozornego poziomego otrzymamy sposobem ogólnym, używając kuli, której obwodem pozornym pionowym jest γ'_1.

878. Punkta podwójne w przestrzeni. — Ponieważ płaszczyzna styczna do ostrokręgu w punkcie h, h' dotyka powierzchni pierścieniowej, więc ten punkt jest punktem podwójnym krzywej w przestrzeni.

879. Punkt potrójny w rzucie poziomym. — Ponieważ punkt podwójny h, h' i punkt $i'h$ mają rzut poziomy h wspólny, więc punkt h jest punktem potrójnym rzutu poziomego.

880. Kule graniczne. Punkta graniczne. — Kule te, których obwodami pozornemi w rzucie pionowym są γ'_2, ϵ', ponieważ dotykają ostrokręgu i powierzchni pierścieniowej odpowiednio podług kół przedstawionych w rzucie pionowym przez $w'w'_1, k'_2k'_3$, a przecinają też powierzchnie podług innych kół przedstawionych w rzucie pionowym przez $r'r'_1, r_2r_3, u'u'_1$, wyznaczają więc one rzuty pionowe ρ', ρ'_1, n', p' punktów granicznych, na zasadzie zaś własności ogólnej powierzchni granicznych wyznaczają także odpowiednie styczne $r'r'_1, r_2r_3, u'u'_1, u_2u_3$.

Prostej $u'u'_1$ i punktowi u' odpowiadają w rzucie poziomym: koło opisane na uu_1 jako średnicy i punkta u, u_1; w tych to punktach, na zasadzie powyżej przytoczonej własności, krzywa będzie styczną do koła unu'_1n_1, czyli mówiąc inaczej, punkta u, u_1 będą punktami najbliższemi osi powierzchni pierścieniowej, w rzucie poziomym.

Punkta najwyższe i punkta najniższe. — Z powyższego wynika, że temi punktami są: (u', u), (u', u_1), (s', s), (h', h), (i', h), zaś punkta i'_1, p' są punktem najwyższym i punktem najniższym łuku przysposobionego w rzucie pionowym.

881. Punkt zwrotu. — Na zasadzie paragrafu **741** widzimy odrazu, że wierzchołek ostrokręgu s, s' jest punktem zwrotu, i że styczna odpowiadająca zchodzi się z jego tworzącą $sh, s'h'$.

882. Punkt odosobniony. — Widocznem jest, że punkt ω, j jest punktem odosobnionym krzywej przecięcia.

883. Przedstawienie bryły. — Figura jest dostateczną do poznania kształtu bryły przedstawionej, dodamy tylko, że na rzucie pionowym, łuk przysposobiony krzywej przecięcia został przedstawiony linią przerywaną (§ 21).

884. Zadanie XXVI. — *Nakreśliwszy przez punkt dany* (ω', z), *oddalony o* 100 *milimetrów od każdej z płaszczyzn rzutów, prostę* (z'_1, z_1) *równoległą do osi rzutów i prostę* (z, z'), *pionową, z których pierwsza przedstawia oś powierzchni pierścieniowej, mającej koło południkowe styczne do tej osi w punkcie* (ω', z) *i o promieniu równym* 45 *milimetrom, druga zaś przedstawia oś drugiej powierzchni pierścieniowej współśrodkowej z pierwszą, a mającej koło południkowe promienia równego promieniowi koła szyjnego, to jest* 30 *milimetrom, wyznaczyć rzuty wspólnego przecięcia tych powierzchni i przedstawić rysunkiem bryłę utworzoną przez obie powierzchnie pierścieniowe (fig.* 424, tab. LVII).

Jeżeli oznaczymy przez c', c'_1 rzuty pionowe środków kół południkowych obrazu dwu powierzchni, to znajdziemy, że

$$c'c'_1 = \sqrt{45^2 + 60^2} = 75 = 30 + 45,$$

czyli, że te dwa koła są styczne, gdyż odległość ich środków jest równa summie ich promieni.

885. Wyznaczenie jakichkolwiek punktów linii wspólnej. — Przeciąwszy obie powierzchnie pierścieniowe kulą, mającą środek w punkcie ω', z i oznaczywszy jej obwód pozorny pionowy przez γ', kula ta wyznaczy na powierzchniach pierścieniowych cztery koła, których rzutami pionowemi są $\mu'\mu'_1$, $\mu'_2\mu'_3$, $\mu'_4\mu'_5$, $\mu'_6\mu'_7$, a z których dwa są poziome i mają za rzut poziomy wspólny koło opisane na $\mu\mu_1$ jako średnicy. Punkta przecięcia się tych kół mają za rzuty punkta : m'_1, m'_2, m'_3, m'_4, m_1, m_2, m_3, m_4, te ostatnie zaś wyznaczą punkta krzywej przecięcia powierzchni pierścieniowych.

886. Kule graniczne. — Ponieważ obwody pozorne tych kul na płaszczyźnie pionowej rzutów są kołami γ'_1, γ'_2, a te kule spotykają powierzchnie pierścieniowe podług krzywych mających za rzuty pionowe $d'f'$, $a'b'$, $k'k'_1$, $l'l'_1$, $n'n'_1$, więc znajdziemy ztąd rzuty pionowe ω', g', h' punktów szukanych, a których rzutami poziomemi są punkta ω_1, ω_2, g_1, g_2, h_1, h_2. Wskutek własności powierzchni granicznych, styczne w punktach granicznych (g', g_1), (g', g_2), (h', h_1), (h', h_2) są pionowemi.

887. Punkta zwrotu w rzucie poziomym. — Ponieważ styczne w punktach (g', g_1), (g', g_2), (h', h_1), (h', h_2) są pionowemi, wnosimy więc ztąd, że punkta g_1, g_2, h_1, h_2 są punktami zwrotu w rzucie poziomym, a nadto wskutek symetryi figury, że dwie gałęzie zwrotu przykrywają się wzajemnie.

888. Punkta podwójne. — Ponieważ w punktach (ω', ω_1), (ω', ω_2) płaszczyzny styczne do dwu powierzchni pierścieniowych są wspólne, więc te punkta są punktami podwójnemi przecięcia, a ponieważ nadto dwie powierzchnie pierścieniowe dotykają się w czterech punktach (δ, δ'), (δ, δ'_1), (δ_2, δ'_2), (δ_2, δ'_3), więc te punkta są także punktami podwójnemi krzywej wspólnego przecięcia.

889. Punkta na obwodach pozornych. — Niektóre z tych punktów zostały już znalezione, podamy tu więc sposób znalezienia innych.

Używszy ku temu kul, mających za obwody pozorne pionowe γ'_3, γ'_4, to pierwsza z nich przechodząc przez dwa równoleżniki, należące do obwodu pozornego powierzchni pierścieniowej, której osią jest z'_1, z_1, przetnie obie powierzchnie pierścieniowe podług kół przedstawionych w rzucie przez $p'_1p'_2$, $p'_3p'_4$, $u'_1u'_2$, $u'_3u'_4$ i wyznaczy cztery punkta q'_1, q'_2, q'_3, q'_4 obwodu pozornego pionowego.

Podobne wykreślenie służy także dla drugiej kuli.

890. Styczna w jakimkolwiek punkcie (m'_1, m_1). — Stosując tu sposób Bineta, ponieważ normalne w różnych punktach równoleżnika $u'u'_1$, $\mu\mu_1$ przechodzą przez punkt (r', z) przecięcia się

prostych $(\mu'c', \mu z)$, (z', z), czyli, ponieważ jedną z normalnych szukanych będzie $(m'_1r'_1, m_1z)$, a druga spotka z'_1, z_1 w punkcie s', s, płaszczyzna zaś tych normalnych spotka płaszczyznę osi podług prostej zs, $r's'$, zatem rzutem pionowym stycznej szukanej jest prosta prostopadła t' do prostej $s'r'$ a przechodząca przez punkt m'_1. Odpowiadający rzut poziomy tej stycznej możemy otrzymać, przecinając przedewszystkiem płaszczyznę dwu normalnych płaszczyzną poziomą leżącą na tej samej wysokości co punkt m_1, m'_1 i kreśląc wreszcie przez punkt m_1 prostę prostopadłą do rzutu poziomego prostej wspólnego przecięcia tych płaszczyzn, to jest do prostej m_1u.

891. Zadanie XXVII. — *Znaleźć rzuty krzywej wspólnego przecięcia się hyperboloidy obrotowej z ostrokręgiem w następujących warunkach :*

1° *Oś z, z' hyperboloidy jest pionową, oddaloną od płaszczyzny pionowej rzutów o* $0^m,100$ *i leży w środku rysunku, koło szyjne c, c' leży w odległości* $0^m,080$ *nad płaszczyzną poziomą rzutów i ma promień równy* $0^m,030$, *a wreszcie tworzące prostolinijne powierzchni tworzą z poziomem kąt równy* 45 *stopniom;*

2° *Wierzchołek ostrokręgu leży na płaszczyźnie profilu przechodzącej przez oś z, z' w odległości* $0^m,050$ *przed tą osią, zaś* $0^m,040$ *nad kołem szyjnem, a ślad poziomy ostrokręgu jest kołem* γ *opisanem z punktu z, jako środka, promieniem równym* $0^m,070$; *wreszcie*

3° *Nakreślić na figurze hyperboloidę, uważaną za pełną i ograniczoną z jednej strony płaszczyzną poziomą, mającą za ślad Q' o wzniesieniu* $0^m,190$, *a z drugiej strony płaszczyzną poziomą rzutów, odrzucając część jej zawartą w ostrokręgu* (*fig.* 425, tab. LX).

Za pomocą powyższych danych przedewszystkiem nakreśliwszy rzuty (g', g), (g'_1, g) dwu tworzących głównych hyperboloidy, ślad poziomy γ_1 tej powierzchni i obwód pozorny pionowy ostrokręgu, łatwo przekonamy się, że wierzchołek ostrokręgu leży na hyperboloidzie, a ponieważ przezeń przechodzą dwie tworzące prostolinijne hyperboloidy, zaś płaszczyzny obejmujące jednę z tych prostych przecinają tak ostrokrąg jakoteż hyperboloidę podług linij prostych, możemy więc przyjąć je za płaszczyzny pomocnicze.

Również łatwo otrzymalibyśmy punkta krzywej przecięcia, przecinając obie powierzchnie płaszczyznami pomocniczemi poziomemi.

Pierwszy z tych sposobów zastosujemy do wyznaczenia jakichkolwiek punktów krzywej przecięcia, a drugi do znalezienia punktów leżących na kole szyjnem hyperboloidy i na płaszczyźnie poziomej, której śladem jest Q'.

892. Wyznaczenie jakichkolwiek punktów krzywej wspólnego przecięcia. — Styczna do krzywej c przechodząca przez punkt s wyznacza punkt θ, w którym ślady poziome płaszczyzn siecznych pomocniczych zchodzą się z sobą. Jeżeli P jest jednym z tych śladów poziomych, to płaszczyzna odpowiadająca przetnie hyperboloidę podług tworzących, których ślady poziome idą przez punkta θ, h_3 przecięcia się P ze śladem poziomym hyperboloidy, a rzuty ich poziome są stycznemi θs, h_3g_2 do krzywej c, ostrokrąg zaś podług tworzących, których ślady poziome h_1, h_2 leżą na przecięciu się krzywej γ z P, a ich rzuty poziome są h_1s, h_2s. Punkta, w których te proste spotykają się z sobą, są punktami należącemi do krzywej wspólnego przecięcia się powierzchni danych.

Punktowi h_2 odpowiada w rzucie pionowym punkt h'_2, a prostej h_2s prosta h'_2s', która spotyka liniję rzutów przechodzącą przez punkt m_2 w punkcie m'_2, to jest w punkcie będącym rzutem pionowym punktu krzywej przecięcia m_2. W sposób podobny do podanego znajdziemy także rzut pionowy, odpowiadający punktowi m_1.

893. Punkta na obwodach pozornych. — Połączywszy punkt o ze śladami poziomemi τ_1, τ

tworzących obwodu pozornego pionowego ostrokręgu, prostemi P_1 i P_2, i stosując sposób ogólny do płaszczyzn mających te proste za ślady poziome, znajdziemy punkta szukane (n_1, n'_1), (n_2, n'_2).

Żeby znaleźć punkta leżące na kole szyjnem c, c', uważmy, że znamię punktu c, c' jest równe dwu trzecim znamienia punktu s, s', zkąd wypada, że rzut poziomy przecięcia ostrokręgu płaszczyzną koła szyjnego jest kołem, którego środek ω leży w dwu trzecich prostej sz licząc od punktu s, promień zaś jest równy dwu trzecim promienia podstawy ostrokręgu; nakreśliwszy więc to koło i znalazłszy punkta u_1, u_2, w których ono przecina c, otrzymamy punkta szukane, których rzuty pionowe będą w u'_1, u'_2 na rzucie pionowym c' koła szyjnego.

894. Styczna w jakimkolwiek punkcie. — Ponieważ w punkcie obranym (m_1, m'_1) płaszczyzna styczna do ostrokręgu ma za ślad poziomy styczną R do podstawy γ ostrokręgu, a przechodzącą przez punkt h_2, w tymże zaś punkcie ślad płaszczyzny stycznej do hyperboloidy jest prostą h_3h_4, przecięcie się więc tych prostych τ, τ' wyznaczy drugi punkt stycznej szukanej, a proste $\tau m_2, \tau' m'_2$ oba jej rzuty.

895. Punkt podwójny. — Punkt s, s' jest punktem podwójnym wspólnego przecięcia (§ **741**) a styczne w tym punkcie, to jest $(\theta_1 s, \theta'_1 s')$, $(\theta_2 s, \theta'_2 s')$ są linijami, podług których płaszczyzna styczna do hyperboloidy w punkcie s, s' spotyka ostrokrąg.

896. Gałęzie nieskończone. — Ponieważ punkta w nieskończoności krzywej szukanej leżą na tworzących ostrokręgu, czyniących kąt 45 stopni z płaszczyzną poziomą rzutów, zaś r, to jest znamię punktu s, s' jest równe $0^m,12$, tudzież części tworzących ostrokręgu, zawarte pomiędzy wierzchołkiem i ich śladami poziomemi mają największą długość równą st, to jest także $0^m,12$, więc wynika ztąd, że tworząca, której rzutem poziomym jest st, jest równoległą do dwu tworzących hyperboloidy, że inne tworzące ostrokręgu tworzą z płaszczyzną poziomą rzutów kąty większe od 45 stopni, czyli, że $st, s't'$ jest jedynym kierunkiem asymptotycznym wspólnego przecięcia.

Moglibyśmy się o tem przekonać inaczej, a mianowicie przenosząc ostrokrąg asymptotyczny hyperboloidy równolegle do swego pierwotnego położenia tak, żeby jego wierzchołek przypadł w punkcie s, s', w tem nowem położeniu bowiem ostrokrąg asymptotyczny będzie rzeczywiście styczny do ostrokręgu danego wzdłuż $st, s't'$.

Ponieważ płaszczyzny styczne do ostrokręgu i do hyperboloidy, a przechodzące przez punkt w nieskończoności prostej $st, s't'$ są koniecznie równoległe, więc asymptota do krzywej wspólnego przecięcia jest odrzuconą do nieskończoności w kierunku prostej $st, s't'$.

897. Punkta płaszczyzny poziomej ograniczającej górną część hyperboloidy. — Dla znalezienia takowych, przyjąwszy za płaszczyznę sieczną pomocniczą płaszczyznę poziomą, której śladem jest Q', ta przetnie hyperboloidę podług równoleżnika, mającego środek swego rzutu poziomego w punkcie z, zaś punkt q za jeden z punktów przejścia, poczem rzut ten jest już łatwym do wykreślenia.

Ta płaszczyzna pomocnicza przecina ostrokrąg podług okręgu koła mającego $b'c'$ za rzut pionowy, zaś za rzut poziomy okrąg koła, promienia równego połowie $b'c'$, a przechodzący przez rzut poziomy a punktu przecięcia się prostej $st, s't'$ z płaszczyzną pomocniczą. Punkt a otrzymuje się, przenosząc znamię $t'o'$ do ta. Łatwo teraz nakreślimy rzut poziomy samego okrągu koła, gdyż środek jego w skutek symetryi figury musi leżeć na prostej az, a punkta graniczne szukane będą wyznaczone z przecięcia się właśnie znalezionych okręgów kół w punktach (d, d'), (f, f').

898. Zadanie XXVIII. — *Mając daną kulę styczną do obu płaszczyzn rzutów, i w płaszczyźnie koła obrazu tej kuli, a w odległości od środka tego koła równej połowie jego promienia, nakreśliwszy pionowę ab, a'b', nadto na części tej pionowej, zawartej pomiędzy górnym punktem przecięcia się jej z kulą a płaszczyzną poziomą rzutów, nakreśliwszy trójkąt równoboczny, znaleźć bryłę, utworzoną przez część pełną kuli,*

leżącą zewnątrz podwójnego ostrokręgu, utworzonego obrotem trójkąta równobocznego nackoło jego boku pionowego (*fig.* 426, tab. LX).

Ustawmy odpowiednio kulę i jej środek c, c', koło obrazu dd_1, $d'd'_1$, i pionowę ab, $a'b'$, na której należy nakreślić trójkąt tworzący podwójnego ostrokręgu. Nakreśliwszy obecnie na $a'b'$ dwa trójkąty równoboczne $a'b'f'$, $a'b'g'$, te utworzą obwód pozorny pionowy podwójnego ostrokręgu. Zauważymy natychmiast, że wskutek szczególnego położenia pionowej $a'b'$, linija $b'f'$ jest styczną do koła $d'b'd'_1$, a zatem prosta $b'f'$, bf dotyka zarazem i kuli i krzywej przecięcia.

899. Wyznaczenie jakiegokolwiek punktu krzywej wspólnej. — Przeciąwszy obie powierzchnie płaszczyzną poziomą, której śladem jest P′, ta płaszczyzna pomocnicza wyznaczy na jednym ostrokręgu przecięcie kołowe, którego punktem przejścia jest punkt k, k', a rzutem poziomym środka punkt a, poczem rzut poziomy tegoż koła będzie łatwym do nakreślenia. Taż płaszczyzna pomocnicza przetnie kulę podług innego okręgu koła, którego rzut poziomy ma za środek punkt c, a punkt l, l' za punkt przejścia. Wykreśliwszy te koła na rzucie poziomym, znajdziemy, że one przecinają się z sobą w punktach m_1, m_2, które będą rzutami poziomemi punktów szukanej krzywej przecięcia, odpowiednie zaś punkta m'_1, m'_2 w rzucie pionowym znajdziemy na przecięciu się linij rzutów, przechodzących przez te punkta z P′.

900. Styczna do linii wspólnej w punkcie m_2, m'_2. — Ponieważ powierzchnie są obrotowe, należy więc użyć metody normalnych, a te ostatnie, przechodząc przez m_2, m'_2 do kuli i do ostrokręgu, przechodzą odpowiednio przez punkta (c, c') i (a, ω'), płaszczyzna zaś ich przecina płaszczyznę obrazu idącą przez punkt c, c' podług prostych cq, $c'q'$, wskutek czego rzut pionowy styczny jest prostą m'_1t' prostopadłą do $c'q'$. Drugi jej rzut znajdziemy, zważając, że płaszczyzna pozioma, przechodząca przez punkt c, c' spotyka płaszczyznę normalnych podług prostej $c'r'$, cr, i kreśląc przez punkt m_2 prostę m_2t prostopadłą do cr.

901. Punkt podwójny i styczna w nim. — Na mocy twierdzenia dowiedzionego w paragrafie 742 wnosimy, że punkt b, b' jest punktem podwójnym krzywej szukanej, prosta więc $b'k'$, bk wyznacza jedną styczną w tym punkcie. Drugą styczną znajdziemy, kreśląc drugą liniję przecięcia się ostrokręgu z płaszczyzną styczną do kuli przechodzącej przez punkt b, b', płaszczyzna ta bowiem zawiera prostę bk_1, $b'k'_1$ i przecina płaszczyznę poziomą, której śladem jest P′, podług prostej, mającej rzut poziomy na prostopadłej k_1k_2 do prostej bc, a przechodzącej przez punkt k_1; punkt k_2, k'_1 przecięcia się tej prostopadłej z okręgiem koła kk_1, $k'k'_1$ jest jednym punktem stycznej szukanej, a rzutami jej są k_2b, k'_2b'.

902. Punkta obwodu pozornego pionowego podwójnego ostrokręgu. — Punkta te otrzymamy, przyjmując za płaszczyznę pomocniczą płaszczyznę obrazu, której śladem jest af, gdyż ta przecina kulę podług okręgu koła dd_1, $d'd'_1$, a ostrokrąg podwójny podług linij obwodu pozornego dwu ostrokręgów, przecięcie się zaś tak znalezionych przecięć wyznaczy punkta (b, b'), (d, d'), (i, i'), (h, h'), w których rzut pionowy krzywej szukanej winien dotykać linij obwodu pozornego podwójnego ostrokręgu w rzucie pionowym.

903. Punkta podstawy wspólnej obu ostrokręgów. — Punkta (n_1, n'_1), (n_2, n'_2), które są rzutami punktów szukanych, zostały znalezione sposobem ogólnym (§ 899).

904. Punkt najwyższy i punkt najniższy. — Ponieważ te punkta leżą na płaszczyznie pionowej, której śladem poziomym jest ca (§ 417), zatem dla znalezienia ich przyjmijmy za płaszczyznę pomocniczą płaszczyznę pionową, i obrotem jej naokoło $a'b'$, ab sprowadźmy ją do położenia równoległego do płaszczyzny pionowej rzutów; przecięcie się tej płaszczyzny z podwójnym ostrokręgiem przypadnie na

obwodzie pozornym pionowym tego ostrokręgu, przecięcie się zaś jej z kulą, po dokonaniu obrotu, przypada na kole, którego rzut pionowy γ' przechodzi przez punkt b', promień jest równy promieniowi kuli a środek znajduje się na poziomej przechodzącej przez punkt c'.

Punkta przecięcia się p'_1, q'_1 tego koła z obwodem pozornym w rzucie pionowym podwójnego ostrokręgu, wyznaczą rzuty pionowe punktów szukanych po dokonaniu obrotu płaszczyzny symetryi, a sprowadziwszy te punkta do właściwego miejsca, znajdziemy punkta (p, p'), (q, q').

Punkt p, p' należy do łuku krzywej przecięcia leżącego zewnątrz podwójnego ostrokręgu, a łuk ten jest w zupełności przysposobiony i został nakreślony na naszej figurze li tylko dla łatwiejszego poznania kształtów samej krzywej.

905. Zadanie XXIX. — *Mając hyperboloidę obrotową wyznaczoną przez jej oś pionową z, z' i przez jednę z jej tworzących głównych g, g', nakreślić rzuty jednej z części odciętych w bryle, zawartej pomiędzy hyperboloidą a jej ostrokręgiem asymptotycznym, przez powierzchnię utworzoną przez normalne kreślone do hyperboloidy danej z rozmaitych punktów g, g', przyczem bryła ta ma być ograniczoną płaszczyzną poziomą rzutów i płaszczyzną poziomą mającą za ślad* Q' (*fig.* 427, tab. LXI).

Dowiedźmy przedewszystkiem następującego twierdzenia :

Powierzchnia utworzona przez normalne, wychodzące z rozmaitych punktów tworzącej prostolinijnej hyperboloidy jednopowłokowej, jest paraboloidą hyperboliczną.

Przypuśćmy przedewszystkiem, że płaszczyzny styczne do hyperboloidy, a przechodzące przez rozmaite punkta tworzącej g, g', zostały obrócone o 90° naokoło tej tworzącej; następnie wyznaczmy przecięcią tych płaszczyzn z płaszczyznami przechodzącemi przez też same punkta, lecz prostopadłemi do g, g', to w ten sposob otrzymamy przecięcia się dwu ksiąg płaszczyzn, z których jedna będzie miała krawędź w nieskończoności, a przytem takich, że każdej płaszczyznie jednej z nich odpowie jedna płaszczyzna drugiej i odwrotnie.

Takie dwie księgi są więc jednokreślnemi, a powierzchnia utworzona z przecięcia się odpowiednich płaszczyzn będzie powierzchnią drugiego stopnia, będzie ona prostokreślną, a nadto, jako utworzona przez proste równoległe do jednej płaszczyzny, będzie ona paraboloidą hyperboliczną. Jedną płaszczyzną kierowniczą tej powierzchni jest płaszczyzna prostopadła do θg, $\theta' g'$, a ponieważ nadto wszystkie normalne opierają się na g, g' i na z, z', więc drugą płaszczyzną kierowniczą jest płaszczyzna pionowa rzutów.

906. Wyznaczenie jakiegokolwiek punktu linij wspólnego przecięcia się powierzchni danych. — Wyznaczmy przedewszystkiem rzuty jednej tworzącej prostolinijnej paraboloidy. Jeżeli a, a' będzie jej spodkiem na g, g', rzut pionowy tej prostej jest prostą $a'b'$ prostopadłą do prostej g' a przechodzacą przez punkt a', rzutem zaś jej poziomym odpowiadającym jest prosta łącząca punkt a ze spodkiem osi z.

Znając to, zostaje tylko do znalezienia przecięcie prostej $a'b', az$ z hyperboloidą i z jej ostrokręgiem asymptotycznym. W tym celu, nakreślmy przez proste (g, g'), $(a'b', az)$ płaszczyznę pomocniczą, której ślad poziomy przechodzi przez ślady tegoż nazwizka θ, θ_1 prostej g, g', i przez ślady prostej równoległej do prostej g, g', a przechodzącej przez punkt b', z. Ślad $\theta\theta_1$ tej płaszczyzny pomocniczej spotyka ślad poziomy hyperboloidy w punkcie θ_2, który jest zarazem śladem poziomym drugiej tworzącej wyznaczonej na hyperboloidzie przez płaszczyznę sieczną pomocniczą, ta zaś ostatnia tworząca, mająca rzut poziomy na stycznej $\theta_2 c$ do rzutu poziomego koła szyjnego, wyznacza w punkcie m, m' przecięcia się jej z tworzącą $az, a'b'$ punkt krzywej wspólnej hyperboloidzie i paraboloidzie.

Dla wyznaczenia przecięcia się prostej $az, a'b'$ z ostrokręgiem, przyjmijmy za płaszczyznę sieczną

pomocniczą płaszczyznę pionową rzucającą tę prostę, to ponieważ płaszczyzna ta przecina ostrokrąg podług prostych $(zh_1, s'h'_1), (zh_2, s'h'_2)$, które są jego tworzącemi, więc w punktach przecięcia się tych tworzących z $a'b'$, az, otrzymamy punkta szukane $(m_1, m'_1), (m_2, m'_2)$.

907. Styczne do krzywych przecięcia. — Zajmiemy się tylko wyznaczeniem stycznej do krzywej wspólnego przecięcia się ostrokręgu z paraboloidą w punkcie m_2, m'_1. Ponieważ płaszczyzna styczna do ostrokręgu w tym punkcie ma za ślad poziomy styczną R do podstawy ostrokręgu, a przechodzącą przez punkt h_2, ponieważ nadto płaszczyzna styczna do paraboloidy w punkcie m_2, m'_2 jest wyznaczoną przez dwie tworzące prostolinijne przechodzące przez ten punkt, gdyż jedna z nich $a'm'_2, am_2$ ma za ślad poziomy t, a druga jest równoległą do drugiej płaszczyzny kierowniczej i spotyka nadto tworzącę pierwszego układu mającą rzut pionowy w punkcie s', zatem dwa rzuty tej prostej i ślad poziomy znajdują się na m'_2s' to jest na prostej równoległej do osi rzutów przechodzącej przez punkt m_2, i w punkcie t_1, czyli że prosta tt_1 jest śladem poziomym płaszczyzny stycznej do paraboloidy.

Ponieważ tak znaleziony ślad spotyka R w punkcie τ, τ', który jest śladem poziomym stycznej szukanej, łatwo więc teraz znajdziemy jej rzuty, to jest τm_1, $\tau' m'_2$.

908. Punkta na obwodzie pozornym poziomym hyperboloidy. — Tworząca paraboloidy prostopadła do płaszczyzny pionowej wyznacza punkta szukane (s', u), (s', u_1), z których pierwszy należy do tworzącej g, g', a ta ostatnia jest częścią przecięcia się paraboloidy z hyperboloidą.

909. Punkta podwójne. — Wierzchołek ostrokręgu jest widocznie punktem podwójnym przecięcia tej powierzchni z paraboloidą, a styczne w tym punkcie są przecięciem się płaszczyzny stycznej do paraboloidy w tymże punkcie z ostrokręgiem; ponieważ zaś ta płaszczyzna styczna obejmuje dwie tworzące paraboloidy odpowiednio prostopadłe do płaszczyzn rzutów, jest więc ona poprostu płaszczyzną profilu przechodzącą przez punkt z, s', zaś styczne szukane są $(zh_3, s'h'_3)$, $(zh_4, s'h'_4)$.

910. Gałęzie nieskończone. — Asymptoty. — Ponieważ kierownice asymptotyczne otrzymamy, wyznaczając tworzące ostrokręgu asymptotycznego, równoległe do płaszczyzn kierowniczych paraboloidy, zatem, nakreśliwszy przez wierzchołek ostrokręgu płaszczyzny równoległe do dwu płaszczyzn kierowniczych, to jedna z nich będzie prostopadłą do płaszczyzny pionowej rzutów i będzie miała za ślad pionowy prostopadłę P′ do g', przechodzącą przez punkt s', drugą zaś będzie płaszczyzna obrazu, której śladem jest F.

Pierwsza z tych płaszczyzn nie spotyka ostrokręgu asymptotycznego, druga zaś przecina go podług prostych $(zh_5, s'h'_5)$, $(zh_6, s'h'_6)$; jeżeli więc nakreślimy tworzące paraboloidy równoległe do tych prostych, to jedną z nich będzie g, g', druga zaś będzie miała za rzut pionowy $s'h'_6$ i spotka tworzącę am, $a'm'$ w punkcie f, f', a za rzut poziomy prostę $\alpha\alpha_1$, równoległą do osi rzutów, przechodzącej przez punkt f.

Asymptotę, wspólną krzywym wspólnego przecięcia się paraboloidy z hyperboloidą i z jej ostrokręgiem asymptotycznym, znajdziemy z przecięcia się płaszczyzny stycznej do ostrokręgu asymptotycznego wzdłuż tworzącej $s'h'_6, zh_6$, z płaszczyzną styczną do paraboloidy, a przechodzącą przez punkt odrzucony do nieskończoności na $f\alpha$, $f's'$; ponieważ zaś ta ostatnia płaszczyzna jest równoległą do płaszczyzny kierowniczej odpowiadającej (§ 815), jest więc ona płaszczyzną obrazu, której śladem jest $\alpha\alpha_1$, a wskutek tego rzutami asymptoty są $\alpha\alpha_1$, $s'h'_6$.

Widzimy także, że krzywa wspólna ostrokręgu i paraboloidy ma za drugą asymptotę prostę g, g'.

911. Ślad poziomy paraboloidy hyperbolicznej. — Ślad szukany jest hyperbolą (§ 816), gdyż

płaszczyzna pozioma nie jest równoległą do przecięcia się płaszczyzn kierowniczych. Punkt jakikolwiek tej hyperboloidy jest wyznaczony przez ślad poziomy t tworzącej $a'm'$, am paraboloidy.

Szukając kierunków asymptotycznych tej krzywej, znajdujemy, że jednym z nich jest tworząca pozioma s', ab, drugi zaś z nich ma za rzut pionowy prostę równoległą do osi rzutów przechodzącej przez punkt s', która spotyka tworzącę $a'm'$, am w punkcie d', d, a ponieważ drugą płaszczyzną kierowniczą jest płaszczyzna pionowa rzutów, więc rzutem poziomym tego drugiego kierunku jest prosta dd_1 równoległa do osi rzutów.

Asymptoty szukane są śladami poziomemi płaszczyzn stycznych do paraboloidy, przechodzącemi przez punkta w nieskończoności na tworzących (s', ab), $(s'd', dd_1)$.

Te płaszczyzny styczne są równoległe do płaszczyzn kierowniczych odpowiadających, i pierwsza z nich ma za ślad pionowy prostę P' już nakreśloną, a za ślad poziomy prostę P, druga zaś jest równoległą do płaszczyzny pionowej, a wskutek tego śladem jej poziomym jest d, d_1. Wnosimy z tego, że P i dd_1 są szukanemi asymptotami, a znając obecnie asymptoty i jeden z ich punktów, łatwo nakreślimy szukany ślad H.

912. Przecięcie się paraboloidy z płaszczyzną poziomą, której śladem pionowym jest Q'. — Rzut poziomy H_1 tej krzywej wyznacza się w taki sam sposób jak H; proste dd_1, $\delta\delta_1$ są jej asymptotami, a jednym z jej punktów przejścia jest punkt z, albowiem jest on śladem poziomym tworzącej pionowej paraboloidy.

Sprawdzenie. — Celem sprawdzenia dokładności rysunku notujemy, że krzywa H winna przechodzić przez ślady poziome $0, 0_3, 0_4, 0_5, z$, krzywych przecięcia i tworzącej pionowej paraboloidy; nadto krzywa H_1 winna także przechodzić przez punkta i, j, k, l, to jest przez rzuty poziome przecięcia się krzywych przecięcia z płaszczyzną poziomą, ograniczającą część górną przedstawionej bryły.

Figura 428 (tab. LXI) przedstawia wykreślenie, o którem mowa, po odrzuceniu zeń działań pomocniczych. Dla łatwiejszego rozpoznania wykreślenia, części widzialne powierzchni ograniczających przedstawioną bryłę, zostały wycieniowane kreskami mającemi kierunek tworzących prostolinijnych.

913. Zadanie XXX. — Nakreślić :

1° *Rzuty linii wspólnego przecięcia półkuli i ścian sześcianu z hyperboloidą obrotową jednopowłokową ;*

2° *Przedstawić sześcian uważany za pełny, po odjęciu części tej bryły zawartej w półkuli i w hyperboloidzie.*

Wymiary dane są następujące : *Sześcian* $(abed, a'b'd'e')$, *którego bok ma* $0^m,200$ *długości, a spodnia i tylna ściana leżą odpowiednio na dwu płaszczyznach rzutów, obejmuje w zupełności półkulę* (h, h'), *której podstawą jest koło* (h', h'_1) *wpisane w ścianie przedniej sześcianu.*

Hyperboloida ma oś (z, z') *pionową w odległości równej* $0^m,135$ *od płaszczyzny pionowej rzutów i w jednakowej odległości od ścian profilu sześcianu, wzniesienie środka* (o, o') *tej powierzchni jest równe* $0^m,132$, *a promienie jej koła szyjnego* (c, c') *i jej śladu poziomego* (0) *są odpowiednio równe* $0^m,035$ *i* $0^m,100$ (*fig.* 429, tab. LXI; skala przyjęta $\frac{1}{2}$).

Rzuty (g, g') i (g_1, g'_1) tworzących głównych hyperboloidy i jej obwód pozorny pionowy γ', γ'_1 wyznaczą się sposobem zwyczajnym.

914. Wyznaczenie jakiegokolwiek punktu krzywej wspólnej półkuli i hyperboloidzie. — Przyjąwszy za płaszczyznę sieczną pomocniczą płaszczyznę poziomą, której śladem pionowym jest P',

to ona przetnie półkulę podług pół okręgu koła, którego środek przypada w punkcie ω, ω', a punkt f, f' jest punktem przejścia, zaś hyperboloidę podług okręgu koła, którego środkiem jest o, ω', a przechodzącego przez punkt k', k. Punkta m_1, m_2 przecięcia się rzutów poziomych tych linij, wyznaczają dwa punkta rzutu poziomego krzywej szukanej, rzuty pionowe tych punktów przypadają w m'_1, m'_2.

915. Wykreślenie stycznej do linii wspólnego przecięcia się półkuli z hyperboloidą. — Dla znalezienia stycznej w punkcie m_1, m'_1 użyjmy sposobu płaszczyzn normalnych. Wiemy, że normalna do kuli w punkcie m_1, m'_1 jest wyznaczoną przez tenże punkt i przez środek ω, ω'_1 kuli; ponieważ zaś normalna do hyperboloidy w punkcie obranym, spotyka oś tej powierzchni w punkcie, którego rzutem poziomym jest z, zaś pionowy znajduje się w punkcie σ' przecięcia się osi z' z prostą prostopadłą do g'_1 a przechodzącą przez punkt μ', zatem rzutami normalnych są $m'_1\omega'_1$, $m_1\omega$; tudzież $m'_1\sigma'$, $m_1 z$.

Obecnie należy nakreślić przez m'_1, m_1 prostopadłę do płaszczyzny normalnych. W tym celu przetnijmy tę płaszczyznę płaszczyzną ściany przedniej sześcianu, i płaszczyzną poziomą przechodzącą przez punkt σ', a znajdziemy w ten sposób linię obrazu ωi, $\omega'_1 i'$ i poziomę $\sigma' j'$, zj płaszczyzny normalnych, poczem nakreśliwszy przez punkta m_1, m'_1 proste odpowiednio prostopadłe do zj, $\omega'_1 i'$, otrzymamy proste $m_1 t, m'_1 t'$, które są rzutami stycznej szukanej.

916. Punkta obwodów pozornych. — Dla znalezienia punktów (u'_1, u_1, u'_2, u_2) obwodu pozornego poziomego, użyliśmy płaszczyzny poziomej pomocniczej, której śladem jest P'_1.

Dla znalezienia zaś punktów obwodu pozornego pionowego, wypadło nam użyć płaszczyzny pomocniczej obrazu, przechodzącej przez z, z', gdyż ta płaszczyzna, a której śladem poziomym jest F, spotyka hyperboloidę podług hyperboli mającej za rzut pionowy γ', γ'_1, półkulę zaś podług koła, którego rzut tegoż nazwiska ma środek w punkcie ω'_1 i przechodzi przez punkt u, u'. Punkta przecięcia się q'_1, q'_2, q'_3, q'_4 rzutu pionowego tych kół z γ', γ'_1 wyznaczają rzuty pionowe punktów szukanych. Rzuty poziome tych punktów nie zostały podane na figurze.

917. Przecięcie się hyperboloidy ze ścianą przednią sześcianu. — Ponieważ rzut pionowy ε' tej krzywej jest hyperbolą, mającą g, g' za asymptoty i przechodzącą przez punkta τ'_1, τ'_2, łatwo więc możemy ją nakreślić.

918. Zadanie XXXI. — *Nakreślić rzuty wspólnego przecięcia się dwu hyperboloid obrotowych* H, H', *mających jednę tworzącę wspólną pionową* g, g', *a za osie odpowiednio dwie proste obrazu* (z, z'), (z_1, z'_1), *nie leżące na jednej płaszczyznie i nachylone do płaszczyzny poziomej rzutów pod kątem 45 stopni.*

Rysunek winien przedstawić części powierzchni hyperboloid zawarte : 1° pomiędzy dwiema płaszczyznami rzutów; 2° pomiędzy płaszczyzną poziomą mającą za ślad Q' ; i 3° pomiędzy płaszczyzną dotykającą hyperboloidy H_1 *w punkcie koła szyjnego, najwięcej oddalonym od płaszczyzny pionowej rzutów* (*fig.* 430, tab. LXII).

919. Obwody pozorne obu hyperboloid. — Ponieważ najkrótsza odległość dwu prostych (z', z), (g, g') ma za rzuty $\omega', g\omega$, i wyznacza ona długość $g\omega$ promienia koła szyjnego, a nadto pozwala wykreślić wierzchołki rzeczywiste a', a'_1 obwodu pozornego w rzucie pionowym hyperboloidy H, którego asymptotami są g' i prosta pozioma γ' przechodząca przez ω', łatwo więc znajdziemy, że jest nim hyperbola $\varepsilon', \varepsilon'_1$.

Obwód pozorny w rzucie poziomym tejże hyperboloidy sprowadza się do jednego punktu g, którego symetrycznym jest γ_1 względem ω.

I rzeczywiście, ponieważ bowiem powierzchnia ma dwie tworzące pionowe (g, g'), (γ_1, g')

układów różnych i wszystkie tworzące prostolinijne opierają się na jednej z nich lub na drugiej, nadto, szukany obwód pozorny jest miejscem punktów dotknięcia płaszczyzn pionowych przechodzących przez rozmaite tworzące, więc to miejsce sprowadza się do dwu prostych (g, g'), (γ_1, g'), które tworzą właściwy obwód pozorny poziomy, a wskutek tego obwód pozorny w rzucie poziomym sprowadza się do dwu punktów g i γ_1.

Rozumowanie podobne do powyższego doprowadzi do przekonania, że dla hyperboloidy H_1, hyperbola $\varepsilon'_2, \varepsilon'_3$, której wierzchołkami rzeczywistemi są a'_2, a'_3, jest obwodem pozornym w rzucie pionowym, i że obwód pozorny w rzucie poziomym sprowadza się do punktów g i γ_2.

920. Wyznaczenie jakiegokolwiek punktu krzywej przecięcia. — Przez g, g' nakreślmy płaszczyzny pomocnicze, to takowe przetną obie powierzchnie podług tworzących prostolinijnych, które łatwo wykreślimy wiedząc, że one winny opierać się na tworzących tegoż samego układu co g, g', a należących do odpowiednich powierzchni.

Przedewszystkiem należy więc nakreślić na każdej powierzchni dwie tworzące tegoż samego układu co g, g'. Ponieważ one winny odpowiednio opierać się na tworzących pionowych (γ_1, g'), (γ_2, g'), więc jedna z nich dla każdej powierzchni została wyznaczoną, kreśląc przez punkta (γ_1, ω'), (γ_2, ω'_1) proste (g'_3, g_3), (g'_4, g_4) równoległe do linii ziemnej.

Styczna g'_1 do ε', a przechodząca przez a' jest rzutem pionowym drugiej tworzącej, rzut zaś jej poziomy odpowiedni winien przechodzić przez a i przez γ_1 gdyż ta prosta opiera się na pionowej (γ_1, g'), czyli, że prostej g'_1 odpowiada prosta g_1.

W taki sam sposób otrzymamy prostę g_2, g'_2.

Zajmijmy się obecnie wyznaczeniem punktów linii wspólnej hyperboloidom; w tym celu nakreśliwszy przez g ślad poziomy P płaszczyzny siecznej, płaszczyzna ta przetnie g_1, g'_1 w punkcie b_1, b'_1, a prostę g_3, g'_3 w punkcie b_3, b'_3, przecięcie więc płaszczyzny pomocniczej z hyperboloidą H obejmuje nietylko tworzącę g, g', lecz nadto tworzącę b_1b_3, $b'_1b'_3$, a hyperboloida H_1 zostanie przecięta przez tęż płaszczyznę pomocniczą podług dwu prostych (g, g') i $(b_2b_4, b'_2b'_4)$.

Z przecięcia się prostych $b'_1b'_3$ i $b'_2b'_4$ otrzymamy punkt m', który jest rzutem pionowym punktu wspólnego przecięcia, rzut zaś jego poziomy leży na przecięciu się m śladu P z linią rzutów, przechodzącą przez punkt m'.

921. Kreślenie stycznej w punkcie m, m'. — Na płaszczyznie obrazu, której śladem poziomym jest F, znajdźmy ślad płaszczyzn stycznych do obu hyperboloid w punkcie m, m'. Ponieważ dla hyperboloidy H, tworząca $b'_1b'_3$, b_1b_3 leży na płaszczyznie stycznej, tworząca zaś drugiego układu, która służy do wyznaczenia tej płaszczyzny, ma za rzut poziomy $m\gamma_1$ i spotyka tworzącę obrazu γ, γ' hyperboloidy H w punkcie α, α', zkąd znajdziemy jej rzut pionowy $m'\alpha'$ i jej ślad β, β' na płaszczyznie obrazu, której śladem jest F, wreszcie, ponieważ śladem na tęż płaszczyznę obrazu prostej $b'_1b'_3$, b_1b_3 jest b_4, β'_1, a zatem ślad pierwszej płaszczyzny stycznej na płaszczyznę obrazu pomocniczą będzie miał za rzuty $\beta b_4, \beta'\beta'_1$.

Postępując z drugą płaszczyzną styczną jak powyżej, znajdziemy, że b_2b_4, $b'_2b'_4$ jest jedną z jej prostych, zaś punkt b_4, b'_4 jest punktem przejścia drugiego śladu szukanego, dalej że $\gamma_2 m$ jest rzutem poziomym drugiej tworzącej prostolinijnej służącej do wyznaczenia płaszczyzny stycznej, którato tworząca przecina $\gamma_3\gamma'_3$ w punkcie α_1, α'_1, że rzutami jej są α'_1m', α_1m, wreszcie że jej śladem na płaszczyznę obrazu pomocniczą jest ω'_2, γ_2, zkąd wypada, że $\omega'_2b'_4$ jest śladem szukanej płaszczyzny stycznej na tęż płaszczyznę obrazu. W punkcie przecięcia się prostych $(\beta'\beta'_1, \beta b_4)$, $(b'_4\omega'_2, b_4\gamma_2)$ otrzymamy drugi punkt przejścia θ', θ stycznej, a jej rzutami będą θm, $\theta' m'$.

922. Punkta leżące na tworzących prostolinijnych, mających za rzut pionowy g'_2. — Punkta te znajdziemy, przyjmując za płaszczyznę sieczną pomocniczą płaszczyznę prostopadłą do płaszczyzny pionowej, przechodzącej przez g_2, g'_2, gdyż w ten sposób otrzymamy na hyperboloidzie H_1 układ dwu tworzących, których g_2, g'_2 jest częścią, a na hyperboloidzie H okrąg koła, który przecinając się z tworzącemi powyżej znalezionemi, wyznaczy punkta szukane.

Płaszczyzna pomocnicza przecina płaszczyznę profilu $g'g$ podług prostej $(c^4, g\gamma_2)$ prostopadłej do płaszczyzny pionowej; przyjmijmy ją za oś i uczyńmy płaszczyznę sieczną równoległą do płaszczyzny poziomej. Ponieważ punkta mające za rzuty (γ_1, c'), (g, c') należą do koła i nie zmieniają położenia podczas kładu, a środek tego koła ma za rzut pionowy o' i przypada w kładzie na o'_1, o_1, więc możemy znając to, zrobić kład koła. Że zaś kład tworzących przechodzi przez kład d_2 punktu a_2, a'_2 i przez punkta g, γ_2, więc te dwie tworzące w kładzie są d_2g, $d_2\gamma_2$, a tem samem punktami szukanemi w kładzie są π_1, π_2, π_3, i odpowiadają one punktom (p_1, p'_1), (p_2, p'_2), (p_3, p'_3), które mieliśmy znaleźć.

W takiż sam sposób postępować należy z innemi tworzącemi, których rzuty pionowe są styczne w wierzchołkach rzeczywistych gałęzi hyperbol, mających za rzuty pionowe $(\varepsilon', \varepsilon'_1, \varepsilon'_3)$.

923. Gałęzie nieskończone. — Dla gałęzi nieskończonych możemy zastąpić hyperboloidy przez ich ostrokręgi asymptotyczne.

Ponieważ te ostrokręgi mają za obwody pozorne w rzucie pionowym $(\omega' g'_3, \omega' g')$, $(\omega'_1 g'_4, \omega'_1 g')$, więc po przeniesieniu jednego z nich, równolegle do niego samego, do wierzchołka drugiego, dotkną się one z sobą podług tworzących obwodu pozornego pionowego, a zatem, kierunkami asymptotycznemi przecięcia będą jeden $(\dot{\omega}, g')$ pionowy, a drugi $(z\omega, \omega' g'_3)$ równoległy do osi rzutów.

Ponieważ pierwszemu z tych kierunków odpowiadają, dla dwu ostrokręgów, płaszczyzny styczne, które się zchodzą z płaszczyzną profilu $g'\gamma_2$, więc ta płaszczyzna profilu dotyka dwu hyperboloid w nieskończoności, a ztąd przecięcie ma punkt podwójny w nieskończoności, który jest punktem przecięcia się tworzących pionowych (γ_1, g'), (γ_2, g').

Jedną ze stycznych w tym punkcie podwójnym jest tworząca wspólna g, g', drugą jest asymptota szukana, której rzutem pionowym jest g'. Podamy w dalszym ciągu sposób znalezienia jej rzutu poziomego, który się sprowadza do jednego punktu.

Drugiemu kierunkowi asymptotycznemu odpowiadają dwie płaszczyzny styczne poziome, mające za ślady pionowe g'_3, g'_4, a zatem, asymptota w nieskończoności.

Rzutem poziomym tej asymptoty będzie także prosta w nieskończoności, której rzut pionowy jest równoległy do osi rzutów i leży w odległości skończonej.

I rzeczywiście; przetnijmy bowiem dwie hyperboloidy płaszczyzną poziomą, to otrzymamy dwie parabole, przecinające się zawsze w punkcie leżącym na tworzącej g, g', w drugim punkcie m, m' i w dwu punktach w nieskończoności, gdyż ich osie są równoległe.

Krzywa więc, którą się zajmujemy, jest krzywą utworzoną z takich punktów jak punkt m', który, ażeby się znajdował w nieskończoności, trzeba, żeby dwie parabole były równe. Jakoż odnieśmy te krzywe do osi i do stycznej w wierzchołku jednej z nich, a równania ich będą kształtu

$$y^2 = 2px,$$
$$(y+b)^2 = 2p'(x+a).$$

Odjąwszy od siebie te dwa równania odpowiedniemi stronami, otrzymamy

$$2by + b^2 = 2x(p'-p) + 2p'a,$$

którego równanie przedstawia prostę łączącą punkta przecięcia się parabol w odległości skończonej. Żeby zaś ta prosta spotykała parabole w punkcie leżącym w nieskończoności, trzeba i wystarcza, iżby

$$p' = p,$$

to jest, żeby te parabole były równe i skierowane w jedną stronę.

Przeciąwszy dwie hyperboloidy płaszczyzną poziomą, przechodzącą przez środek ω'_3 i przez środek $\omega'\omega'_1$, dowiedźmy, że ta płaszczyzna wyznacza na tych hyperboloidach, lub na ich ostrokręgach asymptotycznych, co na jedno wychodzi, parabole równe.

W tym celu uważmy, że według twierdzenia DANDELINA (§ 626) ogniska parabol wyznaczonych przez płaszczyznę sieczną na ostrokręgach asymptotycznych, są punktami dotknięcia tych płaszczyzn z kulami wpisanemi w odpowiednie ostrokręgi i stycznemi do płaszczyzny; wynika ztąd, że odległości wierzchołków od ognisk są odpowiednio równe $\frac{\omega'\omega'_3}{2}$ i $\frac{\omega'\omega'_3}{2}$, a zatem, że parabole są równe.

Nadto, figura wskazuje, że w okolicy uważanej, parabole otrzymane z przecięcia dwu ostrokręgów płaszczyznami poziomemi, są jednakowo skierowane.

Asymptotą więc rzutu jest pozioma $\omega'_3\alpha'_3$.

924. Punkt podwójny w nieskończoności; rodzaj rzutu poziomego przecięcia. — Ponieważ hyperboloida H w punkcie przecięcia się dwu tworzących pionowych (γ_1, g'), (g, g') ma za płaszczyznę styczną płaszczyznę profilu $g'\gamma_1$, dotyka więc ona płaszczyzny profilu w nieskończoności; że zaś toż samo ma miejsce dla hyperboloidy H_1, więc punkt w nieskończoności na g, g' jest punktem podwójnym przecięcia. Nadto ostrokrąg, którego wierzchołek leży w tym punkcie podwójnym, i który obejmuje krzywę przecięcia, jest drugiego stopnia (§ 666); że zaś ten ostrokrąg, którego wierzchołek leży w nieskończoności na pionowej, jest walcem pionowym rzucającym krzywę przecięcia, zatem rzut poziomy tej krzywej jest także krzywą drugiego stopnia, a nadto, ponieważ jej jedynym kierunkiem asymptotycznym jest linija ziemna, więc jestto parabola, której oś jest równoległą do osi rzutów.

Ponieważ płaszczyzna pozioma, której śladem pionowym jest $\omega'_3\alpha'_3$, przecina dwie hyperboloidy a zatem i walec pionowy, rzucający krzywę przecięcia podług parabol równych, więc ta własność może służyć do wyznaczenia ogniska i wierzchołka rzutu poziomego ε_4 krzywej wspólnego przecięcia.

925. Rzut poziomy asymptoty pionowej. — Rzut ten jest jednym z punktów przecięcia α_4 paraboli ε_4 z prostą $g\gamma_2$, wyznaczymy go więc łatwo.

926. Punkt podwójny w odległości skończonej. — Jestto punkt spotkania się krzywej przecięcia z tworzącą g, g'.

Uważmy księgę płaszczyzn, których krawędzią jest g, g'. Ponieważ każda z tych płaszczyzn jest styczną do dwu hyperboloid, a każdej z nich odpowiada para punktów dotknięcia na g, g', więc punkta te dotknięcia z hyperboloidą H i z hyperboloidą H_1, tworzą dwa podziały takie, że każdemu punktowi jednego podziału odpowiada jeden a nie więcej punkt drugiego, i odwrotnie. Możemy więc, nie rozbierając dłużej tej kwestyi, powiedzieć, że te punkta tworzą dwa podziały jednokreślne mające podstawę wspólną. Punkta podwójne tych podziałów jednokreślnych są także punktami podwójnemi przecięcia.

Ponieważ podziały jednokreślne, których podstawą wspólną jest g, g' mają punkt podwójny w nieskończoności, tem samem więc są one proporcyonalne i do wyznaczenia ich wystarcza znać dwie pary punktów odpowiednich. Otoż, ponieważ płaszczyzna obrazu przechodząca przez g, g', dotyka dwu hyperboloid w dwu punktach, których rzutami pionowemi są $\omega'\omega'_1$, ponieważ nadto płaszczyzna

pionowa, której śladem poziomym jest P, przecina hyperboloidę H podług dwu tworzących, których rzutami pionowemi są g', $b'_1b'_3$, a zatem dotyka ona jej w punkcie, którego rzutem pionowym jest ω'_4, a drugą hyperboloidę H_1 w punkcie, którego rzutem pionowym jest punkt ω'_5 przecięcia się prostych g', $b'_2b'_4$, wynika więc ztąd, że punkta ω'_5, ω'_4 tworzą drugą parę punktów odpowiednich.

Niech δ' będzie rzutem pionowym szukanego punktu podwójnego, to ponieważ podziały są proporcyonalne, wypada

$$\frac{\delta'\omega'}{\delta'\omega'_1} = \frac{\omega'\omega'_4}{\omega'_1\omega'_5}.$$

Ponieważ drugi stosunek jest odjemnym, więc δ' musi leżeć pomiędzy ω' i ω'_4 i dzielić odcinek $\omega'\omega'_4$ w stosunku

$$\frac{\omega'\omega'_4}{\omega'_1\omega'_5},$$

który znajdziemy łatwo spoobem dość jasno przedstawionym na figurze.

W punkcie podwójnym δ', g jedną ze stycznych jest tworząca g, g', drugą zaś styczną znajdziemy sposobem ogólnym. Zachęcamy czytelnika do wykonania tego wykreślenia.

927. Ślady pionowe i linije przecięcia hyperboloid z płaszczyzną obrazu, której śladem jest F. — Ponieważ płaszczyzna pionowa rzutów przecina powierzchnie dwu hyperboloid podług hyperbol, mających też same asymptoty co obwody pozorne w rzucie pionowym odpowiednich powierzchni, a punkt przejścia każdej z tych hyperbol został wyznaczonym, przy szukaniu śladów pionowych v'_1, v'_2 tworzących (g'_1, g_1), (g'_2, g_2), więc te dane będą dostateczne do wykreślenia hyperbol $(\varepsilon'_4, \varepsilon'_5)$, $(\varepsilon'_6, \varepsilon'_7)$, które są szukanemi śladami.

Rzut pionowy $(\varepsilon'_8, \varepsilon'_9)$ krzywej przecięcia płaszczyzny obrazu w F z hyperboloidą H, jest wyznaczony przez jej asymptoty g', g'_3 i przez jeden z jej punktów przejścia (w, w'). Przecięcie się zaś tejże płaszczyzny z hyperboloidą H_1 sprowadza się do prostych (g', γ_2), (g_4, g'_4).

928. Ślady poziome i linije przecięcia hyperboloid z płaszczyzną poziomą, której śladem jest Q'. — Ślad poziomy hyperboloidy H jest parabolą τ, której wierzchołek (σ', σ) i ognisko f zostały otrzymane za pomocą twierdzenia Dandelin'a. Ognisko f zostało znalezione wprost, umieszczając ten punkt w odległości od punktu σ równej połowie wzniesienia wierzchołka ω, ω' odpowiedniego ostrokręgu asymptotycznego (§ 702).

W takiż sam sposób znajdziemy ślad poziomy τ_1 hyperboloidy H_1; jestto parabola, której wierzchołkiem jest punkt (σ_1, σ'_1), a ogniskiem punkt f_1.

Postępując w tenże sam sposób zostały znalezione: 1° parabola τ_2, wynikająca z przecięcia hyperboloidy H z płaszczyzną poziomą, której śladem jest Q', i 2° parabola τ_3, którą taż płaszczyzna wyznacza na hyperboloidzie H_1.

929. Sprawdzenie. — Wykreślenie podlega wielu sprawdzeniom, podamy tu jednakże najgłówniejsze:

1° Rzuty pionowe różnych tworzących prostolinijnych hyperboloid winny być styczne do obwodów pozornych pionowych odpowiednich powierzchni;

2° Rzuty poziome krzywych nakreślonych na H i H_1 winny przechodzić jużto przez punkta g i γ_1, jużteż przez punkta g i γ_2;

3° Dwa ślady tejże samej powierzchni winny się przecinać na osi rzutów;

4° Linije τ, τ_1, ε_4 winny się przecinać w punkcie θ_1, zaś linije krzywe τ_2, τ_3, ε_5 w punkcie θ_2.

ROZDZIAŁ VII

POZIOMOWANIE TOPOGRAFICZNE

930. Wiadomości wstępne. — Dla przedstawienia rysunkiem powierzchni gruntu i budowli fortyfikacyjnych niepodobna używać rzutów pionowych, gdyż te ostatnie przykrywają się wciąż wzajemnie, a punkta przecięcia się różnych prostych figury uważanej, przypadają pod kątami tak ostremi, że nie można ręczyć za dokładność wykreslenia. Przeciwnie zaś w rzucie poziomym przykrycia się wzajemne są bardzo rzadkie i punkta przecięcia się rozmaitych linij dadzą się wyznaczyć z całą ścisłością, zkąd wynika, że lepiej jest używać tylko jednej płaszczyzny rzutów, to jest płaszczyzny poziomej i wypisać przy punktach głównych wykresu cyfry przedstawiające ich wzniesienia.

Płaszczyzna pozioma rzutów przedstawia zazwyczaj poziom morza, a wzniesienia po nad nią przyjmują nazwę *wysokości* (altitudes), znamiona zaś punktów leżących pod tą płaszczyzną noszą nazwę *sond* lub *zagłębień* (sondes, profondeurs).

931. Przedstawienie punktu. — Z tego wynika, że w Geometryi Wykreślnej jakikolwiek punkt A jest wyznaczonym mając jego rzut poziomy *a* i jego znamię, którego wielkość oznaczamy cyfrą np. 35 wypisaną na rysunku obok punktu *a*.

a.35

Fig. r_7.

932. Przedstawienie prostej. — Aczkolwiek wszelką prostę możemy wyznaczyć przez rzuty i znamiona dwu którychbądź jej punktów, jednakże zazwyczaj obieramy na prostej punkta, których znamiona są całkowite i po sobie idące, w ten sposób bowiem odrazu rozpoznamy rysunek, to jest na pierwszy rzut oka rozróżnimy położenia względne rozmaitych punktów; działanie to nazywamy *stopniowaniem* prostej.

Nachyleniem prostej nazywamy styczną trygonometryczną kąta, jaki ona tworzy z płaszczyzną poziomą rzutów.

Modułem lub *przedziałem* nazywamy odległość zawartą pomiędzy rzutami poziomemi dwu punktów, których znamiona różnią się o jedność.

933. Twierdzenie.— *Iloczyn z nachylenia jakiejkolwiek prostej przez jej przedział jest równy jedności, lub, nachylenie i przedział jednej prostej są odpowiednie* (fig. r_8).

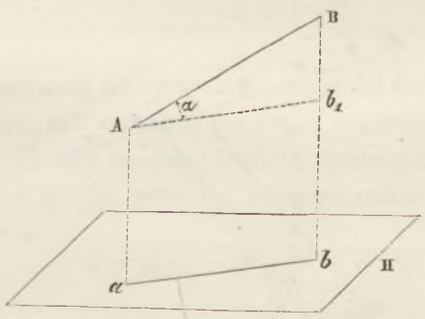

Fig. r_8.

Oznaczmy przez H płaszczyznę poziomą rzutów, przez (A, *a*), (B, *b*) dwa punkta prostej, których

znamiona różnią się o jedność i ich rzuty, przez p nachylenie prostej, przez α kąt jaki ona tworzy z płaszczyzną H, wreszcie przez i jej przedział.

Nakreśliwszy przez punkt A prostę Ab_1 równoległą do ab, to ponieważ ona utworzy z prostą AB kąt α, będzie więc

$$p = \text{tang. } \alpha = \frac{Bb_1}{Ab_1};$$

ponieważ nadto różnica znamion punktów A i B jest równa jedności, więc

$$Bb_1 = 1$$

$$Ab_1 = ab = i,$$

co podstawiając w powyższem równaniu znajdziemy

$$p = \frac{1}{i},$$

czyli ostatecznie

$$ip = 1.$$

Co należało znaleźć

934. Zadanie I. — *Zestopniować prostę, której znamiona dwu punktów są dane* (fig. r_9).

Oznaczmy przez d prostę daną, przez a, b rzuty dwu jej punktów, których znamiona są równe 5 i 9.

Widoczną jest rzeczą, że punkta odpowiadające znamionom całkowitym i po sobie następującym

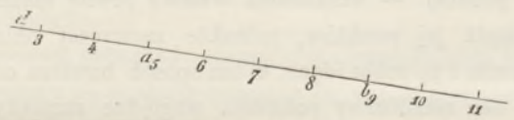

Fig. r_9.

a zawarte pomiędzy punktami a i b otrzymamy, dzieląc ab na $9-5$ części równych, bowiem znamionami tak znalezionych punktów będą cyfry 6, 7, 8, w skutek czego łatwo będzie zestopniować prostę po obu stronach punktów a i b.

W takiż sposób należy postępować, gdy znamiona będą ułamkowe.

935. Zadanie II. — *Na prostej zestopniowanej ustawić punkt, którego znamię jest dane* (fig. r_{10}).

Przypuśćmy, że na prostej d należy ustawić punkt, którego znamieniem jest 5,8.

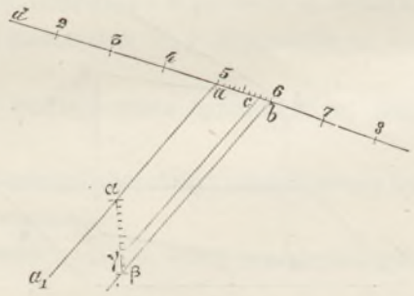

Fig. r_{10}.

Ponieważ punkt szukany musi leżeć pomiędzy punktami a i b, których znamionami są 5 i 6, znaj-

dziemy go więc, dzieląc ab na dziesięć części równych i ustawiając go na ósmej podziałce od punktu a, czyli będzie to punkt c.

DRUGIE ROZWIĄZANIE. — Nakreślmy przez punkta a i b dwie proste równoległe aa_1, bb_1 i ustawmy końce podziałki $\alpha\beta$ np. decymetru podzielonego na dziesięć części równych na tych prostych, wreszcie oznaczmy na tej podziałce punkt γ odpowiadający ósmemu jej podziałowi, to kreśląc przez punkt γ prostę równoległą do aa_1, która spotka prostę d w punkcie c, znajdziemy punkt szukany.

Ten ostatni sposób jest lepszy od poprzedniego, gdyż unikamy, używając go, potrzeby dzielenia linii na dziesięć części równych, operacyi zawsze dość długiej i nigdy tak dokładnej jak podziałki robione sposobem mechanicznym.

936. Zadanie odwrotne. — Zadanie odwrotne rozwiązuje się za pomocą tychże samych wykreśleń tylko w odwrotnym porządku.

937. Zadanie III. — *Znaleźć ślad poziomy prostej danej.* — Należy zestopniować prostę i przedłużyć to stopniowanie do punktu, którego znamię jest zerem.

Poprzedzające zadania moglibyśmy także rozwiązać, robiąc kład płaszczyzny pionowej rzucającej prostę, czyli tak te zadania jak i późniejsze mogą być rozwiązane dwoma sposobami, rysunkiem i liczebnie; lecz sposób liczebny jest odpowiedniejszy dla Poziomowania topograficznego, gdyż zamiast wykreśleń na płaszczyznie pionowej rzutów, wykonywamy rachunek na znamionach danych.

938. Zadanie IV. — *Mając rzuty poziome i znamiona dwu punktów, znaleźć rzeczywistą wielkość ich odległości* (fig. s_1).

Oznaczmy przez a i b rzuty poziome dwu punktów, których znamionami są 7,3 i 10,8. Odległością

FIG. s_1.

tych punktów będzie przeciwprostokątnia trójkąta prostokątnego, którego boki kąta prostego są ab, zaś różnica wzniesień 10,8 — 7,3, to jest 3,5, czyli odległość ta równa się

$$\delta = \sqrt{3,5^2 + \overline{ab}^2}.$$

Wzór ten jest zazwyczaj używany do wyznaczenia odległości dwu punktów.

Znajdźmy inny wzór. W tym celu oznaczmy przez n_1, n' wzniesienia dwu punktów, zaś przez i przedział prostej. Ponieważ boki kąta prostego trójkąta prostokątnego uważanego powyżej, są w tej chwili równe $(n - n')$, $(n - n')i$, więc oznaczając odległość szukaną przez δ, otrzymamy

$$\delta = \sqrt{(n - n')^2 + (n - n')^2 i^2},$$

lub

$$\delta = (n - n')\sqrt{1 + i^2}.$$

939. Zadanie V. — *Przez punkt dany nakreślić prostę równoległą do prostej danej* (fig. s_2).—

Oznaczmy przez *ab* rzut zestopniowany prostej danej, przez *c* i przez 10,3 punkt dany i jego wzniesienie.

Żeby dwie proste były równoległe, trzeba i wystarcza

1° *żeby ich rzuty poziome były równoległe,*

2° *żeby miały toż same nachylenie, to jest moduły równe,*

3° *żeby kierunek znamion zwiększających się był tenże sam.*

Jeżeli więc przez punkt *c* nakreślimy prostę równoległą do *ab*, weźmiemy na *cd* długość 0,7 modułu prostej *ab*, to znajdziemy punkt *d*, którego znamię jest równe 11, a odcinając kilka razy na *cd*

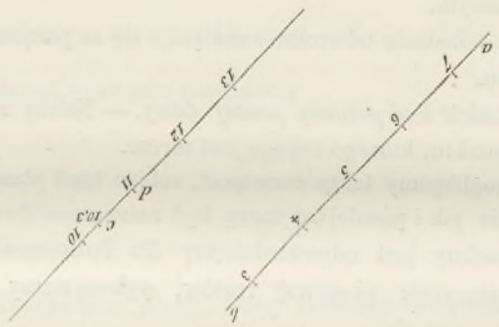

Fig s_2.

po obu stronach punktu *d* moduł prostej rzuconej na *ab*, zestopniujemy prostę równoległą, która będzie w zupełności wyznaczoną.

940. Zadanie VI. — *Przekonać się, czy dwie proste przecinają się i znaleźć w tym przypadku wzniesienie punktu przecięcia* (fig s_3).

Tu mogą być dwa przypadki :

1° Rzuty poziome prostych mogą się spotykać w granicach rysunku.

2° Rzuty poziome prostych mogą się przecinać poza granicami rysunku.

1° Oznaczmy przez *ab, cd* rzuty dwu prostych zestopniowanych, zaś przez *m* punkt ich wspólnego przecięcia.

Wyznaczywszy znamiona punktów leżących na prostych AB, CD i mających za rzut punk *m*,

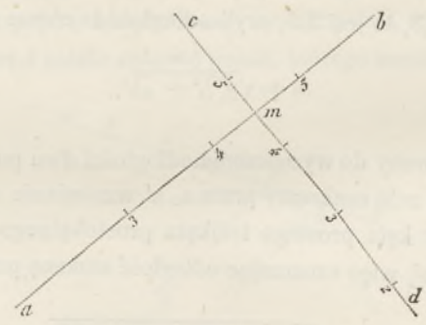

Fig. s_3.

jeżeli tak znalezione znamiona są równe, to proste przecinają się z sobą, a wartość wspólna dwu znamion jest znamieniem szukanem.

2° Przypuśćmy teraz, że rzuty poziome *ab, cd* prostych nie przecinają się z sobą w granicach

rysunku. Rozwiązanie tego zadania polega na następującej uwadze: *żeby dwie proste poziome były równoległe, trzeba i wystarcza, żeby ich rzuty poziome były także równoległe* (fig. s_4).

Nakreślmy proste 6.6, 5.5; jeżeli one są równoległe, to i proste w przestrzeni będą także równoległe, a proste dane przetną się z sobą, i przeciwnie, jeżeli proste dane spotykają się, to proste 6.6, 5.5 muszą być równoległe. Wynika ztąd, że żeby się przekonać czy proste dane przecinają się z sobą, dosyć będzie sprawdzić, czy proste 6.6, 5.5 są równoległe.

Przypuśćmy, że proste dane przecinają się z sobą i szukajmy znamienia wspólnego ich punktu.

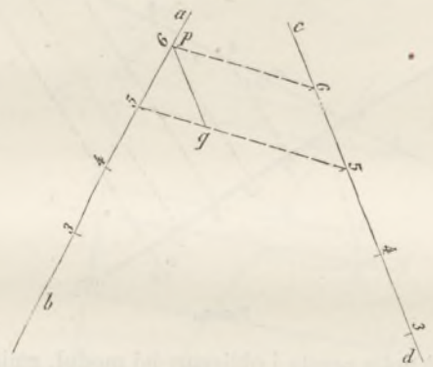

Fig. s_4.

W tym celu, nakreślmy przez jeden z końców p prostej 6.6 prostę równoległą do cd i oznaczmy punkt q, w którym ta ostatnia prosta spotyka prostę 5.5.

Wiemy, że jeżeli różnica znamion jest równa 1, to odległość punktów jednakowego znamienia, a leżących na prostych danych, zmniejsza się o $5.q$; że zaś odległość ta dla punktu szukanego winna być równą zeru, więc różnica pomiędzy znamieniem szukanem i 5 musi być równą liczbie przedstawiającej, ile razy długość 5.5 zawiera w sobie $5.q$, czyli, że znamię szukane będzie równe

$$5 + \frac{5.5}{5.q}.$$

941. Przedstawienie płaszczyzny. — Wszelka płaszczyzna może być wyznaczoną przez jej linię największego spadku, lecz dla odróżnienia płaszczyzny od prostej, przedstawia się ją dwiema linijami

Fig. s_5.

największego spadku bardzo blizkiemi siebie; w ten sposób płaszczyzna na rysunku jest przedstawioną przez kreskę podwójną (fig. s_5).

Nachyleniem płaszczyzny nazywamy nachylenie jej linij największego spadku.

Przypomnimy tutaj, że wszelkie poziome płaszczyzny są tak w przestrzeni, jako też w rzucie, prostopadłe do linij największego spadku tej płaszczyzny.

942. Zadanie VII. — *Znając trzy punkta płaszczyzny, wyznaczyć jednę z jej linij największego spadku* (fig. s_6).—Oznaczmy przez a, b, c punkta dane, zaś przez (3,5), (4,9), (7,8), ich znamiona odpo-

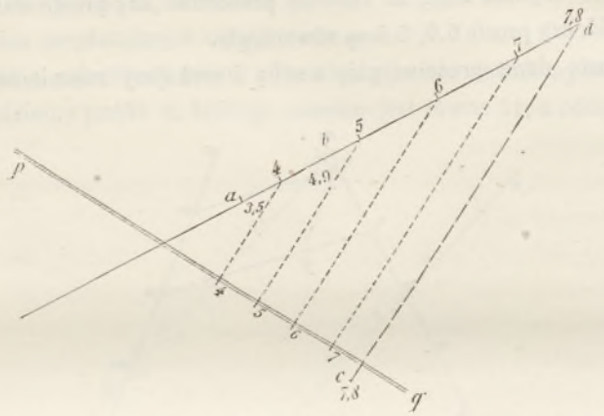

Fig. s_6.

wiednie. Połączmy punkta a i b liniją prostą i obliczmy jej moduł, zmierzmy ab podług skali rysunku i znalezioną liczbę podzielmy przez 4,9 — 3,5 czyli przez 1,4, pomiędzy a i b od punktu a odetnijmy połowę znalezionego modułu, a otrzymamy rzut punktu prostej ab, którego znamię jest równe 4; to znając łatwo teraz zestopniować prostę ab, na której znajdziemy punkt d mający znamię równe 7,8, a prosta cd będzie kierunkiem poziomych płaszczyzny danej przez trzy punkta. Prosta prostopadła pq do cd wyznaczy liniję największego spadku płaszczyzny, dla zestopniowania zaś jej należy wziąć przecięcie się jej z prostemi równoległemi do cd, a przechodzącemi przez punkta, których znamiona odpowiadają liczbom całkowitym prostej ab, i wypisać przy nich znamiona odpowiednie poziomym płaszczyzny, które je wyznaczają.

Jeżeli płaszczyzna dana jest wyznaczoną przez dwie proste, przecinające się lub równoległe to jej linije największego spadku wyznaczą się sposobem zupełnie takim samym jak powyżej.

943. Zadanie VIII. — *Znając rzut punktu leżącego na płaszczyznie danej, znaleźć jego znamię* (fig. s_7). — Przypuśćmy, że płaszczyzna jest wyznaczoną przez jej liniję największego spadku pq, i że a jest

Fig. s_7.

rzutem danym punktu; nakreśliwszy przez ten punkt dany rzut ab poziomej płaszczyzny, znaj-

dziemy 5,3 na znamię punktu *b* przecięcia się tej poziomej z linią największego spadku, a ponieważ to znamię jest wspólne wszystkim punktom poziomej, więc jest ono także znamieniem punktu, którego rzutem poziomym jest *a*.

944. **Zadanie IX.** — *Przez punkt obrany na płaszczyznie, nakreślić na niej prostę mającą nachylenie dane* (fig. s_8). — Oznaczmy przez *pq* rzut linii największego spadku płaszczyzny, przez *m* rzut punktu obranego, zaś przez $\frac{1}{\gamma}$ nachylenie dane prostej.

Ponieważ dla różnicy wzniesień równej 1, prosta szukana powinna mieć w rzucie poziomym dłu-

Fig. s_8.

gość równą γ, więc kreśląc dwie proste poziome *ab*, *cd*, płaszczyzny danej oddalone od siebie o moduł płaszczyzny, lecz tak, żeby jedna z nich przechodziła przez punkt *m*, a następnie kreśląc z punktu *m* jako środka promieniem γ łuk koła i oznaczając punkta *s*, *t*, w których on przecina prostę *cd*, znajdziemy *ms* i *mt*, to jest szukane rzuty poziome prostej.

Zadanie to ma dwa rozwiązania.

Stopniowanie wreszcie tak znalezionych prostych można zrobić biorąc punkta przecięcia się ich z poziomemi, mającemi znamiona całkowite i po sobie idące, płaszczyzny danej.

945. **Zadanie X.** — *Przez prostę daną nakreślić płaszczyznę mającą nachylenie dane* $\frac{1}{\gamma}$ (fig. s_9). — Ponieważ modułem płaszczyzny jest odwrotność nachylenia to jest γ, zaś *ab* jest rzutem poziomym prostej danej, więc szukajmy przedewszystkiem rzutu linii największego spadku, przechodzącej przez punkt prostej AB, mający znamię równe 4; niech tym rzutem będzie *d*.

Jeżeli wystawimy poziomę płaszczyzny szukanej, a mającą znamię równe 6, to ta prosta musi przejść przez punkt *f*, którego znamię jest także równe 6; że zaś na płaszczyznie odległość jej rzutu od punktu *d* winna być równa 2γ, więc przychodzimy do następującego wykreślenia:

Z punktu *d* jako środka promieniem równym 2γ należy nakreślić łuk koła i przez punkt *f* poprowadzić do niego dwie styczne *fg*, fg_1, które będą właśnie poziomemi szukanemi. W ogóle zadanie ma dwa rozwiązania.

Proste *dg*, dg_1 prostopadłe do fg, fg_1, a przechodzące przez punkt *d*, są rzutami linij największego spadku płaszczyzn danych.

Wreszcie ponieważ znamię punktu d jest równe 4, a znamię wspólne punktom g, g_1 jest równe 6, łatwo więc będzie zestopniować linije największego spadku obecnie nakreślone.

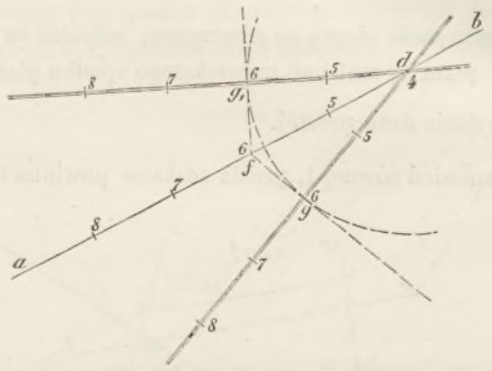

Fig. 59.

946. Zadanie XI. — *Znaleźć nachylenie dwu płaszczyzn danych przez linije największego spadku* (fig. s_{10}). — Niech *ab* i *cd* będą rzutami danych linij największego spadku; przetnijmy dwie płaszczyzny

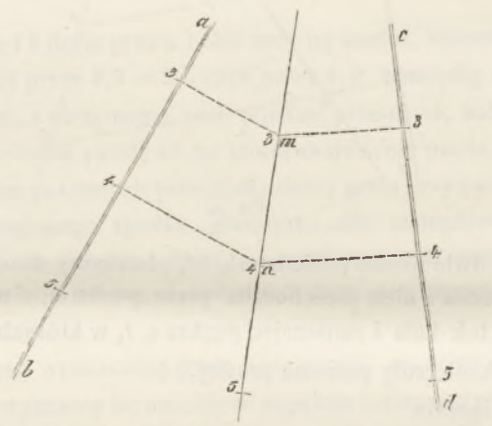

Fig. s_{10}.

dane trzecią płaszczyzną pomocniczą poziomą, mającą znamię równe 3, i oznaczmy punkt m przecięcia się poziomych, które ona wyznacza; ponieważ punkt m mający za znamię 3, należy do rzutu szukanego przecięcia, którego drugim punktem jest punkt n mający znamię równe 4, rzutem więc tego przecięcia jest mn, po czem stopniowanie jego nie przedstawi trudności, gdyż znamy jego moduł mn i znamiona dwu jego punktów.

947 Przypadek szczególny. — *Poziome jednego znamienia przecinają się pod kątem bardzo ostrym* (fig. t_1). — Dla znalezienia w tym przypadku przecięcia z całą ścisłością, należy zmienić wykreślenie, jak następuje :

Oznaczmy przez *ab*, *cd* rzuty linij największego spadku płaszczyzn danych, i przyjmijmy za płaszczyznę pomocniczą jakąkolwiek płaszczyznę, wyznaczoną przez dwie proste poziome mające za rzuty *st*, *uv*, z których pierwsza ma za znamię 4, a druga 3. Nakreślmy teraz poziome mające znamiona 4 i 3 płaszczyzn, i szukajmy sposobem podanym w poprzedzającym paragrafie, rzutów *ef*, *gh*, prostych wspólnego przecięcia się płaszczyzny pomocniczej z każdą z płaszczyzn danych. Tak znalezione proste

przecinają się w punkcie *m*, który jest jednym punktem szukanego wspólnego przecięcia, drugi zaś jego punkt otrzymamy w sposób podobny, a wreszcie nakreślimy prostę szukaną.

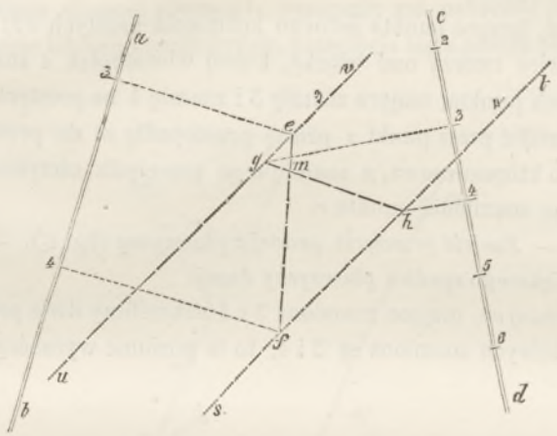

Fig. t_1.

Dla zestopniowania tej prostej, należy wyznaczyć punkta jej przecięcia się z rzutem poziomym, przechodzącym przez znamiona całkowite i po sobie następujące, jednej z płaszczyzn danych.

Wykreślenie może być bardzo często uproszczonem, przesuwając poziome dwu płaszczyzn pomocniczych jedne po drugich przez punkta danych linij największego spadku, których znamiona są też same co prostych poziomych, gdyż w ten sposób postępując, wykreślenie służy do wyznaczenia punktów wspólnego przecięcia leżących na danych linijach największego spadku.

948. **Przypadek jeszcze więcej szczególny.** — *Rzuty poziome linij największego spadku są równo-*

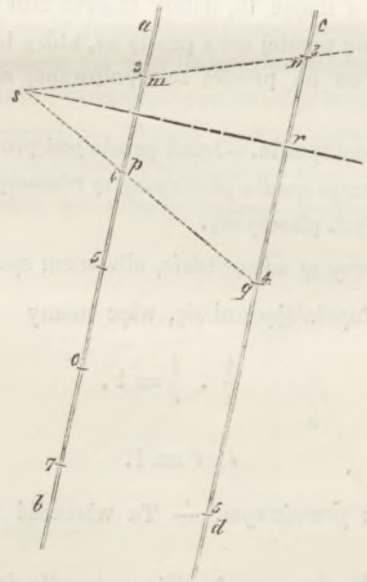

Fig. t_2.

ległe (fig. t_2). — Oznaczmy przez *ab, cd* rzuty danych linij największego spadku. Ponieważ płaszczyzny

przez nie wyznaczone mają poziome równoległe, więc te płaszczyzny przecinają się z sobą podług poziomej, której rzut poziomy jest prostopadłym do prostych *ab*, *cd* i łączy z sobą dwa punkta tegoż samego znamienia tych prostych.

Ponieważ nadto proste, łączące punkta jednego znamienia prostych *ab*, *cd*, dzielą te ostatnie na części proporcyonalne, więc tworzą one wiązkę, której wierzchołek *s* znajdziemy na przecięciu się prostych *mn*, *pq* łączących punkta, mające znamię 3 i znamię 4 na prostych danych.

Pozostaje obecnie nakreślić przez punkt *s* prostę prostopadłą *sr* do prostych danych *ab*, *cd*, żeby znaleźć rzut przecięcia, o którem mowa, a znamię tego przecięcia otrzymamy sposobem podanym powyżej (§ 936), szukając znamienia punktu *r*.

949. **Zadanie XII.** — *Znaleźć przecięcie prostej z płaszczyzną* (fig. t_3). — Niech *ab* i *pq* będą rzutami prostej i linii największego spadku płaszczyzny danej.

Jeżeli przez punkta prostej *ab*, mające znamiona 3 i 4 nakreślimy dwie proste $3m$, $4n$ i będziemy je uważać jako poziome, których znamiona są 3 i 4, to te poziome wyznaczą płaszczyznę, którą przyj-

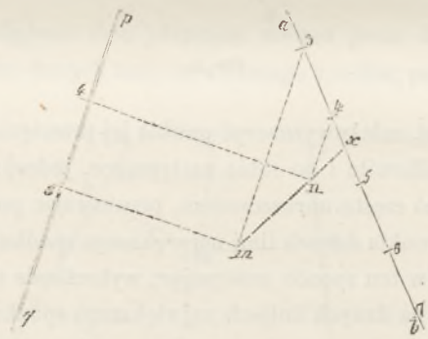

Fig. t_3.

miemy za płaszczyznę pomocniczą, a mając to, należy znaleźć rzut poziomy *mn* wspólnego przecięcia się płaszczyzn i punkt *x* przecięcia się prostej *mn* z prostą *ab*, który to punkt przedstawia rzut poziomy punktu szukanego; że zaś leży on na prostej zestopniowanej *ab*, znamię więc jego znajdziemy łatwo (§ 936).

950. **Płaszczyzny i proste prostopadłe.**—Jeżeli prosta jest prostopadłą do płaszczyzny, wówczas:

1° *Rzuty prostej i linij największego spadku płaszczyzny są równoległe.* I rzeczywiście, gdyż te rzuty winny być prostopadłe do poziomych płaszczyzny.

2° *Moduły i, i' prostej i płaszczyzny są odpowiednie*, albowiem spadki prostej i płaszczyzny są $\frac{1}{i}$ i $\frac{1}{i'}$, a ponieważ kąty odpowiednie są dopełniającemi się, więc mamy

$$\frac{1}{i} \cdot \frac{1}{i'} = 1,$$

czyli

$$i \cdot i' = 1.$$

3° *Znamiona rosną w kierunku przeciwnym.* — Ta własność jest widoczną, biorąc pod uwagę figurę w przestrzeni.

951 **Zadanie XIII.** — *Z punktu danego nakreślić prostopadłę do prostej danej* (fig. t_4). — Oznaczmy przez *ab*, *m* rzuty proste punktu danego. Rzut *pq* linii największego spadku płaszczyzny szukanej jest równoległy do *ab*, a jego moduł może być jużto obliczonym, jużteż wykreślonym. Dla obliczenia

takowego należy zmierzyć moduł prostej *ab* i podzielić jedność przez liczbę, przedstawiającą wymiary prostej *ab*.

Dla wykreślenia zaś jego należy nakreślić przez punkt tej prostej, a którego znamię jest 4, prostę *cd* prostopadłą do *ab* i mającą długość równą *q*1, następnie zaś nakreślić prostę *d*5 i do niej prostopadłę w punkcie *d*, wreszcie takowę przedłużyć do przecięcia się z prostą *ab* w punkcie *f*.

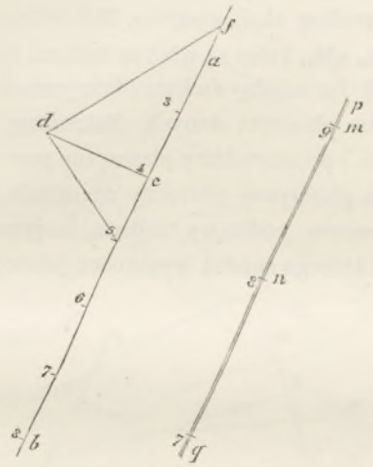

Fig. t_4.

Ponieważ trójkąt prostokątny 5*df* daje

$$\overline{cd}^2 = c5 \,.\, cf,$$

czyli

$$cf = \frac{1}{c5},$$

więc *cf* będzie modułem płaszczyzny.

Dla zestopniowania prostej *pq* należy odciąć pewną liczbę razy od punktu *m* znaleziony moduł.

952. Zadanie XIV. — *Przez punkt dany nakreślić prostę prostopadłą do płaszczyzny.* — Rozwiązanie tego zadania jest zupełnie takie samo jak zadania poprzedzającego.

953. Zastosowanie. — Znaleźć: 1° *Odległość punktu od płaszczyzny*, 2° *Odległość punktu od prostej i* 3° *Najkrótszą odległość dwu prostych.* — Sposób ogólny rozwiązania tych zadań został podany w pierwszej części tego wykładu, sposoby zaś wykreślenia znajdują się w poprzedzających zadaniach.

954. Zadanie XV. — *Nakreślić kąt między dwiema prostemi* (fig. t_5). — Niech będą *ma* i *mb*

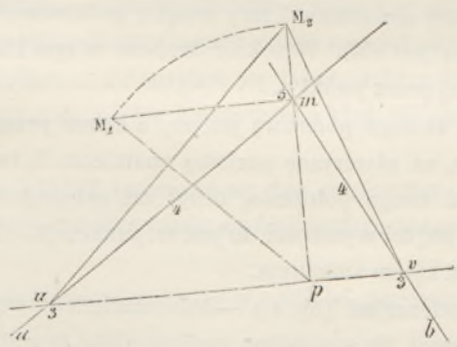

Fig. t_5.

rzuty dwu prostych, mających punkt wspólny, którego rzutem jest punkt *m* ze znamieniem 5; dla

znalezienia ich kąta, należy zrobić ich kład naokoło poziomej ich płaszczyzny. Oznaczmy przez u, v punkta prostych danych, mające znamię 3 i przyjmijmy prostę uv za oś obrotu. Podczas ruchu punkta u i v pozostaną na swojem miejscu, punkt zaś m przypadnie na prostopadłej mp, wychodzącej z tego punktu na oś obrotu uv i znajdzie się w odległości od punktu p, równej przeciwprostokątniej trójkąta prostokątnego, którego bokami kąta prostego są mp i prosta równa różnicy znamion punktu M i osi, to jest równa 2 i odcięta na $m\mathrm{M}_1$ podług skali rysunku. Nakreśliwszy trójkąt M_1mp, odetnijmy $p\mathrm{M}_2$ równe $p\mathrm{M}_1$ i nakreślmy proste $u\mathrm{M}_2$, $v\mathrm{M}_2$, które są właśnie bokami kąta szukanego $u\mathrm{M}_2v$.

955. Zadanie XVI. — *Znaleźć kąt między dwiema płaszczyznami* (fig. t_6). — Niech ab i cd będą rzutami linij największego spadku płaszczyzn danych. Nakreślmy przedewszystkiem rzut mn linii wspólnego przecięcia się płaszczyzn i poprowadźmy płaszczyznę pomocniczą prostopadłą do tego przecięcia, to ślad tej płaszczyzny na płaszczyznę poziomą znamienia 5 jest prostą prostopadłą uv do prostej mu. Prosta ta uv jest rzutem podstawy trójkąta, mającego kąt przeciwległy tej podstawie równy kątowi płassczyzn danych i którego spodek wysokości, jak to już zostało dowiedzionem (§ 187),

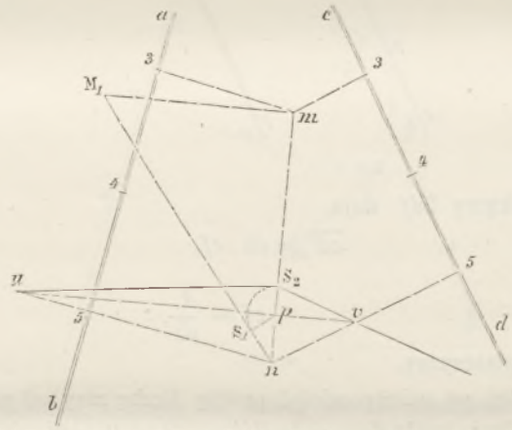

Fig. t_6.

leży na przecięciu się p prostych mn, uv, sama zaś wysokość jest równa odległości tego spodka od przecięcia się MN dwu płaszczyzn danych.

Dla znalezienia tej wysokości, zróbmy kład przecięcia się płaszczyzn danych na płaszczyznę poziomą znamienia 5; podczas ruchu punkt n pozostaje niezmiennym, a punkt M przechodzi w kładzie do M_1 na prostopadłę M_1m do prostej mn równą 5 razy wziętej jednostce długości ze skali rysunku, zkąd wypada, że kładem przecięcia jest $n\mathrm{M}_1$. Wysokość szukana w tym kładzie leży na prostopadłej $p\mathrm{S}_1$ do prostej $n\mathrm{M}_1$ a przechodzącej przez punkt p.

Zróbmy teraz kład trójkąta, którego podstawą jest uv, a kątem przeciwległym tej podstawie kąt szukany, naokoło podstawy uv, na płaszczyznę poziomą znamienia 5, to wysokość przypadnie na pn, jeden z końców p nie zmieni swego położenia, drugi zaś przypadnie w odległości od punktu p równej rzeczywistej wielkości $p\mathrm{S}_1$ tej wysokości, to jest w punkcie S_2. Trójkątem w kładzie jest więc trójkąt $u\mathrm{S}_2v$, kąt zaś $u\mathrm{S}_2v$ jest kątem szukanym.

956. Przedstawienie powierzchni (fig. t_7). — Powierzchniami topograficznemi nazywamy powierzchnie utworzone przez grunt. Są one jedyne przedstawiane za pomocą rzutów topograficznych, a szczególną ich własnością jest to, że prosta pionowa nie może ich spotykać więcej jak w jednym punkcie.

Powierzchnie topograficzne przedstawiają się pewną liczbą przecięć poziomych równooddalonych, zwanych *linijami poziomu*; równooddaleniem zaś nazywamy różnicę znamion dwu po sobie następujących *linij poziomu*.

Ponieważ w odstępie dwu krzywych powierzchnia gruntu nie jest wyznaczoną ściśle, więc przyj-

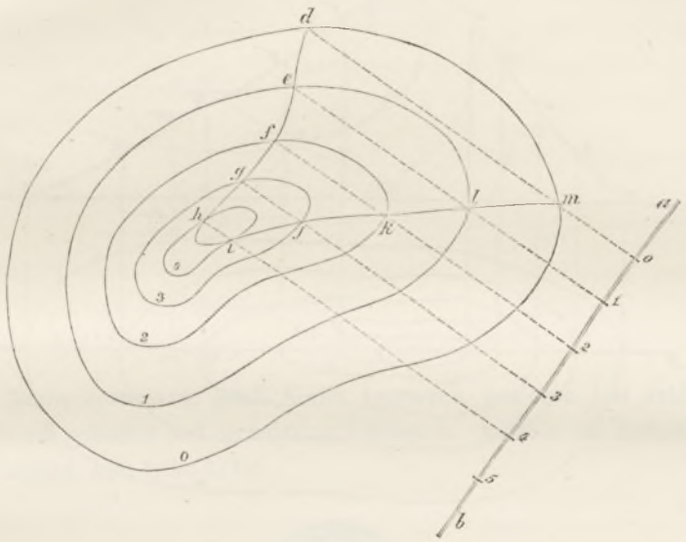

Fig. t_7.

mujemy, że ona jest opisaną przez prostę ruchomą normalną stale do jednej z tych krzywych, a opierającą się na drugiej.

957. **Zadanie XVII.** — *Znaleźć przecięcie powierzchni topograficznej płaszczyzną* (fig. t_7). — W tym przykładzie przyjmujemy, że płaszczyzna jest wyznaczoną przez swą liniję największego spadku zestopniowaną i mającą za rzut *ab*, a powierzchnia topograficzna linijami poziomu przedstawionemi na rysunku. Ponieważ przecięcia się poziomych płaszczyzny z linijami poziomu, wyznaczają punkta linii szukanej, łącząc więc ich rzuty poziome *d*, *e*, *f*, ... *l*, *m* liniją krzywą ciągłą, otrzymamy rzut poziomy krzywej wspólnej płaszczyznie i powierzchni danej. Dla znalezienia rzeczywistej wielkości tej krzywej, należy zrobić jej kład na płaszczyznę poziomą odpowiadającą, a to obracając ją naokoło jednej z poziomych leżących na tejże samej płaszczyznie co i ona.

958. **Przypadek szczególny.** — Jeżeli płaszczyzna dana jest pionową, czyli, jeżeli jej śladem poziomym jest *pq*, to ona przedstawia rzut tegoż samego nazwiska krzywej wspólnej, a rzeczywista wielkość tej krzywej, to jest $a'b'c' \ldots k'l'$ znajdzie się łatwo, robiąc jej rzut na płaszczyznę pionową, której ślad *xy* jest równoległym do *pq*, i w końcu robiąc kład tej płaszczyzny na płaszczyznę poziomą rzutów.

959. **Zadanie XVIII.** — *Znaleźć przecięcie się dwu powierzchni topograficznych.* — Linija taka otrzymuje się przez punkta, leżące na przecięciu się *linij poziomu* jednakowego znamienia powierzchni danych.

960. **Zadanie XIX.** — *Znając rzut jednego z punktów powierzchni topograficznej, znaleźć jego znamię.*

Pierwsze rozwiązanie. — Niech będzie *m* rzutem punktu, którego chcemy znaleźć znamię (fig. t_8); przez punkt *m* nakreślmy przedewszystkiem prostę jakąkolwiek *pq*, i wyznaczmy sposobem podanym

powyżej, rzeczywistą wielkość przecięcia powierzchni z płaszczyzną przechodzącą przez pq, następnie przesuńmy przezeń prostopadłę do xy; jeżeli $m'n$ będą odpowiedniemi punktami przecięcia się jej z linijami $a'b'c' \ldots k'l'$, xy, to prosta $m'n$ będzie właśnie znamieniem szukanem.

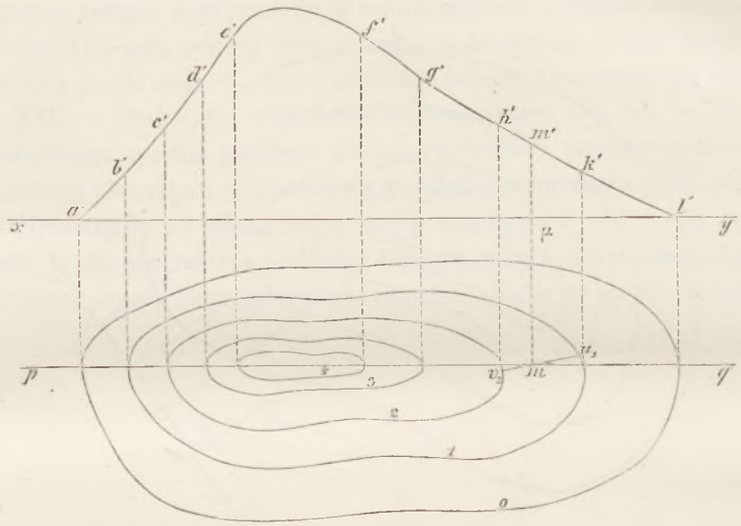

Fig. t_9.

Inne rozwiązanie. — Jeżeli powierzchnię topograficzną, zawartą pomiędzy krzywemi poziomu, mającemi znamiona 1 i 2 zastąpimy powierzchnią geometryczną określoną powyżej, i będziemy szukali znamienia punktu M jako leżącego na jednej z tworzących prostolinijnych tej powierzchni, to rzut uv tej tworzącej będzie normalną uv do jednej z krzywych poziomu o znamionach 1 lub 2. Obecnie więc zadanie sprowadzonem zostało do wyznaczenia znamienia punktu m leżącego na prostej uv, której znamy znamiona dwu punktów, a to ostatnie umiemy rozwiązać.

961. **Krzywe dodatkowe.** — Na mocy zadania tu rozwiązanego możemy pomiędzy dwie krzywe poziomu jakiekolwiek wtrącić trzecią krzywę poziomu, której znamię jest dane; taka krzywa zwie się *krzywą dodatkową*.

962. **Zadanie XX.** — *Przez punkt dany na powierzchni topograficznej nakreślić do niej płaszczyznę styczną.* — Płaszczyzna taka jest wyznaczoną przez styczną do krzywej dodatkowej, przechodzącej przez punkt obrany i przez tworzącę prostolinijną powierzchni dowolnej, a zastępującej, pomiędzy krzywemi poziomu obejmującemi punkt obrany, powierzchnię topograficzną uważaną.

963. **Zadanie XXI.** — *Nakreślić na powierzchni topograficznej liniję, której nachylenie jest dane, znając jeden z jej punktów przejścia np. m* (fig. t_9). — Dla ułatwienia rozwiązania, ustawmy punkt m na krzywej poziomu mającej znamię 2 i z tego punktu jako środka, promieniem równym odwrotnej wartości nachylenia, nakreślmy okrąg koła, zaznaczając punkta p i u, w których przecina on krzywe poziomu 1 i 3. Uważając teraz proste mn, mp, możemy przypuścić, że one w przybliżeniu leżą na powierzchni, a więc że linija łamana mnp czyni zadosyć warunkom zadania.

W taki sam sposób postępując, znajdziemy tyle punktów na różnych krzywych poziomu, ile zechcemy, a łącząc je następnie z sobą liniją ciągłą przechodzącą przez tak znalezione punkta, ta będzie w przybliżeniu jedną z linij szukanych; że zaś wychodząc z punktu m, możemy pójść do punktu p

lub do punktu p_1, leżących tak jeden jak drugi na przecięciu się tejże samej krzywej poziomu z okręgiem koła przedstawionym na rysunku, a następnie wychodząc z punktu p lub p_1, możemy się udać do wielu rozmaitych punktów leżących na drugiej krzywej poziomu i t. d., więc zadanie to przed-

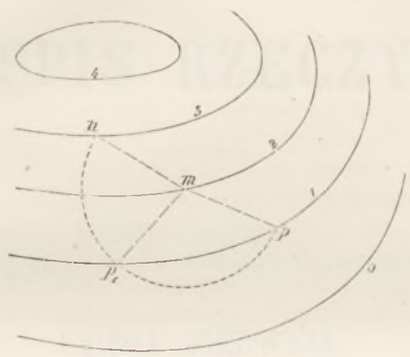

Fig. 10.

stawia nieskończoną liczbę rozwiązań, jeżeli liczba krzywych poziomu jest także nieskończoną. Jeżeli zaś liczba krzywych poziomu jest ograniczoną i daną, to zadanie nie będzie miało także nieskończonej liczby rozwiązań, lecz tylko kilka.

Wyższa Szkoła Pedagogiczna BIBLIOTEKA GŁÓWNA w Kielcach

KONIEC TOMU PIERWSZEGO.

SPIS RZECZY

Strony.

PRZEDMOWA v

KSIĘGA PIERWSZA

LINIJE PROSTE I PŁASZCZYZNY

ROZDZIAŁ PIERWSZY

WIADOMOŚCI WSTĘPNE

Cel Geometryi wykreślnej 1
Punkta w nieskończoności 2
Różne rodzaje rzutów 2
Twierdzenia dotyczące rzutów prostych 4
Wyznaczenie punktu 4
Warunek przecięcia się dwu prostych 6
Znakowanie. — Części widzialne. — Wykonanie rysunku 6

ROZDZIAŁ II

SPOSOBY PRZEDSTAWIANIA PUNKTU, LINIJ I PŁASZCZYZN

Przedstawienie punktu 7
Usunięcie linii ziemnej. — Uwaga 7
Przedstawienie linij 8
Twierdzenia dotyczące przedstawienia linij 8
Zadanie. — Znaleźć ślady jakiejkolwiek linii, której rzuty są dane 10
Przecięcie się jakiejkolwiek linii z płaszczyznami dzielącemi na dwie równe części kąty dwuścienne utworzone przez płaszczyzny rzutów 11
Zadanie. — Znając ślady jakiejkolwiek linii, znaleźć jej rzuty 11
Przedstawienie prostej. — Zadanie. — Znaleźć ślady prostej profilu 11
Położenia względne prostych 13
Przedstawienie płaszczyzny 15
Rzuty prostej prostopadłej do płaszczyzny 15
Rzut kąta prostego 16
Położenia jakiejkolwiek płaszczyzny względem płaszczyzn rzutów 17

ROZDZIAŁ III

ZADANIA DOTYCZĄCE LINII PROSTEJ I PŁASZCZYZNY

Strony.

Zadanie I. — Przez punkt dany nakreślić prostę równoległą do prostej danej 18
Punkta oddalone. — Zadanie II. — Oznaczyć punkt oddalony dwu prostych danych 19
Zadanie III. — Znaleźć rzuty prostej leżącej na płaszczyźnie 19
Zadanie IV. — Znaleźć rzuty punktu leżącego na płaszczyźnie 20
Ćwiczenie. — Znaleźć rzuty wieloboku płaskiego 20
Zadanie V. — Znaleźć ślady płaszczyzny danej przez dwie proste równoległe lub przecinające się 20
Zadanie VI. — Znaleźć ślady płaszczyzny danej przez trzy punkta nie leżące na jednej linii prostej 20
Zadanie VII. — Przez prostę daną D poprowadzić płaszczyznę równoległą do innej prostej D_1 20
Twierdzenie. — Ślady tegoż samego nazwiska dwu płaszczyzn równoległych są równoległe i odwrotnie 21
Zadanie VIII. — Przez punkt dany przesunąć płaszczyznę równoległą do płaszczyzny danej. — Rozwiązanie ogólne 21
Zadanie IX. — Oznaczyć wspólne przecięcie dwu płaszczyzn P i Q. — Rozwiązanie ogólne. — Pierwszy sposób. — Drugi sposób. — Trzeci sposób. — Czwarty sposób. — Piąty sposób 22
Zadanie X. — Znaleźć punkt spotkania prostej D z płaszczyzną daną P. — Rozwiązanie ogólne 24
Zadanie XI. — Znaleźć prostę wspólnego przecięcia dwu płaszczyzn danych każda przez dwie proste przecinające się 25
Zadanie XII. — Znaleźć punkt wspólnego przecięcia trzech płaszczyzn 25
Zadanie XIII. — Przez punkt dany nakreślić prostę, którąby dotykała dwu prostych danych. — Rozwiązanie ogólne. — Wykreślenie 26
Zadanie XIV. — Nakreślić prostę równoległą do prostej danej i dotykającą dwu innych prostych danych. — Rozwiązanie ogólne. — Wykreślenie 26

ĆWICZENIA NALEŻĄCE DO TRZECH PIERWSZYCH ROZDZIAŁÓW

Zadanie I. — Znaleźć na obu płaszczyznach rzutów, rzuty zbieżne lub cień rzucony przez punkt świecący, odcinka prostej w rozmaitych przypadkach 26
Zadanie II. — Znaleźć na obu płaszczyznach rzutów cień słoneczny lub rzuty ukośne odcinka prostej w pięciu przypadkach podanych powyżej 27
Zadanie III. — Znaleźć cień rzucony przez jakąkolwiek liniję na inną 27
Zadanie IV. — Sprawdzić czy dwie proste dane leżą na jednej płaszczyźnie, jeżeli rzuty ich przeciwnego nazwiska brane po dwa zlewają się z sobą 27
Zadanie V. — Znaleźć ślady i oznaczyć części widzialne krzywej, której rzuty zlewają się z sobą 28
Zadanie VI. — Narysować czterdzieści trzy możliwe położenia prostej w przestrzeni względem płaszczyzn rzutów 28
Zadanie VII. — Narysować dwadzieścia trzy możliwych położeń płaszczyzny względem płaszczyzn rzutów 28
Zadanie VIII. — Znaleźć, w granicach rysunku, rzuty drugiego punktu prostej profilu, przechodzącej przez punkt dany i spotykającej drugą prostę w punkcie oddalonym 29
Zadanie IX. — Znając jeden rzut punktu leżącego na płaszczyźnie wyznaczonej przez rzuty jednej z jej normalnych i przez rzuty spodku tej normalnej, znaleźć drugi rzut tego punktu 29
Linija największego spadku. — Zadanie X. — Znając, względem płaszczyzny poziomej rzutów, rzuty linii największego spadku jakiejkolwiek płaszczyzny, znaleźć jej ślady 29
Zadanie XI. — Znając, względem płaszczyzny pionowej rzutów, rzuty linii największego spadku jakiejkolwiek płaszczyzny i rzut poziomy punktu leżącego na tej płaszczyźnie, znaleźć drugi rzut punktu 30
Zadanie XII. — Znaleźć ślady płaszczyzny oznaczonej przez dwie proste równoległe do osi rzutów 30

Strony.

Zadanie XIII. — Podać warunki niezbędne i dostateczne wzajemnej równoległości dwu płaszczyzn, z których każda jest równoległą do osi rzutów ... 30
Zadanie XIV. — Przez punkt dany nakreślić płaszczyznę równoległą do płaszczyzny danej przez swe ślady w następujących szczególnych przypadkach. — 1°. — 2° ... 30
Zadanie XV. — Znaleźć wspólne przecięcie dwu płaszczyzn, których ślady są na jednej prostej ... 30
Zadanie XVI. — Znaleźć prostę wspólnego przecięcia dwu płaszczyzn, których ślady przeciwnego nazwiska zlewają się z sobą na rysunku ... 31
Zadanie XVII. — Znaleźć wspólne przecięcie dwu płaszczyzn symetrycznych względem osi rzutów, których ślady zlewają się z sobą na rysunku ... 31
Zadanie XVIII. — Znaleźć wspólne przecięcie dwu płaszczyzn wyznaczonych przez dwie pary prostych, których rzuty przeciwnego nazwiska zlewają się z sobą na rysunku (do rozwiązania) ... 31
Zadanie XIX. — Znaleźć wspólne przecięcie dwu płaszczyzn, których ślady pionowe są równoległe ... 31
Zadanie XX. — Znaleźć wspólne przecięcie dwu płaszczyzn równoległych do osi rzutów ... 31
Zadanie XXI. — Znaleźć wspólne przecięcie dwu płaszczyzn, z których jedna przechodzi przez punkt dany i przez oś rzutów, a druga jest równoległą do tejże osi ... 31
Zadanie XXII. — Znaleźć przecięcie jakiejkolwiek prostej z płaszczyzną przechodzącą przez oś rzutów i przez punkt dany ... 32
Zadanie XXIII. — Znaleźć wspólne przecięcie jakiejkolwiek płaszczyzny z prostą, której rzuty zchodzą się z sobą ... 32
Zadanie XXIV. — Znaleźć wspólne przecięcie prostej równoległej do osi rzutów z płaszczyzną wyznaczoną przez jednę ze swych linij największego spadku względem płaszczyzny pionowej rzutów ... 32
Zadanie XXV. — Przez punkt dany nakreślić prostę, któraby spotykała dwie proste dane (przypadki szczególne) ... 33

ROZDZIAŁ IV

O METODACH

Wiadomości ogólne ... 33
Zmiana płaszczyzn rzutów ... 33
Zmienić położenie płaszczyzny względem punktu ... 33
Zmienić położenie płaszczyzny względem prostej ... 34
Zmienić położenie płaszczyzny względem płaszczyzny. — Rozwiązanie ogólne. — Pierwsze wykreślenie. — Drugie wykreślenie ... 35
Uczynić prostę równoległą do płaszczyzny pionowej rzutów ... 36
Uczynić prostę prostopadłą do płaszczyzny poziomej rzutów ... 36
Uczynić płaszczyznę prostopadłą do płaszczyzny pionowej rzutów ... 36
Uczynić płaszczyznę równoległą do płaszczyzny poziomej rzutów. — Uwaga ... 36
Ćwiczenie. — Kąt dwu płaszczyzn ... 37
Ruch obrotowy ... 37
Ruch obrotowy punktu ... 38
Ruch obrotowy prostej. — Pierwsze wykreślenie. — Drugie wykreślenie ... 38
Ruch obrotowy płaszczyzny ... 39
Uczynić prostę równoległą do płaszczyzny pionowej rzutów ... 39
Uczynić prostę prostopadłą do płaszczyzny poziomej rzutów ... 40
Uczynić płaszczyznę prostopadłą do płaszczyzny pionowej rzutów ... 40
Sprowadzić płaszczyznę do położenia równoległego do płaszczyzny poziomej rzutów ... 40
Ćwiczenie. — Znaleźć najkrótszą odległość prostej od osi rzutów ... 41
Metoda kładów ... 41
Zrobić kład punktu naokoło osi poziomej i odwrotnie. — Rozwiązanie ogólne. — Uwaga ... 41

Strony.

Powinowactwo. — Rzut prostokątny figury płaskiej i jej kład na płaszczyznę rzutów są z sobą w powinowactwie. —Wykresy przedstawiające kład punktu 42
Kład prostej 44
Kład za pomocą zmiany skali 44
Zastosowanie metody kładów. — Przez punkt dany nakreślić prostę, któraby z prostą daną tworzyła kąt znany 45
Nakreślić rzuty okręgu koła 45
Połączenie powyższych metod 49
Ustawić, za pomocą połączenia metod, płaszczyznę równolegle do płaszczyzny poziomej rzutów 49
Zastąpić płaszczyzny rzutów dwiema płaszczyznami jakkolwiek położonemi lecz prostopadłemi względem siebie 50
Zastosowanie. — Wyznaczyć najkrótszą odległość dwu prostych 51

ĆWICZENIA NALEŻĄCE DO ROZDZIAŁU IV

Zadanie I. — Ustawić płaszczyznę prostopadłe do osi rzutów. — Pierwszy sposób. — Drugi sposób 52
Zadanie II. — Ustawić płaszczyznę równolegle do osi rzutów. — Pierwszy sposób. — Drugi sposób 52
Zadanie III. — Obrócić prostę, o kąt dany, naokoło osi obrotu poziomej 52
Zadanie IV. — Obrócić płaszczyznę, o kąt dany, naokoło prostej obrazu 52
Zadanie V. — Obrócić prostę, o kąt dany, naokoło osi obrotu jakiejkolwiek 53
Zadanie VI. — Pomiędzy dwiema prostemi nakreślić prostę równoległą do płaszczyzny danej i mającą długość znaną 53
Zadanie VII. — Oznaczyć na prostej danej punkt, którego odległość od drugiej prostej jest znaną 53
Zadanie VIII. — Uczynić równoległemi rzuty pionowe dwu prostych danych 53
Zadanie IX. — Uczynić równoległemi ślady pionowe dwu płaszczyzn 53
Zadanie X. — Rozwiązać dwa powyższe zadania używając ruchu obrotowego 53
Zadanie XI. — Dopełnić wykreślenia rzutu pionowego kąta prostego, znając jego rzut poziomy i rzut pionowy jednego z jego boków 54
Zadanie XII. — Dwie płaszczyzny przecinające się pod kątem prostym doprowadzić za pomocą trzech obrotów do tego, żeby się zeszły z płaszczyznami rzutów 54
Zadanie XIII. — Dwie płaszczyzny przecinające się pod kątem prostym doprowadzić przez potrójną zmianę płaszczyzn rzutów de tego, żeby się zeszły z płaszczyznami rzutów 54
Zadanie XIV. — Znając rzut poziomy kąta trójściennego prostokątnego i znamię jego wierzchołka znaleźć jego rzut pionowy 54
Zadanie XV. — Przesunąć, względem punktu, prostej lub płaszczyzny, jednę z płaszczyzn rzutów równolegle do jej pierwotnego położenia 55
Zadanie XVI. — Przez punkt nakreślić prostę przecinającą inną prostę i koło nieleżące na tej samej płaszczyznie. — Rozwiązanie ogólne. — Wykreślenie 55
Zadanie XVII. — Znając długość sześciu krawędzi czworościanu, płaszczyznę jednej jego ściany i położenie jednej krawędzi tej ściany, nakreślić jego rzuty 56
Metoda przemiany figur 57
Metoda Monge'a. — Zasada ciągłości 57
Zadanie XVIII. — Zastosować metodę przemiany figur do przecięcia się trzech płaszczyzn wyznaczonych przez swe ślady 58
Zadanie XIX. — Wyprowadzić z rysunku przedstawiającego przecięcie trzech płaszczyzn, danych przez swe ślady, twierdzenie Desargues'a 58
Zadanie XX. — Wyprowadzić z rysunku przedstawiającego ślady płaszczyzny przesuniętej przez dwie proste przecinające się twierdzenie odwrotne twierdzeniu Desargues'a 58
Zadanie XXI. — Zrobić rzut ostrokręgowy okręgu koła podług innego okręgu koła o znanym promieniu .. 58

ROZDZIAŁ V

ZASTOSOWANIE PODANYCH METOD DO ROZWIĄZYWANIA ZADAŃ ODNOSZĄCYCH SIĘ DO PUNKTU, PROSTEJ I PŁASZCZYZNY

Strony.

Mierzenie odległości. — Odległość dwu punktów ... 60
Odległość punktu od płaszczyzny ... 61
Odległość jakiejkolwiek liczby punktów od danej płaszczyzny ... 62
Odległość punktu od prostej ... 63
Najkrótsza odległość dwu prostych ... 63
Kąty utworzone przez proste i płaszczyzny. — Kąt dwu prostych ... 64
Kąt prostej z płaszczyzną ... 64
Kąt prostej z płaszczyznami rzutów ... 65
Znaleźć rzuty prostej przechodzącej przez punkt dany i tworzącej z płaszczyznami rzutów kąty dane ... 65
Kąt dwu płaszczyzn ... 67
Kąt płaszczyzny z płaszczyznami rzutów ... 68
Przez punkt nakreślić płaszczyznę, tworzącą z płaszczyznami rzutów kąty dane ... 68

ĆWICZENIA NALEŻĄCE DO ROZDZIAŁU V

Zadanie I. — Znaleźć najkrótszą odległość rzutów prostej ... 69
Zadanie II. — Znaleźć wielkość boku sześcianu znając: 1° Rzuty d, d' prostej utworzonej przez przedłużenie jednego z jego boków; 2° Rzut poziomy δ przedłużenia drugiego boku lecz nieleżącego na tej samej płaszczyźnie co pierwszy; 3° Dwa rzuty a, a' punktu leżącego na prostej Δ ... 70
Zadanie III. — Nakreślić w odległości danej płaszczyznę równoległą do płaszczyzny danej ... 71
Zadanie IV. — Znaleźć odległość dwu prostych równoległych ... 71
Zadanie V. — Znając ślady płaszczyzny i rzut pionowy punktu danego, wyznaczyć rzut jego poziomy tak, żeby odległość jego od płaszczyzny była równa prostej danej ... 71
Twierdzenie I. — Jeżeli prosta tworzy z płaszczyznami rzutów kąty równe, dwa jej rzuty tworzą także kąty równe z osią rzutów i odwrotnie ... 71
Zadanie VI. — Zrobić wszelkie możliwe wykreślenia linii prostej jednakowo nachylonej do płaszczyzn rzutów ... 72
Twierdzenie II. — Jeżeli płaszczyzna dana tworzy z płaszczyznami rzutów kąty równe, jej ślady tworzą także kąty równe z osią rzutów i odwrotnie ... 72
Zadanie VII. — Zrobić wszelkie możliwe wykreślenia płaszczyzny jednakowo nachylonej do płaszczyzn rzutów. 72
Zadanie VIII. — Przez punkt dany nakreślić prostę tworzącą z płaszczyznami rzutów jeden i ten sam kąt dany ... 72
Zadanie IX. — Przez punkt dany nakreślić płaszczyznę bezpośrednio, któraby tworzyła z płaszczyznami rzutów kąty równe danemu ... 73
Zadanie X. — Wyznaczyć najkrótszą odległość dwu prostych, których rzuty są równoległe ... 75
Zadanie XI. — Z poprzedzającego rysunku wyprowadzić sposób kreślenia najkrótszej odległości dwu prostych jakichkolwiek ... 75
Zadanie XII. — Mając dane rzuty jednej prostej, rzut poziomy drugiej do niej równoległej i odległość pomiędzy niemi, znaleźć rzut pionowy drugiej prostej ... 76
Zadanie XIII. — Znaleźć wprost kąt utworzony przez płaszczyznę, której ślady przedstawiają jednę liniję prostą, z prostą, której rzuty zchodzą się ze śladami płaszczyzny ... 76
Zadanie XIV. — Znaleźć wprost kąt zawarty pomiędzy prostą profilu a płaszczyzną wyznaczoną przez oś rzutów i przez jeden z jej punktów ... 77

Strony.

Zadanie XV. — Znaleźć kąt prostej profilu z płaszczyzną ... 77
Zadanie XVI. — Wyznaczyć odległość punktu od prostej profilu ... 77
Zadanie XVII. — Znaleźć, za pomocą metody kładów, odległość punktu od prostej ... 77
Zadanie XVIII. — Nakreślić ślady płaszczyzny przechodzącej przez prostę obrazu w odległości znanej od punktu danego ... 78
Zadanie XIX. — Nakreślić cztery płaszczyzny równoległe i równooddalone znając jeden punkt każdej z nich ... 78
Zadanie XX. — Znając ślady poziome dwu płaszczyzn tworzących pomiędzy sobą kąt dany i rzut poziomy prostej ich wspólnego przecięcia, znaleźć ich ślady pionowe ... 79
Zadanie XXI. — Przez prostę leżącą na danej płaszczyźnie przesunąć inną płaszczyznę, któraby tworzyła z pierwszą kąt dany ... 76
Zadanie XXII. — Znając oba rzuty d, d' jednej prostej, rzut poziomy δ drugiej i rzut ab najkrótszej odległości D od Δ, znaleźć rzuty pionowe prostych AB i Δ i rzeczywistą wielkość tejże odległości ... 79
Zadanie XXIII. — Znając oba rzuty prostej D, rzut poziomy drugiej prostej Δ, rzeczywistą wielkość ich najkrótszej odległości jakoteż rzuty punktu, w którym ta ostatnia spotyka prostę D, znaleźć rzut poziomy prostej Δ i oba rzuty najkrótszej odległości ... 80
Zadanie XXIV. — Na płaszczyźnie danej nakreślić przez jeden z jej punktów prostę tworzącą z kierunkiem osi rzutów kąt dany ... 80
Zadanie XXV. — Znając jeden z rzutów prostej, oba rzuty jednego z jej punktów i kąt jaki ona tworzy z płaszczyzną, znaleźć drugi rzut tej prostej ... 80
Zadanie XXVI. — Wykreślić odległość punktu od prostej obrazu ... 81
Zadanie XXVII. — Nakreślić ślady płaszczyzny nachylonej do poziomu pod kątem 45 stopni, znając: 1° rzut pionowy jednej z jego prostych obrazu i 2° rzut na tęż płaszczyznę rzutów jednego z punktów płaszczyzny szukanej, którego oddalenie jest dwa razy większe od oddalenia prostej ... 81
Zadanie XXVIII. — Wykreślić w szczególnych przypadkach kąt utworzony przez dwie płaszczyzny, jakoteż ślady płaszczyzny dzielącej na dwie równe części jeden z kątów dwuściennych, które one tworzą pomiędzy sobą ... 81
Zadanie XXIX. — Przez punkt dany nakreślić płaszczyznę jednakowo nachyloną do obu płaszczyzn spólrzędnych, a którejby ślady w przestrzeni tworzyły kąt dany ... 82
Zadanie XXX. — Znając rzeczywistą wielkość jakiegokolwiek kąta, dwa rzuty jednego z jego boków i rzut poziomy drugiego boku, nakreślić rzut pionowy tegoż boku ... 82
Zadanie XXXI. — Wykreślić kąt pomiędzy dwiema prostemi, których rzuty przeciwnego nazwiska zchodzą się z sobą ... 82
Zadanie XXXII. — Przez prostę daną przez dwa rzuty spotykające się w jednym punkcie na osi rzutów, przesunąć płaszczyznę, którejby ślady, po podniesieniu ich z kładu, utworzyły pomiędzy sobą kąt podzielony przez prostę daną na dwie równe części ... 83
Zadanie XXXIII. — Przez trzy punkta dane nakreślić równoległe do prostej D trzy płaszczyzny takie, żeby kąt dany utworzony przez dwie pierwsze był podzielony na dwie równe części przez trzecią ... 83
Zadanie XXXIV. — Znając jeden punkt każdej z czterech prostych i punkt ich wspólnej prostopadłej, nakreślić cztery proste, któreby brane po dwie nie leżały na jednej płaszczyźnie, były równooddalone i miały jednę prostopadłę wspólną ... 84

ROZDZIAŁ VI

ZADANIA DOTYCZĄCE KĄTÓW TRÓJŚCIENNYCH

Wiadomości wstępne ... 85
Zadanie ogólne. — Wyznaczyć części nieznane kąta trójściennego, znając jednę jego ścianę, rzut na tę ścianę punktu leżącego na krawędzi przeciwległej i wzniesienie tego punktu względem płaszczyzny tej ściany ... 85

Strony.

Pierwszy przypadek. — Znając ściany kąta trójściennego znaleźć kąty płaskie jego kątów dwuściennych... 86
Drugi przypadek. — Znając dwie ściany kąta trójściennego i kąt dwuścienny zawarty pomiędzy niemi, wykreślić pozostałe części nieznane..... 87
Trzeci przypadek. — Znając dwie ściany kąta trójściennego jakoteż kąt dwuścienny przeciwległy jednej z nich, znaleźć pozostałe części niewiadome..... 87
Czwarty przypadek. — Znając ścianę kąta trójściennego i dwa kąty dwuścienne jej przyległe, znaleźć trzy jego pozostałe części..... 88
Sprowadzenie kąta do poziomu..... 88

ROZDZIAŁ VII

O WIELOŚCIANACH

Wiadomości wstępne..... 89
Przedstawienie wielościanów. — Wielościan wypukły zamknięty ze wszech stron. — Kiedy jakikolwiek punkt obrany na powierzchni wielościanu jest widzialny. — Wielościan wypukły otwarty i uzupełniony co do swej powierzchni. — Wielościan niewypukły. — Przedstawienie ostrosłupa. — Części widzialne. — Zastosowanie..... 90
Przecięcia płaskie wielościanów..... 94
Jednokładność płaska..... 94
Stosunek nieharmoniczny..... 97
Przecięcie płaskie graniastosłupa..... 100
Przecięcie płaskie ostrosłupa..... 101
Przez punkt dany przesunąć płaszczyznę przecinającą ściany boczne ostrosłupa czworościennego podług równoległoboku..... 102
Przecięcie wielościanu z prostą. — Zastosowanie do graniastosłupa i do ostrosłupa..... 104
Przecięcie się dwu wielościanów. — Zastosowanie. — Nakreślić przecięcie się dwu sześcianów mających jednę przekątnię pionową wspólną..... 105
Przecięcie się dwu ostrosłupów..... 109
Nakreślić przecięcie się graniastosłupa z ostrosłupem..... 112
Przecięcie się dwu graniastosłupów..... 112
Rozwijanie wielościanów..... 113
Linija najmniejsza łącząca dwa punkta powierzchni wielościanu..... 113
Przecięcie proste graniastosłupa ukośnego..... 116
Kreślenie kul wpisanych i opisanych na wielościanach..... 117
Opisać kulę na czworościanie..... 117
Nakreślić kule styczne do czterech ścian czworościanu..... 118

ĆWICZENIA NALEŻĄCE DO ROZDZIAŁÓW VI I VII

Zadanie I. — Wyznaczyć środki kul stycznych do czterech płaszczyzn opierając wykreślenie na następującym twierdzeniu: Jeżeli kula jest wpisaną w czworościan i jeżeli zrobimy kład wewnętrznie trzech ścian na czwartą, to cztery punkta styczności kuli z czworościanem zejdą się w jeden, nadto punkt wspólny zetknięcia jest środkiem koła opisanego na trójkącie utworzonym przez trzy kłady czwartego wierzchołka..... 121
Zadanie II. — Mając dane trzy punkta, nakreślić przez jeden z nich prostę oddaloną od dwu pozostałych o dwie długości znane..... 122
Zadanie III. — Przez punkt dany w przestrzeni nakreślić prostę, której znamy odległość od prostej danej i od punktu..... 122

Strony.

Zadanie IV. — Nakreślić prostę opierającą się na dwu prostych danych nie leżących na jednej płaszczyznie i tworzącą z temi prostemi kąty odpowiednio równe kątom danym..... 123

Zadanie V. — Znając kąty utworzone przez jednę z krawędzi ostrosłupa z bokami podstawy, którą ta krawędź spotyka, długość tej krawędzi i rzuty podstawy, nakreślić rzuty ostrosłupa..... 124

Zadanie VI. — Nakreślić rzuty pięciu wielościanów foremnych i rozwinąć ich powierzchnię znając długość ich krawędzi..... 124

Zadanie VII. — Nakreślić kąty płaskie kątów dwuściennych w pięciu wielościanach foremnych..... 126

Zadanie VIII. — Znając rzut poziomy podstawy ostrosłupa, rzuty pionowe trzech jej wierzchołków, rzut poziomy spodka wysokości i jej długość, wykreślić pozostałe rzuty ostrosłupa..... 126

Zadanie IX. — Sprowadzić do poziomu kąt zawarty pomiędzy prostą poziomą i prostą jakąkolwiek..... 126

Zadanie X. — Przez punkt obrany na jednej z krawędzi bocznych czworościanu, nakreślić płaszczyznę, któraby wyznaczyła na powierzchni bocznej tegoż przecięcie trójkątne o obwodzie najmniejszym..... 126

Zadanie XI. — Nakreślić kulę styczną do krawędzi kąta trójściennego i do płaszczyzny poziomej rzutów..... 127

Zadanie XII. — Przez punkt dany nakreślić kulę styczną do trzech ścian kąta trójściennego..... 128

Zadanie XIII. — Mając dane w przestrzeni dwie proste przecinające się i dwa punkta nakreślić przez te dwa punkta kulę styczną do prostych danych..... 128

Zadanie XIV. — Mając dane trzy punkta i prostę, nakreślić przez te trzy punkta kulę styczną do prostej danej..... 128

Zadanie XV. — Przez punkt dany nakreślić płaszczyznę, którąby przecinała ściany boczne graniastosłupa danego podług wieloboku dającego się wpisać w koło..... 128

Zadanie XVI. — Nakreślić rzuty równoległościanu, którego trzy krawędzie przypadają na trzech prostych danych w przestrzeni..... 129

Zadanie XVII. — Nakreślić rzuty równoległościanu prostokątnego znając rzut pionowy jego wierzchołka, dwa rzuty jednej z jego krawędzi przedłużonej, rzuty jednego punktu drugiej krawędzi przedłużonej i w końcu rzut poziomy tej ostatniej..... 129

Zadanie XVIII. — Znając długość jednego boku sześciauu i rzuty trzech punktów leżących na jego trzech krawędziach przyległych, nakreślić: 1° rzuty sześcianu, 2° jego przecięcie płaszczyzną dającą sześciobok foremny, jakoteż znaleźć rzuty i rzeczywistą wielkość tego przecięcia..... 130

Zadanie XIX. — Nakreślić rzuty czworościanu, znając jeden punkt każdej z jego krawędzi..... 130

Zadanie XX. — Nakreślić rzuty triakontaetru o ścianach czworokątnych..... 131

Zadanie XXI. — Mając równoległościan dowolnie położony względem płaszczyzn rzutów i trzy jego krawędzie przyległe do siebie, sprowadzić ten równoległościan za pomocą trzech po sobie następujących obrotów, pierwszy naokoło osi pionowej, drugi naokoło prostopadłej do płaszczyzny pionowej, a trzeci naokoło osi pionowej, do takiego położenia, żeby jego krawędzie A i B stały się równoległemi do płaszczyzny poziomej rzutów, zaś krawędź C równoległą do płaszczyzny pionowej..... 132

Zadanie XXII. — Znając rzut poziomy równoległościanu prostokątnego i rzut pionowy jednego z jego wierzchołków, nakreślić rzut pionowy równoległościanu..... 132

Zadanie XXIII. — Przeciąć sześcian taką płaszczyzną, żeby przekrój ten był sześciobokiem mającym kąty równe i dwa boki po sobie idące w stosunku jeden do dwóch..... 132

Zadanie XXIV. — Znając rzuty jednej ze ścian czworościanu równościennego, nakreślić: 1° rzuty tego czworościanu, 2° kule styczne do czterech jego ścian..... 132

Zadanie XXV. — Znając rzuty podstawy i rzeczywistą wielkość wysokości czworościanu o krawędziach przeciwległych prostokątnych, wyznaczyć: 1° rzuty czworościanu, 2° najkrótsze odległości krawędzi przeciwległych, 3° kulę przechodzącą przez środki dwu krawędzi przeciwległych i przez spodki ich najkrótszej odległości..... 134

Zadanie XXVI. — Znając rzuty czworościanu, którego podstawa leży na płaszczyznie poziomej rzutów, znaleźć: 1° rzuty prostej przechodzącej przez wierzchołek ostrosłupa i równo nachylonej do jego ścian bocznych, 2° taki punkt tej prostej, z któregoby można zobaczyć powierzchnię boczną ostrosłupa w rzeczywistej wielkości na płaszczyznie poziomej rzutów..... 134

Zadanie XXVII. — Znając rzuty czworościanu mającego podstawę na płaszczyznie poziomej rzutów, nakreślić

Strony.

najkrótsze odległości krawędzi przeciwległych branych po dwie, dalej najkrótsze odległości wysokości czworościanu także branych po dwie, i wreszcie najkrótsze odległości prostopadłych wspólnych zląd znalezionych również branych po dwie ... 135
Zadanie XXVIII. — Nakreślić rozwinięcie czteroześciościanu (tétrahéxaèdre) ... 135
Zadanie XXIX. — Mając dane na płaszczyźnie poziomej rzutów: 1° jednę z podstaw ostrosłupa czworokątnego ściętego, 2° jeden punkt śladu płaszczyzny drugiej podstawy, nakreślić rzut poziomy drugiej podstawy w ten sposób, żeby on był prostokątem, i dokończyć wykreślenia rzutu poziomego danego ostrosłupa ściętego ... 135
Zadanie XXX. — Znając podstawę i wysokość ostrosłupa czworościennego takiego, że równoległoboki oznaczone na ścianach bocznych mają za rzuty na płaszczyznę podstawy kwadraty, nakreślić rzuty wierzchołka tego ostrosłupa ... 136
Zadanie XXXI. — Mając dane płaszczyzny dwu ścian bocznych i podstawę ostrosłupa czworościennego, postąpić w taki sposób, żeby rzut na płaszczyznę podstawy równoległoboków, nakreślonych na ścianach bocznych, był kwadratem ukośnym ... 136
Zastosować sposób przemiany figur do trzech ostatnich wykreśleń ... 137
Zadanie XXXII. — Mając podstawę ostrosłupa czworościennego, postąpić w ten sposób, żeby jedno z przecięć płaskich tego ostrosłupa miało za rzut na płaszczyznę podstawy drugi czworobok dany ... 138
Zadanie XXXIII. — Nakreślić rzuty dwunastościanu romboidalnego ... 139
Zadanie XXXIV. — Nakreślić wspólne przecięcie dwunastościanu romboidalnego, którego znaleźliśmy rzuty, z graniastosłupem czworościennym prostym, mającym krawędzie równoległe do osi rzutów ... 141

KSIĘGA DRUGA

ROZDZIAŁ PIERWSZY

WIADOMOŚCI WSTĘPNE

Określenia. — Powierzchnie obrotowe. — Powierzchnie prostokreślne. — Twierdzenie ... 145
Płaszczyzna styczna w ogólności. — Twierdzenie zasadnicze. — Wynik I. — Wynik II. — Wynik III ... 148
Przedstawienie powierzchni. — Obwód pozorny. — Twierdzenie ... 149

ROZDZIAŁ II

PŁASZCZYZNY STYCZNE DO WALCA I DO OSTROKRĘGU

Twierdzenie zasadnicze. — O liczbie warunków potrzebnych do wyznaczenia płaszczyzny stycznej ... 151
Rzuty punktu leżącego na powierzchni stożkowej lub na powierzchni walcowej ... 152
Przez punkt dany na powierzchni stożkowej nakreślić do niej płaszczyznę styczną ... 152
Przez punkt dany na powierzchni walcowej nakreślić do niej płaszczyznę styczną ... 152
Kreślenie obwodu pozornego powierzchni stożkowej ... 152
Kreślenie obwodu pozornego powierzchni walcowej ... 153
Przez punkt leżący zewnątrz ostrokręgu nakreślić do niego płaszczyznę styczną ... 153
Przez punkt dany zewnątrz walca nakreślić do niego płaszczyznę styczną ... 155
Wyznaczyć obwód pozorny ostrokręgu lub walca dla jakiegokolwiek punktu widzenia ... 156

Strony.

Nakreślić płaszczyznę styczną do ostrokręgu, równolegle do prostej danej. 156
Nakreślić płaszczyznę styczną do walca, równolegle do prostej danej. 157
Mając daną powierzchnię walcową lub ostrokręgową i płaszczyznę jakąkolwiek wyznaczyć punkta, w których ta płaszczyzna spotyka normalnie powierzchnię daną. 158
Przez punkt dany nakreślić prostę styczną jednocześnie do dwu powierzchni stożkowych lub walcowych. 159
Oznaczyć warunek na mocy którego można byłoby nakreślić płaszczyznę styczną do walca lub ostrokręgu równolegle do płaszczyzny danej, a przypuszczając, że ten warunek ma miejsce, nakreślić płaszczyznę styczną. . . 159
Znaleźć warunki niezbędne do nakreślenia płaszczyzny stycznej wspólnej dwu powierzchniom walcowym lub stożkowym. 159
Nakreślić płaszczyzny styczne wspólne do dwu powierzchni stożkowych lub walcowych, podległych jednemu warunkowi 160
Ćwiczenie. — Nakreślić do walca płaszczyzny styczne, nachylone do poziomu pod kątem danym. 164
Nakreślić do dwu powierzchni walcowych lub stożkowych płaszczyzny styczne równolegle do siebie. 165
Niech będzie danym pierwszy ostrokrąg mający za wierzchołek S_1 a za podstawę krzywę B_1, leżącą na płaszczyźnie P_1; przeciąwszy go płaszczyzną P_2, przyjmijmy krzywę B_2 powstałą z przecięcia za podstawę drugiego ostrokręgu, mającego za wierzchołek punkt S_2 dany, przeciąwszy znów ten drugi ostrokrąg płaszczyzną P_3, przyjmijmy krzywę B_3, powstałą z przecięcia, za podstawę trzeciego ostrokręgu, mającego za wierzchołek punkt S_3 dany i t. d., mamy nakreślić do ostatniego, tak otrzymanego ostrokręgu, płaszczyznę styczną przez punkt M, leżący zewnątrz tej powierzchni. 166

ZASTOSOWANIE PŁASZCZYZN STYCZNYCH DO OSTROKRĘGÓW LUB WALCÓW DO ROZWIĄZYWANIA ROZMAITYCH ZADAŃ

Zadanie I. — Przez prostę daną nakreślić płaszczyznę nachyloną pod kątem danym do płaszczyzny jakiejkolwiek, lub do jednej z płaszczyzn rzutów. 167
Zadanie II. — Przez punkt dany nakreślić płaszczyznę, czyniącą kąty dane z płaszczyznami rzutów. 168
Zadanie III. — Przez punkt dany nakreślić płaszczyznę tworzącą kąty dane z dwiema płaszczyznami jakiemikolwiek. 171
Piąty przypadek kąta trójściennego. — Znając dwa kąty dwuścienne i ścianę przeciwległą jednemu z nich, znaleźć trzy pozostałe części kąta trójściennego. 171
Szósty przypadek kąta trójściennego. — Znając kąty dwuścienne kąta bryłowego, znaleźć jego ściany. — Uwaga. 171

ROZDZIAŁ III

WŁASNOŚCI KRZYWYCH PŁASKICH I SKOŚNYCH JAKOTEŻ ICH RZUTY

Określenia. — Gałęzie nieskończone. 173
Obwijające i obwinięte. — Twierdzenie. 173
Krzywe geometryczne. — Krzywa rysunkowa. — Krzywa błędu. 175
Przez punkt obrany na krzywej rysunkowej nakreślić do niej styczną. 175
Wyznaczyć punkt dotknięcia krzywej rysunkowej ze styczną przechodzącą przez punkt zewnątrz krzywej leżący 175
Punkta nadzwyczajne i punkta szczególne. — Punkta przecięcia. — Punkta zwrotu. — Punkt wielokrotny. — Punkt podwójny. — Punkta kątowe. 176
Płaszczyzna ściśle styczna. — Określenie. 178
Płaszczyzna ściśle styczna przecina krzywę. 178

Strony.

Jeżeli tworząca ostrokręgu jest styczną do jednej z krzywych jego powierzchni, to płaszczyzna ściśle styczna tej krzywej w punkcie dotknięcia dotyka powierzchni w tymże punkcie ... 179
Punkta przecięcia rzutu krzywej skośnej ... 180
Punkta zwrotu rzutu krzywej skośnej. — Uwaga ... 181

ROZDZIAŁ IV.

PŁASZCZYZNY STYCZNE DO POWIERZCHNI OBROTOWYCH. — OBWÓD POZORNY

Płaszczyzna styczna do każdej powierzchni obrotowej jest prostopadłą do płaszczyzny południka przechodzącego przez punkt dotknięcia ... 182
Normalna w jakimkolwiek punkcie powierzchni obrotowej jest normalną południka przechodzącego przez tenże punkt. — Uwaga ... 182
Jeżeli jakakolwiek powierzchnia obrotowa ma południk główny prostopadły względem jednej z płaszczyzn rzutów, to jest on obwodem pozornym tej powierzchni względem tejże płaszczyzny rzutów ... 183
Powierzchnie obwijające. — Określenia ... 183
Powierzchnia obwijająca dotyka obwiniętej odpowiadającej wzdłuż całej cechy ... 183
Powierzchnia obrotowa może być uważaną za obwijającę kuli, ostrokręgu lub walca ... 184
Obwodem pozornym powierzchni obwijającej jest miejsce geometryczne punktów spotkania się obwodów pozornych jej obwiniętych z odpowiedniemi cechami ... 185
Kreślenie płaszczyzn stycznych i obwodów pozornych powierzchni obrotowych. — Przedstawić powierzchnię obrotową o osi pionowej przez jej obwody pozorne i znaleźć jeden z rzutów jednego z jej punktów, znając rzut drugi. — Kreślenie obwodu pozornego w rzucie poziomym. — Obwód pozorny w rzucie pionowym ... 186
Różne własności obwodów pozornych powierzchni obwijających ... 186
Kreślenie stycznej do pionowego obwodu pozornego. — Punkt najwyższy i punkt najniższy pionowego obwodu pozornego. — Ostateczne punkta pionowego obwodu pozornego w kierunku poprzecznym. — Punkta podwójne pionowego obwodu pozornego. — Styczne w punktach podwójnych pionowego obwodu pozornego. 187
Przez jakikolwiek punkt powierzchni obrotowej nakreślić do niej płaszczyznę styczną ... 188
Sposób kreślenia płaszczyzny stycznej do powierzchni obrotowej z osią pionową i o tworzących jakichkolwiek przez jeden z jej punktów. — Styczność z powierzchnią obrotową odpowiada jednemu warunkowi ... 190
Przez punkt leżący zewnątrz powierzchni obrotowej, nakreślić do niej płaszczyznę styczną na równoleżniku danym ... 191
Nakreślić równolegle do prostej danej płaszczyznę styczną do powierzchni obrotowej na równoleżniku danym ... 192
Nakreślić, przez punkt zewnątrz leżący lub równolegle do prostej danej, płaszczyznę dotykającą powierzchni obrotowej na południku danym. — Powierzchnia pierścieniowa ... 193
Znaleźć rzuty krzywej dotknięcia ostrokręgu opisanego o wierzchołku danym, z powierzchnią obrotową. — Modyfikacye zachodzące w sposobie obwiniętych stożkowych dla cech bliskich naszyjnika i równika ... 195
Jeżeli krzywa ma płaszczyznę symetryi prostopadłą do płaszczyzny poziomej rzutów, to jej punkt najwyższy i najniższy leżą na tej płaszczyźnie i odwrotnie. — Punkta najwyższe i najniższe. — Równoleżniki graniczne. — Punkta zwrotu drugiego rodzaju w rzucie pionowym. — Punkta przysposobione w rzucie pionowym. — Asymptoty gałęzi przysposobionych w rzucie pionowym. — Południki graniczne. — Punkta zwrotu drugiego rodzaju na rzucie poziomym. — Punkta przysposobione na rzucie poziomym. — Gałęzie nieskończone części przysposobionych na rzucie poziomym. — Punkta obwodu pozornego ... 196
Nakreślić ślad poziomy ostrokręgu opisanego na powierzchni obrotowej. — Kreślenie stycznej. — Punkta zwrotu pierwszego rodzaju. — Styczne w punktach zwrotu. — Części widzialne. — Punkta ostateczne w kierunku poprzecznym. — Punkt najwyższy i punkt najniższy. — Punkta w nieskończoności. — Asymptoty. — Sposób rzutów zbieżnych ... 200
Zastosowanie sposobu rzutów zbieżnych do kreślenia krzywej dotknięcia powierzchni obrotowej z ostrokręgiem opisanym, którego wierzchołek jest znany ... 202

Strony.

Nakreślić rzuty krzywej dotknięcia powierzchni obrotowej z walcem opisanym a równoległym do kierunku danego. — Punkt najwyższy i najniższy. — Równoleżniki graniczne. — Punkta obwodu pozornego. — Punkta przysposobione na rzucie pionowym 203

Nakreślić ślad poziomy walca opisanego w kierunku danym na powierzchni obrotowej 206

Nakreślić rzuty krzywej dotknięcia powierzchni pierścieniowej ogólnej z walcem opisanym na niej w kierunku danym. — Sposób Dunesme'a. — Styczne do konchoidy jakiejkolwiek krzywej 207

Znaleźć rzuty krzywej dotknięcia powierzchni pierścieniowej z walcem opisanym na niej w kierunku danym. — Styczna w jednym z punktów krzywej dotknięcia. — Punkta na obwodzie pozornym. — Punkta na południku obrane. — Części widzialne 209

Ostrokręgi i walce opisane na powierzchniach obrotowych drugiego stopnia. — Krzywą dotknięcia powierzchni drugiego stopnia z ostrokręgiem opisanym na niej jest krzywa płaska 211

Rzut krzywej drugiego stopnia na jakąkolwiek płaszczyznę i w jakimkolwiek układzie jest także krzywą drugiego stopnia 212

Nakreślić rzuty krzywej dotknięcia powierzchni obrotowej drugiego rzędu z ostrokręgiem opisanym na niej, a którego wierzchołek jest danym. — Styczna w jednym z punktów krzywej dotknięcia. — Punkta obwodu pozornego. — Punkt najwyższy i punkt najniższy. — Rzuty wierzchołków 212

Nakreślić ślad poziomy ostrokręgu opisanego na powierzchni obrotowej drugiego stopnia 214

Nakreślić rzuty krzywej dotknięcia i ślad poziomy walca opisanego w kierunku danym, na powierzchni obrotowej drugiego stopnia 215

Nakreślić obwody pozorne jakiejkolwiek powierzchni obrotowej. — Rozwinięta. — Rozwijająca. — Jakakolwiek krzywa posiada kilka rozwijających 215

Punkt przecięcia się rozwijającej ze swą rozwiniętą jest punktem zwrotu 217

Przedstawić powierzchnię pierścieniową przez jej obwody pozorne 217

Przedstawić powierzchnię obrotową, której oś jest prostą obrazu, przez jej obwody pozorne 220

Znając oś i promień walca obrotowego, nakreślić obwody pozorne i ślady tej powierzchni 220

Znając oś ostrokręgu, jego wierzchołek i kąt tworzący, nakreślić obwody pozorne i ślady powierzchni 220

Nakreślić do powierzchni obrotowej płaszczyznę styczną, równoległą do płaszczyzny danej 221

Nakreślić normalnę do powierzchni obrotowej, równolegle do prostej danej 221

Przez prostę daną nakreślić płaszczyznę styczną do jakiejkolwiek powierzchni obrotowej 222

Twierdzenie Monge'a. — Jeżeli dwie powierzchnie drugiego stopnia dotykają się z sobą w dwu punktach wspólnych, to przecinają się one z sobą podług dwu krzywych płaskich, których płaszczyzny przechodzą przez prostę łączącą te dwa punkta dotknięcia 222

Jeżeli dwie powierzchnie drugiego stopnia są opisane na trzeciej, to ich wspólne przecięcie jest układem dwu krzywych płaskich, których płaszczyzny przechodzą przez prostę wspólnego przecięcia się płaszczyzn krzywych dotknięcia 224

Jeżeli na powierzchni drugiego stopnia opiszemy dwa ostrokręgi, to ich wspólne przecięcie będzie układem dwu krzywych płaskich, których płaszczyzny przechodzą przez prostę wspólnego przecięcia się płaszczyzn krzywych dotknięcia 224

Przez prostę daną nakreślić płaszczyznę styczną do powierzchni obrotowej drugiego stopnia. — Elipsoida i hyperboloida jednopowłokowa. — Hyperboloida obrotowa dwupowłokowa. — Paraboloida obrotowa ... 224

Przez punkt dany nakreślić płaszczyznę styczną wspólną dwu powierzchniom obrotowym. — Kiedy powierzchnie dane są jednokładne. — Kiedy dwie powierzchnie są kulami 226

Przez punkt dany nakreślić płaszczyznę styczną wspólną dla powierzchni obrotowej i dla ostrokręgu. — Przypadek gdy powierzchnia obrotowa jest kulą 227

Nakreślić płaszczyznę styczną do trzech powierzchni obrotowych, z których dwie są podobnemi (homothétiques). — Przypadek trzech kul 288

ROZDZIAŁ V

1° HYPERBOLOIDA OBROTOWA JEDNOPOWŁOKOWA LUB POWIERZCHNIA SKOŚNA OBROTOWA

Strony.

Określenia ... 229
Rzuty tworzących prostolinijnych hyperboloidy jednopowłokowej na płaszczyznę koła szyjnego lub na płaszczyznę doń równoległą są styczne do koła szyjnego lub do jego rzutu ... 230
Przecięcia płaskie hyperboloidy obrotowej jednopowłokowej są krzywemi drugiego stopnia ... 231
Rzut przecięcia płaskiego ostrokręgu obrotowego na płaszczyznę, przechodzącą przez wierzchołek a prostopadłą do osi, jest krzywą stożkową, której jednem ogniskiem jest wierzchołek ostrokręgu, a kierownicą odpowiednią ślad płaszczyzny siecznej na płaszczyznę rzutów ... 231
Hyperboloida skośna obrotowa może być utworzoną zupełnym obrotem hyperboli naokoło jej osi głównej ... 232
Hyperboloida obrotowa jednopowłokowa ma podwójny sposób tworzenia prostolinijny ... 233
Różnice tworzących różnych układów ... 234
Dwie tworzące należące do układów różnych są zawsze na jednej płaszczyźnie, zaś dwie tworzące jednego układu nigdy nie leżą na jednej płaszczyźnie ... 234
Wszelka płaszczyzna, przechodząca przez jednę tworzącę prostolinijną hyperboloidy obrotowej jednopowłokowej, jest styczną do powierzchni w jednym z punktów tej tworzącej ... 236
Ostrokrąg asymptotyczny hyperboloidy obrotowej jednopowłokowej jest obwijającym płaszczyzn asymptotycznych tej powierzchni ... 237
Ostrokrąg asymptotyczny hyperboloidy obrotowej jednopowłokowej jest miejscem geometrycznem prostych, otrzymanych z przeniesienia do środka koła szyjnego, asymptot do przecięć płaskich hyperboloidy równoległe do nich samych ... 237
Przedstawić przez swe obwody pozorne hyperboloidę obrotową jednopowłokową ... 237
Znaleźć rzuty jednego z punktów powierzchni skośnej obrotowej i nakreślić przezeń do powierzchni płaszczyznę styczną ... 238
Zadanie odwrotne płaszczyzny stycznej ... 239
Wyznaczanie obwiniętych kulistych ... 239
Wyznaczanie obwiniętych stożkowych ... 240
Nakreślić przez punkt dany lub równolegle do prostej danej płaszczyznę dotykającą hyperboloidy obrotowej jednopowłokowej podług równoleżnika wskazanego, lub podług wskazanej tworzącej ... 240
Mając daną hyperboloidę obrotową jednopowłokową nakreślić do niej przez tworzącę wskazaną płaszczyznę styczną nachyloną do poziomu pod kątem danym ... 240
Mając daną hyperboloidę obrotową jednopowłokową nakreślić do niej płaszczyznę styczną równoległą do płaszczyzny danej ... 240
Jeżeli dwie powierzchnie drugiego rzędu mają dwie proste wspólne, to ich przecięcie jest układem czterech prostych ... 241
Paraboloida hyperboliczna przedstawia dwa sposoby tworzenia prostolinijne ... 241
Własności tworzących prostolinijnych paraboloidy hyperbolicznej ... 242
Wyznaczyć punkta spotkania się prostej z hyperboloidą obrotową jednopowłokową. — Rozwiązanie DULEAU. — Rozwiązanie p. ROUCHÉ. — Rozmaite przypadki ... 243
Przez prostę daną nakreślić płaszczyznę styczną do hyperboloidy obrotowej jednopowłokowej. — Warunki rozwiązalności zadania ... 246
Przez punkt dany nakreślić do hyperboloidy skośnej płaszczyznę styczną dotykającą powierzchni w punkcie leżącym na południku obranym ... 247
Nakreślić równolegle do prostej danej płaszczyznę styczną do hyperboloidy w punkcie leżącym na południku obranym ... 247
Znaleźć krzywę dotknięcia i ślad poziomy ostrokręgu lub walca opisanego na hyperboloidzie obrotowej jednopowłokowej. — Styczna w jakimkolwiek punkcie krzywej dotknięcia ... 247

Stro

Zastosowanie. — Przez prostę daną nakreślić płaszczyznę styczną do powierzchni obrotowej jakiejkolwiek. — Ogólne rozwiązanie MONGE'a ... 248

ĆWICZENIA ODNOSZĄCE SIĘ DO PŁASZCZYZN STYCZNYCH DO POWIERZCHNI OBROTOWYCH

Zadanie I. — Mając dane dwie proste wyznaczyć ich wspólną prostopadłę używając walca obrotowego mającego za oś jednę prostę a stycznego do drugiej ... 249
Zadanie II. — Nakreślić normalnę wspólną do dwu ostrokręgów danych ... 250
Zadanie III. — Nakreślić kulę dotykającą dwu ostrokręgów, lub walca i ostrokręgu, lub też dwu walców danych, w dwu punktach wprost przeciwnych ... 251
Zadanie IV. — Mając dane na powierzchni kuli trzy koła nakreślić czwarte do nich styczne ... 251
Zadanie V. — Nakreślić rzuty bryły opisanej obrotem trójkąta równobocznego naokoło jednego z boków ... 254
Twierdzenie I. — Przez krzywę drugiego stopnia i trzy punkta można przesunąć dwie powierzchnie stożkowe drugiego stopnia, a nie więcej ... 254
Zadanie VI. — Do ostrokręgu przechodzącego przez krzywę drugiego stopnia i przez trzy punkta, nakreślić płaszczyznę styczną przez jeden z punktów danych ... 255
Twierdzenie II. — Przez dwie krzywe drugiego stopnia przecinające się w dwu punktach można nakreślić tylko dwa ostrokręgi a nie więcej ... 255
Zadanie VII. — Znaleźć wierzchołki dwu ostrokręgów, które można nakreślić przez parabolę, leżącą na płaszczyźnie poziomej rzutów, i przez koło zatoczone na cięciwie paraboli jako średnicy, na płaszczyźnie nachyłonej do poziomu pod kątem 45° ... 256
Zadanie VIII. — Mając dane dwie proste i jeden punkt na każdej z nich, wyznaczyć dwa walce obrotowe dotykające prostych w punktach danych i tak, żeby : 1° w tych punktach płaszczyzny styczne były równoległe pomiędzy sobą, jakoteż, żeby 2° te punkta należały do przecięcia prostego walca ... 257
Zadanie IX. — Nie używając kul wpisanych, nakreślić płaszczyznę styczną wspólną dwu ostrokręgom obrotowym współwierzchołkowym ... 258
Zadanie X. — Znając wysokość wspólną trzech ostrokręgów obrotowych równych, mających osie w kącie 1 i dotykających się co dwa podług tworzących, wiedząc nadto, że jeden z nich spotyka obie płaszczyzny rzutów, a drugi tylko płaszczyznę poziomą podług tworzącej profilu, nakreślić ich rzuty ... 258
Zadanie XI. — Mając dane trzy ostrokręgi o wierzchołkach na jednej linii prostej, z których pierwszy jest jakimkolwiek, a dwa pozostałe mają za kierownice przecięcia płaskie pierwszego, nakreślić do tych dwu ostatnich płaszczyznę styczną wspólną ... 261
Jeżeli wierzchołki trzech powierzchni stożkowych drugiego stopnia leżą na jednej linii prostej, a jedna z nich spotyka dwie pozostałe podług krzywych płaskich, to te ostatnie przecinają się z sobą także podług krzywej płaskiej ... 261
Określenie. — Rzuty bryłowe (stéréographiques) ... 262
Rzutem bryłowym koła leżącego na kuli jest koło, którego środek jest rzutem wierzchołka ostrokręgu dotykającego kuli podług koła danego ... 262
Zadanie XII. — Nakreślić płaszczyznę styczną wspólną dwu ostrokręgom, mającym wierzchołek wspólny leżący na powierzchni kuli danej, zaś podstawy na tejże kuli otrzymane z przecięcia jej dwiema płaszczyznami danemi ... 262
adanie XIII. — Mając dwa ostrokręgi obrotowe dane, nakreślić obwody pozorne tych powierzchni i płaszczyzny styczne równoległe ... 263
Zadanie XIV. — Nakreślić płaszczyznę równooddaloną od czterech kul danych ... 263
Zadanie XV. — Do dwu ostrokręgów mających wierzchołek wspólny w ognisku południka elipsoidy spłaszczonej, a za podstawę dwa przecięcia płaskie tejże elipsoidy, nakreślić wspólną płaszczyznę styczną ... 264
Zadanie XVI. — Opisawszy na elipsoidzie obrotowej o osi pionowej walec równoległy do kierunku danego, nakreślić doń płaszczyznę styczną przez punkt obrany zewnątrz tej powierzchni ... 264
Zadanie XVII. — Opisawszy na powierzchni obrotowej o osi pionowej walec równoległy do kierunku danego, nakreślić doń płaszczyznę styczną nachyłoną do poziomu pod kątem danym ... 264

Strony.

Zadanie XVIII. — Przez punkt obrany na powierzchni obrotowej, której oś leży na linii ziemnej, nakreślić do niej płaszczyznę styczną ... 265

Zadanie XIX. — Nakreślić płaszczyznę styczną w jakimkolwiek punkcie powierzchni obrotowej, posługując się sposobem podanym w paragrafie 439 ... 265

Zadanie XX. — Mając elipsoidę spłaszczoną daną, nakreślić do niej walec obrazu mający za ślad poziomy okrąg koła ... 265

Zadanie XXI. — Mając daną kulę nieprzezroczystą promienia R, leżącą na płaszczyźnie poziomej rzutów i dotykającą zarazem płaszczyzny pionowej, a oświetloną przez punkt świecący, położony w odległości 2R od płaszczyzny poziomej rzutów i nad nią, tak, że cień rzucony na płaszczyznę poziomą rzutów spotyka oś rzutów w punkcie danym i pod kątem danym, znaleźć : 1° Cień rzucony przez kulę na płaszczyznę poziomą rzutów, 2° Położenie punktu świecącego, 3° Cień rzucony przez kulę na płaszczyznę pionową rzutów i 4° Rzuty cienia własnego kuli ... 265

Zadanie XXII. — Przygotować tak dane zadania, żeby krzywa stożkowa dana opisała obrotem swym naokoło osi powierzchnię drugiego stopnia, i nakreślić południk tej ostatniej ... 268

Zadanie XXIII. — Mając dane : elipsę $a'b'$, $abmn$ w rzutach prostym i kołowym, punkt s, s' i dwie proste obrazu, z których pierwsza cd, $c'd'$ ma za rzut poziomy przedłużenie średnicy koła $ambn$, zaś za rzut pionowy prostę równoległą do $a'b'$, a druga gf, $g'f'$ ma rzut pionowy prostopadły do $c'd'$, znaleźć : 1° płaszczyznę, przechodzącą przez prostę $f'g'$ i dotykającą powierzchni obrotowej, utworzonej całkowitym obrotem elipsy danej naokoło osi cd, $c'd'$, 2° płaszczyznę styczną wspólną do powierzchni obrotowej i do ostrokręgu, mającego za podstawę elipsę daną a za wierzchołek punkt s, s' i wreszcie 3° rzuty powierzchni obrotowej utworzonej ruchem elipsy danej ... 270

Zadanie XXIV. — Mając daną powierzchnię pierścieniową o osi pionowej i obrawszy punkt na prostopadłej do płaszczyzny pionowej rzutów a przechodzącej przez środek tej powierzchni za wierzchołek ostrokręgu, wyznaczyć rzuty krzywej dotknięcia danej powierzchni z ostrokręgiem na niej opisanym ... 271

Zadanie XXV. — Przez punkt dany nakreślić prostę podwójnie styczną do powierzchni pierścieniowej ... 273

Zadanie XXVI. — Nakreślić do powierzchni pierścieniowej proste podwójnie styczne w kierunku danym ... 276

Zadanie XXVII. — Znaleźć punkta podwójne śladu poziomego ostrokręgu lub walca, opisanego na powierzchni pierścieniowej ... 277

Zadanie XXVIII. — Znając promień jednej z obwiniętych kulistych hyperboloidy obrotowej jednopowłokowej, znaleźć jej rzuty ... 277

Zadanie XXIX. — Znając trzy kierownice prostolinijne hyperboloidy jednopowłokowej, znaleźć środek tej powierzchni ... 277

Zadanie XXX. — Przez prostę równoległą do jednej z tworzących prostolinijnych hyperboloidy obrotowej jednopowłokowej nakreślić do tej powierzchni płaszczyznę styczną ... 278

Zadanie XXXI. — Mając daną elipsoidę o trzech osiach nierównych, a której jedna z płaszczyzn głównych jest równoległą do płaszczyzny pionowej rzutów, nakreślić : 1° rzuty jednego punktu powierzchni i płaszczyznę przechodzącą przezeń, 2° rzuty krzywej dotknięcia ostrokręgu lub walca, opisanego na elipsoidzie, z elipsoidą, 3° płaszczyzny styczne równoległe do płaszczyzny danej ... 278

Zadanie XXXII. — Nakreślić rzuty dwóch hyperboloid obrotowych jednopowłokowych równych, których osie są dane tak, że te dwie hyperboloidy dotykają się z sobą w punktach leżących na równoleżnikach równych ... 279

2° PRZECIĘCIA PŁASKIE OSTROKRĘGU, WALCA I POWIERZCHNI OBROTOWYCH

Wiadomości ogólne. — Przecięcie się dwu powierzchni. — Wykreślenie stycznej. — Sposób Binet'a ... 281

Asymptoty. — Krzywe hyperboliczne. — Krzywe paraboliczne. — Punkta szczególne przecięcia dwu powierzchni. — Punkta obwodu pozornego. — Punkt najwyższy i punkt najniższy. — Twie Przypadek przecięć płaskich. — Powiezchnie ograniczające. — Uwaga ... 282

Strony.

Przecięcia płaskie walca i ostrokręgu. — Nakreślić rzuty i rzeczywistą wielkość przecięcia jakiegokolwiek ostrokręgu płaszczyzną. — Wybór powierzchni pomocniczych. — Kreślenie jakiegokolwiek punktu. — Styczna w jakimkolwiek punkcie linii wspólnego przecięcia. — Płaszczyzna ograniczająca. — Gałęzie nieskończone. — Asymptoty. — Położenie gałęzi krzywej względnie do asymptot. — Punkt najwyższy i punkt najniższy. — Punkta na obwodzie pozornym. — Punkta na prostej danej. — Styczna przez punkt zewnętrzny. — Styczna równoległa do prostej danej. — Punkta graniczne w danym kierunku. — Punkta ostateczne w kierunku poprzecznym. — Punkta zwrotu pierwszego rodzaju. — Części widzialne przecięcia. — Rzeczywista wielkość krzywej wspólnego przecięcia. — Kreślenie jednoczesne punktów krzywej i stycznych do niej przez te punkta przechodzących. — Punkta przecięcia się podstawy z rzutem przecięcia na płaszczyznę tejże podstawy. — Wierzchołki rzutów i rzuty wierzchołków 283

Nakreślić rzuty i rzeczywistą wielkość przecięcia walca płaszczyzną. — Styczna w jednym z punktów wspólnego przecięcia. — Gałęzie nieskończone przecięcia płaskiego walca 289

Zastosowanie teoryi jednokładności do znalezienia przecięć płaskich ostrokręgu i walca. — Przecięcie płaskie ostrokręgu 291

Wyznaczyć zapomocą jednokładności przecięcie hyperboliczne ostrokręgu płaszczyzną. — Wyznaczenie jednoczesne i punktu jakiegokolwiek przecięcia i jego stycznej. — Asymptoty. — Punkta na prostej danej. — Styczne przez punkt zewnętrzny. — Styczne równoległe do prostej danej. — Punkta graniczne w kierunku oznaczonym. — Wierzchołki. — Wierzchołki rzutu 291

Wyznaczyć zapomocą jednokładności przecięcie paraboliczne ostrokręgu płaszczyzną. — Oś i wierzchołki rzutu 292

Przecięcie płaskie walca 293

Rozwinięcie ostrokręgu i walca, przekształcone przecięć płaskich tych powierzchni. — Wiadomości wstępne ... 293

Twierdzenie zasadnicze. — Rozwijając powierzchnię stożkową spostrzegamy : 1° że jakakolwiek część linii, nakreślonej na tej powierzchni, ma tęż samą długość co część odpowiadająca linii przekształconej, 2° że kąt między przekształconemi dwu linij jakichkolwiek nakreślonych na powierzchni jest równy kątowi utworzonemu przez same linije 294

Wszelkiemu punktowi obranemu na przecięciu płaskiem ostrokręgu, w którym płaszczyzna tego przecięcia jest normalną do powierzchni ostrokręgu, a nie jest prostopadłą do krawędzi tej powierzchni, przechodzącej przez ten punkt, odpowiada, na rozwinięciu ostrokręgu, punkt przecięcia przekształconej przecięcia 294

Rozwinięcie walca 296

Znaleźć rzuty, rzeczywistą wielkość i przekształconę krzywej wspólnego przecięcia się walca prostego obrotowego z płaszczyzną jakąkolwiek. — Rzuty przecięcia. — Rzeczywista wielkość przecięcia. — Styczna do krzywej wspólnego przecięcia w rzeczywistej wielkości. — Wierzchołki. — Ogniska. — Kierownice. — Rozwinięcie walca. — Znalezienie jakiegokolwiek punktu przekształconej wspólnego przecięcia. — Styczna do przekształconej. — Punkt najwyższy i punkt najniższy. — Punkta przecięcia przekształconej i styczne w tych punktach. — Przekształcona jest sinusoidą 296

Nakreślić : 1° w rzutach i w rzeczywistej wielkości przecięcie proste jakiegokolwiek walca, 2° rozwinięcie walca, jakoteż przekształcone jednej z jego podstaw i krzywej przecięcia go płaszczyzną jakąkolwiek 299

Kreślenie przecięcia prostego jakiegokolwiek walca. — Wiadomości ogólne. — Rzut poziomy jakiegokolwiek punktu przecięcia. — Kreślenie stycznej do przecięcia prostego. — Wierzchołki rzutu poziomego. — Rzeczywista wielkość przecięcia prostego. — Przecięcie płaszczyzną pochyłą. — Wyznaczenie jednego z punktów, leżących na przecięciu. — Wyznaczenie stycznej. — Średnice sprzężone rzutu pionowego. — Rozwinięcie walca. — Przekształcona przecięcia prostego. — Przekształcona podstawy i przecięcia pochyłego. — Styczna do przekształconej przecięcia. — Punkta najbliższe i najbardziej oddalone przecięcia prostego. — Punkta przecięcia przekształconych i styczne w tych punktach. — Przekształcone punktów leżących na obwodach pozornych. — Punkta przysposobione 299

Rozwinięcie ostrokręgu. — Mając dany ostrokrąg obrotowy nakreślić : 1° rzuty i rzeczywistą wielkość jednego z jego przecięć eliptycznych, 2° rozwinięcie powierzchni, 3° przekształcone przecięcia. — Rodzaj przecięcia. — Wykreślenie jednego z punktów przecięcia. — Rzut poziomy stycznej przecięcia. — Punkta leżące na płaszczyźnie profilu, przechodzącej przez oś. — Wierzchołki rzutu poziomego i rzut poziomy wierzchoł-

Strony.

ków. — Ogniska i kierownice. — Ogniska i kierownice przecięcia. — Rzeczywista wielkość przecięcia. — Rozwinięcie ostrokręgu. — Wykreślenie jakiegokolwiek punktu przekształconej i jej stycznej. — Punkt najdalszy i punkt najbliższy wierzchołka ostrokręgu. — Punkta przecięcia przekształconej. — Rozbiór... 303
Przekształcona przecięcia hyperbolicznego ostrokręgu prostego obrotowego. — Wierzchołki. — Ogniska. — Kierownice. — Asymptoty przecięcia. — Rzeczywista wielkość przecięcia. — Rozwinięcie ostrokręgu przekształcona przecięcia hyperbolicznego. — Punkt przecięcia. — Asymptoty przekształconej..... 306
Przekształcona przecięcia parabolicznego ostrokręgu prostego obrotowego..... 307
Nakreślić rozwinięcie jakiegokolwiek ostrokręgu..... 307
Przecięcia płaskie powierzchni obrotowych. — Nakreślić rzuty i rzeczywistą wielkość przecięcia płaszczyzną powierzchni obrotowej. — Wyznaczenie jednego z punktów przecięcia. — Użycie równoleżników. — Użycie południków. — Kreślenie stycznej. — Punkt najwyższy i punkt najniższy. — Płaszczyzny ograniczające. — Punkta podwójne..... 308
Jeżeli jakakolwiek płaszczyzna dotyka i przecina zarazem powierzchnię obrotową, to punkt dotknięcia jest punktem podwójnym. — Punkt podwójny na osi obrotu. — Gałęzie nieskończone i asymptoty. — Punkta obwodu pozornego. — Punkta graniczne w kierunku wyznaczonym. — Rzeczywista wielkość... 310
Znaleźć rzuty i rzeczywistą wielkość wspólnego przecięcia się powierzchni obrotowej drugiego stopnia z płaszczyzną. — Punkta obwodu pozornego. — Punkta graniczne w kierunku poprzecznym. — Punkt najwyższy i punkt najniższy. — Wierzchołki..... 316
Przecięcia płaskie hyperboloidy obrotowej jednopowłokowej. — Przecięcie eliptyczne. — Przecięcie hyperboliczne. — Przecięcie paraboliczne..... 318
Przecięcie prostej z powierzchnią..... 324
Nakreślić przecięcie się prostej z kulą..... 324
Nakreślić przecięcie się elipsoidy obrotowej z prostą..... 324
Znaleźć punkta wspólne danej prostej i paraboloidzie..... 325

ROZDZIAŁ VI

PRZECIĘCIE SIĘ DWU POWIERZCHNI KRZYWYCH

Znaleźć przecięcie się dwu ostrokręgów, których podstawy leżą na jednej płaszczyźnie..... 32
Znaleźć przecięcie się dwu ostrokręgów, których podstawy leżą na dwu płaszczyznach różnych..... 331
Znaleźć przecięcie się ostrokręgu z walcem..... 332
Znaleźć przecięcie się dwu walców..... 333
Punkta podwójne przecięcia się powierzchni drugiego rzędu. — Punkta podwójne w przestrzeni..... 334
Jeżeli jakakolwiek krzywa stopnia m ma punkt podwójny, to ostrokrąg mający ten punkt za wierzchołek i przechodzący przez tę krzywę jest stopnia $m-2$..... 334
Wniosek. — Jeżeli krzywa wspólnego przecięcia dwu powierzchni drugiego stopnia ma punkt podwójny, to ostrokrąg, mający ten punkt za wierzchołek i obejmujący tę krzywę, jest także drugiego stopnia..... 334
Sześć jest kierunków w których płaszczyzna przecina dwie powierzchnie drugiego stopnia podług krzywych podobnych (homotetycznych)..... 335
Sześć kierunków, w których płaszczyzna przecina dwie powierzchnie drugiego stopnia podług krzywych podobnych, są wspólne nie tylko tym powierzchniom, lecz i wszystkim innym tegoż samego stopnia, przechodzącym przez ich wspólne przecięcie..... 335
Wniosek. — Wszelka płaszczyzna cykliczna wspólna dwu powierzchniom drugiego stopnia jest także wspólną powierzchniom tegoż stopnia, przechodzącym przez przecięcie się dwu pierwszych..... 335
Uproszczenie sposobu kreślenia stycznych w punktach podwójnych..... 335
Kreślenie stycznych w punktach podwójnych przecięcia się dwu powierzchni stożkowych lub walcowych. — Kreślenie stycznych. — Twierdzenie MEUSNIER'a..... 336
Zastosowanie. — Mając dane dwa walce spoczywające na płaszczyźnie poziomej rzutów i styczne do siebie,

Strony.

a których kierownicami są dwa koła leżące na płaszczyznie pionowej rzutów, nakreślić do nich styczne w punkcie podwójnym wspólnego przecięcia się tych powierzchni ... 341

Styczne w punkcie podwójnym wspólnego przecięcia dwu powierzchni stożkowych tworzą z dwiema tworzącemi tych powierzchni a spotykającemi się w tymże punkcie wiązkę harmoniczną, dwie styczne zaś i dwie tworzące tworzą dwie pary promieni sprzężonych ... 341

Nakreślić styczne w punkcie podwójnym przecięcia się dwu ostrokręgów, walca i ostrokręgu i dwu walców, mających podstawę wspólną ... 341

Punkta podwójne w wierzchołku powierzchni stożkowej ... 343

Punkta podwójne w rzucie ... 343

Wyznaczenie prostej łączącej punkta podwójne w rzucie krzywej, wspólnej dwu powierzchniom drugiego stopnia ... 344

Jeżeli dwie powierzchnie są drugiego stopnia, to krzywa ich wspólnego przecięcia się ma tylko dwa punkta podwójne w rzucie na każdej z płaszczyzn spółrzędnych, a nie więcej ... 345

Nakreślić prostę punktów podwójnych w rzucie linii wspólnego przecięcia się dwu ostrokręgów, mających podstawy : 1° na jednej płaszczyznie; 2° na płaszczyznach różnych ... 345

Nakreślić prostę punktów podwójnych w rzucie linii wspólnego przecięcia się walca z ostrokręgiem ... 346

Nakreślić prostę punktów podwójnych w rzucie krzywej wspólnego przecięcia się dwu walców. — Uwaga ... 346

Twierdzenie ułatwiające kreślenie rzutów przecięcia się powierzchni drugiego stopnia. — Przecięcie się dwu powierzchni drugiego stopnia jest czwartego stopnia ... 347

Jeżeli dwie powierzchnie drugiego stopnia przecinają się z sobą podług jednej krzywej płaskiej, to przecięcie to jest uzupełnione drugą krzywą płaską ... 347

Wniosek. — Jeżeli dwie powierzchnie stożkowe drugiego stopnia są styczne podług tworzącej wspólnej, to przecięcie ich składa się z prostej podwójnej i z krzywej stożkowej ... 347

Twierdzenie III (Patrz § 475) ... 347

Wniosek I (Patrz § 476) ... 347

Wniosek II (Patrz § 477) ... 347

Wniosek III. — Jeżeli dwie powierzchnie drugiego stopnia dotykają się podług jednej linii, to ta ostatnia jest stożkową ... 347

Jeżeli dwie powierzchnie drugiego stopnia mają płaszczyznę symetryi wspólną, to rzutem przecięcia się ich na wszelką płaszczyznę równoległą do płaszczyzny symetryi jest linija stożkowa. — Uwaga ... 347

Przecięcie się dwu powierzchni podobnych drugiego stopnia jest systematem dwu stożkowych, z których jedna leży w nieskończoności ... 348

Przecięcia płaszczyzną dwu powierzchni drugiego stopnia, opisanych jedna na drugiej, są krzywemi stożkowemi podwójnie stycznemi ... 348

Wniosek. — Jeżeli płaszczyzna sieczna dotyka jednej z powierzchni opisanych w jednym z jej pępków, to przecina drugą podług stożkowej, mającej pępek za ognisko, a za odpowiednią kierownicę prostę przecięcia się płaszczyzny siecznej z płaszczyzną krzywej dotknięcia. — Uwaga ... 348

Jeżeli dwa ostrokręgi drugiego stopnia mają płaszczyznę styczną wspólną, tworzące zaś ich dotknięcia są równoległe, to walec, nakreślony w kierunku tych tworzących na krzywej przecięcia się dwu ostrokręgów, jest także drugiego rzędu. — Uwaga ... 348

Wyznaczenie gałęzi nieskończonych krzywej wspólnej dwu powierzchniom stożkowym lub walcowym. Wiadomości ogólne. — Pierwszy przypadek. — Dwie powierzchnie są ostrokręgami ... 349

Drugi przypadek. — Dwiema powierzchniami są ostrokrąg i walec ... 353

Trzeci przypadek. — Dwie powierzchnie są walcami ... 359

Przecięcie się dwu powierzchni obrotowych mających osie na jednej płaszczyznie. — Nakreślić przecięcie się dwu powierzchni obrotowych, których osie zbiegają się w jednym punkcie ... 362

Jeżeli dwie powierzchnie obrotowe drugiego stopnia mają osie na jednej płaszczyznie, to rzut linij ich wspólnego przecięcia na płaszczyznę równoległą do osi jest : 1° parabolą, jeżeli dwie osie są równoległe; 2° elipsą, jeżeli jedna z powierzchni jest elipsoidą spłaszczoną; 3° hyperbolą, we wszystkich innych przypadkach. — Uwaga ... 369

Strony.

Twierdzenie p. CATALAN. — Jeżeli przecięcia południkowe dwu powierzchni obrotowych drugiego stopnia mają w punkcie przecięcia się swych osi obrotu ognisko wspólne, to rzut linii wspólnej obu powierzchniom, na płaszczyznę tych osi, jest układem dwu prostych 369
Nakreślić przecięcie się dwu powierzchni obrotowych, których osie są równoległe 369
Przecięcie się kuli z powierzchnią obrotową drugiego stopnia 370

ĆWICZENIA NALEŻĄCE DO ROZDZIAŁÓW V I VI

Zadanie I. — Nakreślić, za pomocą jego wierzchołków, ślad pionowy ostrokręgu, mającego za podstawę koło leżące na płaszczyźnie poziomej rzutów, a wierzchołek w kącie dwuściennym 2 i na płaszczyźnie profilu przechodzącej przez środek podstawy 371
Zadanie II. — Nakreślić rzuty przecięcia hyperboloidy obrotowej o osi pionowej z płaszczyzną, przechodzącą przez jej środek i przez styczną do jej śladu poziomego, idącą przez punkt tegoż śladu najwięcej oddalony od osi rzutów 371
Twierdzenie I. — Wszelka płaszczyzna, równoległa do jednej z płaszczyzn stycznych w jednym z punktów powierzchni drugiego stopnia, przecina tę powierzchnię i ostrokrąg, mający za podstawę jedno z przecięć płaskich tej powierzchni, a wierzchołek w punkcie styczności, podług dwu krzywych podobnych 372
Zadanie III. — Mając daną elipsoidę obrotową i płaszczyznę jakąkolwiek, znaleźć, bez kreślenia przecięcia płaszczyzny z elipsoidą, ślad pionowy ostrokręgu, mającego tę linię przecięcia za kierownicę a wierzchołek w punkcie równika najbliższym płaszczyzny pionowej rzutów 372
Zadanie IV. — Nakreślić zapomocą twierdzenia I (§ 796) punkta graniczne w kierunku poprzecznym przecięcia płaskiego elipsoidy obrotowej 373
Zadanie V. — Mając dany walec obrotowy pionowy i dwa punkta, leżące na tworzącej obwodu pozornego pionowego tej powierzchni, nakreślić : 1° rzuty linii najkrótszej łączącej te dwa punkta i przecinającej wszystkie tworzące powierzchni ; 2° miejsce geometryczne śladów poziomych stycznych w rozmaitych punktach tej linii i 3° ślad poziomy ostrokręgu przechodzącego przez tę linię i mającego wierzchołek na osi walca 373
Zadanie VI. — Nakreślić ślad poziomy walca, mającego za kierownicę helisę, której wyznaczyliśmy rzuty, a za kierunek tworzących jednę ze stycznych do tej krzywej 375
Zadanie VII. — Rozwiązać powyższe zadanie nie zmieniając ani kierownicy, ani kierunku rzutu poziomego tworzących, lecz zmniejszając lub powiększając kąt, które czynią te tworzące z płaszczyzną poziomą rzutów 375
Zadanie VIII. — Przez punkt obrany na paraboloidzie hyperbolicznej nakreślić do niej płaszczyznę styczną. 375
Zadanie odwrotne. — Znaleźć punkt, w którym płaszczyzna jakakolwiek, przechodząca przez jednę z tworzących paraboloidy, dotyka tej powierzchni 376
Zadanie IX. — Zachowując dane poprzedzającej figury, wyznaczyć : 1° płaszczyznę styczną do paraboloidy, a równoległą do płaszczyzny danej ; 2° drugą płaszczyznę kierowniczą, wierzchołek, oś i płaszczyzny główne tej powierzchni ; 3° krzywę, wzdłuż której dotyka ona ostrokręgu opisanego ; 4° obwody pozorne ; 5° przecięcie jej jakąkolwiek płaszczyzną 376
Twierdzenie II. — Dowieść, że krzywa dotknięcia ostrokręgu, opisanego na paraboloidzie hyperbolicznej, jest hyperbolą, a krzywa dotknięcia walca opisanego, parabolą 377
Zadanie X. — W dany czworościan foremny, którego jedna krawędź leży na płaszczyźnie poziomej rzutów, a jego ściany tworzą z tąż płaszczyzną kąty równe, wpisawszy ostrokrąg, mający wierzchołek w punkcie *s*, i ośmiościan foremny, którego wierzchołki leżą w środku krawędzi czworościanu, znaleźć tylko rzut poziomy części ostrokręgu pełnego zawartej pomiędzy czworościanem i ośmiościanem 377
Zadanie XI. — Mając dany sześcian o przekątni pionowej, przedstawić w obu rzutach części jego powierzchni, leżącej zewnątrz kuli stycznej do jego boków i zewnątrz walca obrotowego mającego za oś jednę z krawędzi sześcianu, a za promień połowę długości tejże krawędzi 379
Twierdzenie III. — Wszelka płaszczyzna, podwójnie styczna do powierzchni pierścieniowej, przecina ją podług dwu kół, równych kołu przechodzącemu przez środki przecięć południkowych ; środki tych kół

Strony

leżą na prostopadłej do osi, przechodzącej przez środek powierzchni i po obu jego stronach w odległości równej promieniowi koła tworzącego, i wreszcie rzuty ich na płaszczyznę prostopadłą do osi mają ognisko wspólne w spodku tejże osi 380
Twierdzenie VI. — Przecięcie powierzchni pierścieniowej kulą podwójnie styczną jest układem czterech kół, z których dwa leżą w nieskończoności, a dwa pozostałe w odległości skończonej 381
Zadanie XII. — Przez jakikolwiek punkt powierzchni pierścieniowej nakreślić cztery koła 382
Uwaga. — Krzywe dotknięcia powierzchni pierścieniowej z jej kulami podwójnie stycznemi, niczem się nie różnią od przecięć tej powierzchni jej płaszczyznami podwójnie stycznemi 382
Zadanie XIII. — Nakreślić przecięcie powierzchni pierścieniowej o osi pionowej płaszczyzną podwójnie styczną, równoległą do osi rzutów, i na ostatecznym rysunku przedstawić część bryły, zawartą w powierzchni pierścieniowej, a leżącą za płaszczyzną podwójnie styczną 383
Zadanie XIV. — Znaleźć punkta spotkania się powierzchni pierścieniowej z prostą przechodzącą przez jej środek 383
Zadanie XV. — Nakreślić obwody pozorne powierzchni utworzonej zupełnym obrotem koła naokoło osi pionowej, przechodzącej przez jedno z ognisk jej rzutu poziomego 383
Zadanie XVI. — Mając dane : 1° półkulę styczną do płaszczyzny pionowej rzutów, spoczywającą na swej podstawie, leżącej na płaszczyźnie poziomej rzutów, a której promień jest równy $0^m,100$; 2° powierzchnię pierścieniową o osi pionowej, oddaloną o $0^m,170$ od płaszczyzny pionowej rzutów i leżącą w płaszczyźnie profilu, przechodzącej przez środek kuli, której półkula jest daną (środek koła południkowego tej powierzchni leży o $0^m,070$ od jej osi, od płaszczyzny poziomej rzutów o $0^m,054$, zaś jego promień jest równy $0^m,049$); nakreślić półkulę, uważaną za pełną i istniejącą jako sama, odrzucając część tej bryły, zawartą w powierzchni pierścieniowej 383
Zadanie XVII. — Mając powierzchnię pierścieniową, której promień koła tworzącego jest równy promieniowi koła szyjnego w położeniu zwyczajnem, wyznaczyć : 1° przecięcie tej powierzchni z tą płaszczyzną styczną, która jej dotyka w punkcie koła szyjnego najwięcej oddalonym od płaszczyzny pionowej rzutów ; 2° obwody pozorne powierzchni, utworzonej obrotem tego przecięcia naokoło jego osi pionowej ; 3° przecięcie tej ostatniej powierzchni płaszczyznami prostopadłemi do płaszczyzny pionowej, dotykającej ją w punkcie podwójnym jej południków 385
Twierdzenie V. — Przecięcie powierzchni pierścieniowej płaszczyznami równoległemi do osi i odległemi od niej na długość równą promieniowi koła południkowego są Krzywemi Cassini'ego lub Lemniskatami 385
Twierdzenie VI. — Jeżeli przetniemy powierzchnię pierścieniową płaszczyzną równoległą do jej osi, to płaszczyzna podwójnie styczna do powierzchni, utworzonej obrotem zupełnym tego przecięcia naokoło jego osi równoległej do osi powierzchni pierścieniowej, przecina tę powierzchnię podług dwu kół ... 386
Zadanie XVIII. — Przedstawić rzuty części powierzchni pierścieniowej, zawartej wewnątrz ostrosłupa sześciościennego, opisanego na ostrokręgu dotykającym powierzchni pierścieniowej podług dwu równoleżników 387
Twierdzenie VII. — Wszelka płaszczyzna podwójnie styczna do powierzchni, utworzonej obrotem stożkowej naokoło prostej leżącej na jej płaszczyźnie, przecina tę powierzchnię podług dwu stożkowych, które w rzucie na płaszczyznę prostopadłą do osi mają jedno ognisko wspólne u spodka tej osi 387
Zadanie XIX. — Znaleźć przecięcie się dwu ostrokręgów, mających za podstawę wspólną koło leżące na płaszczyźnie poziomej rzutów, a których rzuty wierzchołków przypadają na końcu średnicy tego koła, równoległej do osi rzutów 387
Zadanie XX. — Wyznaczyć przecięcie się ostrokręgu o podstawie kołowej z walcem kołowym pionowym, wspartego na płaszczyźnie poziomej rzutów w ten sposób, że ich podstawy przecinają się z sobą na średnicy równoległej do osi rzutów, a rzut poziomy wierzchołka ostrokręgu zchodzi się z punktem dotknięcia podstaw 387
Zadanie XXI. — Nakreślić przecięcie się kuli z ostrokręgiem, którego wierzchołek leży w jej środku i rozwinąć następnie powierzchnię ostrokręgu 387
Zadanie XXII. — Nakreślić przecięcie się elipsoidy spłaszczonej o osi pionowej z walcem, którego oś, równo-

Strony.

legła do linii ziemnej, przechodzi przez środek elipsoidy, i przedstawić na figurze część walca wyciętą przez elipsoidę..... 389

Zadanie XXIII. — Przedstawić bryłę utworzoną przez część hyperboloidy obrotowej, leżącą zewnątrz ostrokręgu a zawartą pomiędzy dwiema płaszczyznami poziomemi równooddalonemi od koła szyjnego, z których jedna jest płaszczyzną poziomą rzutów; hyperboloida jest wyznaczoną przez jej oś uważaną za pionową, przez jej ślad poziomy, przez rzut poziomy jej koła szyjnego i przez kąt jej tworzących z płaszczyzną poziomą rzutów równy 45°, a ostrokrąg przez jego wierzchołek leżący na płaszczyźnie poziomej rzutów i przez jego tworzące równoległe do tworzących hyperboloidy..... 390

Zadanie XXIV. — Mając dane : 1° walec, którego śladem poziomym i obwodem pozornym na płaszczyźnie pionowej rzutów jest koło i proste obrazu; 2° ostrokrąg, którego śladem poziomym jest koło, dotykające pierwszego w punkcie *s*, a którego wierzchołek leży na tworzącej walca, znaleźć : 1° rzuty wspólnego przecięcia walca z ostrokręgiem i 2° przedstawić walec uważany za pełny i istniejący sam, odrzucając części tej bryły zawarte w ostrokręgu..... 391

Zadanie XXV. — Nakreślić rzuty wspólnego przecięcia się powierzchni pierścieniowej z ostrokręgiem obrotowym w następujących warunkach : oś powierzchni pierścieniowej jest pionową i oddaloną od płaszczyzny pionowej na 0^m,130, promień koła południkowego równa się 0^m,055 i jest ono styczne do osi powierzchni pierścieniowej i do płaszczyzny poziomej rzutów, ostrokrąg zaś dotyka płaszczyzny poziomej rzutów wzdłuż tworzącej równoległej do osi rzutów i spotykającej oś powierzchni pierścieniowej, wierzchołek jego leży w odległości 0^m,055 od osi powierzchni pierścieniowej i wreszcie kąt jego w wierzchołku jest równy 45 stopniom. Rysunek winien przedstawić ostrokrąg uważany za pełny i istniejący sam, odrzucając część jego zawartą w powierzchni pierścieniowej..... 393

Zadanie XXVI. — Nakreśliwszy przez punkt dany, oddalony na 100 milimetrów od każdej z płaszczyzn rzutów, prostę równoległą do osi rzutów i prostę pionową, z których pierwsza przedstawia oś powierzchni pierścieniowej, mającej koło południkowe styczne do tej osi i o promieniu równym 45 milimetrom, a druga przedstawia oś drugiej powierzchni pierścieniowej współśrodkowej z pierwszą i mającej koło południkowe promienia równego promieniowi koła szyjnego, to jest 30 milimetrom, wyznaczyć rzuty wspólnego przecięcia tych powierzchni i przedstawić rysunkiem bryłę utworzoną przez obie powierzchnie pierścieniowe..... 395

Zadanie XXVII. — Znaleźć rzuty krzywej wspólnego przecięcia się hyperboloidy obrotowej z ostrokręgiem w następujących warunkach : 1° kiedy oś hyperboloidy jest pionową, oddaloną od płaszczyzny pionowej rzutów o 0^m,100, i leży w środku rysunku, koło szyjne leży na 0^m,080 nad płaszczyzną poziomą rzutów i ma promień równy 0^m,030, i wreszcie kiedy tworzące prostolinijne powierzchni tworzą z poziomem kąt równy 45 stopniom; 2° kiedy wierzchołek ostrokręgu leży na płaszczyźnie profilu, przechodzącej przez oś na 0^m,050 przed tą osią i na 0^m,040 nad kołem szyjnem, i kiedy ślad poziomy ostrokręgu jest kołem, opisanem z punktu *z* jako środka, promieniem równym 0^m,070. — Nakreślić na figurze hyperboloidę, uważaną za pełną i ograniczoną z jednej strony płaszczyzną poziomą, mającą za ślad Q′ o wzniesieniu 0^m,190, a z drugiej strony płaszczyzną poziomą rzutów, odrzucając część jej zawartą w ostrokręgu..... 396

Zadanie XXVIII. — Mając daną kulę styczną do obu płaszczyzn rzutów i w płaszczyźnie koła obrazu tej kuli a w odległości, od środka tego koła, równej połowie jego promienia nakreśliwszy pionowę, nadto na części tej pionowej, zawartej pomiędzy górnym punktem przecięcia się jej z kulą a płaszczyzną poziomą rzutów, nakreśliwszy trójkąt równoboczny, znaleźć bryłę utworzoną przez część pełną kuli, leżącą zewnątrz podwójnego ostrokręgu, utworzonego obrotem trójkąta równobocznego naokoło jego boku pionowego..... 397

Zadanie XXIX. — Mając hyperboloidę obrotową, wyznaczoną przez jej oś pionową i przez jednę z jej tworzących głównych, nakreślić rzuty jednej z części odciętych w bryle, zawartej pomiędzy hyperboloidą a jej ostrokręgiem asymptotycznym, przez powierzchnię utworzoną przez normalne kreślone do hyperboloidy danej, z rozmaitych punktów tworzącej; nadto bryła ta będzie ograniczoną płaszczyzną poziomą rzutów i płaszczyzną poziomą mającą za ślad Q′..... 399

Zadanie XXX. — Nakreślić : 1° rzuty wspólnego przecięcia półkuli i ścian sześcianu z hyperboloidą obrotową jednopowłokową; 2° przedstawić sześcian uważany za pełny, po odjęciu części tej bryły zawartej

Stron

w półkuli i w hyperboloidzie. Sześcian ($abcd$, $a'b'd'e'$), którego bok ma $0^m,200$ długości, a ściany, spodnia i tylna leżą odpowiednio na dwu płaszczyznach rzutów, obejmuje w zupełności półkulę (h, h'), której podstawą jest koło wpisane w ścianie przedniej sześcianu. Hyperboloida ma oś pionową w odległości równej $0^m,135$ od płaszczyzny pionowej rzutów i w jednakowej odległości od ścian profilu sześcianu, wzniesienie środka tej powierzchni jest równe $0^m,132$ a promienie jej koła szyjnego i jej śladu poziomego są odpowiednio równe $0^m,035$ i $0^m,100$ ... 401

Zadanie XXXI. — Nakreślić rzuty wspólnego przecięcia się dwu hyperboloid obrotowych, mających jednę tworzącą wspólną pionową, a za osie odpowiednio dwie proste obrazu, nie leżące na jednej płaszczyznie i nachylone do płaszczyzny poziomej rzutów pod kątem 45 stopni. — Rysunek winien przedstawić części powierzchni hyperboloid zawarte : 1° pomiędzy dwiema płaszczyznami rzutów; 2° pomiędzy płaszczyzną poziomą mającą za ślad Q' i 3° pomiędzy płaszczyzną dotykającą jednej hyperboloidy w punkcie koła szyjnego najwięcej oddalonym od płaszczyzny pionowej rzutów ... 402

ROZDZIAŁ VII

POZIOMOWANIE TOPOGRAFICZNE

Wiadomości wstępne ... 407

Przedstawienie punktu ... 407

Przedstawienie prostej. — Twierdzenie. — Iloczyn nachylenia jakiejkolwiek prostej przez jej przedział jest równy jedności ... 407

Zestopniować prostę, której znamiona dwu punktów są dane ... 408

Na prostej zestopniowanej ustawić punkt, którego znamię jest dane, i odwrotnie : znaleźć znamię punktu leżącego na prostej zestopniowanej ... 409

Znaleźć ślad poziomy prostej danej ... 409

Mając rzuty poziome i znamiona dwu punktów, znaleźć rzeczywistą wielkość ich odległości ... 409

Przez punkt dany nakreślić prostę równoległą do prostej danej ... 409

Przekonać się czy dwie proste przecinają się i znaleźć w tym przypadku wzniesienie punktu przecięcia ... 410

Przedstawienie płaszczyzny ... 411

Znając trzy punkta płaszczyzny, wyznaczyć jednę z jej linij największego spadku ... 411

Znając rzut punktu leżącego na płaszczyznie danej, znaleźć jego znamię ... 412

Przez punkt obrany na płaszczyznie, nakreślić na niej prostę mającą nachylenie dane ... 412

Przez prostę daną nakreślić płaszczyznę mającą nachylenie dane ... 413

Znaleźć nachylenie dwu płaszczyzn, danych przez linije największego spadku. — Przypadek szczególny. — Przypadek więcej szczególny ... 414

Znaleźć przecięcie się prostej z płaszczyzną ... 415

Warunki prostopadłości prostych i płaszczyzn ... 416

Przez punkt dany nakreślić płaszczyznę prostopadłą do prostej ... 416

Przez punkt dany nakreślić prostę prostopadłą do płaszczyzny ... 417

Zastosowanie. — Znaleźć : 1° odległość punktu od płaszczyzny; 2° odległość punktu od prostej; 3° najkrótszą odległość dwu prostych ... 417

Nakreślić kąt dwu prostych ... 417

Znaleźć kąt dwu płaszczyzn ... 418

Przedstawienie powierzchni ... 418

Znaleźć przecięcie powierzchni topograficznej płaszczyzną ... 419

Znaleźć przecięcie się dwu powierzchni topograficznych ... 419

Znając rzut jednego z punktów powierzchni topograficznej znaleźć jego znamię ... 419

Krzywe dodatkowe ... 420

Przez punkt dany na powierzchni topograficznej nakreślić do niej płaszczyznę styczną ... 420

Nakreślić na powierzchni topograficznej liniję, której nachylenie jest dane, znając jeden z jej punktów przejścia. 420

KONIEC SPISU RZECZY

Nakładem właściciela Biblioteki Kórnickiej a przewodniczącego w Towarzystwach Naukowej Pomocy i Nauk Ścisłych w Paryżu, wyszły następujące dzieła matematyczne :

1. **Norzewski Roch.** *Nouvelle théorie des proportions et progressions harmoniques avec ses applications à la géométrie.* Paris, 1852, in-8°, 60 pages de texte et deux planches lithographiées (wyczerpane).

2. **G.-H. Niewęgłowski,** b. profesor analizy w Szkole Wyższéj Polskiéj Montparnasse, examinator matematyki w liceum Świętego Ludwika w Paryżu : *Arytmetyka z teoryą przybliżeń liczebnych* i t. d. (Kurs zupełny, zawierający działania skrócone, błędy samoistne i względne ; noty dotyczące własności liczb, wiele rozwiązanych zagadnień, ćwiczenia). Paryż, 1866, in-8°, stron 352. Cena 1 tal. 10 sgr.

3. *Geometrya. Część I Geometrya płaska* (wydanie drugie), w Paryżu, 1868 roku, stron 436 in-8°, figury w tekscie. Cena 1 tal. 10 sgr.

4. *Geometrya. Część I i II*, kurs zupełny, drugie wydanie zupełnie przerobione, zawierające całą geometryę starożytnych i metody geometryi nowoczesnej (pierwsze wydanie z 1852 roku). Paryż, 1868, in-8°, stron VIII i 778. Cena 2 tal. 20 sgr.

5. *Trygonometrya prostolinijna i sferyczna z teoryą ilości urojonych i z notami.* Paryż, 1870 roku, in-8° stron XV i 407. Cena 1 tal. 15 sgr.

6. *Zasady rachunku różniczkowego i całkowego z zastosowaniami* wyłożył W. Folkierski, inżynier cywilny, b. uczeń szkoły politechnicznej w Karlsruhe, licencyat nauk matematycznych P. F, Sorbony, profesor Mechaniki w szkole Wyższej przygotowawczej w Paryżu, tom I, zawierający *Rachunek różniczkowy* oraz dodatek Władysława Trzaski o *Wyznacznikach*. Paryż, 1870, in-8°. stron XLIII i 1087, figur w tekscie 136. Cena 3 tal. 10 sgr.

7. *Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu*, tom I. Główne artykuły przez pp. Franke, Gosiewskiego, Sągayłę, Trzaskę, Żmurkę. Paryż, 1871, in-4°, stron 186, figur 5. Cena 2 talary.

8. *Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu*, tom II. Artykuły pp. Gosiewskiego, Kucharzewskiego, Sągayły, Trzaski i Żalińskiego. Paryż, 1872, in-4°, stron 245, figur 8. Cena 2 talary. (Obydwa tomy razem oprawne 3 tal. 22 sgr.)

9. *Wykład Hydrauliki wraz z teoryą machin wodnych*, poprzedzony wiadomościami wstępnemi z Hydrostatyki i Hydrodynamiki, przez pp. Feliksa Kucharzewskiego i Władysława Klugera (inżynierów dyplomowanych szkoły Dróg i Mostów w Paryżu). Paryż, 1873, in-8°, stron LVI i 1018. Figur w tekscie 110, oprawa angielska. Cena 20 franków.

10. *Zasady rachunku różniczkowego i całkowego*, przez Władysława Folkierskiego, stałego Sekretarza i Wice-prezesa Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu, tom II *Rachunek całkowy*. Część pierwsza : *całkowanie różniczek* i t. d. Paryż, 1873, in-4°, stron XVI i 752, figur 76, oprawa angielska. Cena 20 franków.

11. *Wykład Mechaniki cząsteczkowej (molekularnej)*, przez Władysława Gosiewskiego, prof. Fizyki matematycznej. Tomu 1go części różniczkowéj zeszyt pierwszy. Paryż, 1873, in-8°, stron 176. Cena fr. 4.

12. *Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu*, tom III, zawierający wypracowania pp. W. Folkierskiego, Klugera, Kucharzewskiego, Dolińskiego, Gosiewskiego i Martynowskiego. Paryż, 1873, stron VIII i 354, figur 96. Cena fr. 12.

13. *Mechanika rozumowa*, przez G.-H. Niewęgłowskiego, dwa tomy. Tom I, *Statyka i Dynamika punktu*. Paryż, in-8°, stron 544, z figurami; cena fr. 10.

14. *Wykład zupełny Algebry* przez Adolfa Sągayłę, w czterech tomach. Tom pierwszy : *Początki Algebry*. Paryż, 1873, in-8° stron 632, z figurami. Cena 5 fr. 50 cent.

15. *Bibliografia pismiennictwa polskiego z działu Matematyki i Fizyki oraz ich zastosowań*, przez D-ra Teofila Żebrawskiego, członka Akademii Krakowskiej. Kraków, 1873, in-8° stron 617, z 4 tablicami. Cena 3 talary.

16. *Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych*, tom IV, zawierający wypracowania pp. A. Martynowskiego, K. Brandta, J.-N. Frankego, W. Klugera, W. Puchewicza, S. Baranowskiego i Cayley'a (tłomaczenie z angielskiego). Paryż, 1874, in-4°, czterdzieści dwa arkusze druku, figur w tekscie 100. Cena 12 franków.

17. *Wykład zupełny Algebry* przez Adolfa Sągayłę w czterech tomach. Tom II : *Teorya wyznaczników i ich przedniejsze zastosowania*. Paryż, 1874, in-8°, stron 400. Cena 5 fr. 50 cent.

18. *Pamiętnik Towarzystwa Nauk Scisłych*, tom V, zawierający prace pp. K. Maszkowskiego, Wł. Gosiewskiego, Ł. Wojciechowskiego, J. Rostafińskiego i S. Baranowskiego. Paryż, 1874, in-4°, czterdzieści cztery arkusze druku, figur w tekscie 24, tablic 20. Cena fr. 16.

19. *Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu*, tom VI, zawierający prace pp. J. Rostafińskiego A. Martynowskiego, S. Elzanowskiego, W. Zajączkowskiego i M. Girdwoynia. Paryż, 1875, in-4, czterdzieści cztery arkusze druku, figur w tekscie 10, tablic litografowanych 12, stalorytów 8, Cena franków 20.

20. **G. H. Niewęgłowski.** *Mechanika Rozumowa*, tom II, *Dynamika układów materyalnych*, *Hydrostatyka i Hydrodynamika*. Paryż, 1876, in-8°, stron 885, z figurami w tekscie. Cena 15 fr.

21. *Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu*, tom VII, zawierający prace pp. Wł. Gosiewskiego, K. Brandta, K. Hertza i S. Dicksteina, A. Sękowskiego, M.-A. Baranieckiego, B. Rejchmana, M-A. Baranieckiego i A. Sągayły. Paryż, 1875, in-4° czterdzieści arkuszy druku, figur w tekscie (drzeworytów) 56, miedziorytów typograficznych (sur cuivre en relief) 2; tablic : miedzioryt 1, stalorytów 4, fotodruk 1. Cena franków 20.

22. *Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryzu*, tom VIII zawierający prace pp. M.-A. Baranieckiego, Wł. Gosiewskiego, M. Hulewicza, Z. Laskowskiego, J. Rostafińskiego, A. Sągayły, A. Transon'a (tłomaczenie z francuzkiego), M.-A. Baranieckiego. In-4°, Paryż, 1876, trzydzieści arkuszy druku, figur w tekscie 18, tablica jedna litografowana. Cena franków 20.

23. **Wł. Kluger :** *Wykład wytrzymałości materyałów*. Paryż, 1871, in-8°, stron 595, z figurami w tekscie. Cena 15 fr.

24. *Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu*, tom IX, zawierający prace pp. M. Girdwoynia, M. Szystowskiego, Wł. Gosiewskiego, Ł. Wojciechowskiego, S. Diksteina i Gosiewskiego, K. Brandta i J. Śniechowskiego. Paryż, 1877, in-4°, pięćdziesiąt arkuszy druku, drzeworytów 81, tablic litografowanych 11, miedziorytów 2. Cena 20 franków.

25. *Wykład nauki o równaniach różniczkowych* przez Wł. Zajączkowskiego, doktora filozofii, profesora Matematyki w Akademii Technicznej Lwowskiej, in-8°, stron xiv i 580. Cena franków 25.

26. *Zasady geometryi analitycznej* przez A. Sągayłę, tom I, in-4°. Paryż, 1877, stron LIV i 699 z figurami w tekscie. Cena 25 franków.

27. *Pamiętnik Towarzystwu Nauk Ścisłych w Paryżu*, tom X, zawierający prace pp. J. Sochockiego, E. Habicha, M. A. Baranieckiego, Wł. Gosiewskiego, M. A. Baranieckiego, T. Chudzińskiego, K. Brandta, Wł. Trzaski, M. Szystowskiego i A. Martynowskiego, Paryż, 1878, in-4° czterdzieści arkuszy druku, drzeworytów 75, tablic litografowanych 9. Cena franków 20.

28. G.-H. Niewęgłowski, *Algebra*, tom I, część 1sza, zawierająca algebrę elementarną. Paryż 1879, in-8°, stron 893 z figurami w tekscie. Cena 12 franków.

29. *Teorya Wyznaczników*, kurs uniwersytecki, wyłożył Dr. M. A. Baraniecki, privat-docent uniwersytetu w Warszawie. Paryż, 1879, stron xxii i 600, z drzeworytami w tekscie, in-8°. Cena 15 franków.

30. *Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu*, tom XI, zawierający prace pp. K. Hertza, E. Kramsztyka, M. Hulewicza, W. Żmurki, J. Natansona i Wł. Gosiewskiego, Paryż, 1879, in-4° czterdzieści siedem arkuszy druku, drzeworytów 71, miedziorytów 4. Cena 20 franków.

31. *Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu*, tom XII, zawierający prace pp. M. Szystowskiego, S. Rychlickiego, W. Gosiewskiego, W. Kretkowskiego, W. Urbańskiego, M. Ivon Villarceau (tłomaczenie z francuzkiego), M.-A. Baranieckiego, T. Chudzińskiego, Edwarda i Władysława Natansonów i M. Szystowskiego. Paryż, 1882, in-4°, trzydzieści siedm arkuszy druku, drzeworytów w tekscie 160, tablic litografowanych 13. Cena 20 fr.

32. E. Sągayło. *Geometrya Wykreślna z zastosowaniami*, po polsku i po francuzku, tom I, in-4°. Paryż, 1882.

PARYŻ. — DRUKARNIA MOTTEROZ, ULICA MIGNON 2.

WYŻSZA SZKOŁA PEDAGOGICZNA w KIELCACH
BIBLIOTEKA
097222

Biblioteka WSP Kielce
0052957

Niżej wymienione księgarnie zgłosiły się z obietnicą sprzedawania [illegible]
kich nakładów Bibl[illegible]i Kórnickiej i odbierają je wprost od Z[illegible]
czeniu każdego ton[illegible]

[illegible]SZAWIE	PP. Gebethner i Wolff.
»	» Adolf Kowalski.
»	» J. J. Okoński.
»	» Maurycy Orgelbrand.
»	» G. Sennewald.
»	» Unger i Banarski.
w KRAKOWIE	» D. E. Friedlein (Rynek, 11).
»	» Stanisław Krzyżanowski.
we LWOWIE	» A. D. Bartoszewicz (Księgarnia Polska, ulica Kopernika, *l*, 12).
»	» Gubrynowicz i Schmidt.
»	» J. Milikowski.
»	» F. H. Rychter.
»	» Karol Wild.
w POZNANIU	» Mieczysław Leitgeber i Spółka.
»	» J. K. Żupański.
w PETERSBURGU I MOSKWIE	» B. M. Wolff.
w PARYŻU	» Księgarnia Luksemburska (25, rue Monsieur le Prince).

Z zamówieniami zgłaszać się należy wprost do Zarządu *Biblioteki Kórnickiej*, pod adresem : Dr Celichowski, *w Kórniku* (W. Ks. Poznańskie).

Motteroz, Adm.-Direct des Imprimeries réunies, A, rue Mignon, 2, Paris.